Géométrie différentielle élémentaire

Frédéric Paulin

Version préliminaire

Formation Interuniversitaire de
Mathématiques Fondamentales et Appliquées

Cours de première année de mastère

École Normale Supérieure

Année 2006-2007

1 Introduction

On peut considérer un objet géométrique selon plusieurs échelles, et les outils d'études diffèrent alors :

infinitésimal	$\longleftrightarrow$	algèbre linéaire et multilinéaire
local	$\longleftrightarrow$	calcul différentiel
global	$\longleftrightarrow$	géométrie/topologie différentielle
asymptotique	$\longleftrightarrow$	géométrie asymptotique à la Gromov.

Une grande partie de ce cours sera consacré au passage de l'infinitésimal et du local au global. Nous supposerons acquis les deux premiers points (voir par exemple [Bou1, Ave, CarH, Die1]), et nous ne parlerons pas du dernier (voir par exemple [Gro1, Gro2]).

Dans cet ouvrage élémentaire, nous ne traiterons pas de géométrie riemannienne, ni de géométrie symplectique, ni de géométrie de contact, qui sont traditionnellement des cours de seconde année de mastère (voir par exemple [GHL, McDS]). Nous n'aborderons pas non plus certains points plus avancés de géométrie différentielle, comme les fibrés principaux et les classes caractéristiques, la transversalité et ses applications, ainsi que quelques points sur les formes différentielles, comme la formule de Kunneth (voir par exemple [BT, Hir, God]). Nous ne parlerons pas des variétés différentielles à bord, pourtant si utiles en topologie différentielle (et en particulier, nous n'aborderons pas la suite exacte d'une paire en cohomologie de de Rham, voir par exemple [God]).

Nous mettrons l'accent d'une part sur les exemples de variétés différentielles, qu'elles viennent en familles ou en points remarquables, d'autres part sur leurs groupes de transformations, chers aux physiciens. En ce qui concerne les champs de tenseurs, nous restreindrons notre étude aux champs de vecteurs et aux formes différentielles. Nous n'aborderons quasiment pas les spécificités de la géométrie différentielle complexe, pourtant si riche (voir par exemple [Voi, Laz, BPV]). Pour les aspects de théorie de jauge et d'analyse sur les variétés, qui ont eu un impact important sur la topologie des variétés, avec les travaux par exemple de Donaldson et de Perelman, nous renvoyons aux textes [Aub, Don, Bes] par exemple.

Nous espérons que le plaisir du lecteur dans la découverte de ces espaces (les variétés différentielles), ces groupes (les groupes de Lie), ces champs (champs de vecteurs et formes différentielles) sera renforcé par les très nombreux exercices et problèmes de ce recueil, issus de trois années d'enseignements à l'École Normale Supérieure. Une partie d'entre eux est accompagnée d'un schème[1] de preuve ou d'indications de résolution, pas forcément rédigées de manière optimales ni complètes.

Souhaitant revenir aux Éléments d'Euclide, nous dirons *porisme* ($\pi\acute{o}\rho\iota\sigma\mu\alpha$) au lieu de *corollaire*.

Remerciements. Une partie des 189 exercices et problèmes, avec leurs solutions, et de nombreuses corrections, ont été fournis par Sébastien Gouëzel. Je l'en remercie chaleureusement. Je remercie tous les élèves de l'ENS m'ayant signalé des incorrections dans les premières versions de ce texte. Je remercie aussi les étudiants de l'Université Paris-Sud, dont François Delgove en 2014, pour leurs corrections.

1. n.m. (gr. $\sigma\chi\eta\mu\alpha$). Structure d'ensemble d'un processus.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Variétés différentielles **6**

2.1 Variétés topologiques . . . 6
2.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . . . 11
2.3 La catégorie des variétés différentielles . . . 13
Objets . . . 13
Flèches . . . 15
Le point de vue des faisceaux . . . 18
2.4 Exemples de variétés différentielles . . . 19
2.4.1 Exemples triviaux, contre-exemples et culture . . . 19
2.4.2 Exemples familiaux . . . 23
Sous-variétés . . . 23
Plongements . . . 25
Images réciproques . . . 26
Sommes disjointes . . . 28
Produits . . . 28
Homéomorphismes locaux . . . 29
Revêtements . . . 29
2.4.3 Exemples cruciaux . . . 32
Les sphères . . . 32
Les tores . . . 33
Les espaces projectifs . . . 34
Les variétés grassmanniennes . . . 36
Les groupes classiques . . . 37
2.5 Autres exercices . . . 38
2.6 Indications pour la résolution des exercices . . . 47

3 Fibrés vectoriels **64**

3.1 Sous-espaces tangents d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ . . . 64
3.2 Fibrés vectoriels . . . 66
3.3 Fibré tangent . . . 69
3.4 Application tangente . . . 71
3.5 Exemples . . . 74
Sous-variétés . . . 74
Plongements . . . 75
Images réciproques . . . 76
Sommes disjointes . . . 76
Produits . . . 76
Revêtements . . . 76
3.6 Fibrations . . . 77
3.7 Le fibré des formes alternées . . . 79
3.8 Opérations sur les fibrés vectoriels . . . 81
Préimage . . . 81
Produit . . . 82

Somme directe . . . 82
3.9 Autres exercices . . . 83
3.10 Indications pour la résolution des exercices . . . 86

4 Champs de vecteurs et feuilletages 92
4.1 Champs de vecteurs . . . 92
4.2 Opérations sur les champs de vecteurs . . . 93
4.2.1 Addition. . . . 93
4.2.2 Multiplication par une fonction. . . . 93
4.2.3 Restriction. . . . 94
4.2.4 Image réciproque. . . . 94
4.2.5 Expression d'un champ de vecteurs dans une carte. . . . 95
4.3 Flot local d'un champ de vecteurs . . . 96
4.4 Dérivations . . . 99
4.5 Dérivations et champs de vecteurs . . . 101
4.6 Crochets de champs de vecteurs . . . 104
4.7 Champs de plans . . . 106
4.8 Feuilletages . . . 108
4.9 Théorème de Frobénius . . . 112
4.10 Autres exercices . . . 114
4.11 Indications pour la résolution des exercices . . . 125

5 Groupes de Lie et espaces homogènes 155
5.1 Groupes de Lie . . . 155
Culture . . . 159
5.2 Algèbres de Lie . . . 161
5.3 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie. . . . 163
5.4 Champs de vecteurs invariants . . . 167
5.5 Application exponentielle . . . 169
5.6 Sous-groupes de Lie immergés et sous-algèbres de Lie . . . 173
5.7 Revêtements et groupes de Lie . . . 176
5.8 Espaces homogènes . . . 185
Actions continues de groupes topologiques . . . 185
Actions différentiables de groupes de Lie . . . 187
Espaces homogènes quotients . . . 187
Actions transitives de groupes de Lie . . . 189
Exemples de variétés homogènes . . . 191
Variétés quotients . . . 195
5.9 Autres exercices . . . 195
5.10 Indications pour la résolution des exercices . . . 204

6 Formes différentielles 216
6.1 Formes différentielles . . . 216
Structure d'algèbre . . . 216
Image réciproque . . . 218
Différentielle extérieure . . . 220
Produit intérieur et dérivée de Lie . . . 225

Gradient, divergence, rotationnel . . . 228
6.2 Cohomologie de de Rham . . . 229
Algèbre de cohomologie de de Rham . . . 229
Invariance par homotopie . . . 232
Suite exacte de Mayer-Vietoris . . . 236
Calcul de la cohomologie des sphères . . . 239
Autres calculs de cohomologie de de Rham . . . 241
6.3 Intégration des formes différentielles . . . 247
Intégration dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$ . . . 247
Orientation des variétés . . . 248
Intégration de formes différentielles . . . 252
Le théorème de Stokes . . . 254
Régularité . . . 258
6.4 Cohomologie à support compact . . . 258
Invariance par homotopie . . . 260
Suite exacte de Mayer-Vietoris . . . 260
6.5 Dualité de Poincaré . . . 262
Cohomologie de de Rham des espaces projectifs réels . . . 266
6.6 Théorie du degré . . . 267
6.6.1 Degré d'une application entre variétés de même dimension. . . . 267
6.6.2 Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé. . . . 273
6.6.3 Nombre d'enlacement. . . . 274
6.7 Autres exercices . . . 277
6.8 Indications pour la résolution des exercices . . . 290

A Annexes : rappels divers **316**
A.1 Rappels de topologie . . . 316
A.2 Rappels sur les actions de groupes . . . 320
A.3 Rappels de calcul différentiel . . . 322
A.4 Rappels sur les revêtements . . . 327
Revêtements . . . 327
Homotopie . . . 329
Revêtements universels . . . 330
A.5 Rappels d'algèbre multilinéaire . . . 332
Algèbre tensorielle . . . 332
Algèbre extérieure . . . 333
A.6 Rappels d'algèbre homologique . . . 341
Catégories, foncteurs . . . 341
Complexes de cochaînes . . . 343
A.7 Indications pour la résolution des exercices . . . 348

Index **355**

Bibliographie **361**

2 Variétés différentielles

Pour des explications historiques sur l'invention de la notion de variété et ses motivations, nous renvoyons aux textes originaux de Riemann [Rie, Spi], H. Poincaré [Poi], E. Cartan [Car], ainsi qu'aux ouvrages d'histoire des mathématiques comme l'excellent [Die4].

2.1 Variétés topologiques

Avant de définir les variétés topologiques, donnons deux résultats de topologie générale. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni de sa topologie usuelle.

Théorème 2.1 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application continue et injective. Alors $f(U)$ est ouvert, et $f : U \to f(U)$ est un homéomorphisme.* □

En particulier, un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à un ouvert non vide de $\mathbb{R}^m$ si n et m sont distincts. Notons que si l'on remplace « homéomorphe » par « C^1-difféomorphe », alors cette dernière assertion est évidente. Dans le cadre différentiel de ce cours, le théorème d'inversion locale (voir l'appendice A.3) est en général un outil suffisant pour remplacer le théorème d'invariance du domaine de Brouwer.

Nous admettrons le théorème 2.1. Les preuves les plus naturelles utilisent des outils élémentaires de topologie algébrique, ce qui constituerait une diversion un peu longue (voir [God, Spa, Hat, Pau]). Il existe aussi des preuves plus directes, mais moins éclairantes (voir avec précautions la preuve originelle [Brou]).

La proposition suivante servira à comprendre les propriétés topologiques globales (qui sont minimes) que nous demanderons aux variétés topologiques. Nous renvoyons à l'appendice A.1 pour les définitions des notions topologiques utilisées.

Proposition 2.2 *Soit X un espace topologique, dont tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est séparé et à base dénombrable,*
2. *X est σ-compact,*
3. *X est dénombrable à l'infini,*
4. *X est métrisable séparable,*
5. *il existe un plongement topologique de X dans $\ell^2(\mathbb{R})$.*

Preuve. Un espace topologique séparé dans lequel tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un $\mathbb{R}^n$ est localement compact. En particulier, tout point d'un tel espace admet un système fondamental de voisinages fermés métrisables (pour la topologie induite).

Il est immédiat qu'un espace localement compact à base dénombrable admet une base dénombrable d'ouverts d'adhérences compactes, donc est σ-compact, et qu'un espace σ-compact, dans lequel tout point admet un voisinage ouvert qui est à base dénombrable (pour la topologie induite), est à base dénombrable. Donc (1) et (2) sont équivalents.

Il est immédiat qu'un espace dénombrable à l'infini est σ-compact, et qu'un espace localement compact et σ-compact est dénombrable à l'infini. Donc (2) et (3) sont équivalents.

L'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{R})$ est métrisable et à base dénombrable (l'ensemble des boules ouvertes de rayons rationnels centrées aux suites presque nulles de rationnels est une base dénombrable d'ouverts). Tout sous-espace d'un espace métrisable et à base dénombrable l'est encore. Un espace topologique à base dénombrable est séparable, car si $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts non vides, et x_i un point de U_i, alors $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est dense. Donc (5) implique (4).

Un espace métrique séparable est séparé et à base dénombrable (en prenant les boules ouvertes de rayons rationnels centrées aux points d'une partie dénombrable dense). Donc (4) implique (1).

Un espace topologique X, séparé, à base dénombrable, et dont tout point admet un système fondamental de voisinages fermés métrisables, se plonge dans $\ell^2(\mathbb{R})$. En effet, soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Nous pouvons supposer que $\overline{U_i}$ est métrisable (pour la topologie induite), car si J est l'ensemble des i tels que $\overline{U_i}$ est métrisable, alors $(U_j)_{j\in J}$ est encore une base d'ouverts. Notons d_i une distance sur l'espace $\overline{U_i}$ compatible avec sa topologie. Considérons la fonction $\varphi_i : X \to [0,1]$ définie par $\varphi_i(x) = \min\{1, d_i(x, \partial U_i)\}$ si x est dans U_i et $\varphi_i(x) = 0$ sinon. Il est facile de vérifier que φ_i est continue et non nulle exactement sur U_i. Alors l'application $f : x \mapsto (\frac{1}{i+1}\varphi_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ est un homéomorphisme de X sur son image dans $\ell^2(\mathbb{R})$. En effet, l'injectivité découle du fait que X soit séparé et que $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soit une base d'ouverts. La continuité vient du fait que les φ_i soient continues et bornées en valeur absolue par 1. Enfin, l'application $f : X \to f(X)$ est fermée, car si F est un fermé de X et si x n'est pas dans F, alors il existe i tel que $x \subset U_i \subset X - F$, et donc $d(f(x), f(F)) \geq \varphi_i(x)/(i+1) > 0$. Donc (1) implique (5). $\square$

Une *variété topologique* (ou par abus *variété*) est un espace topologique M tel que

- l'espace M soit séparé et à base dénombrable,
- tout point de M admette un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$.

En particulier, par la proposition 2.2, une variété topologique est un espace localement compact, métrisable, séparable, dénombrable à l'infini. Au lieu de demander que M soit séparé à base dénombrable, nous pourrions demander, de manière équivalente par la proposition 2.2, que M soit métrisable séparable. Il est souvent plus facile de vérifier les conditions séparé à base dénombrable que les conditions métrisable séparable (lorsque l'on veut montrer qu'un objet est une variété), et c'est pour cela que nous mettons en avant les premières. Par contre, les secondes sont souvent plus utiles lorsque l'on travaille sur une variété donnée.

Mais ces propriétés globales des variétés topologiques sont minimes, et en pratique faciles à vérifier (cette vérification étant parfois omise). Ce qui est important est qu'une variété topologique admette les mêmes propriétés topologiques locales qu'un espace $\mathbb{R}^n$. Par exemple, elle est, entre autres, (voir les appendices A.1 et A.4 pour des définitions)

- localement compacte (ce qui n'est pas uniquement une condition locale à cause de l'hypothèse de séparation),
- localement connexe par arcs (donc elle est connexe par arcs si elle est connexe),
- localement contractile.

Soit M une variété topologique. Pour tout x dans M, l'entier n tel qu'il existe un voisinage ouvert de x homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est uniquement défini, par le théorème d'invariance du domaine de Brouwer 2.1, et il est localement constant (donc constant sur toute composante connexe de M). Pour tout n dans $\mathbb{N}$, une variété topologique est dite *de dimension* n si tout point admet un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toute composante connexe de M possède donc une dimension bien définie. Dans la littérature comme dans ce cours, on ne considère en général que des variétés topologiques dont les dimensions des composantes connexes sont égales. On appelle souvent *courbe* une variété topologique de dimension 1, et *surface* une variété topologique de dimension 2.

Par exemple, les variétés topologiques de dimension 0 sont les espaces discrets dénombrables.

Exercice E.1 *Montrer qu'une variété topologique compacte connexe de dimension* 1 *est homéomorphe au cercle* $\mathbb{S}_1$. *Montrer qu'une variété topologique connexe non compacte de dimension* 1 *est homéomorphe à* $\mathbb{R}$. *En déduire qu'une variété topologique de dimension* 1 *est somme disjointe d'un ensemble dénombrable d'espaces homéomorphes à* $\mathbb{R}$ *ou à* $\mathbb{S}_1$.

La collection des variétés topologiques forme une sous-catégorie de la catégorie des espaces topologiques, notée TOP, et de même pour les variétés topologiques de dimension n, dont la collection est notée TOP_n. Voir l'appendice A.6 pour la définition d'une catégorie.

L'outil principal qui permet le passage du local au global dans les variétés topologiques est celui de partition de l'unité, que nous introduisons maintenant. Nous renvoyons à l'appendice A.1 pour les définitions de topologie générale utilisées, en particulier celle de famille localement finie de parties.

Soit X un espace topologique. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on appelle *support* de f l'adhérence de $\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}$, et on le note $\mathrm{Supp}(f)$. C'est le plus petit fermé en dehors duquel f est nulle.

Une *partition de l'unité* de X est une famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de fonctions continues de X dans $[0,1]$, dont la famille des supports est localement finie, et qui vérifie $\sum_i \varphi_i = 1$ (remarquer qu'alors $(\varphi_\alpha^{-1}(]0,1]))_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est un recouvrement ouvert, et que la somme $\sum_i \varphi_i(x)$ ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls pour tout x dans X). Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Une *partition de l'unité subordonnée à* $\mathcal{U}$ est une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ de X, telle que, pour tout $i \in I$, le support de φ_i soit contenu dans U_i.

Remarque. Supposons que l'on ait une partition de l'unité $(\varphi'_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de X, telle que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe un élément de $\mathcal{U}$ contenant le support de φ'_α. Il est alors facile de modifier cette partition de l'unité pour la rendre subordonnée à $\mathcal{U}$. En effet, si $f : \mathcal{A} \to I$ est n'importe quelle application telle que le support de φ'_α soit contenu dans $U_{f(\alpha)}$ pour tout α, posons

$$\varphi_i : x \mapsto \sum_{\alpha\in f^{-1}(i)} \varphi'_\alpha(x) \ ,$$

avec la convention usuelle $\sum_\emptyset = 0$. Alors $(\varphi_i)_{i\in I}$ est une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$. En effet,

(1) l'application φ_i est bien définie et continue, car sur un voisinage de tout point, φ_i est somme d'un nombre fini de φ'_α ;

(2) $\sum_i \varphi_i = \sum_\alpha \varphi'_\alpha = 1$;

(3) la famille de fermés $(\mathrm{Supp}\ \varphi_i)_{i\in I}$ est localement finie, car pour tout ouvert U de X,

$$\{i \in I \ : \ (\mathrm{Supp}\ \varphi_i) \cap U \neq \emptyset\} \subset f\big(\{\alpha \in \mathcal{A} \ : \ (\mathrm{Supp}\ \varphi'_\alpha) \cap U \neq \emptyset\}\big) \ ,$$

et l'image d'un ensemble fini par une application est finie ;

(4) nous avons

$$(\mathrm{Supp}\ \varphi_i) \subset \overline{\bigcup_{\alpha\in f^{-1}(i)} \mathrm{Supp}\ \varphi'_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in f^{-1}(i)} \mathrm{Supp}\ \varphi'_\alpha \subset U_i \ ,$$

car une union localement finie de fermés est fermée.

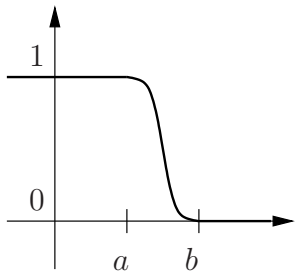
Proposition 2.3 *Une variété topologique M est paracompacte, et tout recouvrement ouvert de M admet une partition de l'unité qui lui est subordonnée. Si de plus M est compacte, alors tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini et une partition de l'unité finie qui est subordonnée à ce sous-recouvrement.*

En fait, tout recouvrement ouvert d'un espace topologique paracompact admet une partition de l'unité subordonnée (voir [Dug, page 170]), mais nous ne montrerons ce résultat que dans les cas des variétés, et nous aurons besoin de sa version différentiable (i.e. de la proposition 2.9) au chapitre 6.

Lemme 2.4 *Pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^n$ et tout voisinage U de x_0, il existe une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, de support contenu dans U, constante égale à 1 sur un voisinage de x_0, et à valeurs dans $[0,1]$.*

Preuve. Rappelons que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^n} e^{-\frac{1}{t}} = 0$ pour tout n dans $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que, pour tous $a < b$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$f_{a,b} : t \mapsto \begin{cases} \left(1 + e^{\frac{2t-(a+b)}{(b-t)(t-a)}}\right)^{-1} & \text{si } a < t < b \\ 1 & \text{si } t \leq a \\ 0 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$



est C^∞. Alors, pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, l'application $x \mapsto f_{\epsilon/2,\epsilon}(||x - x_0||)$ convient, pour $||\cdot||$ la norme usuelle. □

Preuve de la proposition 2.3. Comme M est dénombrable à l'infini, il existe par définition une suite exhaustive de compacts $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (voir l'appendice A.1). Posons $K_{-1} = \emptyset$, et $K'_n = K_{n+1} - \overset{\circ}{K}_n$, qui est un sous-espace compact de M.

Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un recouvrement ouvert. Posons

$$V_{n,\alpha} = U_\alpha \cap \left(\overset{\circ}{K}_{n+2} - K_{n-1}\right) \ .$$

Alors $(V_{n,\alpha})_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est un recouvrement ouvert de K'_n, donc admet un sous-recouvrement fini $(V_{n,\alpha})_{\alpha\in A_n}$. Alors $(V_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N},\alpha\in A_n}$ est un recouvrement ouvert de M, plus fin que $\mathcal{U}$, et localement fini. Donc M est paracompacte.

Pour tout x dans K'_n, soit W_x un voisinage ouvert de x, contenu dans $V_{n,\alpha}$ pour un α dans $\mathcal{A}$, et homéomorphe à un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^k$. Par le lemme précédent, il existe donc (en prolongeant par 0 en dehors de W_x) une application continue φ_x de M dans $[0,1]$, de support contenu dans W_x, constante égale à 1 sur un voisinage W'_x de x. Comme $(W'_x)_{x\in K'_n}$ recouvre K'_n, il existe une partie finie B_n de K'_n telle que $(W'_x)_{x\in B_n}$ recouvre K'_n. Posons

$$\varphi : y \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N},\, x\in B_n} \varphi_x(y) \ ,$$

qui est une somme n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls (car pour x dans B_n, l'application φ_x est nulle sur K_{n-1}, donc sur y si n est assez grand), et qui est strictement positive (en fait supérieure ou égale à 1) pour tout y dans M. Posons $\varphi'_x = \varphi_x/\varphi$. Alors $(\varphi'_x)_{n\in\mathbb{N},\, x\in B_n}$ est une partition de l'unité que l'on peut rendre subordonnée à $\mathcal{U}$ en utilisant la remarque précédant la proposition 2.3.

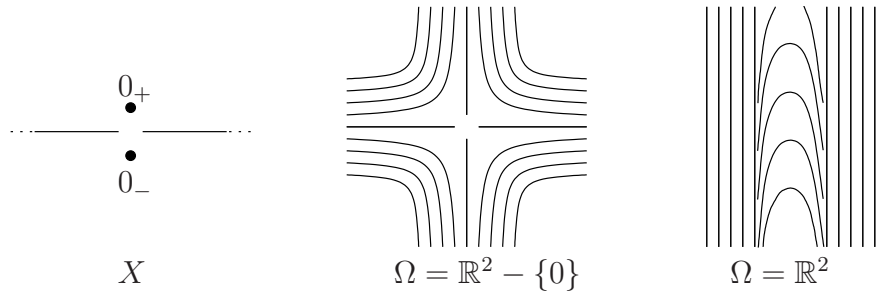
La dernière assertion découle immédiatement de la première. □

Exercice E.2 *Soit M un espace topologique paracompact, dont tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors M est métrisable.*

Il découle de la proposition 2.3 et de l'exercice ci-dessus que l'on peut rajouter la condition « X est paracompact séparable » dans la liste des conditions équivalentes de la proposition 2.2.

Il existe des espaces topologiques localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, mais non séparés, que nous appellerons *variétés topologiques non séparées* (de dimension n). De tels exemples apparaissent assez naturellement quand on considère des quotients de variétés topologiques (il est donc important de ne pas oublier d'étudier la propriété de séparation des quotients, lorsque l'on veut construire des variétés topologiques comme espaces quotients d'espaces topologiques !), voir les exemples en exercice ci-dessous. Il existe des espaces topologiques localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$, mais non paracompacts, que nous appellerons *variétés topologiques non paracompactes* (de dimension n). Mais de tels exemples sont la plupart du temps très artificiels, voir les exemples en exercice ci-dessous.

Exercice E.3 *(1) Soit X l'ensemble $(\mathbb{R}-\{0\}) \coprod \{0_-, 0_+\}$. Montrer qu'il existe une unique structure d'espace topologique sur X telle que les deux applications $\varphi_\pm : \mathbb{R} \to X$ définies par $\varphi_\pm(t) = t$ si $t \neq 0$, et $\varphi_\pm(0) = 0_\pm$ soient des homéomorphismes sur leurs images. Montrer que X est une variété topologique non séparée (voir ci-dessous).*



(2) On considère un champ de vecteurs de classe C^1 *ne s'annulant pas sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$*, dont toute courbe intégrale est fermée dans* Ω*. Soit* $\sim$ *la relation d'équivalence sur* Ω *définie par* $x \sim y$ *si et seulement s'il existe une courbe intégrale de* X *passant par* x *et* y*. Montrer que l'espace topologique quotient* $\Omega/\sim$ *est localement homéomorphe à* $\mathbb{R}$*. Plus généralement (voir le paragraphe 4.8 pour les définitions), si* $\mathcal{F}$ *est un feuilletage* C^1 *de codimension* k *à feuilles fermées dans une variété différentielle* Ω *de classe* C^1*, alors l'espace des feuilles de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *(i.e. l'espace topologique quotient de* Ω *par la relation d'équivalence « être dans la même feuille ») est localement homéomorphe à* $\mathbb{R}^k$*. Dans les deux exemples de la figure ci-dessus, montrer que* $\Omega/\sim$ *est une variété topologique non séparée de dimension* 1 *(mais séparable).*

Exercice E.4 *(Voir l'appendice A.1 pour des rappels sur les ordres.) Soit* β *un ordinal, et* β_- *l'ensemble ordonné des ordinaux strictement inférieurs à* β*. On considère l'ensemble* $X = (\beta_- \times [0,1[) - \{(0,0)\}$ *muni de la topologie de l'ordre induite par l'ordre lexicographique. Montrer que si* β *est l'ordinal de l'ordre usuel sur* $\mathbb{N}$*, alors* X *est homéomorphe à* $]0,+\infty[$*. Montrer que si* β *est le plus petit ordinal non dénombrable, alors* X *est une variété topologique non paracompacte (mais séparée), appelée la* longue (demi-)droite.

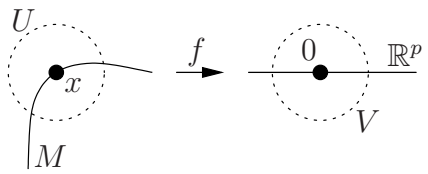
2.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Nous renvoyons par exemple à [Ave, CarH, Die1] pour des rappels de calcul différentiel, ainsi qu'à l'appendice A.3. Sauf mention explicite du contraire, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ de manière usuelle par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto ((x_1, \ldots, x_p), (x_{p+1}, \ldots, x_n))$ pour $0 \leq p \leq n$ (avec convention immédiate pour $p = 0$ ou $p = n$).

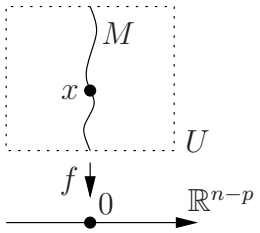
Le premier exemple, et celui qu'il faut garder en tête, de sous-variété d'un espace vectoriel de dimension finie est un sous-espace vectoriel, par exemple $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ contenu dans $\mathbb{R}^n$. Nous allons définir une sous-variété générale comme obtenue par difféomorphismes locaux ambiants à partir un tel exemple, et donner des caractérisations équivalentes. Rappelons que le *graphe* d'une application $f : A \to B$ est la partie de $A \times B$ formée des couples $(x, f(x))$ pour x dans A.

Théorème 2.5 *Soit* $n \geq p$ *dans* $\mathbb{N}$ *et* k *dans* $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$*. Les propriétés suivantes d'une partie* M *de* $\mathbb{R}^n$ *sont équivalentes :*

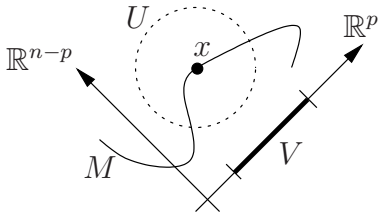
• **(Définition locale par redressement)**
Pour tout x *dans* M*, il existe un voisinage* U *de* x *dans* $\mathbb{R}^n$*, un voisinage* V *de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *et un* C^k*-difféomorphisme* $f : U \to V$ *tels que* $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$*.*



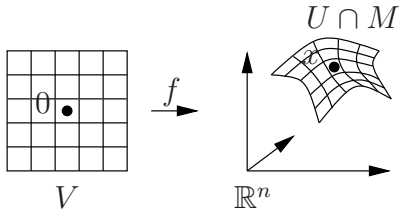
• **(Définition locale par fonction implicite)**
Pour tout x *dans* M*, il existe un voisinage* U *de* x *dans* $\mathbb{R}^n$*, et une application* $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ *de classe* C^k *qui est une submersion en* x*, tels que* $U \cap M = f^{-1}(0)$*.*



• **(Définition locale par graphe)**
Pour tout x dans M, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, une identification par un automorphisme linéaire $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ et une application $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ de classe C^k tels que $U \cap M = \mathrm{graphe}(f)$.



• **(Définition locale par paramétrage)**
Pour tout x dans M, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une application $f : V \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k tels que $f(0) = x$, f soit une immersion en 0, et f soit un homéomorphisme de V sur $U \cap M$.



Preuve. Numérotons de (1) à (4) ces assertions dans cet ordre.

Montrons que (1) implique (2). Si x, U, f sont comme dans (1), alors on peut supposer que $f(x) = 0$, et en notant $f_1, \ldots, f_n$ les composantes de f, et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ l'application de composantes $f_{p+1}, \ldots, f_n$, alors g est une submersion de classe C^k telle que $g^{-1}(0) = U \cap M$.

Montrons que (1) implique (4). Si x, U, V, f sont comme dans (1), alors on peut supposer que $f(x) = 0$, et la restriction de f^{-1} à l'ouvert $W = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ de $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ est une application de classe C^k envoyant 0 sur x, qui est une immersion en 0, et qui est un homéomorphisme de W sur $U \cap M$.

Montrons que (4) implique (1) (cette implication est parfois utilisée sous le nom de théorème des immersions dans les exercices). Si x, U, V, f sont comme dans (4), alors par le théorème A.5 de forme normale locale des immersions, quitte à restreindre U et V, il existe un C^k-difféomorphisme ψ de U sur un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tel que, sur V, on ait l'égalité $\psi \circ f\ (x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0 \ldots, 0)$, et donc en particulier $\psi(U \cap M) = \psi \circ f(V) = W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.

Le fait que (2) implique (1) (cette implication est parfois utilisée sous le nom de théorème des submersions dans les exercices) se montre de même, en utilisant le théorème A.6 de forme normale locale des submersions.

Le fait que (3) implique (4) est immédiat, car si x, U, V, f sont comme dans (3), alors on peut supposer que $x = 0$ et que $f(0) = 0$, et l'application $F : y \mapsto (y, f(y))$ est alors un homéomorphisme de V sur $U \cap M$, qui est une immersion C^k en 0 avec $F(0) = 0$.

Montrons pour terminer que (2) implique (3). Soient x, U, f comme dans (2), et notons $f_1, \ldots, f_{n-p}$ les composantes de f. On peut supposer que $x = 0$. Quitte à permuter les coordonnées, comme f est une submersion en x, on peut supposer que la matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{j+p}}(x)\right)_{1 \leq i,j \leq n-p}$ (extraite de la matrice jacobienne de f en x) soit inversible. Notons pr_1 la projection sur le premier facteur de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. La différentielle en x de l'application $F : y \mapsto (pr_1(y), f(y))$ est inversible. Donc par le théorème A.2 d'inversion locale, F est un difféomorphisme local en 0. L'inverse de F est de la forme $y \mapsto (pr_1(y), G(y))$ avec G une application d'un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{n-p}$. Donc, quitte à restreindre U, la partie $U \cap M = f^{-1}(0) = F^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est le graphe de la fonction G restreinte à $W \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. □

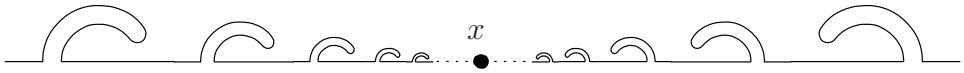
On dit qu'une partie M de $\mathbb{R}^n$ est une *sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et de classe* C^k (et tout simplement *sous-variété* par abus, par exemple quand k est sous-entendu) si

elle vérifie l'une des propriétés du théorème 2.5. On dit alors que la *codimension* de M dans $\mathbb{R}^n$ est $n-p$. Si $p = 1, 2, n-1$, on dit que M est une courbe, surface, hypersurface (différentielle) de $\mathbb{R}^n$ respectivement.

Si $x \in M$, un *paramétrage local* de classe C^k de M en x est une application $f : V \to M$, où V est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$, telle que $f(0) = x$, f soit une immersion C^k sur V, et f soit un homéomorphisme de V sur un voisinage ouvert de x dans M (voir la définition (4)).

Exercice E.5 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k et de rang constant r. Montrer que pour tout y_0 dans $f(U)$, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = y_0$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k de dimension $n-r$.*

Remarques. (i) La définition (1) fait encore sens lorsque $k = 0$. On parle alors de *sous-variété topologique* (ou de classe C^0). La définition (3) fait encore sens aussi, mais elle est strictement plus forte que la première, car l'exemple ci-dessous est une sous-variété topologique de $\mathbb{R}^2$ (i.e. elle vérifie la définition (1)), mais ne peut pas s'écrire localement comme le graphe d'une fonction continue (i.e. elle ne vérifie pas la définition (3)).



(ii) En remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$, et « de classe C^k » par « analytique complexe », ces définitions sont encore équivalentes, on parle alors de *sous-variété complexe* de dimension (complexe) p et de codimension (complexe) $n-p$ dans $\mathbb{C}^n$.

Nous donnerons des exemples de sous-variétés dans le paragraphe 2.4, car ce seront aussi des exemples de variétés différentielles, que nous définissons maintenant.

2.3 La catégorie des variétés différentielles

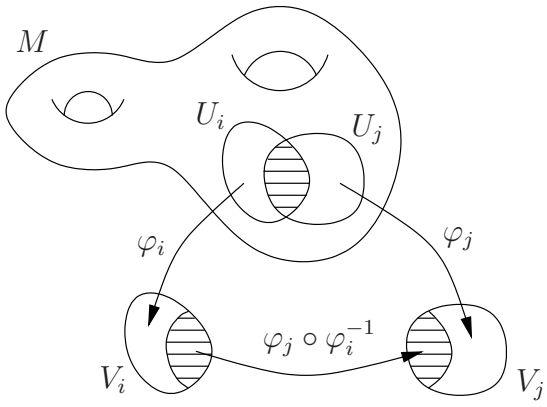
Soient k dans l'ensemble $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ (muni de l'ordre $p \leq \infty \leq \omega$ pour tout p dans $\mathbb{N}$), et n dans $\mathbb{N}$.

• Objets.

Un *atlas de cartes* C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sur un espace topologique M est un ensemble $\mathcal{A}$ de couples (U, φ) où $\varphi : U \to V = \varphi(U)$ est un homéomorphisme d'un ouvert U de M sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, tel que les ouverts U recouvrent M, et que pour tous les couples (U, φ) et (U', φ') dans $\mathcal{A}$, l'application

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$$

soit un C^k-difféomorphisme d'un ouvert de $\varphi(U)$ sur un ouvert de $\varphi'(U')$.



Nous ferons souvent l'abus de noter de la même manière une application et sa restriction à une partie de son domaine de définition. Nous utiliserons souvent par abus des familles indexées $\{(U_i, \varphi_i) \ : \ i \in I\}$, quitte à indexer les atlas par eux-mêmes.

Un tel couple (U_i, φ_i) (et l'application φ_i) est appelé une *carte* (ou *carte locale*) de $\mathcal{A}$ (ou de M par abus), et une *carte (locale) en x* si $x \in U_i$; l'ouvert U_i est appelé le *domaine* de cette carte. L'application $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ est appelée une *application de transition*, ou un *changement de carte*, de $\mathcal{A}$ (ou de M par abus).

Remarque 2.6 Si dans la définition ci-dessus, nous demandons seulement que les U_i soient des sous-ensembles de M et que les φ_i soient des bijections, alors l'existence d'un tel atlas de cartes permet de munir M d'une unique topologie, pour laquelle les U_i sont des ouverts, et les $\varphi_i : U_i \to V_i$ des homéomorphismes. Cette topologie est la topologie la moins fine (voir l'appendice A.1) rendant continues les cartes, i.e. une partie V de M est décrétée ouverte si et seulement si pour toute carte (U, φ) de M, la partie $\varphi(U \cap V)$ est un ouvert de $\varphi(U)$. Pour tout espace topologique X, une application $f : X \to M$ est alors continue si et seulement si pour toute carte (U, φ) de M, l'application $\varphi \circ f$ est continue. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les U_i sont ouverts, que les $\varphi_i : U_i \to V_i$ sont des homéomorphismes, et que cette topologie est la seule qui convienne. Voir l'exercice E.171 de l'appendice A.1.

Lemme 2.7 *Soit M un espace topologique. Tout atlas de cartes C^k de M est contenu dans un unique atlas de cartes C^k maximal (pour l'inclusion).*

Preuve. Deux atlas de cartes C^k sont dit C^k-*compatibles* si leur réunion est encore un atlas de cartes C^k (ou de manière équivalente si l'application de transition entre toute carte de l'un et toute carte de l'autre est un C^k-difféomorphisme). La relation « être C^k-compatible » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas de cartes C^k. La réunion de tous les atlas de cartes C^k qui sont C^k-compatibles à un atlas de cartes C^k donné est alors l'unique atlas maximal cherché contenant ce dernier. □

On appelle *variété différentielle* de classe C^k et de dimension n tout espace topologique
- séparé à base dénombrable,
- muni d'un atlas maximal de cartes C^k (ou de manière équivalente, d'une classe d'équivalence d'atlas de cartes C^k), à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Lorsque k et n sont sous-entendus, on parlera de variété différentielle, voire même par abus de *variété*. On dit une *variété lisse* lorsque $k = \infty$, et une *variété analytique réelle* lorsque $k = \omega$. Lorsque $n = 1$ (respectivement $n = 2$), on parle de *courbe* (respectivement *surface*), différentielle (lisse si $k = \infty$, analytique réelle si $k = \omega$), et par abus lorsque le contexte est clair, de courbe (respectivement surface) tout court, mais il vaut mieux préciser.

Une variété topologique M de dimension n admet un unique atlas de cartes C^0 maximal, l'ensemble de tous les homéomorphismes entre un ouvert de M et un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Munie de cet atlas, M est alors une variété différentielle de classe C^0. Réciproquement, une variété différentielle de classe C^0, privée de son atlas maximal, est une variété topologique. Nous identifierons ainsi dans la suite de ce texte les variétés différentielles de classe C^0 et les variétés topologiques.

La définition fait sens lorsque l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par un espace de Banach $\mathcal{H}$, et l'on parle de *variété modelée sur* $\mathcal{H}$, ou *variété banachique* lorsque $\mathcal{H}$ est sous-entendu. Par exemple, si $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes), alors en composant un atlas de cartes (maximal) à valeurs dans $\mathcal{H}$ par n'importe quel isomorphisme linéaire de $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}^n$, on obtient un atlas de cartes (maximal) à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Le choix de l'isomorphisme linéaire est indifférent, car tout automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ est analytique réel. Donc une variété de classe C^k modelée sur un espace vectoriel réel de dimension n est naturellement muni d'une structure de variété de classe C^k de dimension n, et nous nous autoriserons parfois à définir des atlas de cartes à valeurs dans d'autres espaces vectoriels réels de dimension n que $\mathbb{R}^n$.

Lorsque $k = \omega$, on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$ (ou par n'importe quel espace vectoriel complexe de dimension n, car tout automorphisme linéaire de $\mathbb{C}^n$ est analytique complexe), et demander que les changements de cartes soient analytiques complexes. On parle alors de *variété analytique complexe* (ou *variété holomorphe*) de dimension complexe n. Une variété analytique complexe M de dimension complexe n admet, après oubli de son atlas de cartes holomorphes maximal $\mathcal{A}$, une structure de variété analytique réelle (dite obtenue par *appauvrisement de structure* et encore notée M) de dimension réelle $2n$, en la munissant de l'atlas de cartes C^ω maximal contenant $\mathcal{A}$.

Soit K un corps local (i.e. une extension finie du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, ou le corps $\mathbb{F}_q((X))$ des séries formelles de Laurent en une indéterminée sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments, munis de leur valeur absolue, voir [Ser1]). Lorsque $k = \omega$, on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par K^n dans la définition ci-dessus, en demandant que les changements de cartes soient analytiques sur K. On parle alors de *variété analytique rigide*, voir [Sch, Rob, FP] pour plus d'informations.

Une variété différentielle, si l'on oublie qu'elle est munie d'un atlas maximal, est en particulier une variété topologique. On peut remplacer « séparé à base dénombrable » par « métrisable séparable », ou « dénombrable à l'infini », ou « paracompact séparable » dans la définition de variété différentielle, par la proposition 2.2 et l'alinéa suivant l'exercice E.2.

Tout atlas de cartes C^k d'un espace topologique est aussi un atlas de cartes $\mathrm{C}^{k'}$ pour $k' \leq k$. Si M est une variété différentielle C^k, d'atlas maximal $\mathcal{A}$, alors l'espace topologique M peut être, et sera, muni d'une structure de variété différentielle $\mathrm{C}^{k'}$ (dite obtenue par *appauvrissement de structure*, et notée par abus de la même manière), en munissant M de l'atlas maximal de cartes $\mathrm{C}^{k'}$ contenant $\mathcal{A}$.

• **Flèches.**

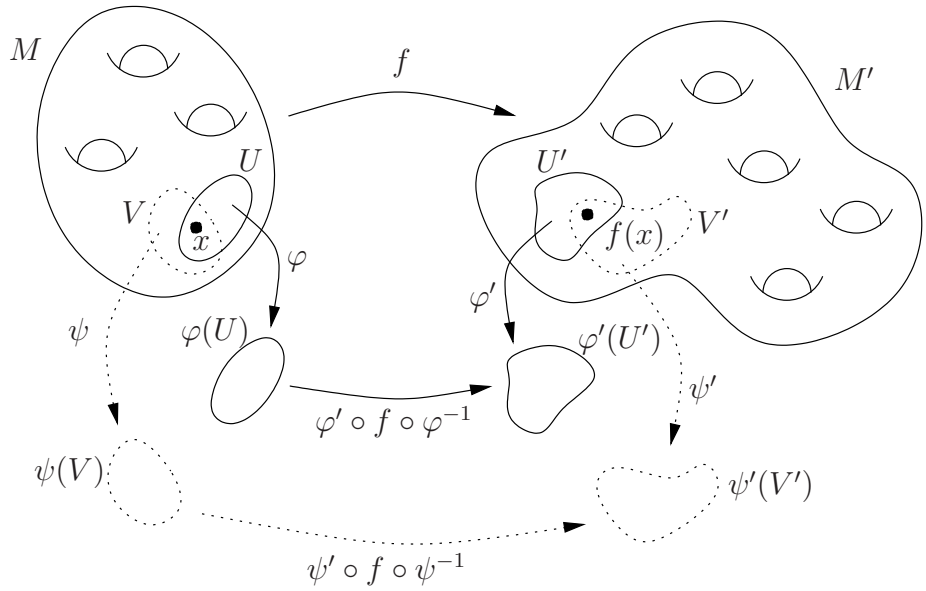
Soient $k \in \mathbb{N}$ et M, M' deux variétés C^k (par exemple obtenues par appauvrissement des structures de deux variétés M, M' de classe $\mathrm{C}^{k'}, \mathrm{C}^{k''}$ avec $k', k'' \geq k$) et $f : M \to M'$ une application.

Soient (U, φ) et (U', φ') des cartes de M, M' respectivement ; l'application

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(U')) \to \varphi'(U')$$

s'appelle *l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (U', φ')*.

L'application f est dite *de classe* C^k en un point x de M s'il existe des cartes (U, φ) et (U', φ') de M, M' en $x, f(x)$ respectivement, telles que $f(U) \subset U'$ et que l'application f lue dans les cartes (U, φ) et (U', φ') soit de classe C^k en $\varphi(x)$.



Par le théorème de composition des applications différentiables, l'application f est de classe C^k en un point x de M si et seulement si elle est continue en x et si pour toutes les cartes (U, φ) et (U', φ') de M, M' en $x, f(x)$ respectivement, l'application f lue dans ces cartes soit de classe C^k en $\varphi(x)$.

Notons que si $k > 0$, le rang (voir l'appendice A.3) de l'application lue dans des cartes en l'image de x ne dépend pas de ces cartes, et sera donc appelé le *rang* de f en x.

On dit qu'une application $f : M \to M'$ est *de classe* C^k si elle est de classe C^k en tout point de M. Une application de classe C^k est en particulier continue. On note $\mathrm{C}^k(M, M')$ l'ensemble des applications de classe C^k de M dans M'. Si $0 \leq k' \leq k$, alors $\mathrm{C}^k(M, M') \subset \mathrm{C}^{k'}(M, M')$

Le théorème de composition des applications différentiables s'étend aux variétés différentielles : si M, M', M'' sont trois variétés C^k, et si $f : M \to M'$ et $g : M' \to M''$ sont des applications de classe C^k en x et en $f(x)$ respectivement, alors $g \circ f : M \to M''$ est de classe C^k en x ; donc si $f : M \to M'$, $g : M' \to M''$ sont des applications de classe C^k, alors $g \circ f : M \to M''$ est de classe C^k. Ceci découle immédiatement du cas des ouverts des espaces $\mathbb{R}^n$ en considérant des applications lues dans des cartes.

Pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ (munis de leur structure de variété C^k évidente, voir paragraphe 2.4.1), l'ensemble $\mathrm{C}^k(M, K)$ est une sous-algèbre de la K-algèbre de toutes les applications de M dans K (munie des opérations d'addition et de multiplications points par points).

La collection des variétés C^k, la collection des ensembles d'applications C^k entre deux variétés C^k, les applications identités des variétés C^k et la composition des applications C^k forment donc une catégorie (voir l'appendice A.6).

Soit $f : M \to M'$ une application de classe C^k. Nous renvoyons à l'appendice A.3 pour des rappels de terminologie du calcul différentiel.

On dit que f est un C^k-*difféomorphisme* (ou difféomorphisme tout court lorsque k est sous-entendu – dans les exercices et en pratique, $k = \infty$ est souvent sous-entendu–) si f est bijective et si son inverse est aussi de classe C^k. Remarquons que f est de classe C^0 si et seulement si elle est continue, et que f est un C^0-difféomorphisme si et seulement si f est un homéomorphisme. Deux variétés différentielles de classe C^k sont dites C^k-*difféomorphes* (ou *isomorphes* lorsque k est sous-entendu) s'il existe un C^k-difféomorphisme de l'une dans l'autre.

Si $x \in M$, on dit que f est une *immersion* en x si $k > 0$ et s'il existe des cartes locales en x et en $f(x)$ telles que l'application f lue dans ces cartes soit une immersion en l'image de x. On dit que f est une *immersion* si f est une immersion en tout point de M. On définit de même une *submersion en un point*, une *submersion*, une *application de rang constant* au voisinage d'un point, et une *application de rang constant* (aussi appelée *subimmersion*). Remarquons que la composée de deux immersions est une immersion, que la composée de deux submersions est une submersion, mais que la composée de deux applications de rang constant n'est pas forcément de rang constant (voir les exercices E.29 et E.30).

Les définitions précédentes s'étendent aussi au cas où M et M' sont des variétés analytiques complexes. En particulier, une application continue $f : M \to M'$ est dite *analytique complexe* ou *holomorphe* si les applications lues dans les cartes le sont.

Les corollaires A.5, A.6 et A.7 de l'appendice, donnant des formes normales locales des immersions, submersions et applications de rang constant, sont des résultats locaux, donc on obtient immédiatement leur extension pour les variétés :

Théorème 2.8 *Soient M, N deux variétés de classe C^k de dimensions p, q, soit x un point de M et $f : M \to N$ une application de classe C^k.*

(Forme normale locale des immersions) *Si f est une immersion en x, alors pour toute carte locale φ en x telle que $\varphi(x) = 0$, il existe une carte locale ψ en $f(x)$ avec $\psi(f(x)) = 0$ telle que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\,(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)\ .$$

(Forme normale locale des submersions) *Si f est une submersion en x, alors pour toute carte locale ψ en $f(x)$ telle que $\psi(f(x)) = 0$, il existe une carte locale φ en x avec $\varphi(x) = 0$, telle que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\,(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_q)\ .$$

(Forme normale locale des applications de rang constant) *Si f est une application de rang constant $r \leq \min\{p, q\}$ sur un voisinage de x, alors il existe une carte locale ψ en $f(x)$ avec $\psi(f(x)) = 0$ et une carte locale φ en x avec $\varphi(x) = 0$, telles que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\,(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)\ . \ \square$$

Comme tout recouvrement ouvert d'une variété différentielle admet un recouvrement plus fin formé de domaines de cartes, et par une preuve analogue, la proposition 2.3 d'existence de partition de l'unité s'étend pour donner des partitions de l'unités de classe C^k (i.e. dont chaque application est de classe C^k), pour k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Attention ce résultat n'est pas valable en analytique réel (ni complexe), le lemme clef 2.4 n'étant plus vérifié.

Proposition 2.9 *Soient k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et M une variété de classe C^k. Tout recouvrement ouvert de M admet une partition de l'unité de classe C^k qui lui est subordonnée. Si de plus M est compacte, alors tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini et une partition de l'unité finie de classe C^k qui est subordonnée à ce sous-recouvrement.* $\square$

• Le point de vue des faisceaux

Le point de vue des faisceaux, ou point de vue fonctionnel, défend l'idée que bien comprendre un objet, c'est bien comprendre les fonctions qui sont définies sur cet objet. Ainsi Platon dans sa caverne aurait-il pu penser à faire varier les sources d'éclairages pour étudier un objet par ses ombres projetées.

Soit X un espace topologique. Un *faisceau d'espaces vectoriels de fonctions réelles sur X* (ou par abus *faisceau* dans ce qui suit) est la donnée, notée $\mathcal{F}$, pour tout ouvert U de X d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}(U)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^U$ des fonctions réelles sur U, telle que

1. pour tous les ouverts $U \subset V$, l'application de restriction $\varphi \mapsto \varphi_{|U}$ de $\mathbb{R}^V$ dans $\mathbb{R}^U$ envoie $\mathcal{F}(V)$ dans $\mathcal{F}(U)$,
2. pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X de réunion $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, si $(f_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$ vérifie la condition de compatibilité

$$\forall\, i, j \in I, \quad f_{i|U_i\cap U_j} = f_{j|U_i\cap U_j}\ ,$$

alors l'unique f dans $\mathbb{R}^U$ tel que $f_{|U_i} = f_i$ appartient à $\mathcal{F}(U)$.

La première condition s'appelle la *stabilité par restriction.* La seconde condition s'appelle la *condition de localité.* Elle est présente pour donner du sens au fait que les fonctions qui vont nous intéresser sont celles dont la définition est « locale ». Par exemple, si, pour tout ouvert U, on note $\mathrm{C}^0_X(U) = \mathrm{C}^0(U, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur U, alors C^0_X est un faisceau. Si X est une variété différentielle de classe C^k, si $\mathrm{C}^k_X(U)$ est l'espace vectoriel des applications réelles de classe C^k, de U (muni de sa structure de variété C^k évidente, voir paragraphe 2.4.2) dans $\mathbb{R}$, pour tout ouvert U de X, alors C^k_X est un faisceau. Si X est une variété holomorphe, si $\mathrm{C}_X(U)$ est l'espace vectoriel des applications holomorphes de U dans $\mathbb{C}$, alors C_X est un faisceau d'espaces vectoriels de fonctions complexes (pour la définition évidente analogue au cas réel).

C'est parce que le fait d'être continu ou d'être de classe C^k est une propriété locale que ces exemples sont bien des faisceaux. Par contre, si $X = \mathbb{R}$ et si λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors $U \mapsto \mathbb{L}^1(U, \lambda_{|U})$ n'est pas un faisceau d'espaces vectoriels de fonctions réelles sur X, car l'intégrabilité n'est pas une notion locale. Nous renvoyons par exemple à [Gode1] pour une étude plus approfondie des faisceaux.

Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux faisceaux sur des espaces topologiques X, X'. Un *isomorphisme* de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$ est un homéomorphisme $\psi : X \to X'$ tel que, pour tout ouvert U de X', l'application

$f \mapsto f \circ \psi$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{F}'(U)$ sur $\mathcal{F}(\psi^{-1}(U))$. Si ψ est un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$, alors ψ^{-1} est un isomorphisme de $\mathcal{F}'$ sur $\mathcal{F}$. Les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un dans l'autre.

Si Ω est un ouvert de X, et si $\mathcal{F}$ est un faisceau, alors en posant $\mathcal{F}_{|\Omega}(U) = \mathcal{F}(U)$ pour tout ouvert U de Ω, on obtient un faisceau $\mathcal{F}_{|\Omega}$ d'espaces vectoriels de fonctions réelles sur Ω.

Par exemple, si M est une variété différentielle de classe C^k et de dimension n, et (U, φ) une carte de M, alors φ est un isomorphisme de $\mathrm{C}^k_{M|U}$ dans $\mathrm{C}^k_{\mathbb{R}^n|\varphi(U)}$. Ainsi, (M, C^k_M) est *localement isomorphe* (en un sens évident que nous n'expliciterons pas ici) à $(\mathbb{R}^n, \mathrm{C}^k_{\mathbb{R}^n})$.

Remarque 2.10 *Soient M, N deux variétés différentielles de classe C^k, et $f : M \to N$ une application continue. Alors f est de classe C^k si et seulement si, pour tout ouvert U de N et pour tout σ dans $\mathrm{C}^k_N(U)$, l'application $f^*\sigma = \sigma \circ f$ appartient à $\mathrm{C}^k_M(f^{-1}(U))$.*

En effet, le sens direct découle de la composition des applications C^k. Le sens réciproque découle, en prenant des cartes locales, du fait qu'une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ est C^k si ses composantes le sont.

Ainsi, les C^k-difféomorphismes de M vers N sont exactement les isomorphismes de (M, C^k_M) sur (N, C^k_N), et deux variétés C^k sont C^k-difféomorphes si et seulement si leurs faisceaux de fonctions C^k sont isomorphes. En particulier, si M est de dimension n, alors les cartes C^k de M sont exactement les isomorphismes entre des couples $(U, \mathrm{C}^k_{M|U})$ et (V, C^k_V) pour U un ouvert de M et V un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.11 *Si X est un espace topologique séparé à base dénombrable et si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur X tel que $(X, \mathcal{F})$ soit localement isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \mathrm{C}^k_{\mathbb{R}^n})$, alors il existe une unique structure de variété C^k sur X telle que $\mathcal{F} = \mathrm{C}^k_X$.*

En effet, l'ensemble des couples (U, φ), avec U un ouvert de X et φ un isomorphisme de $(U, \mathcal{F}_{|U})$ sur $(V, \mathrm{C}^k_{\mathbb{R}^n|V})$ pour V un certain ouvert de $\mathbb{R}^n$, forme un atlas de cartes C^k sur X, et la structure de variété C^k sur X définie par cet atlas convient.

On peut donc définir une variété C^k de dimension n comme un espace topologique X séparé à base dénombrable muni d'un faisceau $\mathcal{F}$ tel que $(X, \mathcal{F})$ soit localement isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \mathrm{C}^k_{\mathbb{R}^n})$.

Par exemple, si N est une partie localement fermée d'une variété M de classe C^k, alors on peut définir un faisceau $\mathcal{F}_N$ sur l'espace topologique N, où, pour tout ouvert Ω de N, l'espace vectoriel $\mathcal{F}_N(\Omega)$ est l'espace des applications de Ω dans $\mathbb{R}$, qui sont localement sur N restriction d'une application C^k réelle sur un ouvert de M.

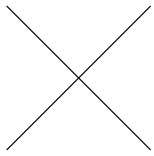
Exercice E.6 *Avec les notations ci-dessus, et la définition de sous-variété du paragraphe 2.4.2 suivant, montrer que le couple $(N, \mathcal{F}_N)$ est une variété C^k si et seulement si N est une sous-variété C^k de M. De plus, si ces conditions sont réalisées, montrer que $\mathcal{F}_N = \mathrm{C}^k_N$.*

2.4 Exemples de variétés différentielles

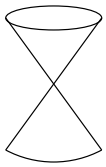
2.4.1 Exemples triviaux, contre-exemples et culture

Commençons par donner des exemples d'espaces topologiques qui ne sont pas des (sous)-variétés différentielles.

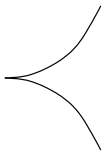
La preuve du fait que chacun des exemples ci-dessous n'est pas une sous-variété différentielle C^1 est laissée au lecteur. (Par contre, le dessin de droite est une sous-variété topologique du plan.)



$x^2 - y^2 = 0$

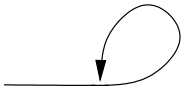


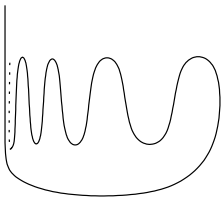
$x^2 + y^2 - z^2 = 0$

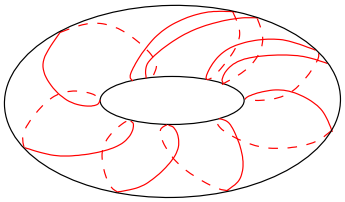


$x = t^2, y = t^3$

Alors que la préimage d'un point par une submersion est une sous-variété (voir le corollaire 2.22), il n'est pas vrai que l'image d'une immersion (même injective) est une sous-variété. Chaque dessin ci-dessous représente une *sous-variété immergée*, i.e. l'image d'une variété par une immersion injective dans une variété (attention à la terminologie, une sous-variété immergée n'est pas toujours une sous-variété). La preuve du fait qu'aucune d'entre elles n'est une sous-variété différentielle C^1 est laissée au lecteur. Mais notons que la raison pour laquelle l'exemple de gauche ci-dessous n'est pas une variété est la même que celle pour laquelle l'exemple de gauche ci-dessus ne l'est pas, et qu'une sous-variété différentielle est en particulier localement fermée (voir la remarque 2.15).







$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1 \ : \ \exists\, t \in \mathbb{R},\ z_1 = e^{it}, z_2 = e^{i\sqrt{2}t}\}$

Passons aux exemples triviaux. Tout espace topologique discret dénombrable M admet une unique structure de variété C^k (qui est de dimension 0) : l'atlas maximal (indépendant de k) est l'ensemble des (uniques) applications des singletons de M à valeurs dans $\mathbb{R}^0 = \{0\}$. Dans ce texte, tout espace topologique discret dénombrable sera muni de cette structure de variété différentielle.

Tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ admet une structure de variété différentielle de classe C^ω, pour l'atlas C^ω maximal contenant l'application identité de l'espace topologique U dans l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Bien sûr cet exemple est trivial, mais on peut remplacer $\mathbb{R}^n$ par n'importe quel espace vectoriel réel E de dimension n, celui-ci étant (sauf mention contraire) muni dans ce texte de la topologie définie par n'importe laquelle de ses normes. Ainsi, tout ouvert V de E admet une structure naturelle de variété C^ω modelée sur E. La structure de variété C^ω obtenue sur V est celle dont l'atlas est l'atlas maximal contenant la restriction à V de n'importe quel isomorphisme linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$. De même, tout ouvert de $\mathbb{C}^n$, ou de n'importe quel espace vectoriel complexe de dimension finie, admet une structure de variété analytique complexe. Sauf mention explicite du contraire, un ouvert dans un tel espace vectoriel sera muni de cette structure de variété différentielle, dite *standard*.

Par exemple, les ouverts $GL_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{C})$ des espaces vectoriels réels de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement sont des variétés différentielles de classe C^ω (et $GL_n(\mathbb{C})$ est aussi une variété analytique complexe en tant qu'ouvert de l'espace vectoriel complexe $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Soit M un espace topologique séparé et à base dénombrable. Le groupe $\mathrm{Homeo}(M)$ des homéomorphismes f de M agit sur l'ensemble des structures de variétés différentielles de classe C^k sur M, en associant à l'atlas de cartes $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ l'atlas $(f^{-1}(U_i), \varphi_i \circ f)_{i\in I}$ (qui vérifie clairement les conditions voulues). Par définition d'un isomorphisme de variété C^k, deux structures de variétés C^k sur M sont isomorphes si et seulement si elles sont dans la même orbite de $\mathrm{Homeo}(M)$ pour cette action. En terme de faisceaux, c'est un cas particulier du fait que le groupe des homéomorphismes d'un espace topologique, qui agit de manière évidente sur la collection des faisceaux d'espaces vectoriels de fonctions réelles sur X, préserve les faisceaux localement isomorphes au faisceau $(\mathbb{R}^n, \mathrm{C}^k_{\mathbb{R}^n})$.

Une orbite de cette action de $\mathrm{Homeo}(M)$ est souvent non dénombrable. Par exemple, considérons la variété différentielle C^1 standard $\mathbb{R}$. L'homéomorphisme $t \mapsto t^3$ de $\mathbb{R}$ envoie la structure usuelle sur une structure différentielle C^1 différente sur $\mathbb{R}$. Une variation sur cet exemple montre qu'il existe un ensemble non dénombrable de structures (deux à deux distinctes) de variété analytique réelle sur $\mathbb{R}$. Par contre pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, le groupe $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des structures de variété différentielle C^k sur $\mathbb{R}$ (voir l'exercice E.7 et le théorème 2.12 suivants).

Exercice E.7 *Montrer qu'il n'existe, à difféomorphisme analytique réel près, qu'une et une seule structure analytique réelle sur une variété topologique de dimension* 1.

Enfin, concluons ce paragraphe en donnant quelques résultats de culture générale, dont nous n'aurons pas besoin dans ce cours, mais qu'il est utile de connaître pour éviter les pièges.

Le premier résultat, pour lequel nous renvoyons à [Hir, Chap. 2], dit que le problème de classification des variétés C^1 ou analytiques réelles est le même.

Théorème 2.12 *(Voir par exemple [Hir]) Soient $k \leq k'$ dans $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$. Toute variété de classe C^k est C^k-difféomorphe à une variété de classe $\mathrm{C}^{k'}$. Si deux variétés de classe $\mathrm{C}^{k'}$ sont C^k-difféomorphes, alors elles sont $\mathrm{C}^{k'}$-difféomorphes.* □

Ceci justifie a priori que nous nous intéressions dans ce cours surtout aux variétés lisses. Mais cela ne veut pas dire que la notion d'application C^k avec $k < \infty$ n'a pas d'intérêt ! Certains problèmes de systèmes dynamiques, par exemple concernant l'itération d'applications C^k, ou de feuilletages C^k (au sens du paragraphe 4.8), ont des comportements très différents suivant leur degré k de différentiabilité (voir par exemple [Arn, page 105] [KH]). La preuve du théorème 2.12 est très différente suivant que l'on regarde le cas analytique réel ou pas. En particulier elle est beaucoup plus difficile si $k' = \omega$, par l'absence de partitions de l'unité en analytique réel.

Comme le montre le résultat ci-dessous, en petite dimension (voir par exemple [Moi]), il n'y a pas de différence entre la classification des variétés topologiques et celle des variétés lisses.

Mais le tore (i.e. l'espace topologique produit $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ de deux copies du cercle), qui n'admet à isomorphisme près qu'une seule structure de variété analytique réelle de dimension (réelle) 2, possède une infinité non dénombrable de structures de variété analytique complexe de dimension (complexe) 1 deux à deux non isomorphes, voir par exemple [Rey] : par exemple les variétés analytiques complexes quotients (au sens de la partie 2.4.2) $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau]$ et $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau']$ pour $\operatorname{Im}\tau, \operatorname{Im}\tau' > 0$ sont isomorphes si et seulement si $\tau = \gamma\tau'$ pour $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, où $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agit par homographies

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

sur le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$.

Théorème 2.13 *(Voir par exemple [Moi]) Toute variété topologique de dimension* 2 *ou* 3 *admet une structure de variété analytique réelle. Deux variétés analytiques réelles de dimension* 2 *ou* 3*, qui sont homéomorphes, sont* C^ω*-difféomorphes.* □

Par contre, il existe des variétés topologiques qui n'admettent pas de structure de variété C^1 (voir par exemple [Kerv]). Il existe aussi de nombreuses variétés topologiques qui admettent des structures C^1 (donc des structures analytiques réelles) non isomorphes.

Par exemple, voici pour $n \leq 18$ le nombre $\kappa(n)$ de classes d'isomorphisme de structures différentiables C^1 (donc de classes d'isomorphisme de structures analytiques réelles) sur l'espace topologique $\mathbb{S}_n$ (la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$), voir [KM] :

n	≤ 6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\kappa(n)$	1	28	2	9	6	992	1	3	2	16256	2	16	16

Dès la dimension 4, la classification des variétés topologiques et celle des variétés lisses diffèrent. Voir par exemple [Fre] et [Gom], cette dernière référence construisant des structures différentielles sur $\mathbb{R}^4$ non isomorphes à la structure différentielle standard de $\mathbb{R}^4$.

En dimension 1, une classification des variétés topologiques (à homéomorphisme près) est un exercice (voir l'exercice E.1).

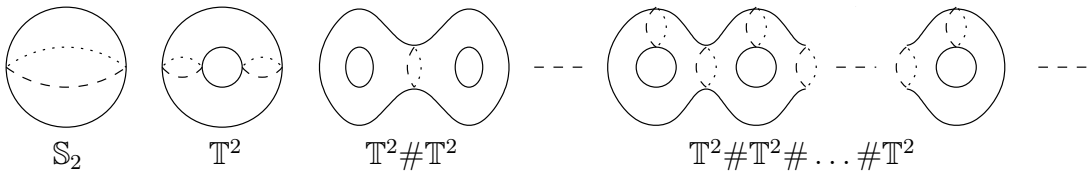
En dimension 2, une classification des surfaces topologiques (à homéomorphisme près) est bien connue (voir par exemple [Gra] [Hir, Chap. 9] [Moi] et surtout [Rey] pour le cas compact, et [Kere, Ric] pour le cas général ; voir aussi l'exercice E.23 pour avoir une idée des problèmes pour les surfaces non compactes). Nous donnons ci-dessous la classification (topologique, donc différentiable d'après le théorème 2.13) des surfaces compactes connexes, après une définition.

Soient M, M' deux variétés topologiques connexes de dimension $n \geq 1$. Notons B la boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$, et $B_{\frac{1}{2}}$ la boule ouverte concentrique de rayon moitié, de bord $S_{\frac{1}{2}}$. Soient $\varphi : B \to M, \varphi' : B \to M'$ deux homéomorphismes sur leur image, et $f : \varphi(S_{\frac{1}{2}}) \to \varphi'(S_{\frac{1}{2}})$ la restriction de $\varphi' \circ \varphi^{-1}$. On appelle *somme connexe* de M et M' l'espace topologique obtenu par recollement de $M - \varphi(B_{\frac{1}{2}})$ et de $M' - \varphi(B'_{\frac{1}{2}})$ par f (voir l'appendice A.1 pour une définition) :

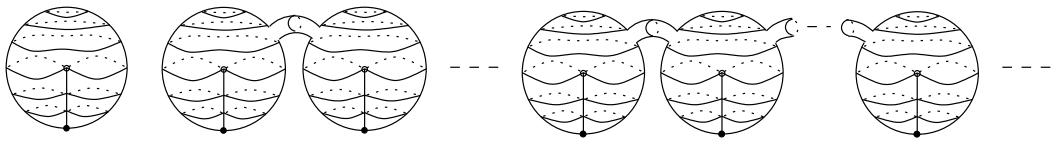
$$M \# M' = (M - \varphi(B_{\frac{1}{2}})) \amalg_f (M' - \varphi(B'_{\frac{1}{2}})) \ .$$

Il est facile de voir que $M\#M'$ est une variété topologique de dimension n. On montre qu'à homéomorphisme près, elle ne dépend pas du choix de φ, φ', et que la somme connexe de M avec la sphère $\mathbb{S}_n$ est homéomorphe à M. Donc sur l'ensemble des classes d'homéomorphisme de variétés topologiques de dimension n, la somme connexe induit une opération associative et commutative, admettant la classe de la sphère $\mathbb{S}_n$ comme élément neutre. Par convention, la somme connexe de k copies de M est M si $k = 1$, et $\mathbb{S}_n$ si $k = 0$. Nous renvoyons au paragraphe 2.4.3 pour la définition du tore $\mathbb{T}^2$ et du plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, et leurs représentations graphiques.

Théorème 2.14 *(Voir par exemple [Rey]) Toute surface topologique compacte connexe est homéomorphe à la somme connexe de $g \geq 0$ copies du tore $\mathbb{T}^2$ ou à la somme connexe de $g \geq 1$ copies du plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, et deux telles surfaces ne sont pas homéomorphes.* □



$\mathbb{S}_2$ sphère — $\mathbb{T}^2$ tore — $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ — $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\ldots\#\mathbb{T}^2$ surface orientable de genre g



$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ plan projectif — $\mathbb{K}_2 = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ bouteille de Klein — $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})\#\ldots\#\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ surface non orientable de genre g

En dimension 3, une classification des variétés topologiques (à homéomorphisme près) est toujours ouverte. Nous renvoyons à l'excellent article de survol de J. Milnor [Mil2] pour un état de l'art concernant cette classification, des travaux de Poincaré aux annonces de Perelman, en passant par les résultats de Thurston.

2.4.2 Exemples familiaux

Nous donnons dans ce paragraphe quelques grandes méthodes pour construire des variétés différentielles, qui produisent souvent des familles intéressantes de tels objets. Nous étudierons les grandes classes ensemblistes des sous-ensembles, images directes, images réciproques, somme, produit, quotient.

• **Sous-variétés.** Soient $k \leq k'$ dans $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, p dans $\mathbb{N}$ et M une variété $\mathrm{C}^{k'}$. Une partie N de M est une *sous-variété* C^k de dimension p de M si pour tout x dans N et pour toute carte locale (U, φ) de classe C^k de M en x, le sous-espace $\varphi(U \cap N)$ est une sous-variété (au sens du paragraphe 2.2) de classe C^k et de dimension p de $\varphi(U)$ au voisinage de $\varphi(x)$. Il suffit en fait de demander l'existence d'au moins une telle carte locale. Si M est de dimension n, on dit alors que la sous-variété N est *de codimension* $n - p$.

Par exemple, les ouverts d'une variété sont des sous-variétés, et les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (au sens du paragraphe 2.2) sont des sous-variétés de la variété $\mathbb{R}^n$.

Exercice E.8 *Quelles sont les sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$?*

Remarque 2.15 *Une sous-variété N d'une variété M est localement fermée dans M (i.e. tout point de N admet un voisinage U dans M tel que $N \cap U$ soit fermé dans U, voir l'appendice A.1 et l'exercice E.170).*

En effet, $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ est (localement) fermé dans $\mathbb{R}^n$, et la propriété est invariante par homéomorphismes (locaux), donc cette remarque est immédiate avec la définition par redressement des sous-variétés (si $k > 0$, c'est encore plus évident en utilisant la définition par fonctions implicites.) Par contre, une sous-variété n'est en général pas fermée (penser à un intervalle ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}$).

Les couples $(U \cap N, \varphi_{|U \cap N})$, avec U un ouvert de M et φ une carte de classe C^k de M telle que $\varphi(U \cap N)$ soit contenu dans $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, forment alors (par le théorème 2.5) un atlas de cartes C^k de N à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (après identification évidente de $\mathbb{R}^p$ et de $\mathbb{R}^p \times \{0\}$). Notons qu'un sous-espace topologique d'un espace topologique séparé et à base dénombrable l'est encore. Si $k > 0$, si $M = \mathbb{R}^n$ et si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ est l'ensemble des paramétrages locaux C^k de N, alors $((\varphi_\alpha(U_\alpha), \varphi_\alpha^{-1}))_{\alpha \in A}$ est un atlas de cartes sur N, qui est C^k-compatible au précédent, donc définit la même structure de variété C^k sur N.

Nous munirons toujours une sous-variété C^k de cette structure de variété différentielle de classe C^k, dite *standard*. Cette structure de variété différentielle de classe C^k est uniquement caractérisée par la propriété universelle suivante (voir aussi l'exercice E.6).

Proposition 2.16 *Soient k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, M une variété C^k, N une sous-variété C^k de M et $i : N \to M$ l'inclusion. Alors i est une immersion injective de classe C^k, et la structure de variété différentielle C^k sur N ci-dessus est l'unique structure de variété différentielle sur N vérifiant la propriété suivante :*

pour toute variété P de classe C^k, une application $f : P \to N$ est de classe C^k si et seulement si $i \circ f : P \to M$ l'est.

Preuve. Pour toute telle structure de variété différentielle sur N, cette propriété universelle, appliquée à l'application identité de N dans N, implique que i est C^k. L'unicité se montre, comme souvent pour les propriétés universelles, en considérant l'application identité de N dans N, et en munissant la source d'une telle structure et le but d'une autre telle structure, la propriété universelle disant qu'elle est de classe C^k car $i : N \to M$ l'est, et donc par symétrie, un C^k-difféomorphisme, donc les structures coïncident.

Le fait que la structure construite vérifie cette propriété universelle, ainsi que le fait que i soit une immersion, est évident, en prenant des cartes locales. □

Exercice E.9 *Montrer que si N est une sous-variété C^k de M, si P est une variété C^k, et si $f : N \to P$ est la restriction d'une application C^k d'un voisinage ouvert de N dans M, alors f est C^k. Voir l'exercice E.38 pour le problème de la réciproque.*

Il est immédiat que toute sous-variété d'une sous-variété de M est une sous-variété de M (voir l'exercice E.31 et sa solution). Comme cas particulier du fait que toute sous-variété C^k d'une variété C^k soit une variété C^k, toute sous-variété C^k d'un espace $\mathbb{R}^n$ est

une variété différentielle de classe C^k. En fait, la réciproque de ce résultat est vraie, voir ci-dessous après quelques définitions.

• **Plongements.** Soient k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ et M, N deux variétés C^k. Une application f de M dans N est un C^k*-plongement* (ou plongement tout court quand le degré de différentiabilité est sous-entendu) si

- $f : M \to f(M)$ est un homéomorphisme (où $f(M)$ est muni de la topologie induite) et,
- lorsque $k > 0$, l'application f est une immersion C^k.

Attention, il y a bien deux conditions dans cette définition, et les exemples 2.4.1 montrent qu'une immersion injective n'est en général pas un plongement, la demande que f soit un homéomorphisme sur son image est cruciale. Attention, l'image d'un plongement n'est pas toujours fermée. Par exemple, l'application d'inclusion d'un intervalle ouvert borné non vide dans $\mathbb{R}$ est un plongement d'image non fermée.

