

TD

Fonctions dérivables

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ☐☐☐

Donner les limites suivantes :

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\exp(\cos x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 2 ☒☐☐

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Dériver les fonctions suivantes sur leur domaine de dérivabilité que l'on précisera

$$f : x \mapsto \ln \left(\frac{a + b \tan x}{a - b \tan x} \right), \quad g : x \mapsto \ln(\ln(\ln x)),$$

$$h : x \mapsto \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax}, \quad i : x \mapsto \frac{\sin x}{(\cos x + 2)^4}.$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 3 ☒☐☐

Montrer que l'équation $x^5 = 5x - 1$, définie sur $\mathbb{R}$, a au plus 3 solutions réelles, sans faire d'étude de fonction.

► Indication

► Correction

EXERCICE 4 ☒☐☐

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f_\lambda : x \mapsto \frac{x + \lambda}{x^2 + 1}$.

Montrer que toutes les tangentes des ces fonctions en 0 sont parallèles et que toutes les tangentes en 1 sont concourantes.

► Indication

► Correction

EXERCICE 5 ☒☐☐

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes

$$\textcircled{1} x \mapsto |x^2 - 9|$$

$$\textcircled{2} x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

$$\textcircled{4} x \mapsto \begin{cases} (x-1) & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} x \mapsto |x| \sin x$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 6 ☒☐☐

Soit f dérivable en a . Calculer la limite de $\frac{af(x) - xf(a)}{x - a}$ quand $x \rightarrow a$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 7 ☒☐☐

Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ☒☐☐

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $f_n : x \mapsto \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

est de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

► Indication

► Correction

EXERCICE 9 ☒☒☐

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

Montrer que la dérivée de f s'annule.

► Indication

► Correction

EXERCICE 10 ☒☒☐

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable.

$\textcircled{1}$ On suppose que f s'annule en $(n+1)$ points distincts de $[a, b]$.
Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

$\textcircled{2}$ On suppose que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$.
Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

► Indication

► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 11 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, [x^{n-1} \ln(1+x)]^{(n)} = (n-1)! \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+x)^k}$

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de la dérivée n -ième des fonctions suivantes

- | | | |
|------------------------------|--|-------------------------------------|
| ① $f : x \mapsto \sin x$, | ④ $u : x \mapsto \ln(1+x)$, | ⑦ $w : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, |
| ② $g : x \mapsto \sin^2 x$, | ⑤ $v : x \mapsto e^x \cos x$, | ⑧ $u : x \mapsto x^2 e^x$, |
| ③ $h : x \mapsto \cos^3 x$, | ⑥ $z : x \mapsto e^{\sqrt{3}x} \sin x$, | ⑨ $v : x \mapsto x^2(1+x)^n$. |

On pourra faire les preuves par récurrence. ► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

Soient a et b deux réels, n un entier non nul et $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f^{(n)}$ et en déduire

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □

Soit $f : x \mapsto \arctan x$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin(nf(x) + n\pi/2)$.

En déduire les racines de $f^{(n)}$ pour $n \geq 1$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ □

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})) = 0$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n} \right)^{n^2}$, si elle existe. ► Indication ► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 17 ■ (A) ■

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $x \in]0, 1[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable.

- ① Montrer que $|f|^2$ est dérivable et calculer sa dérivée.
- ② Donner un exemple montrant qu'en général, la fonction $|f|$ n'est pas dérivable.
- ③ Montrer que si $f(a) \neq 0$, alors la fonction $|f|$ est dérivable en a .

► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x} \text{ existe et soit finie égale à } \ell \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$ en fonction de ℓ . ► Indication

► Correction

EXERCICE 20 ■ □ □

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$.

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ □

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur I , qui s'annule en $a_1 < \dots < a_n$, avec $n \geq 1$. Démontrer que pour tout $x \in I$, il existe $\xi \in I$ tel que

$$f(x) = \frac{(x-a_1) \cdots (x-a_n)}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■ ■ ■ □

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et périodique.

Montrer que f est lipschitzienne. ► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ ■ ▣

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = g(x^2)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ ■ ▣ Théorème de Darboux

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I d'intérieur non vide.

- ① Soit $a < b$ deux éléments de I tels que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.
Démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.

- ② Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

► Indication ► Correction

EXERCICE 25 ■ ■ ■ □

Soit f l'application définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démontrer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0, 1[$, que $f^{(n)}(x) \geq 0$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 26 ■ ■ ■ □

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

- ① Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.

- ② En déduire, qu'il existe un unique $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\alpha = f(\alpha)$.

- ③ Soit $u_0 \in]0, 1[$.

