

TECHNIQUES DE DÉTERMINANTS

1 OPÉRATIONS SUR LES LIGNES OU LES COLONNES

Rappel : L'application qui à une matrice carrée associe son déterminant pouvant être vue comme une forme n -linéaire alternée sur l'espace vectoriel des matrices colonnes ou des matrices lignes, les propriétés des formes n -linéaires alternées permettent d'énoncer les règles suivantes.

- Si une matrice a deux colonnes (ou deux lignes) identiques, son déterminant est nul.
- Si l'on échange deux colonnes (ou deux lignes) d'une matrice, on change son déterminant en son opposé.
- Si l'une des colonnes (respectivement lignes) d'une matrice est combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement des autres lignes), alors son déterminant est nul.
- Si une matrice a une colonne (ou une ligne) nulle, son déterminant est nul.
- Le déterminant d'une matrice est inchangé si l'on ajoute à une colonne (respectivement à une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement des autres lignes).
- Si l'on multiplie une colonne (ou une ligne) d'une matrice par un scalaire λ , son déterminant est multiplié par λ .
Par conséquent, si l'on multiplie par λ tous les coefficients d'une matrice $n \times n$, son déterminant est multiplié par λ^n .

Méthode Ces règles de transformation d'un déterminant permettent :

- soit de prouver qu'il est nul,
- soit d'introduire dans une colonne (respectivement une ligne) un maximum de 0 afin d'utiliser avec profit les résultats qui vont suivre, à savoir développer par rapport à une ligne ou une colonne.

Exemple 1

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3 \cdot L_1 \end{array} = 2 \cdot 1 \cdot 5 = 10$$

Exemple 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -18 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1 \end{array} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & -6 & -6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \end{array} \\ = 18.$$

Exemple 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\ = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{array} = 1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-4) = 16.$$

Exemple 4

Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculons

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ a+n-1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix}$$

en utilisant la linéarité en la première colonne. Ainsi,

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

2 DÉVELOPPEMENT PAR RAPPORT À UNE LIGNE ET UNE COLONNE**Proposition 1 : Rappel**

Soit $M = (m_{ij})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les formules suivantes pour calculer le déterminant

Développement selon une colonne $\forall j \leq n, \quad \det M = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}.$

Développement selon une ligne $\forall i \leq n, \quad \det M = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} m_{i,j} \Delta_{i,j}.$

Exemple 5

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -28 + 0 + 15 = -13$$

en développant sur la première ligne.

Exemple 6

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -28 + 0 + 15 = \boxed{-13}$$

en développant sur la première ligne.

Exemple 7

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 3 \times (-2 \cdot 0 - 4 \cdot 1) + 0 + 2 \times (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 5) = 3 \times (-4) + 0 + 2 \times (1 + 10) = -12 + 0 + 22 = \boxed{10}$, en développant sur la première ligne.

Exemple 8

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 6 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 6 \cdot 1 = -2 + 8 - 6 = \boxed{0}$$

, en développant selon la deuxième colonne.

Exemple 9

On peut combiner les techniques ! Pour calculer $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ en fonction de x , on peut commencer par faire les opérations $L_1 - xL_4 \rightarrow L_1, L_2 - L_4 \rightarrow L_2$ et $L_3 - L_4 \rightarrow L_3$. En développant ensuite par rapport à la première colonne, on trouve

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 1-x & 1-x & 1-x^2 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1-x & 1-x & 1-x^2 \\ x-1 & 0 & 1-x \\ 0 & x-1 & 1-x \end{vmatrix}$$

Sachant que $1-x^2 = (1-x)(1+x)$, on peut mettre en facteur $1-x$ dans chaque colonne du déterminant restant, et on trouve

$$\begin{aligned} \det(C) &= -(1-x)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1-x)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+x \\ 0 & 1 & 2+x \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1-x)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2+x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(1-x)^3(x+3) \end{aligned}$$

On remarque au passage que la matrice C est inversible, si, et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq -3$.

Exemple 10

Le **déterminant de Vandermonde** est une formule à connaître et à savoir redémontrer. Soit $a_1, \dots, a_n$ des complexes. On a

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (a_j - a_i).$$

Commençons par simplifier le déterminant en faisant les opérations élémentaires sur les colonnes $C_i \leftarrow C_i - a_1 C_{i-1}$ pour i allant de n à 2. Alors

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & a_2 - a_1 & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

Ensuite, on développe par rapport à la première ligne

$$\begin{aligned} V_n(a_1, \dots, a_n) &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \dots & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_1) \end{vmatrix} \\ &= \left(\prod_{k=2}^n (a_k - a_1) \right) V_{n-1}(a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, on obtient que

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{j>i} (a_j - a_i).$$

Exemple 11

Les **déterminants trigoniaux**, c'est à dire, avec tout coefficient nul s'il n'est pas sur la diagonale, la sur-diagonale ou la sous-diagonale, se calculent souvent de la même façon. On exprime en développant 2 fois selon les lignes pour obtenir une relations de récurrence. On résout ensuite la suite récurrente obtenue.