Nous renvoyons à l'appendice A.1 pour la définition d'une application propre et ses propriétés, dont le résultat suivant découle immédiatement.

Proposition 2.17 *Soient M et N deux variétés de classe C^k. Toute immersion C^k (application continue si $k = 0$) injective et propre de M dans N est un homéomorphisme sur son image, donc un C^k-plongement, d'image fermée. En particulier, si M est compacte, toute immersion C^k (application continue si $k = 0$) injective de M dans N est un C^k-plongement.* □

La proposition suivante dit en particulier que l'image d'une variété par un plongement C^k avec $k > 0$ est une sous-variété, donc une variété.

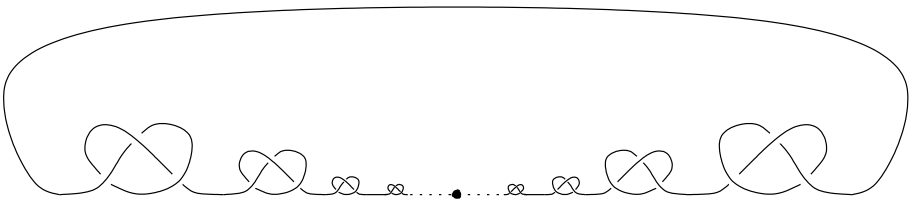
Proposition 2.18 *Soient M, N deux variétés C^k, avec $k \geq 1$. Une application f de M dans N est un C^k-plongement si et seulement si*

1. *$f(M)$ est une sous-variété C^k de N, et*
2. *$f : M \to f(M)$ est un C^k-difféomorphisme.*

Preuve. Comme l'injection d'une sous-variété C^k de N dans N est une immersion C^k, il est immédiat que si ces deux conditions sont vérifiées, alors f est un C^k-plongement. Réciproquement, soit $f : M \to N$ un C^k-plongement.

Comme f est un homéomorphisme sur son image, il suffit de vérifier que $f(M)$ est une sous-variété C^k de N, et que, pour tout point x de M, l'application f est un C^k-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de x dans M sur un voisinage ouvert de $f(x)$ dans $f(M)$. Mais ces deux propriétés sont des propriétés locales, et il suffit donc de les vérifier au voisinage de tout point $f(x)$ et x respectivement. Soient U un voisinage ouvert de x dans M, et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans N, qui sont des domaines de cartes. Comme f est un homéomorphisme sur son image, on peut supposer que $f(U) \subset f(M) \cap V$. En remplaçant f par une application lue dans les cartes, on se ramène au cas où M, N sont des ouverts de $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ respectivement. Le résultat découle alors du théorème 2.5 (qui nécessite $k \geq 1$). □

Comme le montre le *nœud sauvage* suivant, image d'un plongement topologique du cercle $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}^3$, l'image d'une variété topologique par un plongement topologique n'est pas toujours une sous-variété.



Comme énoncé dans la remarque (1) ci-dessous, toute variété différentielle est difféomorphe à une sous-variété d'un espace $\mathbb{R}^n$. Mais ce résultat ne justifie pas de n'étudier que les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. En effet, de nombreux objets mathématiques ont une structure différentielle « naturelle » qui n'est pas une structure de sous-variété « naturelle », voir par exemple ci-dessous les espaces projectifs et les variétés grassmanniennes, ainsi que les objets construits par quotients comme dans le paragraphe ci-dessous intitulé **Revêtements**, ou comme les espaces homogènes dans le paragraphe 5.8. En pratique en mathématiques, il y a plus d'objets qui sont construits par quotients d'objets que par sous-objets.

Dans ces notes, nous ne démontrerons que le résultat suivant.

Théorème 2.19 *Pour tout k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et toute variété compacte M de classe C^k, il existe m dans $\mathbb{N}$ et un C^k-plongement de M dans $\mathbb{R}^m$.*

Preuve. Soit n la dimension de M. Par compacité, M admet un atlas de cartes fini $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq p}$. Par la proposition 2.9 et sa preuve, il existe une partition de l'unité $(f_j)_{1 \leq j \leq q}$ de classe C^k, avec f_j constante non nulle sur un ouvert V_j, et de support contenu dans U_{i_j}, de sorte que $(V_j)_{1 \leq j \leq q}$ recouvre M. L'application $f_j \varphi_{i_j}$, prolongée par 0 en dehors de U_{i_j}, est de classe C^k. L'application $\psi = (f_1 \varphi_{i_1}, \ldots, f_q \varphi_{i_q}, f_1, \ldots, f_q)$ de M dans $\mathbb{R}^{(n+1)q}$ est une immersion C^k (car tout point x appartient à l'un des ouvert V_j sur lequel f_j est constant et φ_{i_j} est une immersion). Elle est injective (car si $\psi(x) = \psi(y)$, et si $x \in V_j \subset U_{i_j}$, alors $f_j(y) = f_j(x) > 0$, donc $y \in U_{i_j}$, et φ_{i_j} étant injective sur U_{i_j}, on a donc $x = y$). Donc ψ est un C^k-plongement par la proposition 2.17. $\square$

Encore une fois, l'utilisation de partitions de l'unité empêche la preuve de marcher pour le cas analytique réel. Voici quelques remarques de nature culturelle, pour laquelle nous renvoyons aux livres de [Hir, Ada].

Remarque. (1) Pour tout k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, un résultat de Whitney [Whi] montre que toute variété C^k de dimension $n > 0$ admet un C^k-plongement dans $\mathbb{R}^{2n}$, et que toute variété C^k de dimension $n > 1$ admet une immersion C^k dans $\mathbb{R}^{2n-1}$. Comme tout sous-espace d'un espace séparé et à base dénombrable l'est aussi, la condition imposée aux variétés différentielles d'être séparées et à base dénombrable est donc nécessaire pour la validité du théorème de Whitney.

(2) Ce résultat de Whitney est optimal, car le plan projectif réel $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (qui est de dimension 2, voir ci-dessous) ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^3$ (et l'espace projectif $\mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})$ ne se plonge pas dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ pour $n \geq 1$), voir par exemple [Hir, page 108]. De plus, comme il est facile à montrer (voir l'exercice E.27), la sphère $\mathbb{S}_2$ n'admet pas d'immersion C^1 dans $\mathbb{R}^2$.

• **Images réciproques.** Fixons un élément k dans $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$, deux variétés M et N de classe C^k et de dimension m et n respectivement, et une application $f : M \to N$ de classe C^k.

Proposition 2.20 *Soit $y \in f(M)$. Si f est de rang constant r sur un voisinage de $f^{-1}(y)$, alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété C^k de M, de dimension $m-r$, qui est fermée.*

Preuve. Comme le fait d'être une sous-variété est un problème local, par le théorème 2.8 de forme normale des applications de rang constant, en prenant des cartes locales, on se ramène au cas où M et N sont des ouverts de $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ respectivement contenant 0, où $f(0) = 0$ et $y = 0$ et où f est une restriction de l'application linéaire $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$. Le résultat en découle. □

Un point x de M est un *point critique* de f si f n'est pas une submersion en x. Un point y de N est une *valeur critique* s'il existe un point critique x tel que $f(x) = y$. Un point de N qui n'est pas une valeur critique est une *valeur régulière*. (Attention, une valeur régulière n'est pas forcément une valeur, en fait tout point de N n'appartenant pas à l'image de f est une valeur régulière !)

Soit M une variété de classe C^1 et de dimension n. Une partie A de M est dite *de mesure nulle* si pour toute carte locale (U, φ) de M, la partie $\varphi(A \cap U)$ de $\mathbb{R}^n$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Tout C^1-difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ préserve les ensembles de mesure nulle, par le théorème de changement de variable pour la mesure de Lebesgue. Donc une partie A de M est de mesure nulle si et seulement si pour tout x dans A, il existe une carte locale (U, φ) de M en x telle que la partie $\varphi(A \cap U)$ de $\mathbb{R}^n$ soit de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

Notons qu'une sous-variété de classe au moins C^1 et de codimension au moins 1 d'une variété M est de mesure nulle dans M, par redressement.

L'abondance des valeurs régulières vient du résultat suivant, dont nous n'aurons pas besoin dans ces notes sous cette forme générale, mais que nous énonçons pour la culture générale (voir par exemple [Hir, page 69], ainsi que le très joli petit livre [Mil]).

Théorème 2.21 (Théorème de Sard) *Soient M et N deux variétés de dimensions m et n, et $f : M \to N$ une application de classe C^k. Si $k > \max\{0, m-n\}$, alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle, et en particulier l'ensemble des valeurs régulières est dense.* □

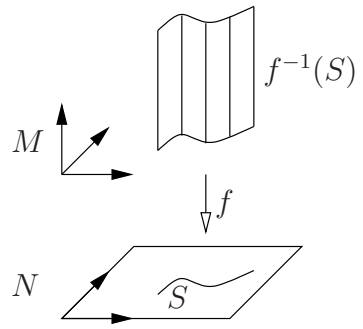
Les valeurs régulières permettent de construire des sous-variétés par image réciproque, comme indiqué dans le résultat suivant.

Porisme 2.22 *Si y est une valeur régulière de f et si $y \in f(M)$, alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété C^k de M, de dimension $m-n$. En particulier, si $f : M \to N$ est une submersion C^k, alors $f^{-1}(y)$ est une sous-variété C^k de M pour tout y dans N.*

Preuve. Comme l'ensemble des points de M en lesquels f est une submersion est un ouvert, et qu'une submersion à valeurs dans N est une application de rang constant n, le résultat découle de la proposition 2.20. □

Une telle sous-variété $f^{-1}(y)$ est appelée une *surface de niveau régulière* (ou *ligne de niveau régulière* si $m - n = 1$). Plus généralement, on a le résultat suivant (voir aussi l'exercice E.72).

Proposition 2.23 *Si $f : M \to N$ est une submersion C^k, si S est une sous-variété C^k de N de dimension p, alors $f^{-1}(S)$ est une sous-variété C^k de M, de dimension $m - n + p$.*



Preuve. Soit x dans $f^{-1}(S)$ et $y = f(x)$. Soit U un voisinage ouvert de y et $g : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion C^k telle que $S \cap U = g^{-1}(g(y))$. Alors $g \circ f$ est une submersion en x, et si $z = g \circ f(x)$, alors $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(z)$, ce qui montre le résultat. $\square$

• **Sommes disjointes.** Soient $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille au plus dénombrable de variétés différentielles de classe C^k et de dimension n, et $(U_{\alpha,i}, \varphi_{\alpha,i})_{i \in I_\alpha}$ un atlas de cartes de M_α pour tout α. Notons X l'espace topologique somme disjointe des M_α (voir l'appendice A.1), qui est séparé et à base dénombrable. Identifions M_α avec son image dans X. Alors il est facile de vérifier que $(U_{\alpha,i}, \varphi_{\alpha,i})_{\alpha \in A,\, i \in I_\alpha}$ est un atlas de cartes C^k sur X, donc définit une structure de variété différentielle de classe C^k et de dimension n sur X. Sauf mention explicite du contraire, une somme disjointe de variétés sera toujours munie de cette structure, dite de *variété somme disjointe*.

Il est immédiat de voir que cette structure sur X est l'unique structure de variété C^k telle que pour toute variété P de classe C^k, une application de X dans P est de classe C^k si et seulement si sa restriction à chaque M_α est C^k. En particulier, les inclusions canoniques des M_α dans X sont des C^k-plongements.

• **Produits.** Si M, N sont deux variétés différentielles de classe C^k, et si $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, $(V_j, \psi_j)_{j \in J}$ sont deux choix d'atlas définissant leur structure différentielle, posons $\phi_{ij} : U_i \times V_j \to \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)$ l'application définie par $(x, y) \mapsto (\varphi_i(x), \psi_j(y))$. Alors il est immédiat de vérifier que $(U_i \times V_j, \phi_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est un atlas de cartes C^k sur l'espace topologique produit $M \times N$, dont la classe d'équivalence ne dépend pas des choix. Un produit de deux espaces topologiques séparés et à base dénombrable l'est encore. Sauf mention explicite du contraire, le produit de deux variétés sera toujours muni de cette structure de variété, dite de *variété produit*.

Remarquons que si M et N sont de dimension m et n respectivement, alors la dimension de la variété produit $M \times N$ est $m+n$. Il est immédiat que les projections $pr_1 : M \times N \to M$ et $pr_2 : M \times N \to N$ sont des submersions surjectives de classe C^k. Notons que par l'identification usuelle d'une fonction à valeurs dans un produit avec le couple de ses deux composantes, on a

$$\mathrm{C}^k(M, N_1 \times N_2) = \mathrm{C}^k(M, N_1) \times \mathrm{C}^k(M, N_2)$$

pour toutes les variétés M, N_1, N_2 de classe C^k : une application d'une variété à valeurs dans une variété produit est C^k si et seulement si ses composantes le sont.

Exercice E.10 *Montrer que la structure de variété produit est l'unique structure de variété C^k sur l'espace topologique produit telle que ceci soit vérifié.*

Dans la fin de ce paragraphe, nous montrons comment utiliser les revêtements (voir l'appendice A.4) pour construire des variétés différentielles, soit en « tirant en arrière » des structures de variété différentielle, soit en « passant au quotient » des structures de variété différentielle.

Le bon outil pour transférer des propriétés locales dans les deux sens est celui des morphismes étales, au sens suivant. Soient M, N deux variétés de classe C^k. Une application $f : M \to N$ est un *morphisme étale* de classe C^k (ou un C^k*-difféomorphisme local*) si pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U de x dans M et un voisinage ouvert V de $f(x)$ dans N tel que $f : U \to V$ soit un C^k-difféomorphisme. Par le théorème d'inversion locale A.2, si M, N sont de dimension m, n respectivement, alors une application $f : M \to N$ est un C^k-difféomorphisme local si et seulement si f est une immersion C^k et $m = n$. On définit de même une application étale holomorphe entre deux variétés holomorphes.

• **Homéomorphismes locaux.** Les homéomorphismes locaux permettent de « tirer en arrière » des structures de variété différentielle. Plus précisément, soient X et B deux espaces topologiques séparés à base dénombrable, et $p : X \to B$ un homéomorphisme local. Si B est muni d'une structure de variété C^k, alors X admet une unique structure de variété C^k telle que p soit un C^k-difféomorphisme local.

En effet, l'ensemble des couples (V, φ) tels que V soit un ouvert de X, la partie $p(V)$ soit un ouvert de B, l'application $p_{|V} : V \to p(V)$ soit un homéomorphisme et le couple $(p(V), \varphi)$ soit une carte locale de B, forme un atlas de cartes C^k sur X. La structure de variété C^k définie par cet atlas sur X convient.

Localement, l'application p induit un isomorphisme entre les faisceaux C^k_X et C^k_B (i.e. pour tout point x de X, il existe des ouverts U dans X et V dans B, tels que $x \in U$ et p soit un isomorphisme de $\mathrm{C}^k_{X|U}$ sur $\mathrm{C}^k_{B|V}$).

• **Revêtements.** Nous renvoyons à l'appendice A.2 pour le vocabulaire des actions de groupes, et à l'appendice A.4 pour les notions de base sur les revêtements.

Soient X, B deux variétés C^k, et $f : X \to B$ une application C^k. On dit que f est un *revêtement* C^k si pour tout $y \in B$, il existe un voisinage ouvert V de y, un espace discret dénombrable D non vide et $h : V \times D \to f^{-1}(V)$ un C^k-difféomorphisme (pour la structure produit à la source) tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{h} & f^{-1}(V) \\ & {}_{pr_1}\searrow & \downarrow f \\ & & V \end{array} .$$

Si X, B sont des variétés analytiques complexes, on définit de même la notion de *revêtement holomorphe* en demandant que h soit un difféomorphisme analytique complexe.

Deux revêtements C^k, $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$, sont *isomorphes* s'il existe un C^k-difféomorphisme $\phi : X \to X'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ {}_{f}\searrow & & \swarrow_{f'} \\ & B & \end{array} .$$

Une propriété fondamentale des revêtements C^k est celle de relèvement unique d'applications C^k, que nous énonçons ci-dessous. Comme un revêtement C^k est en particulier un C^k-difféomorphisme local, la proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition A.10 de l'appendice A.4.

Proposition 2.24 (Théorème du relèvement) *Si $p : X \to B$ est un revêtement C^k et Y est une variété C^k simplement connexe, pour tous x dans X et y dans Y tels que*

$p(x) = f(y)$, pour toute application $f : Y \to B$ de classe C^k, il existe un et un seul relèvement $\widetilde{f} : Y \to X$ de classe C^k de f tel que $\widetilde{f}(y) = x$. $\square$

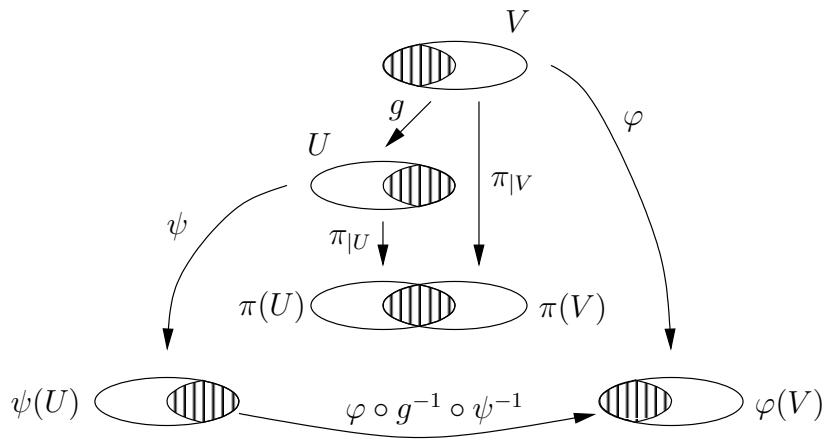
Si $p : X \to B$ est un revêtement holomorphe, et si $f : Y \to B$ est analytique complexe, alors un théorème du relèvement analogue fournit un relèvement $\widetilde{f} : Y \to X$ analytique complexe.

La construction principale de revêtements C^k est la suivante. Soit G un groupe discret agissant, par C^k-difféomorphismes, librement et proprement sur une variété différentielle X de classe C^k.

Proposition 2.25 *L'espace topologique quotient $G\backslash X$ admet une unique structure de variété différentielle de classe C^k, telle que la projection canonique $\pi : X \to G\backslash X$ soit un C^k-difféomorphisme local.*

Sauf mention explicite du contraire, tout tel quotient $G\backslash X$ sera muni de cette structure de variété C^k, dite de *variété quotient*. La projection canonique π est alors un revêtement C^k.

Preuve. On sait (voir le théorème A.8 de l'appendice A.4) que l'espace topologique $G\backslash X$ est séparé. Il est immédiat que $G\backslash X$ est à base dénombrable, car X l'est et la projection canonique π est continue, ouverte (voir la proposition A.1 de l'appendice A.2) et surjective. Considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des couples $(\pi(V), \varphi \circ (\pi_{|V})^{-1})$ avec (V, φ) une carte locale de X, telle que l'application $\pi_{|V} : V \to \pi(V)$ soit un homéomorphisme, et que $gV \cap V = \emptyset$, pour tout g dans $G - \{e\}$. Montrons que $\mathcal{A}$ est un atlas de cartes C^k sur $G\backslash X$.



En effet, d'une part, les domaines de cartes recouvrent bien $G\backslash X$, par le théorème A.8 de l'appendice A.4. D'autre part, si $(\pi(U), \psi \circ (\pi_{|U})^{-1})$ est un autre tel couple, alors pour tout x dans $V \cap \pi^{-1}(\pi(U))$, il existe un (unique) élément g dans G tel que, pour tout y suffisamment proche de x, on ait $gy = (\pi_{|U})^{-1} \circ \pi_{|V}(y)$. L'application de transition entre $(\pi(V), \varphi \circ (\pi_{|V})^{-1})$ et $(\pi(U), \psi \circ (\pi_{|U})^{-1})$ est donc, au voisinage de $\varphi(x)$,

$$(\psi \circ g \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(V \cap \pi^{-1}(\pi(U)))} ,$$

qui est de classe C^k.

La structure de variété C^k définie par cet atlas sur $G\backslash X$ convient. $\square$

De même, si un groupe discret G agit proprement et librement par difféomorphismes analytiques complexes sur une variété holomorphe M, alors l'espace topologique quotient $G\backslash M$ admet une unique structure de variété holomorphe, telle que la projection canonique $\pi : X \to G\backslash M$ soit une application étale holomorphe.

Du point de vue des faisceaux, pour tout ouvert U de $G\backslash X$, l'espace $\mathrm{C}^k_{G\backslash X}(U)$ s'identifie à l'espace des fonctions f dans $\mathrm{C}^k_X(\pi^{-1}(U))$ qui sont *invariantes* par le groupe G (i.e. telles que $f(\gamma x) = f(x)$ pour tout γ dans G et x dans X), par l'isomorphisme d'espaces vectoriels qui, à une application G-invariante de $\pi^{-1}(U)$ dans $\mathbb{R}$, associe l'application de U dans $\mathbb{R}$ induite par passage au quotient.

Exemples. (1) En particulier, si G est un groupe fini (discret) agissant librement par C^k-difféomorphismes sur une variété M compacte de classe C^k, alors $G\backslash M$ est une variété quotient C^k compacte.

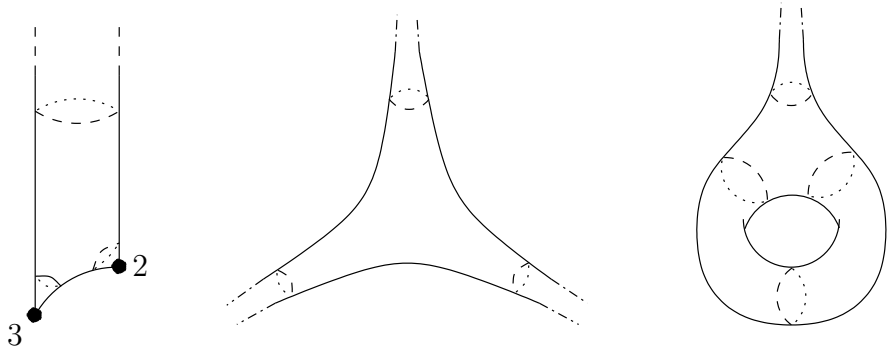
(2) Le groupe topologique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit continûment sur le demi-plan supérieur $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}\, z > 0\}$, par homographies

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Soit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ des éléments à coefficients entiers. Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, soit

$$\Gamma[n] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \,:\, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [\mathrm{mod}\ n] \right\}$$

Exercice E.11 *Montrer que pour $n \geq 2$, le groupe $\Gamma[n]$ agit proprement et librement sur $\mathcal{H}$, et donc que $\Gamma[n]\backslash\mathcal{H}$ est une variété quotient analytique réelle. Montrer que l'espace topologique quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ est homéomorphe à un disque ouvert, mais n'admet pas de structure de variété C^1 telle que la projection canonique $\mathcal{H} \to \Gamma\backslash\mathcal{H}$ soit un C^1-difféomorphisme local.*



$\Gamma\backslash\mathcal{H}$ $\qquad$ $\Gamma[2]\backslash\mathcal{H}$ $\qquad$ $[\Gamma,\Gamma]\backslash\mathcal{H}$

Montrer que la variété quotient $\Gamma[2]\backslash\mathcal{H}$ est C^ω-difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$ privée de trois points. Si $[\Gamma,\Gamma]$ est le sous-groupe dérivé de Γ (i.e. le sous-groupe engendré par les commutateurs $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ d'éléments de Γ), montrer que $[\Gamma,\Gamma]$ agit proprement et librement sur $\mathcal{H}$ et que la variété quotient $[\Gamma,\Gamma]\backslash\mathcal{H}$ est C^ω-difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2$ privé d'un point.

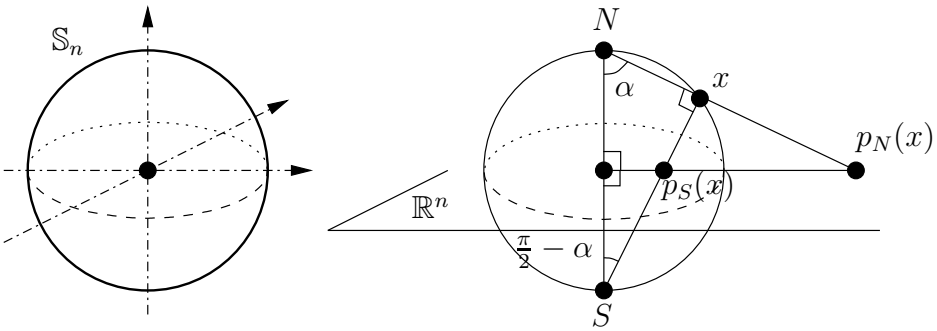
Une autre grande famille de variétés est celle des espaces homogènes (voir le paragraphe 5.8), mais nous aurons besoin des groupes de Lie et de quelques résultats de géométrie différentielle avant de pouvoir les étudier. Nous renvoyons donc le lecteur au chapitre 5.

2.4.3 Exemples cruciaux

• **Les sphères.** Soit n dans $\mathbb{N}$. La *sphère* de dimension n est le sous-espace topologique compact $\mathbb{S}_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\mathbb{S}_n = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_0^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0\} \ .$$

Certains ouvrages, voire la plupart, notent $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension n, mais nous préférons la notation en indice plutôt qu'en exposant, pour ne pas confondre avec les produits (que penser de $(\mathbb{S}^1)^n \neq \mathbb{S}^n$?). Comme l'application $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto x_0^2 + \cdots + x_n^2 - 1$ est une submersion analytique réelle en tout point de $\mathbb{S}_n$, la sphère est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^{n+1}$, de codimension 1 et de dimension n.



Soient $N = (1, 0, \ldots, 0)$ et $S = (-1, 0, \ldots, 0)$, appelés respectivement le *pôle Nord* et le *pôle Sud* de $\mathbb{S}_n$. Notons $p_N : \mathbb{S}_n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$ et $p_S : \mathbb{S}_n - \{S\} \to \mathbb{R}^n$ les applications, appelées *projection stéréographique* de pôle Nord et Sud respectivement, qui à un point x de la sphère, différent du pôle concerné, associent le point d'intersection, avec l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$ (identifié avec $\mathbb{R}^n$), de la droite passant par le pôle concerné et x. Il est immédiat géométriquement que ces applications sont continues, bijectives, et d'inverses continus.

Les projections stéréographiques sont donc des homéomorphismes d'un ouvert de $\mathbb{S}_n$ sur $\mathbb{R}^n$. Il est facile de voir géométriquement (avec les notations de la figure, $||p_N(x)|| = \tan\alpha$ et $||p_S(x)|| = \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, donc $||p_N(x)|| = 1/||p_S(x)||$ et $0, p_S(x), p_N(x)$ sont alignés) que l'application de transition est

$$\begin{array}{rcl} p_S \circ p_N^{-1} \ : \ \mathbb{R}^n - \{0\} & \to & \mathbb{R}^n - \{0\} \\ x & \mapsto & \frac{x}{||x||^2} \end{array}$$

(qui est l'inversion par rapport à la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$), donc est un difféomorphisme (involutif) analytique réel. Les ouverts $\mathbb{S}_n - \{N\}$ et $\mathbb{S}_n - \{S\}$ recouvrent $\mathbb{S}_n$. Donc $\{(\mathbb{S}_n - \{i\}, p_i)\}_{i \in \{S,N\}}$ est un atlas de cartes analytique réel sur $\mathbb{S}_n$.

Exercice E.12 *Vérifier que la structure de variété analytique réelle définie par cet atlas et celle définie par la structure de sous-variété ci-dessus sont égales.*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Le groupe

$$\mathcal{U}_p = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda^p = 1\}$$

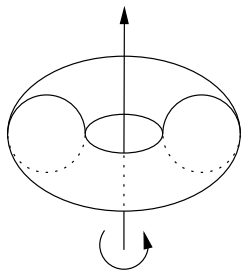
des racines p-èmes de l'unité agit par difféomorphismes analytiques réels sur la sphère de dimension impaire $\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ |z_0|^2 + ... + |z_n|^2 = 1\}$ par $\lambda \cdot (z_0, ..., z_n) = (\lambda z_0, ..., \lambda z_n)$. Donc l'*espace lenticulaire* $L_{n,p} = \mathcal{U}_p \backslash \mathbb{S}_{2n+1}$ (voir l'appendice A.4) est une variété quotient analytique réelle, et la projection canonique $\mathbb{S}_{2n+1} \to L_{n,p}$ est un revêtement analytique réel à p feuillets.

Considérons $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$ (qui est $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ muni de l'unique topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble formé des U pour U ouvert de $\mathbb{C}$ et des ${}^cK \cup \{\infty\}$ pour K compact de $\mathbb{C}$, voir l'exercice E.169 de l'appendice A.1). Considérons les homéomorphismes $\varphi_1 = \mathrm{id} : U_1 = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\varphi_2 : U_2 = (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ défini par $\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$ si $z \neq \infty$ et $\varphi_2(\infty) = 0$. Alors $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ vaut $z \mapsto \frac{1}{z}$, qui est holomorphe. Donc $(U_i, \varphi_i)_{i=1,2}$ est un atlas de cartes holomorphe sur $\widehat{\mathbb{C}}$. L'espace $\widehat{\mathbb{C}}$, muni de l'atlas de cartes holomorphe maximal contenant $(U_i, \varphi_i)_{i=1,2}$, est donc une variété analytique complexe de dimension 1, que l'on appelle la *sphère de Riemann*. Elle est clairement C^ω-difféomorphe à la variété $\mathbb{S}_2$.

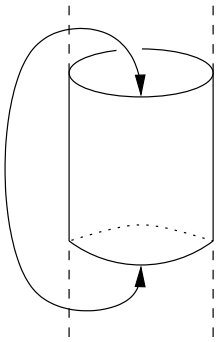
• **Les tores.** Le *tore* de dimension n est le sous-espace topologique compact de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ : \ |z_1| = \cdots = |z_n| = 1\} \ .$$

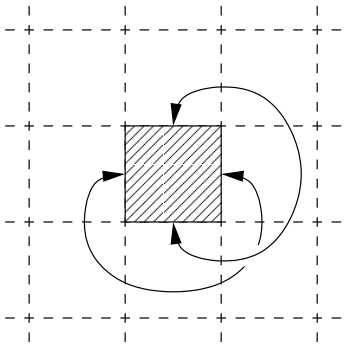
Comme l'application $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (|z_1| - 1, \ldots, |z_n| - 1)$ de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est une submersion analytique réelle en tout point de $\mathbb{T}^n$, celui-ci est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{C}^n$, de codimension n et de dimension n.



$$\begin{cases} x &= (2 + \cos t) \cos s \\ y &= (2 + \cos t) \sin s \\ z &= \sin t \end{cases}$$



$(\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1)/(\mathbb{Z} \times \{0\})$



$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

Exercice E.13 *(voir aussi les exercices E.24 et E.42 et leur solutions) Montrer que $\mathbb{T}^n$ est C^ω-difféomorphe à la variété produit de n copies du cercle $\mathbb{S}_1$.*

Montrer que le sous-groupe $\mathbb{Z}^n$ agit librement et proprement sur $\mathbb{R}^n$ par translations, et que la variété différentielle quotient $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est C^ω-difféomorphe à $\mathbb{T}^n$. (En particulier les fonctions C^k sur $\mathbb{T}^n$ s'identifient aux fonctions C^k périodiques sur $\mathbb{R}^n$.)

Montrer que l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ *définie par*

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1, \ldots, \cos 2\pi t_n, \sin 2\pi t_n)$$

induit par passage au quotient un difféomorphisme analytique réel de $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ *sur une sous-variété de* $\mathbb{R}^{2n}$.

On considère $\mathbb{R}^3$ *muni de ses coordonnées usuelles* x, y, z. *On appelle* tore de révolution *le sous-espace de* $\mathbb{R}^3$ *obtenu en faisant tourner autour de l'axe des* z *le cercle d'équations* $y = 0, (x-2)^2 + z^2 = 1$. *Montrer que le tore de révolution est une sous-variété analytique réelle de* $\mathbb{R}^3$, *qui est* C^ω*-difféomorphe à* $\mathbb{T}^2$.

Soit Λ un *réseau* de $\mathbb{C}$, i.e. un sous-groupe discret tel que l'espace topologique quotient $\mathbb{C}/\Lambda$ soit compact. Alors Λ agit librement et proprement (par translations) sur $\mathbb{C}$, et la variété holomorphe quotient $\mathbb{C}/\Lambda$, de dimension (complexe) 1, est appelée une *courbe elliptique*. Elle est bien sûr C^ω-difféomorphe à $\mathbb{T}^2$. La sphère de Riemann et les courbes elliptiques sont des exemples de *surfaces de Riemann*, i.e. de variétés holomorphes de dimension (complexe) 1, nous renvoyons par exemple à [Rey, FK] pour références.

Exercice E.14 *Soient* τ, τ' *deux nombres complexes de partie imaginaire strictement positive. Montrer que les courbes elliptiques* $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$ *et* $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau'\mathbb{Z})$ *sont isomorphes (en tant que variétés analytiques complexes) si et seulement si* $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ *où* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

• **Les espaces projectifs.** Rappelons que si K est un corps (commutatif), et V un K-espace vectoriel, on appelle *espace projectif* de V, et on note $\mathbb{P}(V)$, l'ensemble quotient $K^*\backslash(V - \{0\})$ de $V - \{0\}$ par l'action par homothéties du groupe multiplicatif des scalaires non nuls, c'est-à-dire l'ensemble quotient $(V - \{0\})/\sim$ de l'ensemble $V - \{0\}$ des vecteurs non nuls par la relation d'équivalence « être colinéaire »

$$x \sim y \iff \exists\, \lambda \in K^*,\ x = \lambda y\ .$$

L'ensemble $\mathbb{P}(V)$ s'identifie avec l'ensemble des droites vectorielles de V. Toute application linéaire injective $f : V \to V'$ entre deux espaces vectoriels sur K induit par passage au quotient une application $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$, appelée *application projective*.

Si $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, et si V est de dimension finie (muni de la topologie définie par n'importe quelle norme), nous munirons $\mathbb{P}(V)$ de la topologie quotient, qui est séparée (car deux droites distinctes (privées de l'origine) sont contenues dans des cônes ouverts disjoints (privés de l'origine)), donc compacte (car $\mathbb{P}(V)$ est l'image d'un compact, par exemple la boule unité fermée d'une norme). Plus généralement, si V est un espace vectoriel topologique sur un corps topologique K (par exemple $V = K^n$), nous munirons $\mathbb{P}(V)$ de la topologie quotient.

Si $\lambda : V \to K$ est une forme linéaire non nulle, de noyau un hyperplan noté $H = H_\lambda$, alors $\lambda^{-1}(\{1\})$ est un hyperplan affine de V, et l'application $i_\lambda : \lambda^{-1}(\{1\}) \to \mathbb{P}(V)$, restriction de la projection canonique $\pi : V - \{0\} \to \mathbb{P}(V)$, est injective, d'image $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$, d'inverse l'application qui à une droite vectorielle non contenue dans H associe son unique point d'intersection avec $\lambda^{-1}(\{1\})$. Une application de la forme

$$i_\lambda^{-1}\ :\ \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)\ \to\ \lambda^{-1}(\{1\})$$

est appelée une *carte affine* de $\mathbb{P}(V)$, d'*hyperplan à l'infini* $\mathbb{P}(H)$. Si λ, μ sont deux formes linéaires, alors l'application

$$i_\mu^{-1} \circ i_\lambda \ : \ \lambda^{-1}(\{1\}) - H_\mu \ \ \to \ \ \mu^{-1}(\{1\}) - H_\lambda$$

est donnée par $v \mapsto \frac{1}{\mu(v)} v$. Donc si $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ et si V est de dimension finie, cette application (après identification linéaire, donc K-analytique, des hyperplans affines avec un espace K^N) est K-analytique. Ainsi $(\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H_\lambda), i_\lambda^{-1})_{\lambda \in \check{V} - \{0\}}$ (pour $\check{V}$ le dual de V) est un atlas de cartes, analytique réel si $K = \mathbb{R}$ et analytique complexe si $K = \mathbb{C}$, sur $\mathbb{P}(V)$. Sauf mention explicite du contraire, nous munirons alors $\mathbb{P}(V)$ de la structure K-analytique définie par cet atlas. Les fonctions C^k sur un ouvert U de $\mathbb{P}(V)$ s'identifient aux fonctions C^k sur $\pi^{-1}(U)$ qui sont invariantes par homothéties (i.e. $f(tx) = f(x)$ pour tout t dans K^* et x dans $\pi^{-1}(U)$).

Supposons maintenant que $V = K^{n+1}$. Alors on note $\mathbb{P}_n(K)$ (ou parfois $K\mathbb{P}_n$) l'espace $\mathbb{P}(V)$, et on l'appelle l'*espace projectif* de dimension n, *réel* si $K = \mathbb{R}$, *complexe* si $K = \mathbb{C}$. Si $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K^{n+1} - \{0\}$, on note $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ l'image de x dans $\mathbb{P}_n(K)$, et on appelle $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les *coordonnées homogènes* de x. En particulier, pour tout t dans K^*, on a $[tx_0 : tx_1 : \ldots : tx_n] = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$. Si $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, il suffit de $n+1$ formes linéaires pour définir un atlas de cartes de la variété $\mathbb{P}_n(K)$, celles qui sont les applications coordonnées. En effet, posons

$$U_i = \{[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}_n(K) \ : \ x_i \neq 0\} \ .$$

Les ouverts U_i sont bien définis, et recouvrent $\mathbb{P}_n(K)$. L'application $\varphi_i : U_i \to K^n$ définie par

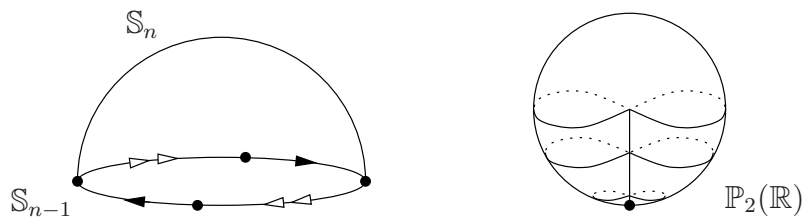
$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i} \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

est un homéomorphisme, d'inverse $(t_0, \ldots, \widehat{t_i}, \ldots, t_n) \mapsto [t_0 : \ldots : t_{i-1} : 1 : t_{i+1} : \ldots : t_n]$, où la notation $\widehat{t_i}$ signifie que l'on omet t_i. Pour $i \neq j$, l'application de transition

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \{(t_0, \ldots, \widehat{t_i}, \ldots, t_n) \in K^n \ : \ t_j \neq 0\} \to \{(u_0, \ldots, \widehat{u_j}, \ldots, u_n) \in K^n \ : \ u_i \neq 0\}$$

est définie par $u_k = \frac{t_k}{t_j}$ si $k \neq i, j$, et $u_i = \frac{1}{t_j}$. Il s'agit d'une application rationnelle, de dénominateur ne s'annulant pas, donc d'une application K-analytique. Par conséquent, $(U_i, \varphi_i)_{0 \leq i \leq n}$ est un atlas de cartes K-analytique sur $\mathbb{P}_n(K)$, en fait contenu dans le précédent atlas de cartes.

Nous renvoyons au très beau livre [Apé] pour de très beaux dessins du plan projectif réel. Le dessin de droite ci-dessous ne représente pas l'image d'une immersion de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^3$ (qui existe pourtant, d'après la remarque (2) de la fin du paragraphe **Plongements**, voir la surface de Boy dans [Apé] pour un exemple explicite), mais il y a un seul point en lequel l'application n'est pas une immersion. Ce dessin donne une image de ce qui se passe quand on identifie les points opposés de l'équateur bord de l'hémisphère nord.



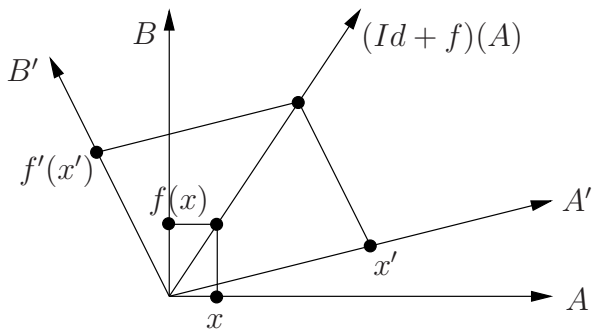
Exercice E.15 *(1) On rappelle que le groupe* $\{\pm 1\}$ *agit sur* $\mathbb{S}_n$ *par* $x \mapsto \pm x$*. Montrer que la restriction à* $\mathbb{S}_n$ *de la projection canonique sur* $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *induit un difféomorphisme analytique réel de la variété quotient* $\{\pm 1\}\backslash\mathbb{S}_n$ *sur* $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$*, et que l'application canonique* $\mathbb{S}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *est un revêtement analytique réel à deux feuillets.*

(2) Montrer que $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ *est* C^ω*-difféomorphe à* $\mathbb{S}_1$*, et que* $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ *est* C^ω*-difféomorphe à* $\mathbb{S}_2$*.*

• **Les variétés grassmanniennes.** Soient $k, n \in \mathbb{N}$, K le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et V un K-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension k. Remarquons que $\mathcal{G}_0(V)$ et $\mathcal{G}_n(V)$ sont réduits à un point, que $\mathcal{G}_k(V)$ est vide si $k > n$, et que $\mathcal{G}_1(V)$, l'ensemble des droites vectorielles de V, s'identifie à $\mathbb{P}(V)$.

On munit $\mathcal{G}_k(V)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts : si $\mathcal{B}$ est la boule unité fermée d'une norme fixée sur V, pour tout $\epsilon > 0$, deux éléments A, A' de $\mathcal{G}_k(V)$ sont dits *ϵ-proches* si $\mathcal{B} \cap A$ est contenu dans le ϵ-voisinage de $\mathcal{B} \cap A'$ et réciproquement ; si $V_\epsilon(A)$ est l'ensemble des A' dans $\mathcal{G}_k(V)$ tels que A et A' soient ϵ-proches, alors $\{V_\epsilon(A) \ : \ \epsilon > 0, A \in \mathcal{G}_k(V)\}$ est une base d'ouvert d'une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ (voir le critère (*) en tout début de l'appendice A.1) ; cette topologie ne dépend pas du choix de la norme. Cette topologie est clairement métrisable (pour la distance entre A, A' qui est la borne inférieure des ϵ ci-dessus), et compacte (munir V d'un produit scalaire, prendre une suite de sous-espaces vectoriels A_i de dimension k, prendre une base orthonormée de A_i, et extraire une sous-suite convergente de ces bases, le sous-espace engendré par la limite est une valeur d'adhérence des A_i dans $\mathcal{G}_k(V)$).

Soient A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de V, avec A de dimension k. On note $\mathcal{L}(A, B)$ l'espace vectoriel de dimension $k(n-k)$ des applications linéaires de A dans B. Soit U_B l'ouvert de $\mathcal{G}_k(V)$ des sous-espaces vectoriels supplémentaires à B. Tout élément C de U_B est le graphe, dans la décomposition $V = A \oplus B$, d'une unique application linéaire f de A dans B. Notons $\varphi_{A,B} : U_B \to \mathcal{L}(A, B)$ l'application définie par $C \mapsto f$. Il est immédiat de voir que $\varphi_{A,B}$ est un homéomorphisme, d'inverse l'application qui à f dans $\mathcal{L}(A, B)$ associe le sous-espace vectoriel $(\mathrm{Id} + f)(A)$ dans U_B, où Id est l'application identité de V.



Soient A' et B' deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, avec A' de dimension k. L'application de transition $\varphi_{A',B'} \circ (\varphi_{A,B})^{-1}$, définie sur l'ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$ des f tels que $(Id + f)(A)$ soit supplémentaire à B', est l'application $f \mapsto f'$ avec f' dans $\mathcal{L}(A', B')$ telle que, pour tout x' dans A', le point $f'(x')$ soit la projection sur B' parallèlement à A' de l'unique point y de V, intersection des sous-espaces affines $x' + B'$ et $(Id + f)(A)$.

Par le fait que les formules de Cramer d'un système linéaire donnent une solution qui dépend de manière analytique réelle des coefficients (tant que le déterminant principal ne s'annule pas), et le fait qu'une application linéaire est analytique réelle, cette application de transition est analytique réelle. Donc $(U_B, \varphi_{A,B})_{A\in\mathcal{G}_k(V),\, B\in\mathcal{G}_{n-k}(V),\, A\cap B=\{0\}}$ est un atlas de cartes analytique réel. Nous munirons $\mathcal{G}_k(V)$ de la structure de variété analytique réelle correspondante. Cette variété s'appelle la *variété grassmannienne* de V de rang k. Elle est de dimension $k(n-k)$ si $k \leq n$.

Exercice E.16 *Montrer que $\mathcal{G}_1(V)$ et $\mathbb{P}(V)$ sont C^ω-difféomorphes.*

Soient V, V' deux espaces vectoriels de dimension finie sur K, et $f : V \to V'$ un isomorphisme linéaire. Alors l'application $\mathcal{G}_k f : \mathcal{G}_k(V) \to \mathcal{G}_k(V')$ définie par $\mathcal{G}_k f(A) = f(A)$ (qui est bien un sous-espace vectoriel de dimension k de V') est évidemment un C^ω-difféomorphisme.

• **Les groupes classiques.** Nous renvoyons à [MT] pour tout complément sur ce paragraphe.

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ le *groupe linéaire complexe* des matrices complexes $n \times n$ inversibles et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices à coefficients réels, appelé le *groupe linéaire réel*, muni de leur structure de variété différentielle analytique réelle en tant qu'ouverts de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *hermitienne* si $A^* = A$ où $A^* = {}^t\overline{A}$ est la matrice adjointe de A

Soit

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ \det x = 1\}$$

le *groupe spécial linéaire* complexe,

$$\mathrm{U}(n) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ x^{-1} = x^*\}$$

le *groupe unitaire*, et $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ le *groupe spécial unitaire*. Soit

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ : \ \det x = 1\}$$

le *groupe spécial linéaire* réel,

$$\mathrm{O}(n) = \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ : \ x^{-1} = {}^t x\}$$

le *groupe orthogonal*, et $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le *groupe spécial orthogonal*.

Exercice E.17

1. *Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$ ainsi que $\mathrm{SO}(n)$ sont des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et des sous-variétés analytiques réelles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*
2. *Montrer que les variétés analytiques réelles $\mathrm{SO}(2)$ et $\mathrm{U}(1)$ sont C^ω-difféomorphes à $\mathbb{S}_1$.*
3. *Montrer que $\mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ sont compacts.*
4. *Montrer que $\mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{SO}(n)$ sont connexes par arcs, et que $\mathrm{O}(n)$ possède deux composantes connexes.*

5. *Soit $\mathcal{H}$ (respectivement $\mathcal{H}^+$) le sous-espace topologique de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formé des matrices hermitiennes (respectivement hermitiennes définies positives). Montrer que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^+$ sont des sous-variétés analytiques réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et que l'application exponentielle*

$$\exp : X \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

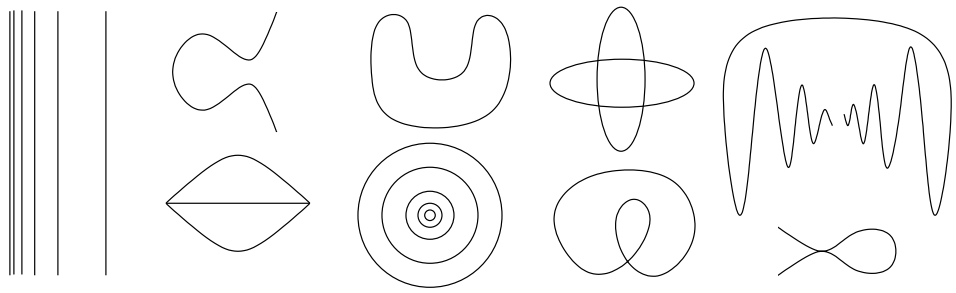
est un C^ω-difféomorphisme de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}^+$. Montrer qu'il existe un C^ω-difféomorphisme $x \mapsto \sqrt{x}$ et un seul de $\mathcal{H}^+$ dans lui-même tel que $(\sqrt{x}\,)^2 = x$ pour tout x dans $\mathcal{H}^+$. Montrer que l'application $\mathcal{H}^+ \times \mathrm{U}(n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par $(x, y) \mapsto xy$ est un C^ω-difféomorphisme (appelé décomposition polaire *de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$), d'inverse $x \mapsto (\sqrt{x^*x}, \sqrt{x^*x}^{\,-1}x)$. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est C^ω-difféomorphe à $\mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{n^2}$, que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ est C^ω-difféomorphe à $\mathrm{SU}(n) \times \mathbb{R}^{n^2-1}$, que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est C^ω-difféomorphe à $\mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est C^ω-difféomorphe à $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}-1}$.*

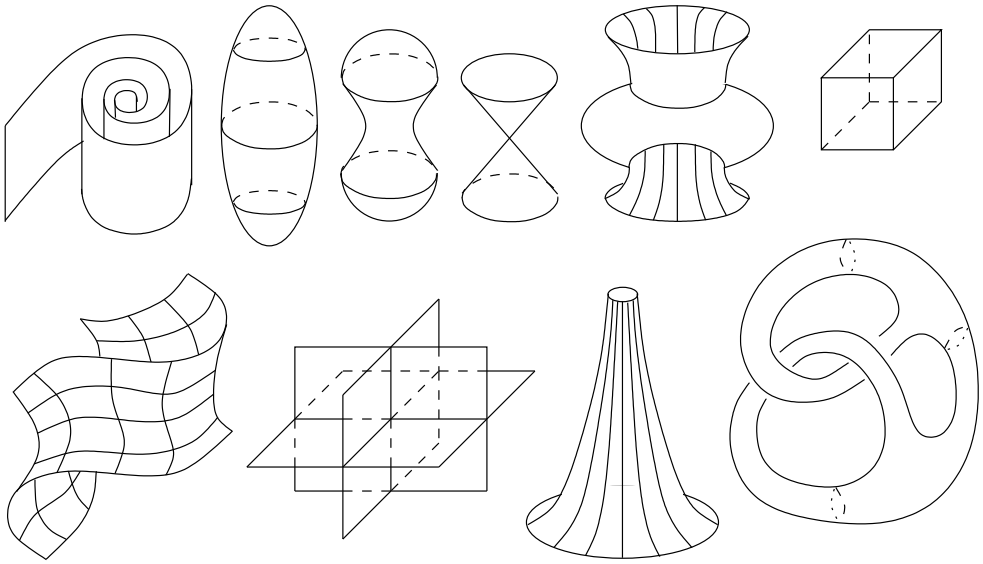
On fera attention que $\mathrm{U}(n)$ et $\mathrm{SU}(n)$ ne sont pas des sous-variétés analytiques complexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2.5 Autres exercices

Exercice E.18 Soient M une variété topologique connexe de dimension n et N une sous-variété topologique de M de dimension au plus $n-2$. Montrer que $M - N$ est connexe.

Exercice E.19 Les dessins suivants représentent des parties de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Lesquelles sont des sous-variétés ? On discutera de la régularité éventuelle. Plusieurs réponses sont parfois possibles, en fonction des ambiguïtés des dessins.





Exercice E.20 Soit M une variété topologique de dimension n et $\widehat{M} = M \cup \{\infty\}$ son compactifié d'Alexandrov (voir l'appendice A.1). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'espace topologique $\widehat{M}$ soit une variété topologique. Donner un exemple (avec M connexe) où $\widehat{M}$ n'est pas une variété topologique.

Exercice E.21 On considère a, b dans $\mathbb{R}$, et X l'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$y^2 = x^3 + ax + b\ .$$

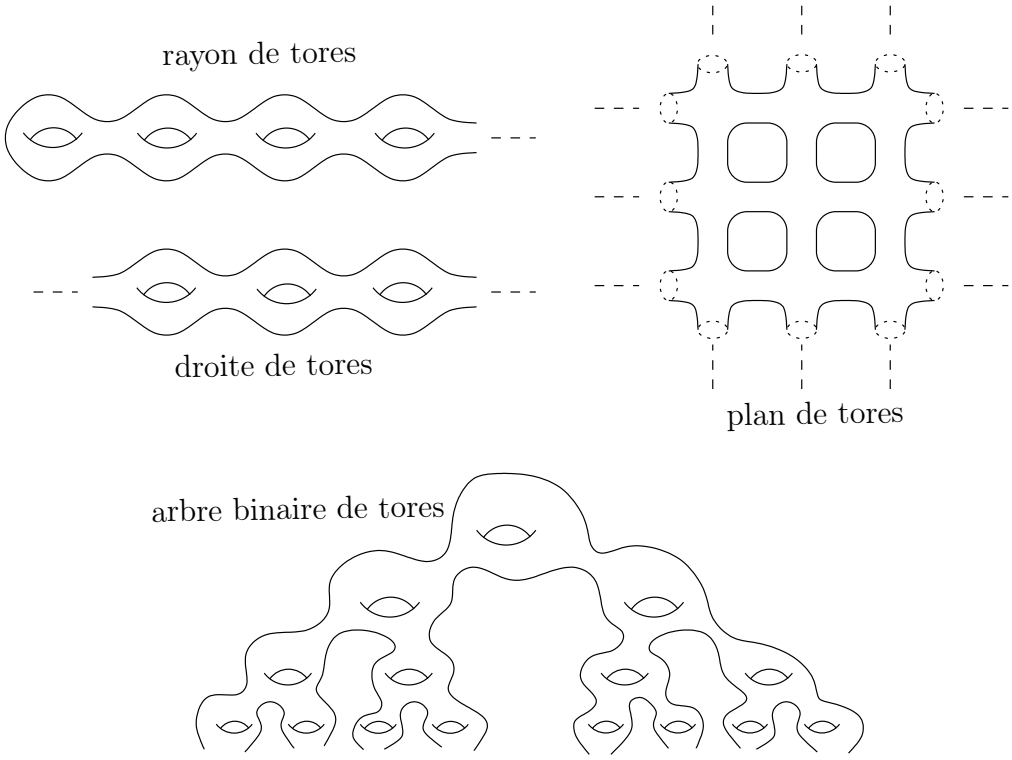
Au voisinage de quels points X est-il une sous-variété topologique ou une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$?

Exercice E.22 On considère a dans $\mathbb{Q}$, et X l'ensemble des points

$$(a\cos\theta + \cos(a\theta), a\sin\theta - \sin(a\theta))$$

de $\mathbb{R}^2$, où $\theta \in \mathbb{R}$. Quand X est-il une sous-variété topologique de $\mathbb{R}^2$? Dans ce cas, en quels points X est-il une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$? Si $a = p/q - 1$ avec $p \geq q$ premiers entre eux, alors X est appelé un *hypocycloïde* à p points de rebroussement.

Exercice E.23 Les quatre espaces ci-dessous sont des sous-variétés topologiques de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Montrer que deux d'entre eux sont homéomorphes et que les deux autres ne leur sont pas homéomorphes, ni ne sont homéomorphes entre eux.



Exercice E.24 On considère $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées usuelles x, y, z. On appelle tore de révolution le sous-espace T de $\mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner autour de l'axe des z le cercle d'équations $y = 0$, $(x-2)^2 + z^2 = 1$.

1. Montrer (voir aussi l'exercice E.13) que T est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^3$. Donner un atlas de cartes de sa structure de variété analytique réelle.
2. Soit $f : T \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x$. Quels sont ses points critiques ?
3. Décrire les courbes de niveau de f. Lesquelles sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$?

Exercice E.25 Soient r, m, n dans $\mathbb{N}$ tels que $r \leq \min\{n, m\}$.

1. Soit $V_r \subset \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times m$ à coefficients réels de rang r. Montrer que V_r est une sous-variété analytique réelle de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et calculer sa codimension.
2. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de rang r est une sous-variété analytique réelle de l'espace vectoriel des matrices symétriques. Calculer sa codimension.
3. Montrer que l'ensemble des matrices de projecteurs orthogonaux de rang r dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété analytique réelle de l'espace vectoriel des matrices symétriques, de dimension $r(n-r)$.

Exercice E.26 Notons $(e_i)_{0\leq i\leq n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, $U_{i,\pm}$ l'hémisphère ouvert de $\mathbb{S}_n$ de centre $\pm e_i$, et $\varphi_{i,\pm} : U_{i,\pm} \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) .$$

Montrer que $(U_{i,\pm}, \varphi_{i,\pm})_{\pm\in\{+,-\},\, 0\leq i\leq n}$ est un atlas de la structure analytique réelle standard sur $\mathbb{S}_n$.

Exercice E.27 Montrer qu'il n'existe pas d'immersion de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{R}$. Plus généralement, montrer qu'il n'existe pas d'immersion de $\mathbb{S}_n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice E.28 Soient M et P deux variétés C^∞, N une sous-variété C^∞ de M, et $f : M \to P$ une application C^∞.

Si f est une immersion, est-ce que la restriction de f à N l'est aussi ?

Si f est une submersion, est-ce que la restriction de f à N l'est aussi ?

Exercice E.29 Soient M, N, P trois variétés de classe C^k avec $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$, et $f : M \to N$ une application de classe C^k.

(1) Montrer que si f est une immersion injective, alors une application $g : P \to M$ est de classe C^k si et seulement si $f \circ g$ l'est.

(2) Montrer que si f est une immersion en un point x de M, alors il existe un voisinage ouvert U de x dans M et un voisinage ouvert V de $f(x)$ dans N et une submersion $g : V \to M$ de classe C^k telle que $g \circ f_{|U} = \mathrm{id}_U$.

(3) Montrer que si f est une submersion surjective, alors une application $g : N \to P$ est de classe C^k si et seulement si $g \circ f$ l'est.

(4) Montrer que si f est une submersion en un point x de M, alors il existe un voisinage ouvert U de x dans M, un voisinage ouvert V de $f(x)$ dans N et une immersion $g : V \to M$ de classe C^k telle que $f \circ g = \mathrm{id}_V$.

Exercice E.30 Soient k dans $\mathbb{N} - \{0\} \cup \{\infty, \omega\}$, M, N deux variétés C^k, $f : M \to N$ une application C^k, et x un point de M.

1. Montrer que f est de rang constant au voisinage de x si et seulement si l'application f s'écrit $i \circ s$ au voisinage de x, où s est une submersion C^k en x et i une immersion C^k en $s(x)$. Montrer que si f est de rang constant au voisinage de x, alors f s'écrit $s \circ i$ au voisinage de x, où i une immersion C^k en x et s est une submersion C^k en $i(x)$.
2. Montrer que si f est de rang constant, et si g est une immersion et g' une submersion, alors $g \circ f \circ g'$ est de rang constant.
3. La composée de deux applications de rang constant est-elle de rang constant ?

Exercice E.31 Soient F une sous-variété d'une variété E, et G une sous-variété de F. Montrer que G est une sous-variété de E.

Exercice E.32 Soient E, G deux variétés C^∞, F une sous-variété C^∞ de G, et $f : E \to F$ une application C^∞. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : l'application f est une immersion en tant qu'application de E dans G si et seulement si c'est une immersion en tant qu'application de E dans F ?

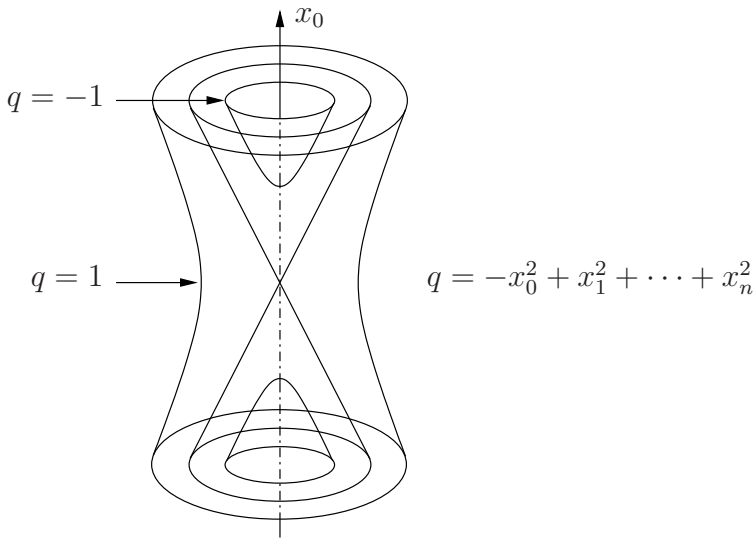
Exercice E.33 Soient $c :]0,1[\to \mathbb{R}^3$ un plongement de classe C^k, et Σ_c la surface de révolution obtenue en faisant tourner c autour de l'axe vertical. Quand est-ce que Σ_c est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$?

Exercice E.34 Soient M et N deux variétés C^∞ et $f : M \to N$ une application C^∞.

Si f est une immersion injective propre, les propositions 2.17 et 2.18 assurent que f est un plongement C^∞ et que $f(M)$ est une sous-variété C^∞ de N.

1. Donner des contre-exemples à l'assertion précédente si l'on supprime une des trois propriétés "immersion", "injective", "propre".
2. On suppose que f est une immersion propre et que le cardinal de $f^{-1}(f(x))$ est constant et fini. Montrer que $f(M)$ est une sous-variété C^∞ de N et que $f : M \to f(M)$ est un revêtement C^∞.
3. On suppose que f est propre, de rang constant, et que le nombre de composantes connexes de $f^{-1}(f(x))$ est constant et fini. Montrer que $f(M)$ est une sous-variété C^∞ de N.

Exercice E.35 Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble des x dans $\mathbb{R}^n$ tels que $q(x) = t$ est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^n$ (voir figure ci-dessous). Lorsque $t = 0$, en quels points cet ensemble est-il une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^n$?



Exercice E.36 Soit P un polynôme homogène réel (resp. complexe) non constant en n variables, et a une valeur non nulle de P. Montrer que $P^{-1}(a)$ est une sous-variété analytique réelle (resp. complexe) de dimension $n-1$ de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$), et que les hypersurfaces $P^{-1}(a)$ pour $a > 0$ (resp. $a \neq 0$) lorsque les coefficients sont réels (resp. complexes) sont isomorphes.

Exercice E.37 Soient k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et M une variété de classe C^k.

1. Si A et B sont deux fermés disjoints de M, montrer qu'il existe une application $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^k, nulle sur A, valant 1 sur B, à valeurs dans $[0, 1]$.
2. Si U est un ouvert de M et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^k, montrer que pour tout ouvert V de M tel que $\overline{V} \subset U$, il existe une application $g : M \to \mathbb{R}$ de classe C^k, qui coïncide avec f sur V.

Exercice E.38 Soient k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, M une variété de classe C^k, N une sous-variété de classe C^k de M et $f : N \to \mathbb{R}$ une application de classe C^k.

1. Montrer que pour tout x dans N, il existe un voisinage U de x et une application $g : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k prolongeant la restriction de f à $U \cap N$.
2. Montrer que si N est fermée dans M, alors il existe une application $g : M \to \mathbb{R}$ de classe C^k prolongeant f.
3. Peut-on enlever l'hypothèse « fermée » dans la question précédente ?
4. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de N dans M et une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k prolongeant f.

Exercice E.39 Soient k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et M une sous-variété de classe C^k de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un plongement C^k de M dans $\mathbb{R}^{n+1}$ d'image fermée.

Exercice E.40 Soient k dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et M une variété de classe C^k. Montrer qu'il existe une application $f : M \to \mathbb{R}$ propre de classe C^k.

Exercice E.41 Dans tout cet exercice, on identifie $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ par l'application $(x, y) \mapsto z = x + iy$. On note $\mathbb{S}_1$ le cercle unité $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, on considère l'application $\pi_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto z^n$ et l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = y^2 - (x-1)^2(2 - (x-1)^2) \ .$$

On note C_1 l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = 0$, et $C_n = \pi_n^{-1}(C_1)$.

(1) Quelles sont les valeurs régulières de f ? Si ϵ est une valeur régulière, quel est le nombre de composantes connexes de la courbe de niveau $f^{-1}(\epsilon)$?

(2) Déterminer les points (x, y) de C_n admettant un voisinage U tel que $U \cap C_n$ soit une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

(3) Montrer qu'il existe une immersion non injective $F : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞ dont l'image est C_n.

(4) Pour tout $\epsilon > 0$, on note Σ_n le sous-espace de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ constitué des points (z, t) tels que

$$(f(z^n))^2 + t^2 - \epsilon^2 = 0 \ .$$

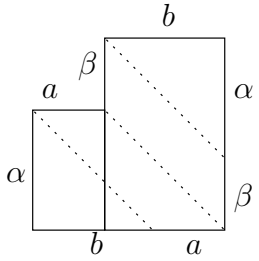
Montrer qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si $\epsilon < \epsilon_0$, alors Σ_n est une sous-variété compacte, connexe, de classe C^∞ et de dimension 2 de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

(5) Montrer qu'il existe un revêtement à n feuillets de classe C^∞ de Σ_n sur Σ_1.

Exercice E.42

1. Considérons l'action de $\mathbb{Z}$ sur $]0, +\infty[$ engendrée par l'homothétie de rapport 2. Montrer que la variété différentiable quotient est difféomorphe au cercle $\mathbb{S}_1$.
2. Considérons l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}$ engendrée par la translation de 1. Montrer que la variété différentiable quotient est difféomorphe au cercle $\mathbb{S}_1$.
3. Considérons l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ engendrée par l'homothétie de rapport 2. Montrer que la variété différentiable quotient est difféomorphe au tore $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$.
4. Considérons l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^n - \{(0, 0)\}$ engendrée par l'homothétie de rapport 2. Montrer que la variété différentiable quotient est difféomorphe à la variété différentiable produit $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{n-1}$.

Exercice E.43 On part de la réunion des deux rectangles ci-dessous et on identifie par translation les morceaux de côtés opposés de même longueur, comme indiqué sur le dessin.



Montrer que la surface obtenue est homéomorphe au tore $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$. Montrer qu'elle est naturellement munie d'une structure de variété analytique réelle, et qu'on peut même trouver un atlas (non maximal) dans lequel les changements de cartes sont donnés par des translations du plan.

Exercice E.44 Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ donnée par

$$(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}\, xy, \sqrt{2}\, zx, \sqrt{2}\, yz) \ .$$

1. Montrer que $M = \Phi(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$ (on pourra utiliser les résultats de l'exercice E.34).
2. Montrer que $M \cap \mathbb{S}_5$ est une sous-variété de $\mathbb{S}_5$, difféomorphe à $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (appelée la *surface de Veronese*).
3. On identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'espace des polynômes en T de degré au plus $n-1$. En utilisant l'application
$$\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^5 \\ x + yT + zT^2 & \mapsto & (x + yT + zT^2)^2 \end{array} \right. ,$$
construire un plongement de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S}_4$.

Exercice E.45 Soient n et m des entiers ≥ 1. Notons σ l'application de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{(n+1)(m+1)-1}(\mathbb{R})$ qui, au couple $([x_0 : \ldots : x_n], [y_0 : \ldots : y_m])$, associe le point de coordonnées homogènes $[x_i y_j]_{0 \leq i \leq n,\, 0 \leq j \leq m}$. Montrer que σ est un plongement analytique réel.

Exercice E.46 Soient $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, et V un K-espace vectoriel de dimension finie, de dual noté $\check{V}$. Montrer que le sous-espace
$$\{(\ell, x) \in \mathbb{P}(\check{V}) \times \mathbb{P}(V) \ : \ \ell(x) = 0\}$$
est une sous-variété K-analytique de $\mathbb{P}(\check{V}) \times \mathbb{P}(V)$.

Exercice E.47 (1) Montrer que $SU(2)$ est C^ω-difféomorphe à $\mathbb{S}_3$.
(2) Montrer que $SO(3)$ est C^ω-difféomorphe à $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.
(3) Montrer que la variété grassmannienne $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^3)$ est C^ω-difféomorphe à $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercice E.48 On note $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ la variété grasmmanienne des k-plans de $\mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne standard. La régularité sous-entendue est C^∞ (mais tout reste vrai en régularité K-analytique si on remplace $\mathbb{R}^n$ par un K-espace vectoriel de dimension finie, pour $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire euclidien ou hermitien).

1. Montrer qu'il existe une bijection naturelle Γ entre $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ et l'ensemble S des symétries orthogonales par rapport aux k-plans de $\mathbb{R}^n$.

Le but des trois questions qui suivent est de montrer que S est une sous-variété de l'espace vectoriel réel de dimension finie E des endomorphismes symétriques de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit s un point de S, montrer que $E = E_+ \oplus E_-$, où $E_\pm = \{t \ : \ ts = \pm st\}$. Si v est un élément de E, on notera $v_\pm$ les composantes de sa décomposition sur $E_\pm$.
3. Montrer que l'application ϕ de E dans E_+ définie par $\phi(v) = (v^2)_+$ est une submersion en s.
4. Montrer qu'il existe un voisinage U de s tel que $S \cap U = \phi^{-1}(\{1\}) \cap U$ et conclure. Quelle est la dimension de S ?

Dans les questions qui suivent, on va démontrer que la bijection Γ entre $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ et S est un difféomorphisme. On va tout d'abord le vérifier au voisinage du sous-espace vectoriel V engendré par les k premiers vecteurs de base.

5. Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, constitué des matrices dont les colonnes sont de norme 1 et deux à deux orthogonales, est une sous-variété de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$.
6. Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$. On peut lui associer une matrice $\Phi(A) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ en orthonormalisant les colonnes de $I(A) = \begin{pmatrix} I_k \\ A \end{pmatrix}$. Montrer que Φ est C^∞ au voisinage de 0. Soit $J(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ A \end{pmatrix}$. Montrer que $d\Phi_0(A) = J(A)$.
7. Soit $\Psi : \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie de la façon suivante : si $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, notons $M_1, \ldots, M_k$ ses colonnes et posons $\Psi(M) = \sum_{i=1}^k M_i \, {}^tM_i$. Montrer que Ψ est C^∞ au voisinage de $I(0)$ et décrire le noyau de $d\Psi_{I(0)}$.
8. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$, alors $\Psi \circ \Phi(A)$ est la matrice du projecteur orthogonal sur l'image de $I(A)$.
9. Montrer que Γ est C^∞ au voisinage de V et que c'est une immersion en V.
10. Conclure que Γ est un C^∞-difféomorphisme entre $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ et S.

Exercice E.49 Soient V, V' deux espaces vectoriels normés de dimension finie m et n respectivement sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, et k un entier tel que $0 \leq k \leq \min\{m, n\}$. On note $\mathcal{R}_k(V, V')$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(V, V')$ formé des applications linéaires de rang k.

(1) Montrer que $\mathcal{R}_k(V, V')$ est une sous-variété C^∞ et même K-analytique de $\mathcal{L}(V, V')$ de dimension $k(m + n - k)$.

(2) Considérons les décompositions vectorielles $V = A \oplus B$ et $V' = A' \oplus B'$ telles que A et A' soient de dimension k. Pour tout f dans $\mathcal{L}(V, V')$, on note $f_{A'}, f_{B'}$ les composantes de f dans la décomposition $V' = A' \oplus B'$. Soit $U = U_{A,B,A',B'}$ le sous-ensemble de $\mathcal{R}_k(V, V')$ formé des éléments f tels que $(f_{A'})_{|A} : A \to A'$ soit une bijection. Notons $\varphi = \varphi_{A,B,A',B'} : U_{A,B,A',B'} \to \mathcal{L}(A, A') \times \mathcal{L}(A, B') \times \mathcal{L}(B, A')$ l'application $f \mapsto ((f_{A'})_{|A}, (f_{B'})_{|A}, (f_{A'})_{|B})$. Montrer que les $(U_{A,B,A',B'}, \varphi_{A,B,A',B'})$ forment un atlas de cartes C^∞ et même K-analytique pour la structure de variété ci-dessus sur $\mathcal{R}_k(V, V')$.

(3) On rappelle que $\mathcal{G}_\ell(V)$ est la variété grassmannienne de rang ℓ de V. Montrer que l'application $\mathcal{R}_k(V, V') \to \mathcal{G}_{m-k}(V)$ définie par $f \mapsto \mathrm{Ker}\, f$ et l'application $\mathcal{R}_k(V, V') \to \mathcal{G}_k(V')$ définie par $f \mapsto \mathrm{Im}\, f$ sont C^∞ et même K-analytiques.

(4) Soit ℓ un entier tel que $0 \leq \ell \leq m$. Notons $\mathcal{V}_\ell(V)$ l'ensemble des ℓ-uplets linéairement indépendants de vecteurs de V. Pour $1 \leq i \leq \ell$, on note p_i l'application de $\mathcal{V}_\ell(V)$ dans V qui à un ℓ-uplet associe son i-ème vecteur. On note $\pi : \mathcal{V}_\ell(V) \to \mathcal{G}_\ell(V)$ l'application qui à un ℓ-uplet associe le sous-espace vectoriel de V qu'il engendre. Montrer qu'il existe une unique structure de variété C^∞ et même K-analytique sur $\mathcal{V}_\ell(V)$ telle que $p_1, \ldots, p_\ell$ et π soient des submersions. Cette variété s'appelle la *variété de Stiefel* de V de rang ℓ.

Exercice E.50 1. Soit $\hat{\mathbb{C}}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$ obtenu en rajoutant un point à l'infini. Montrer qu'il est muni d'une structure de variété analytique réelle par les paramétrages locaux $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \hat{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \mapsto & x + iy \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \hat{\mathbb{C}} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{1}{x+iy} \end{array} \right.$.

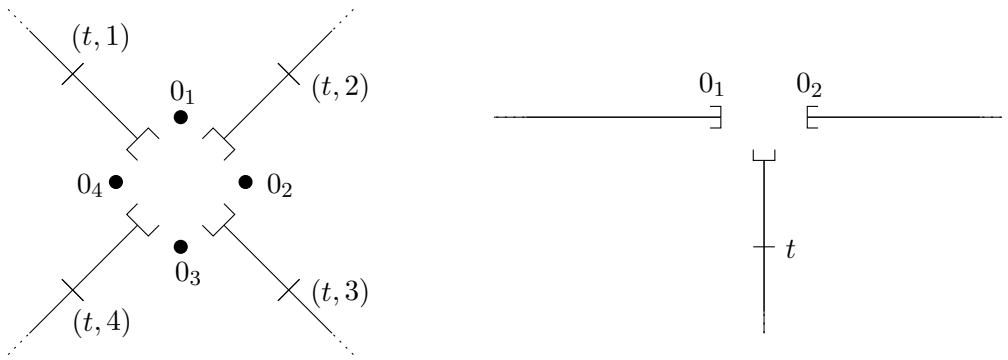
2. On identifie $\mathbb{S}_3$ avec la sphère unité de $\mathbb{C}^2$. On définit alors une action de $\mathbb{S}_1$ sur $\mathbb{S}_3$ par $\theta \cdot (z_1, z_2) = (e^{2i\pi\theta} z_1, e^{2i\pi\theta} z_2)$ pour $\theta \in \mathbb{S}_1$. Pour tout $z = (z_1, z_2)$ dans $\mathbb{S}_3$, montrer que $\theta \mapsto \theta \cdot z$ est un plongement analytique réel de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_3$.
3. On définit une application $\pi : \mathbb{S}_3 \to \hat{\mathbb{C}}$ par $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$. Montrer que cette application est analytique réelle et submersive.
4. Montrer que, pour tout $z \in \hat{\mathbb{C}}$, il existe un voisinage U de z et un difféomorphisme ψ entre $\pi^{-1}(U)$ et $U \times \mathbb{S}_1$ tel que $\pi \circ \psi^{-1} : U \times \mathbb{S}_1 \to U$ soit la première projection.