Grâce à ①, on définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que pour tout $n, |u_n - \alpha| \leq 2 \left(\frac{2e}{9}\right)^n$, puis que $(u_n) \rightarrow \alpha$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 27 ■ ■ ■ □ Règle de L'Hospital

Soit a un nombre réel strictement positif. Soient f et g deux applications dérivables sur un intervalle $]a, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ et tel que l'application g' ne s'annule pas sur $]a, +\infty[$.

- ① Démontrer que pour tout réel $b > a$,

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

- ② Démontrer que

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ■ ■ ■ □ CCP MP

- ① Énoncer le théorème des accroissements finis.

- ② Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.

On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$. Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

- ③ Prouver que l'implication

$$(f \text{ est dérivable en } x_0) \implies (f' \text{ admet une limite finie en } x_0)$$

est fausse.

Indication : on pourra considérer la fonction g définie par $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 29 ■ (A) ■

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable telle qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall a \neq b, \quad f'(c) \neq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Montrer que $f''(c) = 0$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 30 ■ ■ ■ ▣

Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et prolongeable par continuité en 0.

Supposons que $x \mapsto xf'(x)$ admette une limite en 0. Calculer cette limite. ► Indication

► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

Ce sont des taux d'accroissement.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

On utilise Rolle sur f .

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Il suffit d'écrire les équations des tangentes.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

On regarde les points qui sont critiques pour la dérivation.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

On force l'apparition du taux d'accroissement de f !

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

On regarde les points qui sont critiques pour la dérivation.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

Dérivable implique continue !

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

On utilise Rolle plusieurs fois. Choisissez bien vos intervalles.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

EXERCICES TECHNIQUES

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

Faire une récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Faites les premières dérivées pour trouver une formule.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

Utiliser Leibniz, puis prenez des valeurs particulières pour a , b et x . On pourra calculer la dérivée n -ième de deux manières différentes.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14

La récurrence n'est pas évidente. Il faut ensuite seulement résoudre une équation trigo.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15

TAF

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16

TAF

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

INDICATION POUR L'EXERCICE 17

Cela vient de Rolle !

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 19

Essayer avec une fonction facile pour trouver la limite (comme une fonction linéaire). Posez une fonction qui contient les informations de la limite, puis montrer qu'elle tend vers 0.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 20

On pensera à se ramener à un intervalle, où l'on peut utiliser Rolle. On pourra utiliser le TVI pour cela.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 21

Tout à gauche et la partie dérivée égale à λ .

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 22

On se restreint à un intervalle.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 23 _____

On pose $g : x \mapsto f(\sqrt{x})$ et on calcule sa dérivée.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 24 **Théorème de Darboux** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 25 _____

On pourra chercher une relation entre f' et f , puis une seconde relation donnant $f^{(n+1)}$ en fonction des $f^{(k)}$ avec $k \leq n$.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 26 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 27 **Règle de L'Hospital** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 28 **CCP MP** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 29 _____

On arrive à montrer que $x \mapsto f(x) - xf'(c)$ est injective.

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 30 _____

L'intuition nous dit que cette limite doit être nulle, parce que f' ne peut pas "trop exploser". Supposez l'inverse et arrivez à une contradiction. Pensez au TAF.

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1

- ① $3e^2$ ② 0 ③ -1 ④ -1

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

- ① $\tan x$ défini si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, Le logarithme défini si le quotient est positif, donc

$$(a + b \tan x)(a - b \tan x) > 0 \iff a^2 - b^2 \tan^2 x > 0 \implies |\tan x| < \frac{|a|}{|b|}.$$

Le cas $a - b \tan x \neq 0$ est inclus.

Pour tout x dans l'ensemble de définition,
$$f'(x) = \frac{2ab \sec^2 x}{a^2 - b^2 \tan^2 x}$$

- ② Pour tout $x > e$,
$$g'(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}.$$

- ③ Il faut que $(a, b) \neq (0, 0)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^{ax} \cos(bx)$.

- ④ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$i'(x) = \frac{\cos x (\cos x + 2) + 4 \sin^2 x}{(\cos x + 2)^5}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Comme f' qui a 2 racines, alors, d'après le théorème de Rolle, f en a au plus 3.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'_\lambda(x) = \frac{1 - x^2 - 2\lambda x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Le coefficient directeur de la tangente en 0 est $f'_\lambda(x) = 1$, donc toutes les tangentes sont parallèles.

L'équation de la tangente en 1 est $y = -\frac{\lambda}{2}x + \lambda + \frac{1}{2}$. Donc pour $\lambda \neq \mu$ deux réels, les deux tangentes en 1 sont sécantes si

$$-\frac{\lambda}{2}x + \lambda + \frac{1}{2} = -\frac{\mu}{2}x + \mu + \frac{1}{2},$$

soit $x = 2$, et donc $y = 1/2$. Donc toutes les tangentes en 1 sont sécantes en $(2, 1/2)$.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

$$\frac{af(x) - xf(a)}{x-a} = \frac{a(f(x) - f(a) + f(a)) - xf(a)}{x-a} = \frac{a(f(x) - f(a))}{x-a} + \frac{(a-x)f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a} af'(a) - f(a)$$

↩ retour à l'EXERCICE 6

Correction de l'EXERCICE 7

↩ retour à l'EXERCICE 7

Correction de l'EXERCICE 8

Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$, la fonction considérée est continue.

Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{N}$.

f_{n+1} est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour $x \neq 0$, $f'_{n+1}(x) = (n+2)f_n(x)$.

Quand $x \rightarrow 0$, $f'_{n+1}(x) \rightarrow 0 = (n+2)f_n(0)$ donc f_{n+1} est dérivable en 0 et $f'_{n+1}(0) = 0$.

Ainsi f_{n+1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_{n+1} = (n+2)f_n$.

Par hypothèse de récurrence, f_n est de classe $\mathcal{C}^n$ et donc f_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
Récurrence établie.

↩ retour à l'EXERCICE 8

Correction de l'EXERCICE 9

f est continue sur $[a, b]$ donc admet un maximum. Donc f' s'annule en ce point qui ne peut pas être a et b .

↩ retour à l'EXERCICE 9

Correction de l'EXERCICE 10

- ① On utilise Rolle entre chaque paire de points, triés par ordre croissant. Cela nous donne que f' s'annule en n points distincts. Par récurrence, on montre que $f^{(n)}$ s'annule en un point.
- ② Même idée, sauf qu'il n'y a plus qu'un point qui bouge. On peut refaire une récurrence.

↩ retour à l'EXERCICE 10

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 11

Pas de difficulté particulière.

Attention, dans la récurrence, il faut bien ajouter 1 à tous les n .

↩ retour à l'EXERCICE 11

Correction de l'EXERCICE 12

①

②

③ $(x \mapsto \cos^3 x)^{(n)} = x \mapsto \frac{1}{4} (3 \cos(x + n\pi/2) + 3^n \cos(3x + n\pi/2))$

④

⑤ $(x \mapsto \cos(x)e^x)^{(n)} = x \mapsto 2^{n/2} e^x \cos(x + n\pi/4)$

⑥ $z^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$

↩ retour à l'EXERCICE 12

Correction de l'EXERCICE 13

En utilisant les abus de notations,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} ((x-a)^n)^{(k)} ((x-b)^n)^{(n-k)} \underset{\substack{a=0 \\ b=0}}{=} n! \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 x^n.$$

On a aussi $f^{(n)}(x) \underset{\substack{a=0 \\ b=0}}{=} \frac{(2n)!}{n!} x^n$, ce qui donne le résultat pour $x = 1$.

↩ retour à l'EXERCICE 13

Correction de l'EXERCICE 14

$f^{(n)}(x) = 0 \iff \sin(nf(x) + n\pi/2) = 0 \iff f(x) = \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
On obtient comme racines $\tan\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

La fonction $\sin$ est dérivable sur chaque intervalle $[n, n+1[$, et sa dérivée est bornée par 1 et -1. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|\sin(\sqrt{n+1}) - \sin(\sqrt{n})| \leq |\sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \left| \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

Par le théorème des accroissements finis

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan n) = \frac{1}{1+c^2} \frac{1}{\arctan c}$$

avec $n \leq c \leq n+1$ donc

$$u_n = \exp\left(n^2 \frac{1}{1+c^2} \frac{1}{\arctan c}\right) \rightarrow e^{2/\pi}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 17

Soit $\varphi : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - (a+b+c)x$$

φ est dérivable et $\varphi(0) = 0 = \varphi(1)$. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle pour conclure.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

- ① $|f|^2 = f\bar{f}$ qui est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et $(|f|^2)' = f'\bar{f} + f\bar{f}' = 2\operatorname{Re}(f'\bar{f})$.
- ② $x \mapsto x$ donne un contre-exemple.
- ③ Il suffit d'appliquer la fonction racine à la fonction $|f|^2$ pour voir que $|f|$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

En calculant la limite comme si f était dérivable en 0, on a

$$\frac{f(3x) - f(x)}{x} = 3 \frac{f(3x) - f(0)}{3x} - \frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2f'(0).$$

Donc $f'(0) = l/2$.

On doit étudier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ et montrer que cela tend vers $l/2$. Montrons le avec la définition de limite.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, tel que $|x| \leq \eta$ implique

$$\left| \frac{f(3x) - f(x)}{x} \right| \leq \varepsilon.$$

Fixons un tel x . On doit utiliser cela dans la limite. Forçons.

On sait que $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x/3^n)}{x}$, par continuité de f en 0.