Par exemple, soit Δ_n le déterminant de taille n suivant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

On développe suivant la première colonne :

$$\Delta_{n+2} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant est Δ_{n+1} . Pour le second, on développe par rapport à la première ligne, et on retrouve alors Δ_n (on a barré 2 lignes et 2 colonnes).

Ceci nous donne pour tout $n \geq 1$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$. On a donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 = 3r - 2$. Ses racines sont $r = 1$ et $r = 2$. On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = \lambda 2^n + \mu 1^n$$

Mais $\Delta_1 = 3$ et $\Delta_2 = 7$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu = 3 \\ 4\lambda + \mu = 7 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\Delta_n = 2^{n+1} - 1$$

3 UTILISATION DE LA FORMULE (RARE)

Rappel. Soit $M = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors $\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n m_{\sigma(j),j}$.

Exemple 12

Pour $n = 3$, on se rappelle que c'est Sarrus ! On a

$$\begin{vmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 8 + (-10) \cdot 5 \cdot (-6) + 11 \cdot (-3) \cdot 12 - (11 \cdot 6 \cdot (-6) + (-10) \cdot (-3) \cdot 8 + 1 \cdot 5 \cdot 12) \\ = 1 \cdot 6 \cdot 8 + (-10) \cdot 5 \cdot (-6) + 11 \cdot (-3) \cdot 12 - (11 \cdot 6 \cdot (-6) + (-10) \cdot (-3) \cdot 8 + 1 \cdot 5 \cdot 12) \\ = 48 + 300 - 396 - (-396 + 240 + 60) = (48 + 300 - 396) - (-96) = -48 + 96 = \boxed{48}$$

Exemple 13

On peut parfois utiliser cette formule en utilisant la fonction polynomiale P posée ci-dessous, puis en évaluant en 0. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculons le déterminant suivant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & \cdots & c \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Pour cela, introduisons la fonction polynomiale

$$P : x \mapsto \begin{vmatrix} a+x & c+x & \cdots & c+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c+x \\ b+x & \cdots & b+x & a+x \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations sur les colonnes $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $j \geq 2$, on vérifie que P est de degré au plus 1. Si $b \neq c$, alors $P(-b) = (a-b)^n$ et $P(-c) = (a-c)^n$ (ce sont des déterminants triangulaires). On en déduit ainsi l'expression de P et donc la valeur de $D = f(0)$

$$D = \frac{(a-c)^n b - (a-b)^n c}{b-c}$$

Pour calculer D lorsque $b = c$, il suffit de faire tendre c vers b puisque D est une fonction polynomiale donc continue en la variable b . Ainsi

$$D = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$$

4 CALCULS PAR BLOCS

Proposition 2

Soit $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{vmatrix} = \det(A) \det(C).$$

Preuve. Commençons par décomposer la matrice étudiée

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{n-r,r} \\ 0_{n-r,r} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n-r,r} & I_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, chacun de ces deux déterminants se calcule par développant par rapport aux r premières lignes ou aux $n-r$ dernières lignes d'où le résultat. $\square$

Exemple 14

Pour calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on peut remarquer qu'elle est triangulaire par blocs avec les blocs diagonaux

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de déterminant 2 et 8 respectivement. Le déterminant de A vaut donc 16.

Exemple 15

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ n nombres complexes et soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculons $\det(A - xI_n)$. On va utiliser la multiplication par blocs.

On a d'abord, en développant par rapport à la dernière colonne

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} -x & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix} = (-x)^{n-1} (a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} a_k \Delta_k,$$

où Δ_k est le déterminant suivant ($-x$ est répété k fois sur la diagonale)

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & * & \dots & \dots & * \\ * & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ * & \dots & * & -x & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant Δ_k se calcule par blocs (on a une matrice triangulaire supérieure par blocs). De plus, chacun des blocs diagonaux est lui-même triangulaire (inférieur pour le premier, supérieur pour le second). On en déduit que

$$\Delta_k = (-x)^k 1^{n-1-k}.$$

et donc que

$$\begin{aligned} \det(A - xI_n) &= (-x)^{n-1} (a_{n-1} - x) + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n+k-1} (-1)^k a_k x^k \\ &= (-1)^n \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right) \end{aligned}$$