On dit que π est un *fibré localement trivial de fibre* $\mathbb{S}_1$ (voir le paragraphe 3.6).

2.6 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.2 Voir par exemple [Bou3, chap. 9, exer. 24 (c)].

Schème E.3 Ensemblistement, les espaces topologiques sont ceux ci-dessous.



De plus, dans le dessin de gauche, les points (t, i) convergent vers 0_i et vers 0_{i+1} quand t tends vers 0, pour tout i entier modulo 4. Dans le dessin de droite, les points t convergent vers 0_1 et vers 0_2 quand t tends vers 0. Tout point admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Schème E.7 Voir par exemple [Mil, Appendix], [Laf, III.G] pour la classe de différentiabilité C^∞, et appliquer le théorème 2.12.

Schème E.9 Si U est un voisinage ouvert de N, et $g : U \to P$ une application C^k telle que $f = g_{|N}$ alors si $i : N \to U$ est l'inclusion, qui est de classe C^k par la proposition 2.16, on a $f = g \circ i$, donc f est C^k comme composée de fonctions C^k.

Schème E.10 Il suffit de vérifier que les applications ϕ_{ij} introduites avant l'énoncé de cet exercice sont nécessairement des C^k-difféomorphismes. Comme $\mathrm{id} : N_1 \times N_2 \to N_1 \times N_2$ est C^k, les application pr_1 et pr_2 le sont, donc ϕ_{ij} est C^k, car $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_{ij} = \varphi_i \circ \mathrm{pr}_1$ et $\mathrm{pr}_2 \circ \phi_{ij} = \psi_i \circ \mathrm{pr}_2$ le sont. Et ϕ_{ij}^{-1} est aussi C^k, de manière analogue.

Schème E.11 Voir par exemple [Kat].

Schème E.12 Pour vérifier qu'un nouvel atlas de cartes, sur une variété différentielle M de classe C^k, définit la structure différentielle originelle, il suffit de montrer que chaque

nouvelle carte est un C^k-difféomorphisme sur son image (le domaine de cette carte étant muni de la structure induite par la structure différentielle originelle). On a

$$p_N(x) = \frac{1}{1-x_0}(x_1, \dots, x_n), \quad p_N^{-1}(y) = \frac{1}{||y||^2+1}(||y||^2 - 1, 2y_1, \dots, 2y_n) \ ,$$

$$p_S(x) = \frac{1}{1+x_0}(x_1, \dots, x_n), \quad p_S^{-1}(x) = \frac{1}{||y||^2+1}(1 - ||y||^2, 2y_1, \dots, 2y_n) \ .$$

Par l'exercice E.9, les cartes p_S, p_N définies sur la sous-variété $\mathbb{S}_n$ sont donc C^ω. Le résultat en découle.

Schème E.14 Utiliser le théorème de relèvement des applications holomorphes (voir la proposition 2.24).

Schème E.15 La variété $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est par construction isomorphe à la sphère de Riemann en tant que variété holomorphe, donc à $\mathbb{S}_2$ en tant que variété analytique réelle.

Schème E.17 Nous noterons $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, et $x^* = {}^t x$ si $K = \mathbb{R}$. Rappelons que $\mathrm{GL}_n(K)$ est un ouvert de l'espace vectoriel réel de dimension finie $\mathcal{M}_n(K)$.

(1) Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel (fermé) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le sous-groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Comme les applications det $: \mathrm{GL}_n(K) \to (K^*, +)$ et $x \mapsto x^{-1}$, $x \mapsto x^*$ de $\mathrm{GL}_n(K)$ dans lui-même sont des morphismes ou anti-morphismes de groupes et sont continus, les ensembles $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ sont, comme lieux d'égalité de deux applications continues à valeurs dans un espace séparé, des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(K)$ pour $K = \mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}$, donc de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. [On peut aussi dire que les applications $x \mapsto \det x$, $x \mapsto x^{-1}x^*$ et $x \mapsto x^{-1}x$ étant continues (car polynomiales), les sous-groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{U}(n), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$ sont fermés, comme image réciproque d'un singleton (de $\mathbb{R}$ donc fermé) par une application continue, et $\mathrm{SU}(n), \mathrm{SO}(n)$ comme intersection de deux fermés.]

Puisque la propriété d'être une sous-variété est locale, et puisque pour tout g dans le sous-groupe G considéré, l'application $L_g : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $h \mapsto gh$ est un difféomorphisme analytique réel (car polynomial), d'inverse $L_{g^{-1}}$, qui induit une bijection de G dans G, il suffit de montrer que G est une sous-variété dans un voisinage de la matrice identité id dans l'ouvert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel réel, ceci implique que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété analytique réelle.

Les applications $x \mapsto \det x$, $x \mapsto x^* x$, $x \mapsto \det x$ et $x \mapsto {}^t x\, x$ respectivement de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans l'espace vectoriel réel Herm_n des matrices nxn complexes hermitiennes, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (vu comme un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) dans $\mathbb{R}$, de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans l'espace vectoriel réel Sym_n des matrices nxn réelles symétriques, sont analytiques réelles (car polynomiales), et leur différentielle en l'élément neutre est respectivement $x \mapsto \mathrm{trace}(x)$, $x \mapsto x^* + x$, $x \mapsto \mathrm{trace}(x)$ et $x \mapsto {}^t x + x$, qui sont des applications linéaires respectivement de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans Herm_n, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans Sym_n. Ces applications linéaires sont surjectives, car la trace est non nulle, et si $x \in \mathrm{Herm}_n$, alors $x = (\frac{1}{2}x) + (\frac{1}{2}x)^*$ et si $x \in \mathrm{Sym}_n$, alors $x = (\frac{1}{2}x) + {}^t(\frac{1}{2}x)$. Donc, par le théorème des submersions, au voisinage de l'identité, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{U}(n), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$ sont des sous-variétés analytiques réelles respectivement de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, de dimensions respectivement $2(n^2-1), n^2, n^2-1, \frac{n(n-1)}{2}$.

Si $x \in \mathrm{O}(n)$ est proche de l'identité, comme $\det x = \pm 1$, nous avons $x \in \mathrm{SO}(n)$, donc $\mathrm{SO}(n)$ est une sous-variété.

L'application φ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Herm}_n \times \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (x^* x, \mathrm{Im}\det x)$ est analytique réelle, de différentielle en la matrice identité égale à l'application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{Herm}_n \times \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (x^* + x, \mathrm{Im}\,\mathrm{trace}\, x)$, qui est surjective (car ajouter à une matrice x de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux imaginaires purs ne change pas la valeur de $x^* + x$, tout en permettant d'obtenir n'importe quelle partie imaginaire de trace). Comme $|\det x| = 1$ si $x \in \mathrm{U}(n)$, l'intersection avec un voisinage V de l'identité de la préimage par φ du point $(\mathrm{id}, 1)$ est contenue dans $\mathrm{SU}(n)$, donc égale à $V \cap \mathrm{SU}(n)$. Donc par le théorème des submersions, $\mathrm{SU}(n)$ est une sous-variété analytique réelle au voisinage de la matrice identité (donc partout).

(2) Notons que $U(1) = \{x \in \mathbb{C} \ : \ z^{-1} = \overline{z}\}$ coïncide avec le cercle $\mathbb{S}_1$ des nombres complexes de module 1. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}(2)$ définie par $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ induit par passage au quotient une application C^ω de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{SO}(2)$, qui est une immersion locale. Par compacité, cette application est donc un C^ω-difféomorphisme.

(3) Les fermés $\mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n), \mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ sont bornés dans des espaces vectoriels (complexes ou réels) de dimension finie, car leur vecteurs colonnes sont de norme (hermitienne ou euclidienne standard) égale à 1. Ils sont donc compacts.

(4) Par continuité de la conjugaison, et puisque le seul conjugué de l'identité est elle-même, si, dans un sous-groupe G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on peut joindre un élément g à l'identité par un chemin continu dans G, alors on peut joindre le conjugué de g par tout élément G à l'identité par un chemin dans G.

Par le théorème de réduction des matrices orthogonales, et puisque $\mathrm{SO}(2)$, qui est C^ω-difféomorphe au cercle $\mathbb{S}_1$, est connexe (par arcs), le sous-groupe $\mathrm{SO}(n)$ de $\mathrm{O}(n)$ est connexe (par arcs). Comme $\det : \mathrm{O}(n) \to \{-1, 1\}$ est un morphisme de groupes continu surjectif, et puisque la multiplication par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{n-1} \end{pmatrix}$ envoie $\mathrm{SO}(n) = \det^{-1}(1)$ sur $\det^{-1}(-1)$, $\mathrm{O}(n)$ a exactement deux composantes connexes, et $\mathrm{SO}(n)$ est la composante connexe de l'élément neutre dans $\mathrm{O}(n)$. La connexité de $\mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ découle du théorème de réduction des matrices unitaires.

(5) Voir aussi les exercices E.113 et E.181.

Schème E.18 Supposons que $M - N$ soit la réunion de deux ouverts fermés non vides U et V. Soit $x \in N$. Il existe au moins un voisinage connexe W_x de x dans $M - N$(puisque c'est le cas pour un sous-espace vectoriel de dimension $\leq n - 2$ dans $\mathbb{R}^n$), donc W_x est contenu soit dans U soit dans V.

Notons $U' = U \cup \{x \in N \ : \ W_x \subset U\}$ et $V' = V \cup \{x \in N \ : \ W_x \subset V\}$: c'est une partition de M. Montrons que ces ensembles sont fermés.

Soit x_n une suite de U' qui tend vers $x \in M$. Si $x_n \in N$, on le remplace par un point très proche de U, et on peut donc supposer $x_n \in U$. Si $x \in M - N$, comme U est fermé dans $M - N$, on a $x \in U$. Si $x \in N$, alors U rencontre des voisinages arbitrairement petits de x, donc $W_x \subset U$, puis $x \in U'$.

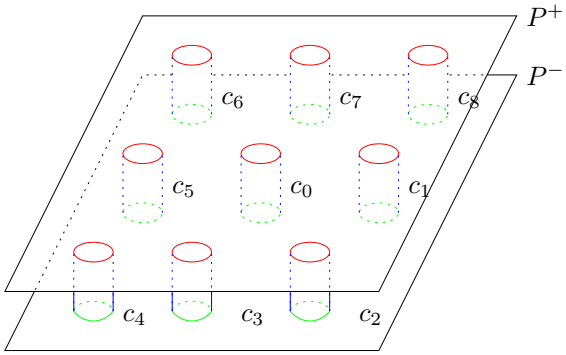
Ainsi, U' est fermé, de même que V'. Cela contredit la connexité de M.

Schème E.23 Dans le premier exemple (rayon de tores), il y a toujours une unique composante non compacte dans le complémentaire d'un ouvert d'adhérence compacte.

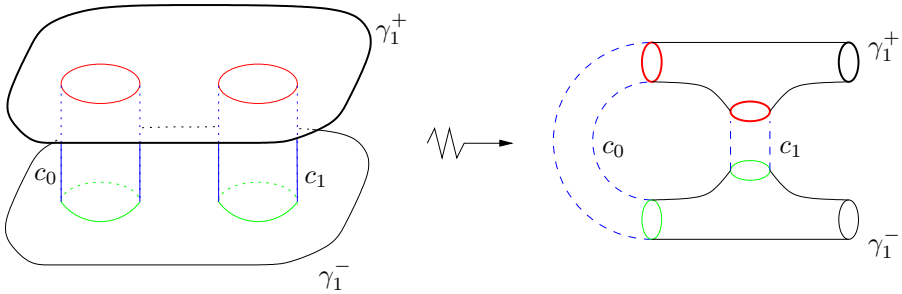
Au contraire, dans le deuxième exemple (droite de tores), il y a deux composantes non compacte dans le complémentaire d'un certain ouvert bien choisi (par exemple un petit tore au milieu). Cela montre que ces deux sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ ne sont pas homéomorphes.

De la même manière, l'arbre binaire de tores n'est homéomorphe à aucun autre, car le nombre de composantes connexes non bornées du complémentaire d'un ouvert d'adhérence compacte peut être arbitrairement grand.

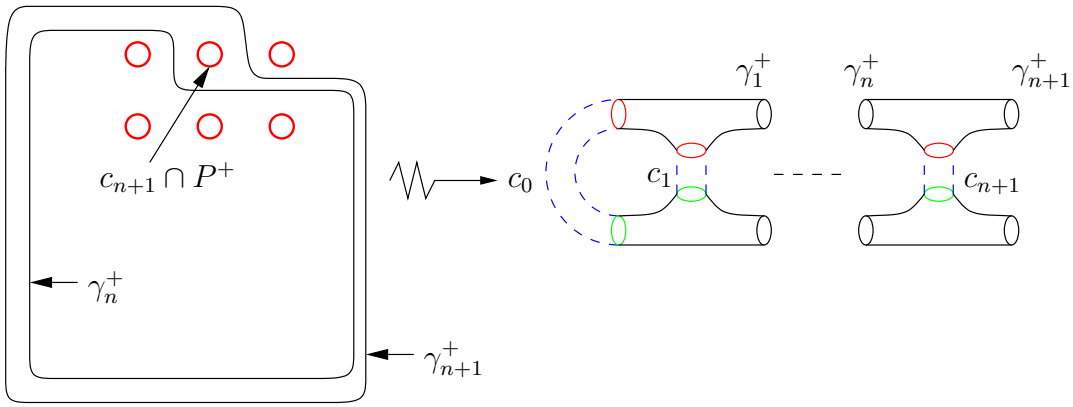
En revanche, le rayon de tores et le plan de tores sont homéomorphes, comme on va le montrer maintenant. Comme on raisonne à homéomorphisme près, on peut supposer que le plan de tores est formé de deux plans horizontaux parallèles, percés de disques de manière invariante par un réseau horizontal, notés P^+ et P^-, et joints par des cylindres verticaux, que l'on note $c_0, c_1, c_2, \ldots$ en spirale à partir d'un cylindre vertical fixé.



Choisissons sur chacun des deux plans percés P^+ et P^- deux courbes γ_1^+ et γ_1^- n'entourant que les bord des cylindres c_0 et c_1 sur ces deux plans. On a alors un homéomorphisme



On continue ainsi en choisissant successivement des courbes entourantes de plus en plus grandes, qui permettent d'englober de plus en plus de trous. Pour ne pas avoir de problème lié à la compacité, il faut qu'il y ait un nombre fini de courbes entourantes qui passent à côté d'un trou fixé. Cela peut par exemple s'assurer en prenant des courbes entourantes qui croissent aussi en spirale en partant du trou central.



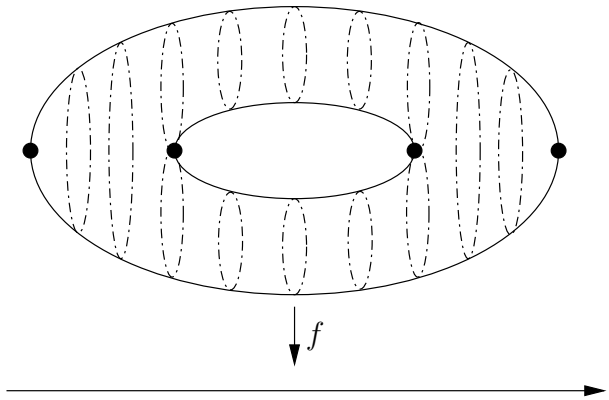
Schème E.24 (1) Soit $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\alpha(\theta, \phi) = ((2 + \cos\phi)\cos\theta, (2 + \cos\phi)\sin\theta, \sin\phi).$$

C'est une immersion analytique réelle, dont l'image est exactement T. De plus, pour $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$, un voisinage de (θ, ϕ) dans $\mathbb{R}^2$ est envoyé de manière homéomorphe par α sur un voisinage de $\alpha(\theta, \phi)$ dans T. Le théorème des immersions (dans sa version analytique réelle) assure donc que T est une sous-variété analytique réelle de $\mathbb{R}^3$.

(2) Par définition des submersions sur les variétés, f admet un point critique en $\alpha(\theta, \phi)$ si et seulement si $f \circ \alpha$ admet un point critique en (θ, ϕ). Mais $f \circ \alpha(\theta, \phi) = (2 + \cos\phi)\cos\theta$. Ainsi, (θ, ϕ) est un point critique de $f \circ \alpha$ si et seulement si $\sin\theta = 0$ et $\sin\phi = 0$. On obtient donc 4 points critiques de f sur T, en $(3, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(-3, 0, 0)$. Géométriquement, ce sont les points où le plan $\{x = c\}$ est tangent à T.

(3) Soit $c \notin \{-3, -1, 1, 3\}$. Alors f est une submersion en tout point de $f^{-1}(c)$, donc $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de T par le théorème des submersions, et donc de $\mathbb{R}^3$. Les préimages $f^{-1}(-3)$ et $f^{-1}(3)$ sont des points de T, donc des sous-variétés de dimension 0. Les préimages $f^{-1}(-1)$ et $f^{-1}(1)$ sont homéomorphes à des 8, donc ne sont pas des sous-variétés. Géométriquement, les courbes de niveau sont de la forme suivante :



Schème E.25 (1) Soit $X \in V_r$. Il existe des matrices inversibles P et Q telles que

$$PXQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I_{r,0}\ .$$

Si on savait que V_r était une sous-variété au voisinage de $I_{r,0}$, on en déduirait donc le même résultat au voisinage de X puisque le difféomorphisme $\Phi : Y \mapsto PYQ$ laisse V_r invariant.

Il suffit donc de travailler au voisinage de $I_{r,0}$. Si $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est une matrice assez proche de 0 pour que $I_r + A$ soit inversible, on a

$$\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_r + A)^{-1} & -(I_r + A)^{-1}C \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ B(I_r + A)^{-1} & D - B(I_r + A)^{-1}C \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix}$ est de rang r si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}C$. Soit

$$\Phi : \begin{pmatrix} I_r + A & C \\ B & D \end{pmatrix} \mapsto D - B(I_r + A)^{-1}C$$

définie au voisinage de $I_{r,0}$ dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{n-r,m-r}(\mathbb{R})$. Sa différentielle est surjective en $I_{r,0}$ car elle est donnée par $d\Phi_{I_{r,0}} \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = D$. Ainsi, le théorème des submersions s'applique et montre que $\Phi^{-1}(0)$ est une sous-variété au voisinage de $I_{r,0}$. Sa codimension est $\dim \mathcal{M}_{n-r,m-r}(\mathbb{R}) = (n-r)(m-r)$, donc sa dimension est $r(n+m-r)$.

(2) Lorsque $p + q = r$, notons

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_{p,q,0} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par diagonalisation, toute matrice symétrique de rang r s'écrit sous la forme ${}^tPI_{p,q,0}P$ pour une certaine matrice inversible P et des p, q tels que $p+q = r$. Il suffit donc comme dans le cas précédent de montrer que les matrices symétriques de rang r forment une sous-variété au voisinage de $I_{p,q,0}$.

Comme plus haut, une matrice symétrique $\begin{pmatrix} I_{p,q} + A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix}$ proche de $I_{p,q,0}$ est de rang r si et seulement si $D = B(I_{p,q} + A)^{-1}\ {}^tB$. On considère donc une application Φ comme ci-dessus. Sa différentielle est encore surjective (cette fois sur l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille $(n-r) \times (n-r)$), donc on conclut comme plus haut. Ici, la codimension est la dimension des matrices symétriques de taille $n - r$, i.e. $\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}$.

(3) Comme plus haut, on se ramène au voisinage de $I_{r,0}$. En effet, $I_{r,0}$ est la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel des r premières coordonnées dans $\mathbb{R}^n$, et par transitivité de l'action de $\mathrm{O}(n)$ sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension r de $\mathbb{R}^n$, toute autre matrice de projection orthogonale de rang r s'écrit $P^{-1}I_rP$ avec $P \in \mathrm{O}(n)$. Comme $P^{-1} = {}^tP$, la matrice d'une projection orthogonale est bien symétrique. Réciproquement, toute matrice M symétrique vérifiant $M^2 = M$ est la matrice d'un projecteur orthogonal, car Ker u est orthogonal à Im u si u est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$.

On considère une matrice symétrique $M = \begin{pmatrix} I_r + A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix}$ proche de $I_{r,0}$. Par (1), elle est de rang r si et seulement si $D = B(I_r + A)^{-1}\ {}^tB$. En ce cas, la matrice $M^2 - M$ est égale à

$$\begin{pmatrix} A + A^2 + {}^tBB & A\,{}^tB + {}^tBB(I_r + A)^{-1}\,{}^tB \\ BA + B(I_r + A)^{-1}\,{}^tBB & B\,{}^tB + B(I_r + A)^{-1}\,{}^tBB(I_r + A)^{-1}\,{}^tB - B(I_r + A)^{-1}\,{}^tB \end{pmatrix}.$$

La matrice M est un projecteur si et seulement si cette matrice est nulle, ce qui équivaut à $A + A^2 + {}^tBB = 0$, i.e. ${}^tBB = -A(I_r + A)$: on vérifie en effet que cette condition implique que les quatre cœfficients de la matrice écrite ci-dessus sont nuls.

On définit donc une application à valeurs dans le produit de l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille $(n-r) \times (n-r)$ et de l'espace vectoriel des matrices de taille $r \times r$

$$\Phi : \begin{pmatrix} I_r + A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix} \mapsto (D - B(I_r + A)^{-1}\, {}^tB, A + A^2 + {}^tBB).$$

Une matrice symétrique M proche de $I_{r,0}$ est un projecteur orthogonal de rang r si et seulement si $\Phi(M) = 0$. De plus, $d\Phi_{I_{r,0}} : \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix} \mapsto (D, A)$ est surjective. On conclut donc comme plus haut. La dimension est

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-r)(n-r+1)}{2} - \frac{r(r+1)}{2} = r(n-r)\ .$$

Schème E.26 L'image de $\varphi_{i,\pm}$ est la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^n$, et l'inverse de $\varphi_{i,\pm}$ est

$$(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{j \neq i} x_j^2}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\ .$$

Schème E.27 Soit $f : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}^n$ une immersion. Son image est alors ouverte (par le théorème d'inversion locale) et fermée (par compacité), c'est donc tout $\mathbb{R}^n$ par connexité, ce qui est absurde par compacité.

Schème E.29 (1) et (3) Dans les deux cas, le sens direct est immédiat, car la composée de deux applications C^k l'est encore.

Pour le sens réciproque, on se ramène, par le théorème 2.8 de forme normale des immersions et des submersions, au cas où f est respectivement l'application $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ et $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, \ldots, x_q)$ avec $q \leq p$ et respectivement $M = \mathbb{R}^p$ et $N = \mathbb{R}^q$, auquel cas le résultat est clair, car l'application $x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_p(x))$ est C^k si $x \mapsto (g_1(x), \ldots, g_p(x), 0, \ldots, 0)$ l'est, et $(x_1, \ldots, x_q) \mapsto g(x_1, \ldots, x_q)$ est C^k si $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto g(x_1, \ldots, x_q)$ l'est.

Schème E.30 (1) Soit P une variété C^k de dimension r, U un voisinage de x dans M, $s : U \to P$ une submersion C^k en x, V un voisinage ouvert de $s(x)$ dans P et $i : V \to N$ une immersion C^k en $s(x)$. Montrons que $i \circ s$ est une application de rang constant r au voisinage de x. Soient (W, φ), (W', φ'), (W'', φ'') des cartes locales de M, P, N en $x, s(x), i \circ s(x)$ respectivement. Alors le rang de

$$d_{\varphi(x)}(\varphi'' \circ i \circ s \circ \varphi^{-1}) = d_{\varphi(x)}(\varphi'' \circ i \circ \varphi'^{-1}) \circ d_{\varphi(x)}(\varphi' \circ s \circ \varphi^{-1})$$

vaut r car la première application linéaire est surjective et la seconde injective.

L'application $g : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{r+p}$ est la composée de la submersion $s : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r)$ et de l'immersion $i : (y_1, \ldots, y_r) \mapsto (y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0)$, ainsi que de l'immersion

$$i : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0, x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n+p}$ et de la submersion $s : (y_1, \ldots, y_{n+p}) \mapsto (y_1, \ldots, y_{r+p})$, de $\mathbb{R}^{n+p}$ dans $\mathbb{R}^{r+p}$. Par le théorème 2.8 de forme normale locale des applications de rang constant, et puisque la composée de deux submersions est une submersion, et la composée de deux immersions est une immersion, le résultat en découle.

(2) Localement, on écrit $f = i \circ s$, donc $g \circ f \circ g' = (g \circ i) \circ (s \circ g')$, donc $g \circ f \circ g'$, comme composé d'une submersion, puis d'une immersion (attention à l'ordre !), est de rang constant, par la question (1).

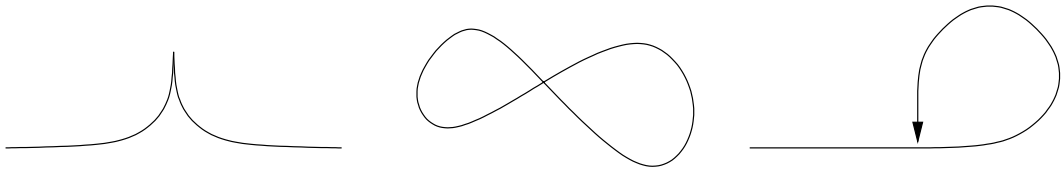
(3) Non, $s : (x, y) \mapsto x^2 + y$ est une submersion de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $i : x \mapsto (x, 0)$ est une immersion de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, mais $s \circ i : x \mapsto x^2$ n'est pas une application de rang constant de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Schème E.31 En prenant une carte locale, on se ramène au cas où $F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset E = \mathbb{R}^n$. Dire que G est une sous-variété de F signifie qu'il existe un difféomorphisme local ϕ de $\mathbb{R}^p$ tel que $\phi(G)$ coïncide localement avec $\mathbb{R}^q \times \{0\} \subset \mathbb{R}^p$. On prolonge ϕ à un petit ouvert de $\mathbb{R}^n$ en posant $\tilde{\phi}(x, y) = (\phi(x), y)$. C'est encore un difféomorphisme local, et il vérifie que $\tilde{\phi}(G)$ coïncide localement avec $\mathbb{R}^q \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$. Cela montre que G est une sous-variété de E.

Une autres solution est la suivante. Notons $i : F \to E$, $j : G \to F$ et $k : G \to E$ les inclusions. Cmme $i \circ j = k$, le résultat découle immédiatement de la propriété universelle de la structure de variété standard d'une sous-variété (voir la proposition 2.16).

Schème E.32 En prenant des cartes locales, on se ramène au cas où $F = \mathbb{R}^p \times \{0\} \subset G = \mathbb{R}^n$ et $E = \mathbb{R}^s$. Notons i l'injection canonique de F dans G. Alors la différentielle de $i \circ f : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ s'obtient en rajoutant $n - p$ lignes remplies de zéros à la différentielle de f. Cela ne change pas le rang de la matrice, ni son injectivité. Ainsi, $i \circ f$ est une immersion si et seulement si f est une immersion.

Schème E.34 (1) Les trois dessins qui suivent donnent trois contre-exemples :



(2) Soit $k \geq 1$ le cardinal des fibres de f. Soient $y \in f(M)$ et $x_1, \ldots, x_k$ ses préimages dans M. Pour chaque i, il existe un voisinage ouvert B_i de x_i sur lequel f est un plongement, d'après le théorème des immersions. Quitte à réduire les B_i, on peut supposer que leurs adhérences sont disjointes.

On va démontrer le fait suivant : pour tout voisinage V de y dans N assez petit, $f^{-1}(V) \subset B_1 \cup \ldots \cup B_k$.

Si ce fait n'était pas vrai, il existerait une suite x_n de $M - \bigcup B_i$ telle que $f(x_n) \to y$. Comme f est propre, la suite x_n appartient à un compact, et on peut donc supposer qu'elle converge quitte à extraire. Sa limite x est alors un antécédent de y différent des x_i, ce qui est absurde.

Soit V assez petit pour que les conclusions du fait soient satisfaites. Montrons alors que $f(B_i) \cap V$ est indépendant de i. Soit $y' \in f(B_i) \cap V$. Alors y' a exactement k antécédents. Mais il en a au plus un dans chaque B_j, et il ne peut en avoir à l'extérieur des B_j. Ainsi, il

en a exactement un dans chaque B_j. En particulier, $f(B_i) \cap V \subset f(B_j) \cap V$. La situation étant symétrique, on obtient l'égalité recherchée.

Finalement, $f(M) \cap V = f(B_1) \cap V$ est bien une sous-variété au voisinage de y, puisque f est un plongement sur B_1.

(3) On note n la dimension de N, p le rang de f et $p+q$ la dimension de M.

Soit $k \geq 1$ le nombre de composantes connexes des fibres non vides de f. Soient $y \in f(M)$ et $X_1, \ldots, X_k$ les composantes connexes de $f^{-1}(y)$. Quitte à prendre une carte au voisinage de y, on peut supposer que $N = \mathbb{R}^n$ et que $y = 0$. Soit X l'un des X_i, on va étudier le comportement de f au voisinage de X.

Fixons un point de référence $x_0 \in X$. En appliquant le théorème du rang constant au voisinage de x_0, on obtient que l'image par f d'un voisinage de x_0 est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. Quitte à composer par un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0, on peut supposer que l'image d'un voisinage de x_0 est incluse dans $\mathbb{R}^p \times \{0\}$.

Première étape : il existe un voisinage U de X tel que $f(U) \subset \mathbb{R}^p \times \{0\}$.

On définit une relation d'équivalence sur X, par $x \sim y$ si, pour tout voisinage U de x, il existe un voisinage V de y tel que $f(V) \subset f(U)$, et inversement. D'après le théorème du rang constant, les classes d'équivalence sont ouvertes. Comme X est connexe, il y a donc une seule classe d'équivalence, c'est-à-dire celle de x_0.

Ainsi, tout point x de X a un voisinage U_x tel que $f(U_x) \subset \mathbb{R}^p \times \{0\}$. On prend $U = \bigcup U_x$.

Deuxième étape : pour tout $a \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$ assez petit, $f^{-1}(a) \cap U$ est connexe non vide.

Pour tout $x \in X$, il existe un difféomorphisme ϕ_x entre un voisinage U_x de x (inclus dans U) et un ouvert $]-\epsilon_x, \epsilon_x[^p \times]-r_x, r_x[^q$ tel que $f \circ \phi_x^{-1}$ soit la projection sur les p premières variables, d'après le théorème du rang constant. Par compacité, on peut recouvrir X par un nombre fini de tels ouverts $U_1, \ldots, U_n$.

On notera $i \to j$ si $U_i \cap U_j \cap X$ est non vide. Montrons qu'il existe alors $\epsilon_{ij} > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}^p$ avec $||a|| \leq \epsilon_{ij}$, $f^{-1}(a) \cap (U_i \cup U_j)$ est connexe. Les "tranches" $f^{-1}(a) \cap U_i$ et $f^{-1}(a) \cap U_j$ sont toutes deux connexes non vides si a est assez petit, par définition de U_i et U_j. Soit $x \in U_i \cap U_j \cap X$. Alors l'image de tout voisinage de x contient un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^p$, par le théorème du rang constant appliqué en x. En particulier, si a est assez petit, $f^{-1}(a) \cap U_i \cap U_j$ est non vide. Cela implique que $f^{-1}(a) \cap (U_i \cup U_j)$ est connexe comme réunion de deux connexes qui s'intersectent.

Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, il existe une suite $i_1, \ldots, i_r$ telle que $i \to i_1$, $i_j \to i_{j+1}$, $i_r \to j$: cela provient de la connexité de X. On en déduit que, pour tout $a \in \mathbb{R}^p$ avec $||a|| \leq \min(\epsilon_{ij})$, le sous-espace $f^{-1}(a) \cap U$ est connexe.

Troisième étape : conclusion

On peut ensuite procéder exactement comme dans la question précédente, en remplaçant les arguments portant sur des points par des arguments portant sur des composantes connexes.

Schème E.35 C'est un cas particulier de l'exercice E.36.

Schème E.36 Si P est homogène de degré k (avec $k \neq 0$ car P est non constant), en dérivant par rapport à t la relation $P(tx) = t^k P(x)$ et en prenant la valeur en $t = 1$, on

obtient, pour tout x tel que $P(x) = a$, que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(x) = ka \neq 0 \ .$$

Donc a est une valeur régulière de P (i.e. P est une submersion en tout point de $P^{-1}(a)$), qui est atteinte par hypothèse, donc le premier résultat découle du corollaire 2.22. Comme $x \mapsto tx$ induit un difféomorphisme analytique réel (resp. complexe) pour $t > 0$ (resp. $t \in \mathbb{C} - \{0\}$) de $P^{-1}(a)$ sur $P^{-1}(t^k a)$, la dernière assertion en découle.

Schème E.37 (1) Si $\{f, g\}$ est une partition de l'unité de classe C^k subordonnée au recouvrement ouvert $\{{}^cA, {}^cB\}$, alors f convient.

(2) Puisque les fermés $\overline{V}$ et ${}^cU$ sont disjoints, soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une application de classe C^k, nulle sur ${}^cU$, valant 1 sur $\overline{V}$. Alors l'application $g : M \to \mathbb{R}$, qui coïncide avec φf sur U, prolongée par 0 hors de U, convient.

Schème E.38 (1) Puisque la question est locale, on peut se ramener par cartes locales à $N = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ et $M = \mathbb{R}^n$, alors $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_p)$ convient.

(2) Par la question précédente, pour tout x dans N, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans M et $g_x : U_x \to \mathbb{R}$ une application C^k prolongeant $f_{|U_x \cap N}$. Soit $(\varphi_0, \varphi_x)_{x \in N}$ une partition de l'unité C^k subordonnée au recouvrement ouvert $({}^cN, U_x)_{x \in N}$ de M, et prolongeons par 0 hors de U_x l'application $g_x \varphi_x$. Alors $g = \sum_{x \in N} g_x \varphi_x$ convient.

(3) Non, l'application $x \mapsto \log x$ sur la sous-variété $]0, \infty[$ de la variété $\mathbb{R}$ ne se prolonge pas à $\mathbb{R}$!

(4) Comme une sous-variété est localement fermée, N est fermée dans un de ses voisinages ouverts U (voir l'exercice 2.15, et l'exercice E.170 de l'appendice A.1), et on applique (2).

Schème E.39 Comme M est localement fermée, $\overline{M} - M$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Construisons tout d'abord une application ϕ de classe C^k sur M, strictement positive, qui se prolonge continûment par 0 sur $\overline{M} - M$. Si M est fermée, c'est évident, il suffit de prendre $\phi = 1$. Pour $x \in M$, soit V_x un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel $d(y, \overline{M} - M) \geq d(x, \overline{M} - M)/2$. L'ouvert $V = \bigcup_{x \in M} V_x$ admet une partition de l'unité C^k : il existe des fonctions ϕ_x de classe C^k supportées par V_x, positives ou nulles, dont les supports forment une famille localement finie et avec $\sum_{x \in M} \phi_x = 1$. On définit alors une fonction ϕ sur M par $\phi(y) = \sum_{x \in M} \phi_x(y) d(x, \overline{M} - M)/2$. Notons que cette somme est en fait localement finie, si bien que ϕ est bien définie, strictement positive sur M et C^k. De plus, pour tout $y \in M$, $\phi(y) \leq d(y, \overline{M} - M)$.

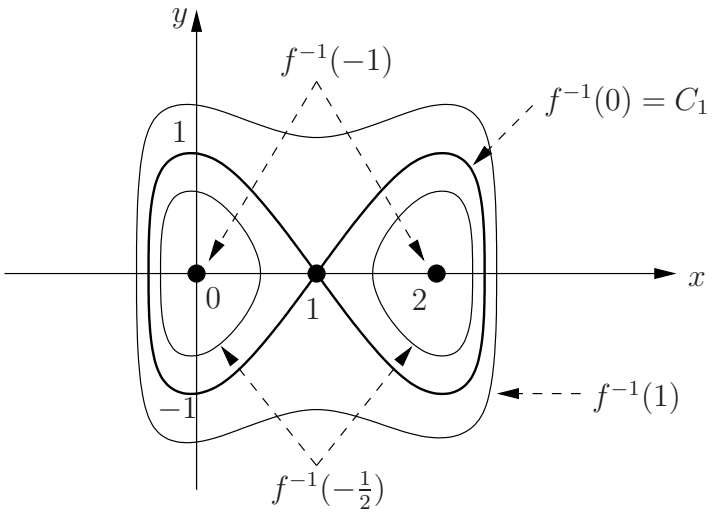
On définit finalement une application Ψ de M dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par $\Psi(x) = (x, 1/\phi(x))$. C'est manifestement un plongement C^k, il faut vérifier que son image est fermée pour conclure. Soit $x_k \in M$ une suite telle que $\Psi(x_k)$ converge. En particulier, x_k converge dans $\mathbb{R}^n$, vers un point $x \in \overline{M}$. Si x n'appartenait pas à M, alors $1/\phi(x_k)$ tendrait vers l'infini, ce qui est absurde. Par conséquent, $x \in M$, puis $\Psi(x_k)$ tend vers $\Psi(x)$, qui appartient bien à $\Psi(M)$.

Schème E.40 Soit $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partition de l'unité (dénombrable) de classe C^k de M à supports compacts (qui existe, car M est localement compact à base dénombrable). Alors $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} i \varphi_i$ convient.

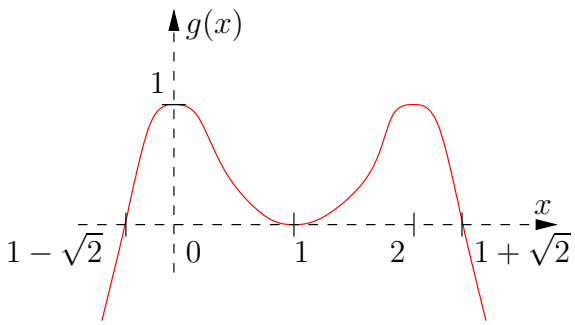
Schème E.41 (1) On calcule

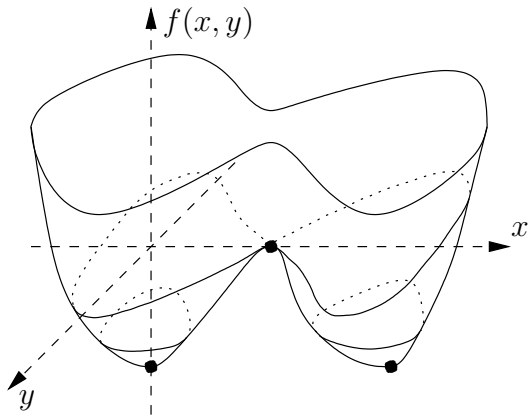
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x-1)(x-2) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\ .$$

Donc les points critiques de f (qui sont les points u de $\mathbb{R}^2$ où la différentielle df_u est l'application nulle) sont $(0,0),(1,0),(2,0)$. Les valeurs critiques de f sont donc $f(1,0)=0$ et $f(0,0) = f(2,0) = -1$. L'ensemble des valeurs régulières (qui est le sous-ensemble des points de l'ensemble d'arrivée qui ne sont pas des valeurs critiques, et l'on fera donc attention au fait qu'une valeur régulière n'est pas forcément une valeur) de f est donc $\mathbb{R} - \{0,-1\}$.

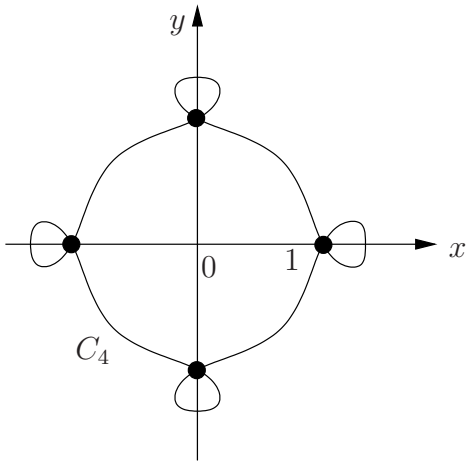


On remarque que le maximum de la fonction $x \mapsto g(x) = (x-1)^2(2-(x-1)^2)$ est 1, donc l'image de f est $[-1,+\infty[$. En particulier, pour $\epsilon < -1$, la courbe de niveau $f^{-1}(\epsilon)$ est vide, et son nombre de composantes connexes est 0. Un petit calcul montre que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \ : \ g(x) \geq -\epsilon\}$ possède exactement deux composantes connexes si $-1 < \epsilon < 0$, et une composante connexe si $\epsilon > 0$, et contient un point x tel que $g(x) = -\epsilon$. Donc $f^{-1}(\epsilon)$, qui est la réunion des graphes des fonctions $x \mapsto \pm\sqrt{g(x)+\epsilon}$ sur leurs domaines de définition, possède deux composantes connexes si $-1 < \epsilon < 0$, et une composante connexe si $\epsilon > 0$. Les graphes des applications g et f sont les suivants.





(2) Par (1), l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une submersion au voisinage de tout point différent de $(0,0), (1,0), (2,0)$. Comme seul le point $(1,0)$ est sur C_1, on en déduit que C_1 est une sous-variété de dimension $2-1=1$ au voisinage de tout point différent de $(1,0)$. Au voisinage du point $(1,0)$, la courbe de niveau C_1 est réunion des graphes des fonctions $y = \pm(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}$ sur l'intervalle $]0,2[$, qui sont de classe C^∞. Comme le point $(1,0)$ sépare en quatre composantes connexes C_1 au voisinage de $(1,0)$, on en déduit que C_1 n'est pas une variété au voisinage de $(1,0)$.



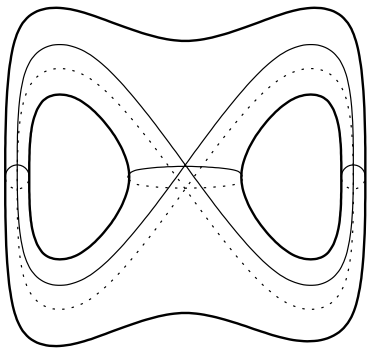
Comme $n \geq 1$, l'application $\pi_n : z \mapsto z^n$ de $\mathbb{C} - \{0\}$ dans $\mathbb{C} - \{0\}$ est un revêtement C^∞ à n feuillets (car c'est un C^∞-difféomorphisme local tel que tout point possède exactement n préimages). Comme $(0,0)$ n'est pas sur la courbe de niveau C_1, la préimage C_n par π_n de C_1 est une sous-variété de $\mathbb{C} - \{0\}$ exactement au voisinage des préimages des points de C_1 au voisinage desquels C_1 est une sous-variété. Donc C_n est une sous-variété au voisinage de chacun de ses points qui n'est pas une racine n-ème de l'unité.

(3) On considère l'application $F : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}^2$ bien définie par

$$e^{i\theta} \quad \mapsto \quad (x = 1 + \sqrt{2}\,\sin\theta, y = \sin(2\theta)) \ .$$

Comme il n'existe pas d'angle θ tel que simultanément $\cos\theta = 0$ et $\cos(2\theta) = 0$, cette application est une immersion C^∞ du cercle dans $\mathbb{R}^2$. Un calcul immédiat montre que cette application est contenue dans C_1. Comme F est de classe C^∞, et qu'une immersion entre deux variétés de même dimension est ouverte (par le théorème d'inversion locale), et que l'image de F contient les points $(1 \pm \sqrt{2}, 0)$, l'image de F est tout C_1. Par revêtement, le même résultat est valable pour C_n.

(4,5) Supposons que $0 < \epsilon < \epsilon_0 = 1$. On identifie $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ de manière usuelle. L'application $(z,t) \mapsto (z^n, t)$ est un revêtement C^∞ à n feuillets de $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des t (d'équation $z = 0$) sur lui-même (car c'est un C^∞-difféomorphisme local tel que tout point possède exactement n préimages). Comme Σ_1 ne rencontre pas cet axe car $\epsilon < 1$, si l'on montre que Σ_1 est une sous-variété compacte, connexe, de classe C^∞ et de dimension 2 de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, alors il en sera de même pour Σ_n.



Considérons l'application $\varphi : (z,t) \mapsto f(z)^2 + t^2 - \epsilon^2$, de sorte que $\Sigma_1 = \varphi^{-1}(0)$. On a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2f(z)\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2f(z)\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2t\ .$$

Donc φ est une submersion en dehors du plan d'équation $t = 0$. En tout point (z,t) de l'intersection de ce plan et de Σ_1, on a $f(z) = \pm\epsilon \neq 0$, donc les seuls points critiques possibles seraient $(0,0,0), (1,0,0)$ et $(2,0,0)$, mais comme $0 < \epsilon < 1$, aucun de ces points n'est sur Σ_1. Donc φ est une submersion C^∞ en tout point de Σ_1, et Σ_1 est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^3$, de dimension $3-1=2$. Elle est compacte car φ est propre. Elle est connexe car la courbe d'équations $f^{-1}(\epsilon)$ et $t = \epsilon$ (contenue dans le plan d'équation $t = \epsilon$) est connexe par la question (1), et contenue dans Σ_1 et que tout point peut être ramené à un tel point par un chemin continu sur Σ_1.

Schème E.42 (1) Pour des raisons pédagogiques, absolument tous les arguments sont donnés (en général, on peut se permettre d'aller beaucoup plus vite). La régularité est analytique réelle.

Comme l'action de $\mathbb{Z}$ est propre et libre, le quotient est une variété X. Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{S}_1$ définie par $f(x) = e^{2i\pi \log(x)/\log(2)}$. Alors $f(2x) = f(x)$, si bien que f induit par passage au quotient une application $g : X \to \mathbb{S}_1$. Elle est continue (car f est continue), surjective (puisque f l'est) et injective : si $f(x) = f(y)$, alors il existe n dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = 2^n y$, donc les projections de x et y dans X sont égales. Enfin, comme f est une immersion, g est aussi une immersion. En particulier, c'est un difféomorphisme local.

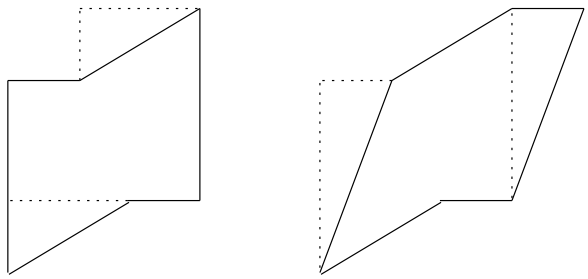
Il reste à vérifier que g est un homéomorphisme. Il suffit pour cela de montrer que X est compact, puisqu'une bijection continue entre un espace compact et un espace séparé est automatiquement un homéomorphisme. Soit $\pi :]0,+\infty[\to X$ la projection canonique. Tout point de X a (au moins) un représentant dans $[1,2]$. Ainsi, $X = \pi([1,2])$. Comme image continue (à valeurs dans un espace séparé) d'un compact, il est compact.

(2) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$ donnée par $f(x) = e^{2i\pi x}$ induit clairement un difféomorphisme entre le quotient de $\mathbb{R}$ par la translation et $\mathbb{S}_1$.

(3) On remarque que l'application $\psi : (x,y) \mapsto (r, e^{i\theta})$ est un difféomorphisme entre $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $]0,+\infty[\times\mathbb{S}_1$. L'application $f : (x,y) \mapsto (2x, 2y)$ vérifie alors $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(r, e^{i\theta}) = (2r, e^{i\theta})$. Ainsi, le passage au quotient concerne seulement la variable dans $]0,+\infty[$. On conclut donc en utilisant la première question.

(4) L'argument est le même que dans la question précédente, en remarquant que l'application de $\mathbb{S}_{n-1}\times]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^n - \{(0,0)\}$ donnée par $(u,r) \mapsto ru$ est un difféomorphisme.

Schème E.43 En découpant un morceau du polygone et en le recollant de l'autre côté de l'identification correspondante, on ne change pas la surface quotient. Les deux découpages qui suivent montrent donc qu'on obtient une surface homéomorphe à un tore.



Soient M la surface quotient, P le polygone et $\pi : P \to M$ la projection canonique. Soit $x \in M$, on va construire une "bonne" carte autour de x. Si x provient d'un point y à l'intérieur du polygone, on prend un petit voisinage U autour de ce point, à l'intérieur du polygône. La projection canonique $\pi : U \to \pi(U)$ donne une carte au voisinage de x.

Si x provient de l'intérieur d'un des côtés, il a deux préimages y_1 et y_2, qui s'obtiennent par translation de $v = y_2 - y_1$. Soient U_1 un voisinage de y_1 dans le polygone, et U_2 un voisinage de y_2 dans le polygone. On définit une application $\phi : \pi(U_1 \cup U_2) \to \mathbb{R}^2$ par $\phi(\pi(z)) = z$ si $z \in U_1$, et $\phi(\pi(z)) = z - v$ si $z \in U_2$. Elle est bien définie car, par définition de v, elle ne dépend que de $\pi(z)$.

Finalement, si x provient de l'un des sommets, on fait la même construction en recollant de la même manière plusieurs morceaux du polygône, par des translations, et on vérifie que tous les choix sont cohérents.

Finalement, par construction, les changements de cartes sont donnés par des translations. En particulier, ces cartes munissent donc M d'une structure de variété analytique réelle.

Schème E.44 (1) L'application Φ est C^∞ et sa différentielle est manifestement injective en tout point de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Si $\Phi(x, y, z) = \Phi(x', y', z')$, on vérifie en utilisant les trois premières coordonnées que $x' = \pm x$, $y' = \pm y$, $z' = \pm z$. Les trois dernières coordonnées permettent de vérifier que les trois signes coïncident. Ainsi, $(x, y, z) = \pm(x', y', z')$. Réciproquement, ces deux points ont même image. Le cardinal des fibres non vides de Φ est donc constant égal à 2.

Finalement, en utilisant les trois premières coordonnées, on vérifie que Φ est propre comme application de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ dans $\mathbb{R}^6 - \{0\}$. Ainsi, la seconde question de l'exercice E.34 montre que $\Phi(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$.

(2) On a

$$||\Phi(x, y, z)||^2 = x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + z^2x^2 + y^2z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 .$$

Ainsi, $\Phi^{-1}(M \cap \mathbb{S}_5) = \mathbb{S}_2$. L'application $\Phi : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{R}^6$ est une immersion comme composée de $\Phi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \to \mathbb{R}^6$ et de l'injection canonique de $\mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, qui sont toutes deux des immersions. Mais la restriction $\tilde{\Phi}$ de Φ à $\mathbb{S}_2$ prend ses valeurs dans $\mathbb{S}_5$. L'exercice E.32 montre donc que $\widetilde{\Phi} : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_5$ est une immersion.

L'application $\widetilde{\Phi}$ est également propre (car continue et définie sur un compact) et ses fibres non vides sont de cardinal 2. Ainsi, son image est une sous-variété de $\mathbb{S}_5$, par l'exercice E.34.

Comme $\widetilde{\Phi}(x, y, z) = \tilde{\Phi}(-x, -y, -z)$, l'application $\widetilde{\Phi}$ induit une application Ψ définie sur le quotient de $\mathbb{S}_2$ obtenu en identifiant deux points diamétralement opposés, i.e. le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Ainsi, l'application $\Psi : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{S}_5$ est une immersion injective propre, donc un plongement.

(3) L'application χ est polynomiale, donc analytique réelle. La différentielle de χ sur $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$d\chi_{(x,y,z)}(a, b, c) = 2(x + yT + zT^2)(a + bT + cT^2).$$

En particulier, $d\chi_{(x,y,z)}(a, b, c) = 0$ si et seulement si $x = y = z = 0$ ou $a = b = c = 0$. Ainsi, χ est une immersion sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

Si $\chi(x,y,z) = \chi(x',y,'z')$, alors

$$\begin{aligned} 0 &= (x+yT+zT^2)^2 - (x'+y'T+z'T^2)^2 \\ &= ((x+yT+zT^2)-(x'+y'+z'T^2))((x+yT+zT^2)+(x'+y'+z'T^2)). \end{aligned}$$

Ainsi, $(x',y',z') = \pm(x,y,z)$.

Soit $F(x,y,z) = ||\chi(x,y,z)||^2$. Elle est analytique réelle et vérifie

$$F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^4 F(x,y,z).$$

En particulier, lorsque $F(x,y,z) \neq 0$, la dérivée radiale de F est non nulle (voir aussi l'exercice E.36 et sa solution). Cela montre d'une part que la surface $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ F(x,y,z) = 1\}$ est une sous-variété C^ω comme surface de niveau d'une submersion, et d'autre part que la projection radiale $\pi : V \to \mathbb{S}_2$ est une immersion C^ω. De plus, il existe sur chaque demi-droite issue de l'origine dans $\mathbb{R}^3$ un unique point en lequel $F = 1$ (puisque F ne s'annule qu'en 0 et puisque $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^4 F(x,y,z)$). Ainsi, π est une immersion bijective, c'est donc un C^ω-difféomorphisme.

Considérons $\chi \circ \pi^{-1} : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_4$. C'est une immersion comme composée d'immersions. Elle attribue la même image exactement aux points diamétralement opposés, et induit donc un plongement de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S}_4$.

Schème E.45 Il est facile de vérifier que σ est une immersion analytique réelle injective. Comme $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ est compact, le résultat en découle.

Schème E.48 (1) L'application qui à un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{R}^n$ associe la symétrie orthogonale par rapport à ce plan est manifestement une bijection entre $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ et S.

(2) Quitte à faire un changement de base orthonormée, on peut sans perte de généralité travailler uniquement au voisinage de $s = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$. Une matrice symétrique $t = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix}$ vérifie alors $ts = st$ si et seulement si $B = 0$, et elle vérifie $ts = -st$ si et seulement si $A = D = 0$. Cela montre que $E = E^+ \oplus E^-$.

(3) Matriciellement, ϕ s'écrit

$$\begin{pmatrix} I_k + A & {}^tB \\ B & -I_{n-k} + D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (I_k + A)^2 + {}^tBB & 0 \\ 0 & (-I_{n-k} + D)^2 + B\,{}^tB \end{pmatrix}.$$

En particulier, la différentielle de ϕ en s est donnée par

$$d\phi_s \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2D \end{pmatrix}.$$

Cette application est une surjection sur E^+.

(4) Rappelons que toute matrice symétrique définie positive M admet une unique racine carrée symétrique définie positive, que l'on notera $\sqrt{M}$. De plus, si $M = I_n - H$ avec H symétrique assez petite, alors $\sqrt{M} = \sum_{p=0}^{\infty} a_p H^p$ pour certains réels a_p (i.e. la racine carrée est développable en série entière au voisinage de l'identité).

Soit $v = \begin{pmatrix} A & {}^tB \\ B & D \end{pmatrix}$ proche de s avec $(v^2)^+ = I_n$, montrons que $v^2 = I_n$, ce qui implique que $v \in S$. L'hypothèse donne $A^2 + {}^tBB = I_k$ et $D^2 + B\,{}^tB = I_{n-k}$, et il faut montrer que $BA + DB = 0$. Comme A est proche de I_k, elle est définie positive, donc

$$A = \sqrt{I_k - {}^tBB} = \sum a_p({}^tBB)^p \ .$$

De même, D est proche de $-I_{n-k}$, elle est donc définie négative, puis

$$D = -\sqrt{I_{n-k} - B\,{}^tB} = -\sum a_p(B\,{}^tB)^p \ .$$

Par conséquent,

$$BA + DB = B\sum a_p({}^tBB)^p - \sum a_p(B\,{}^tB)^p B = 0.$$

On a démontré que, si U est un voisinage assez petit de s, alors $\phi^{-1}(I_n) \cap U \subset S \cap U$. L'autre inclusion étant triviale, on a égalité. Comme ϕ est une submersion en s, le théorème des submersions assure donc que S est une sous-variété au voisinage de s. De plus, la codimension de S est la dimension de l'image de ϕ, i.e. $k(k+1)/2 + (n-k)(n-k+1)/2$. Par conséquent,

$$\dim S = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = k(n-k) \ . \quad (*)$$

(5) On va essayer d'écrire $\mathcal{A}$ comme surface de niveau d'une submersion. Soit E_k l'ensemble des matrices symétriques de taille k. Soit $\chi : \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R}) \to E_k$ définie par $\chi(M) = {}^tMM$. Une matrice M a des colonnes orthonormales si et seulement si $\chi(M) = I_k$. La différentielle de χ est donnée par $d\chi_M(H) = {}^tMH + {}^tHM$. Soit M telle que $\chi(M) = I_k$, on va montrer que $d\chi_M$ est surjective, ce qui conclura. Soit $S \in E_k$, on cherche une matrice H telle que ${}^tMH + {}^tHM = S$. Il suffit de prendre $H = MS/2$. En effet, ce choix donne

$${}^tMH + {}^tHM = \chi(M)S/2 + {}^tS\,{}^t\chi(M)/2 = S/2 + {}^tS/2 = S.$$

(6) Notons $A_1, \ldots, A_k$ les colonnes de la matrice A, et $I(A)_1, \ldots, I(A)_k$ les colonnes de $I(A)$. On a $I(A)_i = e_i + J(A)_i$, où e_i est la matrice colonne du $i^{\text{ème}}$ vecteur de base. La matrice $M = \Phi(A)$ est donnée par

$$M_i = \frac{I(A)_i - \sum_{j<i} M_j\,{}^tM_jI(A)_i}{||I(A)_i - \sum_{j<i} M_j\,{}^tM_jI(A)_i||} \ .$$

Au voisinage de $A = 0$, l'application Φ est donc C^∞. Estimons sa différentielle. On va montrer par récurrence sur i que

$$M_i = e_i + J(A)_i + O(||A||^2) \ . \ ; \ (**)$$

Supposons le résultat montré pour $j < i$. On a ${}^t(e_j)e_i = 0$, ${}^t(e_j)J(A)_i = 0$ et ${}^t(J(A)_j)e_i = 0$. On obtient

$$\begin{aligned} &I(A)_i - \textstyle\sum_{j<i} M_j\,{}^tM_jI(A)_i \\ &= e_i + J(A)_i - \textstyle\sum_{j<i} \left(e_j + J(A)_j + O(||A||^2)\right)\ {}^t\left(e_j + J(A)_j + O(||A||^2)\right)(e_i + J(A)_i) \\ &= e_i + J(A)_i + O(||A||^2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$M_i = \frac{e_i + J(A)_i + O(||A||^2)}{||e_i + J(A)_i + O(||A||^2)||}.$$

En développant la norme au dénominateur, il reste $1 + O(||A||^2)$. Cela conclut la démonstration de (**). Cette équation implique que la différentielle de Φ s'écrit $d\Phi_0(A) = J(A)$.

(7) L'application Ψ est C^∞ car polynomiale. Soit C une matrice proche de 0, estimons $\Psi(e_1 + C_1, \ldots, e_k + C_k)$. On a

$$\Psi(e_1 + C_1, \ldots, e_k + C_k) = \sum_{j=1}^{k} (e_j + C_j)\ {}^t(e_j + C_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} e_j\ {}^t(e_j) + \sum_{j=1}^{k} e_j({}^tC)_j + \sum_{j=1}^{k} C_j\ {}^t(e_j) + O(||C||^2).$$

Ainsi, la différentielle de Ψ est donnée par

$$d\Psi_{I(0)}(C_1, \ldots, C_k) = \sum_{j=1}^{k} e_j({}^tC)_j + \sum_{j=1}^{k} C_j\ {}^t(e_j).$$

Cette matrice est obtenue en ajoutant C_j dans la colonne j, et sa transposée dans la ligne j. On en déduit qu'une matrice C est dans le noyau de $d\Psi_{I(0)}$ si et seulement si elle est de la forme $C = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$ où D est antisymétrique.

(8) La matrice $M = \Phi(A)$ est une matrice dont les colonnes $M_1, \ldots, M_k$ forment une base orthonormée de l'image de $I(A)$. Montrons alors que $\Psi(M)$ est le projecteur orthogonal sur l'image de $I(A)$. Il suffit de vérifier que $\Psi(M)M_j = M_j$, ce qui est évident, et que $\Psi(M)u = 0$ si u est orthogonal à tous les vecteurs M_i, ce qui est encore évident.

(9) Pour A proche de 0, notons $s(A)$ la symétrie orthogonale par rapport à l'image de $I(A)$. On a

$$s(A) = \Psi \circ \Phi(A) - (I_n - \Psi \circ \Phi(A)) = 2\Psi \circ \Phi(A) - I_n\ .$$

Ainsi, s est C^∞ au voisinage de 0, et $ds_0 = 2d\Psi_{I(0)} \circ d\Phi_0$. Les questions 6 et 7 montrent donc que cette différentielle est injective. Comme s est à valeurs dans S, c'est une immersion en 0 de $\mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$ dans S. Mais ces deux espaces sont de même dimension, par (*). Ainsi, s est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Une carte de $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ au voisinage de V est donnée par l'application c qui à $A \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbb{R})$ associe l'image de $I(A)$. Dire que Γ est C^∞ sur un voisinage de V dans $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ signifie par définition que $\Gamma \circ c$ est C^∞ au voisinage de 0. De même, dire que Γ est un difféomorphisme local en V signifie que $\Gamma \circ c$ est un difféomorphisme local en 0. Mais $\Gamma \circ c = s$, nous avons donc déjà tout démontré !

(10) En composant par un changement de variables linéaire, on déduit de la question précédente que Γ est un difféomorphisme local en tout point de $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$. C'est une bijection entre $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ et S. Pour montrer que c'est un difféomorphisme, il reste juste à vérifier que c'est un homéomorphisme, ce qui résulte de la compacité de $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ et de la séparation de S.

Schème E.49 Voir l'exercice E.25 (1) et l'exercice E.176 (3) de l'appendice A.3 pour la première question, et sinon [Pos, Leçon 11] par exemple.

3 Fibrés vectoriels

3.1 Sous-espaces tangents d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

La notion de vecteur tangent (et, si ce vecteur tangent est non nul, de droite tangente) en un point d'une courbe de classe C^1 dans $\mathbb{R}^n$ est bien connue. Elle permet de définir, de manière élémentaire, la notion de vecteur tangent, et partant de sous-espace tangent, en un point d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Soient $p \leq n$ dans $\mathbb{N}$, M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et de dimension p, et x un point de M.

Un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ est dit *tangent à M en x* s'il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une courbe $c : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, à valeurs dans M, telle que

$$c(0) = x \quad \text{et} \quad \dot{c}(0) = v \ .$$

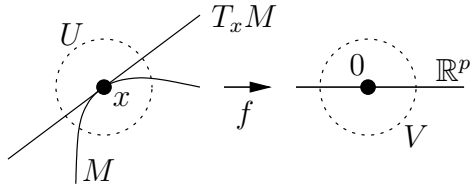
On note T_xM l'ensemble des vecteurs tangents à M en x.

Le résultat suivant donne le calcul de T_xM, en fonction des différentes caractérisations locales des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ (voir théorème 2.5).

Proposition 3.1

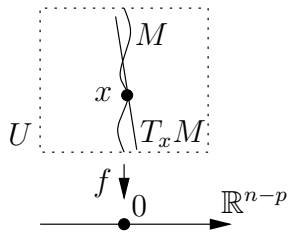
• **(Définition par redressement)**
Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un C^1-difféomorphisme tels que $f(x) = 0$ et $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$, alors

$$T_xM = df_x{}^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{0\}) \ .$$



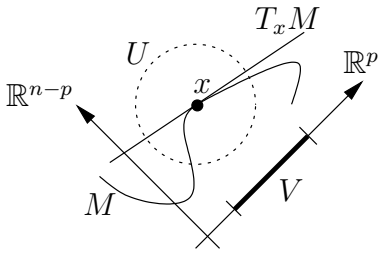
• **(Définition par fonction implicite)**
Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, et si $f : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ est une application de classe C^1 qui est une submersion en x avec $f(x) = 0$, tels que $U \cap M = f^{-1}(0)$, alors

$$T_xM = \mathrm{Ker}\ df_x \ .$$



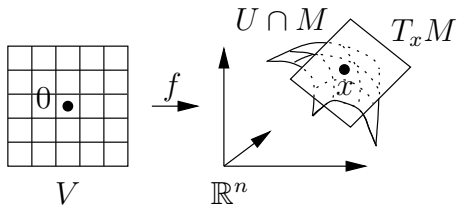
• **(Définition par graphe)**
Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $f : V \to \mathbb{R}^{n-p}$ une application de classe C^1, tels que $U \cap M = \mathrm{graphe}(f)$ et $x = (0, f(0))$, alors

$$T_xM = \mathrm{Im}\ \{v \mapsto (v, df_0(v))\} \ .$$



• **(Définition par paramétrage)**
Si U est un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, si V est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $f : V \to \mathbb{R}^n$, avec $f(0) = x$, est un paramétrage local C^1 de $U \cap M$ en x, alors

$$T_xM = \mathrm{Im}\ df_0 \ .$$



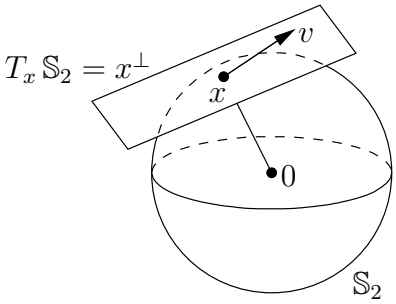
Preuve. (1) Puisque f est un difféomorphisme C^1 tel que $f(x) = 0$, une courbe c est tracée sur $U \cap M$ avec $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$ si et seulement si la courbe $f \circ c$ est tracée sur $f(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ avec $f \circ c(0) = 0$ et $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$. Puisque l'ensemble des vecteurs tangents en 0 à $V \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ est $\mathbb{R}^p \times \{0\}$, le résultat en découle. En particulier, T_xM est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$.

(2) Si c est une courbe tracée sur M telle que $c(0) = x$, alors $f \circ c(t) = 0$ pour tout t assez petit, donc en dérivant $df_x(\dot{c}(0)) = 0$ et le sous-espace vectoriel T_xM est contenu dans Ker df_x. Comme df_x est surjective, les dimensions de T_xM et de Ker df_x sont toutes les deux égales à p, et le résultat en découle.

(4) Pour tout v dans $\mathbb{R}^p$, soit c une courbe dans V telle que $c(0) = 0$ et $\dot{c}(0) = v$. Alors $f \circ c$ est une courbe C^1 tracée sur $f(V) = U \cap M$ telle que $f \circ c(0) = x$ et $(f \circ c)'(0) = df_x(v)$, donc le sous-espace vectoriel T_xM contient Im df_x. Par injectivité de df_x, les dimensions de T_xM et de Im df_x sont toutes les deux égales à p, et le résultat en découle. L'assertion (3) découle immédiatement de (4). $\square$

Comme montré dans la preuve, l'ensemble T_xM est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, appelé le *sous-espace vectoriel tangent* à M en x. On appelle $x + T_xM$ le *sous-espace affine tangent* à M en x. Lorsque l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{C}^n$ et la régularité C^1 par la régularité analytique complexe, alors T_xM est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^n$.

Exemples. (1) La sphère $\mathbb{S}_n$ est définie comme la préimage de 1 par la submersion $x \mapsto ||x||^2$ de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ (où $||\ ||$ est la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$). Donc le sous-espace tangent à $\mathbb{S}_n$ en x est le noyau de l'application linéaire $v \mapsto \langle v, x \rangle$, i.e. $T_x\mathbb{S}_n$ est l'orthogonal de x (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$).



(2) Plus généralement, si $f : U \to \mathbb{R}^q$ est une submersion C^1, avec U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, pour tout $y \in f(U)$ et $x \in f^{-1}(y)$, avec $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right)_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$ la matrice jacobienne de f en x, il découle du deuxième point de la proposition 3.1 que le sous-espace vectoriel $T_x\big(f^{-1}(y)\big)$ tangent en x à la sous-variété $f^{-1}(y)$ admet le système d'équations suivant :

$$\forall\, j,\ 1 \le j \le q, \quad \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) X_i = 0\ .$$

(3) Par l'assertion (3) ci-dessus, si M est localement défini comme le graphe d'une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{n-p}$ dans une décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ de coordonnées (x, y), alors l'équation du sous-espace affine tangent en $(x_0, y_0 = f(x_0))$ est

$$y - y_0 = df_{x_0}(x - x_0)\ .$$

Donc si $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n-p}}$ est la matrice jacobienne de f en x_0, un système d'équations du sous-espace affine tangent est

$$\forall\, j,\ 1 \leq j \leq n-p, \quad Y_j - (y_0)_j = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)(X_i - (x_0)_i)\ .$$

L'exercice suivant montre que toute variété différentielle s'écrit, au voisinage de chacun de ses points, comme le graphe d'une application au-dessus de son espace tangent en ce point.

Exercice E.51 *Soient $k \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ et M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k passant par 0. Montrer que pour tout sous-espace vectoriel E supplémentaire de T_0M, il existe un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage V de 0 dans T_0M tels que $U \cap M$ soit le graphe, dans la décomposition $\mathbb{R}^n = T_0M \oplus E$, d'une application $f : V \to E$ de classe C^k.*

La réunion disjointe des sous-espaces affines tangents aux points d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est naturellement munie d'une structure de (sous-)variété.

Proposition 3.2 *Soit M une sous-variété de classe C^{r+1} de $\mathbb{R}^n$. Soit $F = F_M$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ formé des couples (x, v) de $M \times \mathbb{R}^n$ tels que $v \in T_xM$. Alors F est une sous-variété de classe C^r de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Preuve. Soient (x_0, v_0) dans F, et (W, φ) un paramétrage local C^{r+1} de M au voisinage de x_0, d'image $U \cap M$, où U est un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}^n$. Montrons que $(W \times \mathbb{R}^p, (x, v) \mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(v))$ est un paramétrage local C^r de F au voisinage de (x_0, v_0). Comme $T_xM = \operatorname{Im} d\varphi_x$, cette application paramètre un voisinage de (x_0, v_0) dans F. Elle est de classe C^r ; c'est une immersion en tout point de son domaine, car φ l'est et $d\varphi_x$ est un isomorphisme linéaire, et la matrice jacobienne est triangulaire supérieure par blocs dans la décomposition $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; c'est un homéomorphisme de $W \times \mathbb{R}^p$ sur $(U \times \mathbb{R}^n) \cap F$. $\square$

Considérons la projection $p : F \to M$ définie par $p(x, v) = x$, qui est de classe C^r. Chaque fibre $F_x = p^{-1}(x)$ est égale à $\{x\} \times T_xM$, donc est munie d'une structure d'espace vectoriel. On a envie de dire que cette structure d'espace vectoriel « dépend de manière C^r » de x, car les applications $\psi : (x, v) \mapsto (\varphi(x), d\varphi_x(v))$ de la preuve précédente sont des C^r-difféomorphismes sur leur image, et chaque fibre $\{x\} \times \mathbb{R}^p$ de la première projection $U \times \mathbb{R}^p \to U$ est naturellement munie d'une structure d'espace vectoriel, et $\psi : \{x\} \times \mathbb{R}^p \to F_x$ est un isomorphisme linéaire.

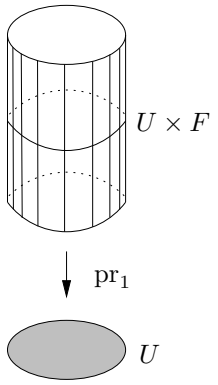
Nous formalisons cette intuition dans le paragraphe suivant.

3.2 Fibrés vectoriels

Ce paragraphe est essentiellement constitué de définitions, les principaux exemples et résultats viendront dans les paragraphes suivants.

Soit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Un *fibré vectoriel* réel (resp. complexe) ξ de classe C^r est la donnée d'une application $p : E \to B$ de classe C^r entre deux variétés de classe C^r et, pour tout b dans B, d'une structure d'espace vectoriel réel (resp. complexe) sur $E_b = p^{-1}(b)$, de sorte

que, pour tout b dans B, il existe un voisinage ouvert U de b, un espace vectoriel réel (resp. complexe) F de dimension finie, et un C^r-difféomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \to U \times F$, tels que $pr_1 \circ \phi = p_{|p^{-1}(U)}$, i.e. tels que le diagramme suivant commute



$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times F \\ & {}_{p}\searrow \quad \swarrow_{pr_1} & \\ & U & \end{array},$$

et tels que $\mathrm{pr}_2 \circ \phi_{|E_y} : E_y \to F$ soit un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire (resp. $\mathbb{C}$-linéaire) pour tout y dans U.

On dit que B est la *base*, E l'*espace total*, $E_b = p^{-1}(b)$ la *fibre* au-dessus de b, U un *ouvert distingué* ou *voisinage distingué* de b, ϕ une *trivialisation locale* de p au-dessus de U. Si toutes les fibres E_b sont de dimension n sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), on dit que le fibré vectoriel est de *rang* réel (resp. complexe) n. Si $n = 1$, on dit aussi *fibré en droites vectorielles.* Notons que si B est de dimension p, alors E est de dimension $p + n$ (resp. $p + 2n$). Par abus, on désignera souvent le fibré vectoriel ξ par son espace total E, l'application p et la structure d'espace vectoriel des fibres étant sous-entendus, ou par son application p.

Soient ξ et ξ' des fibrés vectoriels réels (resp. complexes) de classe C^r, d'applications $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ respectivement. Un *morphisme* C^r *(de fibrés vectoriels)* de ξ dans ξ' est un couple d'applications $(f, \overline{f})$ de classe C^r tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ {}_{p}\downarrow & & \downarrow{}^{p'} \\ B & \xrightarrow{\overline{f}} & B' \end{array}$$

et tel que, pour tout x dans B, l'application f induise un morphisme d'espaces vectoriels réels (resp. complexes) de $E_x = p^{-1}(x)$ dans $E'_{\overline{f}(x)} = (p')^{-1}(\overline{f}(x))$. Si $p : E \to B$ est un fibré vectoriel, alors le couple $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ est un morphisme du fibré vectoriel p dans lui-même, appelé le *morphisme identité.* Si $(f, \overline{f})$ et $(g, \overline{g})$ sont deux morphismes de $p : E \to B$ sur $p' : E' \to B'$ et de $p' : E' \to B'$ sur $p'' : E'' \to B''$ respectivement, alors le couple $(g \circ f, \overline{g} \circ \overline{f})$ est un morphisme de fibrés vectoriels, appelé *composition* de $(f, \overline{f})$ et $(g, \overline{g})$. Ainsi (voir l'appendice A.6) la collection des fibrés vectoriels C^r et des morphismes de fibrés vectoriels C^r est une catégorie.

Un *isomorphisme* C^r *(de fibrés vectoriels)* de ξ dans ξ' est (comme dans toute catégorie, donc) un morphisme $(f, \overline{f})$ de ξ dans ξ' tel qu'il existe un morphisme $(g, \overline{g})$ de ξ' dans ξ qui vérifie $g \circ f = \mathrm{id}$, $f \circ g = \mathrm{id}$, $\overline{f} \circ \overline{g} = \mathrm{id}$, $\overline{g} \circ \overline{f} = \mathrm{id}$. Deux fibrés vectoriels sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Lorsque $B = B'$, un *morphisme sur la base* B est un morphisme tel que $\overline{f} = id$, et de même pour les isomorphismes. Le contexte indique en général clairement si l'on parle de morphisme ou de morphisme sur la base.