Mais, par télescopage $\frac{f(x) - f(x/3^n)}{x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x/3^k) - f(x/3^{k+1})}{x}$.

Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|x/3^{k+1}| \leq \alpha$, l'inégalité de convergence donne

$$\frac{\ell - \varepsilon}{3^{k+1}} \leq \frac{f(x/3^k) - f(x/3^{k+1})}{x} \leq \frac{\ell + \varepsilon}{3^{k+1}}.$$

Par somme géométrique,

$$\frac{\ell - \varepsilon}{2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x/3^k) - f(x/3^{k+1})}{x} \leq \frac{\ell + \varepsilon}{2}.$$

D'où $\frac{f(x) - f(0)}{x} \in \left[\frac{\ell - \varepsilon}{2}, \frac{\ell + \varepsilon}{2} \right]$, ce qui prouve la convergence vers $\ell/2$.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20

Puisque $\lim_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, il existe $a < 0$ et $b > 0$ tels que

$$f(a) > f(0) + 1 \text{ et } f(b) > f(0) + 1$$

En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre a et 0 , d'une part, et 0 et b d'autre part, il existe $\alpha \in]a, 0[$ et $\beta \in]0, b[$ tels que $f(\alpha) = f(0) + 1 = f(\beta)$. En appliquant le théorème de Rolle entre α et β , il existe $c \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

Correction de l'EXERCICE 21

Tout à gauche et la partie dérivée égale à λ . Posons

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = f(t) - \lambda \frac{(t - a_1) \cdots (t - a_n)}{n!}.$$

Cette fonction est n fois dérivable et s'annule n fois, puisqu'elle s'annule sur chaque a_i . Il en manque 1.

Fixons $x \in I$ et λ pour qu'elle s'annule en x .

Si x est égal à l'un des a_i , la relation est évidente, en prenant par exemple $\xi = a_1$.

Sinon, on obtient

$$\lambda = \frac{f(x)n!}{(x - a_1) \cdots (x - a_n)}$$

La fonction s'annule alors $n + 1$ fois. Par récurrence sur $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on montre, en appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, que $\varphi^{(k)}$ s'annule $n - k + 1$ fois sur I .

En particulier, $\varphi^{(n)}$ a au moins un zéro ξ dans I .

On obtient le résultat.

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

Correction de l'EXERCICE 22

La dérivée de f est continue et périodique donc bornée par son max sur une période (qui existe par continuité sur un segment). Par l'inégalité des accroissements finis, il en découle que f est lipschitzienne.

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

Correction de l'EXERCICE 23

Posons $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(\sqrt{t})$$

Par composition g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

g est continue et

$$g'(t) = \frac{f'(\sqrt{t}) - f'(0)}{2\sqrt{t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{f''(0)}{2}$$

donc g est dérivable et g' est continue en 0 . Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$.

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

Correction de l'EXERCICE 24 Théorème de Darboux

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

Correction de l'EXERCICE 25

On a $(1 - x^2) f'(x) = x f(x)$, pour tout $x \in [0, 1[$.

En dérivant n fois la relation, on a, pour tout $n \geq 2$,

$$(1 - x^2) f^{(n+1)}(x) = (2n + 1) x f^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x).$$

On fait alors une récurrence double sur n pour montrer l'inégalité demandée.

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27 Règle de L'Hospital

- ① On considère l'application réelle φ définie sur le segment $[a, b]$ par

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi(x) = [f(x) - f(a)][g(b) - g(a)] - [g(x) - g(a)][f(b) - f(a)].$$

φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$. Par le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. D'où le résultat.

- ② Soit x et y deux nombres réels tels que $[x, y] \subset]a, +\infty[$. D'après ①, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(x) \left(1 - \frac{f(y)}{f(x)}\right)}{g(x) \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right)}$$

Puisque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

et lorsque x tend vers $+\infty$, c tend vers $+\infty$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \ell.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28 CCP MP

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Correction de l'EXERCICE 29

$x \mapsto f(x) - xf'(c)$ est injective et continue donc strictement monotone. Sa dérivée $x \mapsto f'(x) - f'(c)$ est de signe constant, donc f' admet un extremum en c et donc $f''(c) = 0$.

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

Correction de l'EXERCICE 30

Si cette limite ℓ est strictement positive, alors pour α suffisamment proche de 0, $xf'(x) > \ell/2$, pour tout $x \in]0, \alpha]$, par conservation de l'inégalité stricte au voisinage de la limite. Mais le TAF nous donne, pour $a < \alpha$ dans l'intervalle $]0, a[$, l'existence de c tel que

$$f(a) - f(0) = af'(c) > \frac{a\ell}{2c} \geq \frac{\ell}{2}.$$

Absurdité parce que $f(a) - f(0) \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$. Le cas $\ell < 0$ est similaire.

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)