Sauf mention explicite du contraire, tous les fibrés vectoriels seront réels dans ce texte.

Pour $r' \leq r$, une *section* (resp. *section de classe* $\mathrm{C}^{r'}$) d'un fibré vectoriel $p : E \to B$ de classe C^r est une application s (resp. application s de classe $\mathrm{C}^{r'}$) de B dans E telle que $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Par exemple, l'application qui à un point b de B associe le vecteur nul de la fibre E_b est une section de classe C^r, appelée *section nulle*. La section nulle est un plongement de B dans E. Par contre, même si c'est localement vrai, il n'existe pas toujours (et c'est même peu fréquent) de section continue globale d'un fibré vectoriel qui ne s'annule en aucun point de la base (voir par exemple la partie 6.6.2).

Par exemple, si M est une variété C^r, la première projection $pr_1 : M \times \mathbb{R}^n \to M$ de la variété produit $M \times \mathbb{R}^n$ dans M (avec la structure évidente d'espace vectoriel sur les fibres $\{x\} \times \mathbb{R}^n$) est un fibré vectoriel (réel), de base M, de rang n, appelé *fibré vectoriel (réel) trivial* sur M. La première projection $pr_1 : M \times \mathbb{C}^n \to M$ de la variété produit $M \times \mathbb{C}^n$ dans M (avec la structure évidente d'espace vectoriel complexe sur les fibres $\{x\} \times \mathbb{C}^n$) est un fibré vectoriel complexe, de base M, de rang complexe n, appelé *fibré vectoriel complexe trivial* sur M.

Tout fibré vectoriel isomorphe à un fibré vectoriel trivial est dit *trivialisable*. Par exemple, si $p : E \to B$ est un fibré vectoriel, et si U est un ouvert distingué de B, alors la restriction de p à $p^{-1}(U)$ est un fibré vectoriel trivialisable.

Si M est une variété analytique complexe, on définit un *fibré vectoriel holomorphe* sur M comme la donnée d'une application $p : E \to M$ analytique complexe, où E est une variété analytique complexe, et, pour tout b dans B, d'une structure d'espace vectoriel complexe sur $E_b = p^{-1}(b)$, de sorte que, pour tout b dans B, il existe un voisinage ouvert U de b, un espace vectoriel complexe F de dimension finie, et un difféomorphisme analytique complexe $\phi : p^{-1}(U) \to U \times F$, tels que $pr_1 \circ \phi = p_{|p^{-1}(U)}$. On définit de manière analogue un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes, un fibré vectoriel holomorphe trivial et un fibré vectoriel holomorphe trivialisable.

Exercice E.52 *(1) Montrer qu'un fibré vectoriel de rang n est trivialisable si et seulement s'il admet n sections linéairement indépendantes en tout point.*

(2) En déduire qu'un fibré vectoriel de rang 1 est trivialisable si et seulement s'il admet une section ne s'annulant pas.

Exercice E.53 *Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, et $\mathcal{G}_k(V)$ la variété grassmanienne de rang k de V. Montrer que*

$$\tau\mathcal{G}_k(V) = \{(x, v) \in \mathcal{G}_k(V) \times V \ : \ v \in x\}$$

est une sous-variété K-analytique de la variété produit $\mathcal{G}_k(V) \times V$, et que l'application $(x, v) \mapsto x$ de $\tau\mathcal{G}_k(V)$ dans $\mathcal{G}_k(V)$ est un fibré vectoriel K-analytique sur $\mathcal{G}_k(V)$ de rang k, en munissant la fibre $\{x\} \times x$ au-dessus de x de la structure évidente d'espace vectoriel sur K.

Le fibré vectoriel $\tau\mathcal{G}_k(V) \to \mathcal{G}_k(V)$ de cet exercice est appelé le *fibré tautologique* sur $\mathcal{G}_k(V)$. En particulier,

$$\tau\mathbb{P}(V) = \{(x, v) \in \mathbb{P}(V) \times V \ : \ v \in x\}$$

est une sous-variété K-analytique de la variété produit $\mathbb{P}(V) \times V$, et l'application $(x, v) \mapsto x$ de $\tau\mathbb{P}(V)$ dans $\mathbb{P}(V)$ est, en munissant la fibre $\{x\} \times x$ au-dessus de x de la structure évidente

de droite vectorielle sur K, un fibré K-analytique en droites vectorielles sur $\mathbb{P}(V)$, appelé *fibré tautologique* sur $\mathbb{P}(V)$.

L'exemple crucial de fibré vectoriel au-dessus d'une variété M est le fibré tangent TM de M, construit dans le paragraphe ci-dessous. L'exemple crucial correspondant de section est celui des champs de vecteurs, dont nous traiterons dans le chapitre 4.

3.3 Fibré tangent

Soit M une variété C^{r+1} de dimension n, avec $0 \leq r \leq \omega$, $\infty + 1 = \infty$, $\omega + 1 = \omega$, et n dans $\mathbb{N}$.

De la même manière que nous avons utilisé les courbes tracées sur une sous-variété pour définir les vecteurs tangents à une sous-variété, nous pouvons utiliser les courbes pour définir les vecteurs tangents à une variété générale.

Un 1-*jet de courbe* sur M est une classe d'équivalence de courbes $c : I \to M$, avec I un intervalle ouvert contenant 0, de classe C^1 en 0, pour la relation d'équivalence « *coïncider au premier ordre* », définie par $c_1 \sim c_2$ si $c_1(0) = c_2(0)$ et pour toute (ou de manière équivalente, pour une) carte locale (U, φ) de M en $c_1(0)$, les vecteurs tangents en 0 des courbes $\varphi \circ c_1$ et $\varphi \circ c_2$ sont égaux :

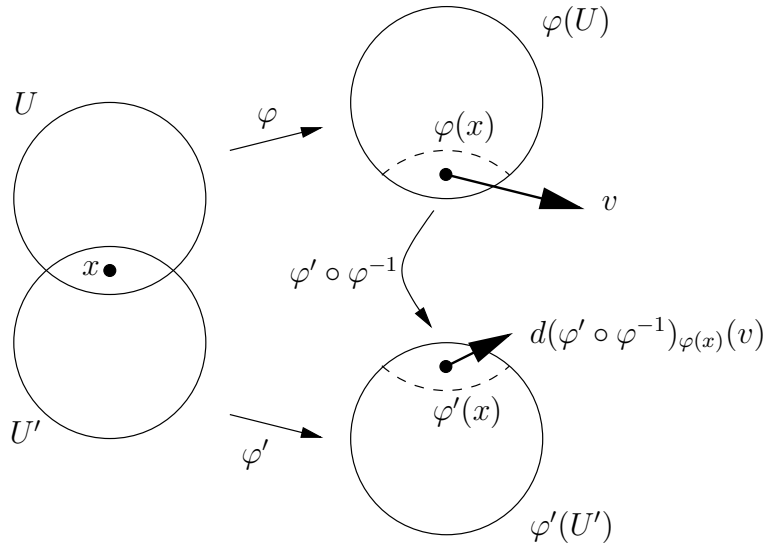
$$\dot{\widehat{\varphi \circ c_1}}\,(0) = \dot{\widehat{\varphi \circ c_2}}\,(0)\ .$$

Nous notons TM l'ensemble des 1-jets de courbes sur M, et $p : TM \to M$ l'application (bien définie) qui au 1-jet de la courbe c associe le point $c(0)$.

Nous allons montrer, de manière analogue au cas du sous-ensemble F de la proposition 3.2, que TM possède une structure naturelle de variété, et en plus que $p : TM \to M$ possède une structure naturelle de fibré vectoriel.

Pour cela, nous serons guidés par le fait que la notion de vecteur tangent en un point x d'un ouvert U d'un espace $\mathbb{R}^n$ est claire : l'espace tangent en x est naturellement $\mathbb{R}^n$ lui-même. Comme une variété est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ par ses cartes, il est naturel d'utiliser les cartes pour définir les vecteurs tangents. Le meilleur moyen pour rendre les vecteurs ainsi définis indépendants de cartes est d'utiliser une relation d'équivalence pour faire des identifications.

Un *vecteur tangent* à M est une classe d'équivalence de quadruplets (U, φ, x, v), où x est un point de M, (U, φ) une carte locale en x et v un point de $\mathbb{R}^n$, pour la relation d'équivalence $(U, \varphi, x, v) \sim (U', \varphi', x', v')$ si et seulement si $x' = x$ et $d(\varphi' \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(v) = v'$.



On note encore TM l'ensemble des vecteurs tangents à M, $p : TM \to M$ l'application induite par passage au quotient de

$$(U, \varphi, x, v) \mapsto x \ ,$$

et T_xM l'ensemble $p^{-1}(x)$. On note souvent v un élément de TM, ou (x, v) avec $p(v) = x$ quand on veut préciser le point base de v, et on l'identifie souvent avec l'un de ses représentants.

Il est immédiat que l'application qui à la classe d'un quadruplet (U, φ, x, v) associe le 1-jet de la courbe $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x) + tv)$ est une bijection de l'ensemble des vecteurs tangents à M sur l'ensemble des 1-jets de courbe sur M, par laquelle nous identifions ces ensembles. Les deux projections $p : TM \to M$ coïncident alors bien. La bijection réciproque est l'application qui au 1-jet d'une courbe c associe la classe d'équivalence du quadruplet (U, φ, x, v) où (U, φ) est une carte locale en $c(0)$, et $x = c(0), v = \widehat{\varphi \circ c}^{\cdot}(0)$.

Si (U, φ) est une carte locale de M, l'application de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ dans $p^{-1}(U)$, qui à (x, v) associe la classe d'équivalence de $(U, \varphi, \varphi^{-1}(x), v)$ est une bijection. On note $T\varphi : p^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$ son inverse, dont l'image est un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Si (U', φ') est une autre carte locale de M, l'application $T\varphi' \circ (T\varphi)^{-1} : \varphi(U \cap U') \times \mathbb{R}^n \to \varphi'(U \cap U') \times \mathbb{R}^n$ est le difféomorphisme de classe C^r

$$(x, v) \mapsto (\varphi' \circ \varphi^{-1}(x), d(\varphi' \circ \varphi^{-1})_x(v)) \ .$$

Donc si $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est l'atlas maximal de cartes de M, la famille $(p^{-1}(U_i), T\varphi_i)_{i \in I}$ est un atlas de cartes C^r de TM. Ceci permet (voir la remarque 2.6) de munir TM d'une topologie (l'unique topologie faisant de chaque $T\varphi_i$ un homéomorphisme). Il est immédiat de vérifier que cette topologie est, comme celle de M, séparée et à base dénombrable. Nous munirons TM de la structure de variété différentielle C^r si $r > 0$, et de variété topologique si $r = 0$, définie par cet atlas. Il est important de remarquer cette perte de différentiabilité, lors du passage d'une variété à son fibré tangent, sauf bien sûr quand $r = \infty$ ou $r = \omega$.

Si x est un point de M, et (U, φ) est une carte locale de M en x avec $\varphi(x) = 0$, l'application $T\varphi$ induit une bijection de la partie T_xM de $p^{-1}(U)$ sur la partie $\{0\} \times \mathbb{R}^n$

de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, ce qui permet de munir T_xM d'une structure d'espace vectoriel réel. Cette structure ne dépend pas de la carte en x choisie, car si (U', φ') est une autre telle carte en x, alors $T\varphi' \circ (T\varphi)^{-1} : \{0\} \times \mathbb{R}^n \to \{0\} \times \mathbb{R}^n$ s'identifie avec $d(\varphi' \circ \varphi^{-1})_0$, qui est un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$. On appelle *espace tangent* de M en x l'ensemble T_xM muni de cette structure d'espace vectoriel réel. On appelle $p : TM \to M$, et par abus TM, où $T_xM = p^{-1}(x)$ est muni de cette structure d'espace vectoriel réel pour tout x dans M, le *fibré tangent* de M. Par construction, le fibré tangent de M est un fibré vectoriel réel de classe C^r sur M, de rang égal à la dimension de M : pour toute carte locale (U, φ) de M, l'application $(\varphi \times \mathrm{id}) \circ T\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$[U, \varphi, x, v] \mapsto (x, v)$$

est une trivialisation locale C^r du fibré vectoriel p au-dessus de U.

Si l'on remplace le corps $\mathbb{R}$ par le corps $\mathbb{C}$ et la régularité C^k par la régularité analytique complexe dans ce qui précède, comme la dérivée d'une application analytique complexe est un automorphisme linéaire complexe, l'espace tangent de M en x est cette fois muni d'une structure d'espace vectoriel complexe, et le fibré tangent de M est un fibré vectoriel holomorphe.

Exemple. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure standard de variété, si φ est l'inclusion, alors l'application de $U \times \mathbb{R}^n$ dans TU, qui à un couple (x, v) associe la classe d'équivalence de (U, φ, x, v), est un isomorphisme du fibré vectoriel trivial $\mathrm{pr}_1 : U \times \mathbb{R}^n \to U$ sur le fibré vecoriel $p : TU \to U$. Nous identifierons dans la suite ces deux fibrés vectoriels par cette application. En particulier, pour tout x dans U, ceci identifie T_xU avec $\{x\} \times \mathbb{R}^n$, que l'on identifie encore avec $\mathbb{R}^n$ par $(x, v) \mapsto v$.

La variété M est dite *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable. Une variété analytique complexe est dite *parallélisable* si son fibré tangent est trivialisable (au sens des fibrés vectoriels holomorphes).

Exemples. (1) Les ouverts de $\mathbb{R}^n$, munis de leur structure standard de variété, sont parallélisables, par ce qui précède.

(2) Le cercle $\mathbb{S}_1$ est parallélisable (voir l'exercice E.54), ainsi que, plus généralement, tout groupe de Lie (voir la proposition 5.15).

3.4 Application tangente

Soient M, N deux variétés C^1, et $f : M \to N$ une application. Si f est C^1 en un point x_0 de M, on note $T_{x_0}f : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$ l'application qui au 1-jet d'une courbe c associe le 1-jet de la courbe $f \circ c$. Cette application est bien définie, le 1-jet de $f \circ c$ ne dépendant que du 1-jet de c (regarder dans des cartes locales). Elle est appelée *l'application tangente* (ou la *différentielle* ou la *dérivée*) *de f en x_0* (et est aussi notée df_{x_0} (voir le paragraphe 6.1 pour la définition de la 1-forme différentielle df lorsque f est à valeurs réelles, et l'on ne confondra pas df avec l'application tangente) ou $f'(x_0)$ ou $D_{x_0}f$). Si f est C^1 sur M, nous appelons *application tangente* de f l'application $Tf : TM \to TN$, définie par $Tf(v) = T_xf(v)$ pour tout v dans T_xM.

Nous allons montrer que $T_{x_0}f$ est linéaire, et que si M, N sont C^{r+1}, et si f est C^{r+1}, alors $Tf : TM \to TN$ est de classe C^r. Pour ceci, nous allons montrer que l'application tangente à f est l'application de TM dans TN, qui, lue dans les cartes locales de TM et

TN correspondant à des cartes locales de M et N, est la différentielle de l'application f lue dans ces dernières cartes.

Plus précisément, supposons que f soit C^1 en un point x_0 de M. L'application

$$T_{x_0}f : T_{x_0}M \to T_{f(x_0)}N$$

définie par

$$[U, \varphi, x, v] \mapsto [V, \psi, f(x), d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})_{\varphi(x)}(v)]$$

ne dépend pas du choix des cartes locales (U, φ) et (V, ψ) de M et N en x_0 et $f(x_0)$ respectivement, telles que $f(U) \subset V$, par le théorème de dérivation des applications composées. Elle est linéaire par définition des structures d'espaces vectoriels sur les espaces tangents, et la linéarité des différentielles d'applications entre ouverts d'espaces euclidiens. Elle coïncide avec l'application définie en début de partie, par l'identification entre vecteurs tangents et 1-jets de courbes.

De plus, si M, N sont C^{r+1} et si f est C^{r+1}, alors $Tf : TM \to TN$ est de classe C^r, par définition de la structure de variété des espaces tangents. Il est immédiat que le couple (Tf, f) est alors un morphisme de fibrés vectoriels de $TM \to M$ sur $TN \to N$, et en particulier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} .$$

Propriétés. (1) Si M et N sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement, si $f : M \to N$ est une application C^1, alors avec l'identification $TM = M \times \mathbb{R}^n$ et $TN = N \times \mathbb{R}^n$, l'application tangente $Tf : TM \to TN$ est

$$(x, v) \mapsto (f(x), df_x(v)) .$$

(2) Il est immédiat que le théorème de dérivation des applications composées s'étend : si L, M, N sont trois variétés C^1, et si $f : L \to M$, $g : M \to N$ sont deux applications C^1, alors

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf) ,$$

c'est-à-dire, pour tout x dans L,

$$T_x(g \circ f) = (T_{f(x)}g) \circ (T_x f) .$$

Comme il est aussi immédiat que $T(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, ceci signifie (voir l'appendice A.6) que la correspondance $M \mapsto TM$ et $f \mapsto Tf$ est un foncteur de la catégorie des variétés C^{r+1} dans la catégorie des variétés C^r. De plus, la correspondance qui à une variété M de classe C^{r+1} associe son fibré tangent $TM \to M$ et à une application $f : M \to N$ de classe C^{r+1} associe le couple (Tf, f), est un foncteur de la catégorie des variétés C^{r+1} dans la catégorie des fibrés vectoriels C^r.

(3) En particulier, si $f : M \to N$ est un C^{r+1}-difféomorphisme, alors $Tf : TM \to TN$ est un C^r-difféomorphisme, et (Tf, f) est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

(4) Soient N un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie, et $f, g : M \to N$ deux applications C^1 en x_0. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (resp. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$) alors

$$T_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha T_{x_0} f + \beta T_{x_0} g \ .$$

Si B est une forme bilinéaire sur N, alors

$$T_{x_0}(B(f, g)) = B(T_{x_0} f, g(x_0)) + B(f(x_0), T_{x_0} g) \ .$$

En particulier, si $f, g : M \to \mathbb{R}$ sont C^1, alors

$$T_{x_0}(fg) = g(x_0) T_{x_0} f + f(x_0) T_{x_0} g \ ,$$

et $T(fg) = g(Tf) + f(Tg)$.

(5) Soit $f : M \to N$ une application C^k avec $k \geq 1$. Alors f est une immersion (resp. submersion) en un point x de M si et seulement si son application tangente en x, i.e. l'application linéaire $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$, est injective (resp. surjective). De même, f est une application de rang constant au voisinage d'un point x de M si et seulement si le rang de l'application linéaire $T_y f : T_y M \to T_{f(y)} N$ est constant pour y dans un voisinage de x. Par définition (voir paragraphe 2.3), ceci découle, en prenant des cartes locales, du cas où M et N sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

(6) Si M et N sont des variétés analytiques complexes et si $f : M \to N$ est holomorphe, alors pour tout x dans M, l'application $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ est linéaire sur $\mathbb{C}$, par construction. La correspondance, qui à une variété analytique complexe M associe son fibré tangent $TM \to M$ et à une application holomorphe $f : M \to N$ associe le couple (Tf, f), est un foncteur de la catégorie des variétés analytiques complexes dans la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes.

Si M est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors f est appelée une *courbe* dans M (attention, le mot courbe possède plusieurs sens possibles en mathématiques, le contexte indiquant en général celui utilisé). En utilisant l'identification de TM avec $M \times \mathbb{R}$ (voir le paragraphe suivant), et donc de $T_{t_0} M$ avec $\mathbb{R}$, pour tout t_0 dans $\mathbb{R}$, l'application linéaire $T_{t_0} f : \mathbb{R} \to T_{f(t_0)} N$ est déterminée par l'image de 1, et on pose

$$\dot{f}(t_0) = \frac{df}{dt}_{|t=t_0} = T_{t_0} f(1) \ .$$

On note aussi $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ la courbe $M \to TN$ définie par

$$\frac{df}{dt} : x \mapsto \frac{df}{dt}_{|t=x} \ .$$

Remarques. (1) Un moyen bien pratique pour calculer les espaces tangents est d'utiliser que ce sont les ensembles de vecteurs tangents de courbes, et d'écrire avec les notations précédentes : $T_x M = \{\dot{c}(0) \mid c : I \to M \ \mathrm{C}^1, \ c(0) = x, \ 0 \in \overset{\circ}{I} \}$ et $TM = \{\dot{c}(0) \mid c : I \to M \ \mathrm{C}^1, \ 0 \in \overset{\circ}{I} \}$

(2) Un moyen bien pratique pour calculer les applications tangentes est parfois d'utiliser la définition de l'application tangente par les 1-jets de courbes : si $f : M \to N$ est une

application C^1 et $x \in M$, alors $T_x f$ est l'unique application (linéaire) $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ telle que, pour toute courbe $c :]-\epsilon, +\epsilon[\to M$ de classe C^1 sur M telle que $c(0) = x$, on ait

$$T_x f(\dot{c}(0)) = \widehat{f \circ c}^{\cdot}(0) \ .$$

(3) Il n'y a que très rarement besoin de revenir à la construction même de l'espace tangent, qui sert surtout à mettre une structure de variété différentielle sur la réunion disjointe des espaces tangents à chaque point. La construction et sa naturalité permettent dans la plupart des cas de problèmes locaux, de « se ramener » au cas des ouverts des espaces euclidiens aussi en ce qui concerne l'espace tangent et les applications tangentes. Nous allons illustrer ceci dans les exemples suivant.

3.5 Exemples

Pour chacun des exemples familiaux du paragraphe 3.5, nous explicitons son espace tangent. Une bonne connaissance de ces exemples permet aussi de ne pas revenir à la construction générale.

• **Sous-variétés.** Explicitons le fibré tangent des sous-variétés d'un espace $\mathbb{R}^n$.

Soit M une sous-variété C^{r+1} de dimension p de $\mathbb{R}^n$. Considérons le sous-ensemble $F = F_M$ des couples (x, v) de $M \times \mathbb{R}^n$ tels qu'il existe une courbe $c :]-\epsilon, +\epsilon[\to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, d'image contenue dans M, et telle que $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$. Nous avons vu (proposition 3.2) que cet ensemble est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Considérons la projection $p : F \to M$ définie par $p(x, v) = x$, qui est de classe C^r. Chaque fibre $F_x = p^{-1}(x)$ est égale à $\{x\} \times T_x M$ où $T_x M$ est le sous-espace vectoriel tangent à la sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ (voir paragraphe 3.1), donc est munie d'une structure d'espace vectoriel.

Proposition 3.3 *Avec ces notations, $p : F \to M$ est un fibré vectoriel isomorphe au fibré tangent $\pi : TM \to M$.*

Preuve. Soit $\{(U_i, \varphi_i))\}_{i \in I}$ l'ensemble des paramétrages locaux de la sous-variété M. Alors $\{(\varphi_i(U_i), \varphi_i^{-1}))\}_{i \in I}$ est un atlas de cartes de la variété M. Pour x dans M, pour tout i tel que $x \in \varphi_i(U_i)$, l'application $d(\varphi_i)_{\varphi_i^{-1}(x)}$ est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^p$ sur le sous-espace vectoriel $F_x = \{v \in \mathbb{R}^n \ : \ (x, v) \in F\}$, comme vu au paragraphe 3.1. Considérons l'application Θ de TM dans F définie par

$$[\varphi_i(U_i), \varphi_i^{-1}, x, v] \mapsto (x, d(\varphi_i)_{\varphi_i^{-1}(x)}(v)) \ .$$

Par définition des structures différentielles de F et de TM, l'application Θ est un C^r-difféomorphisme, qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\Theta} & F \\ & \pi \searrow \quad \swarrow p & \\ & M & \end{array}$$

En restriction aux fibres, Θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En précomposant par Θ^{-1} une trivialisation locale de TM au dessus d'un ouvert U, on obtient donc une

trivialisation locale de $p : F \to M$ au-dessus de U. Donc $p : F \to M$ est un fibré vectoriel isomorphe au fibré tangent TM au-dessus de la base M. $\square$

Nous identifierons dans la suite le fibré tangent TM d'une sous-variété M de $\mathbb{R}^n$ avec ce fibré $F = F_M$, par l'isomorphisme Θ donné par la preuve ci-dessus. On retrouve ainsi l'identification du fibré tangent d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ avec $U \times \mathbb{R}^n$.

L'espace tangent T_xM en un point de la variété M (au sens du paragraphe 3.3) s'identifie alors au sous-espace tangent T_xM en x de la sous-variété M (au sens du paragraphe 3.1), par l'application $\Theta_{|T_xM} : T_xM \to F_x$ composée avec l'identification $(x, v) \mapsto v$ de F_x avec le sous-espace tangent en x à la sous-variété M, ce qui explique que nous les ayons notés de la même manière.

Si M et N sont deux sous-variétés C^1 de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$, si $f : M \to N$ est une application C^1 en un point x de M, alors avec l'identification de TM et F_M, et de TN et F_N, l'application $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ entre les sous-espaces tangents T_xM et $T_{f(x)}N$ aux sous-variétés M et N est l'application

$$v \mapsto \widehat{f \circ c}^{\,\cdot}(0) \ ,$$

où $c : I \to M$ est une courbe C^1 tracée sur M telle que $c(0) = x$ et $\dot{c}(0) = v$ (ce qui ne dépend pas des choix). Si $f : M \to N$ est C^1, alors $Tf : TM \to TN$ est l'application $(x, v) \mapsto (f(x), T_xf(v))$. Si f est la restriction d'une application C^1, encore notée f, d'un voisinage de M dans un voisiange de N, alors Tf est l'application $(x, y) \mapsto (f(x), df_x(y))$.

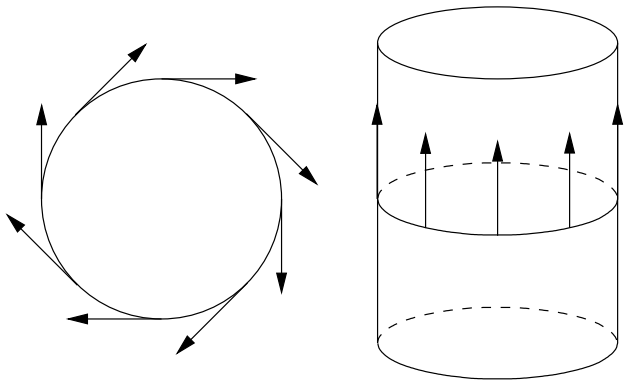
Par exemple, pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si la sous-variété M est la sphère de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+1}$, notée

$$\mathbb{S}_n = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \ ,$$

alors $T\mathbb{S}_n$ est isomorphe au fibré vectoriel

$$\{(x, v) \in \mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1} \ : \ v \in x^\perp\}$$

muni de la projection évidente sur $\mathbb{S}_n$, où $z^\perp$ désigne l'orthogonal de z pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.



Exercice E.54 *Montrer que le cercle $\mathbb{S}_1$ est parallélisable, i.e. que son fibré tangent $T\mathbb{S}_1$ est isomorphe au fibré trivial $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ (voir la figure ci-dessus).*

- **Plongements.**

Exercice E.55 *Soient M, N deux variétés C^{r+1}, où $0 \leq r \leq \omega$ et $f : M \to N$ une application C^{r+1}. Si f est un plongement C^{r+1}, alors l'application tangente $Tf : TM \to TN$ est un plongement C^r.*

Si M' est une sous-variété C^{r+1} de M, alors on identifie TM' avec son image dans TM par l'application tangente de l'inclusion de M' dans M. En particulier, si U est un ouvert de M, alors on identifie le fibré tangent à U avec la restriction à $p^{-1}(U)$ de la projection $p : TM \to M$. Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, alors TM se plonge dans $\mathbb{R}^{2n}$.

• **Images réciproques.** Fixons un élément k dans $(\mathbb{N}-\{0\})\cup\{\infty,\omega\}$, deux variétés M et N de classe C^{k+1} et de dimension m et n respectivement, et une application $f : M \to N$ de classe C^{k+1}.

Exercice E.56 *(1) Si $f : M \to N$ est une application de classe C^1, de rang constant r, si $x \in M$ et $y = f(x)$ alors l'espace tangent en x à la sous-variété $f^{-1}(y)$ est*

$$T_x(f^{-1}(y)) = \mathrm{Ker}\,(T_x f)\ .$$

(2) Si $f : M \to N$ est une submersion C^1, si S est une sous-variété C^1 de N, alors, pour tout x dans $f^{-1}(S)$, on a

$$T_x(f^{-1}(S)) = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)}S)\ .$$

En particulier, si y est une valeur régulière de f alors pour tout x dans $f^{-1}(y)$, on a $T_x\big(f^{-1}(y)\big) = \mathrm{Ker}(T_x f)$.

• **Sommes disjointes.** Soit $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille au plus dénombrable de variétés différentielles de classe C^k et de dimension n. Si M est la variété somme disjointe des M_α, alors TM est le fibré vectoriel somme disjointe des fibrés vectoriels TM_α.

• **Produits.** Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$.

Exercice E.57 *Montrer que si N est une variété produit $N_1 \times N_2$ de classe C^{k+1}, alors il existe un C^k-difféomorphisme*

$$TN \simeq TN_1 \times TN_2$$

(par lequel on identifie TN et $TN_1 \times TN_2$), tel que, pour toute variété M de classe C^{k+1}, pour toute application $f : M \to N$ de classe C^{k+1}, si $f = (f_1, f_2)$, alors avec l'identification ci-dessus, l'application tangente Tf coïncide avec (Tf_1, Tf_2).

En déduire que les tores sont parallélisables.

• **Revêtements.**

Exercice E.58 *Soit $\pi : E \to B$ un revêtement C^{r+1}, et $p_B : TB \to B$ la projection canonique. Montrer que l'ensemble $\pi^*TB = \{(x, y) \in E \times TB \ :\ \pi(x) = p_B(y)\}$, muni de la projection $pr_1 : (x, y) \mapsto x$ sur E admet une unique structure de fibré vectoriel C^r de base E tel que (pr_2, π) soit un morphisme de fibrés vectoriels C^r.*

Montrer que les fibrés π^*TB et TE sur E sont isomorphes par un isomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
TE \arrow[dr, leftrightarrow] \arrow[drr, "T\pi"] \arrow[ddr, "p_E"'] & & \\
& \pi^*TB \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & TB \arrow[d, "p_B"] \\
& E \arrow[r, "\pi"'] & B
\end{tikzcd}$$

Soit G un groupe discret agissant librement et proprement par C^{r+1}-difféomorphismes sur une variété X de classe C^{r+1}. Montrer que l'application $(g,v) \mapsto Tg(v)$ de $G \times TX$ dans TX est une action libre et propre de G par C^r-difféomorphismes, que la projection canonique $p_X : TX \to X$ est G-équivariante, et que l'application $\overline{p} : G\backslash(TX) \to G\backslash X$, induite de p_X par passage au quotient, est un fibré vectoriel de classe C^r.

Montrer que les fibrés $T(G\backslash X)$ et $G\backslash(TX)$ sur $G\backslash X$ sont isomorphes par un isomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& & G\backslash(TX) \arrow[ddl, bend left] \\
TX \arrow[r, "T\pi"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[urr, bend left] & T(G\backslash X) \arrow[ur, leftrightarrow] \arrow[d, "p_{G\backslash X}"] & \\
X \arrow[r, "\pi"'] & G\backslash X &
\end{tikzcd}$$

En particulier, en notant $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, montrer que $T\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est C^ω-difféomorphe à la variété quotient

$$\{(x,v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \ : \ ||x|| = 1, \langle x|v\rangle = 0\} \ / \ ((x,v) \sim (-x,-v)) \ .$$

Pour l'autre grande famille de variétés qui est celle des espaces homogènes (voir le paragraphe 5.8), nous renvoyons au chapitre 5 pour le calcul de leur espace tangent.

3.6 Fibrations

Soit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Une *fibration* (ou *fibré localement trivial)* de classe C^r est une application $p : E \to B$ de classe C^r entre deux variétés de classe C^r, de sorte que pour tout b dans B, il existe une variété F de classe C^r, un voisinage ouvert U de b, et un C^r-difféomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \to U \times F$, tels que $pr_1 \circ \phi = p_{|p^{-1}(U)}$, i.e. tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U &
\end{tikzcd} \ .$$

On dit que B est la *base*, E l'*espace total*, $p^{-1}(b)$ la *fibre* au-dessus de b, U un *ouvert distingué* ou *voisinage ouvert distingué* de b, ϕ une *trivialisation locale* de p au-dessus de

U. Lorsque F est fixé, et ne dépend pas de b, on parle de *fibration de fibre* F. Par abus, on désignera souvent par son espace total E la fibration p, l'application p étant sous-entendue.

Soient $p : E \to B$ et $p' : E \to B'$ des fibrations de classe C^r. Un *morphisme* C^r de p dans p' est un couple d'applications (g, f) de classe C^r tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{f} & B' \end{array} .$$

Un *isomorphisme* C^r *(de fibrations)* de p dans p' est un morphisme (g, f) de p dans p' tel qu'il existe un morphisme (g', f') de p' dans p qui vérifie $g \circ g' = id, g' \circ g = id, f \circ f' = id, f' \circ f = id$. Deux fibrations sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Lorsque $B = B'$, un *morphisme sur la base* B est un morphisme tel que $f = id$, et de même pour les isomorphismes. Le contexte indique en général clairement si l'on parle de morphisme ou de morphisme sur la base.

Pour $r' \leq r$, une *section* $\mathrm{C}^{r'}$ d'une fibration $p : E \to B$ de classe C^r est une application s de classe $\mathrm{C}^{r'}$ de B dans E telle que $p \circ s = \mathrm{id}_B$. Une telle section continue globale (i.e. définie sur tout B) n'existe en général pas.

Exemples et remarques. (1) Si M et F sont deux variétés C^r, la première projection $\mathrm{pr}_1 : M \times F \to M$ de la variété produit $M \times F$ dans M est une fibration de fibre F, de base M, dite *triviale*. Toute fibration isomorphe à une fibration triviale est dite *trivialisable*. Une fibration trivialisable admet beaucoup de sections globales C^r : pour tout y dans F, l'application $x \mapsto (x, y)$ est une section globale C^r de $\mathrm{pr}_1 : M \times F \to M$. Par exemple, si $p : E \to B$ est une fibration, et U un ouvert distingué de B, alors la restriction de p à $p^{-1}(U)$ est une fibration trivialisable. Donc une fibration (localement triviale) admet de nombreuses sections locales (c'est-à-dire définies sur un voisinage suffisamment petit de tout point).

Par exemple, l'application $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to]\,0, +\infty\,[$ définie par

$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto x_0^2 + \cdots + x_n^2$$

est une fibration analytique réelle, de fibre $\mathbb{S}_n$, qui est trivialisable.

(2) Les revêtements sont les fibrations de fibres discrètes.

(3) Les fibrés vectoriels C^r de rang n sont des fibrations C^r (de fibre la variété $\mathbb{R}^n$). Mais une fibration de fibre la variété $\mathbb{R}^n$ n'admet peut-être pas de manière évidente une structure de fibré vectoriel (compatible avec celle de fibration). Par exemple, le groupe $\mathbb{Z}$ agit librement et proprement par difféomorphismes analytiques réels sur $\mathbb{R}^2$, l'action de 1 étant $(x, y) \mapsto (x + 1, \sinh y)$. Soit M la variété quotient analytique réelle $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$. L'application analytique réelle $(x, y) \mapsto x$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ induit par passage au quotient une fibration analytique réelle $M \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}_1$, de fibre $\mathbb{R}$. Mais cette fibration n'admet pas de structure de fibré vectoriel, compatible avec sa structure de fibration, telle que la projection canonique $\mathbb{R}^2 \to M$ soit un isomorphisme linéaire en restriction à chaque droite verticale.

(4) Soit $p : E \to B$ un fibré vectoriel C^r de rang n, et k un élément de $\{1, \ldots, n\}$. On note $\mathcal{G}_k E$ l'ensemble somme disjointe $\coprod_{b \in B} \mathcal{G}_k(E_b)$ des variétés grassmanniennes de rang k des fibres de p, et $\mathcal{G}_k p : \mathcal{G}_k E \to B$ l'application qui à un élément de $\mathcal{G}_k(E_b)$ associe b. Cette application admet alors une unique structure de fibration C^r telle que, pour toute

(inverse de) trivialisation locale $h : U \times \mathbb{R}^n \to p^{-1}(U)$ au dessus d'un ouvert U de B, l'application $U \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n) \to (\mathcal{G}_k p)^{-1}(U)$ définie par $(x, A) \mapsto h(x, A)$ soit (l'inverse d')une trivialisation locale de $\mathcal{G}_k p : \mathcal{G}_k E \to B$ au dessus de U. Cette fibration (ou par abus la variété $\mathcal{G}_k E$) s'appelle la *fibration grassmannienne de rang k de E* ou *fibré des k-plans* de E. En particulier, si $k = 1$, alors la fibration grassmanienne de rang 1 de E est notée $\mathbb{P}(p) : \mathbb{P}(E) \to B$, et appelée la *fibration projective* de E.

Si le couple $(f, \overline{f})$ est un morphisme de fibrés vectoriels de $p : E \to B$ sur $p' : E' \to B'$, avec f injective en restriction à chaque fibre de E, alors le couple $(\mathcal{G}_k f : A \mapsto f(A), \overline{f})$ est un morphisme de fibrations de $\mathcal{G}_k p : G_k E \to B$ sur $\mathcal{G}_k p' : \mathcal{G}_k E' \to B$. Ainsi, avec des vérifications immédiates, nous venons de définir un foncteur (voir l'appendice A.6) de la catégorie des fibrés vectoriels et des morphismes de fibrés vectoriels injectifs sur les fibres dans celle des fibrations.

Si M est une variété C^{r+1}, alors on appelle *fibration grassmannienne* de rang k de M ou *fibré des k-plans* de M, la fibration grassmannienne de rang k du fibré tangent $\pi : TM \to M$ de M.

Par exemple, si E est le fibré vectoriel trivial $B \times \mathbb{R}^n$ alors la fibration grassmannienne de rang k de E est isomorphe à la fibration triviale $pr_1 : B \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n) \to B$. En particulier, si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, comme le fibré tangent TM de M s'identifie avec $M \times \mathbb{R}^n$, alors la fibration grassmannienne de rang k de TM est isomorphe à la fibration triviale $pr_1 : M \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n) \to M$.

(5) Il est immédiat qu'une fibration est une submersion surjective. En particulier, toute fibre est une sous-variété C^r de l'espace total. Toute submersion est localement une fibration, par le théorème 2.8 de forme normale locale. Mais il existe des submersions qui ne sont pas des fibrations. Par exemple, l'application $x \mapsto x^3 - 3x$ de $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$ dans $\mathbb{R}$ est une submersion surjective, qui n'est pas une fibration (car le cardinal des fibres est fini et non localement constant). Mais nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.4 (Théorème de fibration d'Ehresmann) *Soit $r \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$. Une submersion surjective propre de classe C^r est une fibration de classe C^r.* □

Pour la preuve, nous renvoyons à l'exercice E.88. En particulier, une submersion surjective de classe C^r d'une variété compacte M de classe C^r sur une variété N de classe C^r est une fibration de classe C^r.

3.7 Le fibré des formes alternées

Soit M une variété C^{r+1} de dimension n, avec $0 \leq r \leq \omega$ et n dans $\mathbb{N}$. Dans ce chapitre, p désigne un élément de $\mathbb{N}$. Nous renvoyons à l'appendice A.5 pour des rappels sur les formes multilinéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension finie.

Notons $\pi : TM \to M$ le fibré tangent de M. Notons

$$\Lambda^* T^* M = \coprod_{x \in M} \Lambda^*(T_x M)^*$$

l'ensemble réunion disjointe des espaces vectoriels de dimension finie des formes multilinéaires alternées sur les espaces tangents aux points x de M, ainsi que $\Lambda^p T^* M = \coprod_{x \in M} \Lambda^p(T_x M)^*$ et

$$T^* M = \Lambda^1 T^* M = \coprod_{x \in M} (T_x M)^* \ .$$

Soit $\lambda_* : \Lambda^* T^* M \to M$ (resp. $\lambda_p : \Lambda^p T^* M \to M$) l'application qui à un élément de $\Lambda^*(T_x M)^*$ (resp. $\Lambda^p(T_x M)^*$) associe x (les notations λ et λ_* ne sont pas standard). Notons que $\Lambda^0 T^* M$ s'identifie avec $M \times \mathbb{R}$, et λ_0 avec la première projection. Les inclusions de $\Lambda^p(T_x M)^*$ dans $\Lambda^*(T_x M)^*$ pour tout x dans M induisent une inclusion de $\Lambda^p T^* M$ dans $\Lambda^* T^* M$, et λ_p est la restriction de λ_* à $\Lambda^p T^* M$.

Nous allons munir l'application $\lambda_* : \Lambda^* T^* M \to M$ d'une structure de fibré vectoriel, de manière complètement analogue à la construction du fibré tangent (voir le paragraphe 3.3). Si (U, φ) est une carte locale de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, notons

$$\lambda_* \varphi : \lambda_*^{-1}(U) \to U \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$$

la bijection telle que, pour tout x dans U et ω_x dans $\Lambda^*(T_x M)^*$,

$$\lambda_* \varphi(\omega_x) = (x, ((T_x \varphi)^{-1})^* \omega_x) \ .$$

Proposition 3.5 *Il existe une et une seule structure de fibré vectoriel de classe* C^r *sur* $\lambda_* : \Lambda^* T^* M \to M$ *telle que, pour toute carte locale* (U, φ) *de classe* C^{r+1} *de* M*, la partie* $\lambda_*^{-1}(U)$ *soit un ouvert de* $\Lambda^* T^* M$ *et le couple* $(\lambda_*^{-1}(U), \lambda_* \varphi)$ *soit une trivialisation locale* C^r *du fibré vectoriel* λ_* *au-dessus de* U*.*

On construit de même une unique structure de fibré vectoriel C^r sur $\lambda_p : \Lambda^p T^* M \to M$ telle que, pour toute carte locale (U, φ) de classe C^{r+1} de M, la partie $\lambda_p^{-1}(U)$ soit un ouvert de $\Lambda^p T^* M$ et le couple $(\lambda_p^{-1}(U), \lambda_p \varphi)$, où $\lambda_p \varphi$ associe à $\omega_x \in \Lambda^p(T_x M)^*$ le couple $(x, ((T_x \varphi)^{-1})^* \omega_x)$, soit une trivialisation locale C^r du fibré vectoriel λ_p au-dessus de U. Le fibré vectoriel $\lambda_p : \Lambda^p T^* M \to M$ est un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel $\lambda_* : \Lambda^* T^* M \to M$.

Preuve. Si (U, φ) et (U', φ') sont deux cartes locales de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, l'application $\lambda_* \varphi' \circ (\lambda_* \varphi)^{-1} : \varphi(U \cap U') \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^* \to \varphi'(U \cap U') \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$ est le C^r-difféomorphisme

$$(x, \omega) \mapsto (\varphi' \circ \varphi^{-1}(x), ((d(\varphi' \circ \varphi^{-1})_x)^{-1})^*(\omega)) \ .$$

Donc l'ensemble des couples $(\lambda_*^{-1}(U), \lambda_* \varphi)$, lorsque (U, φ) parcourt l'ensemble des cartes locales C^{r+1} de M, est un atlas de cartes C^r sur $\Lambda^* T^* M$. Ceci permet (voir la remarque 2.6) de munir $\Lambda^* T^* M$ d'une topologie, et d'une structure de variété C^r. Il est immédiat de vérifier que cette topologie est, comme celle de M, séparée et à base dénombrable, que l'application λ_* est C^r, et que $(\lambda_*^{-1}(U), \lambda_* \varphi)$ est une trivialisation locale C^r d'une structure de fibré vectoriel C^r sur λ_*. L'unicité est claire. $\square$

Exercice E.59 *Montrer que la structure de fibré vectoriel* C^r *sur* $\lambda_p : \Lambda^p T^* M \to M$ *construite ci-dessus est l'unique structure de fibré vectoriel* C^r *telle que, pour tout ouvert* U *de* M*, pour toute section* $s : U \to \Lambda^p T^* M$ *de* λ_p *sur* U *de classe* C^r*, pour tous les champs de vecteurs (voir chapitre 4)* $X_1, \ldots, X_p$ *de classe* C^r *sur* U*, l'application de* U *dans* $\mathbb{R}$ *définie par*

$$x \mapsto s_x(X_1(x), \ldots, X_p(x))$$

soit de classe C^r*.*

Le fibré vectoriel $\lambda_p : \Lambda^p T^*M \to M$ s'appelle le *fibré des p-formes alternées* sur M. Le fibré vectoriel $\lambda_* : \Lambda^* T^*M \to M$ s'appelle le *fibré des formes alternées* sur M. Le fibré vectoriel $\lambda_1 : T^*M \to M$, dont la fibre au-dessus de chaque point x de M est l'espace dual à l'espace tangent à M en x, s'appelle le *fibré cotangent* de M.

Une section du fibré λ_* s'appelle une *forme différentielle*. Nous reviendrons longuement sur cette notion au chapitre 6.

3.8 Opérations sur les fibrés vectoriels

Soit $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$.

• **Image réciproque.**

Soit ξ un fibré vectoriel de classe C^r, d'application $p : E \to B$. Soit $f : M \to B$ une application C^r. Le *fibré vectoriel image réciproque* de ξ par f est le fibré vectoriel, noté $f^*\xi$, défini de la manière suivante. Posons

$$f^*E = \{(x, y) \in M \times E \ : \ f(x) = p(y)\} \ ,$$

notons $\widetilde{p} : f^*E \to M$ la première projection $(x, y) \mapsto x$, et $\widetilde{f} : f^*E \to E$ la seconde projection $(x, y) \mapsto y$, de sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ \widetilde{p}\downarrow & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{f} & B \end{array} \ .$$

Il existe alors une unique structure de fibré vectoriel C^r sur $\widetilde{p} : f^*E \to M$ telle que le couple $(\widetilde{f}, f)$ soit un morphisme de fibrés vectoriels C^r de $\widetilde{p} : f^*E \to M$ sur $p : E \to B$.

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(U) \times F \arrow[rr, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{pr}_1"'] & & U \times F \arrow[ddl, bend left, "\mathrm{pr}_1"] \\
& (f \circ \widetilde{p})^{-1}(U) \arrow[ul, "\widetilde{\varphi}"'] \arrow[r, "\widetilde{f}"'] \arrow[d, "\widetilde{p}"'] & p^{-1}(U) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[d, "p"] \\
& f^{-1}(U) \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

En effet, l'application $\widetilde{f}$ induit la bijection évidente de $\widetilde{p}^{-1}(x) = \{x\} \times E_{f(x)}$ sur $E_{f(x)}$, qui permet donc de munir les fibres $\widetilde{p}^{-1}(x)$ d'une structure d'espace vectoriel. Munissons f^*E de l'atlas maximal de cartes contenant les couples $(\widetilde{p}^{-1}(f^{-1}(U)), \widetilde{\varphi})$ où $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ est une trivialisation locale du fibré vectoriel ξ au-dessus de l'ouvert U de B, et

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{p}^{-1}(f^{-1}(U)) \to (f^{-1}(U) \times F)$$

est l'application définie par $(x, y) \mapsto (x, \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(y))$. Il est immédiat de vérifier que les applications de transition de ces cartes sont C^r, que $\widetilde{p} : f^*E \to M$ est un fibré vectoriel, et que $(\widetilde{f}, f)$ est un morphisme de fibrés vectoriels. L'unicité est immédiate.

Le fibré image réciproque vérifie la propriété universelle suivante, laissée en exercice.

Exercice E.60 *Pour tout fibré vectoriel η de classe C^r, d'application $\pi : E' \to M$, et pour tout morphisme (F, f) de fibrés vectoriels C^r de η sur ξ, il existe une unique application $\theta : E' \to f^*E$ de classe C^r, qui rende le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "F"] \arrow[ddr, bend right, "\pi"'] & & \\
& f^*E \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "\widetilde{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& M \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

et qui soit un morphisme de fibrés vectoriels de η sur $f^*\xi$ au-dessus de M.

• **Produit.**

Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de classe C^r, d'applications $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ respectivement.

Le *fibré vectoriel produit* de ξ et de ξ' est le fibré vectoriel, noté $\xi \times \xi'$, de base la variété produit $B \times B'$, d'espace total la variété produit $E \times E'$, de projection l'application produit $p \times p' : E \times E' \to B \times B'$ définie par $(x, x') \mapsto (p(x), p(x'))$, de structure vectorielle sur la fibre au-dessus de (b, b') la structure d'espace vectoriel produit sur $E_b \times E'_{b'}$.

Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un fibré vectoriel, il suffit de remarquer que si $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ est une trivialisation locale du fibré vectoriel ξ au-dessus de l'ouvert U de B, et si $\varphi' : p'^{-1}(U') \to U' \times F'$ est une trivialisation locale du fibré vectoriel ξ' au-dessus de l'ouvert U' de B', alors l'application de $(p \times p')^{-1}(U \times U') = p^{-1}(U) \times p'^{-1}(U')$ dans $(U \times U') \times (F \times F')$ définie par

$$(x, x') \mapsto (\mathrm{pr}_1 \circ \varphi(x), \mathrm{pr}_1 \circ \varphi'(x'), \mathrm{pr}_2 \circ \varphi(x), \mathrm{pr}_2 \circ \varphi'(x'))$$

est une trivialisation locale du fibré vectoriel $\xi \times \xi'$ au-dessus de l'ouvert $U \times U'$ de $B \times B'$.

• **Somme directe.**

Soient ξ et ξ' deux fibrés vectoriels de classe C^r, d'applications $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ respectivement, ayant les mêmes bases.

Si $\delta : B \to B \times B$ est l'application diagonale $x \mapsto (x, x)$, alors on appelle *fibré vectoriel somme directe* de ξ et de ξ', et on note $\xi \oplus \xi'$ le fibré vectoriel image réciproque par δ du fibré vectoriel produit de ξ et ξ'. En particulier, son espace total est

$$\{(b, x, x') \in B \times E \times E' \ : \ b = p(x) = p'(x)\} \ ,$$

qui s'identifie avec la sous-variété

$$\{(x, x') \in E \times E' \ : \ p(x) = p'(x)\}$$

de la variété produit $E \times E'$. La projection est alors l'application $(x, x') \mapsto p(x)$, et la fibre au-dessus de b est $E_b \times E'_b$.

Exercice E.61 *Soit M une variété C^{r+1} avec $0 \leq r \leq \omega$. Montrer que le fibré vectoriel $\Lambda^* T^* M$ est canoniquement isomorphe à la somme directe des sous-fibrés vectoriels $\Lambda^p T^* M$: les inclusions $\Lambda^p T^* M \to \Lambda^* T^* M$ induisent un isomorphisme*

$$\Lambda^* T^* M \simeq \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p T^* M \ ,$$

par lequel on identifie $\Lambda^* T^* M$ et cette somme directe.

3.9 Autres exercices

Exercice E.62 Soit M une hypersurface compacte de classe C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. On définit une application ψ de M dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ en associant à un point x de M la droite orthogonale à $T_x M$. Montrer que ψ est de classe C^∞ et surjective.

Exercice E.63 (1) Calculer l'équation de la droite affine réelle (resp. complexe) tangente en un point non singulier de la courbe réelle (resp. complexe) d'équation $y^2 = x^3 + ax + b$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{C}^2$).

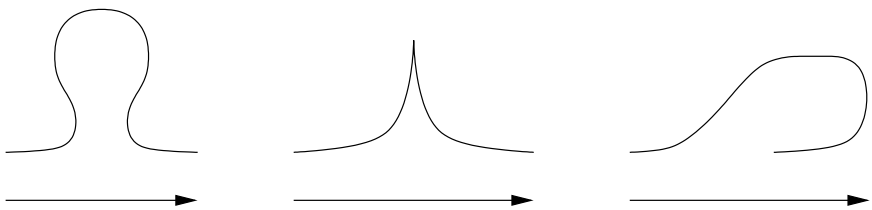
(2) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z), on considère un plongement c de classe C^1 d'un intervalle $]0, 1[$ dans le plan des x, z ne rencontrant pas l'axe des z, et la surface de révolution S obtenue en faisant tourner la courbe c autour de l'axe des z. Calculer les sous-espaces tangents aux points de S.

(3) On note (z, t) avec $z = x + iy$ un point de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. On pose $f(z) = y^2 - (x-1)^2(2 - (x-1)^2)$. Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, les sous-espaces tangents aux points de la sous-variété de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ d'équation $f(z^n)^2 + t^2 = \frac{1}{100}$.

(4) Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}\, xy, \sqrt{2}\, zx, \sqrt{2}\, yz)$ (voir l'exercice E.44). Calculer les sous-espaces tangents aux points des sous-variétés $M = \Phi(\mathbb{R}^3 - \{0\})$ et $M \cap \mathbb{S}_5$ de $\mathbb{R}^6$.

(5) Calculer les sous-espaces tangents aux points des sous-variétés (voir l'exercice E.17) $SL_n(\mathbb{C}), U(n), SU(n), GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R}), O(n), SO(n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice E.64 Pour chacun des trois dessins suivants, dire s'il est possible de faire tourner la droite affine orientée de manière à la ramener sur elle-même en ayant fait un demi-tour, sans qu'elle soit jamais tangente à la courbe.



Exercice E.65 Soit n un élément de $\mathbb{N} - \{0\}$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ ||x|| = 1\}$ sa sphère unité. On note $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel de dimension n (que l'on identifie aussi à l'espace des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$), et $[x]$ l'image dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ d'un vecteur x non nul de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(1) Montrer que l'application $f : \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est de classe C^∞. En quels points est-elle une submersion ?

(2) On note M le sous-ensemble de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ formé des couples (x, x') de vecteurs unitaires orthogonaux. Montrer que M est une sous-variété C^∞ de la variété produit $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$.

(3) On note M' le sous-ensemble de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ formé des couples (D, D') de droites vectorielles orthogonales de $\mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que M' est une sous-variété C^∞ de la variété produit $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

(4) On note E l'ensemble des triplets (x, x', y) de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\langle x, x' \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x', y \rangle = 0$, et $\pi : E \to M$ l'application définie par $(x, x', y) \mapsto (x, x')$. Montrer que π est un fibré vectoriel C^∞ sur M.

(5) On note E' l'ensemble des couples $([x], y)$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\langle x, y \rangle = 0$, et $\pi' : E' \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'application $([x], y) \mapsto [x]$. Montrer que π' est un fibré vectoriel C^∞, isomorphe au fibré tangent de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

(6) On note E'' l'ensemble des couples $(([x], y), ([x'], y'))$ de $E' \times E'$ tels que $\langle x, x' \rangle = 0$ et $y = y'$, et $\pi'' : E'' \to M'$ l'application définie par $(([x], y), ([x'], y')) \mapsto ([x], [x'])$. Montrer que π'' est un fibré vectoriel C^∞.

Exercice E.66 (1) Montrer que $(T\mathbb{S}_n) \times \mathbb{R}$ est C^ω-difféomorphe à $\mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1}$.
(2) En déduire que $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_1$ est parallélisable.

Exercice E.67 Montrer que la variété $T\mathbb{S}_n$ est C^ω-difféomorphe à la sous-variété réelle de $\mathbb{C}^n$ d'équation

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = 1 \ .$$

Exercice E.68 Montrer qu'il existe exactement deux classes d'isomorphisme de fibrés en droites vectorielles de base $\mathbb{S}_1$.

Exercice E.69 Soit M une variété compacte. Montrer que tout fibré vectoriel sur M peut se plonger comme sous-fibré d'un fibré trivial.

Exercice E.70 Soit $n \geq 1$. On note $E_n = \{(x, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \ : \ x \in X\}$.

1. Montrer que E_n est une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. Montrer que E_2 est difféomorphe à un ruban de Möbius.

2. Montrer que la seconde projection $E_n \to \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ est un fibré vectoriel en droites au-dessus de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.
3. Soit π la première projection de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E_n - \pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et que $\pi^{-1}(0)$ est difféomorphe à $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.
4. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ une courbe lisse dont le vecteur dérivé ne s'annule jamais. Supposons que la restriction de γ à l'ensemble $I - \gamma^{-1}(0)$ soit injective et que, pour $s \neq t$ dans I avec $\gamma(s) = \gamma(t) = 0$, les vecteurs $\gamma'(s)$ et $\gamma'(t)$ ne soient pas colinéaires. Montrer qu'il existe une unique courbe continue $\tilde{\gamma} : I \to E_n$ telle que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et que $\tilde{\gamma}$ est simple.

Exercice E.71 Soient M une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire euclidien standard, et $x \in M$. On note $\Psi : M \to T_xM$ la projection orthogonale de M sur T_xM. Calculer l'application tangente de Ψ en x.

Exercice E.72 Par variété, on entend variété C^∞. Soient N une sous-variété d'une variété M, et ϕ une application C^∞ d'une variété P dans M. On suppose que ϕ est *transverse* à N, c'est-à-dire que, pour tout x dans P tel que $\phi(x) \in N$, on ait

$$T_x\phi(T_xP) + T_{\phi(x)}N = T_{\phi(x)}M$$

(la somme n'étant pas nécessairement directe). Montrer alors que $\phi^{-1}(N)$ est une sous-variété de P. Quelle est sa dimension ?

Exercice E.73 Soient M une variété C^∞ et $f : M \to \mathbb{R}$ une application C^∞. Si $x \in M$, on voudrait définir $D^2f(x)$, qui serait une forme bilinéaire symétrique sur T_xM.

L'approche naïve : soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \to M$ un paramétrage local envoyant 0 sur x. Si $u, v \in T_xM$, on pose alors

$$D^2f(x).(u,v) = D^2(f \circ \phi)(0).(d\phi_0^{-1}(u), d\phi_0^{-1}(v)).$$

Montrer que cette définition n'est en général pas indépendante de la carte ! Autrement dit, on ne peut pas définir ainsi une différentielle seconde.

Cependant, vérifier que, quand $df_x = 0$, la définition ci-dessus est indépendante de la carte.

Exercice E.74 Par variété, on entend variété C^∞. Soient M une variété de dimension n et $f : M \to \mathbb{R}^p$ une application C^∞ telle que, dès que $f(x) = 0$, l'application T_xf soit surjective. Ainsi, $N = f^{-1}(0)$ est une sous-variété de M de codimension p.

Soit $g : M \to \mathbb{R}$ une application C^∞. Si $x \in N$ est un extrémum local de $g_{|N}$, montrer qu'il existe une application linéaire A de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ telle que $T_xg = A \circ T_xf$.

Notons $f_1, \ldots, f_p$ les composantes de f. Retrouver l'énoncé classique sur les *multiplicateurs de Lagrange* : il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$T_xg = \sum \lambda_i T_xf_i \ .$$

Exercice E.75 Tous les fibrés sont de classe C^k dans ce qui suit. Montrer que pour tous les fibrés vectoriels ξ et ξ', d'applications $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ au-dessus de la même base, il existe un, et un seul à isomorphisme près, fibré vectoriel $\xi \otimes \xi'$ sur la base B, d'espace total noté $E \otimes E'$, dont la fibre au-dessus d'un point b de B est le produit tensoriel $E_b \otimes E'_b$ des fibres de ξ et ξ' au-dessus de b, vérifiant la propriété universelle suivante :

pour tout fibré vectoriel $\pi : F \to B$, pour toute application $f : E \oplus E' \to F$ de classe C^k telle que $\pi \circ f = p$ et dont la restriction à $E_b \oplus E'_b$ est bilinéaire pour tous les b dans B, il existe un unique morphisme de fibrés vectoriels $g : E \otimes E' \to F$ tel que, pour tous les b dans B, pour tous les v dans E_b et v' dans E'_b, on ait

$$g(v \otimes v') = f(v, v') \ .$$

Ce fibré $\xi \otimes \xi'$ s'appelle le *fibré vectoriel produit tensoriel* de ξ et ξ'.

Exercice E.76 On reprend les notations de l'exercice E.41.

Soient I, J les segments de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1, -2 \leq y \leq 2\} \quad \text{et} \quad J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2, y = 0\} \ .$$

Montrer que l'ensemble des (z, t) dans Σ_n tels que $z^n \notin I \cup J$ est une sous-variété de Σ_n qui est une fibration en cercles, de classe C^∞, donc on calculera le nombre de composantes connexes.

Exercice E.77 Soit M une variété C^{r+1}. Montrer que l'application du fibré somme directe $T^*M \oplus TM$ dans $\mathbb{R}$, qui à (ξ, v) dans $T^*_x M \times T_x M$ associe $\xi(x)$ est une application C^r.

3.10 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.56 (1) Utiliser le théorème de forme normale.

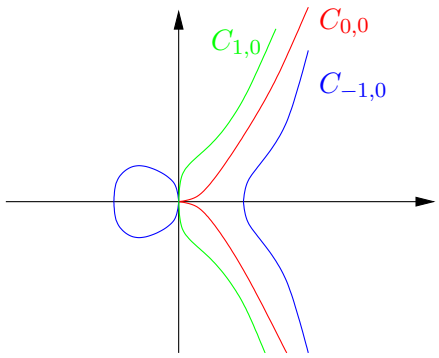
(2) Soit $y = f(x)$, U un voisinage ouvert de y et $g : U \to \mathbb{R}^n$ une submersion C^1 telle que $S \cap U = g^{-1}(g(y))$. Alors $f^{-1}(S) \cap f^{-1}(U) = (g \circ f)^{-1}(g \circ f(x)$ et $g \circ f$ est une submersion C^1, donc par (1)

$$T_x(f^{-1}(S)) = \mathrm{Ker} T_x(g \circ f) = (T_x f)^{-1}(\mathrm{Ker} T_x g) = (T_x f)^{-1}(T_{f(x)} S) \ .$$

Schème E.62 Soit $v \in \mathbb{S}_n$. La fonction $x \mapsto \langle x, v \rangle$ est continue sur M, elle y atteint donc son maximum en un point x_0. Montrons que v est orthogonal à $T_{x_0} M$, ce qui conclura. Soit $u \in T_{x_0} M$. Il existe une courbe lisse $\gamma :]-1, 1[\to \mathbb{R}^{n+1}$ à valeurs dans M telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = u$. Soit alors $f : t \mapsto \langle \gamma(t), v \rangle$. Cette application admet un maximum local en 0, par définition de x_0. En particulier, $f'(0) = 0$. Mais $f'(0) = \langle u, v \rangle$, donc v est bien orthogonal à tout vecteur de $T_{x_0} M$.

Schème E.63 (1) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. L'application $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ définie par $(x, y) \mapsto y^2 - x^3 - ax - b$ est $\mathbb{K}$-analytique, de dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - a$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$, donc est une submersion $\mathbb{K}$-analytique en tout point différent de $(\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}, 0) \cap \mathbb{K}^2$. Si $C = C_{a,b}$ est la courbe d'équation $f(x, y) = 0$, alors C est $\mathbb{K}$-analytique au moins en tout point (x, y) différent de $(\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}, 0)$ si $27b^2 + 16a^3 = 0$, et $\mathbb{K}$-analytique en tout point (x, y) sinon. En un tel point (x, y), le sous-espace tangent est d'équation

$$(-3x^2 - a)X + 2yY = 0 \ .$$



Schème E.64 L'espace $\mathcal{E}$ des droites (affines) orientées de $\mathbb{R}^2$ est homéomorphe au cylindre $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$: une droite orientée est paramétrée par sa direction (appartenant à $\mathbb{S}_1$) et par sa distance (algébrique) à l'origine.

Dans chacun des cas, il s'agit de voir si l'ensemble des droites tangentes à la courbe forme une courbe $\mathcal{C}$ telle que la droite orientée D et la droite orientée D' obtenue en changeant l'orientation de D ne soient pas dans la même composante connexe de $\mathcal{E} - \mathcal{C}$.

Dans le premier cas, $\mathcal{C}$ est formé de deux courbes simples, chacune correspondant au parcours de la courbe dans l'un des deux sens. Ces deux courbes ne se rencontrent pas (car il n'y a pas de droite tangente à la courbe en deux points différents). La direction le long de chacune des courbes évite au moins une valeur de $\mathbb{S}_1$, donc aucune courbe ne sépare l'anneau $\mathcal{E}$ en deux composantes non bornées. Par le théorème de Jordan, $\mathcal{E} - \mathcal{C}$ a donc une unique composante connexe non bornée. Les droites D et D' appartiennent toutes deux à cette composante non bornée (puisqu'on peut les faire descendre jusqu'à l'infini). Cela montre qu'on peut passer de D à D' sans être tangent à la courbe.

Dans les deux autres cas, $\mathcal{C}$ est obtenue en reliant le point $(0, 0)$ au point $(\pi, 0)$ (en parcourant la courbe dans un sens) puis en reliant $(\pi, 0)$ à $(0, 0)$ par une courbe obtenue à partir de la première par $(\theta, x) \mapsto (\theta + \pi, -x)$ (en parcourant la courbe dans l'autre sens). Il y a donc deux composantes non bornées dans le complémentaire de $\mathcal{C}$, et D et D' appartiennent à ces deux composantes. Ainsi, on ne peut pas passer de D à D' sans être tangent à la courbe.

Schème E.65 (1) L'application f est la restriction, à la sous-variété $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ de classe C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$, de l'application bilinéaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$, qui est C^∞. Donc f est C^∞. Son application tangente $T_{(x,y)}f$ en un point (x, y) de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ est l'application de $T_x\mathbb{S}_n \times T_y\mathbb{S}_n = x^\perp \times y^\perp$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(h, k) \mapsto \langle h, y\rangle + \langle x, k\rangle$. Cette application est l'application nulle si et seulement si $x = y$. Donc f est une submersion exactement en tout point non diagonal du produit $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$.

(2) Ceci découle par le corollaire 2.22 du cours du fait que l'application f de la question (1) est une submersion en dehors de la diagonale.

(3) Le groupe fini $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$ agit librement par C^∞-difféomorphismes sur la variété produit $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ (par les antipodies sur chaque facteur), et la variété quotient $(\{\pm 1\} \times \{\pm 1\})\backslash(\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n)$ est C^∞-difféomorphe à la variété produit $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. La sous-variété

M de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ est préservée par l'action du groupe fini $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$, donc son image dans le quotient de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ par ce groupe est une sous-variété C^∞. Par invariance de la propriété de sous-variété C^∞ par C^∞-difféomorphisme, le résultat en découle.

(5) Commençons par une remarque préliminaire. Soient $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \widetilde{B}$ un fibré vectoriel de rang n, et G un groupe discret. On suppose que $\widetilde{E}$ et $\widetilde{B}$ sont munis d'une action libre et propre de G, de sorte que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} G \times \widetilde{E} & \longrightarrow & \widetilde{E} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times\widetilde{\pi}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \widetilde{\pi}} \\ G \times \widetilde{B} & \longrightarrow & \widetilde{B} \end{array} ,$$

et que l'action de $g \in G$ sur $\widetilde{E}$ induise un isomorphisme linéaire de $\widetilde{\pi}^{-1}(b)$ sur $\widetilde{\pi}^{-1}(gb)$ pour tout b dans B. Si on note $E = G\backslash\widetilde{E}$ et $B = G\backslash\widetilde{B}$ les variétés quotients, alors par la commutativité du diagramme, l'application $\widetilde{\pi}$ induit une application $\pi : E \to B$ de classe C^∞, et pour tout x dans B, si U est un ouvert suffisamment petit de B contenant x, alors il existe un ouvert $\widetilde{U}$ de $\widetilde{B}$ tel que

- la projection canonique $p_B : \widetilde{B} \to B$ induise un C^∞-difféomorphisme entre $\widetilde{U}$ et U,
- il existe une trivialisation locale $\widetilde{\theta} : \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U}) \to \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n$ du fibré $\widetilde{\pi}$ au-dessus de $\widetilde{U}$.
- la projection canonique $p_E : \widetilde{E} \to E$ induise un C^∞-difféomorphisme entre $\widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U})$ et $\pi^{-1}(U)$,

Alors l'application $\theta : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ rendant le diagramme suivant commutatif est une trivialisation locale du fibré π au-dessus de U :

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\pi}^{-1}(\widetilde{U}) & & \xrightarrow{p_E} & & \pi^{-1}(U) \\ & \searrow^{\widetilde{\theta}} & & \swarrow^{\theta} & \\ {\scriptstyle \widetilde{\pi}} \downarrow & & \widetilde{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n & & \downarrow {\scriptstyle \pi} \\ & \swarrow_{\mathrm{pr}_1} & & \searrow_{\mathrm{pr}_1} & \\ \widetilde{U} & & \xrightarrow{p_B} & & U \end{array} .$$

Maintenant, on a vu au paragraphe 3.5 que le fibré tangent de $\mathbb{S}_n$ est isomorphe à l'ensemble $\widetilde{E}$ des couples (x, y) de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\langle x, y\rangle = 0$, muni de l'application $\widetilde{\pi} : \widetilde{E} \to \mathbb{S}_n$ définie par $(x, y) \mapsto x$. Le groupe fini $\{\pm 1\}$ agit librement sur $\mathbb{S}_n$ par antipodie, ainsi que sur $\mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1}$ en laissant fixe le second facteur. On applique alors la remarque préliminaire.

(6) Notons

$$\widetilde{E}'' = \{((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1})^2 \ : \ \langle x, x'\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle = 0, y = y'\} ,$$

$\widetilde{M} = \mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n$ et $\widetilde{\pi}'' : \widetilde{E}'' \to \widetilde{M}$ l'application $((x, y), (x', y')) \mapsto (x, x')$. Par la remarque préliminaire de la question (5), il suffit de montrer que $\widetilde{\pi}''$ est un fibré vectoriel C^∞. Tout d'abord, l'application de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1}$ (dans lequel s'injecte de manière évidente $\widetilde{E}''$, par un homéomorphisme sur son image) dans $\mathbb{R}^3$ définie par $(x, x', y) \mapsto (\langle x, x'\rangle, \langle x, y\rangle, \langle x', y\rangle)$ est une submersion au voisinage de $\widetilde{E}''$, de la même manière que pour la question (1). Donc $\widetilde{E}''$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_n \times \mathbb{R}^{n+1}$. Comme restriction de projections, l'application $\widetilde{\pi}''$ est C^∞. La fibre au-dessus de (x, x') est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n+1}$

orthogonal à x et à x'. Celui-ci dépend de manière C^∞ de (x, x'), donc $\widetilde{\pi}''$ est bien un fibré vectoriel C^∞ de rang $n-1$.

Schème E.66 Pour tout x dans $\mathbb{S}_n$, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels de $(T_x\mathbb{S}_n) \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, donné par $(v, t) \mapsto v + tx$.

Schème E.68 Il existe au moins deux fibrés en droite sur $\mathbb{S}_1$. Le premier est le fibré trivial $X = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$. Le second est le ruban de Möbius, qu'on peut construire comme suit.

D'une part, le groupe $\mathbb{Z}$ agit librement et proprement sur l'espace $\mathbb{R}^2$, son élément 1 agissant par la transformation $(x, y) \mapsto (x + 6, -y)$, et soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$ la projection canonique. La variété quotient $Y = \mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}^2$, munie de l'application $p_Y : Y \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ induite par passage au quotient par l'application $(x, y) \mapsto x$, et de la structure évidente d'espace vectoriel sur la fibre $p_Y^{-1}(x) = \pi(\{x\} \times \mathbb{R})$, est un fibré vectoriel sur le cercle. En effet, explicitons des trivialisations locales de Y. Pour obtenir Y, on part des deux ouverts $]0, 3[\times\mathbb{R}$ et $]4, 7[\times\mathbb{R}$, et on les recolle en identifiant (x, t) à $(x + 2, t)$ si $x \in]2, 3[$, et (x, t) à $(x + 6, -t)$ si $x \in]0, 1[$. L'espace Y est muni de deux cartes évidentes à valeurs dans $]0, 3[\times\mathbb{R}$ et $]4, 7[\times\mathbb{R}$. Les changements de cartes sont C^∞, donc Y est une variété (non compacte). De plus, Y est un fibré vectoriel au-dessus de $\mathbb{S}_1$ puisque, dans les fibres, les changements de cartes sont des isomorphismes linéaires. De plus, Y n'est pas isomorphe à X puisque toute section continue de Y s'annule en au moins un point.

Soit maintenant $p : Z \to \mathbb{S}_1$ un fibré en droites de base $\mathbb{S}_1$. Montrons qu'il est isomorphe à X ou Y. Pour tout $x \in \mathbb{S}_1$, il existe un intervalle ouvert I_x autour de x et un isomorphisme de fibrés vectoriels ϕ_x entre $p^{-1}(I_x)$ et le fibré trivial $I_x \times \mathbb{R}$. Par compacité, on peut recouvrir $\mathbb{S}_1$ par un nombre fini de ces intervalles $I_1, \ldots, I_n$. Quitte à supprimer les intervalles déjà inclus dans d'autres, à les raccourcir et à les réordonner, on peut supposer que I_k rencontre exactement I_{k-1} et I_{k+1} (pour $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).

Si $n > 2$, on va « recoller » les intervalles I_1 et I_2. Sur l'intervalle $I_1 \cap I_2$, l'application $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ est de la forme $(x, t) \mapsto (x, f(x)t)$, où f est une fonction qui ne s'annule pas. Quitte à remplacer ϕ_2 par $-\phi_2$, on peut supposer que f est partout positive. On notera τ la projection de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit alors χ_1, χ_2 une partition de l'unité subordonnée à I_1, I_2. On définit une application $\phi : p^{-1}(I_1 \cup I_2) \to (I_1 \cup I_2) \times \mathbb{R}$ par

$$\phi(e) = (p(e), \chi_1(p(e))\tau(\phi_1(e)) + \chi_2(p(e))\tau(\phi_2(e))) \ .$$

La positivité de f assure que ϕ est un isomorphisme linéaire dans chaque fibre, c'est donc un isomorphisme de fibrés vectoriels.

On peut ensuite recoller I_3 à $I_1 \cup I_2$, et continuer jusqu'à I_{n-1}. Finalement, on a obtenu deux intervalles I et J de $\mathbb{S}_1$, dont l'intersection est deux petits intervalles K_1 et K_2, et des isomorphismes entre $p^{-1}(I)$ et $I \times \mathbb{R}$, et entre $p^{-1}(J)$ et $J \times \mathbb{R}$. Le changement de cartes le long de K_1 est donné dans les fibres par la multiplication par $f_1(x)$, qui ne s'annule pas, et le changement de cartes le long de K_2 est donné par la multiplication par une fonction f_2. Les fonctions f_1 et f_2 sont de signe constant le long de K_1 et K_2. Si le signe est le même, on construit en utilisant une partition de l'unité un isomorphisme entre Z et X. Si les signes sont opposés, on obtient un isomorphisme entre Z et Y. Dans les deux cas, pour construire explicitement cet isomorphisme, on utilise des partitions de l'unité comme ci-dessus.

Schème E.69 Tours les variétéss et applications sont lisses dans ce qui suit. Soit $p : E \to M$ un fibré vectoriel sur M. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x de x et un

isomorphisme ϕ_x de fibrés vectoriels entre $p^{-1}(U_x) \to U_x$ et $(U_x \times \mathbb{R}^k) \to U_x$. Soit τ la projection de $M \times \mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$. Par compacité, nous pouvons recouvrir M par un nombre fini d'ouverts $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Soit $(\chi_1, \ldots, \chi_1)$ une partition de l'unité associée à ces ouverts. Définissons une application Φ de E dans $M \times \mathbb{R}^{nk}$ par

$$\Phi(e) = (p(e), \chi_1(p(e))\tau(\phi_{x_1}(e)), \ldots, \chi_n(p(e))\tau(\phi_{x_n}(e))).$$

Cette fonction est bien définie puisque χ_i s'annule hors de U_i. C'est un morphisme de fibrés vectoriels, et il est injectif puisque, en chaque point, l'un des χ_i est non nul. C'est donc un plongement.

Schème E.70

(1) Soit $(x, X) \in E_n$. Si x est non nul, on définit un paramétrage de E_n au voisinage de (x, X) de la façon suivante : soit U un voisinage ouvert de x ne contenant pas 0, on définit φ sur U par $\varphi(y) = (y, [y])$ où $[y]$ désigne la classe de y dans $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. L'application ϕ est un paramétrage local de E_n au voisinage de (x, X), donc E_n est bien une sous-variété autour de (x, X).

Supposons maintenant que $x = 0$. Soit Y un supplémentaire de la droite X dans $\mathbb{R}^n$, ce qui permet d'identifier $\mathbb{R}^n$ à $X \oplus Y$. On définit une application ψ de $X \times \mathcal{L}(X, Y)$ dans E_n par $\psi(x, A) = ((x, Ax), \text{graphe}(A))$. L'application ψ paramètre un voisinage de $(0, X)$ dans E_n, il reste à vérifier que c'est une immersion C^∞ pour conclure. Lue dans la carte standard de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R}) = \mathcal{G}_1(\mathbb{R}^n)$ associée à la décomposition $\mathbb{R}^n = X \oplus Y$, l'application ψ s'écrit $(x, A) \mapsto ((x, Ax), A)$ et est donc bien immersive.

Pour montrer que E_2 est C^∞-difféomorphe à une bande de Möbius, on définit une application $\Phi : \mathbb{S}_1 \times \mathbb{R} \to E_2$ par $\Phi(e^{i\theta}, t) = (te^{i\theta}, [e^{i\theta}])$. C'est une immersion C^∞, et chaque point de E_2 a exactement deux préimages $(t, e^{i\theta})$ et $(-t, e^{i(\theta+\pi)})$. Ainsi, Φ induit, par passage au quotient par l'action libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$ définie par $(t, e^{i\theta}) \mapsto (-t, e^{i(\theta+\pi)})$, un difféomorphisme de la variété quotient $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\backslash(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R})$ sur E_2, c'est-à-dire entre le ruban de Möbius et E_2.

(2) Chaque fibre de E_n au-dessus d'un élément X de $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ est canoniquement identifiée avec X, et est donc munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension 1. Pour montrer que E_n est un fibré vectoriel en droites, il reste à montrer que ce fibré est localement trivial.

Soit $X \in \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. Soit Y un supplémentaire de la droite X dans $\mathbb{R}^n$. L'application ψ construite à la fin de la question précédente donne alors la trivialisation recherchée du fibré E_n au-dessus d'un voisinage de X.

(3) L'application de $E_n - \pi^{-1}(0)$ dans $\mathbb{R}^n - \{0\}$ donnée par $(x, X) \mapsto x$ est un difféomorphisme, d'inverse $x \mapsto (x, [x])$.

La première projection est un difféomorphisme entre $\pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, d'inverse $X \mapsto (0, X)$.

(4) Comme la projection π est une bijection entre $E_n - \pi^{-1}(0)$ et $\mathbb{R}^n - \{0\}$, il y a une unique manière de relever $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ en $\tilde{\gamma}(t) \in E_n$ tel que $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$. Comme la dérivée de γ ne s'annule pas, l'ensemble $\gamma^{-1}(0)$ est discret, et donc d'intérieur vide. Il existe donc au plus une manière de prolonger $\tilde{\gamma}$ en une application continue.

Pour t dans $\gamma^{-1}(0)$, posons $\tilde{\gamma}(t) = (0, [\gamma'(t)])$. Ainsi, on a bien $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. L'hypothèse $\mathbb{R}\gamma'(s) \neq \mathbb{R}\gamma'(t)$, si $s \neq t$ et s, t dans $\gamma^{-1}(0)$, assure que la courbe $\tilde{\gamma}$ est simple. Il reste à vérifier qu'elle est continue. C'est trivial hors de $\gamma^{-1}(0)$. Soit donc t_0 tel que $\gamma(t_0) = 0$. Soit $pr_2 : E_n \to \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ la deuxième projection, il suffit de vérifier que $pr_2 \circ \tilde{\gamma}$ est continue en t_0

pour conclure. Pour t proche de t_0, il existe $\xi_t \in [t_0, t]$ tel que $\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(\xi_t) = (t - t_0)\gamma'(\xi_t)$. Par conséquent, $pr_1 \circ \tilde{\gamma}(t) = [\gamma'(\xi_t)]$. Comme γ' est continue en t_0, cela conclut.

Schème E.71 Quitte à faire un changement de coordonnées isométrique, on peut supposer que $x = 0$ et que $T_xM = \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Au voisinage de 0, il existe un paramétrage local de M par graphe, de la forme $M = \{(x, \phi(x))\}$ où la fonction ϕ est C^1, et vérifie $d\phi_0 = 0$.

Soit $\Phi : x \mapsto (x, \phi(x))$ définie sur un voisiange de 0 dans T_xM. On a $\Psi \circ \Phi(x) = x$ par construction, donc $T_0\Psi \circ T_0\Phi = \mathrm{id}$. Il reste donc à identifier $T_0\Phi : T_0\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^p \to T_xM = \mathbb{R}^p \times \{0\}$. Mais cette application est égale à $x \mapsto (x, 0)$, par définition. Finalement, $T_x\Psi$ est l'identité de T_xM (modulo l'identification entre T_xM et $T_0(T_xM)$).

Schème E.72 Comme le résultat est local, quitte à prendre des cartes locales, on peut se restreindre au voisinage de $x_0 \in P$ avec $\phi(x_0) \in N$, et supposer que $N = \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m = M$ et $P = \mathbb{R}^p$. Soit $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-n}$ la projection sur les $m - n$ dernières coordonnées. Alors $\phi^{-1}(N) = (\pi \circ \phi)^{-1}(0)$.

La condition $d\phi_{x_0}(\mathbb{R}^p) + \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m$ assure que la différentielle de $\pi \circ \phi$ est surjective en x_0. Le corollaire 2.22 montre donc que $(\pi \circ \phi)^{-1}(0)$ est une sous-variété au voisinage de x_0, ce qui conclut la preuve.

La codimension de $\phi^{-1}(N)$ dans P est égale à la codimension de N dans M.

Schème E.73 Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application C^∞ et ψ un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Alors $d(g \circ \psi)_x = dg_{\psi(x)} \circ d\psi_x$, puis

$$d^2(g \circ \psi)_x(u, v) = d^2 g_{\psi(x)}(d\psi_x(u), d\psi_x(v)) + dg_{\psi(x)}(d^2\psi_x(u, v)) \ .$$

Il y a donc une différence $dg_{\psi(x)} \circ d^2\psi_x$ entre la différentielle seconde de g lue dans la carte Id et dans la carte ψ. Ce terme n'est pas nul en général, mais il le devient si $dg_{\psi(x)} = 0$.

4 Champs de vecteurs et feuilletages

On introduit un nouveau symbole $\omega_{\mathbb{C}}$ pour l'exposant de la classe de régularité analytique complexe des applications et des variétés. On notera parfois $\omega = \omega_{\mathbb{R}}$. On munit $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ de l'ordre étendant l'ordre de $\mathbb{N}$ tel que $n \leq \infty \leq \omega_{\mathbb{R}} \leq \omega_{\mathbb{C}}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Par convention, $x + 1 = x$ si $x = \infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$.

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ et soit M une variété différentielle de classe C^{k+1} (par exemple obtenue par appauvrissement de structure à partir d'une variété de classe C^{r+1} avec $r \geq k$).

4.1 Champs de vecteurs

Un *champ de vecteurs* (respectivement champ de vecteurs de classe C^k) sur M est une section (respectivement section de classe C^k) du fibré tangent de M. Intuitivement, c'est donc une application X qui à tout point x de M associe un vecteur $X(x)$ dans l'espace tangent T_xM, qui « dépend de manière C^k de x ». On note $\Gamma_k(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs C^k (ou par abus $\Gamma(TM)$ quand la différentiabilité est sous-entendue, par exemple quand $k = \infty$). En particulier, si M est une variété analytique complexe, on note $\Gamma_{\omega_{\mathbb{C}}}(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs holomorphes sur M, i.e. des sections analytiques complexes du fibré tangent de M.

Exemples. (1) Si $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$ et si U est un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$, comme TU s'identifie avec $U \times \mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs C^k sur U, qui est une application $x \mapsto (x, X(x))$ de classe C^k, s'identifie donc à l'application $x \mapsto X(x)$ de classe C^k de U dans $\mathbb{R}^n$. De même, si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, un champ de vecteurs holomorphes sur U est une application $x \to X(x)$ analytique complexe de U dans $\mathbb{C}^n$.

(2) **(Champ de vecteurs sur une sous-variété de $\mathbb{R}^n$)** Si M est une sous-variété de classe C^{k+1} de $\mathbb{R}^n$ avec $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$, alors le fibré tangent à M s'identifie au fibré vectoriel $\mathrm{pr}_1 : F \to M$ où F est la sous-variété C^r de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ formée des couples (x, v) où x est un point de M et v un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tangent à M en x (voir la proposition 3.3). Un champ de vecteurs sur M, qui est une application $x \mapsto (x, X(x))$ de M dans F, s'identifie donc à l'application $x \mapsto X(x)$ de M dans $\mathbb{R}^n$ telle que $X(x)$ appartienne au sous-espace vectoriel T_xM de $\mathbb{R}^n$. Par la caractérisation des applications C^k à valeurs dans une sous-variété (voir la proposition 2.16), il est de classe C^k si et seulement si l'application $x \mapsto X(x)$ de M dans $\mathbb{R}^n$ est de classe C^k (ou, de manière équivalente, si toutes ses coordonnées le sont). Donc

$$\Gamma_k(TM) = \{X : M \to \mathbb{R}^n \ \mathrm{C}^k \ : \ \forall\, x \in M,\ X(x) \in T_xM\}\ .$$

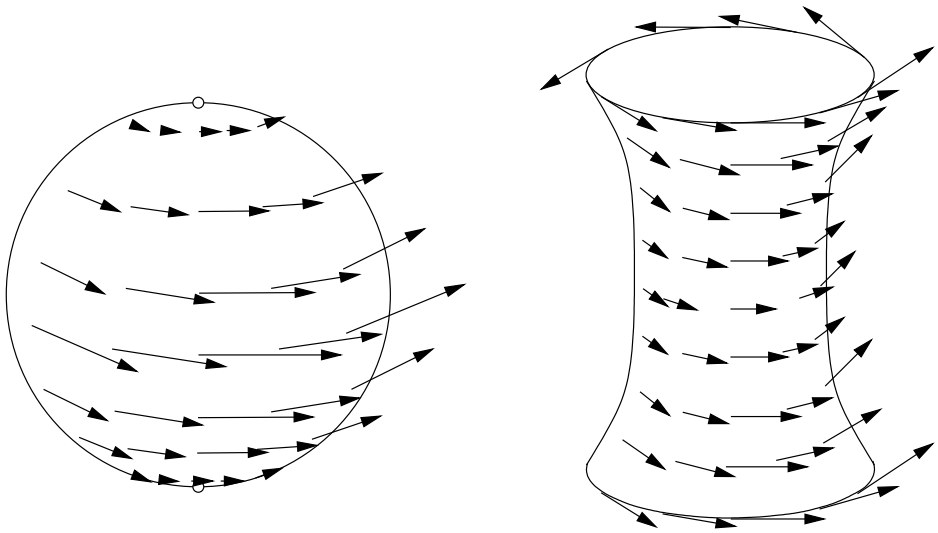
De même, si M est une sous-variété analytique complexe de $\mathbb{C}^n$, alors $\Gamma_{\omega_{\mathbb{C}}}(TM)$ est l'ensemble des applications $x \mapsto X(x)$ analytiques complexes de M dans $\mathbb{C}^n$ telles que $X(x) \in T_xM$ pour tout x dans M.

(3) En identifiant $T\mathbb{S}_{2n-1}$ au fibré vectoriel

$$\{(z, v) \in \mathbb{S}_{2n-1} \times \mathbb{C}^n \ : \ v \in z^{\perp}\}$$

muni de la projection évidente sur $\mathbb{S}_{2n-1}$, où $z^{\perp}$ désigne l'orthogonal de z pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^n$, alors l'application $z \mapsto (z, iz)$ est un champ de vecteurs analytique réel sur $\mathbb{S}_{2n-1}$. Ce champ de vecteurs ne s'annule en aucun point. Au contraire, sur une

sphère de dimension paire non nulle, il n'existe pas de champ de vecteurs continu qui ne s'annule en aucun point (voir l'exercice E.81).



(4) Plus généralement, si M admet une action de classe C^{k+1} du cercle $\mathbb{S}_1$ (par exemple si M est une surface de révolution), alors l'application

$$X : x \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{it} \cdot x$$

est un champ de vecteurs C^k sur M. Le cas précédent correspond au cas de l'action du cercle $\mathbb{S}_1$ sur $\mathbb{S}_{2n-1}$ définie par $e^{it} \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (e^{it} z_1, \ldots, e^{it} z_n)$. L'action du cercle $\mathbb{S}_1$ sur

$$\mathbb{S}_{2n} = \{(x_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \ : \ x_0^2 + |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$$

définie par $e^{it} \cdot (x_0, z_1, \ldots, z_n) = (x_0, e^{it} z_1, \ldots, e^{it} z_n)$ fournit un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}_{2n}$ n'ayant que deux zéros, aux pôles Nord et Sud de $\mathbb{S}_{2n}$. Voir aussi l'exercice E.80.

4.2 Opérations sur les champs de vecteurs

4.2.1 Addition.

La structure d'espace vectoriel réel de l'espace tangent en tout point permet de munir $\Gamma_k(TM)$ de la structure d'espace vectoriel réel pour l'addition point par point $(X+Y)(x) = X(x)+Y(x)$ et la multiplication externe point par point $(\lambda X)(x) = \lambda X(x)$. En particulier, on note 0 le champ de vecteurs nul sur M. Si M est une variété analytique complexe, alors $\Gamma_k(TM)$ est aussi muni d'une structure d'espace vectoriel complexe.

4.2.2 Multiplication par une fonction.

L'ensemble $\Gamma_k(TM)$ est aussi muni d'une structure de module sur l'anneau $\mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$ si $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$ et sur $\mathrm{C}^{\omega_{\mathbb{C}}}(M, \mathbb{C})$ si $k = \omega_{\mathbb{C}}$, pour l'addition point par point précédente et la multiplication point par point par une fonction $(fX)(x) = f(x)X(x)$.

Par exemple, si $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$ et $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors les champs de vecteurs constants $X_{e_1}, \cdots, X_{e_n}$ avec $X_{e_i} : x \mapsto$

e_i forment une base du $\mathrm{C}^k(U,\mathbb{R})$-module $\Gamma_k(TU)$. (Cette notation est provisoire, nous noterons très vite $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le champ de vecteurs X_{e_i} quand nous montrerons la correspondance entre champs de vecteurs et dérivations.) Tout champ de vecteurs sur U s'écrit alors, de manière unique,

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i X_{e_i} \ ,$$

où $f_i \in \mathrm{C}^k(U,\mathbb{R})$. De plus, soit χ_j l'application j-ème coordonnée, définie sur U par $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_j$, qui est linéaire, donc de classe C^ω. Alors, en appliquant l'application linéaire $T_x\chi_j = \chi_j$ aux deux membres de l'équation précédente évaluée en x, on obtient

$$f_j(x) = T_x\chi_j(X(x)) \ ,$$

car $\chi_j(e_i)$ vaut 1 si $j = i$, et 0 sinon.

Exercice E.78 Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et si M est une variété de classe C^{k+1} et de dimension n, montrer que M est trivialisable si et seulement si $\Gamma_k(TM)$ est un $\mathrm{C}^k(M,\mathbb{R})$-module libre de rang n.

4.2.3 Restriction.

Rappelons que si U est un ouvert de M, avec $i : U \to M$ l'inclusion, alors on identifie TU avec son image dans TM par Ti. Les champs de vecteurs se restreignent aux ouverts : si U est un ouvert de M, et X un champ de vecteurs sur M, alors la restriction $X_{|U}$ de l'application $X : M \to TM$ à U est un champ de vecteurs sur U, qui est de classe C^k si X l'est (et que l'on note quelquefois encore X par abus). De plus, les champs de vecteurs vérifient la propriété de localité des faisceaux : si U est un ouvert, réunion d'ouverts U_i, si X_i est un champ de vecteurs C^k sur U_i, tels que $X_i = X_j$ sur $U_i \cap U_j$, alors l'unique application $X : U \to TU$ telle que $X_{|U_i} = X_i$ est un champ de vecteurs C^k sur U.

4.2.4 Image réciproque.

Les champs de vecteurs se tirent en arrière par les morphismes étales, par la formule suivante. Soient N une variété C^{k+1} et $f : M \to N$ un C^{k+1}-difféomorphisme local. Pour tout champ de vecteurs Y sur N, on définit un champ de vecteurs f^*Y sur M, de classe C^k si Y l'est, appelé *image réciproque de Y par f*, par

$$f^*Y : x \mapsto (T_xf)^{-1}\big(Y(f(x))\big)$$

en utilisant le fait que $T_xf : T_xM \to T_{f(x)}N$ est un isomorphisme linéaire.

Par exemple, si $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$, si U, V sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, si $f : U \to V$ est un C^{k+1}-difféomorphisme local, et si $Y : V \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs C^k sur V, alors f^*Y est le champs de vecteurs $x \mapsto (df_x)^{-1}\big(Y(f(x))\big)$ sur U.

Cette opération d'image réciproque sur les vecteurs vérifie les propriétés suivantes.

1. L'application de $\Gamma_k(TN)$ dans $\Gamma_k(TM)$ définie par $Y \mapsto f^*Y$ est $\mathbb{R}$-linéaire (et $\mathbb{C}$-linéaire si M est une variété analytique complexe), et pour toute fonction g de classe C^k sur N, on a
$$f^*(gY) = (g \circ f)f^*Y \ .$$

Autrement dit, l'application $f^* : g \mapsto g \circ f$ de $\mathrm{C}^k(N, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$ est un morphisme d'anneaux, et l'application $Y \mapsto f^*Y$ est un morphisme du $\mathrm{C}^k(N, \mathbb{R})$-module $\Gamma_k(TN)$ dans le $\mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$-module $\Gamma_k(TM)$ au-dessus de ce morphisme d'anneaux (en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ si $k = \omega_{\mathbb{C}}$).

2. Les images réciproques se comportent de manière contravariante pour la composition. Plus précisément, si $g : N \to P$ est un C^{k+1}-difféomorphisme local, et si Z est un champ de vecteurs C^k sur P, alors

$$(g \circ f)^* Z = f^*(g^* Z) \ .$$

Il est immédiat que $\mathrm{id}^* X = X$ pour tout X dans $\Gamma_k(TM)$.

3. Si U est un ouvert de M et $i : U \to M$ est l'inclusion, alors

$$\forall\, X \in \Gamma_k(TM), \quad i^* X = X_{|U} \ .$$

Il découle donc de la propriété précédente que les images réciproques et les restrictions de champs de vecteurs sont compatibles. Plus précisément, si U est un ouvert de N, et si Y est un champ de vecteurs sur N, alors on a clairement

$$(f_{|f^{-1}(U)})^*(Y_{|U}) = (f^* Y)_{|f^{-1}(U)} \ .$$

4. Lorsque f est un difféomorphisme global, alors on peut aussi pousser en avant les champs de vecteurs. Mais c'est vraiment l'opération de tirer en arrière qui est conceptuellement la plus importante. Soient N une variété C^{k+1}, $f : M \to N$ un C^{k+1}-difféomorphisme, et X un champ de vecteurs C^k sur M. On note $f_* X = (f^{-1})^* X$, qui est le champ de vecteurs C^k sur N, défini par

$$f_* X : y \mapsto T_{f^{-1}(y)} f \left(X(f^{-1}(y)) \right) \ .$$

Bien sûr, $f^*(f_* X) = f_*(f^* X) = X$. Autrement dit, si $f : M \to N$ est un C^{k+1}-difféomorphisme, alors $f^* : \Gamma_k(TN) \to \Gamma_k(TM)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, d'inverse f_*.

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to V$ un C^{k+1}-difféomorphisme, et $X : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs C^k sur U, de composantes X_i. Alors $Y = f_* X : V \to \mathbb{R}^n$ est le champs de vecteurs $y \mapsto df_{f^{-1}(y)}\big(X(f^{-1}(y))\big)$ sur V. Par calcul matriciel, Y a donc pour i-ème composante

$$Y_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \cdot X_k \right) \circ f^{-1} \ .$$

4.2.5 Expression d'un champ de vecteurs dans une carte.

Soit (U, φ) une carte locale de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$, et X un champ de vecteurs sur M. Alors $\varphi_*(X_{|U})$ est un champ de vecteurs sur l'ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$, donc s'écrit, de manière unique, $\sum_{i=1}^n f'_i X_{e_i}$ où $f'_i \in \mathrm{C}^k(\varphi(U), \mathbb{R})$. Si $f_i = f'_i \circ \varphi$, alors

$$X_{|U} = \sum_{i=1}^{n} f_i \ \varphi^* X_{e_i} \ .$$

Cette écriture s'appelle l'*expression* de X dans la carte locale (U, φ). Notons qu'il est immédiat que le champ de vecteurs X est C^k sur U si et seulement si les applications f_j le sont : la suite $(\varphi^* X_{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ est une base du $\mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$-module libre $\Gamma_k(TU)$.

De même, si M est une variété analytique complexe, si (U, φ) est une carte locale analytique complexe de M à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$, alors $(\varphi^* X_{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ est une base du module libre des champs de vecteurs holomorphes sur U, sur l'anneau des fonctions analytiques complexes de U dans $\mathbb{R}$.

Soit (V, ψ) une autre carte locale, avec $X_{|V} = \sum_{j=1}^n g_j \ \psi^* X_{e_j}$ l'expression de X dans cette carte locale.

Proposition 4.1 *Soit*

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto \varphi \circ \psi^{-1}(y) = (x_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_n))$$

l'application de changement de cartes de $\psi(U \cap V)$ dans $\varphi(U \cap V)$. Alors sur $U \cap V$, on a

$$f_i = \sum_{j=1}^n g_j \ \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \ .$$

Preuve. Sur $U \cap V$,

$$\begin{aligned}
\psi^* X_{e_j} &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)^* X_{e_j} = \varphi^*(\psi \circ \varphi^{-1})^* X_{e_j} = \varphi^*(\varphi \circ \psi^{-1})_* X_{e_j} \\
&= \varphi^*\big((d(\varphi \circ \psi^{-1})) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})^{-1} \ (X_{e_j})\big) = \varphi^*(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \circ \varphi^{-1} \ X_{e_i}) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \ \ \varphi^* X_{e_i} \ .
\end{aligned}$$

Cette formule de changement de bases donne, de manière usuelle, l'expression des coordonnées de $X_{|U \cap V}$ dans la base $(\varphi^* X_{e_i})_{1 \leq i \leq n}$ en fonction de celles dans la base $(\psi^* X_{e_j})_{1 \leq j \leq n}$: puisque sur $U \cap V$

$$X = \sum_{j=1}^n g_j \ \psi^* X_{e_j} = \sum_{j=1}^n g_j \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \ \ \varphi^* X_{e_i} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n g_j \ \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \right) \varphi^* X_{e_i} \ ,$$

on a donc, sur $U \cap V$, la formule $f_i = \sum_{j=1}^n \ g_j \ \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi$ cherchée. Voir l'exercice E.84 pour une autre manière de montrer cette formule de changement de coordonnées. □

4.3 Flot local d'un champ de vecteurs

Soit X un champ de vecteurs C^k sur M, avec $k \geq 1$.

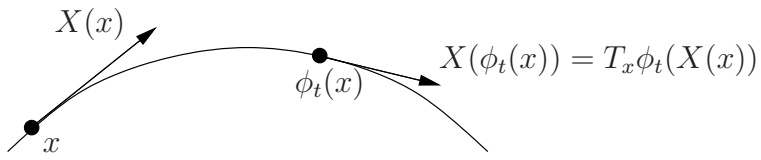
Théorème 4.2 *Pour tout x_0 dans M, il existe un triplet (U, I, ϕ) formé d'un voisinage ouvert U de x_0, d'un intervalle ouvert I contenant 0, et d'une application $\phi : I \times U \to M$ de classe C^k, notée $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$, vérifiant, pour tous s dans I et x dans U,*

- $\frac{d\phi_t(x)}{dt}_{|t=s} = X(\phi_s(x))$,
- $\phi_0(x) = x$,

Si (U', I', ϕ') est un autre tel triplet, alors ϕ et ϕ' coïncident sur $(I \times U) \cap (I' \times U')$. De plus, pour tous t, s dans I et x dans U,

- *si $\phi_s(x) \in U$ et $t + s \in I$, alors $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x)$,*
- *ϕ_t est un C^k-difféomorphisme local,*
- *ce C^k-difféomorphisme local préserve le champ de vecteurs X, au sens que pour tout t dans I et x dans U,*

$$T_x\phi_t(X(x)) = X(\phi_t(x)) \ .$$



Preuve. Cet énoncé est un énoncé local. En prenant des cartes locales, on se ramène donc au cas où M est un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$, pour lequel le résultat est bien connu (voir cours de calcul différentiel [Ave, Die1, CarH]). □

L'application (ou par abus son image) $t \mapsto \phi_t(x)$ de I dans M est appelée la *courbe intégrale* (locale) de X passant par x définie sur I. L'application $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ de $I \times U$ dans M (ou la famille $(\phi_t)_{t\in I}$) est appelée le *flot local* de X en x_0 défini sur $I \times U$. Plus exactement, c'est le germe en $(0, x_0)$ de cette application qui mérite le nom de flot local, au sens suivant.

Si X est un espace topologique, x un point de X et Y un ensemble, un *germe* en x d'applications de X dans Y est une classe d'équivalence d'applications, définies sur des voisinages ouverts de x dans X, à valeurs dans Y, pour la relation d'équivalence « coïncider sur un voisinage ouvert de x ». On note souvent par abus de la même manière un germe et un de ses représentants.

Proposition 4.3 *(1) Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U_x de x tel que le flot local de X soit défini sur $]-2\epsilon, 2\epsilon[\times U_x$. Alors le champ de vecteurs X est* complet *i.e. le flot local de X est défini sur $\mathbb{R} \times M$, et $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre C^k de C^k-difféomorphismes de M préservant X, i.e. :*

- *ϕ_0 est l'identité de M et pour tous t, s dans $\mathbb{R}$, on a $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$,*
- *l'application $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$ de $\mathbb{R} \times M$ dans M est C^k, et donc $\phi_t : M \to M$ est un C^k-difféomorphisme,*
- *pour tout t dans $\mathbb{R}$, le C^k-difféomorphisme ϕ_t préserve le champ de vecteurs X, i.e. $(\phi_t)^*X = X$.*

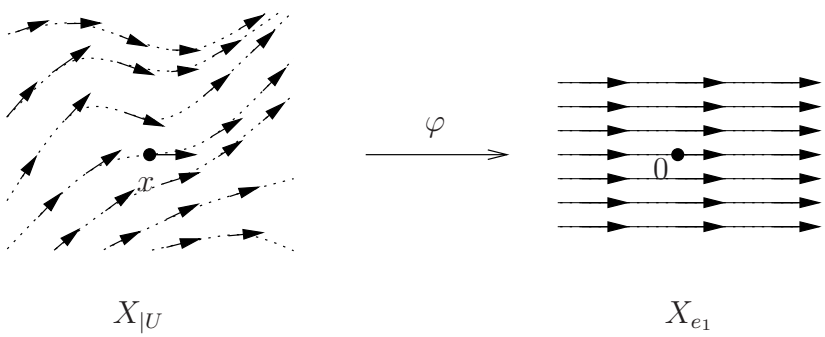
(2) Si M est compacte, alors tout champ de vecteurs X sur M est complet.

Preuve. (1) Posons $\psi_t = \phi_\epsilon^{\circ k} \circ \phi_{t-k\epsilon}$ où k est la partie entière de t/ϵ et $\phi_\epsilon^{\circ k}$ est la composée k-ème de ϕ_ϵ. Comme le flot local de X préserve X, il est immédiat que $\frac{d\psi_t(x)}{dt}_{|t=s} = X(\psi_s(x))$, et $\psi_0(x) = x$ pour tout s dans $\mathbb{R}$ et x dans M. Par unicité, ψ est le flot local de X défini sur $\mathbb{R} \times M$. Il est immédiat que $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre C^k de C^k-difféomorphismes de M préservant X.

(2) Pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U_x de x et $\epsilon_x > 0$ tel que le flot local de X soit défini sur $]-2\epsilon_x, 2\epsilon_x[\times U_x$. Par compacité, il existe $x_1, \ldots, x_k$ dans M tels que $M = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_k}$. Soit $\epsilon = \min_{1\le i\le k} \epsilon_{x_i}$. Alors l'hypothèse de (1) est vérifiée. □

Exercice E.79 *Soient X un champ de vecteurs C^k sur une variété N de classe C^k, de flot local (ϕ_t) en un point y de N, et $f : M \to N$ un C^{k+1}-difféomorphisme local. Montrer que, pour tout point x de M tel que $f(x) = y$, si g est l'inverse du C^{k+1}-difféomorphisme qui est la restriction de f d'un voisinage ouvert de x dans un voisinage ouvert de y, alors le flot local de f^*X en x est $g \circ \phi_t \circ f$.*

Nous terminons ce paragraphe en donnant un théorème de forme normale locale pour un champ de vecteurs ne s'annulant pas en un point. Dans $\mathbb{R}^n$, le champ de vecteurs constant $X_{e_1} : x \mapsto e_1$, où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est un exemple de tel champ. Le théorème suivant dit que, localement et à difféomorphisme près, c'est le seul.



Théorème 4.4 (Théorème de redressement des champs de vecteurs)
Soit X un champ de vecteurs C^k sur une variété M de classe C^{r+1}, avec $1 \leq k \leq r \leq \omega$. Pour tout point x_0 de M tel que $X(x_0) \neq 0$, il existe une carte locale (U, φ) de classe C^k en x_0, telle que

$$\varphi_*(X_{|U}) = (X_{e_1})_{|\varphi(U)} \ .$$

Preuve. Comme le problème est local, et par les propriétés des champs de vecteurs vis à vis des restrictions et des images réciproques, nous pouvons supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, que $x_0 = 0$ et que $X(x_0) = e_1$. Notons (ϕ_t) le flot local de X en 0. Considérons l'application

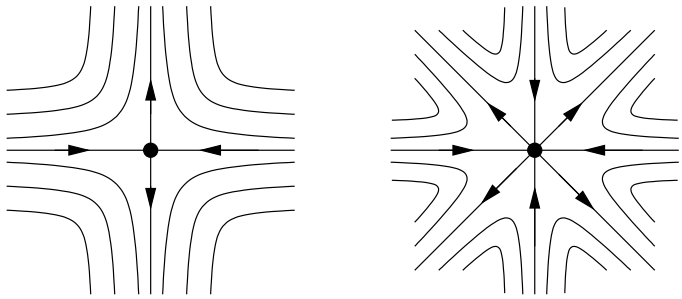
$$\theta : (t, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \phi_t(0, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

qui est de classe C^k et définie sur un voisinage de 0. Comme $\phi_0 = \mathrm{id}$ et $\frac{d\phi_t(0)}{dt}_{|t=0} = X(0) = e_1$, la différentielle de θ en 0 est l'identité. Donc par le théorème d'inversion locale, θ est un C^k-difféomorphisme local en 0. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ suffisamment proche de 0, on a

$$d\theta_x(e_1) = \frac{d}{dt}_{|t=x_1} \theta(t, x_2, \ldots, x_n) = X(\phi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)) = X(\theta(x)) \ .$$

Donc $\theta_*(X_{e_1}) = X$ sur un voisinage de 0, ce qui montre le résultat. □

Ce résultat est un résultat de forme normale locale des champs de vecteurs au voisinage d'un point *non singulier* (i.e. où le champ de vecteurs ne s'annule pas). L'unicité est remarquable : il découle du théorème précédent que deux champs de vecteurs non nuls en un point sont l'image l'un de l'autre par un difféomorphisme local au voisinage de ce point. Ce résultat n'est plus vrai au voisinage de points singuliers, par exemple, les champs de vecteurs singuliers suivants ne sont pas localement difféomorphes (on peut les distinguer par leur indice, voir par exemple [Hir]) et le paragraphe 6.6.2.



4.4 Dérivations

Dans ce paragraphe, nous supposons que $k \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$.

Une *dérivation* (il faudrait dire k-dérivation) de M est une application linéaire $\delta : \mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$ telle que, pour tous f, g dans $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$,

$$\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f) \ .$$

L'ensemble $\mathcal{D}_k(M)$ (aussi noté par abus $\mathcal{D}(M)$ lorsque k est sous-entendu, par exemple pour $k = \infty$) des dérivations de M est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R}), \mathrm{C}^k(M, \mathbb{R}))$. C'est aussi un $\mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$-module, pour la multiplication externe par $f \in \mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$ de $\delta \in \mathcal{D}_k(M)$ définie par

$$(f\delta)(g) : x \mapsto f(x)\delta(g)(x) \ .$$

Notons que toute dérivation est nulle sur les fonctions constantes, par linéarité et le fait que $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$.

Par exemple, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors l'application $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathrm{C}^{k+1}(U, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$ définie par $\frac{\partial}{\partial x_i} f : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ est une dérivation sur U. Plus généralement, si (U, φ) est une carte locale C^{k+1} de M, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, alors l'application $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathrm{C}^{k+1}(U, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}^k(U, \mathbb{R})$ définie par

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f : x \mapsto \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \qquad (\sharp)$$

est une dérivation sur U. Cette notation est abusive, car elle ne fait pas apparaître clairement la dépendance en la carte locale. Elle est par contre bien pratique pour les calculs.

Bien que cela ne soit pas immédiat à première vue, les dérivations sont des objets de nature locale (voir le point (1) de la proposition ci-dessous). Elles auront en fait les mêmes propriétés que les champs de vecteurs par le théorème 4.6, mais nous aurons besoin de connaître les propriétés suivantes auparavant.

Les dérivations se tirent en arrière par les morphismes étales, de la manière suivante. Soient $\varphi : M \to N$ un C^{k+1}-difféomorphisme local, où N est une variété C^{r+1}, et δ une dérivation sur N. Pour tout x dans M, soient V_x et U_x des voisinages ouverts de x et $\varphi(x)$ respectivement tels que $\varphi : V_x \to U_x$ soit un C^{k+1}-difféomorphisme, et soit χ_x une fonction C^{k+1} à support contenu dans U_x, et valant 1 sur un voisinage de $\varphi(x)$, qui existe

(par partition de l'unité) parce que $k \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$. Pour tout f dans $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$, notons $\varphi^*\delta$ l'application de $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$ définie par

$$(\varphi^*\delta)(f)(x) = \delta(\chi_x\, f \circ \varphi^{-1})\,\big(\varphi(x)\big)\ ,$$

en prolongeant par 0 sur $N - U_x$ l'application $\chi_x\, f \circ \varphi^{-1}$.

Proposition 4.5 *Soit δ une dérivation de M et U un ouvert de M.*

(1) Soient f et g deux éléments de $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$ qui coïncident sur U. Alors δf et δg coïncident sur U.

(2) Pour tout C^{k+1}-difféomorphisme local $\varphi : M \to N$, où N est une variété C^{r+1}, la formule définissant $\varphi^*\delta$ ne dépend pas du choix de χ_x. L'application $\delta \mapsto \varphi^*\delta$ est un morphisme d'espaces vectoriels réels de $\mathcal{D}_k(N)$ dans $\mathcal{D}_k(M)$, tel que

$$\varphi^*(f\delta) = (f \circ \varphi)\varphi^*\delta\ .$$

De plus,

$$\mathrm{id}^*\delta = \delta \quad \text{et} \quad (\psi \circ \varphi)^*\delta = \varphi^*(\psi^*\delta)\ .$$

(3) Si $i : U \to M$ est l'inclusion, notons $\delta_{|U} = i^*\delta$. Alors $\delta_{|U}$ est l'unique dérivation de U telle que, pour tout f dans $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$,

$$\delta_{|U}(f_{|U}) = (\delta f)_{|U}\ .$$

De plus, si V est un ouvert contenu dans U, alors

$$(\delta_{|U})_{|V} = \delta_{|V}\ .$$

(4) Si M est réunion d'ouverts U_α, si δ' est une dérivation de M telle que $\delta_{|U_\alpha} = \delta'_{|U_\alpha}$ pour tout α, alors $\delta = \delta'$.

Preuve. (1) Pour tout x dans U, soit φ_x une fonction C^{k+1} sur M, à support compact contenu dans U, valant 1 sur un voisinage ouvert V_x de x, qui existe parce que $k \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$.

Par linéarité, il suffit de montrer que si un élément f de $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$ s'annule sur U, alors il en est de même pour δf. Or, pour tout f dans $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$ qui s'annule sur U, pour tout x dans U, on a $f = (1 - \varphi_x)f$, donc

$$\delta f(x) = (1 - \varphi_x(x))\delta f(x) + f(x)\delta(1 - \varphi_x)(x) = 0\ .$$

(2) La première affirmation de (2) découle de (1). L'application $\varphi^*\delta : \mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$ est clairement linéaire, et, pour tous f, g dans $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$, puisque χ_x^2 a même support que χ_x et vaut 1 sur un voisinage de $\varphi(x)$,

$$\begin{aligned}
&(\varphi^*\delta)(fg)(x)\\
&= \delta(\chi_x^2\,(fg) \circ \varphi^{-1})\,\big(\varphi(x)\big)\\
&= \delta\big((\chi_x\, f \circ \varphi^{-1})(\chi_x\, g \circ \varphi^{-1})\big)\,\big(\varphi(x)\big)\\
&= (\chi_x\, f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\delta(\chi_x\, g \circ \varphi^{-1})\,\big(\varphi(x)\big) + (\chi_x\, g \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\delta(\chi_x\, f \circ \varphi^{-1})\,\big(\varphi(x)\big)\\
&= f(x)\,(\varphi^*\delta)(g)(x) + g(x)\,(\varphi^*\delta)(f)(x)\ .
\end{aligned}$$

La linéarité de $\delta \mapsto \varphi^*\delta$ est immédiate. Nous avons

$$\varphi^*(f\delta)(g)(x) = (f\delta)(\chi_x\, g \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(x)\big) = f \circ \varphi(x)\ \varphi^*(\delta)(g)(x)\ .$$

Pour tout C^{k+1}-difféomorphisme local $\psi : N \to P$, où P est une variété C^{r+1}, pour tout f dans $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$ et pour tout x dans M,

$$\begin{aligned}
\varphi^*(\psi^*\delta)(f)(x) &= \psi^*\delta(\chi_x\, f \circ \varphi^{-1})\ \big(\varphi(x)\big) \\
&= \delta(\chi_{\varphi(x)}\ \big(\chi_x\, f \circ \varphi^{-1}\big) \circ \psi^{-1})\ \big(\psi(\varphi(x))\big) \\
&= \delta\big((\chi_{\varphi(x)}\ \chi_x \circ \psi^{-1})\, f \circ (\psi \circ \varphi)^{-1}\big)\ \big(\psi \circ \varphi(x)\big) \\
&= (\psi \circ \varphi)^*\delta\ (f)(x)\ ,
\end{aligned}$$

car $\chi_{\varphi(x)}\ \chi_x \circ \psi^{-1}$ vaut 1 au voisinage de $\psi \circ \varphi(x)$.

(3) Soit δ' une autre dérivation de U vérifiant la même propriété. Alors pour tous g dans $\mathrm{C}^{k+1}(U, \mathbb{R})$ et x dans U, en utilisant l'assertion (1) et ses notations,

$$\delta' g\,(x) = \delta'((\varphi_x g)_{|U})(x) = \delta(\varphi_x g)(x) = \delta_{|U} g(x)\ .$$

Donc $\delta' = \delta_{|U}$. Les autres propriétés découle de (2) (car $f \circ i = f_{|U}$, et si V est un ouvert contenu dans U, si $j : V \to U$ est l'inclusion, alors l'inclusion de V dans M est $i \circ j$).

(4) Pour tout f dans $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$, et tout α, on a $(\delta f)_{|U_\alpha} = \delta_{|U_\alpha}(f_{|U_\alpha}) = \delta'_{|U_\alpha}(f_{|U_\alpha}) = (\delta' f)_{|U_\alpha}$, donc les fonctions δf et $\delta' f$, qui coïncident sur U_α pour tout α, coïncident sur M. $\square$

Si $\varphi : M \to N$ est un C^{k+1}-difféomorphisme, on note aussi

$$\varphi_* = (\varphi^{-1})^*\ .$$

4.5 Dérivations et champs de vecteurs

Dans ce paragraphe, nous supposons encore que $k \neq \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}$.

Si X est un champ de vecteurs C^k sur M, alors l'application $\mathcal{L}_X : \mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$ définie par

$$\mathcal{L}_X(f) : x \mapsto T_x f(X(x))$$

est une dérivation. En particulier, si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors, comme $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = df_x(e_i)$, on a $\mathcal{L}_{X_{e_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Plus généralement, si (U, φ) est une carte locale de M, alors $\mathcal{L}_{\varphi^* X_{e_i}} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, où ce dernier terme est défini dans la formule ($\sharp$) du paragraphe 4.4.

Il est immédiat de vérifier que si U est un ouvert de M, alors

$$(\mathcal{L}_X)_{|U} = \mathcal{L}_{(X_{|U})}\ ,$$

et que si (ϕ_t) est le flot local de X, alors

$$\mathcal{L}_X(f) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f \circ \phi_t\ .$$

Si $\varphi : M \to N$ est un C^{k+1}-difféomorphisme local, avec N une variété C^{k+1}, alors pour tout champ de vecteurs X sur N de classe C^k, on a

$$\varphi^*(\mathcal{L}_X) = \mathcal{L}_{\varphi^* X} \ .$$

En effet, pour tous les $x \in M$ et $f \in \mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$, soient V_x et U_x des voisinages ouverts de x et $\varphi(x)$ respectivement tels que $\varphi : V_x \to U_x$ soit un C^{k+1}-difféomorphisme, et soit χ_x une fonction C^{k+1} sur N à support contenu dans U_x, et valant 1 sur un voisinage de $\varphi(x)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\varphi^* X} f(x) &= T_x f(\varphi^* X(x)) = T_x f((T_x\varphi)^{-1}(X(\varphi(x)))) = T_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})(X(\varphi(x))) \\
&= T_{\varphi(x)}(\chi_x f \circ \varphi^{-1})(X(\varphi(x))) = \mathcal{L}_X(\chi_x f \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi(x) = (\varphi^*(\mathcal{L}_X)) f(x) \ .
\end{aligned}$$

Théorème 4.6 *L'application $X \mapsto \mathcal{L}_X$ de $\Gamma_k(TM)$ dans $\mathcal{D}_k(M)$ est un morphisme injectif d'espaces vectoriels réels, ainsi que de $\mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$-modules, et un isomorphisme si $k = \infty$.*

Preuve. Cette application est clairement linéaire sur $\mathbb{R}$. Pour tous $g \in \mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$, $X \in \Gamma_k(TM)$, $f \in \mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$ et $x \in M$, on a

$$\mathcal{L}_{gX} f(x) = T_x f((gX)(x)) = T_x f(g(x)X(x)) = g(x)\mathcal{L}_X f(x) = (g\mathcal{L}_X f)(x) \ ,$$

donc l'application $X \mapsto \mathcal{L}_X$ est un morphisme de $\mathrm{C}^k(M, \mathbb{R})$-modules.

Pour montrer qu'elle est injective, montrons que si X est un champ de vecteurs C^k ne s'annulant pas en x, alors il existe un élément f dans $\mathrm{C}^{k+1}(M, \mathbb{R})$ tel que $T_x f(X(x))$ soit non nul. Ceci montrera que $\mathcal{L}_X(f)(x) = T_x f(X(x))$ est non nul, donc que $\mathcal{L}_X$ n'est pas la dérivation nulle. Or il s'agit d'un problème local, et en prenant des cartes locales, on se ramène au cas où M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Auquel cas une forme linéaire non nulle sur $X(x)$ convient pour f.

Pour montrer la surjectivité lorsque $k = \infty$, nous commençons par le lemme suivant, où nous notons B la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 4.7 *Soient $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, et $f : B \to \mathbb{R}$ une application $\mathrm{C}^{\ell+1}$. Alors pour tout $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans B, il existe des applications $h_{1,y}, \ldots, h_{n,y} : B \to \mathbb{R}$ de classe C^ℓ telles que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ dans B,*

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) h_{i,y}(x) \ .$$

De plus, $h_{i,y}(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(y)$.

Preuve. On a

$$f(x) - f(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(t(x-y) + y)\, dt = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x-y) + y)\, dt \ . \ \square$$

Supposons maintenant que $k = \infty$ (sinon, la perte de régularité dans le lemme ci-dessus entre f et les $h_{i,y}$ ferait que la preuve ci-dessous serait incorrecte). Si δ est une dérivation

sur B, il découle du lemme que pour tout f dans $\mathrm{C}^\infty(B,\mathbb{R})$, et tout y dans B, on a, en notant χ_i l'application i-ème coordonnée,

$$\begin{aligned}\delta f(y) = \delta(f - f(y))(y) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (h_{i,y}(y)\delta(\chi_i - y_i)(y) + (y_i - y_i)\delta(h_{i,y})(y)) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \delta(\chi_i)(y)\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)\ .\end{aligned}$$

Donc, en notant $g_i = \delta(\chi_i)$, on a $\delta = \mathcal{L}_{\sum g_i X_{e_i}}$, ce qui montre la surjectivité si $M = B$.

Maintenant, soient δ une dérivation sur M et $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ un atlas de cartes de M avec $\varphi_\alpha(U_\alpha) = B$. Par ce qui précède, on a $(\varphi_\alpha)_*(\delta_{|U_\alpha}) = \mathcal{L}_{Y_\alpha}$ pour Y_α un champ de vecteurs C^∞ sur B. Donc $\delta_{|U_\alpha} = (\varphi_\alpha)^*(\mathcal{L}_{Y_\alpha}) = \mathcal{L}_{(\varphi_\alpha)^*(Y_\alpha)}$. Notons $X_\alpha = (\varphi_\alpha)^*(Y_\alpha)$, qui est un champ de vecteurs C^k sur U_α. Par la proposition 4.5 (3), on a

$$(\mathcal{L}_{X_\alpha})_{|U_\alpha\cap U_\beta} = (\mathcal{L}_{X_\beta})_{|U_\alpha\cap U_\beta} = \delta_{|U_\alpha\cap U_\beta}\ .$$

Par l'injectivité, on en déduit que les champs de vecteurs X_α et X_β de classe C^∞ coïncident sur l'ouvert $U_\alpha \cap U_\beta$, donc que les X_α se recollent en un champ de vecteurs X de classe C^∞ sur M. Pour tout α, on a

$$\delta_{|U_\alpha} = \mathcal{L}_{X_\alpha} = (\mathcal{L}_X)_{|U_\alpha}\ .$$

Par la proposition 4.5 (4), on a donc $\delta = \mathcal{L}_X$. □

Remarque. On identifie souvent, par l'application $X \mapsto \mathcal{L}_X$, un champ de vecteurs et sa dérivation associée. En particulier, cela explique la notation $X(f)$ (au lieu de $\mathcal{L}_X(f)$), pour X dans $\Gamma_k(TM)$ et f dans $\mathrm{C}^{k+1}(M,\mathbb{R})$.

Ainsi, si (U,φ) est une carte locale de M, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, alors l'identification ci-dessus fait correspondre la dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ définie en ($\sharp$) et le champ de vecteurs $\varphi^* X_{e_i}$ sur U. En particulier, si M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la carte $\varphi = \mathrm{Id} : M \to M$, alors on notera $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le champ de vecteurs constant X_{e_i}. Donc (voir paragraphe 4.2), tout champ de vecteurs X de classe C^k sur M, en restriction à un domaine d'une carte (U,φ), s'écrit, de manière unique,

$$X_{|U} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

où $f_i \in \mathrm{C}^k(U,\mathbb{R})$. Cette écriture dépend bien sûr de la carte (U,φ) choisie. Soit (V,ψ) une autre carte locale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, avec $X_{|V} = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ l'expression de X dans cette carte locale, avec $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées dans $\varphi(U)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ les coordonnées dans $\psi(V)$. Notons

$$y = (y_1,\dots,y_n) \mapsto \varphi\circ\psi^{-1}(y) = (x_1(y_1,\dots,y_n),\dots,x_n(y_1,\dots,y_n))$$

l'application de changement de cartes de $\psi(U\cap V)$ dans $\varphi(U\cap V)$. Alors (voir paragraphe 4.2.5), on a les formules de changement de bases

$$\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\circ\psi\ \frac{\partial}{\partial x_i}\ ,$$

et de changement de coordonnées

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} g_j \ \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ \psi \ .$$

De même, le théorème de redressement 4.4 dit que pour X dans $\Gamma_k(TM)$ tel que si $X(x_0) \neq 0$, alors il existe une carte locale au voisinage de x_0 telle que l'on ait, au voisinage de x_0, et dans cette carte locale,

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \ .$$

Exemple. Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes et (r, θ) les coordonnées polaires au voisinage d'un point de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Alors

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta \ \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \ \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r\sin\theta \ \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \ \frac{\partial}{\partial y} \ .$$

4.6 Crochets de champs de vecteurs

Lemme 4.8 *Supposons $k = \infty$. Si δ, δ' sont deux dérivations sur M, alors l'endomorphisme linéaire*

$$[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$$

de $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est une dérivation. De plus, pour toutes les dérivations $\delta, \delta', \delta''$ sur M, pour tout ouvert U de M, pour toutes les applications f, g dans $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et pour tout C^∞-difféomorphisme local $\varphi : N \to M$ où N est une variété C^∞, on a

- $[\delta, \delta'] + [\delta', \delta] = 0$,
- $[\delta, [\delta', \delta'']] + [\delta', [\delta'', \delta]] + [\delta'', [\delta, \delta']] = 0$,
- $[f\delta, g\delta'] = fg[\delta, \delta'] + f\delta(g)\delta' - g\delta'(f)\delta$.
- $\varphi^*[\delta, \delta'] = [\varphi^*\delta, \varphi^*\delta']$, *et donc en particulier* $[\delta, \delta']_{|U} = [\delta_{|U}, \delta'_{|U}]$,

Preuve. Pour tous f, g dans $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$, on a

$$\delta \circ \delta'(fg) = f \ \delta \circ \delta'(g) + \delta(f)\delta'(g) + \delta'(f)\delta(g) + g \ \delta \circ \delta'(f) \ ,$$

d'où le premier résultat par soustraction. Les autres vérifications sont immédiates. □

L'application $[\delta, \delta']$ s'appelle le *crochet (de Lie)* des dérivations δ et δ'. Le premier point ci-dessus s'appelle la propriété d'*anticommutativité* et le second l'*identité de Jacobi* du crochet de Lie des dérivations.

Si X et Y sont des champs de vecteurs C^∞ sur M, on note $[X, Y]$ le champ de vecteurs C^∞ sur M tel que

$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] \ .$$

Ce champ de vecteurs s'appelle le *crochet (de Lie)* des champs de vecteurs X et Y.

La proposition ci-dessous résume les différentes propriétés du crochet de Lie des champs de vecteurs. La première propriété ci-dessous s'appelle l'*anticommutativité* et la seconde l'*identité de Jacobi* du crochet de Lie des champs de vecteurs.

Proposition 4.9 *Supposons $k = \infty$. Soient X, Y, Z des champs de vecteurs C^∞ sur M, f, g dans $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et $\varphi : N \to M$ un C^∞-difféomorphisme local, où N est une variété C^∞. Notons (ϕ_t) le flot local de X sur M. Alors $[\cdot,\cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ est une application bilinéaire telle que*

- $[X, Y] + [Y, X] = 0$,
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$,
- $[fX, gY] = fg[X, Y] + f\mathcal{L}_X(g)Y - g\mathcal{L}_Y(f)X$,
- $\varphi^*[X, Y] = [\varphi^*X, \varphi^*Y]$, *et donc en particulier, pour tout ouvert U de M, nous avons* $[X, Y]_{|U} = [X_{|U}, Y_{|U}]$,
- $\frac{d}{dt}_{|t=0} (\phi_t)^*Y = [X, Y]$,
- *si (U, φ) est une carte locale de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique, et si, en restriction à U, on a $X = \sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ et $Y = \sum_{i=1}^n g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors le champ de vecteurs $[X, Y]$, en restriction à U, est*

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Preuve. Les quatre premières assertions découlent du lemme 4.8. La dernière assertion découle du fait que, par définition,

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) .$$

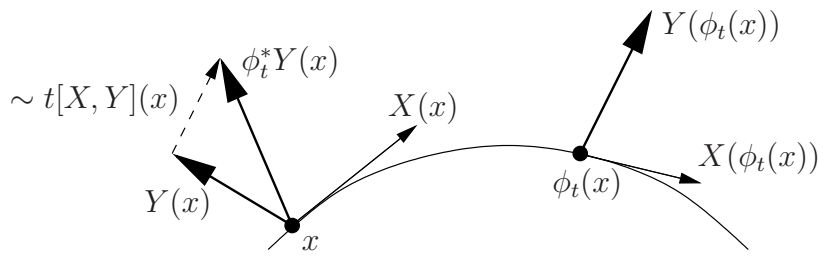
Montrons la cinquième assertion. Soit x_0 un point de M, et f un élément de $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$.

Par une variante à paramètre du lemme 4.7, il existe une application $(t, x) \mapsto g_t(x)$ de classe C^∞ et définie sur un voisinage de $(0, x_0)$, telle que $f \circ \phi_{-t}(x) = f(x) - tg_t(x)$ et $g_0(x) = -\frac{d}{dt}_{|t=0} f \circ \phi_{-t}(x) = X(f)(x)$. Comme $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ pour t petit et au voisinage de x_0, on a, pour x voisin de x_0,

$$(\phi_t)^*Y(f)(x) = Y(f \circ \phi_{-t}) \circ \phi_t\,(x) = Y(f - tg_t) \circ \phi_t(x) = Y(f) \circ \phi_t(x) - tY(g_t) \circ \phi_t(x) .$$

En dérivant par rapport à t en $t = 0$, le premier terme du membre de droite devient $T_x(Y(f))(X(x)) = X(Y(f))(x)$. Le second terme devient $Y(g_0)(x) = Y(X(f))(x)$, d'où le résultat. □

Remarques. (1) La cinquième assertion dit que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X et Y mesure la manière dont Y « tourne » le long des courbes intégrales de X. Voir aussi l'exercice E.93.



(2) La dernière assertion permet de définir le crochet de champs de vecteurs de classe C^k pour $k \geq 1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, qui est un champ de vecteurs de classe C^{k-1}

(attention à la perte de différentiabilité) sur U : si $X = \sum_{j=1}^n f_j X_{e_j}$ et $Y = \sum_{i=1}^n g_i X_{e_i}$, alors on pose

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(f_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) X_{e_i} \ .$$

C'est un exercice de montrer que les cinq premières assertions restent valables, en demandant des hypothèses de régularité suffisantes (champs de vecteurs au moins C^2 pour l'identité de Jacobi, difféomorphisme au moins C^2 pour la quatrième assertion)

(3) Il découle de l'exercice E.79 et de la proposition 4.9 ci-dessus que si X et Y sont deux champs de vecteurs C^1 sur M, et si (ϕ_t) est le flot local de X en un point x de M, alors

- si $f : M \to N$ est un C^1-difféomorphisme, alors le flot local de f_*X en $f(x)$ est $f \circ \phi_t \circ f^{-1}$,
- si X et Y sont C^∞ et si $f : M \to N$ est un C^∞-difféomorphisme, alors $f_*[X,Y] = [f_*X, f_*Y]$.

4.7 Champs de plans

Soient k un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty, \omega_{\mathbb{R}}, \omega_{\mathbb{C}}\}$ et $p \leq n$ dans $\mathbb{N}$. Soit M une variété de dimension n et de classe C^{k+1}.

De manière intuitive, un champ de plans C^k sur M est la donnée, pour tout point x de M, d'un sous-espace vectoriel Δ_x de T_xM, qui « dépend de manière C^k de x. » De manière précise, un *champ de p-plans* (ou encore une *distribution de p-plans*) (de classe C^k) sur M est une section (de classe C^k) de la fibration grassmannienne de rang p (voir paragraphe 3.6) (du fibré tangent) de M. Par exemple, si $k \neq \omega_{\mathbb{C}}$ et si $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors la fibration $\mathcal{G}_p(TU)$ s'identifie avec $\mathrm{pr}_1 : U \times \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n) \to U$, et donc un champ de p-plans C^k sur U s'identifie à une application C^k de U dans la variété grassmannienne $\mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n)$.

Un champ de vecteurs X sur M est dit *tangent* à un champ de p-plans Δ si pour tout x dans X, le vecteur $X(x)$ appartient au sous-espace Δ_x de T_xM.

Si Δ est un champ de p-plans C^k sur M, et si U est un ouvert de M, alors, en identifiant TU avec son image canonique dans TM, la rectriction $\Delta_{|U}$ de Δ à U est un champ de p-plans C^k sur U.

Les champs de plans se tirent en arrière par les morphismes étales. Plus précisément, soient N une variété de dimension n et de classe C^{k+1}, $f : M \to N$ un C^{k+1}-difféomorphisme local et Δ un champ de p-plans C^k sur N. Posons, pour tout x dans M,

$$f^*\Delta(x) = (T_xf)^{-1}(\Delta_{f(x)}) \ .$$

Alors $x \mapsto f^*\Delta(x)$ est un champ de p-plans C^k sur M, appelé *image réciproque* de Δ par f. Il est immédiat que $\mathrm{id}^*\Delta = \Delta$ et que

$$(g \circ f)^*\Delta = f^*(g^*\Delta) \ .$$

De plus, si U est un ouvert de N et $i : U \to N$ l'inclusion, alors $i^*\Delta = \Delta_{|U}$ et

$$(f^*\Delta)_{|f^{-1}(U)} = (f_{|f^{-1}(U)})^*(\Delta_{|U}) \ .$$

Si f est un C^{k+1}-difféomorphisme et si Δ est un champ de p-plans C^k sur M, alors on note $f_*\Delta = (f^{-1})^*\Delta$, i.e. pour tout $y \in N$,

$$f_*\Delta(y) = T_{f^{-1}(y)}f(\Delta_{f^{-1}(y)}) \ .$$

Bien sûr, on a alors $f^*(f_*\Delta) = f_*(f^*\Delta) = \Delta$.

En particulier, si (U, φ) est une carte locale C^{k+1} de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$ si $k = \omega_{\mathbb{C}}$), alors $\varphi_*(\Delta_{|U})$ est un champ de plans sur l'ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$ si $k = \omega_{\mathbb{C}}$), appelé le *champ de plans* Δ *lu dans la carte* (U, φ).

La proposition suivante peut aussi servir à définir un champ de p-plans de classe C^k.

Proposition 4.10 *Un champ de p-plans $\Delta : x \mapsto \Delta_x$ de M est de classe C^k si et seulement si, pour tout point x_0 de M, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et p champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ sur U, de classe C^k, tels que, en tout point x de U, le p-uplet $(X_1(x), \ldots, X_p(x))$ soit une base de Δ_x.*

Preuve. Si $k = \omega_{\mathbb{C}}$, alors on remplacera $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans ce qui suit, et on considèrera les espaces vectoriels et les applications linéaires sur $\mathbb{C}$.

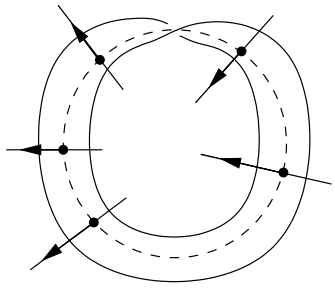
Comme cet énoncé est local, on se ramène en prenant des cartes locales au cas où $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $x_0 = 0$, Δ une application de U dans $\mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n)$ et $\Delta_0 = \mathbb{R}^p \times \{0\}$. On identifie de manière usuelle $\mathbb{R}^n$ et le produit $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Notons que pour tout x suffisamment proche de 0, le sous-espace vectoriel Δ_x est transverse, donc supplémentaire, à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$, et ceci que Δ soit C^k, ou qu'il soit engendré par p champs de vecteurs C^k linéairement indépendants. Fixons $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de Δ_0. Rappelons que $\mathcal{L}(\Delta_0, \mathbb{R}^{n-p})$ est l'espace vectoriel réel de dimension finie des applications linéaires de Δ_0 dans $\mathbb{R}^{n-p}$.

Si Δ est C^k, alors par définition de la structure de variété sur $\mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n)$, il existe, quitte à retrécir U, une application C^k de U dans $\mathcal{L}(\Delta_0, \mathbb{R}^{n-p})$, que nous noterons $x \mapsto h_x$, telle que Δ_x soit le graphe de l'application linéaire h_x. Posons $X_i(x) = e_i + h_x(e_i)$, qui appartient à Δ_x pour $1 \leq i \leq p$. Alors les champs de vecteurs X_i sont C^k. Comme $e_1, \ldots, e_p$ sont linéairement indépendants et h_x est d'image dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$, ils sont linéairement indépendants en tout point x, donc forment une base de Δ_x.

Réciproquement, supposons que Δ soit engendré par p champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_p$ de classe C^k, linéairement indépendants en tout point. Notons $Y_1(x), \ldots, Y_p(x)$ les projections de respectivement $X_1(x), \ldots, X_p(x)$ sur Δ_0 parallèlement à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$, et $Z_1(x), \ldots, Z_p(x)$ celles sur $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ parallèlement à Δ_0. Remarquons que, quitte à retrécir U, le p-uplet $(Y_1(x), \ldots, Y_p(x))$ est une base de Δ_0. Notons $A_x : \Delta_0 \to \Delta_0$ l'application linéaire telle que $A_x(e_i) = Y_i(x)$. L'application $x \mapsto A_x^{-1}$ de U dans $\mathcal{L}(\Delta_0, \Delta_0)$ est de classe C^k par les formules donnant l'inverse d'une matrice. Notons $B_x : \Delta_0 \to \{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$ l'application linéaire telle que $B_x(e_i) = Z_i(x)$, qui dépend de manière C^k de x. Alors Δ_x est le graphe de l'application linéaire $B_x \circ A_x^{-1}$ de Δ_0 dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$, qui dépend de manière C^k de x, d'où le résultat. $\square$

Exemples. (1) Si X est un champ de vecteurs C^k ne s'annulant pas sur une variété M, alors l'application $x \mapsto \mathbb{R}X(x)$, qui à x associe la droite dirigée par le vecteur tangent $X(x)$, est un champ de droites C^k sur M, dit *dirigé par* X.

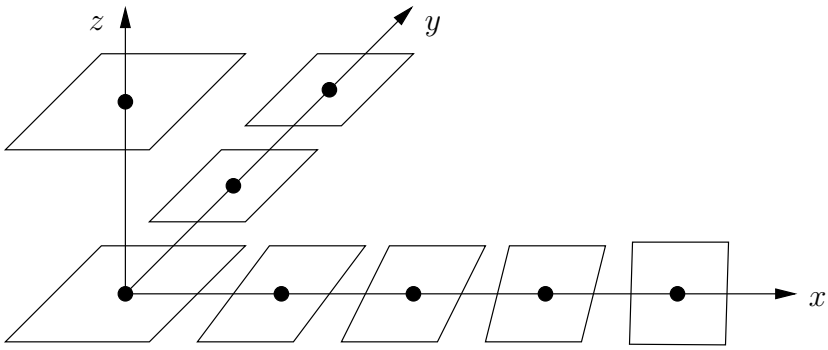
(2) Attention, la proposition précédente est uniquement locale, il existe des champs de droites sur des variétés M tels qu'il n'existe pas de champ de vecteurs ne s'annulant pas sur M et dirigeant ce champ de droites. Par exemple, le *ruban de Möbius* est la variété quotient $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/((x,y)\sim(x+1,-y))$. Soit (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le champ de droites $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\times\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2$, défini par $x\mapsto(x,\mathbb{R}e_2)$, passe au quotient en un champ de droites C^ω sur le ruban de Möbius qui n'est pas dirigé par un champ de vecteurs C^0 ne s'annulant pas.



(3) Considérons le champ de plans Δ de classe C^∞ sur la variété $\mathbb{R}^3$ munie des coordonnées $u=(x,y,z)$, qui est engendré par les champs de vecteurs C^∞ linéairement indépendants en tout point

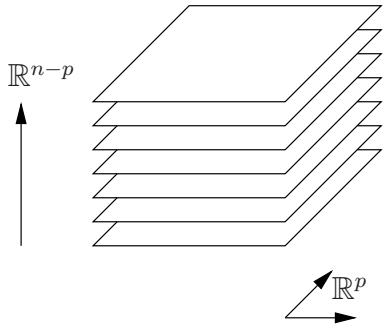
$$X=\frac{\partial}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial}{\partial y}+x\frac{\partial}{\partial z}\ ,$$

i.e. qui est défini par $u\mapsto\Delta_u=\mathrm{Vect}\{X(u),Y(u)\}$. Ce champ de plans est invariant par les translations dans les directions y et z. Le long de l'axe de coordonnée des x, il est horizontal en l'origine, et devient de plus en plus vertical quand on va vers l'infini (voir figure ci-dessous). Notons que $[X,Y]=\frac{\partial}{\partial z}\notin\mathrm{Vect}\{X,Y\}$.



4.8 Feuilletages

Soient k un élément de $\mathbb{N}\cup\{\infty,\omega_{\mathbb{R}},\omega_{\mathbb{C}}\}$ et $p\le n$ dans $\mathbb{N}$. Soit M une variété de dimension n et de classe C^k (par exemple obtenue par appauvrissement de structure à partir d'une variété de classe C^{r+1} avec $r\ge k$).



Un champ de p-plans est une notion infinitésimale. L'objet global lui correspondant (au moins partiellement) est celui de feuilletage. Le modèle standard (à garder en tête) de ce que nous allons appeler un feuilletage de dimension p d'une variété de dimension n est le *feuilletage linéaire standard* de dimension p de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ par les sous-espaces affines horizontaux $\mathbb{R}^p \times \{y\}$ de dimension p, muni de l'ensemble des C^k-difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ préservant la famille de ces sous-espaces affines horizontaux.

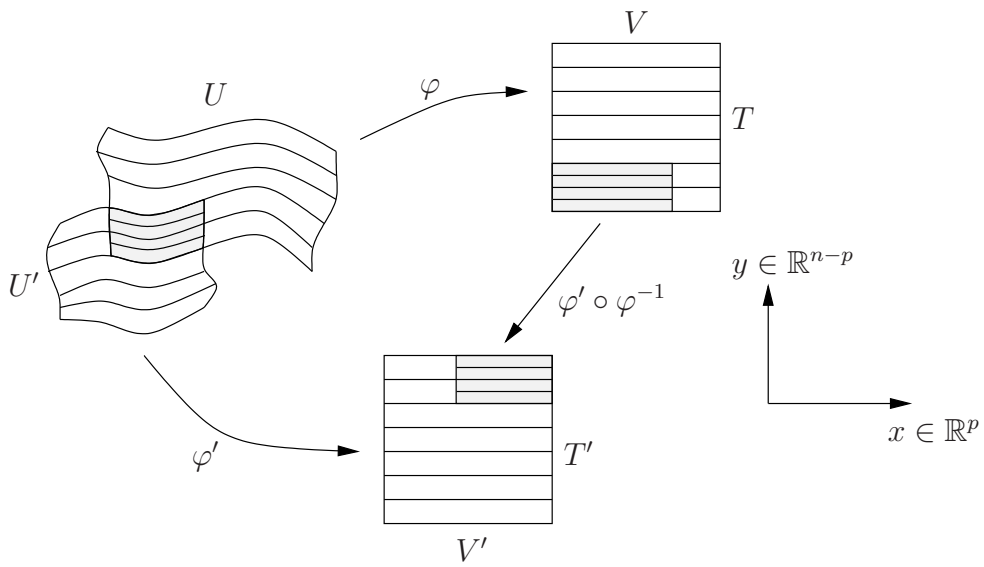
Si $k = \omega_{\mathbb{C}}$, alors on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ dans cette définition.

Un *atlas de cartes feuilletées* C^k de dimension p sur M est un (sous)-atlas de cartes $\mathcal{A}$ de classe C^k de M, tel que

- pour chaque carte (U, φ) de $\mathcal{A}$, on a $\varphi(U) = V \times T$ avec V un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et T un ouvert de $\mathbb{R}^{n-p}$,
- pour toutes les cartes $\varphi : U \to V \times T$ et $\varphi' : U' \to V' \times T'$ dans $\mathcal{A}$, le changement de cartes est localement de la forme

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(y)) \ .$$

Un *feuilletage* $\mathcal{F}$ de classe C^k, de dimension p, et de codimension $n - p$, dans M est un atlas de cartes feuilletées C^k de M, qui est maximal (pour l'inclusion). Une *variété feuilletée* $(M, \mathcal{F})$ de classe C^k est une variété M de classe C^k munie d'un feuilletage C^k.



Si $\varphi : U \to V \times T$ est une carte locale dans $\mathcal{A}$, alors les sous-variétés $\varphi^{-1}(V \times \{y\})$ de classe C^k de U sont appelées les *feuilles locales* de $\mathcal{F}$ dans cette carte, et les $\varphi^{-1}(\{x\} \times T)$ les *transversales locales*. Puisque les applications de changement de cartes de l'atlas de cartes feuilletées $\mathcal{A}$ préservent l'ensemble des sous-espaces horizontaux $\mathbb{R}^p \times \{*\}$, les feuilles locales sont indépendantes des cartes, au sens que si $(U, \varphi), (U', \varphi')$ sont deux cartes locales du feuilletage, si x et y appartiennent à $U \cap U'$, alors x et y sont dans une même feuille locale

pour la carte (U, φ) si et seulement s'ils sont dans une même feuille locale pour la carte (U', φ').

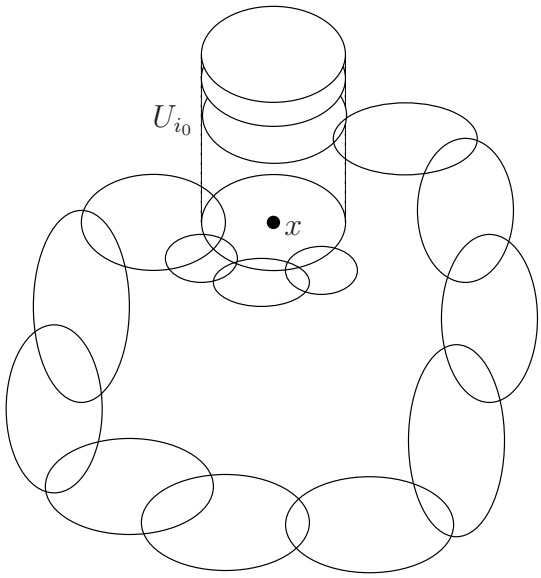
L'espace topologique $\mathbb{R}^n$ est identifié de manière usuelle à l'espace topologique produit $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Munissons l'ensemble $\mathbb{R}^n$ d'une nouvelle topologie, produit de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^p$ et de la topologie discrète sur $\mathbb{R}^{n-p}$, qui est plus fine que la topologie usuelle. Comme les homéomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(y))$$

sont aussi des homéomorphismes locaux pour cette nouvelle topologie sur $\mathbb{R}^n$, on peut munir (voir l'exercice E.171 de l'appendice A.1) la variété M d'une unique topologie, appelée *topologie des feuilles* de $\mathcal{F}$, plus fine que la topologie originelle de M, telle que les cartes locales de $\mathcal{F}$ soient des homéomorphismes sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$ muni de cette nouvelle topologie. Si A est une partie de M, on appelle encore *topologie des feuilles* de A la topologie induite sur A par la topologie des feuilles de M. Comme la topologie originelle de M est séparée, la topologie des feuilles l'est aussi. Notons que si $p < n$, alors la topologie des feuilles est strictement plus fine que la topologie usuelle.

On appelle *feuille* du feuilletage $\mathcal{F}$ passant par un point x de M, et on note $\mathcal{F}_x$, la composante connexe de x dans M pour la topologie des feuilles sur M. En particulier, les feuilles de $\mathcal{F}$ forment une partition de M. En général, l'ensemble des feuilles est non dénombrable.

Montrons que chaque feuille $\mathcal{F}_x$, munie de sa topologie des feuilles (i.e. celle induite par la topologie des feuilles de M), est un espace topologique séparé et à base dénombrable. La séparation a déjà été mentionnée.



Comme M est dénombrable à l'infini, on peut recouvrir M par un ensemble dénombrable de cartes feuilletées $(U_i, \varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telles que U_i soit relativement compact, et telle que, pour tout i dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{j \in I \ : \ U_j \cap U_i \neq \emptyset\}$ soit fini. Soit x un élément de M. Alors la feuille $\mathcal{F}_x$ est réunion d'un ensemble dénombrable de feuilles locales : si $x \in U_{i_0}$, prendre la feuille locale de x dans U_{i_0}, puis pour tout i tel que $U_{i_0} \cap U_i \neq \emptyset$ (il n'y en a

qu'un nombre fini), prendre la feuille locale dans U_i d'un point fixé quelconque de $U_{i_0} \cap U_i$, etc. Ceci montre que $\mathcal{F}_x$ est à base dénombrable.

Notons qu'une feuille rencontre un domaine de carte feuilletée en une réunion (disjointe) au plus dénombrable de feuilles locales (qui peut être dense dans ce domaine, voir l'exemple (4) ci-dessous).

Comme les feuilles locales de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés C^k, chaque feuille, munie de sa topologie des feuilles et de son atlas des feuilles locales, est une variété C^k, et, munie de la topologie induite par la topologie originelle de M, est une sous-variété immergée dans M (car chaque feuille locale est un ouvert de la feuille la contenant pour la topologie des feuilles). Mais attention, une feuille n'est en général pas une sous-variété de la variété M (voir l'exemple (4) ci-dessous).

Par abus, on note souvent de la même manière le feuilletage $\mathcal{F}$ et la partition de M en feuilles de $\mathcal{F}$.

Exemples. (1) Soit X un champ de vecteurs C^k ne s'annulant pas sur une variété M de classe C^{k+1}. Alors le théorème du redressement 4.4 montre que M admet un feuilletage de classe C^k, dont les feuilles sont les courbes intégrales de X.

(2) Soit $\pi : E \to B$ une fibration C^k, de fibre une variété F de classe C^k et de dimension p, sur une variété B de dimension n. Pour toute carte locale (U, ϕ) de B où U est un ouvert distingué pour π, pour toute carte locale (V, ψ) de F, et pour toute trivialisation locale $\theta : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ de π au-dessus de U, considérons l'application de l'ouvert $W = \theta^{-1}(U \times V)$ de E dans l'ouvert $\phi(U) \times \psi(V)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, définie par

$$x \mapsto (\phi \times \psi) \circ \theta(x) \ .$$

Alors l'ensemble de ces applications est un atlas de cartes feuilletées C^k sur E. Donc la fibration π définit un feuilletage C^k de dimension p et de codimension n dans E. Si F est connexe, les feuilles de ce feuilletage sont les fibres $\pi^{-1}(b)$ pour b dans B. Il se trouve que, dans ce cas particulier, les feuilles sont donc toutes des sous-variétés (et pas seulement des sous-variétés immergées).

En particulier, une variété produit $M \times N$ admet deux feuilletages, dont les feuilles sont difféomorphes à M pour l'un, à N pour l'autre.

Mais il existe « beaucoup plus » de feuilletages que de fibrations !

(3) Les feuilletages se tirent en arrière par les morphismes étales. Plus précisément, soient $f : M \to N$ un C^k-difféomorphisme local entre deux variétés C^k, et $\mathcal{F}$ un feuilletage C^k de N, défini par un atlas de cartes feuilletées $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$. Pour tout point x de M, notons V_x un voisinage ouvert de x tel que $f(V_x)$ soit un ouvert de N et $f_{|V_x}$ soit un C^k-difféomorphisme sur son image. Alors l'atlas de cartes $(f^{-1}(U_i) \cap V_x, \varphi_i \circ f_{|f^{-1}(U_i) \cap V_x})_{i \in I, x \in M}$ est un atlas de cartes feuilletées C^k sur M, donc définit un feuilletage C^k de M, noté $f^*\mathcal{F}$, et appelé *feuilletage image réciproque* de $\mathcal{F}$ par f. En particulier, l'image par f de la feuille $(f^*\mathcal{F})_x$ est la feuille $\mathcal{F}_{f(x)}$, mais en général l'image réciproque par f d'une feuille de $\mathcal{F}$ n'est pas réduite à une seule feuille de $f^*\mathcal{F}$.

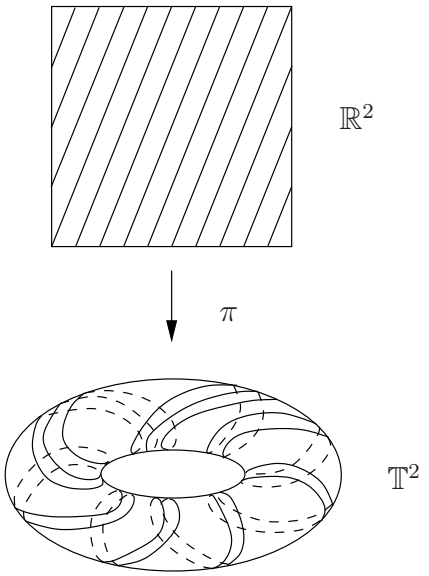
Un *isomorphisme (de feuilletages* C^k*)* d'une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ de classe C^k dans une autre $(M', \mathcal{F}')$ est un C^k-difféomorphisme $f : M \to M'$, tel que $f^*(\mathcal{F}') = \mathcal{F}$ (ou de manière équivalente, telle que les applications f et f^{-1}, lues dans des cartes locales feuilletées, préservent les familles de sous-espaces horizontaux).

(4) Soit G un groupe discret agisant librement et proprement par C^k-difféomorphismes sur une variété M de classe C^k. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de M, qui est *invariant par* G (i.e. tout élément de G envoie carte feuilletée sur carte feuilletée : $g^*\mathcal{F} = \mathcal{F}$ pour tout g dans G). Alors la variété quotient $G\backslash M$ admet un unique feuilletage $\mathcal{F}'$, appelé *feuilletage quotient* tel que, si $\pi : M \to G\backslash M$ est la projection canonique, alors $\pi^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. La preuve est la même, en travaillant avec des atlas de cartes feuilletés, que celle qui a permis de définir la structure de variété quotient sur $G\backslash M$, voir le paragraphe 2.4.2.

Par exemple, si F est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathbb{R}^n$ admet un feuilletage dont les feuilles sont les translatés de F. En particulier, ce feuilletage est invariant par l'action par translations de $\mathbb{Z}^n$. Donc il induit par passage au quotient dans le revêtement $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ un feuilletage analytique réel de dimension p du tore $\mathbb{T}^n$, appelé un *feuilletage linéaire du tore*.

Par exemple, si $n = 2$, et si F est une droite de pente irrationnelle, alors les feuilles du feuilletage correspondant de $\mathbb{T}^2$ sont difféomorphes à $\mathbb{R}$, mais ce ne sont pas des sous-variétés de $\mathbb{T}^2$, car elles sont denses dans $\mathbb{T}^2$.

Plus généralement, toute feuille d'un feuilletage linéaire de dimension p d'un tore est difféomorphe à un produit $\mathbb{R}^{p-i} \times \mathbb{T}^i$.



4.9 Théorème de Frobénius

Soient k dans $\mathbb{N} - \{0\} \cup \{\infty, \omega\}$, et $p \leq n$ dans $\mathbb{N}$. Soit M une variété de dimension n et de classe C^k.

Tout feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^k et de dimension p sur M définit un champ de p-plans de classe C^{k-1}, qui est l'application

$$x \mapsto T_x\mathcal{F}_x$$

qui à un point x de M associe l'espace tangent en x à la feuille $\mathcal{F}_x$ passant par x. (Ceci est bien défini, car $\mathcal{F}_x$ est une sous-variété immergée de classe C^k de M.) On fera attention à la perte de différentiabilité si $k \neq \infty, \omega$. Pour simplifier les énoncés, nous supposons $k = \infty$ dans la suite.

Un champ de p-plans Δ de classe C^∞ est dit *intégrable* s'il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^∞ et de dimension p sur M tel que $\Delta_x = T_x\mathcal{F}_x$ pour tout x dans M.

Notons qu'un tel feuilletage est unique. En effet, soient $\mathcal{F}'$ un autre tel feuilletage, et (U, φ) et (U', φ') des cartes feuilletées de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ respectivement. Considérons l'application $\varphi' \circ \varphi^{-1} : (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$ d'un ouvert de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ sur un autre. La dérivée $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ de sa seconde composante par rapport à la première variable est nulle puisque $T_x\mathcal{F}_x = T_x\mathcal{F}'_x$. Donc sa seconde composante f_2 ne dépend localement que de y, et les deux cartes feuilletées sont compatibles. Par conséquent, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Voici un critère très utile pour savoir si un champ de p-plans est intégrable.

Théorème 4.11 (Théorème de Frobénius) *Un champ de p-plans Δ de classe C^∞ sur M est intégrable si et seulement si, pour tous les champs de vecteurs X et Y sur M de classe C^∞ et tangents à Δ, le crochet de Lie $[X, Y]$ sur M est tangent à Δ.*

Preuve. Supposons d'abord que Δ soit intégrable, défini par un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur M tangents à Δ, et x dans M. Montrons que $[X, Y](x) \in \Delta_x$. Quitte à prendre une carte locale (U, φ) en x et à remplacer X par $\varphi_*(X_{|U})$ et de même pour Y, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et que le feuilletage est le feuilletage par sous-espaces parallèles à $\mathbb{R}^p \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Mais alors, dire qu'un champ de vecteurs est tangent à Δ équivaut à dire qu'il est combinaison linéaire de $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}$. Comme le crochet de deux champs de vecteurs qui sont une telle combinaison linéaire en est une autre, le résultat en découle.

Réciproquement, supposons que la seconde propriété soit vérifiée, et montrons qu'alors Δ est intégrable. Comme ce problème est local, on peut supposer que M est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Par la proposition 4.10, quitte à réduire M, il existe $(X_1, \ldots, X_p)$ un p-uplet de champs de vecteurs de classe C^∞, qui, en tout point de M, est une base de l'espace tangent en ce point.

Montrons tout d'abord que l'on peut se ramener au cas où $[X_i, X_j] = 0$ pour $i, j \in \{1, \ldots, p\}$. Quitte à faire un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(0)$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$. Si $X_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$, alors, quitte à réduire M, on peut supposer que la matrice $(a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq p}$, qui vaut la matrice identité en $x = 0$, est inversible, d'inverse $(b_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq p}$. Par les formules donnant l'inverse d'une matrice, les fonctions $b_{i,j}$ sont C^∞. Posons $X'_i = \sum_{j=1}^p b_{i,j} X_j$. Alors les $X'_i(x)$ engendrent encore Δ_x. Par construction, $X'_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^n c_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Donc un petit calcul, utilisant le fait que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, montre que

$$[X'_i, X'_j] = \sum_{k=p+1}^n d_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} .$$

Or par l'hypothèse, il existe des fonctions $e_{i,j,k}$ pour $i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$ de classe C^∞ telles que

$$[X'_i, X'_j] = \sum_{k=1}^p e_{i,j,k} X'_k = \sum_{k=1}^p e_{i,j,k} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=p+1}^n c_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) .$$

Donc par différence, $\sum_{k=1}^p e_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$, ce qui, par indépendance des $\frac{\partial}{\partial x_k}$, montre que $e_{i,j,k} = 0$ pour $i, j, k \in \{1, \ldots, p\}$, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons maintenant par récurrence sur p que si $(X_1, \ldots, X_p)$ est un p-uplet de champs de vecteurs C^∞ linéairement indépendants, et commutants (i.e. $[X_i, X_j] = 0$ pour tous i, j), alors il existe un C^∞-difféomorphisme local φ en 0 tel que, au voisinage de 0, on ait $\varphi^*(X_i) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$. Ceci montrera que le champ de p-plans engendré par $\varphi^*(X_1), \ldots, \varphi^*(X_p)$ est tangent au feuilletage $\mathcal{F}$ par les sous-espaces affines parallèles à $\mathbb{R}^p \times \{0\}$. Donc le champ de plans engendré par $X_1, \ldots, X_p$ est intégrable au voisinage de 0 (tangent au feuilletage image réciproque par φ^{-1} de $\mathcal{F}$).

Le cas $p = 1$ découle du théorème de redressement 4.4. Supposons le résultat vrai pour $p-1$. Alors nous pouvons supposer, quitte à utiliser un C^∞-difféomorphime local en 0, que

$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$. Écrivons

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \ .$$

Comme $[X_p, X_i] = 0$ pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$, on a $\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = 0$ pour tout j, c'est-à-dire que a_j est une fonction des coordonnées $x_p, \dots, x_n$ seulement. Par le théorème du redressement 4.4 appliqué au champ de vecteurs $Y = \sum_{j=p}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ sur $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p+1}$, on peut supposer que $Y = \frac{\partial}{\partial x_p}$, de sorte que $X_p = \sum_{j=1}^{p-1} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_p}$. Pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$, posons $f_i(x_p, \dots, x_n) = -\int_0^{x_p} a_i(t, x_{p+1}, \dots, x_n)\, dt$, qui est de classe C^∞. Posons aussi

$$y_i = \begin{cases} x_i + f_i(x_p, \dots, x_n) & \text{pour } i \in \{1, \dots, p-1\} \\ x_i & \text{pour } i \in \{p, \dots, n\} \ . \end{cases}$$

Il est immédiat que l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)$ est un C^∞-difféomorphisme local en 0. Rappelons (voir la remarque suivant la preuve du théorème 4.6) que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i} \ .$$

Donc, pour $j \in \{1, \dots, p-1\}$, on a $\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_p} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{\partial}{\partial y_p} = \sum_{i=1}^{p-1} -a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_p} \ .$$

Donc, pour $j \in \{1, \dots, p\}$, on a $X_j = \frac{\partial}{\partial y_j}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Par exemple, le champs de plans sur $\mathbb{R}^3$ de l'exemple (3) du paragraphe 4.7, défini par $\Delta_{(x,y,z)} = \mathrm{Vect}(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z})$, est non intégrable.

Remarque. Si Δ est un champ de p-plans C^∞ sur M, alors (par la proposition 4.10) pour tout x_0 dans M, il existe un voisinage ouvert U_{x_0} de x_0 dans M et $X_1, \dots, X_p$ des champs de vecteurs C^∞ sur U tels que pour tout x dans U, les vecteurs $X_1(x), \dots, X_p(x)$ engendrent Δ_x. Pour montrer que Δ est intégrable, il suffit alors de vérifier que

$$\forall\, x_0 \in M, \ \ \forall\, x \in U_{x_0}, \ \ \forall\, i, j \in \{1, \dots, p\}, \quad [X_i, X_j](x) \in \Delta_x \ .$$

Preuve. Soient X et Y des champs de vecteurs C^∞ tangents à Δ. Pour tout x_0 dans M, il existe des fonctions $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_p$ de classe C^∞ de U_{x_0} dans $\mathbb{R}$ telles que $X_{|U_{x_0}} = \sum_{i=1}^{p} f_i X_i$ et $Y_{|U_{x_0}} = \sum_{i=1}^{p} g_i X_i$. Alors pour tout x dans U_{x_0}, le vecteur $[X, Y](x)$ appartient à l'espace vectoriel engendré par les $[X_i, X_j](x)$, par la bilinéarité et le troisième point de la proposition 4.9, donc il appartient à Δ_x. On applique alors le théorème 4.11 de Frobénius. □

4.10 Autres exercices

Exercice E.80 Construire un champ de vecteurs analytique réel sur la sphère $\mathbb{S}_2$ ne s'annulant qu'en un point.

Exercice E.81 Le but de cet exercice est de montrer que la sphère $\mathbb{S}_n$ possède au moins un champ de vecteurs C^∞ ne s'annulant jamais si et seulement si n est impair.

1. Si $n = 2p + 1$ est impair, construire un champ de vecteurs C^∞ ne s'annulant jamais sur $\mathbb{S}_n$.
2. Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant K et v une application de classe C^∞ de U dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour t dans $\mathbb{R}$, on définit une application
$$F_t : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto & x + tv(x) \end{array} \right. .$$
Montrer qu'il existe un ouvert V de U contenant K et $\epsilon > 0$ tels que, pour tout t avec $|t| \leq \epsilon$, l'application F_t soit un difféomorphisme de V sur son image. Montrer que la mesure de Lebesgue de $F_t(K)$ est alors un polynôme en t.
3. Soit v un champ de vecteurs unitaires C^∞ sur $\mathbb{S}_n$. Montrer que, pour t suffisamment petit, F_t est un C^∞-difféomorphisme entre $\mathbb{S}_n$ et la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$.
4. Conclure.

Exercice E.82 On reprend les notations des exercices E.41 et E.76.

Montrer qu'il existe sur Σ_n un champ de vecteurs X de classe C^∞, qui ne s'annule qu'en $2n$ points isolés de Σ_n, et tel qu'au voisinage de chacun de ces points, il existe une carte locale (U, φ) de Σ_n à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que, en tout point (x, y) de cet ouvert,
$$\varphi_*(X_{|U}) = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} .$$

Exercice E.83 Soient $p : M \to N$ un revêtement C^∞ et X un champ de vecteurs complet sur N, de flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Montrer qu'il existe un groupe à un paramètre $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de difféomorphismes C^∞ de M tel que, pour tout t dans $\mathbb{R}$, le diagramme suivant commute
$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_t} & M \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ N & \xrightarrow{\phi_t} & N \end{array} .$$

Exercice E.84 Soit M une variété de classe C^{k+1}, X un champ de vecteurs C^k sur M, et (U, φ) une carte locale de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni des coordonnées canoniques $(x_1, \ldots, x_n)$, et $X_{|U} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ son expression dans la carte locale (U, φ). Si $\varphi : u \mapsto (\varphi_1(u), \ldots, \varphi_n(u))$, alors les applications $\varphi_j = \chi_j \circ \varphi$ s'appelent les *applications coordonnées* de la carte (U, φ).

(1) Montrer que $f_j(u) = T_u\varphi_j(X(u))$ pour tout u dans U.

(2) Soit (V, ψ) une autre carte locale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ muni des coordonnées canoniques $(y_1, \ldots, y_n)$, et $X_{|V} = \sum_{j=1}^n g_j \frac{\partial}{\partial y_j}$ l'expression de X dans cette carte locale. En utilisant (1), montrer la formule de changement de coordonnées suivantes, où $\psi \circ \varphi^{-1}$: $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n))$,
$$g_j = \sum_{i=1}^n f_i \ \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \circ \varphi .$$

Exercice E.85 Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur une variété M.

(1) Montrer qu'il existe une application f de classe C^∞ et partout strictement positive telle que le champ de vecteurs fX soit complet.

(2) Comparer les orbites de X et celles de fX.

Exercice E.86 Dans tout cet exercice, on munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ et de son produit scalaire usuel.

On considère le sous-ensemble M de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (16 - x^2 - y^2)((x-2)^2 + y^2 - 1)((x+2)^2 + y^2 - 1) = z^2\} \ .$$

(1) Montrer que M est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 2.

(2) Montrer que l'intersection de M avec chaque plan de coordonnées (d'équation $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ respectivement) est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 1, dont on calculera le nombre de composantes connexes.

(3) Pour tout u dans M, on note $X(u)$ (respectivement $Z(x)$) la projection orthogonale sur le plan vectoriel tangent à M en u du vecteur $\frac{\partial}{\partial x}$ (respectivement $\frac{\partial}{\partial z}$). Montrer que $X, Z : M \to \mathbb{R}^3$ sont des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M, et trouver les points de M où ils s'annulent.

(4) On considère le groupe Γ d'isométries de $\mathbb{R}^3$ engendré par le retournement autour de l'axe des x (i.e. l'application $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$). Montrer que Γ préserve M et que l'espace topologique quotient $\Gamma \backslash M$ est une variété topologique.

(5) Montrer qu'au voisinage des points $(1, 0, 0)$ et $(3, 0, 0)$ dans M, il existe une carte locale (U, φ) de M à valeurs dans un ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que, en tout point (x, y) de cet ouvert,

$$\varphi_*(X_{|U}) = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \ .$$

(6) Montrer que si ϕ_t est le flot local de X, alors

$$\lim_{t \to \infty} \phi_t(0, y, z) = (4, 0, 0)$$

pour tout $(0, y, z)$ dans M avec $y \neq 0$.

(7) – Question subsidiaire – Montrer que M est homéomorphe à l'espace topologique obtenu à partir de deux copies du tore $\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^2$ privé du disque $B(0, \frac{1}{3})$, en les recollant par l'identité le long des cercles bords de ces disques. Montrer que $\Gamma \backslash M$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$.

Exercice E.87 Soit M une variété C^∞ connexe de dimension $n \geq 2$.

(1) Soient $x, y \in M$. Montrer qu'il existe un difféomorphisme f de classe C^∞ de M qui envoie x sur y. On pourra d'abord traiter le cas où x et y sont proches en utilisant le flot d'un champ de vecteurs bien choisi.

(2) Montrer qu'on peut prendre f *isotope à l'identité*, i.e. telle qu'il existe une *isotopie* de f à id, i.e. une application $F : \mathbb{R} \times M \to M$ de classe C^∞ avec $F_{|\{t\}\times M}$ un C^∞-difféomorphisme de M pour $0 \leq t \leq 1$, $F_{|\{0\}\times M} = \mathrm{id}$ et $F_{|\{1\}\times M} = f$.

(3) Plus généralement, soient $(x_1, \ldots, x_k)$ et $(y_1, \ldots, y_k)$ deux k-uplets de points deux à deux distincts de M. Montrer qu'il existe un C^∞-difféomorphisme f de M tel que $f(x_i) = y_i$ pour $i = 1, \ldots, k$.

(4) Soient $x_1, \ldots, x_k$ des points de M. Montrer qu'il existe U, un ouvert de carte C^∞-difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, les contenant tous.

Exercice E.88 (Théorème de fibration d'Ehresmann) Soient $r \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty\}$, M et N deux variétés de classe C^{r+1}, de dimensions m et n respectivement, et $f : M \to N$ une submersion surjective de classe C^{r+1}.

(1) Montrer (par exemple en utilisant des partitions de l'unité) que pour tout champ de vecteurs Y de classe C^r sur N, il existe au moins un champ de vecteurs X de classe C^r sur M tel que

$$\forall\, x \in M, \qquad T_x f(X(x)) = Y(f(x)) \ .$$

Si $(\phi_{X,t})$ est le flot local du champ de vecteurs X et $(\phi_{Y,t})$ celui de Y, en déduire que pour tout x_0 dans X, si (x, t) est suffisamment proche de $(x_0, 0)$, alors

$$f \circ \phi_{X,t}(x) = \phi_{Y,t} \circ f(x) \ .$$

(2) Soient y_0 dans N et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $T_{y_0}N$. Montrer qu'il existe des champs de vecteurs $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de classe C^r sur N, tels que $Y_i(y_0) = e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Si $\phi_{Y_i,t}$ est le flot local de Y_i, montrer que l'application

$$(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \phi_{Y_1,t_1} \circ \cdots \circ \phi_{Y_n,t_n}(y_0)$$

est un C^r-difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$ sur un voisinage ouvert de y_0 dans N.

(3) Soit y_0 un point de N tel que $F = f^{-1}(y_0)$ soit un sous-espace compact de M. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de y_0 dans N et un C^r-difféomorphisme $\varphi : U \times F \to f^{-1}(U)$ tel que $f \circ \varphi\,(y, x) = y$ pour tout (y, x) dans $U \times F$.

(4) Montrer que si f est propre, alors f est une fibration de classe C^r.

Exercice E.89 Soient M une variété de classe C^∞ compacte, $f : M \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$.

On suppose que I est contenu dans l'image de f, et qu'il ne contient aucune valeur critique de f.

(1) Montrer (par exemple en utilisant des partitions de l'unité) qu'il existe un champ de vecteurs X de classe C^∞ sur M, nul en dehors de $U = f^{-1}(I)$, tel que, pour tout x dans $f^{-1}([a, b])$,

$$T_x f(X(x)) = \frac{\partial}{\partial x} \ .$$

(2) En déduire, en utilisant le flot local de X, qu'il existe un C^∞-difféomorphisme ψ : $f^{-1}(]a,b[) \to f^{-1}(a) \times]a,b[$ tel que $\mathrm{pr}_2 \circ \psi = f$ où pr_2 est la seconde projection.

(3) En déduire que toute application de classe C^∞ du tore $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}$ admet au moins trois points critiques. (On rappelle le théorème de Jordan, qui dit que tout plongement continu du cercle dans le plan euclidien sépare ce plan en deux composantes connexes, et se prolonge continuement en un plongement continu du disque dans ce plan).

(4) Construire une application de classe C^∞ du tore $\mathbb{T}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui admet exactement trois points critiques.

(5) Montrer que toute surface somme connexe de $g \geq 1$ tores $\mathbb{T}^2$ admet une application de classe C^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ayant exactement trois points critiques.

Exercice E.90 (Classification des variétés différentiables de dimension 1**)** Soit M une variété de classe C^∞ connexe de dimension 1, on va montrer que M est difféomorphe à la droite $\mathbb{R}$ ou au cercle $\mathbb{S}_1$.

Dans les trois premières questions, on suppose qu'il existe un champ de vecteurs X de classe C^∞ sur M ne s'annulant pas. Soit (ϕ_t) son flot local. Fixons x_0 dans M, et notons $f : t \mapsto \phi_t(x_0)$, définie sur un intervalle maximal I (ouvert).

1. Montrer que f est une immersion surjective.
2. Supposons que f soit injective. Montrer que f est alors un C^∞-difféomorphisme entre I et M.
3. Si f n'est pas injective, montrer que $I = \mathbb{R}$ et que $f^{-1}(x_0)$ est de la forme $r\mathbb{Z}$ pour un certain $r > 0$. En déduire que f induit un difféomorphisme entre la variété quotient $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ et M.

On revient au cas général. Le groupe $G = \mathbb{R}_+^*$ agit sur l'espace des vecteurs non nuls de TM par multiplication.

a) Montrer que l'espace quotient $\tilde{M}$ de TM par G admet une structure de variété de classe C^∞ de dimension 1, et une application $\tilde{M} \to M$ qui soit un revêtement de classe C^∞ à deux feuillets.

b) Montrer qu'il existe un champ de vecteurs sur $\tilde{M}$ ne s'annulant pas.

c) Conclure.

Exercice E.91 Soit a un élément de $\mathbb{R}^n$. On considère le champ de vecteurs X_a défini par $X_a(y) = a - y$ sur $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer le flot de X_a.
2. Si $b \in \mathbb{R}^n$, calculer le crochet $[X_a, X_b]$ en utilisant la formule explicite de la proposition 4.9 qui fait intervenir les dérivées partielles des coordonnées des champs de vecteurs (cette formule se réécrit sous forme compacte comme

$$[X,Y](x) = dY_x(X(x)) - dX_x(Y(x))$$

si on voit X et Y comme des applications d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$).

3. Retrouver la valeur de $[X_a, X_b]$ en utilisant la formule $[X,Y](x) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t)^*Y(x)$, où ϕ_t est le flot du champ de vecteurs X.
4. Retrouver la valeur de $[X_a, X_b]$ en utilisant cette fois-ci la formule $\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}\phi_t \circ \psi_t \circ \phi_{-t} \circ \psi_{-t}(x) = 2[X,Y](x)$, où (ϕ_t) et (ψ_t) sont les flots locaux des champs de vecteurs X et Y respectivement (voir l'exercice E.93).

Exercice E.92 (1) Définir sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ les champs de vecteurs X_r et X_θ formant en tout point une base orthonormée positive, telle que X_r soit radial sortant. Calculer leur flots locaux. Calculer leur crochet de Lie.

(2) Si (x,y) et (r,θ) sont respectivement les coordonnées cartésiennes et polaires d'un point de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, calculer l'expression de $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, et calculer leur crochet de Lie. Quel est le rapport entre X_r, X_θ et $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}$?

(3) Soient (x,y,z) et (r,θ,φ) respectivement les coordonnées cartésiennes et sphériques d'un point de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Calculer l'expression de $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ en fonction de $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$. Calculer leurs flots locaux et le crochet de Lie des champs de vecteurs $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

Exercice E.93 Soient X et Y deux champs de vecteurs C^∞ sur une variété lisse M, de flot locaux $(\phi_t), (\psi_t)$ respectivement.

(1) Montrer, pour tout x dans M, que

$$\frac{d^2}{dt^2}_{|t=0}\phi_t \circ \psi_t \circ \phi_{-t} \circ \psi_{-t}(x) = 2[X,Y](x) \ .$$

(2) Montrer que $[X,Y] = 0$ si et seulement si les flots locaux ϕ_s et ψ_t commutent pour s et t assez petit.

Exercice E.94 Sur la surface de la Terre, assimilée à une sphère parfaite de rayon 1, on considère sur l'ouvert complémentaire des deux pôles les champs de vecteurs N et E unitaires et pointant respectivement vers le nord et l'est.

1. Calculer $[N,E]$.
2. Si f est l'application $x \mapsto -x$ qui envoie un point sur son antipode, calculer f_*N et f^*N.

Exercice E.95 Soient X et Y deux champs de vecteurs C^∞ sur une variété M de classe C^∞ de dimension 2. Au voisinage de chaque point où ils sont linéairement indépendants, montrer qu'il existe des fonctions C^∞ strictement positives f et g telles que $[fX, gY] = 0$.

Exercice E.96 On rappelle que, si X et Y sont des champs de vecteurs C^∞ sur un voisinage de x dans une variété C^∞, de flots locaux respectifs Φ^X et Φ^Y, alors

$$[X,Y](x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^2}\Phi_t^Y \circ \Phi_t^X \circ \Phi_{-t}^Y \circ \Phi_{-t}^X(x).$$

1. Soient $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$ des champs de vecteurs C^∞ complets sur une variété connexe M de classe C^∞ de dimension n, partout linéairement indépendants. Montrer que le sous-groupe des difféomorphismes de M engendré par le flot des champs de vecteurs Y_i agit transitivement sur M, i.e. pour tous $x, y \in M$, il existe un entier k, des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k$ choisis parmi les Y_i (un champ Y_i peut être choisi plusieurs fois), et des temps $t_1, \ldots, t_k$ tels que $\Phi_{t_1}^{X_1} \circ \cdots \circ \Phi_{t_k}^{X_k}(x) = y$.
2. Soient Y_1 et Y_2 des champs de vecteurs C^∞ complets sur une variété M de classe C^∞ connexe de dimension 3 tels que $Y_1(x), Y_2(x), [Y_1, Y_2](x)$ engendrent T_xM en tout point.
   a) Donner un exemple d'une telle variété.
   b) Montrer que le sous-groupe des difféomorphismes de M engendré par le flot des champs de vecteurs Y_1 et Y_2 agit transitivement sur M.

      On pourra pour cela fixer $x \in M$, noter $F(t_1, t_2, s) = \Phi_{t_1}^{Y_1} \circ \Phi_{t_2}^{Y_2} \circ \Phi_s^{[Y_1,Y_2]}(x)$ et $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la projection sur la troisième coordonnée, et montrer que $\pi \circ F^{-1} \circ \Phi_t^{Y_2} \circ \Phi_t^{Y_1} \circ \Phi_{-t}^{Y_2} \circ \Phi_{-t}^{Y_1}(x)$ est une surjection sur un ensemble de la forme $[0, \epsilon]$ dans $\mathbb{R}$.
   c) En déduire que pour tous x, y dans M, il existe une courbe $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ de x à y, de classe C^∞ par morceaux, telle que pour tout t, le vecteur $\dot{\gamma}(t)$ appartienne au plan réel engendré par $Y_1(\gamma(t))$ et $Y_2(\gamma(t))$.

Exercice E.97 1. Soient M et N deux variétés connexes de classe C^∞ et $f : M \to N$ une submersion C^∞. Montrer qu'il existe un feuilletage C^∞ sur M dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres $f^{-1}(x)$ pour x dans N.

2. Dans la situation de la question précédente, les feuilles sont-elles nécessairement toutes difféomorphes ?
3. Montrer qu'il existe des feuilletages qui ne sont pas de cette forme.

Exercice E.98 Soient M une variété de classe C^∞, Δ un champ de p-plans C^∞ intégrable, tangent à un feuilletage $\mathcal{F}$, et X un champ de vecteurs C^∞ sur M. Montrer que X est tangent à Δ si et seulement si toute courbe intégrale de X est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$.

Exercice E.99 Soit M une variété de classe C^∞.

1. Soit f un C^∞-difféomorphisme de M. On définit un espace topologique $\tilde{M}$ en quotientant $M \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence engendrée par $(x, 0) \sim (f(x), 1)$ pour tout x dans M. Montrer que $\tilde{M}$ est naturellement munie d'une structure de variété feuilletée C^∞, dont les feuilles sont de dimension 1.
2. Décrire $\tilde{M}$ et son feuilletage lorsque f est la rotation d'angle α sur le cercle $\mathbb{S}_1$.
3. Montrer que, pour des choix judicieux de M et f, la variété $\tilde{M}$ est C^∞-difféomorphe au ruban de Möbius.

4. On suppose que f est *isotope à l'identité*, i.e. qu'il existe une application F de l'intervalle $]-\epsilon, 1+\epsilon[$ dans M de classe C^∞ telle que l'application $f_t : M \to M$ définie par $f_t(x) = F(t,x)$ soit un C^∞-difféomorphisme pour tout t, avec $f_t = \mathrm{Id}$ pour $t \leq 0$ et $f_t = f$ pour $t \geq 1$. Montrer que $\tilde{M}$ est alors difféomorphe à $M \times \mathbb{S}_1$.
5. La donnée d'un difféomorphisme f de M équivaut à la donnée d'une action de $\mathbb{Z}$ sur M par difféomorphismes (l'action de n étant donnée par f^n). Étendre la construction précédente au cas d'une action de $\mathbb{Z}^d$ par difféomorphismes.

Exercice E.100 Soit M une variété C^∞, munie d'une action libre du cercle qui est C^∞ (i.e. telle que l'application de $\mathbb{R} \times M \to M$ définie par $(t,x) \mapsto e^{2i\pi t} \cdot x$ soit C^∞).

1. Montrer que si $\phi_t : M \to M$ est l'application définie par $x \mapsto e^{2i\pi t} \cdot x$, alors $X : x \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0}\phi_t(x)$ est un champ de vecteurs complet C^∞ qui ne s'annule pas sur M.
2. En déduire qu'il existe un feuilletage C^∞ de M dont les feuilles sont les orbites de l'action du cercle.

Exercice E.101 Montrer qu'il existe un feuilletage C^∞ de $\mathbb{R}^3$ dont les feuilles sont toutes des cylindres.

Exercice E.102 (1) On rappelle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{S}_p = \{(x_0, x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \ : \ x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. On note φ l'application de la sphère $\mathbb{S}_n$ dans la sphère $\mathbb{S}_{n+1}$ définie par $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0)$, et $\overline{\varphi}$ l'application de l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_n/\{\pm 1\}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_{n+1}/\{\pm 1\}$ induite par passage au quotient. On note M l'image de $\overline{\varphi}$.

a) Montrer que M est une sous-variété C^∞ de codimension 1 de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, qui est compacte et connexe.

b) Montrer qu'il n'existe pas de champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout x dans M, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}X(x)$ et T_xM de $T_x\,\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ soient supplémentaires.

(2) Soit G le sous-groupe du groupe des isométries du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ engendré par les applications $\alpha : (x,y) \mapsto (x+1, y)$ et $\beta : (x,y) \mapsto (-x, y+1)$.

a) Montrer que l'action de G sur $\mathbb{R}^2$ est libre et propre, et que chaque élément de G agit par C^∞-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathbb{K}$, et on appelle *bouteille de Klein*, la variété quotient $G\backslash\mathbb{R}^2$, et $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ la projection canonique.

b) Montrer que l'application $(x,y) \mapsto y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ induit par passage au quotient une fibration ψ de classe C^∞ de $\mathbb{K}$ dans le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

c) On note N l'image de $\{0\} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ par π. Montrer qu'il n'existe pas de champ de vecteurs Y de classe C^∞ sur $\mathbb{K}$ tel que pour tout x dans N, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}Y(x)$ et T_xN de $T_x\mathbb{K}$ soient supplémentaires.

d) Est-ce que $\mathbb{K}$ est parallélisable ?

e) Si $\mathcal{L}_\theta$ est le feuilletage C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dont les feuilles sont les droites affines de pentes θ, montrer qu'il existe un feuilletage $\mathcal{F}_\theta$ de classe C^∞ de $\mathbb{K}$ tel que $f^*\mathcal{F}_\theta = \mathcal{L}_\theta$.

(3) Soient P une variété C^∞ de dimension $n+1$ et Q une variété C^∞ de dimension 1. Soit $f : P \to Q$ une fibration C^∞. Montrer que pour tout q dans Q, il existe un champ

de vecteurs Z de classe C^∞ sur P, tel que, pour tout x dans $F = f^{-1}(q)$, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}Z(x)$ et T_xF de T_xP soient supplémentaires.

(4) Soit $n \geq 2$, et M une sous-variété C^∞ compacte connexe de codimension 1 de $\mathbb{R}^n$.

a) Pour tous x, y dans M et tous voisinages ouvert U et V de x et y respectivement, montrer qu'il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞, ne rencontrant pas M, et tel que $\gamma(0) \in U$ et $\gamma(1) \in V$. En déduire que $\mathbb{R}^n - M$ possède au plus deux composantes connexes.

b) Montrer que $\mathbb{R}^n - M$ possède exactement deux composantes connexes, et que M est la frontière de chacune d'entre elles.

c) Montrer qu'il existe un champ de vecteurs X de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout x dans M, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}X(x)$ et T_xM de $T_x\,\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ soient supplémentaires.

Exercice E.103 On note $\overline{A}$ l'adhérence d'une partie A d'un espace topologique. Soient p et q deux éléments de $\mathbb{N} - \{0\}$.

(1) Soient $a \in [0, +\infty[$ et $b \in \mathbb{R}$. On considère le sous-espace $M_{a,b,p,q}$ de $(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R}$ formé des triplets (u, v, w) tels que

$$\left((\sqrt{u^2+v^2} - 2) + iw\right)^p = a\, e^{ib} \left(\frac{u+iv}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)^q ,$$

où i est le nombre complexe usuel.

a) Montrer que $M_{a,b,p,q}$ est une sous-variété C^∞ de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

b) Calculer le nombre d'intersection de $M_{a,b,p,q}$ et $M_{a',b',p,q}$.

(2) Sur $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées canoniques (x, y, z), on considère les champs de vecteurs

$$A(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$B(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$C(x,y,z) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} ,$$

et on note $\Delta(x, y, z)$ le sous-espace vectoriel engendré par $A(x, y, z), B(x, y, z)$ et $C(x, y, z)$.

a) Montrer que $(x, y, z) \mapsto \Delta(x, y, z)$ est un champ de 2-plans de classe C^∞ intégrable sur $\mathbb{R}^3$. On notera $\mathcal{F}$ le feuilletage C^∞ auquel est tangent Δ.

b) Calculer les flots des champs de vecteurs A et C. Montrer que A et C sont complets.

c) Soit N une variété C^∞ munie d'un feuilletage $\mathcal{L}$ de classe C^∞. Soit D un champ de vecteurs complets sur M. Montrer que D est tangent à $\mathcal{L}$ (i.e. $\forall x \in M,\ D(x) \in T_x\mathcal{L}_x$, où L_x est la feuille de $\mathcal{L}$ passant par x) si et seulement si son flot $(\phi_t^D)_{t\in\mathbb{R}}$ préserve chaque feuille de $\mathcal{L}$ (i.e. $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in M,\ \phi_t^D(\mathcal{L}_x) = \mathcal{L}_x$). En déduire que les flots de A, B et C préservent chaque feuille de $\mathcal{F}$.

d) En déduire, pour tout (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^3$, une équation cartésienne de la feuille de $\mathcal{F}$ passant par (x_0, y_0, z_0). Montrer que chaque feuille de $\mathcal{F}$ est une sous-variété C^∞ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

(3) On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ formé des triplets (u, v, w) tels que $(\sqrt{u^2+v^2}-2)^2+w^2 < 1$, et $T = \overline{U} - U$ la frontière de U dans $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que T est une sous-variété C^∞ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'il existe une fibration $T \to \mathbb{S}_1$ de classe C^∞ telle que $M_{1,b,p,q}$ soit une fibre de cette fibration pour tout b dans $\mathbb{R}$.

(4) Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application

$$\varphi : (x, y, z) \mapsto \left((\frac{x}{1+x^2+y^2} + 2)\cos z,\ (\frac{x}{1+x^2+y^2} + 2)\sin z,\ \frac{y}{1+x^2+y^2} \right) .$$

a) Montrer que φ est un revêtement C^∞ de $\mathbb{R}^3$ dans U.

b) Montrer qu'il existe un feuilletage $\mathcal{R}$ de classe C^∞ dans U tel que $\varphi^*\mathcal{R} = \mathcal{F}$, et des champs de vecteurs C' et D' sur U tels que $\varphi^*C' = C$ et $\varphi^*D' = \frac{\partial}{\partial z}$. Montrer que D' n'est pas tangent à $\mathcal{R}$.

(5) a) Montrer que pour toute feuille ℓ de $\mathcal{R}$, on a $\overline{\ell} - \ell = T$.

b) Montrer qu'il existe un feuilletage $\mathcal{S}_{p,q}$ de classe C^∞ de U tel que $M_{a,b,p,q}$ soit une feuille de $\mathcal{S}_{p,q}$ pour tout a dans $[0, 1[$ et tout b dans $\mathbb{R}$.

c) Existe-t-il une fibration de classe C^∞ de U sur une variété N de classe C^∞ telle que $M_{a,b,p,q}$ soit une fibre de cette fibration pour tout a dans $[0, 1[$ et tout b dans $\mathbb{R}$?

(6) On identifie $\mathbb{R}^3$ avec le complémentaire du pôle nord, noté ∞, dans la sphère $\mathbb{S}_3$ par projection stéréographique. Montrer qu'il existe un C^∞-difféomorphisme involutif ψ de la sphère $\mathbb{S}_3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ échangeant les deux composantes connexes de $\mathbb{S}_3 - T$.

(7) Montrer qu'il existe un feuilletage $\mathcal{R}'$ de classe C^∞ de $\mathbb{S}_3$, invariant par ψ, dont T est une feuille, et dont les feuilles dans U sont celles de $\mathcal{R}$. Montrer qu'il existe un feuilletage $\mathcal{S}'$ de classe C^∞ de $\mathbb{S}_3$, dont les feuilles dans U sont celles de $\mathcal{S}_{p,q}$.

(Pour la culture, le feuilletage $\mathcal{R}$ est appelé un *feuilletage de Reeb* de U, et $\mathcal{S}$ un *fibré de Seifert* de U.)

Exercice E.104 Les questions (1) à (5) sont indépendantes et peuvent être résolues dans n'importe quel ordre. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on note $||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| = 1\}$, $\mathrm{SO}(n) = \{x \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^t x = x^{-1}\}$ et $\mathrm{tr}\ X$ la trace d'une matrice carrée X. Pour tout g dans $\mathrm{SO}(3)$, on note encore $g : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$ la restriction à $\mathbb{S}_2$ de l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ de matrice g. Si M est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$, on considère les champs de vecteurs X de classe C^∞ sur M comme les applications $X : M \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telles que, pour tout x dans M, le vecteur $X(x)$ appartienne au sous-espace tangent T_xM de M en x.

(1) Soit $M_1 = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{S}_3 \ : \ bd = ac\}$. Montrer que M_1 est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{S}_3$ de dimension 2.

(2) a) On considère l'application f de $\mathbb{S}_2$ dans $\mathrm{SO}(3)$ qui à $x \in \mathbb{S}_2$ associe la rotation d'angle π et d'axe $\mathbb{R}x$. Montrer que f est une immersion C^∞, et que l'image de f est une sous-variété C^∞ de $\mathrm{SO}(3)$, qui est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, soit $N_c = \{x \in \mathrm{SO}(3) \ : \ \mathrm{tr}\ x = c\}$. Montrer que N_c est une sous-variété C^∞ de $\mathrm{SO}(3)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

(3) a) Soient $p, n \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p \leq n$, et M une sous-variété C^∞ de dimension p de $\mathbb{R}^n$. On note

$$T^1M = \{(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ x \in M, \ v \in T_xM, \ ||v|| = 1\}$$

et $\pi : T^1M \to M$ l'application $(x, v) \mapsto x$. Montrer que T^1M est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de dimension $2p - 1$, et que π est une fibration de fibre $\mathbb{S}_{p-1}$. Montrer que $T^1\mathbb{S}_1$ est C^∞-difféomorphe à la variété somme disjointe $\mathbb{S}_1 \coprod \mathbb{S}_1$.

b) Pour tout $g \in SO(3)$, montrer que l'application tangente Tg de $g : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$ envoie $T^1\mathbb{S}_2$ dans $T^1\mathbb{S}_2$, et qu'il existe un C^∞-difféomorphisme $\Phi : T^1\mathbb{S}_2 \to SO(3)$ tel que $\Phi \circ Tg = g\Phi$.

(4) On identifie $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbb{C}^2$ par l'application $(a, b, c, d) \mapsto (w = a + ib, z = c + id)$. On note C_1 et C_2 les cercles intersections de $\mathbb{S}_3$ avec les plans d'équations $w = 0$ et $z = 0$. Pour tout $(w, z) \in \mathbb{S}_3 \subset \mathbb{C}^2$, on note $X(w, z) = (iw, iz)$ et $Y(w, z) = (iw, -iz)$.

a) Montrer que les applications $X, Y : \mathbb{S}_3 \to \mathbb{C}^2$ ainsi définies sont des champs de vecteurs C^∞ complets sur $\mathbb{S}_3$. Calculer leur crochet $[X, Y]$.

b) Pour tout (w, z) dans $\mathbb{S}_3$, notons $\Delta_{w,z}$ le sous-espace vectoriel de $T_{(w,z)}\mathbb{S}_3$ engendré par $X(w, z)$ et $Y(w, z)$. Montrer que $\Delta : (w, z) \mapsto \Delta_{w,z}$ est un champ de plans C^∞ intégrable sur $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$. Si $\mathcal{F}$ est le feuilletage de $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$ tangent à Δ, montrer que chaque courbe intégrale de X ou de Y est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$.

c) Soient $(\phi_{X,t})_{t\in\mathbb{R}}, (\phi_{Y,t})_{t\in\mathbb{R}}$ les flots des champs de vecteurs X et Y, $(w, z) \in \mathbb{S}_3$ et $f_{w,z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}_3$ l'application $(s, t) \to \phi_{X,s} \circ \phi_{Y,t}(w, z)$. Montrer que si $(w, z) \in \mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$, alors l'image $M_{w,z}$ de $f_{w,z}$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{S}_3$ qui est C^∞-difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2$, et égale à la feuille $\mathcal{F}_{(w,z)}$ de $\mathcal{F}$ passant par (x, z).

(5) Soit M une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$.

a) Si X est un champ de vecteurs C^∞ sur M, montrer que l'application $x \mapsto (x, X(x))$ de M dans la sous-variété TM de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est un plongement C^∞, dont on notera N_X l'image. En particulier, si $X = 0$ désigne le champ de vecteurs nuls, alors N_0 est l'image de la section nulle de TM.

b) Montrer que $T_xX : T_xM \to \mathbb{R}^n$ est à valeurs dans T_xM, et que $T_{(x,v)}TM = T_xM \times T_xM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ pour tout (x, v) dans TM.

c) Si A et B sont deux sous-variétés C^∞ de M, nous dirons dans ce problème que A et B sont *transverses* si pour tout x dans $A \cap B$, les sous-espaces vectoriels T_xA et T_xB de T_xM sont supplémentaires. Montrer que si A et B sont deux sous-variétés compactes transverses de M, alors $A \cap B$ est un ensemble fini.

d) Si X est un champ de vecteurs C^∞ sur M, montrer que N_X et N_0 sont transverses dans TM si et seulement si $T_xX : T_xM \to T_xM$ est surjective pour tout zéro x de X.

e) Montrer que l'application $X : (a, b, c) \mapsto (0, -c, b)$ de $\mathbb{S}_2$ dans $\mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^3$, tel que N_X et N_0 soient transverses dans $T\mathbb{S}_2$ et se rencontrent en deux points.

f) *Question subsidiaire :* Existe-t-il un champ de vecteurs X sur $\mathbb{S}_2$ tel que N_X et N_0 soient transverses et ne se rencontrent qu'en 0 ou 1 point ?

(6) Soit G le groupe produit $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$, qui agit sur $\mathbb{C}^2$ par $(\epsilon, \eta) \cdot (w, z) = (\epsilon w, \eta z)$ pour tous $(\epsilon, \eta) \in G$ et $(w, z) \in \mathbb{C}^2$.

a) Montrer qu'il existe une unique structure de variété C^∞ sur l'espace topologique quotient $Q = G\backslash(\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2))$ telle que la projection canonique $\pi : \mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2) \to Q$ soit un C^∞-difféomorphisme local.

b) Montrer que l'image par cette projection canonique de la sous-variété $M_{w,z}$ définie en (4) c) est une sous-variété C^∞ de Q qui est C^∞-difféomorphe au tore $\mathbb{T}_2$.

(7) On identifie $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ par l'application $(a, b, c) \mapsto (a + ib, c)$, et on note $C_3 = \mathbb{S}_1 \times \{0\}$ le cercle intersection de $\mathbb{S}_2$ avec le plan d'équation $c = 0$.

a) Montrer que l'application Ψ de $\mathbb{S}_3$ dans $\mathbb{S}_2$ définie par $(w, z) \mapsto (2wz, |w|^2 - |z|^2)$ est une fibration C^∞ de fibre le cercle $\mathbb{S}_1$. Elle s'appelle la *fibration de Hopf* de $\mathbb{S}_3$ sur $\mathbb{S}_2$.

b) Montrer que l'application $R : \mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_3$ définie par $R : (w, z) \mapsto \left(\frac{w+\overline{z}}{\sqrt{2}}, \frac{w-\overline{z}}{\sqrt{2}}\right)$ est un C^∞-difféomorphisme. Montrer, avec M_1 la sous-variété de la question (1) et $\mathcal{F}_{(w,z)}$ la feuille du feuilletage $\mathcal{F}$ défini dans la question (4), que

$$R(M_1) = \mathcal{F}_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})} = \Psi^{-1}(C_3) \ ,$$

et plus généralement que les feuilles de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$ sont les images réciproques des cercles horizontaux de $\mathbb{S}_2$ par Ψ.

c) Montrer qu'il existe un revêtement $\widetilde{\Psi}$ de classe C^∞, à deux feuillets, de $\mathbb{S}_3$ dans $T^1\mathbb{S}_2$. En déduire que SO(3) est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

d) Montrer que pour tout c dans $]-1, 3[$, l'application de N_c (défini dans la question (2)) dans $\mathbb{S}_2$ qui à un élément x de N_c associe le vecteur unitaire $u(x)$ de valeur propre 1 pour x, dont la rotation dans le plan orthogonal orienté (grâce à l'orientation de $\mathbb{R}^3$) de x est positive, est un C^∞-difféomorphisme. Montrer que l'application de $\mathrm{SO}(3) - N_{-1}$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $x \mapsto \frac{3-\mathrm{tr}\, x}{1+\mathrm{tr}\, x}\, u(x)$ est un C^∞-difféomorphisme.

4.11 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.78 Si $\theta : M \times \mathbb{R}^n \to TM$ est une trivialisation C^k du fibré vectoriel TM et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, alors les applications $X_i : x \mapsto \theta(x, e_i)$ sont des champs de vecteurs C^k sur M, qui forment une base du $C^k(M, \mathbb{R})$-module $\Gamma_k(TM)$. Réciproquement, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base du $C^k(M, \mathbb{R})$-module $\Gamma_k(TM)$, alors pour tout x dans M, le n-uplet $(X_1(x), \ldots, X_n(x))$ engendre T_xM (come $k \leq \infty$, tout vecteur de T_xM peut se prolonger en un champ de vecteurs C^k en travaillant dans une carte locale avec des fonctions cloches), donc est une base de T_xM. Par conséquent, l'application $\theta : M \times \mathbb{R}^n \to TM$ définie par

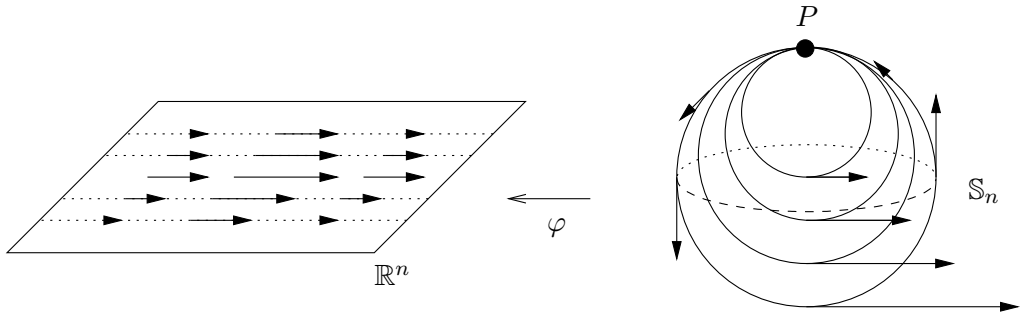
$$\theta(x, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(x)$$

est une trivialisation C^k de TM.

Schème E.80 Si $\varphi : \mathbb{S}_n - \{P\} \to \mathbb{R}^n$ est la projection stéréographique de pôle Nord, si $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne usuelle, alors

$$\varphi^* \left(e^{-||x||^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \ ,$$

prolongé par 0 en P, convient.



Schème E.81 (1) Ceci a été vu au paragraphe 4.1. En coordonnées réelles, un exemple de tel champ de vecteurs est donné par

$$X(x_1, y_1, \ldots, x_{p+1}, y_{p+1}) = (-y_2, x_1, \ldots, -y_{p+1}, x_{p+1}).$$

(2) Sur un voisinage de K, la norme (d'application linéaire) de la différentielle dv_x de v est bornée par une constante C. Alors $dF_t(x) = \mathrm{id} + t dv_x$ est inversible dès que $|t| < 1/C$, comme le montre la formule $(\mathrm{id} - A)^{-1} = \sum A^n$ si $||A|| < 1$.

Sur ce voisinage, v est également C'-lipschitzienne pour une certaine constante C'. Si $|t| < 1/C'$, montrons que F_t est injective. En effet, si $x_n + tv(x_n) = y_n + tv(y_n)$, alors

$$|x_n - y_n| = |t||v(x_n) - v(y_n)| \leq C'|t||x_n - y_n|$$

donc $x_n = y_n$.

Quitte à prendre un voisinage U un peu plus petit, on peut donc supposer que $\overline{U}$ est compact et que F_t est une immersion injective sur $\overline{U}$. En particulier, c'est une bijection continue du compact $\overline{U}$ sur son image, donc un homéomorphisme. Par conséquent, F_t est encore un homéomorphisme sur U, c'est donc un difféomorphisme.

La formule du changement de variables pour la mesure de Lebesgue μ donne alors

$$\mu(F_t(K)) = \int_{F_t(K)} dx = \int_K JF_t(y)\, dy,$$

car $JF_t(y)$ est positif pour t assez petit, étant égal à 1 en $t = 0$ et continu. Mais $dF_t(y) = \mathrm{id} + t dv_y$, et son déterminant est donc un polynôme en t. En intégrant, on obtient que $\mu(F_t(K))$ est bien un polynôme en t.

(3) Pour être dans le cadre de la question précédente, on prolonge v sur un voisinage de $\mathbb{S}_n$ par homogénéité, en posant $v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Pour t assez petit, F_t est donc un difféomorphisme sur un petit voisinage de $\mathbb{S}_n$, et en particulier une immersion.

On a

$$||F_t(x)||^2 = ||x||^2 + t^2||v(x)||^2 = (1 + t^2)||x||^2.$$

Ainsi, F_t se restreint en une application de $\mathbb{S}_n$ dans $\sqrt{1+t^2}\ \mathbb{S}_n$. C'est une immersion (comme restriction d'une immersion à valeurs dans un espace plus grand) injective, donc un plongement, car $\mathbb{S}_n$ est compacte. Son image est ouverte par le théorème d'inversion locale, et fermée par compacité, c'est donc $\sqrt{1+t^2}\ \mathbb{S}_n$ par connexité.

(3) Par homogénéité, F_t est un difféomorphisme entre les sphères $a\ \mathbb{S}_n$ et $\sqrt{1+t^2}\, a\ \mathbb{S}_n$. Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ 1/2 \leq ||x|| \leq 2\}$. Alors l'image de K par F_t est $\sqrt{1+t^2}\, K$, de volume

$(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}\mu(K)$. D'après la deuxième question, c'est un polynôme en t, donc $\frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}$, i.e., n est impair.

Finalement, s'il existe un champ de vecteurs C^∞ partout non nul sur $\mathbb{S}_n$, on peut le normaliser de manière à ce qu'il soit partout de norme 1 (et encore C^∞), et l'argument précédent montre donc que n est impair.

Schème E.84 (1) Comme $\varphi_* X$ est un champ de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a vu au paragraphe 4.2.2 que pour tout x dans $\varphi(U)$,

$$\varphi_* X(x) = \sum_{j=1}^n T_x\chi_j(\varphi_* X(x)) X_{e_j} \ .$$

Par la formule pour l'image directe d'un champ de vecteurs, et le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\varphi_* X(x) = \sum_{j=1}^n T_x\chi_j \ T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi(X(\varphi^{-1}(x)))X_{e_j} = \sum_{j=1}^n T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi_j(X(\varphi^{-1}(x)))X_{e_j} \ .$$

Comme $\frac{\partial}{\partial x_j} = \varphi^* X_{e_j}$, le résultat s'obtient alors en appliquant φ^*, par le fait que $\varphi^*(gZ) = (g\circ\varphi)(\varphi^* Z)$.

(2) Avec les notations de l'énoncé, pour tout u dans $U \cap V$, on a par la question (1) appliquée à (V, ψ),

$$\begin{aligned} g_j(u) = T_u\psi_j(X(u)) = T_u\psi_j\left(\sum_{i=1}^n f_i(u)\ \varphi^* X_{e_i}(u)\right) &= \sum_{i=1}^n \ f_i(u)\ T_u\psi_j \circ (T_u\varphi)^{-1}(e_i) \\ = \sum_{i=1}^n \ f_i(u)\ T_{\varphi(u)}(\psi_j\circ\varphi^{-1})(e_i) &= \sum_{i=1}^n \ f_i(u)\ \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(\varphi(u)) \ . \end{aligned}$$

Schème E.85 (1) Soit K_n une suite croissante de compacts telle que K_n soit inclus dans l'intérieur de K_{n+1} et $\bigcup K_n = M$. Comme $L_n = K_n - \overset{\circ}{K}_{n-1}$ est compact, le flot de X est défini sur un temps ϵ_n sur L_n. Quitte à réduire ϵ_n, on peut même imposer que les orbites partant de L_n restent dans K_{n+1} pendant un temps au moins ϵ_n.

Si $f \leq \epsilon_n$ sur L_n, on en déduit que les orbites de fX partant d'un point de L_n sont définies pour un temps au moins 1, et restent dans K_{n+1} pendant ce temps. Il suffit donc de choisir une fonction f telle que $f \leq \epsilon_n$ sur chaque L_n pour conclure, ce qui est aisé à construire en utilisant une partition de l'unité.

(2) Les orbites sont les mêmes, avec simplement un reparamétrage de la vitesse de parcours.

Schème E.86 (1) Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = (16 - x^2 - y^2)((x-2)^2 + y^2 - 1)((x+2)^2 + y^2 - 1) - z^2 \ .$$

Elle est de classe C^∞, car polynomiale. En particulier, $M = f^{-1}(0)$ est un fermé. Il est contenu dans un borné, car si $(x,y,z) \in M$, alors $x^2 + y^2 \leq 16$, par positivité de z^2 et le fait que les disques d'équations $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ et $(x+2)^2 + y^2 \leq 1$ soient contenus

dans le disque d'équation $x^2 + y^2 \leq 16$, et $|z|$ est borné en fonction de x, y. Donc M est compact.

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -2z$$

ne s'annule pas si $z \neq 0$, l'application f est une submersion en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\})$. Posons

$$A = 16 - x^2 - y^2, \quad B = (x-2)^2 + y^2 - 1, \quad C = (x+2)^2 + y^2 - 1 \ .$$

Un petit calcul montre que

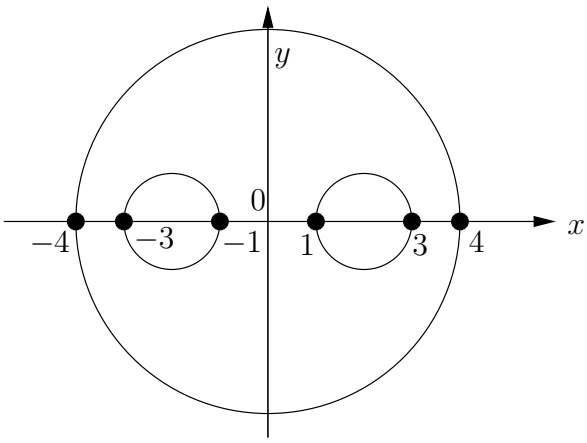
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y(-BC + AC + AB) \ .$$

ainsi que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xBC + 2(x-2)AC + 2(x+2)AB \ .$$

Soit $(x, y, z) \in M$. Si $z = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$ ou $C = 0$. Ces trois égalités sont exclusives, car les cercles de $\mathbb{R}^2$ qu'elles définissent sont deux à deux disjoints. En particulier, $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne s'annule pas en $(x, y, 0) \in M$ si $y \neq 0$. De plus, si $y = z = 0$, alors $x = \pm 4, \pm 3, \pm 1$, et (en utilisant l'invariance par $x \mapsto -x$ de f pour éviter les calculs inutiles), on a $\frac{\partial f}{\partial x} = \pm 840, \pm 126, \pm 240$ respectivement qui est non nul. Donc f est une submersion en (et donc au voisinage de) tout point de $M = f^{-1}(0)$. Le point 0 de $\mathbb{R}$ est une valeur atteinte, car $f(4, 0, 0) = 0$. Par le théorème des submersions, M est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension $3 - 1 = 2$.

(2) L'intersection de M avec le plan d'équation $z = 0$ est la réunion des trois cercles de ce plan d'équations $x^2 + y^2 = 16$, $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $(x+2)^2 + y^2 = 1$ que nous avons déjà dit être deux à deux disjoints, donc c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 1 ayant trois composantes connexes.



Un petit calcul montre que l'intersection de M avec le plan d'équation $y = 0$ est le lieu d'équation, dans ce plan,

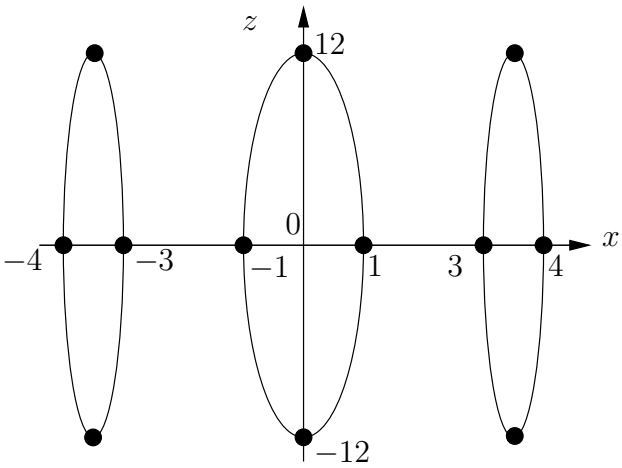
$$z^2 = (16 - x^2)(x^2 - 9)(x^2 - 1) \ .$$

Par un raisonnement analogue à celui de (1), c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 1. Par symétrie par $z \mapsto -z$, elle est la réunion du graphe de la fonction

$$z \mapsto z(x) = [(16 - x^2)(x^2 - 9)(x^2 - 1)]^{1/2} = [-(x+4)(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)(x-4)]^{1/2}$$

et de son image par $z \mapsto -z$. Cette fonction n'est définie que si $x \in [-4, -3] \cup [-1, +1] \cup [3, 4]$, et possède des tangentes verticales en les seuls points où elle s'annule, qui sont en

$x = -4, -3, -1, 1, 3, 4$. Comme le graphe d'une application continue de domaine connexe est connexe, la courbe intersection de M avec le plan d'équation $y = 0$ a donc trois composantes connexes.



Pour usage futur, notons que sur $]-4,-3[\,\cup\,]-1,+1[\,\cup\,]3,4[$, on a $z(x) > 0$ et

$$z'(x) = \frac{x}{z}(-3x^4 + 52x^2 - 169) \ ,$$

donc $z'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\frac{26\pm13}{3}}$, i.e. $x = \pm\sqrt{13}$ vu le domaine. Donc les seuls extréma de $z(x)$ sont en $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{13}$, de valeurs toutes égales à 12.

De même, l'intersection de M avec le plan d'équation $x = 0$, dont l'équation dans ce plan est

$$z^2 = (16 - y^2)(y^2 + 3)^2 \ ,$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ et de dimension 1. Par symétrie par $z \mapsto -z$, elle est la réunion du graphe de la fonction

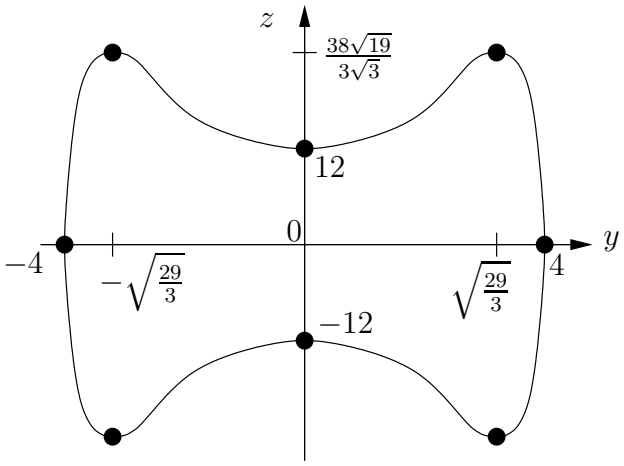
$$z \mapsto z(y) = [16 - y^2]^{1/2}(y^2 + 3)$$

et de son image par $z \mapsto -z$, dont le domaine de définition est $[-4, +4]$, connexe, et qui s'annule en $y = -4, 4$, donc l'intersection de M avec le plan d'équation $x = 0$ est connexe.

Pour usage futur, notons que sur $]-4,4[$, on a $z(y) > 0$ et

$$z'(y) = \frac{y}{z}(y^2 + 3)(29 - 3y^2) \ .$$

Donc les seuls maxima de $z(y)$ sont en $y = 0$ et $y = \pm\sqrt{29/3}$, de valeurs respectivement égales à 12 et $\frac{38\sqrt{19}}{3\sqrt{3}} > 12$. Dans le dessin ci-contre, les coordonnées ne sont pas linéaires.



(3) L'application N de M dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$u \mapsto N(u) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

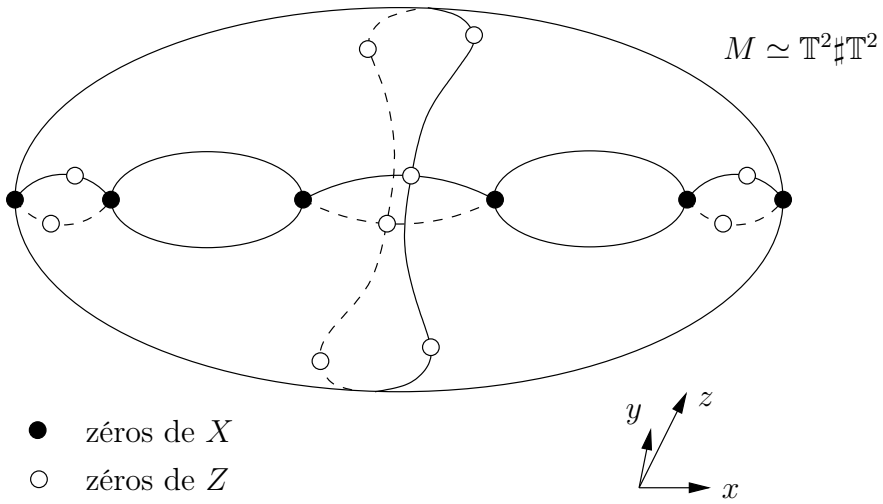
est de classe C^∞, ne s'annule pas, et $N(u)$ est orthogonal au plan tangent à M en u. Donc le champ de vecteurs X est l'application

$$u \mapsto X(U) = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\langle \frac{\partial}{\partial x} | N(u) \rangle}{\langle N(u) | N(u) \rangle} N(u) \ ,$$

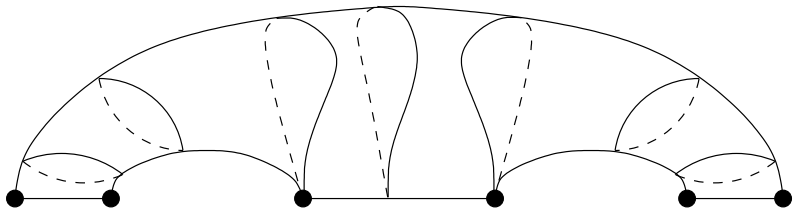
qui est de classe C^∞. Le champ de vecteurs X s'annule en u si et seulement si $X(u)$ et $N(u)$ sont colinéaires, i.e. si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, donc si et seulement si $z = 0, y = 0$ et $x = -4, -3, -1, 1, 3, 4$ par (2), soit 6 zéros pour X.

[Une autre manière de montrer la régularité C^∞ est la suivante. L'application d'un voisinage ouvert suffisamment petit U de M dans la variété $\mathcal{R}_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ des applications linéaires de rang 2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ (voir l'exercice E.49) qui à un point u de U associe $d\varphi_{\varphi^{-1}(u)}$ où $\varphi : V \to U$ est un paramétrage local de M, est de classe C^∞. L'application de la variété $\mathcal{R}_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dans la variété grassmannienne $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^3)$ des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$, qui à une application linéaire ℓ associe $\operatorname{Im} \ell$, est de classe C^∞ (voir l'exercice E.49). L'application de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^3)$ dans l'espace vectoriel de dimension finie $\operatorname{End}(\mathbb{R}^3)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, qui à un plan vectoriel P associe le projecteur orthogonal sur P, est de classe C^∞ (voir l'exercice E.48). L'application d'évaluation de $\operatorname{End}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, définie par $(f, u) \mapsto f(u)$, est bilinéaire, donc de classe C^∞. Comme restriction à la sous-variété M d'une composition d'applications de classe C^∞, le champ de vecteurs $X : M \to \mathbb{R}^3$ est bien C^∞.]

De même, le champ de vecteurs Z sur M, projection orthogonale de $\frac{\partial}{\partial z}$ sur les plans tangents à M, est C^∞ et s'annule en $(x, y, z) \in M$ si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Supposons x et y non nuls (les seuls points où le plan tangent M est horizontal sinon sont $(\pm\sqrt{13}, 0, \pm 12), (0, 0, \pm 12), (0, \pm\sqrt{29/3}, \pm\frac{38\sqrt{19}}{3})$ par (2), soit 10 zéros pour Z). Compte tenu des formules de (1), l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{x}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ s'écrit $-16x(16 - x^2 - y^2) = 0$. On ne peut avoir $16 - x^2 - y^2 = 0$, car $\frac{\partial f}{\partial y}$ est non nul en un tel point par (1). Donc $x = 0$, ce qui a été exclu. Donc Z ne possède pas d'autres zéros que ceux déjà obtenus.



(4) Puisque f est constante sur les orbites de Γ, la sous-variété M est bien invariante par Γ. De plus, le groupe fini Γ agit librement sur $\mathbb{R}^3$ privé de l'axe des x, donc agit librement sur M privé des six points où $z = 0, y = 0$ et $x = -4, -3, -1, 1, 3, 4$. Par le théorème des revêtements, l'espace topologique quotient $\Gamma \backslash M$ est une variété topologique sauf peut-être au voisinage des images de ces six points. En exprimant localement au voisinage de ces points M comme graphe d'une fonction définie sur un disque ouvert de son plan tangent et invariante aussi par l'application $w \mapsto -w$, on voit que l'espace topologique quotient est localement homéomorphe, en les points potentiellement douteux, au quotient d'un disque ouvert par $w \mapsto -w$, qui est encore homéomorphe au disque.

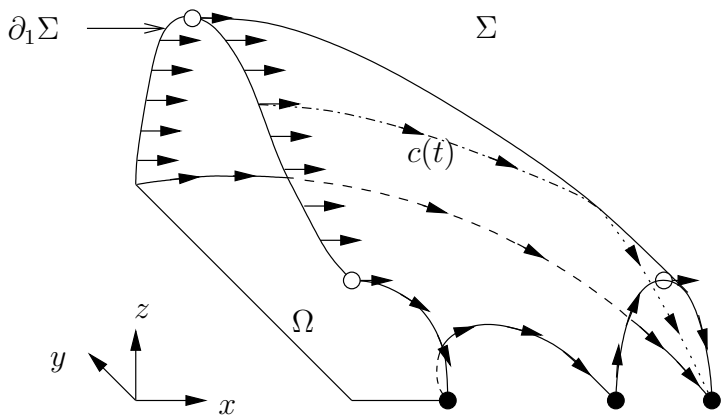


$\Gamma\backslash M \simeq \mathbb{S}_2$

(6) Par symétrie, on peut supposer que $y \geq 0, z \geq 0$. Dans la région $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, la surface M est le graphe Σ d'une fonction continue au dessus du domaine Ω du plan $z = 0$, défini par $x \geq 0, y \geq 0, 16 - x^2 - y^2 \geq 0, (x-2)^2 + y^2 - 1 \geq 0$. Comme Ω est compact, Σ l'est.

Sur l'arc $\partial_1\Sigma$ du bord de Σ au-dessus de l'arc $\{0\} \times [0,4] \times \{0\}$, le champ de vecteur X est transverse à cet arc, rentrant dans Σ. En outre de $\partial_1\Sigma$ et des zéros du champ de vecteurs X (les points $(1,0,0), (3,0,0)$ et $(4,0,0)$), le bord de Σ est composé de quatres courbes ouvertes qui sont des courbes intégrales du champ de vecteurs X, car elles sont tangentes à X, qui ne s'annule pas sur elles.

Par compacité de M, le champ de vecteurs X est complet, donc son flot est défini pour tous les temps. Soit $(0, y_0, z_0) \in M$ avec $y_0 > 0$ et $z_0 \geq 0$, et $c : t \mapsto \phi_t(0, y_0, z_0)$ la courbe intégrale de X d'origine $(0, y_0, z_0)$. Par les propriétés du bord de Σ, la courbe intégrale c doit rester dans Σ. Par compacité de Σ, elle doit s'accumuler en un point de Σ, et l'ensemble d'accumulation est connexe. Par le théorème du redressement d'un champ de vecteurs en un point non singulier, il ne peut s'agir ni d'un point intérieur de Σ, ni d'un point du bord de Σ autre que $(1,0,0), (3,0,0)$ ou $(4,0,0)$. Au voisinage du point $(1,0,0)$, la projection orthogonale sur l'espace tangent à M du champ $\frac{\partial}{\partial x}$ a une composante non nulle sur $\frac{\partial}{\partial y}$, sauf sur l'arc au dessus de $[0,1] \times \{0\} \times \{0\}$, ce qui force la courbe intégrale c à s'éloigner vers les $y > 0$. Donc il ne peut y avoir convergence vers $(1,0,0)$. On exclut de même une convergence vers le point $(3,0,0)$. D'où le résultat.



(7) Montrons que M est homéomorphe (en fait on peut montrer C^∞-difféomorphe) à la somme connexe de deux tores (l'unique, à homéomorphisme (en fait à C^∞-difféomorphisme) près, surface compacte connexe orientable de genre 2), et que $\Gamma\backslash M$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$.

Comme Σ est un graphe au-dessus de Ω, l'espace Σ est homéomorphe à Ω (par la projection verticale). L'espace topologique M est obtenu en recollant les huit images de Σ par $(x, y, z) \mapsto (\pm x, \pm y, \pm z)$. La réunion Σ_2 de Σ et de son image par $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ est homéomorphe au domaine annulaire $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 16, (x - 2)^2 + y^2 \geq 1\}$ (toujours par projection verticale). La réunion Σ_4 de Σ_2 et de son image par $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ est donc homéomorphe au recollement de deux copies de A par l'identité sur le bord $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ et sur l'arc de bord $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, x^2 + y^2 = 16\}$, qui est homéomorphe au tore privé d'un disque. Donc M, réunion de Σ_4 et de son image par $(x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$, est homéomorphe à la somme connexe de deux tores.

L'espace topologique $\Gamma \backslash M$ est l'espace topologique quotient de la réunion des quatre images de Σ par $(x, y, z) \mapsto (\pm x, y, \pm z)$, par la relation d'équivalence identifiant $(x, 0, z) \mapsto (x, 0, -z)$. Celle-ci écrase en un segment chaque composante connexe de l'intersection de M avec le plan $y = 0$. Il n'est pas difficile de voir que le résultat en découle (voir la figure suivant le point (4)).

Schème E.87 La régularité sous-entendue est C^∞.

(1) Soient $x \in M$, et $\phi : U \to B(0, 1)$ un difféomorphisme local entre un voisinage ouvert U de x et la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^n$. Soit $y \in U$. On définit un champ de vecteurs (constant, donc complet) X sur $B(0, 1)$ par $X(a) = \phi(y) - \phi(x)$. Son flot envoie $\phi(x)$ sur $\phi(y)$ en temps fini. Quitte à multiplier X par une fonction C^∞ nulle au voisinage du bord de $B(0, 1)$, on peut supposer que X est nul au voisinage du bord de $B(0, 1)$, et on peut donc le tirer en arrière par ϕ pour obtenir un champ de vecteurs sur M, nul hors de U, et dont le flot est défini pour tout temps et envoie x sur y au bout d'un certain temps τ. Le temps τ de ce flot donne un difféomorphisme de M envoyant x sur y. Quitte à prendre U relativement compact, on peut supposer que ce difféomorphisme est l'identité en dehors d'un compact de M.

Maintenant, si y est un point quelconque de M, comme M est connexe, donc connexe par arcs, soit $\gamma : [0, 1] \to M$ un chemin (continu) de x à y. On recouvre l'image (compacte) de γ par un nombre fini de domaines de cartes locales U_j de M à valeurs dans $B(0, 1)$. Si $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision suffisamment fine de $[0, 1]$, avec $t_0 = 0$ et $t_n = 1$, alors les points $x_i = \gamma(t_i)$ et x_{i+1} sont dans un même U_{j_i}. Si $\phi_i : M \to M$ est un difféomorphisme envoyant x_i sur x_{i+1} (voir l'alinéa précédent), alors $\phi_{n-1} \circ \cdots \circ \phi_0$ est un difféomorphisme de M dans M envoyant x sur y, qui est l'identité en dehors d'un compact de M.

(2) Comme les difféomorphismes ϕ_i précédents sont des applications en un temps donné d'un flot, le résultat découle du fait que si $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot d'un champs de vecteurs complet, alors pour tout t dans $\mathbb{R}$, l'application $h : \mathbb{R} \times M \to M$ définie par $(s, x) \mapsto \varphi_{st}(x)$ est une isotopie entre φ_0 et φ_t.

(3) Montrons tout d'abord que l'ensemble des k-uplets de points distincts de M est connexe par arcs. On raisonne par récurrence sur k, le résultat étant trivial pour $k = 1$.

Soient $x_1, \ldots, x_k$ et $y_1, \ldots, y_k$ des points de M. Si $x_1 = y_1$, le résultat découle de la récurrence en considérant $M - \{x_1\}$. Soient $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ une carte et $a, b \in U$ avec $a \neq b, y_1$. L'image par ϕ^{-1} du segment reliant $\phi(a)$ à $\phi(b)$ dans $\mathbb{R}^n$ est un chemin γ reliant a à b dans M. De plus, $\mathbb{R}^n - [\phi(a), \phi(b)]$ est connexe puisque $n \geq 2$, donc $M - \gamma$ est connexe. En utilisant un difféomorphisme envoyant x_1 sur a et y_1 sur b (son existence est garantie par la première question, en prenant un difféomorphisme envoyant x_1 sur a, et un difféomorphisme de $M - \{a\}$ envoyant y_1 sur b et valant l'identité en dehors d'un compact de $M - \{a\}$), on obtient un chemin γ' dans M reliant x_1 à y_1 tel que $M - \gamma'$ soit connexe,

et en perturbant un peu le segment reliant $\phi(a)$ à $\phi(b)$, on peut supposer que ce chemin évite $x_2, \ldots, x_k, y_2, \ldots, y_k$. On utilise alors l'hypothèse de récurrence dans $M - \gamma'$ pour relier $x_2, \ldots, x_k$ à $y_2, \ldots, y_k$.

Maintenant, on prend des chemins γ_i deux à deux disjoints joignant x_i à y_i respectivement, on fixe un petit voisinage U_i de l'image de γ_i, et on prend, par la question (1), un difféomorphisme f_i valant l'identité en dehors de U_i et envoyant x_i sur y_i. Alors $f_1 \circ \cdots \circ f_k$ convient.

(4) Il suffit de prendre une carte $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_k)$ des points distincts de U. Il existe alors un difféomorphisme f envoyant x_i sur y_i. Le difféomorphisme $\phi \circ f^{-1} : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n$ convient alors.

Schème E.88 Pour simplifier, nous supposerons que $r = \infty$, en laissant au lecteur le soin d'adapter le cas général.

(1) Remarquons que $m \geq n$. Si $M = \mathbb{R}^m, N = \mathbb{R}^n$ et π est la submersion standard $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$, pour tout champ de vecteurs $(y_1, \ldots, y_n) \mapsto Z(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^n Z_i(y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial}{\partial y_i}$ sur N, avec $Z_i \in \mathrm{C}^\infty(N, \mathbb{R})$, le champ de vecteurs $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \widetilde{Z}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^n Z_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$ sur M est C^∞ et vérifie que $d\pi_x(\widetilde{Z}(x)) = Z(\pi(x))$, car π est linéaire.

Montrons maintenant que pour tout x dans M, il existe un voisinage ouvert U_x de x et un champ de vecteurs X_x de classe C^∞ sur U_x tel que $T_y f(X_x(y)) = Y(f(y))$ pour tout y dans U_x.

En effet, par le théorème de forme normale des submersions, pour tout x dans M, il existe une carte locale (U_x, φ) en x avec $\varphi(U_x) = \mathbb{R}^m$ et une carte locale (V, ψ) en $f(x)$ avec $\psi(V) = \mathbb{R}^n$ telle que $f(U_x) \subset V$ et $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \pi$. Alors le champ de vecteurs $X_x = \varphi^*(\widetilde{\psi_*(Y_{|V})})$ convient. En effet, pour tout y dans U_x, comme $T_{f(y)}\psi$ est bijective, il suffit de montrer que $T_{f(y)}\psi(T_y f(X_x(y))) = T_{f(y)}\psi(Y(f(y)))$. Or le premier membre, par la définition de l'image réciproque par φ du champ de vecteurs $\widetilde{\psi_*(Y_{|V})}$ et le théorème de dérivation des fonctions composées, vaut $T_{\varphi(y)}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\widetilde{\psi_*(Y_{|V})}(\varphi(y)))$, donc par définition de $Z \mapsto \widetilde{Z}$, ceci vaut $\psi_*(Y_{|V})(\pi(\varphi(y))) = \psi_*(Y_{|V})(\psi \circ f(y))$, et par définition de l'image directe d'un champ de vecteurs, le résultat en découle.

Enfin, soit $(\varphi_x)_{x \in M}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement ouvert $(U_x)_{x \in M}$. Posons $X = \sum_{x \in M} \varphi_x X_x$, qui est un champ de vecteurs C^∞, car cette somme est finie au voisinage de tout point. Par linéarité des applications tangentes, par le fait que le support de φ_x soit contenu dans U_x, et par le fait que la somme de la famille $(\varphi_x)_{x \in M}$ vaille 1, on a donc, pour tout y dans M,

$$T_y f(X(y)) = \sum_{x \in M} \varphi_x(y)\, T_y f(X_x(y)) = \sum_{x \in M} \varphi_x(y)\, Y(f(y)) = Y(f(y))\ ,$$

le premier point qu'il fallait démontrer.

Considérons les courbes $t \mapsto f \circ \phi_{X,t}(x)$ et $t \mapsto \phi_{Y,t} \circ f(x)$, qui sont de classe C^∞. Leurs valeurs en 0 sont égales, et elles vérifient, par le théorème de dérivation des fonctions composées, la définition du flot local, et ce qui précède :

$$\frac{d}{dt}\, f \circ \phi_{X,t}(x) = T_{\phi_{X,t}(x)} f(X(\phi_{X,t}(x))) = Y(f \circ \phi_{X,t}(x))\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\,\phi_{Y,t}\circ f(x) = Y(\phi_{Y,t}\circ f(x))\ .$$

Deux fonctions qui vérifient la même équation différentielle du premier ordre et coïncident en un point sont égales, au moins au voisinage de ce point, ce qui conclut.

(2) Pour tout y_0 dans N, soit (U,φ) une carte locale en y_0, Z_i le champ de vecteurs constant égal à $T_{y_0}\varphi(e_i)$ sur $\varphi(U)$, σ une fonction C^∞ sur $\varphi(U)$, valant 1 au voisinage de $\varphi(y_0)$ et de support contenu dans $\varphi(U)$. Alors $Y_i = \varphi^*(\sigma\ Z_i)$, prolongé par 0 en dehors de U, convient.

Par le théorème d'inversion locale, il suffit de montrer que la différentielle en $(0,\dots,0)$ de l'application $(t_1,\dots,t_n)\mapsto \phi_{Y_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{Y_n,t_n}(y_0)$, qui est de classe C^∞, est inversible. Or, par le théorème de dérivation des fonctions composées, par l'équation différentielle vérifiée par le flot d'un champ de vecteurs, et comme $\phi_{Y_i,0} = \mathrm{id}$, la différentielle de cette application envoie la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sur $(Y_1(y_0),\dots,Y_n(y_0))$, i.e. sur la base $(e_1,\dots,e_n)$ de $T_{y_0}N$, donc elle est inversible.

(3) Par (2) et (1), notons U un voisinage de y_0 dans N, $Y_1,\dots,Y_n$ des champs de vecteurs sur N tels que $\theta : (t_1,\dots,t_n)\mapsto \phi_{Y_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{Y_n,t_n}(y_0)$ soit un difféomorphisme local en 0, et $X_1,\dots,X_n$ des champs de vecteurs C^∞ sur M tels que $T_xf(X_i(x)) = Y_i(f(x))$ pour tout x dans X. Par compacité de F, il existe $\epsilon > 0$ tel que le flot local $\phi_{X_i,t}$ du champ de vecteurs X_i soit défini au moins sur le temps $]-\epsilon,\epsilon[$ en tout point de F, donc d'un voisinage de F quitte à réduire ϵ, et pour tout i. Posons $\varphi' : F\times\ ]-\epsilon,\epsilon[^n \to M$ définie (quitte à réduire ϵ) par $(x,(t_1,\dots,t_n))\mapsto \phi_{X_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{X_n,t_n}(x)$, qui est C^∞. Notons $\varphi : F\times U\to M$ l'application définie, quitte à réduire U, par $\varphi(y,x) = \varphi'(x,\theta^{-1}(y))$. Par la question (1),

$$f\circ\phi_{X_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{X_n,t_n}(x) = \phi_{Y_1,t_1}\circ\cdots\circ\phi_{Y_n,t_n}(f(x))\ ,$$

donc $f\circ\varphi(y,x) = y$. Pour montrer que φ est un C^∞-difféomorphisme sur un voisinage de F dans M quitte à réduire U, il suffit de montrer que φ' l'est quitte à réduire ϵ. Or, quitte à réduire les domaines,

$$u\mapsto {(\phi_{X_n,\,pr_n\circ\theta^{-1}\circ f(u)})}^{-1}\circ\cdots\circ{(\phi_{X_1,\,pr_1\circ\theta^{-1}\circ f(u)})}^{-1}(u),\theta^{-1}\circ f(u))$$

est une application C^∞, inverse de φ'.

(4) Si f est propre, alors toute fibre est compacte, et le résultat précédent montre l'existence de trivialisations locales au-dessus d'un voisinage de chaque point de N, par surjectivité, d'où le résultat.

Schème E.89 (1) Soit n la dimension de M.

Soit x un point de l'ouvert $f^{-1}(I)$. Comme f est une submersion en x, par le théorème de forme normale locale des submersions, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ contenant 0, un voisinage ouvert U_x de x, contenu dans $f^{-1}(I)$, et un C^∞-difféomorphisme local $\varphi : V\to U_x$ envoyant 0 sur x tel que, au voisinage de 0,

$$f\circ\varphi(t_1,\dots,t_n) = t_1 + f(x)\ .$$

Pour tout y dans U_x, posons

$$X_x(y) = T_{\varphi^{-1}(y)}\varphi\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)\ ,$$

qui appartient bien à T_yM. Alors on a

$$T_yf(X_x(y)) = T_{\varphi^{-1}(y)}(f\circ\varphi)\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\ .$$

[Une autre manière est de prendre une carte locale (U'_x, φ) en x, et en posant $g = f\circ\varphi^{-1}$, qui est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (muni de son produit scalaire usuel), de poser, pour tout y dans U'_x,

$$X_x(y) = T_{\varphi(y)}\varphi^{-1}\left(\frac{\mathrm{grad}_{\varphi(y)}g}{||\mathrm{grad}_{\varphi(y)}||^2}\right)\ ,$$

en rappelant que $T_tg(Y) = \langle \mathrm{grad}_t g|Y\rangle$.]

Comme f est continue et M compacte, le sous-espace $f^{-1}([a,b])$ est fermé donc compact. Soient $x_1,\dots,x_k$ dans $f^{-1}([a,b])$ tels que $f^{-1}([a,b])$ soit recouvert par $U_{x_1},\dots,U_{x_k}$. Soit $(\varphi_1,\dots,\varphi_{k+1})$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement ouvert $(U_{x_1},\dots,U_{x_k}, M - f^{-1}([a,b])$. Posons

$$X = \sum_{i=1}^k \varphi_i X_{x_i}\ ,$$

ce qui a un sens, car φ_i est nulle en dehors de U_{x_i}, et définit un champ de vecteurs C^∞ sur M, nul en dehors de $f^{-1}(I)$. Alors pour tout x dans $f^{-1}([a,b])$, on a par linéarité de T_xf,

$$T_xf(X(x)) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)T_xf(X_{x_i}(x)) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$$

car $\varphi_{k+1}(x) = 0$.

[Voici une manière globale de résoudre le problème. Par le théorème du plongement (qui utilise des partitions de l'unité), on peut considérer que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$. Pour tout t dans I, qui est une valeur régulière de f contenue dans l'image, chaque surface de niveau $f^{-1}(t)$ est une sous-variété C^∞ compacte de codimension 1. Pour tout x dans $f^{-1}(t)$, notons A_x le sous-espace vectoriel de T_xM tangent à la fibre $f^{-1}(t)$, et $A_x^\perp$ son supplémentaire orthogonal dans T_xM pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^N$. Alors la restriction de T_xf est un isomorphisme linéaire de $A_x^\perp$ sur $T_t\mathbb{R} = \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction C^∞ à support contenue dans I, valant 1 sur $[a,b]$. Notons $X(x) = ({T_xf_{|A_x^\perp}}^{-1}(\varphi(f(x))\frac{\partial}{\partial x})$ pour x dans $f^{-1}(I)$, prolongé par 0 en dehors de $f^{-1}(I)$, qui est bien C^∞. Alors le champ de vecteurs X convient.]

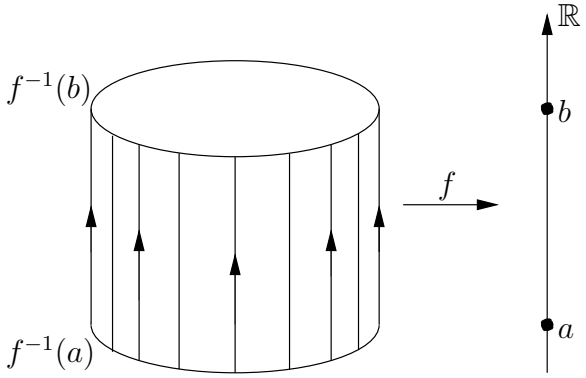
(2) Comme M est compacte, le flot de X est défini sur $\mathbb{R}\times M$. Montrons que pour tout t dans $\mathbb{R}$ et tout x dans $f^{-1}(a)$, on a $f(\phi_t(x)) = a + t$. En effet, c'est vrai en $t = 0$ et

$$\frac{d}{dt}(f(\phi_t(x))) = T_{\phi_t(x)}f(X(\phi_t(x))) = 1\ .$$

L'application $\psi : f^{-1}(a)\times]a,b[\to f^{-1}(]a,b[)$ définie par

$$(x,t)\mapsto \phi_{t-a}(x)$$

est donc un C^∞-difféomorphisme tel que $f\circ\psi(x,t) = a + (t-a) = t$, ce qu'il fallait démontrer.



(3) Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ une application C^∞, supposons par l'absurde que f ne possède que deux points critiques. Comme M est compacte, soient α et β le minimum et le maximum de f respectivement (qui sont distincts sinon tout point de $\mathbb{T}^2$ serait critique). Soit x l'unique point tel que $f(x) = \alpha$ et y l'unique point tel que $f(y) = \beta$. Soient U et V deux voisinages de x et y respectivement, homéomorphes à $\mathbb{R}^2$. Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $f^{-1}(\alpha+\epsilon)$ soit contenu dans U et $f^{-1}(\beta-\epsilon)$ soit contenu dans V. Comme $\alpha+\epsilon$ et $\beta-\epsilon$ appartiennent à l'image de f, les sous-espaces fermés donc compacts $f^{-1}(\alpha+\epsilon)$ et $f^{-1}(\beta-\epsilon)$ sont des sous-variétés compactes de dimension 1 de $\mathbb{T}^2$. (Attention, une courbe de niveau n'est pas forcément connexe.) Donc ce sont des unions disjointes finies de cercles, par la classification des variétés de dimension 1. Comme U et V sont homéomorphes au plan euclidien, le théorème de Jordan nous dit que chacun de ces cercles est le bord d'un disque. Comme il n'y a qu'un seul minimum/maximum (local), $f^{-1}(\alpha+\epsilon)$ et $f^{-1}(\beta-\epsilon)$ sont donc des cercles. Par le résultat précédent, $f^{-1}(]\alpha+\epsilon, \beta-\epsilon[)$ est homéomorphe à un cylindre, et donc $\mathbb{T}^2$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$. Ceci est une contradiction, car par le théorème de Jordan, tout cercle plongé dans $\mathbb{S}_2$ sépare en deux composantes connexes, alors qu'il existe des cercles plongés dans $\mathbb{T}^2$ qui ne disconnectent pas $\mathbb{T}^2$.

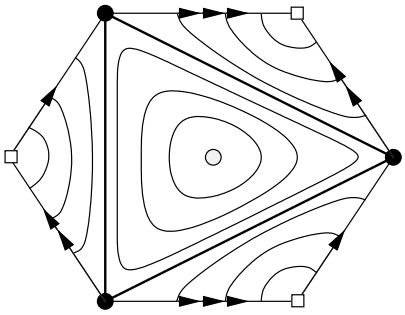
Une manière d'éviter le théorème de Jordan est de dire que le complémentaire des deux points minimum et maximum est une union disjointe de cylindres ouverts, et que dans une variété connexe de dimension 2 comme le tore, le complémentaire de deux points est encore connexe, donc il ne peut y avoir qu'un seul cylindre. Maintenant, le compactifié d'un cylindre par deux points distincts est forcément homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$ (par le même genre d'argument qui montre que le compactifié d'Alexandrov du plan est la sphère). Il reste alors à montrer que la sphère et le tore ne sont pas homéomorphes. Mais pour cela, il suffit de remarquer que le complémentaire d'un point dans la sphère est homéomorphe au disque, donc simplement connexe (ou contractile), tandis que le complémentaire d'un point dans le tore a le même type d'homotopie que le bouquet de deux cercles, qui n'est pas simplement connexe (ou contractile).

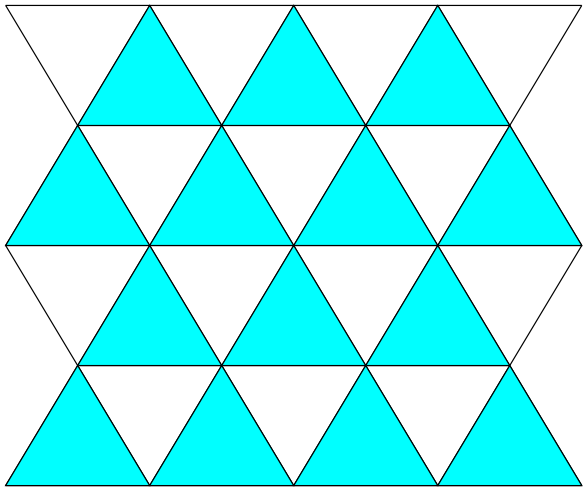
(4) Les dessins ci-dessous, qui s'expliquent d'eux-mêmes, représentent

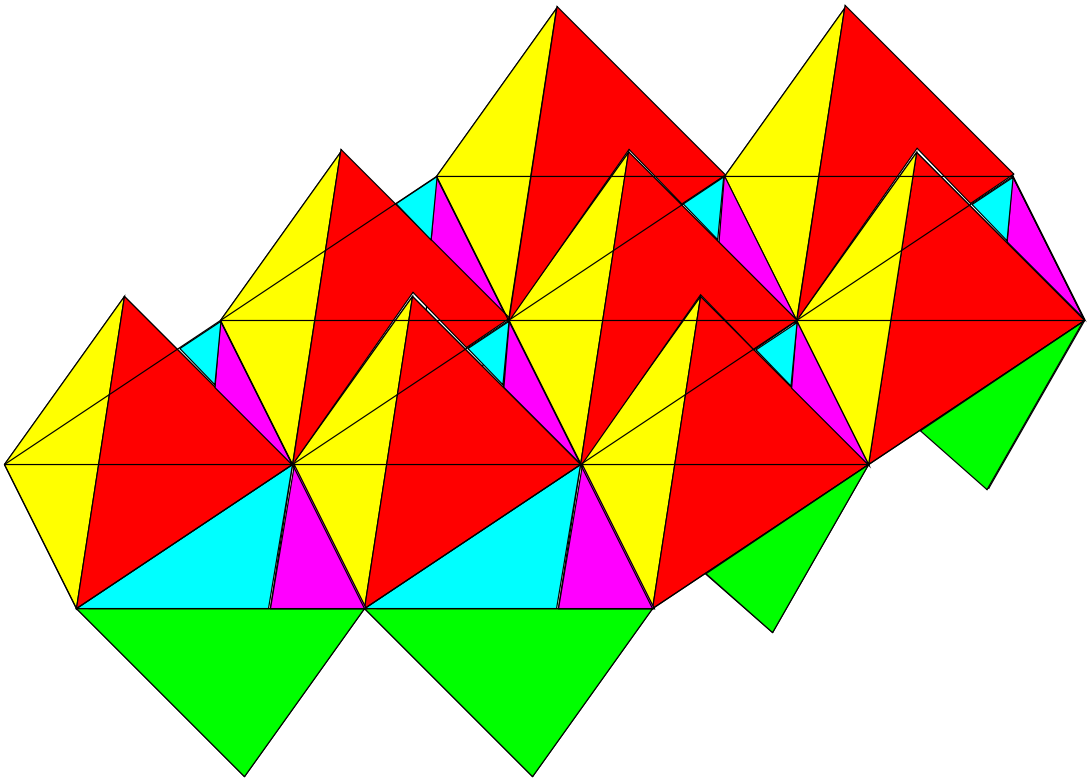
— les lignes de niveau d'une fonction C^∞ sur le tore ayant trois points critiques, (bien qu'il n'y en ait pas besoin pour cet exercice, on vérifiera que l'espace quotient d'un hexagone par les identifications (préservant l'orientation) des côtés opposés d'un hexagone est homéomorphe au tore).

— le lieu de positivité (grisé) d'une fonction réelle C^∞ sur le plan, périodique par le réseau équilatéral, et ayant exactement trois orbites de points critiques,

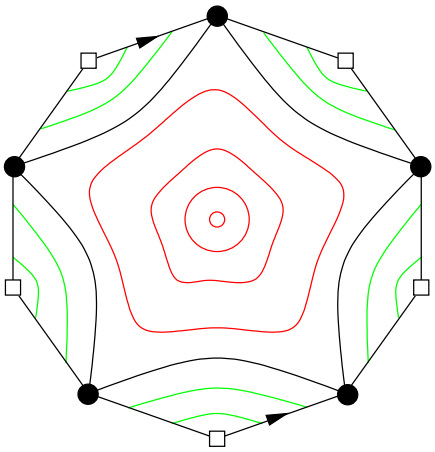
— un modèle polyédral du graphe d'une telle fonction, qui est nulle sur le quadrillage équilatéral du plan, que l'on peut lisser pour rendre C^∞.







(5) Pour $g \geq 2$, on considère un $(4g+2)$-gone P régulier (voir la figure ci-dessous où $g = 2$). On recolle deux arêtes opposées en renversant leur orientation donnée par le sens trigonométrique. Les sommets de P se partage en deux classes d'équivalence sous ce recollement, de même cardinal, notées x et y. Il n'est pas difficile de voir que l'espace topologique obtenu Σ est une surface compacte connexe, somme connexe de g tores $\mathbb{T}^2$, que l'on peut munir d'une structure de variété différentielle C^∞. Soit z le centre de P. On considère un $(2g+1)$-gone régulier P' inscrit dans P, dont les sommets sont les sommets de P dans x. Il est alors facile de construire une application C^∞ sur Σ, ayant trois points critiques x, y, z, dont les lignes de niveau dans P', outre z et le bord de P', sont des cercles entourant z.



Schème E.90 (1) La différentielle de f est donnée par $T_t f(\partial/\partial t) = X(f(t)) \neq 0$. Ainsi, f est une immersion, c'est donc un difféomorphisme local, et son image est ouverte. Montrons qu'elle est également fermée. Soit $y \in \overline{f(I)}$. L'application $g : t \mapsto \phi_t(y)$ est définie sur un voisinage $]-\epsilon, \epsilon[$ de 0 dans $\mathbb{R}$, et est encore un difféomorphisme local. Son image $g(]-\epsilon, \epsilon[)$ est donc un voisinage de y, et rencontre $f(I)$. Il existe donc $s \in]-\epsilon, \epsilon[$ et $t \in I$ tels que $\phi_s(y) = \phi_t(x_0)$, puis $y = \phi_{t-s}(x_0)$ appartient à $f(I)$.

Par connexité, l'image de f est égale à M.

(2) Si f est injective, c'est une immersion bijective. C'est donc un difféomorphisme entre I et M.

(3) Supposons qu'il existe deux points t et $t+s$ dans I avec $s > 0$ tels que $f(t) = f(t+s)$. En composant par ϕ_{-t}, on obtient $f(0) = f(s)$, i.e. $\phi_s(x_0) = x_0$. On en déduit que $I+s = I$, puis $I = \mathbb{R}$. De plus, $\{s \in \mathbb{R} \ : \ \phi_s(x_0) = x_0\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, non réduit à 0 et non égal à $\mathbb{R}$ (puisque f est un difféomorphisme local en x_0). Par conséquent, il est de la forme $r\mathbb{Z}$ avec $r > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t+r) = f(t)$. Ainsi, f induit une application $\tilde{f} : \mathbb{R}/r\mathbb{Z} \to M$. Comme f est une immersion, $\tilde{f}$ est aussi immersive. Par définition de r, elle est injective. Elle est également surjective, c'est donc un difféomorphisme.

a) Soit π la projection canonique de $\tilde{M}$ dans M. Chaque point de M a deux préimages par π, qui correspondent au choix d'une demi-droite dans $T_x M$. Si $\phi : U \to \mathbb{R}$ est une carte locale de M, on en déduit une application $\tilde{\phi} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R} \times \{-1, 1\}$, et ces applications sont C^∞ compatibles. Elles définissent donc une structure de variété sur $\tilde{M}$, pour laquelle π est manifestement un revêtement à deux feuillets (voir l'exercice E.183).

b) Un point y de $\widetilde{M}$ s'écrit $(x, \mathbb{R}_+^* v)$ où v est un vecteur non nul de $T_x M$. La projection π induit un isomorphisme canonique entre $T_y \tilde{M}$ et $T_x M$. Ainsi, $\mathbb{R}_+^* v$ donne une demi-droite canonique dans $T_y \widetilde{M}$. On dira qu'un vecteur appartenant à cette demi-droite est "strictement positif". Notons que la somme de deux vecteurs strictement positifs est strictement positif.

Pour tout y de $\widetilde{M}$, il existe un champ de vecteurs X_y strictement positif sur un voisinage ouvert U_y de y et nul ailleurs. Soit $(\phi_y)_{y \in \widetilde{M}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_y)_{y \in \widetilde{M}}$, posons $X = \sum_{y \in \widetilde{M}} \phi_y X_y$. C'est un champ de vecteurs sur $\widetilde{M}$, partout strictement positif, et en particulier non nul.

c) Supposons tout d'abord que $\widetilde{M}$ ne soit pas connexe. Comme $\pi : \widetilde{M} \to M$ est un revêtement à deux feuillets, chaque composante de $\widetilde{M}$ est donc difféomorphe à M. En particulier, M porte donc un champ de vecteurs partout non nul. D'après les questions 2 et 3, M est donc difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}_1$.

Si $\widetilde{M}$ est connexe, il est lui-même difféomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}_1$, et M est obtenu en quotientant $\widetilde{M}$ par l'action d'un difféomorphisme ψ d'ordre 2 sans point fixe. Il n'existe pas de tel difféomorphisme sur $\mathbb{R}$, donc $\widetilde{M}$ est $\mathbb{S}_1$. Finalement, M est difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}_1$ par l'antipodie, qui est encore difféomorphe à $\mathbb{S}_1$.

Schème E.91 (1) Soit γ une courbe intégrale du champ de vecteurs X_a, partant d'un vecteur x au temps $t = 0$. Par définition, elle satisfait $\gamma'(t) = X_a(\gamma(t))$, i.e. $\gamma'(t) = a - \gamma(t)$. Après intégration, $\gamma(t) = (x-a)e^{-t} + a$. Par conséquent, le flot $\phi_t^{X_a}$ de X_a est donné par

$$\phi_t^{X_a}(x) = (x-a)e^{-t} + a.$$

(2) Les différentielles de X_a et X_b, vus comme fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, sont égales à

$-$Id. Par conséquent,

$$[X_a, X_b](x) = -X_a(x) + X_b(x) = b - a.$$

(3) Le champ de vecteurs $(\phi_t^{X_a})^*(X_b)$ est donné par

$$\begin{aligned}(\phi_t^{X_a})^*(X_b)(x) &= (d\phi_t^{X_a})_x^{-1}(X_b(\phi_t^{X_a}(x))) = e^t X_b(\phi_t^{X_a}(x)) = e^t(b - \phi_t^{X_a}(x)) \\ &= e^t(b - (x-a)e^{-t} - a) = e^t(b-a) - (x-a).\end{aligned}$$

En dérivant cette expression en $t = 0$, on retrouve $[X, Y](x) = b - a$.

Schème E.92 (1) On veut que X_r soit radial sortant de norme 1. On pose donc

$$X_r(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pour X_θ, on veut un vecteur orthogonal au précédent, dans le sens direct, de norme 1. On prend donc

$$X_\theta(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pour calculer le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X, Y sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut appliquer la formule explicite de la proposition 4.9, qui s'écrit sous la forme $[X,Y](x) = dY_x(X(x)) - dX_x(Y(x))$. On a $d(X_\theta)(X_r) = 0$ puisque, quand on bouge dans la direction de X_r, i.e. radialement, X_θ ne change pas. De plus, $d(X_r)(X_\theta) = \frac{1}{r}X_\theta$: en tournant sur le cercle, la dérivée du vecteur radial est le vecteur angulaire. Ainsi, $[X_r, X_\theta] = -\frac{1}{r}X_\theta$.

On peut aussi le calculer en utilisant la formule $[X,Y](x) = \frac{d}{dt}_{|t=0}((\phi_t)^*Y)(x)$, où ϕ_t est le flot de X. Le flot ϕ_t de X_r est donné par $\phi_t(x) = x + t\frac{x}{||x||}$. Sa différentielle s'écrit

$$(d\phi_t)_x(h) = h + t\frac{h}{||x||} - t\frac{x}{||x||^{3/2}}\langle x, h\rangle.$$

Le champ de vecteurs X_θ est constant le long des trajectoires de ϕ_t, et orthogonal à x. Par conséquent,

$$(\phi_t)^*(X_\theta)(x) = \frac{1}{1+t/r}X_\theta(x).$$

Finalement,

$$[X_r, X_\theta](x) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t)^*X_\theta(x) = -\frac{1}{r}X_\theta(x).$$

Il est aussi possible d'interpréter cette formule en terme de flots des champs de vecteurs correspondants, en utilisant la formule de l'exercice E.93 (ici, tous les flots sont complètement explicites)

(2) Voir l'exemple final de la partie 4.5. On a $\frac{\partial}{\partial r} = X_r$, mais $\frac{\partial}{\partial \theta} = rX_\theta$.

(3) On rappelle que

$$\begin{cases} x &= r\cos\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\cos\varphi \\ z &= r\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Schème E.93 (1) Par naturalité, il suffit de supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et $x = 0$. Les champs de vecteurs sont alors considérés comme des applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On fait un développement limité. On a $\phi_{-t}(x) = x - tX(x) + \frac{t^2}{2} dX_x(X(x)) + o(t^2)$, où le $o(t^2)$ est uniforme sur un voisinage de 0. On compose donc les développements limités ; tous les termes quadratiques peuvent être remplacés par les mêmes termes, mais en 0 (ce qui donne une erreur en $O(t^3)$), et on obtient

$$\begin{aligned}\psi_t \circ \phi_t \circ \psi_{-t} \circ \phi_{-t}(0) = \quad & -tX(0) + \tfrac{t^2}{2}\, dX_0(X(0)) - tY(-tX(0)) + \tfrac{t^2}{2}\, dY_0(Y(0)) \\ & +tX(-tX(0) - tY(0)) + \tfrac{t^2}{2}\, dX_0(X(0)) + tY(-tY(0)) \\ & +\tfrac{t^2}{2}\, dY_0(Y(0)) + O(t^3).\end{aligned}$$

On refait un développement limité, on simplifie, et il reste

$$t^2\big[dY_0(X(0)) - dX_0(Y(0))\big].$$

(2) Si les flots de X et Y commutent, la question précédente implique immédiatement que $[X, Y] = 0$. Réciproquement, supposons que $[X, Y]$ soit le champ de vecteurs nul, et montrons que ϕ et ψ commutent.

Première méthode. Pour tout x dans M, on considère $A(t, s) = \phi_t \circ \psi_s(x)$, et on montre qu'il vérifie $\frac{\partial A}{\partial s}(t, s) = Y(A(t, s))$, si bien que, à t fixé, $s \mapsto A(t, s)$ est le flot de Y, i.e. $A(t, s) = \psi_s(A(t, 0)) = \psi_s \circ \phi_t(x)$, ce qui conclut. On peut de nouveau supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et $x = 0$.

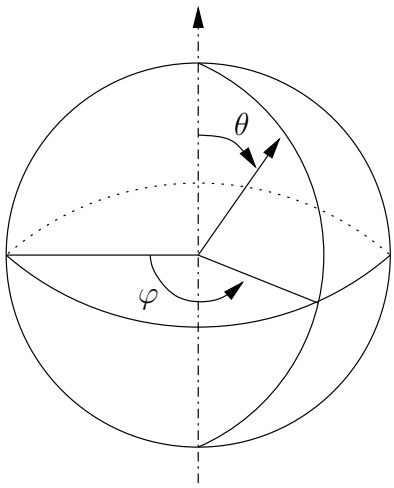
On a $\frac{\partial A}{\partial s}(t, s) = d_x\phi(t, \psi_s(0)).Y(\psi_s(0)) = F(t)$ (où $d_x\phi$ désigne la dérivée de $\phi(t, x)$ suivant la deuxième coordonnée). On veut montrer que c'est égal à $G(t) = Y(\phi_t \circ \psi_s(0))$. On fixe s une fois pour toutes, et on va montrer que F et G vérifient la même équation différentielle. Comme $F(0) = G(0)$, cela conclura.

On dérive. Notons que les dérivées croisées commutent, si bien que $\frac{\partial}{\partial t}\big(d_x\phi(t, x)\big) = d_x\big(X(\phi(t, x))\big) = dX(\phi(t, x))d_x\phi(t, x)$. Ainsi, $\frac{\partial F}{\partial t}(t) = dX(\phi(t, \psi_s(0)))F(t)$. Pour G, on a $\frac{\partial G}{\partial t}(t) = dY(\phi_t \circ \phi_s(0)).X(\phi_t \circ \psi_s(0))$. Par nullité du crochet de Lie, c'est égal à $dX(\phi_t \circ \psi_s(0)).Y(\phi_t \circ \psi_s(0))$, i.e. $dX(\phi_t \circ \psi_s(0))G(t)$. C'est bien la même équation différentielle que pour F, ce qui conclut.

Deuxième méthode. Il suffit de voir que $\phi_1 \circ \psi_1 = \psi_1 \circ \phi_1$, puisqu'alors on obtient la commutation sur tous les entiers, puis sur tous les rationnels, puis sur tous les réels.

On fixe n grand, et on décompose le carré 1×1 en n^2 petits carrés de côté $1/n$. On passe alors de $\phi_1 \circ \psi_1$ (côté du bas puis côté droit) à $\psi_1 \circ \phi_1$ (côté de gauche puis côté du haut) par n^2 permutations, correspondant à chacun des petits carrés. Mais, sur chaque petit carré, la question précédente assure que la taille est $O(1/n^3)$, le O étant uniforme. Ainsi, $\psi_1 \circ \phi_1 = \psi_1 \circ \phi_1 + O(1/n)$, et on conclut en faisant tendre n vers l'infini.

Schème E.94 (1) On paramètre un point de la sphère par l'angle θ qu'il fait avec la verticale, et par un angle de rotation φ autour de l'axe vertical.



Le flot ϕ_t de N consiste à se déplacer d'une distance t le long du méridien pointant vers le pôle nord, soit passer d'un angle θ à un angle $\theta - \frac{t}{2\pi}$. Le flot ψ_t de E consiste à se déplacer à θ constant d'une distance t vers l'est, et donc passer de φ à $\varphi + \frac{t}{2\pi \sin\theta}$.

Ainsi,

$$\psi_t \circ \phi_t \circ \psi_{-t} \circ \phi_{-t}(\theta, \varphi) = \left(\theta, \varphi + \frac{t}{2\pi \sin\theta} - \frac{t}{2\pi \sin(\theta + t/2\pi)}\right).$$

Quant t tend vers 0, le déplacement est équivalent à $\frac{t^2}{2\pi \sin\theta}\left(\frac{\cos\theta}{2\pi \sin\theta}\right)$. Ainsi,

$$[N, E](\theta, \varphi) = \left(\frac{\cos\theta}{2\pi \sin\theta}\right) E(\theta, \varphi).$$

(2) C'est dans les deux cas le champ de vecteurs unitaires pointant vers le pôle sud, i.e. $-N$.

Schème E.95 Quitte à passer en coordonnées locales, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^2$ et qu'on se place au voisinage de 0. Les champs de vecteurs $X(x)$ et $Y(x)$ forment alors une base de $\mathbb{R}^2$, si bien qu'il existe des fonctions a et b de classe C^∞ telles que

$$[X, Y](x) = a(x)X(x) + b(x)Y(x).$$

Si f et g sont des fonctions strictement positives, on a alors

$$\begin{aligned}
[fX, gY] &= d(gY)(fX) - d(fX)(gY) \\
&= fg\, dY(X) + f\, dg\,(X)Y - fg\, dX(Y) - g\, df\,(Y)X \\
&= fg\,[X, Y] + f\, dg\,(X)Y - g\, df\,(Y)X \\
&= \big(fg\, a - g\, df\,(Y)\big)X + \big(fg\, b + f\, dg\,(X)\big)Y.
\end{aligned}$$

Ainsi, $[fX, gY] = 0$ si et seulement si $fa - df(Y) = 0$ et $gb - dg(X) = 0$. Ces deux équations sont similaires, et il suffit donc de voir que la première admet une solution strictement positive pour conclure.

Par le théorème de redressement, on peut supposer que $Y = \frac{\partial}{\partial x_1}$. On peut alors fixer la valeur de f arbitrairement sur $\{0\} \times \mathbb{R}$, puis résoudre l'équation différentielle sur chaque droite horizontale. On peut par exemple prendre

$$f(x_1, x_2) = e^{-\int_0^{x_1} a(t, x_2)\, \mathrm{d}t}.$$

Schème E.96 (1) Soit $x \in M$. Posons $F(t_1, \ldots, t_n) = \Phi_{t_1}^{Y_1} \circ \cdots \circ \Phi_{t_n}^{Y_n}(x)$. Alors l'application F est C^∞ et $T_0F\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right) = Y_i(x)$. Ainsi, T_0F est surjective, et le théorème d'inversion locale montre que $F(\mathbb{R}^n)$ contient donc un voisinage de x dans M. Par conséquent, la classe d'équivalence de x contient un voisinage de x. On conclut comme dans l'exercice E.87 (1).

(2) Quitte à prendre une carte locale, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^n$ et $x = 0$.

D'après la question précédente, l'application F est un difféomorphisme local en 0. La formule rappelée en début d'exercice montre que $\Phi_t^{Y_2} \circ \Phi_t^{Y_1} \circ \Phi_{-t}^{Y_2} \circ \Phi_{-t}^{Y_1}(0) = t^2[X, Y](0) + o(t^2)$, i.e.

$$F^{-1} \circ \Phi_t^{Y_2} \circ \Phi_t^{Y_1} \circ \Phi_{-t}^{Y_2} \circ \Phi_{-t}^{Y_1}(0) = (o(t^2), o(t^2), t^2 + o(t^2)).$$

En particulier, la troisième composante de cette expression est non nulle si t est assez petit. Par continuité,

$$\{\pi \circ F^{-1} \circ \Phi_t^{Y_2} \circ \Phi_t^{Y_1} \circ \Phi_{-t}^{Y_2} \circ \Phi_{-t}^{Y_1}(0) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$$

contient un petit voisinage à droite de 0 dans $\mathbb{R}$, de la forme $[0, \epsilon]$. Soient $0 \leq z < \epsilon$, et x, y tels que $F(x, y, z) \sim 0$. Alors, pour tous x', y', on a

$$F(x', y', z) = \Phi_{x'}^{Y_1} \circ \Phi_{y'-y}^{Y_2} \circ \Phi_{-x}^{Y_1}(F(x, y, z))$$

donc $F(x', y', z) \sim 0$. Ainsi, la classe d'équivalence de 0 contient un ensemble de la forme $F(]-\delta, \delta[^2 \times [\,0, \epsilon[)$.

On raisonne de la même façon pour montrer qu'elle contient un ensemble de la forme $F(]-\delta', \delta'[^2 \times]-\epsilon', 0\,])$. En réunissant ces deux ensembles, on obtient bien que la classe d'équivalence de 0 contient un voisinage de 0. On conclut encore comme dans l'exercice E.87 (1).

Schème E.97 (1) Il s'agit de définir un atlas de cartes feuilleté sur M. Soit x dans M. D'après le théorème des submersions, il existe un voisinage U de x, un voisinage V de $y = f(x)$, un voisinage W de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et un difféomorphisme $\psi : U \to V \times W$ tel que $pr_1 \circ \psi = f$. Quitte à réduire V, on peut supposer que c'est le domaine d'une carte θ de N. Posons alors $\tilde{\psi} = (\theta, \mathrm{Id}) \circ \psi$. C'est une carte au voisinage de x, qui envoie les surfaces de niveau locales de f sur des morceaux de sous-espaces vectoriels $\{a\} \times \mathbb{R}^k$. Par conséquent, l'ensemble des telles applications $\tilde{\psi}$ définit un atlas de cartes feuilleté sur M. Il n'est pas difficile de voir que les feuilles sont les composantes connexes des fibres (attention, celles-ci ne sont pas forcément connexes, alors qu'une feuille si !)

(2) Ce n'est pas le cas en général : prendre $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$ et f la projection sur la première coordonnée.

(3) Dans un feuilletage de cette forme, toutes les feuilles sont fermées (et ce snt des sous-variétés de M). Cependant, il existe des feuilletages avec des feuilles non fermées, ou qui sont des sous-variétés immergées qui ne sont pas des sous-variétés (par exemple un feuilletage du tore par des droites de pente irrationnelle).

Schème E.99 (1) L'action de $\mathbb{Z}$ sur $M \times \mathbb{R}$ définie par $n : (x, t) \mapsto (f^n(x), t + n)$ est libre et propre. Par conséquent, le quotient $\tilde{M}$ est canoniquement muni d'une structure de variété pour laquelle la projection $\pi : M \times \mathbb{R} \to \tilde{M}$ est un revêtement.

Montrons que les ensembles $\pi(\{x\} \times \mathbb{R})$ sont les feuilles d'un feuilletage sur $\tilde{M}$. Ce sont des sous-variétés immergées dans $\tilde{M}$, il reste à vérifier qu'on a bien localement une structure produit. Mais c'est clair dans $M \times \mathbb{R}$, et la projection π est un difféomorphisme local, puisque c'est un revêtement.

(2) On obtient le feuilletage sur le tore $\mathbb{T}^2$ par les droites de pente α.

(3) Il suffit de prendre $M = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto -x$.

(4) La donnée d'une isotopie entre Id et f permet de construire un difféomorphisme ϕ de $M \times \mathbb{R}$ tel que, si $\phi(x,t) = (y,t)$, alors $\phi(x,t+1) = (f(y),t+1)$: on met l'isotopie entre les hauteurs 1/2 et 1, et plus généralement l'isotopie composée avec f^n entre les hauteurs $n+1/2$ et $n+1$.

Soient τ l'application de $M \times \mathbb{R}$ dans lui-même donnée par $\tau(x,t) = (x,t+1)$, et $\tau_f(x,t) = (f(x),t+1)$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & M \times \mathbb{R} \\ {\scriptstyle\tau}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\tau_f} \\ M \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & M \times \mathbb{R} \end{array} .$$

Par conséquent, les quotients de $M \times \mathbb{R}$ sous l'action de τ et sous l'action de τ_f sont difféomorphes. Mais le premier est $M \times \mathbb{S}_1$ et le second $\tilde{M}$.

(5) On part de $M \times \mathbb{R}^d$, et on le munit d'une action de $\mathbb{Z}^d$ par $\mathbf{n} : (x,\mathbf{t}) \mapsto (\mathbf{n}.x, \mathbf{t}+\mathbf{n})$. Cette action est libre et propre, ce qui permet de définir le quotient $\mathbb{Z}^d \backslash (M \times \mathbb{R}^d)$.

Schème E.100 (1) S'il existe x dans M tel que $X(x) = 0$, alors pour tout t, $\phi_t(x) = x$, car $\phi_0(x) = x$ et pour tout s,

$$\frac{d}{dt}_{|t=s} \phi_t(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_s \circ \phi_t(x) = T_{\phi_s(x)}\phi_s \left(\frac{d}{dt}_{|t=0} \circ \phi_t(x) \right) = 0 .$$

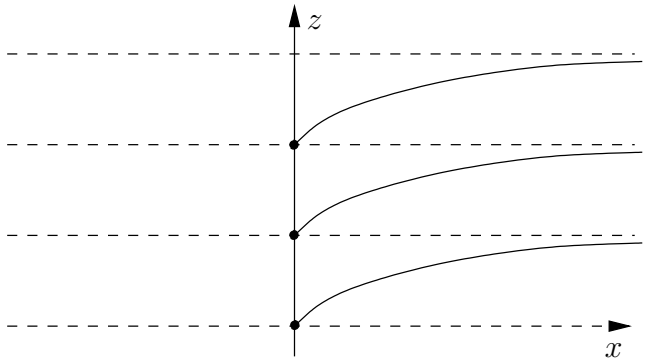
Ceci contredit la liberté de l'action du cercle. De plus, il est alors immédiat que $t \mapsto \phi_t(x)$ est le flot de X, qui est définit sur $\mathbb{R}$, donc X est complet.

(2) Le champ de droites $x \mapsto \mathbb{R}X(x)$ est bien un champ de droites (car X ne s'annule pas), il est C^∞ (car engendré par un champ de vecteurs C^∞), et donc intégrable (par exemple par le théorème de Frobénius, car en dimension 1, ses hypothèses sont automatiquement vérifiées ; mais bien sûr, il suffit d'appliquer directement le théorème du redressement des champs de vecteurs). Pour tout x dans M, l'application $g \mapsto g \cdot x$ du cercle dans M est une immersion C^∞ (car C^∞ et de différentielle non nulle par (1) et par passage au quotient de $\mathbb{R}$ sur le cercle), qui est injective (car l'action est libre), et de source compacte. Donc son image, qui est l'orbite de x sous l'action du cercle, est une sous-variété connexe de M. Comme son espace tangent en tout point y est $\mathbb{R}X(y)$ (et en regardant par exemple dans des cartes locales, et en utilisant sa connexité), cette orbite est donc une feuille du feuilletage intégrant le champ de droites précédent.

Schème E.101 On considère l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$ obtenu en retirant à $\mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$A = \{(x, 0, \arctan(x) + n\pi/2 \ : \ x \in [\,0, +\infty[, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Comme A rencontre chaque plan horizontal en exactement un point, l'ouvert U est feuilleté par des cylindres : les traces des plans horizontaux sur U. Mais U est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$ (on peut "faire partir chaque trait à l'infini"), et on obtient donc le feuilletage requis de $\mathbb{R}^3$.



Schème E.102 (1) a) L'application φ, qui est la restriction de l'immersion C^∞ injective $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots, x_n, 0)$ à la sous-variété compacte $\mathbb{S}_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, est un plongement C^∞. Donc son image est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^{n+2}$, contenue dans la sous-variété $\mathbb{S}_{n+1}$ de classe C^∞ de $\mathbb{R}^{n+2}$, donc est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{S}_{n+1}$. L'application continue φ passe bien au quotient par l'antipodie, en une injection continue $\overline{\varphi}$ de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$, qui, comme $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est compact et $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ séparé, est un homéomorphisme sur son image. Donc $M = \overline{\varphi}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}))$ est, comme $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ car $n \geq 1$, compacte connexe. Comme $\varphi(\mathbb{S}_n)$ est une sous-variété de $\mathbb{S}_{n+1}$, et la projection canonique $\mathbb{S}_{n+1} \to \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ est un C^∞-difféomorphisme local, on a bien que $M = \pi(\varphi(\mathbb{S}_n))$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$.

[On peut aussi utiliser l'application $f : \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$[x_0 : \ldots : x_{n+1}] \mapsto \frac{x_{n+1}}{\sqrt{\sum_{i=0}^n x_i^2}} ,$$

qui est une submersion C^∞ (en regardant dans chaque carte locale usuelle de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$), dont l'image réciproque de 0 est M.]

b) Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout x dans M, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}X(x)$ et T_xM soient supplémentaires. Alors π^*X est un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{S}_{n+1}$. Les applications tangentes des C^∞-difféomorphismes locaux sont, en tout point, des isomorphismes linéaires. Donc, pour tout x dans $\varphi(\mathbb{S}_n)$, les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}\ \pi^*X(x)$ et $T_x\ \varphi(\mathbb{S}_n)$ sont supplémentaires dans $T_x\ \mathbb{S}_{n+1}$. En particulier, la coordonnée de $\pi^*X(x)$ sur le vecteur vertical $\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ ne s'annule pas (sinon $\pi^*X(x)$ serait tangent à $\varphi(\mathbb{S}_n)$). Elle a donc un signe constant par continuité. Soit $\iota : x \mapsto -x$ l'antipodie, dont l'application tangente en tout point x de $\mathbb{S}_{n+1}$ est l'application $-\mathrm{id}$ de $T_x\mathbb{S}_{n+1}$ dans $T_{-x}\mathbb{S}_{n+1} = T_x\mathbb{S}_{n+1}$. D'une part $\iota^*\pi^*X(x) = (\pi \circ \iota)^*X(x) = \pi^*X(x)$, d'autre part $\iota^*\pi^*X(x) = (T_x\iota)^{-1}(X(\iota(x)) = -\pi^*X(-x)$, donc les signes des composantes verticales de $\pi^*X(x)$ et de $\pi^*X(-x)$ sont opposés, contradiction.

(2) a) Les éléments de G sont de la forme $(x, y) \mapsto (\varepsilon x + p, y + q)$ avec p, q dans $\mathbb{Z}$, et $\varepsilon = 1$ si q est impair, et $\varepsilon = -1$ sinon. Ces applications sont de composantes affines, donc sont C^∞. Si un tel élément fixe un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$, alors $q = 0$, donc $\varepsilon = 1$, donc $p = 0$. L'action de G est donc libre. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout (x, y) dans la boule $B(0, n)$ de centre 0 et de rayon n dans $\mathbb{R}^2$, si $|p| \geq 2n + 1$ ou $|q| \geq 2n + 1$, alors $|\varepsilon x + p| \geq |p| - |x| \geq n + 1 > n$ ou $|y + q| \geq |q| - |y| \geq n + 1 > n$, donc $B(0, n)$ ne rencontre qu'un nombre fini de ses images par des éléments de G, et l'action est propre.

b) Les deux générateurs de G agissant par translation entière sur la coordonnée verticale, il est immédiat que l'application $(x, y) \mapsto y$, qui est C^∞, induit par passage au quotient une application $\psi : \mathbb{K} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, qui est C^∞. Pour tout y dans $\mathbb{R}$, la restriction de la projection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ à l'intervalle compact $[y - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3}]$, qui est une injection continue dans un espace séparé, est un homéomorphisme sur son image, dont nous noterons $f :]y - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3}[\to U$ la restrictions aux intérieurs. Comme la projection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un C^∞-difféomorphisme local, f est un C^∞-difféomorphisme. De même, la restricion à $\mathbb{R} \times [y - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3}]$ de la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{K}$ induit un C^∞-difféomorphisme θ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times]y - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3}[$ sur un ouvert de $\mathbb{K}$, qui est $\psi^{-1}(U)$. En posant $\theta' : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times U \to \psi^{-1}(U)$ l'appplication définie par $\theta'(u, v) = \theta(u, f^{-1}(v))$, alors $\psi \circ \theta'(u, v) = v$, et θ' est un C^∞-difféomorphisme. Donc θ' est une trivialisation locale de ψ au-dessus de U.

c) Tout d'abord, N est bien une sous-variété C^∞ de $\mathbb{K}$, par les mêmes arguments qu'en (1) a). Comme en (1) b), les sous-espaces vectoriels $\mathbb{R}\ \pi^*Y(x)$ et $T_x\ (\{0\} \times \mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $T_x\ \mathbb{R}^2$, et la coordonnée de $\pi^*Y(x)$ sur le vecteur horizontal $\frac{\partial}{\partial x}$ de $\mathbb{R}^2$ ne s'annule pas, donc a un signe constant. L'application $\beta : (x, y) \mapsto (-x, y + 1)$ est un élément de G préservant $\{0\} \times \mathbb{R}$, et dont l'application tangente en tout point $(0, y)$ est l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme en (1) b), on montre que $\pi^*Y(0, y) = g^*\pi^*Y(0, y) = (T_x g)^{-1}(Y(0, y + 1)$, donc les signes des composantes horizontales de $\pi^*Y(0, y)$ et de $\pi^*Y(0, y + 1)$ sont opposés, contradiction.

(3) Soit U un voisinage ouvert de q dans Q, et $\theta : F \times U \to U$ une trivialisation locale C^∞ de f au-dessus de U. Comme Q est de dimension 1, nous pouvons supposer que U est le domaine d'une carte locale C^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de sa coordonnée canonique x, et nous notons $\frac{\partial}{\partial x}$ le champ de vecteurs sur U lu dans cette carte. Notons Z' le champ de vecteurs sur $F \times U$, qui en tout point (a, b) vaut l'élément $(0, \frac{\partial}{\partial x})$ de $T_{(a,b)}(F \times U) = T_a F \times T_b U$. Soit K un voisinage fermé de q contenu dans U, et (φ_1, φ_2) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $(f^{-1}(U), P - f^{-1}(K))$ de P. Alors le champ de vecteurs $Z = \varphi_1\, \theta_*(Z')$ (avec prolongement par 0 en dehors de $f^{-1}(U)$) convient.

Schème E.103 (1) Si $a = 0$, alors $M_{a,b,p,q}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 2 dans le plan horizontal $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, donc est une sous-variété C^∞ de dimension 1. Supposons donc que $a \neq 0$.

Comme l'application $(r, \theta, w) \mapsto (u = r\cos\theta, v = r\sin\theta, w)$ de coordonnées cylindriques est un C^∞-difféomorphisme local de $]0, +\infty[\ \times \mathbb{R}^2$ dans $(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R}$, et comme la propriété d'être une sous-variété est locale, il suffit de montrer que l'ensemble $M'_{a,b,p,q}$ des (r, θ, w) tels que $(r - 2 + iw)^p = ae^{i(q\theta+b)}$ est une sous-variété de $]0, +\infty[\ \times \mathbb{R}^2$. Considérons l'application $f :]0, +\infty[\ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ telle que $f(r, \theta, w) = (r - 2 + iw)^p - ae^{i(q\theta+b)}$, qui est clairement C^∞. Notons que 0 est une valeur de f, car $f(2 + a^{1/p}, 0, 0) = 0$, et que $M'_{a,b,p,q} = f^{-1}(0)$. Alors, en tout point (r, θ, w) de $M'_{a,b,p,q}$, on a $\frac{\partial f}{\partial r} = p(r - 2 + iw)^{p-1}$, $\frac{\partial f}{\partial w} = ip(r - 2 + iw)^{p-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta} = aiqe^{i(q\theta+b)} = iq(r - 2 + iw)^p$. Ces trois vecteurs du plan vectoriel réel $\mathbb{C}$ sont non nuls (car $r - 2 + iw$ est de module $a^{1/p}$). Ils engendrent $\mathbb{C}$ sauf s'il existe λ, λ' deux réels tels que $iq(r - 2 + iw) = \lambda p$ et $iq(r - 2 + iw) = \lambda' ip$. La première équation entraine que $r - 2 = 0$, la seconde que $w = 0$, ce qui est impossible. Donc f est une submersion en tout point de $M'_{a,b,p,q}$, et 0 est une valeur régulière, atteinte, de f. Le

résultat en découle.

(2) a) Les champs de vecteurs A, B, C sont C^∞ car leurs composantes dans la base canonique le sont. Les vecteurs $A(x, y, z)$ et $B(x, y, z)$ sont clairement linéairement indépendants, donc engendrent un plan vectoriel. Un petit calcul immédiat (en utilisant par exemple la formule $[A, B](\omega) = d_\omega A(B(\omega)) - d_\omega B(A(\omega))$ pour le crochet de champs de vecteurs d'un ouvert d'un espace $\mathbb{R}^n$) montre que les champs A et B commutent (i.e. $[A, B] = 0$). Donc par le théorème de Frobénius, le champs de plans Δ, qui est C^∞ car engendré par deux champs de vecteurs C^∞ linéairement indépendants, est intégrable.

b) Le flot de A, passant à l'instant $t = 0$ en (x_0, y_0, z_0), est solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = x \end{cases},$$

donc ses coordonnées sont $x(t) = t + x_0, y(t) = y_0, z(t) = \frac{t^2}{2} + x_0 t + z_0 = \frac{x(t)^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} + z_0$.

Le flot de C, passant à l'instant $t = 0$ en (x_0, y_0, z_0), est solution du système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = 0 \end{cases},$$

donc ses coordonnées sont $x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, y(t) = y_0 \cos t + x_0 \sin t, z(t) = z_0$, et ϕ_t^C est la rotation d'angle $-t$ autour de l'axe vertical.

Comme ces flots sont définis sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, les champs de vecteurs A et C sont complets.

c) On remarque que $C = -yA + xB$ est tangent à $\mathcal{F}$, donc on subodore que chaque feuille de $\mathcal{F}$ est invariante par les flots de A et de C, ce qui permet de deviner l'équation des feuilles de $\mathcal{F}$.

Pour tout (x_0, y_0, z_0) dans $\mathbb{R}^3$, notons $\mathcal{L}_{(x_0,y_0,z_0)}$ la surface d'équation $z = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x_0^2+y_0^2}{2} + z_0$, qui est bien une sous-variété C^∞ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, comme graphe de l'application C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x_0^2+y_0^2}{2} + z_0$. Si $\mathcal{L}$ est le feuilletage de $\mathbb{R}^3$, image réciproque du feuilletage standard de dimension 2 (par les plans horizontaux) de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ par le C^∞-difféomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - \frac{x^2+y^2}{2})$, alors $\mathcal{L}_{(x_0,y_0,z_0)}$ est la feuille de $\mathcal{L}$ passant par (x_0, y_0, z_0). Maintenant, comme le plan tangent à la surface $z = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x_0^2+y_0^2}{2} + z_0$, en un point (x, y, z) de cette surface, a pour équation $Z = xX + yY = 0$, donc contient les vecteurs $A(x, y, z)$ et $B(x, y, z)$, l'espace tangent à $\mathcal{L}_{(x_0,y_0,z_0)}$ en (x_0, y_0, z_0) est $\Delta(x_0, y_0, z_0)$. Donc par unicité, $\mathcal{L} = \mathcal{F}$, et le résultat est démontré.

(3) a) Le sous-ensemble T est le tore de révolution standard, dont on a vu qu'il est une sous-variété C^∞ de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$

b) On travaille en coordonnées cylindriques (r, θ, w) sur $(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \times \mathbb{R}$. L'application $f : T \to \mathbb{S}_1$ définie par $f(r, \theta, w) = (r - 2 + iw)^p e^{-iq\theta}$ (qui est bien à valeurs dans $\mathbb{S}_1$, car $r - 2 + iw$ est de module 1) est une application C^∞ par restriction, et $M_{1,b,p,q} = f^{-1}(e^{ib})$. Si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors l'application $\psi : (M_{1,b,p,q} \times e^{i]b-\epsilon,b+\epsilon[}) \to T$ définie par $(r, \theta, w) \mapsto (r, \theta - t/q, w)$ est une trivialisation de f au-dessus du voisinage ouvert $e^{i]b-\epsilon,b+\epsilon[}$ de e^{ib}.

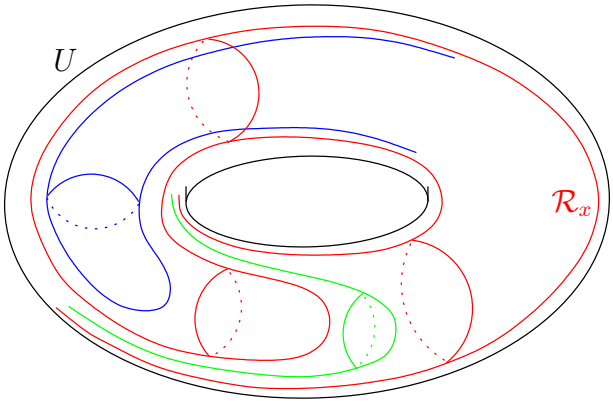
(4) a) L'application φ est clairement C^∞, et son image est clairement contenue dans U, car $\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} < 1$. Si (u, v, w) appartient à U, notons $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ et z un argument du

nombre complexe $u+iv$. Posons $x = (r-2)/(1-(r-2)^2-w^2)$ et $y = w/(1-(r-2)^2-w^2)$. Il n'est pas difficile de voir que $\varphi^{-1}(u,v,w) = \{(x,y,z+2n\pi) \ : n \in \mathbb{Z}\}$, donc l'image de φ est bien U.

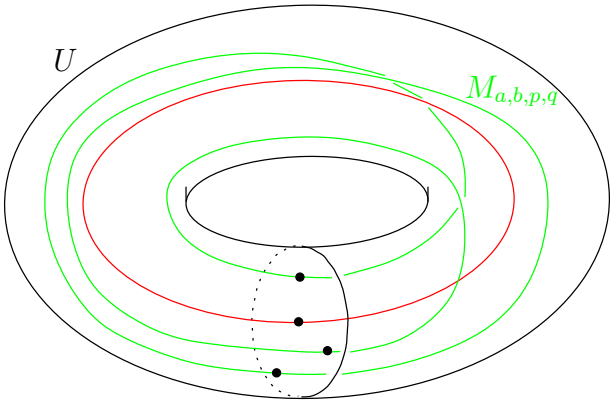
Pour tout (u_0, v_0, w_0) dans U, avec z_0 un argument du nombre complexe $u_0 + iv_0$, la restriction de φ à $\mathbb{R}^2 \times]z_0 - \frac{\pi}{2}, z_0\pi + \frac{\pi}{2}[$ est une immersion C^∞, injective, donc par le théorème d'inversion locale, est un C^∞-difféomorphisme sur son image, qui est un ouvert V de U qui contient (u_0, v_0, w_0).

La préimage de $\varphi^{-1}(V)$ est la réunion disjointe des ouverts $\mathbb{R}^2 \times]z_0 + 2n\pi - \frac{\pi}{2}, z_0 + 2n\pi + \frac{\pi}{2}[$ pour n dans $\mathbb{Z}$, et la restriction de φ sur chacun de ces ouverts est un C^∞-difféomorphisme, donc φ est un revêtement C^∞.

b) L'existence de ce feuilletage et de ces champs de vecteurs vient du fait que le feuilletage $\mathcal{F}$ et les champs de vecteurs C et $\frac{\partial}{\partial z}$ sont invariants par translations verticales. Le champ de vecteurs C' est tangent à $\mathcal{R}$, car C est tangent à $\mathcal{F}$, et D' n'est pas tangent à $\mathcal{R}$, car $\frac{\partial}{\partial z}$ n'est pas tangent à $\mathcal{F}$, et que la propriété d'être tangent à un point d'une sous-variété est invariante par C^∞-difféomorphisme local.



(5) a) Par les diverses propriétés d'invariance par rotation, ceci découle du fait que l'application $r \mapsto r/(1+r^2)$ converge vers 1 quand r tend vers $+\infty$



Schème E.104 Nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(1) Considérons l'application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(a,b,c,d) \mapsto (a^2+b^2+c^2+d^2, ac-bd)$, qui est polynomiale, donc C^∞. On a $f(1,0,0,0) = (1,0)$ et

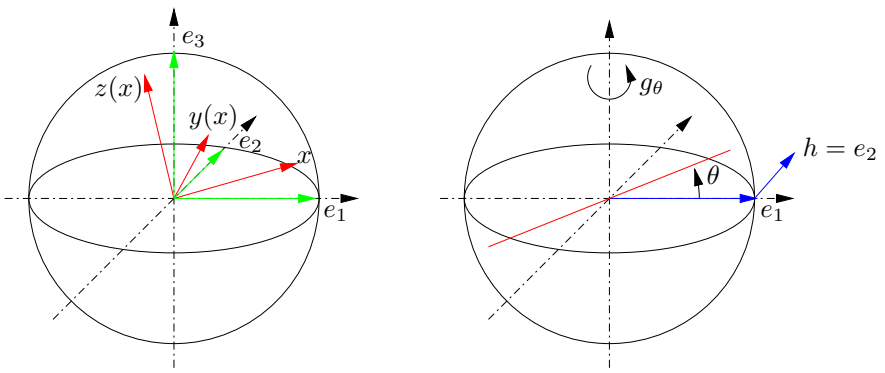
$$df_{(a,b,c,d)} : (x,y,z,t) \mapsto (2ax+2by+2cz+2dt, az+cx-bt-dy) \ .$$

Montrons que $df_{(a,b,c,d)}$ est surjective pour tout (a,b,c,d) dans M_1, donc f sera une submersion au voisinage de tout point de $M_1 = f^{-1}(1,0)$. Par le théorème des submersions, ceci montrera que M_1, qui est non vide, est une sous-variété de $\mathbb{R}^4$ de dimension $4-2=2$, contenue dans la sous-variété $\mathbb{S}_3$, donc est une sous-variété de $\mathbb{S}_3$.

Soit donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ et $ac-bd = 0$. Il suffit de montrer que le noyau de $df_{(a,b,c,d)}$ est de dimension 2. L'un des a,b,c,d est non nul, et parce que le groupe des permutations de coordonnées préservant les deux polynômes $a^2+b^2+c^2+d^2$ et $ac-bd$ agit transitivement sur les coordonnées, nous pouvons supposer que $a \neq 0$. L'espace des solutions du système d'équations $ax+by+cz+dt = 0$ et $az+cx-bt-dy = 0$ est de dimension 2 : c'est immédiat si $a \neq \pm c$ en considérant le système de deux équations d'inconnues x et z ; si $a = \epsilon c$ avec $\epsilon \in \{\pm 1\}$, alors $b \neq 0$ car $ac = bd$, donc le résultat est acquis symétriquement si $b \neq \pm d$; sinon, comme $ac = bd$, on a aussi $b = \epsilon d$, et le système d'équations s'écrit $a(x+\epsilon z) + b(y+\epsilon t) = 0$, $a(x+\epsilon z) - b(y+\epsilon t) = 0$, dont l'espace des solutions est bien de dimension 2.

[Voici une autre méthode, plus courte. L'application $f : \mathbb{S}_3 \to \mathbb{R}$ définie par $(a,b,c,d) \mapsto ac-bd$ est C^∞, comme restriction d'application C^∞ à une sous-variété de $\mathbb{R}^4$. Pour tout $x = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{S}_3$, son application tangente $T_x f$ est la restriction à $T_x\mathbb{S}_3$ de la forme linéaire $\ell : (w,y,z,t) \mapsto az+cw-bt-dy$. Comme $(-c,d,-a,b) \in T_x\mathbb{S}_3 = x^\perp$ si $(a,b,c,d) \in M_1$ et $\ell(-c,d,-a,b) = -1 \neq 0$, l'application $T_x f$ est surjective si $x \in M_1$, donc f est une submersion en tout point de M_1. Par le théorème des submersions, $M_1 = f^{-1}(1,0)$, qui est non vide, est une sous-variété de $\mathbb{S}_3$ de dimension $3-1=2$.]

(2) a) Montrons que f est une immersion C^∞. Comme ceci est local, il suffit de le vérifier au voisinage de tout point $x_0 \in \mathbb{S}_2$. Pour tout g dans $SO(3)$ et x dans $\mathbb{S}_2$, la conjugaison par g de la rotation d'axe $\mathbb{R}x$ et d'angle π est la rotation d'angle π et d'axe $\mathbb{R}g(x)$, donc $f(g(x)) = gf(x)g^{-1}$. Donc par transitivité, nous pouvons supposer que $x_0 = e_1$.



Pour x proche de $x_0 = e_1$ dans $\mathbb{S}_2$, le triplet (x, e_2, e_3) est encore une base directe de $\mathbb{R}^3$, que l'on orthonormalise par le procédé de Gramm-Schmidt pour obtenir une base orthonormée directe $(x, y(x), z(x))$, avec $x \mapsto y(x)$ et $x \mapsto z(x)$ de classe C^∞ sur un voisinage de x_0. Soit P_x la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $(x, y(x), z(x))$, qui

est dans SO(3), et vérifie $P_{x_0} = \mathrm{id}$. Alors par définition, $f(x) = P_x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P_x^{-1}$ donc f est C^∞. De plus, pour tout h dans $T_{x_0}\mathbb{S}_2 - \{0\}$, montrons que $T_{x_0}f(h)$ est non nul. Le vecteur non nul h est tangent à un unique grand cercle passant par x_0. Quitte à conjuguer par des rotations, on peut supposer que c'est le grand cercle horizontal, et que la direction de h est celle du sens trigonométrique. Quitte à normaliser, on peut aussi supposer que h est de norme 1. Bref $h = e_2$. Si $g_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $T_{x_0}f(h) = \frac{d}{d\theta}_{|\theta=0} \; g_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} g_\theta^{-1}$. Un petit calcul montre que $T_{x_0}f(h) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est non nul.

[Voici deux autres méthodes pour vérifier que f est une immersion C^∞.

Pour la première, on vérifie que $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 - 1 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 \\ 2x_1x_2 & 2x_2^2 - 1 & 2x_2x_3 \\ 2x_1x_3 & 2x_2x_3 & 2x_3^2 - 1 \end{pmatrix}$ en notant $x = (x_1, x_2, x_3)$, donc f est C^∞. Si $f_{ij} = f_{ji}$ est le coefficient (i,j) de f, alors $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} = 0$ si $k \notin \{i,j\}$, et $\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_i} = 4x_i$ si $i = j$, ou $= 2x_i$ sinon. Donc $T_xf : (v_1, v_2, v_3) \mapsto \left(\sum_k \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} v_k\right)_{1 \le i,j \le 3}$ est injective (cmme le montre une petite discussion sur l'annulation des x_i, sachant que $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$), et f est une immersion.

Pour la seconde (la plus courte), pour tout x dans $\mathbb{S}_2$, comme $f(x)$ vaut id sur $\mathbb{R}x$ et $-\mathrm{id}$ sur $x^\perp$, on a $f(x) : y \mapsto 2\langle x, y\rangle x - y$. Or une application d'une variété C^∞ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ est C^∞ si et seulement si son évaluation en tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est C^∞, donc f est C^∞. De plus, par restriction, pour tout h dans $T_x\mathbb{S}_2$, l'application linéaire $T_xf(h)$ est $y \mapsto 2\langle h, y\rangle x + 2\langle x, y\rangle h$, qui en $y = x$ vaut $2h$, donc $T_xf(h)$ est non nul si $h \neq 0$, et T_xf est injective, d'où f est une immersion.]

Maintenant, comme une rotation est déterminée par son axe et son angle, $f(x) = f(y)$ si et seulement si $x = \pm y$. Donc l'application $f : \mathbb{S}_2 \to \mathrm{SO}(3)$ passe au quotient en une application injective $\overline{f} : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_2/\{\pm\mathrm{id}\} \to \mathrm{SO}(3)$, qui est une immersion C^∞ car la projection canonique $\mathbb{S}_2 \to \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est un C^∞-difféomorphisme local. Comme $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est compact, $\overline{f}$ est un plongement C^∞, et son image, qui est aussi l'image de f, est bien une sous-variété C^∞ de SO(3), difféomorphe par $\overline{f}$ à $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

b) Toute matrice de SO(3) est conjuguée à une matrice $g_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc est de trace $1 + 2\cos\theta$ où θ est l'angle de la rotation. Si $c \notin [-1, 3]$, alors N_c est vide, donc est une sous-variété de SO(3). Si $c = -1$, alors N_c est l'ensemble des rotations d'angle $\theta = \pi$, qui est une sous-variété par a). Si $c = 3$, alors $N_c = \{\mathrm{id}\}$, car toute matrice conjuguée à l'identité est l'identité, donc N_c est une sous-variété. Si $c \in]-1, 3[$, montrons que N_c est une sous-variété C^∞ de dimesnion 2 de SO(3). Comme le problème est local, et que la conjugaison par un élément de SO(3) est un C^∞-difféomorphisme de SO(3) préservant N_c, il suffit par transitivité de montrer que N_c est une sous-variété C^∞ au voisinage de g_θ dans SO(3) si $1 + 2\cos\theta = c$. L'application $\mathrm{tr} : \mathrm{SO}(3) \to \mathbb{R}$ est restriction à une sous-variété d'une application linéaire, donc elle est C^∞ et son application tangente

en un point x de SO(3) est la restriction de l'application linéaire tr au sous-espace tangent $T_x\mathrm{SO}(3)$. La courbe $c : t \mapsto g_{\theta+t}$ est une courbe C^∞ tracée sur SO(3) telle que $c(0) = g_\theta$, et $\mathrm{tr}(\dot{c}_0) = 2\sin\theta \neq 0$. Donc tr est une submersion en g_θ, et $N_c = \mathrm{tr}^{-1}(c)$ est une sous-variété de dimension $3 - 1 = 2$ au voisinage de g_θ.

(3) a) Comme M est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$ de dimension p, pour tout y dans M, il existe un voisinage ouvert U de y dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage ouvert V de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et une immersion f de classe C^∞ de V dans $\mathbb{R}^n$, telle que $f : V \to U \cap M$ soit un homéomorphisme. Considérons l'application $\phi : U \times \mathbb{S}_{p-1} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ définie par

$$(x, v) \mapsto \left(f(x), \frac{df_x(v)}{||df_x(v)||} \right) .$$

Pour x fixé, l'application $g : v \mapsto \frac{df_x(v)}{||df_x(v)||}$ de $\mathbb{S}_{p-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ est immersive, car en notant ℓ l'application linéaire df_x, on a par un calcul immédiat pour tout $h \in T_v\mathbb{S}_{p-1}$,

$$T_v g(h) = \frac{\ell(h)}{||\ell(v)||} - \frac{\ell(v)\langle \ell(h), \ell(v)\rangle}{||\ell(v)||^3} = \frac{\ell\Big(||\ell(v)||^2\ h - \langle \ell(h), \ell(v)\rangle\ v\Big)}{||\ell(v)||^3} .$$

Comme ℓ est injective, $T_v g(h)$ ne peux s'annuler que si $||\ell(v)||^2\ h - \langle \ell(h), \ell(v)\rangle\ v = 0$, ce qui est impossible si $h \neq 0$, car alors $h \in T_v\mathbb{S}_{p-1}$ et $v \in \mathbb{S}_{p-1}$ ne sont pas colinéaires (ils sont non nuls et orthogonaux !).

Comme f est une immersion, l'application linéaire df_x est injective, donc l'application ϕ est bien définie, et est de classe C^∞. Elle est immersive, car sa différentielle est triangulaire supérieure par blocs, de bloc en haut à gauche injectif car f est une immersion, et de bloc en bas à droite injectif par ce qui précède.

Par définition de T^1M et de la structure de variété de TM, l'application Φ est une bijection de $V \times \mathbb{S}_{p-1}$ dans $(U \times \mathbb{R}^n) \cap T^1M$.

Comme $\mathbb{S}_{p-1}$ est compacte et $f : V \to U \cap M$ propre, l'application $\Phi : V \times \mathbb{S}_{p-1}$ dans $(U \times \mathbb{R}^n) \cap T^1M$ est propre, c'est donc une immersion C^∞ qui est un homéomorphisme sur son image, et T^1M est bien une sous-variété C^∞. De plus, Φ est une trivialisation locale C^∞ de π au-dessus de $U \cap M$ de fibre $\mathbb{S}_{p-1}$, car $\pi \circ \Phi = \mathrm{pr}_1$, et donc π est une fibration C^∞ de fibre $\mathbb{S}_{p-1}$.

[Une autre manière de voir que T^1M est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est la suivante. Considérons l'application $f : TM \to \mathbb{R}$ définie par $(x, v) \mapsto ||v||^2$, qui est C^∞ comme restriction d'application C^∞ à la sous-variété TM de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Son application tangente $T_{(x,v)}f$ en un point (x, v) de TM est la restriction à $T_{(x,v)}TM$ de la forme linéaire $\ell : (h_1, h_2) \mapsto 2\langle v, h_2\rangle$. Comme $(0, v) \in T_{(x,v)}TM$ (comme vecteur tangent au temps $t = 0$ de la courbe $t \mapsto (x, (1 + t)v)$ de classe C^1 tracée sur TM) et $\ell(0, v) \neq 0$ si $v \neq 0$, on en déduit que $T_{(x,v)}f$ est surjective en tout point (x, v) de T^1M, et donc f est une submersion en tout point de T^1M. Donc $T^1M = f^{-1}(1)$, qui est non vide, est une sous-variété de dimension $\dim TM - 1 = 2p - 1$.]

En tout point du cercle $\mathbb{S}_1$, il existe exactement deux vecteurs tangents unitaires, l'un tournant dans le sens trigonométrique, l'autre dans le sens des aiguilles d'une montre. En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec $\mathbb{C}$ de manière usuelle, on a $T^1\mathbb{S}_1 = \{(x, ix), x \in \mathbb{S}_1\} \cup \{(x, -ix), x \in \mathbb{S}_1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, qui est bien C^∞-difféomorphe à $\mathbb{S}_1 \coprod \mathbb{S}_1$.

b) Pour tout g dans SO(3), l'application $g : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{S}_2$ est restriction de l'application linéaire de matrice g, donc pour tout x dans SO(3), l'application $T_x g : T_x\mathbb{S}_2 \to T_{gx}\mathbb{S}_2$

est aussi restriction de cette application linéaire, qui préserve la norme euclidienne. Donc $Tg : (x, v) \mapsto (gx, T_x g(v) = gv)$ envoie $T^1\mathbb{S}_2$ dans lui-même.

Pour tout $(x, v) \in T^1\mathbb{S}_2$, notons $x \wedge v$ l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $(x, v, x \wedge v)$ soit une base orthonormée directe, et soit $P_{x,v}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $(x, v, x \wedge v)$, qui est bien un élément de SO(3). Posons $\Phi : (x, v) \mapsto P_{x,v}$. Alors $\Phi \circ Tg(x, v) = \Phi(gx, gv) = g\Phi(x, v)$ car $(gx) \wedge (gv) = g(x \wedge v)$ et par composition des matrices de passages. L'application Φ est C^∞, car les coefficients de $P_{x,v}$ dépendent de manière C^∞ de ceux de x, v, et elle est bijective car il existe un et un seul élément de SO(3) envoyant une base orthonormée directe sur une autre. L'application $g \mapsto (ge_1, ge_2)$ de SO(3) dans $T^1\mathbb{S}_2$, où e_1, e_2 sont les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, est restriction d'une application polynomiale, donc est C^∞. C'est clairement l'inverse de Φ, donc Φ est un C^∞-difféomorphisme.

(4) a) On vérifie que $\langle (w, z), (iw, \pm iz) \rangle = 0$, donc X et Y sont bien à valeurs dans $T\mathbb{S}_3$ (et même dans $T^1\mathbb{S}_3$ car $||(iw, \pm iz)|| = |w|^2 + |z|^2 = 1$). De plus, X et Y sont C^∞, comme restrictions d'applications polynomiales. Comme $\mathbb{S}_3$ est compact, les champs de vecteurs X et Y sont complets. Par séparation des variables, comme $[Z, \pm Z] = 0$, on a $[X, Y] = 0$.

b) Les vecteurs unitaires $X(w, z)$ et $Y(w, z)$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe λ dans $\{\pm 1\}$ tel que $X(w, z) = \lambda Y(w, z)$. Si $\lambda = 1$, ceci implique que $(w, z) \in C_1$ et si $\lambda = -1$, ceci implique que $(w, z) \in C_2$. Donc Δ est bien un champ de plans sur l'ouvert $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$ de la variété $\mathbb{S}_3$. Comme il est engendré en tout point par des champs de vecteurs C^∞, il est C^∞. Comme le crochet des champs de vecteurs X et Y engendrant Δ est en tout point dans Δ (car nul !), le champ de plans Δ est intégrable par le théorème de Frobenius.

Pour montrer que toute courbe intégrale de X ou de Y est contenue dans une feuille de $\mathcal{F}$, il suffit par connexité de montrer que dans toute carte locale feuilletée, toute courbe intégrale est contenue dans une feuille locale. Par naturalité des feuilletages et des courbes intégrales par les C^∞-difféomorphismes, on peut supposer que $\mathcal{F}$ est le feuilletage linéaire standard, de feuilles les plans horizontaux. Alors X et Y sont des champs de vecteurs horizontaux, donc leurs courbes intégrales sont horizontales, donc contenues dans les feuilles du feuilletage linéaire standard.

c) Considérons les deux applications $(t, (w, z)) \mapsto (e^{it}w, e^{it}z)$ et $(t, (w, z)) \mapsto (e^{it}w, e^{-it}z)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_3$ dans $\mathbb{C}^2$, d'images clairement dans $\mathbb{S}_3$. Alors leurs dérivées par rapport au temps t sont respectivement les applications $(t, (w, z)) \mapsto (ie^{it}w, ie^{it}z) = X(e^{it}w, e^{it}z)$ et $(t, (w, z)) \mapsto (ie^{it}w, -ie^{-it}z) = Y(e^{it}w, e^{it}z)$. Par unicité du flot local des champs de vecteur, la première application est donc le flot local de X et la seconde celui de Y. L'application $f_{w,z}$ est donc $(s, t) \mapsto (e^{i(s+t)}w, e^{i(s-t)}z)$. Quitte à faire un changement de coordonnée linéraire à la source, ce qui ne change pas l'image, il suffit donc de montrer que l'application $g_{w,z} : (s, t) \mapsto (e^{is}w, e^{it}z)$ est d'image une sous-variété C^∞-difféomorphe à $\mathbb{T}^2$.

L'application $g_{w,z}$ est clairement C^∞, et immersive (car son application tangente en tout point est la multiplication par i dans chacun des deux facteurs).

De plus, comme une rotation est déterminée par son axe et son angle, $g_{w,z}(s, t) = g_{w,z}(s', t')$ si et seulement si $(s, t) - (s', t') \in 2\pi\mathbb{Z}^2$. Donc l'application $g_{w,z} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}_3$ passe au quotient en une application injective $\overline{g_{w,z}} : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{S}_3$, qui est une immersion C^∞ car la projection canonique $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ est un C^∞-difféomorphisme local. Comme $\mathbb{T}^2$ est compact, $\overline{g_{w,z}}$ est un plongement C^∞, et son image, qui est aussi l'image de $g_{w,z}$, est bien

une sous-variété C^∞ de $\mathbb{S}_3$, difféomorphe par $\overline{g_{w,z}}$ à $\mathbb{T}^2$.

(5) a) L'application $x \mapsto (x, X(x))$ est C^∞, car X l'est, et immersive injective car sa première composante l'est, donc bijective sur son image, de bijection réciproque une restriction d'une application linéaire, donc continue. Donc cette application, en tant qu'immersion C^∞ injective qui est un homéomorphisme sur son image est un plongement C^∞.

b) Soit U un voisinage ouvert de x dans $\mathbb{R}^n$, V un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^p$ et $f : V \to U \cap M$ un paramétrage local C^∞ de M. On sait que $\varphi : V \times \mathbb{R}^p \to (U \times \mathbb{R}^n) \cap TM$ définie par $(x, v) \mapsto (f(x), df_x(v))$ est un paramétrage local de TM. Un calcul immédiat par blocs, utilisant le fait que la différentielle d'une application linéaire est elle-même, montre que pour tous $h, k \in \mathbb{R}^p$,

$$d\varphi_{(x,v)}(h, k) = \Big(df_x(h) + d^2 f_x(v, k),\ df_x(k)\Big)\ .$$

Comme $T_{(x,v)}TM$ est l'image de la différentielle en (x, v) du paramétrage local φ, le résultat en découle.

c) Par compacité, il suffit de montrer que les points d'intersection de A et B sont isolés. En prenant une carte locale, on peut supposer que $M = \mathbb{R}^p$. Or si A et B sont transverses en un point d'intersection x, alors on peut écrire au voisinage de x la sous-variété B comme le graphe d'une application de l'espace tangent à B en x à valeurs dans l'espace tangent à A en x. Ce graphe ne rencontre A, dans un voisinage de x, qu'en ce point x.

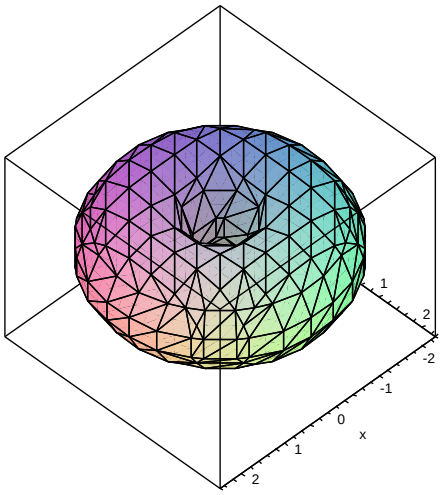
d) Pour tout champ de vecteurs X, soit $g_X : M \to TM$ l'application qui à x associe $(x, X(x))$. Notons que $T_x\, g_X : T_xM \to T_{(x,X(x))}TM$ est l'application $h \mapsto (h, T_xX(h))$. Comme g_X est un plongement d'image N_X, le sous-espace vectoriel $T_{(x,X(x))}N_X$ de l'espace tangent $T_{(x,X(x))}TM$ est l'image de l'application linéaire $T_x\, g_X$. En particulier, pour tout x dans M tel que $X(x) = 0$, on a $T_{(x,0)}N_0 = T_xM \times \{0\}$, et donc $T_{(x,0)}N_0$ et $T_{(x,0)}N_X = \{(h, T_xX(h))\ :\ h \in T_xM\}$ sont supplémentaires si et seulement si T_xX est surjective.

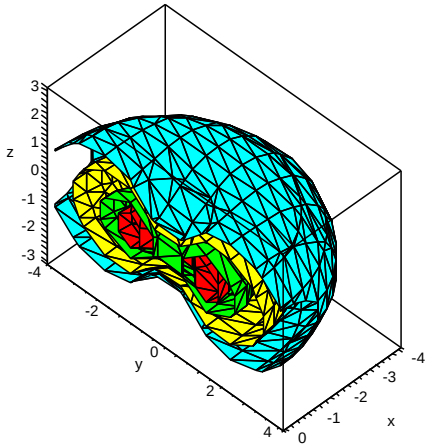
e) L'application X est restriction d'application linéaire, donc est de classe C^∞, et son application tangente en tout point x de $\mathbb{S}_2$ est la restriction à $T_x\mathbb{S}_2$ de cette application linéaire. Comme $\langle (a, b, c), (0, -c, b)\rangle = 0$, le vecteur $X(x)$ appartient à $T_x\mathbb{S}_2 = \{v \in \mathbb{R}^3\ :\ \langle x, v\rangle = 0\}$ pour tout x dans $\mathbb{S}_2$. Les zéros de X sont les triplets (a, b, c) de $\mathbb{S}_2$ tels que $b = c = 0$, donc sont $(\pm 1, 0, 0)$. En ces points, les sous-espaces tangents à $\mathbb{S}_2$ sont égaux au plan des deux dernières coordonnées : $T_{(\pm 1,0,0)}\mathbb{S}_2 = \{0\} \times \mathbb{R}^2$. Comme $T_{(\pm 1,0,0)}X : T_{(\pm 1,0,0)}\mathbb{S}_2 \to T_{(\pm 1,0,0)}\mathbb{S}_2$ est l'application $(0, b, c) \mapsto (0, -c, -b)$ qui est surjective, le résultat découle de la question précédente.

f) Non, par la formule de Hopf donnant la caractéristique d'Euler de $\mathbb{S}_2$ (qui est 2) en fonction des indices d'un champ de vecteurs à zéros isolés en ces zéros (voir paragraphe 6.6.2).

(6) a) L'action de G préserve $\mathbb{S}_3$, car $|\epsilon w|^2 + |\eta z|^2 = |w|^2 + |z|^2$, ainsi que C_1 et C_2. Tout élément de G agit par une application C^∞ (car restriction d'une application linéaire à une sous-variété) sur l'ouvert $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$. Le groupe G est fini (d'ordre 4), et agit librement sur $\mathbb{S}_3 - (C_1 \cup C_2)$, car si $(\epsilon w, \eta z) = (w, z)$ et $w \neq 0, z \neq 0$, alors $\epsilon = \eta = 1$. Le résultat découle alors de la définition de la structure de variété quotient.

(7) b) Par la question (4) c), on a $M_{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}} = \{(w, z) \in \mathbb{S}_3\ :\ |w| = |z|\} = \Psi^{-1}(\mathbb{C} \times \{0\})$. Comme $\left|\frac{w+\overline{z}}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{w-\overline{z}}{\sqrt{2}}\right|$ si et seulement si $\mathrm{Re}\,(wz) = 0$ et que $\mathrm{Re}\,(a + ib)(c + id) = ac - bd$, le résultat en découle.





Le dessin de gauche ci-dessus est l'image par la projection stéréographique de pôle $(1,0,0,0)$ du tore $R^{-2}(M_{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}})$. Le dessin de droite est l'image par cette projection stéréographique du feuilletage $R^{-2}(\mathcal{F})$ de feuilles $R^{-2}(\mathcal{F}_{(w,z)}) = R^{-2}(M_{w,z})$. Pour expérimenter sur MAPLE, voici des instruction possibles.

```
with(plots): a:=(x^2+y^2+z^2-1)/(x^2+y^2+z^2+1): b:=2*x/(x^2+y^2+z^2+1):
c:=2*y/(x^2+y^2+z^2+1): d:=2*z/(x^2+y^2+z^2+1): p:=(a+c)*(a-c)-(b+d)*(b-d):
implicitplot3d(p,x=-2.4..2.4,y=-2.4..2.4,z=-2..2, scaling=constrained,
axes=boxed)); implicitplot3d([p-0.6,p-0.4,p,p+0.4],x=-4..0,y=-4..4,z=-3..3,
color=[cyan,yellow,green,red], scaling=constrained, axes=boxed));
```

5 Groupes de Lie et espaces homogènes

Nous renvoyons à [MT, Bou4, Die2, Die3, CSM, Hel] pour d'autres informations sur ce chapitre. La référence [MT] est vraiment excellente, et donc vivement recommandée.

5.1 Groupes de Lie

• **Groupes topologiques.**

Un *groupe topologique* est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure d'espace topologique compatibles, i.e. telles que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

soit continue. Il revient au même de demander que les applications de composition $(x, y) \mapsto xy$ et d'inverse $x \mapsto x^{-1}$ soient continues.

Un *morphisme (de groupes topologiques)* entre deux groupes topologiques est un morphisme de groupes qui est continu. La collection des groupes topologiques, des ensembles de morphismes entre deux groupes topologiques, avec la composition des applications et les applications identités, est une catégorie (voir l'appendice A.6). Un *isomorphisme de groupes topologiques* est un isomorphisme de groupes qui est un homéomorphisme. Deux groupes topologiques sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de groupes topologiques de l'un sur l'autre.

La *composante neutre* d'un groupe topologique est la composante connexe de son élément neutre.

Soit G un groupe topologique, d'élément neutre e. Définissons la *translation à gauche* $L_g : G \to G$ et la *translation à droite* $R_g : G \to G$, respectivement par $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg^{-1}$. Ces applications sont des homéomorphismes, car continues et bijectives d'inverses $L_{g^{-1}}$ et $R_{g^{-1}}$ respectivement. Il est à remarquer que ces applications commutent : pour tous g, h dans G,

$$R_g \circ L_h = L_h \circ R_g \ .$$

Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes, avec G' un groupe topologique, alors, pour tout g dans G,

$$f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f \ .$$

Donc un morphisme de groupes entre deux groupes topologiques est continu si et seulement s'il est continu en l'élément neutre.

Si Homéo(G) désigne le groupe des homéomorphismes de G, alors les applications de G dans Homéo(G) définies par $g \mapsto L_g$ et $g \mapsto R_g$ sont des morphismes de groupes :

$$L_{gh} = L_g \circ L_h, \quad R_{gh} = R_g \circ R_h \ .$$

(C'est pour cette dernière propriété que l'on définit de la manière ci-dessus la translation à droite. Certains ouvrages notent à tort R_g l'application $x \mapsto xg$.) En particulier, $L_e = \mathrm{id}, (L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}, R_e = \mathrm{id}, (R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$.

Proposition 5.1 *Si G_0 est la composante neutre d'un groupe topologique G, alors*

• *G_0 est un sous-groupe distingué de G,*

- *les composantes connexes de G sont les classes à gauche (ainsi que les classes à droite) de G modulo G_0,*
- *si G_0 est ouverte, alors le groupe topologique quotient (i.e. l'ensemble quotient muni des structures de groupe quotient et d'espace topologique quotient – qui est un groupe topologique –) G/G_0 est discret.*

Preuve. L'application de $G_0 \times G_0$ dans G définie par $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est continue, donc son image est contenue dans G_0 par connexité, donc G_0 est un sous-groupe. Pour tout g dans G, l'application de G_0 dans G définie par $x \mapsto gxg^{-1}$ est continue, donc son image est contenue dans G_0 par connexité, donc G_0 est distingué. Le reste est immédiat. □

Exercice E.105 *Montrer que tout groupe topologique connexe est engendré par tout voisinage de son élément neutre.*

• **Définitions.**

Un *groupe de Lie (réel)* est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure de variété C^∞ compatibles, i.e. telles que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & xy^{-1} \end{array}$$

soit de classe C^∞. Il revient au même de demander que les applications de composition $(x, y) \mapsto xy$ et d'inverse $x \mapsto x^{-1}$ soient de classe C^∞.

Tout groupe de Lie, quand on oublie son atlas maximal de cartes, est un groupe topologique. Nous verrons dans la fin de ce paragraphe consacré à des résultats culturels ce qui est vrai dans le problème réciproque.

Notons qu'il découle facilement de la définition que, dans un groupe de Lie G, les translations à gauche $L_g : G \to G$ et à droite $R_g : G \to G$, définies respectivement par $x \mapsto gx$ et $x \mapsto xg^{-1}$, sont des C^∞-difféomorphismes.

Un *morphisme (de groupes de Lie)* entre deux groupes de Lie est un morphisme de groupes qui est de classe C^∞. Notons qu'un morphisme de groupes entre deux groupes de Lie est C^∞ si et seulement s'il est C^∞ en e, car $f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f$ pour tout g dans G. La collection des groupes de Lie, des ensembles des morphismes entre deux groupes de Lie, avec la composition des applications et les applications identité, est une catégorie (voir l'appendice A.6) : les applications identité sont des morphismes et la composition de deux morphismes est un morphisme. Un *isomorphisme (de groupes de Lie)* est un isomorphisme de groupes qui est un C^∞-difféomorphisme. Deux groupes de Lie sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre.

On définit de même un *groupe de Lie complexe* (en demandant que G soit une variété analytique complexe, et que l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ soit analytique complexe), et pour tout corps local K, un *groupe de Lie sur K* (appelé *groupe de Lie p-adique* si $K = \mathbb{Q}_p$), voir paragraphe 2.3. Mais nous ne considérerons essentiellement que des groupes de Lie réels dans ce cours. Comme pour les variétés, un groupe de Lie complexe admet aussi une structure naturelle de groupe de Lie réel.

Soit G un groupe de Lie. Un *sous-groupe de Lie* de G est une partie de G qui est un sous-groupe de G et une sous-variété de classe C^∞ de G. Comme les translations à gauche

sont des C^∞-difféomorphismes, il suffit de vérifier que cette partie est un sous-groupe et une sous-variété C^∞ au voisinage de l'élément neutre. Sauf mention explicite du contraire, une telle partie sera toujours muni de ces deux structures. Comme celles-ci sont compatibles par restriction, tout sous-groupe de Lie est donc un groupe de Lie. Un *plongement (de groupes de Lie)* d'un groupe de Lie H dans un groupe de Lie G est un morphisme de groupes de H dans G qui est un plongement de variétés C^∞. L'image de H est alors un sous-groupe de Lie de G.

• **Exemples.**

(1) Soit G un groupe. Muni de la topologie discrète, G est un groupe topologique, que l'on appelle *groupe discret*. Si G est dénombrable, alors le groupe G, muni de son atlas de cartes de variété de dimension 0 évident, est un groupe de Lie.

(2) Les groupes $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, munis de leur structure de variété analytique réelle, donc C^∞, évidente, sont des groupes de Lie (et les deux derniers sont des groupes de Lie complexes).

(3) Le produit de deux groupes de Lie, pour la structure de groupe produit et de variété produit, est un groupe de Lie.

(4) Si V est un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie, alors le groupe

$$\mathrm{GL}(V)$$

des automorphismes linéaires de V, muni de sa structure d'ouvert de l'espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie $\mathrm{End}(V)$ des applications linéaires de V dans lui-même, est un groupe de Lie réel (resp. complexe).

En effet, montrons que la composition et l'inverse sont C^∞ (resp. analytiques complexes). La composition $(f, g) \mapsto f \circ g$ est la restriction à l'ouvert $\mathrm{GL}(V)$ d'une application bilinéaire de $\mathrm{End}(V)$, donc est C^∞ (resp. analytique complexe). Si g est un élément de $\mathrm{GL}(V)$, alors son inverse est l'unique application f vérifiant l'équation $g \circ f - \mathrm{id} = 0$. Le théorème des fonctions implicites, appliqué à la fonction $F(g, f) = g \circ f - \mathrm{id}$, dont la différentielle partielle par rapport à la seconde variable en un point (g, f) est l'application linéaire inversible $Y \mapsto g \circ Y$ de $\mathrm{End}(V)$ dans lui-même, montre que l'inverse $g \mapsto g^{-1}$ est C^∞ (resp. analytique complexe).

L'espace tangent en tout point de $\mathrm{GL}(V)$ est identifié à $\mathrm{End}(V)$, et le fibré tangent à $\mathrm{GL}(V)$ est identifié à $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{GL}(V) \times \mathrm{End}(V) \to \mathrm{GL}(V)$.

(5) La multiplication de deux matrices carrées réelles (resp. complexes) est polynomiale en les coefficients, donc C^∞ (resp. analytique complexe). Par la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\, {}^t\mathrm{Comatrice}(M)$ exprimant l'inverse d'une matrice inversible, l'inverse d'une matrice carrée inversible réelle (resp. complexe) est rationnelle (de dénominateur ne s'annulant pas) en les coefficients, donc C^∞ (resp. analytique complexe). Donc, pour $K = \mathbb{R}$ (resp. $K = \mathbb{C}$), le groupe

$$\mathrm{GL}_n(K),$$

muni de sa structure de variété C^∞ (resp. analytique complexe) en tant qu'ouvert de l'espace vectoriel réel (resp. complexe) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ (resp. $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$) est un groupe de Lie réel (resp. complexe).

Les groupes de Lie $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont canoniquement isomorphes, par l'application qui à un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ associe sa matrice dans la base canonique. De même pour $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Notons que $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ est un sous-groupe de Lie réel du groupe de Lie réel défini par $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$.

(6) L'application exponentielle $x \mapsto e^x$ de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un isomorphisme de groupes de Lie. L'application déterminant $x \mapsto \det x$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un morphisme de groupes de Lie. Pour tout g dans G, la *conjugaison* $i_g : G \to G$ définie par $x \mapsto gxg^{-1}$ est un isomorphisme de groupes de Lie.

Exercice E.106 *Soient n, p, q des éléments de $\mathbb{N}$. On note I_n la matrice identité $n \times n$, et*

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix}.$$

Montrer que les parties suivantes du groupe de Lie réel défini par $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ pour un entier m convenable, en sont des sous-groupes de Lie, et calculer leurs dimensions :

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ \det x = 1\} \\
\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ : \ \det x = 1\} \\
\mathrm{O}(n) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^t x\, x = I_n\} \\
\mathrm{SO}(n) & = & \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\
\mathrm{O}(p,q) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R}) \ : \ {}^t x\, I_{p,q}\, x = I_{p,q}\} \\
\mathrm{SO}(p,q) & = & \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{R}) \\
\mathrm{U}(n) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t \overline{x}\, x = I_n\} \\
\mathrm{SU}(n) & = & \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{U}(p,q) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t \overline{x}\, I_{p,q}\, x = I_{p,q}\} \\
\mathrm{SU}(p,q) & = & \mathrm{U}(p,q) \cap \mathrm{SL}_{p+q}(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^t x\, J_n\, x = J_n\} \\
\mathrm{O}_n(\mathbb{C}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t x\, x = I_n\} \\
\mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) & = & \mathrm{O}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) & = & \{x \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t x\, J_n\, x = J_n\} \\
\mathrm{Sp}(p,q) & = & \{x \in \mathrm{Sp}_{p+q}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t \overline{x}\, K_{p,q}\, x = K_{p,q}\} \\
\mathrm{Sp}_*(n) & = & \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}(2n) \\
\mathrm{SL}(n,\mathbb{H}) & = & \{x \in \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ J_n\, x = \overline{x} J_n\} \\
\mathrm{SO}(n,\mathbb{H}) & = & \{x \in \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t \overline{x}\, J_n\, x = J_n\}
\end{array}}.$$

Parmi les groupes ci-dessus, on peut montrer que seuls les groupes de Lie réels $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$ ont une structure de groupe de Lie complexe qui est C^∞-compatible avec leur structure de groupe de Lie réel. Les notations des trois derniers groupes ne sont pas standards.

- **Propriétés élémentaires.**

Proposition 5.2 *(a) Un morphisme de groupes de Lie est une application de rang constant.*

(b) Un morphisme de groupes de Lie, qui est bijectif, est un isomorphisme de groupes de Lie.

Preuve. Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie.

(a) Pour tout x dans G, comme $f \circ L_x = L_{f(x)} \circ f$, le théorème de dérivation des applications composées montre que

$$T_x f \circ T_e L_x = T_e L_{f(x)} \circ T_e f \ .$$

Les translations à gauche sont des C^∞-difféomorphismes, donc $T_e L_x$ et $T_e L_{f(x)}$ sont des isomorphismes linéaires. Par conséquent, $T_x f$ et $T_e f$ ont même rang.

(b) Supposons f bijectif. Comme $f \circ L_x = L_{f(x)} \circ f$ pour tout x dans G, il suffit de vérifier que f est un C^∞-difféomorphisme local en e. Sinon, par le théorème de forme normale des subimmersions (proposition 2.8) et l'injectivité de f, il existerait un voisinage compact V de e dans G tel que $f(V)$ soit un fermé d'intérieur vide dans H. Comme G est séparable, il existe une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dense dans G, et en particulier $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i V$. Donc l'image $f(G) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f(g_i) f(V)$ de f serait une union dénombrable de parties fermées de H d'intérieur vide. Comme H est métrisable, le théorème de Baire contredirait alors la surjectivité de f. □

Proposition 5.3 *Si G_0 est la composante neutre d'un groupe de Lie G, alors G_0 est un sous-groupe de Lie distingué ouvert de G, les composantes connexes de G sont les classes à gauche (ainsi que les classes à droite) de G modulo G_0, et le groupe topologique quotient G/G_0 est discret.*

Preuve. Cela découle de la proposition 5.1, en remarquant que G_0 est ouverte, ce qui découle du fait que toute variété est localement connexe par arcs. □

La proposition suivante n'est pas complètement immédiate, car il existe des sous-variétés non fermées dans $\mathbb{R}$, par exemple, mais elle n'est guère compliquée. Nous verrons sa réciproque, qui est vraie et plus profonde, dans le paragraphe 5.3.

Proposition 5.4 *Tout sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie est fermé.*

Preuve. Rappelons qu'une sous-variété est localement fermée, i.e. ouverte dans son adhérence. Si H est un sous-groupe d'un groupe topologique G, alors son adhérence $\overline{H}$ est aussi un sous-groupe de G. Donc si H est un sous-groupe de Lie d'un groupe de Lie, alors H est un ouvert dense dans $\overline{H}$. Or si $g \in \overline{H}$, alors gH est ouvert dans $\overline{H}$, car la multiplication par g est un homéomorphisme de $\overline{H}$ dans lui-même. Donc gH rencontre H, et g appartient à H. □

• **Culture.**

Concluons ce paragraphe en donnant quelques résultats de culture générale, dont nous n'aurons pas besoin dans ce cours, mais qu'il est bien utile de connaître.

Théorème 5.5 *(voir [God, tome II, p. 6.27]) Tout groupe de Lie G admet une unique structure de variété analytique réelle qui rende analytique réelle l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$.*

Théorème 5.6 *(voir [God, tome II, p. 6.33], [Die3, page 172] et le corollaire 5.22.) Soient G, H deux groupes de Lie. Tout morphisme de groupes continu de G dans H est C^∞ (et même analytique réel pour la structure précédente).* □

En particulier, si G est un groupe topologique, alors il existe sur G au plus une structure de groupe de Lie compatible avec sa structure de groupe topologique. Les deux résultats suivants donnent des conditions purement topologiques sur un groupe topologique pour qu'il en admette au moins une.

Théorème 5.7 *(5-ème problème de Hilbert, démontré par Gleason, voir par exemple [MZ, page 184]) Soit G un groupe topologique qui soit une variété topologique. Alors G admet une et une seule structure de groupe de Lie compatible avec sa structure de groupe topologique.* $\square$

Un groupe topologique est dit *sans petit sous-groupe* s'il existe un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe non trivial. Par exemple, le groupe additif $\mathbb{Q}_p$ muni de sa distance usuelle (voir par exemple [Ser2]) n'est pas sans petit sous-groupe. Rappelons que le corps $\mathbb{Q}_p$ est le corps complété du corps $\mathbb{Q}$ pour la distance

$$d(x,x') = \begin{cases} e^{-\nu_p(x-x')} & \text{si } x \neq x' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\nu_p : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z}$ est définie en notant $\nu_p(x)$ l'élément n de $\mathbb{Z}$ tel que $x = p^n \frac{u}{v}$ avec u, v dans $\mathbb{Z}$ premiers entre eux, et non divisibles par p. En effet, si $\mathbb{Z}_p$ est l'adhérence de $\mathbb{Z}$, alors pour tout N, le sous-groupe $p^N\mathbb{Z}_p$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Q}_p$, proche de l'élément neutre si N est grand.

Notons que le groupe topologique $(\mathbb{Q}_p, +)$ est totalement discontinu, et non discret, en particulier la composante neutre de 0, qui est réduite à 0, n'est pas ouverte.

Théorème 5.8 *(Montgomery-Zippin [MZ, pages 169,163], voir aussi les problèmes (5) à (9), pages 162 à 166, de [Die3]) Soit G un groupe topologique localement compact, métrisable séparable, et sans petit sous-groupe. Alors G admet une et une seule structure de groupe de Lie compatible avec sa structure de groupe topologique.* $\square$

Enfin, citons une condition nécessaire pour être un groupe de Lie, qui montre l'importance des exemples ci-dessus. Le résultat ci-dessous dit que tout groupe de Lie est *localement linéaire*, au sens qui sera rendu précis dans la partie 5.7.

Théorème 5.9 *(Ado, voir par exemple [Bou4, Chap. I, page 99]) Soit G un groupe de Lie. Alors il existe un élément n dans $\mathbb{N}$, un voisinage ouvert U de l'élément neutre e dans G, et un plongement analytique réel $j : U \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tous x, y dans U, si xy appartient à U, alors*

$$j(xy) = j(x)j(y) \ . \quad \square$$

Ceci permet théoriquement de ramener l'étude locale (mais seulement locale) des groupes de Lie à celle de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (et de ses sous-groupes), mais cela ne serait pas très intrinsèque. De plus, il existe effectivement des groupes de Lie non linéaires (i.e. qui ne se plongent pas dans un $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$), comme le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, voir [DNF, tome 2, chap. I] et le paragraphe 5.7. Par contre, ceci permet de montrer que tout groupe de Lie est sans petit sous-groupe, en prouvant (en exercice, en utilisant l'application exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est sans petit sous-groupe (mais voir aussi l'exercice E.119 pour une preuve directe).

5.2 Algèbres de Lie

Soit K un corps (commutatif). Une *algèbre de Lie* sur K est un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ sur K muni d'une application bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, notée $(x, y) \mapsto [x, y]$, telle que

- $\forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \quad [y, x] = -[x, y]$,
- $\forall\, x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

L'application $(x, y) \mapsto [x, y]$ s'appelle le *crochet de Lie* de $\mathfrak{g}$, la première propriété s'appelle l'*anticommutativité*, et la seconde l'*identité de Jacobi* pour le crochet de Lie.

Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ deux algèbres de Lie. Un *morphisme (d'algèbres de Lie)* de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ est une application linéaire $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ qui préserve les crochets de Lie, i.e. telle que

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \quad \varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \ .$$

La collection des algèbres de Lie, des ensembles des morphismes entre deux algèbres de Lie, avec la composition des applications et les applications identité, est une catégorie (voir l'appendice A.6) : les applications identité sont des morphismes et la composition de deux morphismes est un morphisme. Un *isomorphisme (d'algèbres de Lie)* de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ est un isomorphisme linéaire, qui préserve les crochets de Lie. Son inverse est alors aussi un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une *sous-algèbre de Lie* de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est stable par le crochet de $\mathfrak{g}$ (i.e. si $X, Y \in \mathfrak{h}$, alors $[X, Y] \in \mathfrak{h}$). Muni de la restriction de ce crochet, c'est une algèbre de Lie. Sauf mention explicite du contraire, toute sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ sera munie de cette structure d'algèbre de Lie.

Exemples. (1) Tout espace vectoriel V sur K, muni du crochet de Lie nul, est une algèbre de Lie sur K, dite *commutative*.

(2) Si A est une algèbre (associative) sur K, alors l'espace vectoriel A, muni du crochet

$$[x, y] = xy - yx \ ,$$

est une algèbre de Lie sur K. C'est par exemple le cas, pour tout espace vectoriel V sur K, de l'algèbre $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V, et on note

$$\mathfrak{gl}(V)$$

l'algèbre de Lie obtenue. Pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, c'est aussi le cas de l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans K, et on note

$$\mathfrak{gl}_n(K)$$

l'algèbre de Lie obtenue.

Si V est un espace vectoriel de dimension finie n sur K, et $\mathcal{B}$ une base de V, alors l'application, qui à un endomorphisme de V associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$, est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ dans $\mathfrak{gl}_n(K)$ (mais il dépend de la base choisie). Par exemple, les algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(K^n)$ et $\mathfrak{gl}_n(K)$ sont canoniquement isomorphes, par l'application qui à un endomorphisme de K^n associe sa matrice dans la base canonique.

(3) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K. Pour tout sous-corps K' de K, l'ensemble $\mathfrak{g}$, muni de son crochet et de sa structure d'espace vectoriel naturelle sur K', est aussi une algèbre de

Lie sur K'. En particulier, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie complexe, nous noterons $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ l'algèbre de Lie réelle ainsi obtenue. Si K' est un sur-corps de K, alors le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ s'étend par bilinéarité de manière unique à l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \otimes_K K'$ sur K'

l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède à la fois une structure d'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ et une structure d'algèbre de Lie réelle, que l'on peut noter pompeusement $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{R}}\, \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

(4) Si $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ sont deux algèbres de Lie sur K, alors l'espace vectoriel produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, muni de l'application

$$[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [y, y'])$$

est une algèbre de Lie sur K, appelée *algèbre de Lie produit*. On définit de même l'algèbre de Lie produit d'une famille quelconque d'algèbres de Lie.

(5) Si M est une variété différentielle réelle de classe C^∞, alors l'espace vectoriel réel $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs C^∞ sur M, muni du crochet de Lie des champs de vecteurs, est une algèbre de Lie réelle (voir la proposition 4.9). Si $f : M \to N$ est un C^∞-difféomorphisme local, alors l'application $f^* : \Gamma(TN) \to \Gamma(TM)$ est un morphisme d'algèbres de Lie (par les propriétés des images réciproques de champs de vecteurs, voir la proposition 4.9). En particulier, si $f : M \to N$ est un C^∞-difféomorphisme, alors l'application $f_* : \Gamma(TM) \to \Gamma(TN)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

(6) Le noyau et l'image d'un morphisme d'algèbres de Lie est une sous-algèbre de Lie.

(7) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une *dérivation (d'algèbres de Lie)* de $\mathfrak{g}$ est une application linéaire $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ telle que

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \quad \delta([x, y]) = [\delta(x), y] + [x, \delta(y)]\ .$$

Remarquons que l'espace des dérivations de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$, que l'on note $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. En effet, si δ et δ' sont des dérivations, alors

$$\delta \circ \delta'([x, y]) = [\delta \circ \delta'(x), y] + [\delta(x), \delta'(y)] + [\delta'(x), \delta(y)] + [x, \delta \circ \delta'(y)]\ ,$$

donc $[\delta, \delta'] = \delta \circ \delta' - \delta' \circ \delta$ est encore une dérivation.

Par exemple, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'application $\mathrm{ad}\, X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ définie par

$$\mathrm{ad}\, X\,(Y) = [X, Y]$$

est une dérivation d'algèbres de Lie (parfois appelée *dérivation intérieure*), car pour tous Y et Z dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{ad}\, X\,([Y, Z]) = [\mathrm{ad}\, X\,(Y), Z] + [Y, \mathrm{ad}\, X\,(Z)]\ ,$$

ce qui est une simple réécriture de l'identité de Jacobi. L'application

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

est un morphisme d'algèbres de Lie, car pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{ad}\, [X, Y]\,(Z) = \mathrm{ad}\, X \circ \mathrm{ad}\, Y\ (Z) - \mathrm{ad}\, Y \circ \mathrm{ad}\, X\ (Z)\ ,$$

ce qui est aussi une simple réécriture de l'identité de Jacobi.

Exercice E.107 *On note* tr X *la trace d'une matrice carrée* X*, et on reprend les notations de l'exercice E.106. Montrer que les exemples suivants sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie réelle définie par* $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$*, pour un* m *convenable, et que* $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ *sont des sous-algèbres de Lie complexes de* $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$*, pour un* m *convenable :*

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ : \ \mathrm{tr}\ X = 0\} \\
\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ : \ \mathrm{tr}\ X = 0\} \\
\mathfrak{o}(n) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \ : \ {}^tX = -X\} \\
\mathfrak{so}(n) & = & \mathfrak{o}(n) \\
\mathfrak{o}(p,q) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tX\, I_{p,q} + I_{p,q}\, X = 0\} \\
\mathfrak{so}(p,q) & = & \mathfrak{o}(p,q) \\
\mathfrak{u}(n) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{X} = -X\} \\
\mathfrak{su}(n) & = & \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \\
\mathfrak{u}(p,q) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{X}\, I_{p,q} + I_{p,q}\, X = 0\} \\
\mathfrak{su}(p,q) & = & \mathfrak{u}(p,q) \cap \mathfrak{sl}_{p+q}(\mathbb{C}) \\
\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tX\, J_n + J_n\, X = 0\} \\
\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^tX = -X\} \\
\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) & = & \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) \\
\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) & = & \{X \in \mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^tX\, J_n + J_n\, X = 0\} \\
\mathfrak{sp}(p,q) & = & \{X \in \mathfrak{sp}_{p+q}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{X}\, K_{p,q} + K_{p,q}\, X = 0\} \\
\mathfrak{sp}_*(n) & = & \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{su}(2n) \\
\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H}) & = & \{X \in \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ J_n\, X = \overline{X} J_n\} \\
\mathfrak{so}(n,\mathbb{H}) & = & \{X \in \mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C}) \ : \ {}^t\overline{X}\, J_n + J_n\, X = 0\}
\end{array}} \ .$$

Ainsi $\mathfrak{o}(n)$ est l'algèbre de Lie des matrices réelles n-n antisymétriques, et $\mathfrak{u}(n)$ est l'algèbre de Lie (réelle) des matrices complexes n-n antihermitiennes.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur K. Le *centre* de $\mathfrak{g}$ est le sous-ensemble

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \forall\, Y \in \mathfrak{g}, \ \ [X,Y] = 0\} \ .$$

Par l'identité de Jacobi, le sous-ensemble $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Le résultat suivant est une version facile (sous l'hypothèse très particulière d'avoir un centre trivial) du théorème d'Ado de linéarité des algèbres de Lie de dimension finie, qui est l'étape essentielle de la preuve du théorème 5.9 et sur lequel nous reviendrons (mais toujours sans donner de preuve) au paragraphe 5.7.

Proposition 5.10 *Une algèbre de Lie sur* K *de dimension finie* n *et de centre trivial se plonge dans l'algèbre de Lie* $\mathfrak{gl}_n(K)$*.*

Preuve. L'application adjointe $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres de Lie, dont le noyau est exactement le centre de $\mathfrak{g}$. □

5.3 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie.

Soient G un groupe de Lie (réel), et T_eG l'espace tangent à G en son élément neutre e. Pour tout g dans G, rappelons que la conjugaison par g est l'isomorphisme de groupes de

Lie $i_g : G \to G$ défini par

$$i_g : x \mapsto gxg^{-1} \ .$$

Si $\mathrm{Aut}(G)$ désigne le groupe des automorphismes de groupes de Lie de G, il est immédiat que l'application $i : G \to \mathrm{Aut}(G)$, définie par $g \mapsto i_g$, est un morphisme de groupes : $i_{gg'} = i_g \circ i_{g'}$ (et donc $i_e = \mathrm{id}$).

Notons

$$\mathrm{Ad}\ g = T_e\ i_g : T_eG \to T_eG$$

l'application tangente en e de i_g. L'application $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(T_eG)$, définie par $g \mapsto \mathrm{Ad}\ g$, est un morphisme de groupes de Lie (par le théorème de dérivation des applications composées et le fait que l'application de $G \times G$ dans G définie par $(g, h) \mapsto ghg^{-1}$ soit de classe C^∞), appelé la *représentation adjointe* de G.

Notons

$$\mathrm{ad} = T_e\ \mathrm{Ad} : T_eG \to \mathrm{End}(T_eG)$$

l'application tangente en e de Ad. Pour tous X, Y dans T_eG, posons

$$[X, Y] = \mathrm{ad}\ X(Y) \ ,$$

et notons que $[\cdot, \cdot] : T_eG \times T_eG \to T_eG$ est bilinéaire sur $\mathbb{R}$. Si G est un groupe de Lie complexe, alors T_eG est un espace vectoriel complexe, et $[\cdot, \cdot]$ est bilinéaire sur $\mathbb{C}$, car $T_e\ i_g$ et T_e Ad sont linéaires sur $\mathbb{C}$ (voir la propriété (6) de la partie 3.4).

Exemples. (1) Si G est abélien, alors i_g vaut l'identité pour tout g dans G, donc $\mathrm{Ad}\ g : T_eG \to T_eG$ vaut l'identité et $\mathrm{ad} : T_eG \to \mathrm{End}(T_eG)$ est l'application nulle.

(2) Explicitons les applications Ad, ad lorsque $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme G est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace tangent à G en l'élément neutre Id est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $i_g : G \to G$ est la restriction à l'ouvert G de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de l'application linéaire $X \mapsto gXg^{-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans elle-même, on a

$$\mathrm{Ad}\ g\ (X) = gXg^{-1} \ .$$

Donc la représentation adjointe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons

$$Y \mapsto e^Y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Y^n$$

l'application exponentielle des matrices. Soit X un élément dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le chemin $c : t \mapsto e^{tX}$ est un chemin C^1 sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, tel que $c(0) = \mathrm{Id}$ et $\dot{c}(0) = X$. Donc, pour tous X, Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{ad}\ X\ (Y) = ((T_e\ \mathrm{Ad})(X))(Y) = \frac{d}{dt}_{|t=0} (e^{tX} Y e^{-tX}) = XY - YX \ .$$

Donc ad X (Y) est le crochet de Lie $[X, Y]$ des matrices X et Y, et les notations sont cohérentes.

(3) De même, si V est un espace vectoriel réel de dimension finie, et si G est le groupe de Lie $\mathrm{GL}(V)$, dont l'espace tangent en l'élément neutre id est $\mathrm{End}(V)$, alors la représentation adjointe de G est l'action de G par conjugaison sur $\mathrm{End}(V)$: pour tous g dans $\mathrm{GL}(V)$ et h dans $\mathrm{End}(V)$,

$$\mathrm{Ad}\ g\ (h) = g \circ h \circ g^{-1} \ .$$

En considérant l'application exponentielle des endomorphismes, on montre de même que l'application ad est le crochet de Lie des applications linéaires : pour tous g, h dans $\mathrm{End}(V)$,

$$\mathrm{ad}\ g\ (h) = [g, h] = g \circ h - h \circ g\ .$$

Proposition 5.11 *L'espace vectoriel T_eG, muni de l'application $(X, Y) \to [X, Y]$, est une algèbre de Lie réelle.*

Cette algèbre de Lie est appelée l'*algèbre de Lie du groupe de Lie G*, et est notée $\mathfrak{g}$. Comme conséquence de la formule de Jacobi (voir l'alinéa précédent l'exercice E.107), l'application $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres de Lie, appelé la *représentation adjointe* de $\mathfrak{g}$. En particulier, d'après ce qui précède, l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, et pour tout espace vectoriel réel V de dimension finie, l'algèbre de Lie de $\mathrm{GL}(V)$ est $\mathfrak{gl}(V)$. De même, si G est un groupe de Lie complexe, alors l'espace vectoriel complexe T_eG muni de l'application $(X, Y) \to [X, Y]$, est une algèbre de Lie complexe.

Preuve. On considère une carte locale (U, φ) (de classe C^∞) de G en l'élément neutre e, de sorte que $\varphi(e) = 0$. Cette carte fournit aussi une carte locale $(\pi^{-1}(U), T\varphi)$ pour le fibré tangent $\pi : TG \to G$. On note $\overline{x}$ l'image d'un point x de U par φ, ainsi que l'image d'un point x de $\pi^{-1}(U)$ par $T_{\pi(x)}\varphi$.

Puisque $ex = xe = x$ et puisque le produit dans G est C^∞, on a, pour tous x, y dans G proches de e,

$$\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y} + B(\overline{x}, \overline{y}) + \epsilon(\overline{x}, \overline{y})$$

où B est une application bilinéaire, et l'application ϵ, ainsi que celles qui suivent, est une application de plusieurs variables réelles de classe C^∞, définie sur un voisinage de 0, dont chaque terme du développement limité en 0 contient une puissance d'ordre au moins 2 dans au moins l'une des variables.

En appliquant cette formule avec $y = x^{-1}$, on obtient $0 = \overline{x} + \overline{x^{-1}} + B(\overline{x}, \overline{x^{-1}}) + \epsilon(\overline{x}, \overline{x^{-1}})$. Donc

$$\overline{x^{-1}} = -\overline{x} + \epsilon(\overline{x})\ .$$

Donc, pour tous g, x dans G proches de e,

$$\overline{gxg^{-1}} = \overline{(gx)g^{-1}} = \overline{x} + B(\overline{g}, \overline{x}) - B(\overline{x}, \overline{g}) + \epsilon(\overline{x}, \overline{g})\ .$$

D'où, pour tout g dans G proche de e et tout X dans T_eG,

$$\overline{\mathrm{Ad}\ g\ (X)} = \overline{X} + B(\overline{g}, \overline{X}) - B(\overline{X}, \overline{g}) + \epsilon(\overline{g})\ .$$

Par conséquent, pour tous X, Y dans T_eG,

$$\overline{\mathrm{ad}\ X\ (Y)} = B(\overline{X}, \overline{Y}) - B(\overline{Y}, \overline{X})\ .$$

L'anticommutativité et l'identité de Jacobi de l'application $(X, Y) \mapsto \mathrm{ad}\ X\ (Y)$ se déduisent alors du cas des algèbres associatives. □

Par exemple, si G est un groupe de Lie abélien, alors son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est commutative.

Exercice E.108 *Montrer que dans le tableau suivant, le terme de droite d'une ligne est l'algèbre de Lie du terme de gauche (voir les exercices E.106 et E.107).*

$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{O}(n)$	$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$
$\mathrm{SO}(n)$	$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$
$\mathrm{O}(p,q)$	$\mathfrak{o}(p,q) = \mathfrak{so}(p,q)$
$\mathrm{SO}(p,q)$	$\mathfrak{so}(p,q) = \mathfrak{o}(p,q)$
$\mathrm{U}(n)$	$\mathfrak{u}(n)$
$\mathrm{SU}(n)$	$\mathfrak{su}(n)$
$\mathrm{U}(p,q)$	$\mathfrak{u}(p,q)$
$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathfrak{su}(p,q)$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$
$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{o}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$
$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\mathfrak{sp}(p,q)$
$\mathrm{Sp}_*(n)$	$\mathfrak{sp}_*(n)$
$\mathrm{SL}(n,\mathbb{H})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$
$\mathrm{SO}(n,\mathbb{H})$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{H})$

En particulier, l'algèbre de Lie du groupe spécial linéaire est l'algèbre de Lie des matrices de trace nulle, l'algèbre de Lie du groupe spécial orthogonal est l'algèbre de Lie des matrices antisymétriques, et l'algèbre de Lie du groupe spécial unitaire est l'algèbre de Lie des matrices antihermitiennes de trace nulle.

Proposition 5.12 *Si G et G' sont des groupes de Lie, d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$, si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupes de Lie, alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un morphisme d'algèbres de Lie. En particulier, pour tout g dans G, l'application $\mathrm{Ad}\ g : T_e G \to T_e G$ est un morphisme d'algèbres de Lie :*

$$\forall\ X, Y \in \mathfrak{g}, \quad \mathrm{Ad}\ g\ ([X,Y]) = [\mathrm{Ad}\ g\ (X), \mathrm{Ad}\ g\ (Y)]\ .$$

Preuve. Pour tout g dans G, puisque f est un morphisme,

$$f \circ i_g = i_{f(g)} \circ f\ .$$

Donc pour tout g dans G et tout X dans $\mathfrak{g}$, par le théorème de dérivation des applications composées,

$$T_e f \circ (\mathrm{Ad}\ g) = (\mathrm{Ad}\ f(g)) \circ T_e f\ ,$$

et

$$T_e f \circ (\mathrm{ad}\ X) = (\mathrm{ad}\ T_e f(X)) \circ T_e f\ .$$

D'où, pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$,

$$T_e f([X,Y]) = [T_e f(X), T_e f(Y)]\ .$$

Le cas particulier est obtenu en prenant $G = G'$ et $f = i_g$. $\square$

En particulier, l'espace tangent en l'élément neutre à un sous-groupe de Lie H d'un groupe de Lie G est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de G, qui s'identifie avec l'algèbre de Lie de H.

Notons que l'algèbre de Lie d'un produit de groupes de Lie s'identifie avec l'algèbre de Lie produit des algèbres de Lie de ces groupes de Lie.

Il découle aussi de la proposition 5.12 que si $f : G \to G'$ est un isomorphisme de groupes de Lie, alors $T_e f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

5.4 Champs de vecteurs invariants

Soit G un groupe de Lie (réel), d'élément neutre e, et d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Rappelons que la translation à gauche (resp. à droite) par un élément g de G est le C^∞-difféomorphisme $L_g : G \to G$ (resp. $R_g : G \to G$) défini par $L_g : x \mapsto gx$ (resp. $R_g : x \mapsto xg^{-1}$), et que les applications L_g et R_h commutent.

Un champ de vecteurs X sur G est dit *invariant à gauche* si pour tout g dans G, on a

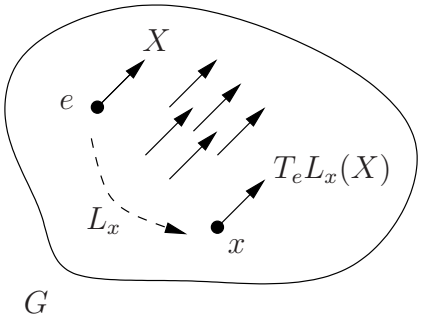
$$(L_g)_* X = X \ .$$

On définit de même un champ de vecteurs invariant à droite. Notons ${}^G\Gamma(TG)$ (respectivement $\Gamma(TG)^G$) l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ et invariants à gauche (respectivement à droite) sur G.

Pour tout x dans G et tout X dans $\mathfrak{g}$, notons

$$X(x) = T_e L_x(X) \ ,$$

de sorte que l'application $x \mapsto X(x)$ soit un champ de vecteurs sur G, dit *associé* à X.



Proposition 5.13 *(1) L'ensemble ${}^G\Gamma(TG)$ est une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie $\Gamma(TG)$.*

(2) L'application de $\mathfrak{g}$ dans $\Gamma(TG)$ définie par

$$X \mapsto \{x \mapsto X(x)\}$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ sur ${}^G\Gamma(TG)$.

Dans la suite de ces notes, nous identifierons souvent l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G avec l'algèbre de Lie ${}^G\Gamma(TG)$ des champs de vecteurs invariants à gauche sur G par l'application précédente.

Preuve. (1) La première affirmation découle du fait que les applications $(L_g)_*$ sont linéaires et préservent le crochet de Lie des champs de vecteurs : pour tous X, Y dans $\Gamma(TG)$,

$$(L_g)_*(X + \lambda Y) = (L_g)_* X + \lambda (L_g)_* Y, \quad (L_g)_*([X, Y]) = [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] \ ,$$

donc une combinaison linéaire de champs de vecteurs invariants à gauche est encore invariant à gauche, et le crochet de champs de vecteurs invariants à gauche est encore invariant à gauche.

(2) Soit $X \in \mathfrak{g}$. Écrivons $X = \frac{d}{dt}_{|t=0} c(t)$ avec c un chemin C^∞ passant par e à l'instant $t = 0$. Alors $X(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} xc(t)$. Comme la multiplication de G est C^∞, le champ de vecteurs $x \mapsto X(x)$ est bien C^∞. Pour tous g, x dans G, on a

$$(L_g)_* X(x) = T_{g^{-1}x} L_g(X(g^{-1}x)) = T_{g^{-1}x} L_g \circ T_e L_{g^{-1}x}(X) = T_e L_x(X) = X(x) \ .$$

Donc le champ de vecteurs $x \mapsto X(x)$ est bien invariant à gauche. Il est immédiat par construction que l'application $X \mapsto \{x \mapsto X(x)\}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$ sur ${}^G\Gamma(TG)$. Il reste donc à démontrer que l'application $X \mapsto \{x \mapsto X(x)\}$ préserve les crochets de Lie.

Pour Z dans $\mathfrak{g}$, notons $\mathcal{L}_{\overline{Z}}$ la dérivation associée au champ de vecteurs invariant à gauche $\overline{Z}$ associé à Z. Notons que, pour toute application $\varphi : G \to \mathbb{R}$ de classe C^1, pour tout x dans G, et pour toute courbe $t \mapsto a(t)$ de classe C^1 dans G tangente en e à Z (i.e. $a(0) = e$ et $\dot{a}(0) = Z$), on a

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi \circ R_{a(t)^{-1}}(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \varphi(x\, a(t)) = T_x\varphi \circ T_e L_x(Z) = \mathcal{L}_{\overline{Z}}\varphi(x) \ .$$

Soient X, Y dans $\mathfrak{g}$ et x dans G. Soient b et c deux courbes C^2 dans G tangentes en e à X et Y respectivement, et $f : G \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. L'application $(s,t) \mapsto f(x\, b(s)c(t)b(s)^{-1})$ est de classe C^2. On a, en notant $A = \frac{d^2}{dsdt}_{|s=0,t=0}\ f(x\, b(s)c(t)b(s)^{-1})$,

$$\begin{array}{rcl} A & = & \frac{d}{ds}_{|s=0}\ T_x f \circ T_e L_x \circ (\mathrm{Ad}\ b(s))(Y) \\ & = & T_x f \circ T_e L_x([X,Y]) \\ & = & \mathcal{L}_{\overline{[X,Y]}} f(x) \ . \end{array}$$

De plus, par le lemme de Schwarz,

$$\begin{array}{rcl} A & = & \frac{d^2}{dtds}_{|t=0,s=0}\ f(x\, b(s)c(t)b(s)^{-1}) \\ & = & \frac{d}{dt}_{|t=0}\ T_x(f \circ R_{c(t)^{-1}}) \circ T_e L_x(X) - \frac{d}{dt}_{|t=0} T_{xc(t)} f \circ T_e L_{xc(t)}(X) \\ & = & \frac{d}{dt}_{|t=0}\ \mathcal{L}_{\overline{X}}(f \circ R_{c(t)^{-1}})(x) - \frac{d}{dt}_{|t=0} \mathcal{L}_{\overline{X}} f(xc(t)) \\ & = & \mathcal{L}_{\overline{X}}\mathcal{L}_{\overline{Y}} f(x) - \mathcal{L}_{\overline{Y}}\mathcal{L}_{\overline{X}} f(x) \ . \end{array}$$

Donc $X \mapsto \{x \mapsto X(x)\}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans ${}^G\Gamma(TG)$. $\square$

Remarque. Cette preuve fournit une nouvelle preuve de la proposition 5.11 : l'anticommutativité et l'identité de Jacobi pour le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ se déduisent de celles du crochet de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche.

Étudions maintenant les propriétés de l'intégration des champs de vecteurs invariants à gauche. Rappelons qu'un champ de vecteurs X de classe C^∞ est complet si son flot local ϕ est défini sur $\mathbb{R} \times M$, ce qui implique que $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre C^∞ de C^∞-difféomorphismes de M, voir la définition dans la proposition 4.3. La seconde assertion ci-dessous découle aussi de la dernière remarque du paragraphe 4.6.

Proposition 5.14 *Soit G un groupe de Lie et X un champ de vecteurs invariant à gauche sur G. Alors X est complet et, si $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot de X, alors pour tous t dans $\mathbb{R}$ et g, g' dans G, on a*

$$\phi_t(gg') = g\phi_t(g') \ .$$

Preuve. Puisque X est invariant à gauche, et par la propriété d'unicité du flot local de X, pour tout g dans G, le point $\phi_t(gx)$ est défini si et seulement si $\phi_t(x)$ l'est, et alors

$$\phi_t(gx) = g\phi_t(x) \ .$$

D'après le théorème d'existence du flot local, il existe $\epsilon > 0$ et un voisinage ouvert U de e tel que $\phi_t(x)$ soit défini pour (t, x) dans $]-2\epsilon, +2\epsilon[\ \times U$. Donc $\phi_t(x)$ est défini pour (t, x) dans $]-2\epsilon, +2\epsilon[\ \times gU$, pour tout g dans G. Par la proposition 4.3, on en déduit que X est complet. D'après ce qui précède, on a bien $\phi_t(gg') = g\phi_t(g')$ pour tous t dans $\mathbb{R}$ et g, g' dans G. □

Notons la jolie utilisation suivante des champs de vecteurs invariants à gauche.

Proposition 5.15 *Tout groupe de Lie est parallélisable.*

Preuve. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Alors les champs de vecteurs invariants à gauche associés forment en tout point g de G une base de l'espace tangent à G en g. Donc (voir l'exercice E.52), le fibré tangent de G est trivialisable. □

5.5 Application exponentielle

Soit G un groupe de Lie, d'élément neutre e, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Le flot des champs de vecteurs invariants à gauche permet de définir une application canonique cruciale de l'algèbre de Lie dans son groupe de Lie.

On appelle *application exponentielle*, et on note

$$\exp = \exp_G : \mathfrak{g} \to G$$

l'application définie par $X \mapsto \exp\ X = \phi_1(e)$, où $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot du champ de vecteurs invariant à gauche associé à X.

Notons que comme un champ de vecteurs invariant à gauche est complet, le temps 1 de son flot est bien défini. Les exemples ci-dessous expliquent l'origine de cette terminologie.

Exemples. (1) Si G est le groupe de Lie abélien $\mathbb{S}_1 = \{e^{i\theta} \ : \ \theta \in \mathbb{R}\}$, d'élément neutre 1, alors l'espace tangent $T_{e^{i\theta}}\mathbb{S}_1$ en un point $e^{i\theta}$ de la sous-variété $\mathbb{S}_1$ est le sous-espace vectoriel $ie^{i\theta}\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$. Un élément X de l'algèbre de Lie de G est donc de la forme $X = ix$ pour x dans $\mathbb{R}$. Le champ de vecteurs invariant à gauche associé à X est l'application $e^{i\theta} \mapsto X(e^{i\theta}) = ixe^{i\theta}$. Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de ce champ de vecteurs (défini sur $\mathbb{R}\times\mathbb{S}_1$). Alors l'application $t \mapsto \phi_t(1)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est l'unique solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\phi_t(1) = ix\,\phi_t(1)$$

avec condition initiale $\phi_0(1) = 1$. Donc $\phi_t(1) = e^{ixt}$ et

$$\exp X = e^X \ .$$

Donc l'application exponentielle du groupe de Lie $\mathbb{S}_1$, dont l'algèbre de Lie est identifiée comme ci-dessus avec la droite des nombres complexes imaginaires purs, coïncide avec l'exponentielle des nombres complexes.

(2) Soit G le groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, d'élément neutre Id, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ son algèbre de Lie. Comme la multiplication à gauche par un élément de G est un endomorphisme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, le champ de vecteurs invariant à gauche associé à X est

$$g \mapsto X(g) = gX \ ,$$

où gX est la multiplication des matrices g et X. Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de ce champ de vecteurs (défini sur $\mathbb{R} \times G$). Alors l'application $t \mapsto \phi_t(\mathrm{Id})$ de $\mathbb{R}$ dans G est l'unique solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\phi_t(\mathrm{Id}) = \phi_t(\mathrm{Id})X$$

avec condition initiale $\phi_0(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$. Donc $\phi_t(\mathrm{Id}) = e^{tX} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}X^n$ et

$$\exp X = e^X \ .$$

Donc l'application exponentielle du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, coïncide avec l'application exponentielle des matrices.

(3) Si V est un espace vectoriel de dimension finie, on montre de même que l'application exponentielle du groupe de Lie $\mathrm{GL}(V)$, de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ à valeurs dans $\mathrm{GL}(V)$, coïncide avec l'application exponentielle des endomorphismes.

Propriétés. (1) Par changement de variable sur le temps dans l'équation différentielle définissant le flot local, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, si $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot du champ de vecteurs invariant à gauche associé à X, alors

$$\exp\ tX = \phi_t(e) \ .$$

(2) Par les propriétés de régularité du flot local, l'application exponentielle $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est de classe C^∞ (et même, ce qui peut être utile parfois, elle est analytique réelle si G est muni de sa structure de variété analytique réelle canonique, voir le théorème 5.5).

(3) La différentielle en 0 de l'application exponentielle de G est l'application identité de $\mathfrak{g}$.

En effet, en identifiant avec $\mathfrak{g}$ l'espace tangent en tout point de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, on obtient

$$T_0 \exp(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(0 + tX) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \phi_t(e) = X(\phi_0(e)) = X \ .$$

(4) Par le théorème d'inversion locale, on en déduit que l'application exponentielle est un C^∞-difféomorphisme local en 0 (et même un C^ω-difféomorphisme local si G est muni de sa structure de variété analytique réelle canonique).

En particulier, si G est connexe, alors $\exp(\mathfrak{g})$, qui contient un voisinage de l'identité, engendre G, par l'exercice E.105. Mais on prendra garde que l'application exponentielle n'est pas toujours surjective, voir l'exercice E.181.

(5) Un *sous-groupe à un paramètre de* G est un morphisme de groupes de Lie $t \mapsto \gamma_t$ de $\mathbb{R}$ dans G, souvent noté $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Par exemple, le morphisme trivial $t \mapsto e$ est un sous-groupe à un paramètre. Notons $SG_1(G)$ l'ensemble des sous-groupes à un paramètre de G. Alors l'application de $SG_1(G)$ dans $\mathfrak{g}$ définie par

$$\theta : (\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}} \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma_t$$

est une bijection, d'inverse

$$\theta' : X \mapsto (\exp\ tX)_{t\in\mathbb{R}}\ .$$

En effet, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, par complétude et la propriété (1), le flot $(\exp\ tX)_{t\in\mathbb{R}}$ est un sous-groupe à un paramètre, et il est clair que $\theta \circ \theta'$ vaut l'identité. Réciproquement, soient $(\gamma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un sous-groupe à un paramètre de G, $X = \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma_t \in \mathfrak{g}$ et $\overline{X}$ le champ de vecteurs invariant à gauche associé à X. En particulier, $\gamma_0 = e$. De plus,

$$\frac{d}{ds}_{|s=s_0}\gamma_s = \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma_{s_0+t} = \frac{d}{dt}_{|t=0}\gamma_{s_0}\gamma_t = T_eL_{\gamma_{s_0}}(X) = \overline{X}(\gamma_{s_0})\ .$$

La propriété (1) et le théorème d'unicité des courbes intégrales d'un champ de vecteurs montrent donc que les applications $t \mapsto \gamma_t$ et $t \mapsto \exp\ tX$ coïncident.

L'exemple du groupe de Lie quotient $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, où $n \geq 1$, montre qu'un sous-groupe à un paramètre de G, même non trivial, n'est pas forcément injectif. Par ailleurs, son image n'est pas forcément une sous-variété de G, il existe par exemple des sous-groupes à un paramètre (non surjectifs) d'image dense dans $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ pour $n \geq 2$.

(6) Soient H un groupe de Lie et $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie. Alors, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, on a

$$f(\exp_G(X)) = \exp_H(T_ef(X))\ .$$

En effet, l'application $t \mapsto f(\exp_G(tX))$ est un sous-groupe à un paramètre de H, dont la dérivée en $t = 0$ est $T_ef(X)$, et on conclut par la propriété (5).

Exemples. a) Pour tout g dans G et tout X dans $\mathfrak{g}$, la conjugaison $i_g : G \to G$ définie par $h \mapsto ghg^{-1}$ est un morphisme de groupes de Lie, d'application tangente en e égale à $\mathrm{Ad}\ g$ par définition. Donc

$$\exp(\mathrm{Ad}\ g\ (X)) = g\,(\exp\ X)\,g^{-1}\ .$$

b) Comme l'application $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est un morphisme de groupes de Lie, dont l'application tangente en l'identité est ad, pour tout X dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{Ad}(\exp\ X) = e^{\mathrm{ad}\ X}\ .$$

c) Comme l'application déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes de Lie, dont la différentielle en Id est l'application trace $\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, on a

$$\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}\ .$$

d) Si G est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors l'exponentielle de G est la restriction à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ de l'exponentielle des matrices de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il suffit en effet d'appliquer la propriété (6) à l'inclusion $f : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

e) Plus généralement, si H est un sous-groupe de Lie de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ (qui est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$), alors

$$\exp_H = \exp_{G\ |\mathfrak{h}} \ .$$

Il suffit en effet d'appliquer la formule de la propriété (6) à l'inclusion $i : H \to G$, car $T_e i$ est alors l'inclusion $\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$.

(7) Pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$, si $[X, Y] = 0$, alors

$$\exp(X + Y) = \exp\ X\ \exp\ Y \ .$$

On fera bien attention que cette formule n'est en général pas vraie sans l'hypothèse $[X, Y] = 0$. Pour s'en persuader, trouver un contre-exemple pour $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, et montrer que si la formule précédente est vraie pour tous les X, Y dans l'algèbre de Lie de G, alors la composante neutre de G est un groupe de Lie abélien.

Pour démontrer cette formule, remarquons que, pour tout s fixé dans $\mathbb{R}$, l'application

$$t \mapsto \exp(sX)\ \exp(tY)\ \exp(-sX)$$

est un sous-groupe à un paramètre, dont la dérivée en $t = 0$ est

$$\mathrm{Ad}(\exp\ sX)(Y) = e^{\mathrm{ad}\ sX}(Y) = Y$$

car $\mathrm{ad}\ X(Y) = [X, Y] = 0$. Donc, par unicité,

$$\exp(sX)\ \exp(tY)\ \exp(-sX) = \exp(tY) \ .$$

Donc l'application $t \mapsto \exp(tX)\ \exp(tY)$ est un sous-groupe à un paramètre de G, dont la dérivée en $t = 0$ est $X + Y$. Encore une fois par unicité, on a $\exp(tX)\ \exp(tY) = \exp(t(X + Y))$ pour tout t, ce qui montre le résultat.

(8) Calculons l'application tangente de l'application exponentielle.

Proposition 5.16 *Pour tout X dans $\mathfrak{g}$, l'application tangente $T_X \exp : \mathfrak{g} \to T_{\exp\ X} G$ de l'application exponentielle en X est donnée par la formule suivante :*

$$T_X \exp = T_e L_{\exp\ X} \circ \left(\frac{e^{\mathrm{ad}(-X)} - \mathrm{id}}{\mathrm{ad}(-X)} \right) \ .$$

Avant de montrer cette formule, notons que l'application $\Theta : z \mapsto \frac{e^z - 1}{z}$ si $z \neq 0$ et $0 \mapsto 1$ est analytique complexe sur $\mathbb{C}$, car elle coïncide avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!}$. Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, nous noterons comme d'habitude $\Theta(f)$ (ou par abus $\frac{e^f - \mathrm{id}}{f}$) la valeur de cette série convergente d'endomorphismes où nous avons substitué f à z. Pour tous g, h dans G et v dans $T_h G$, notons par abus

$$g \cdot v = T_h L_g(v) \in T_{gh} G \ ,$$

et

$$v \cdot g = T_h R_{g^{-1}}(v) \in T_{hg} G \ .$$

Avec ces notations, notons que par définition $\mathrm{Ad}\ g\ (Z) = g \cdot Z \cdot g^{-1}$ (l'absence de parenthésage vient du fait que L_g et R_g commutent).

Preuve. Il revient au même de montrer que

$$(\exp\ -X) \cdot T_X \exp = \Theta(\mathrm{ad}(-X)) \ .$$

Soient X, Y dans $\mathfrak{g}$ et s, t dans $\mathbb{R}$. Notons $f_X : \mathbb{R} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ l'application définie par

$$f_X(s) : Y \mapsto s\ (\exp(-sX)) \cdot T_{sX} \exp(Y) \ .$$

En différenciant par rapport à X l'équation $\exp\,(s+t)X = \exp\ sX\ \exp\ tX$, on obtient, pour tout Y dans $\mathfrak{g}$,

$$(s+t)T_{(s+t)X} \exp\,(Y) = s(T_{sX} \exp\,(Y)) \cdot (\exp\ tX) + t(\exp\ sX) \cdot (T_{tX} \exp\,(Y)) \ .$$

En se ramenant dans $\mathfrak{g}$ par $(\exp -(s+t)X)\cdot$, on obtient

$$f_X(s+t) = \mathrm{Ad}(\exp(-tX)) \circ f_X(s) + f_X(t) = e^{\mathrm{ad}(-tX)} \circ f_X(s) + f_X(t) \ .$$

En dérivant cette équation par rapport à t en $t = 0$, et comme $f'_X(0) = T_0 \exp = \mathrm{id}$, on obtient

$$f'_X(s) = \mathrm{Id} - \mathrm{ad}\ X \circ f_X(s) \ .$$

On vérifie aisément que l'application $s \mapsto s\,\Theta(s\,\mathrm{ad}(-X))$ est aussi une solution de cette équation différentielle, dont la valeur en $s = 0$ est $0 = f_X(0)$. Par unicité, on a donc $f_X(s) = s\,\Theta(s\,\mathrm{ad}(-X))$. En prenant $s = 1$, le résultat en découle. □

Porisme 5.17 *L'application exponentielle est un* C^∞*-difféomorphisme local en* $X \in \mathfrak{g}$ *si et seulement si les valeurs propres de l'endomorphisme* ad X *de* $\mathfrak{g}$ *appartiennent à* $(\mathbb{C} - 2i\pi\mathbb{Z}) \cup \{0\}$.

Preuve. Par le théorème d'inversion locale, exp est un C^∞-difféomorphisme local en X si et seulement si $T_X \exp$ est un isomorphisme linéaire. Par la proposition précédente, ceci équivaut au fait que $\Theta(-\mathrm{ad}\ X)$ n'ait pas 0 comme valeur propre. Or si λ est une valeur propre de ad X associée au vecteur propre Y_λ, alors $\Theta(-\lambda)$ est une valeur propre de $\Theta(-\mathrm{ad}\ X)$ associée au vecteur propre Y_λ. Donc si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les valeurs propres de ad X, alors $\Theta(-\lambda_1), \ldots, \Theta(-\lambda_k)$ sont celles de $\Theta(-\mathrm{ad}\ X)$. Or $\Theta(z)$ est nul si et seulement si z appartient à $2i\pi\mathbb{Z} - \{0\}$. Le résultat en découle. □

5.6 Sous-groupes de Lie immergés et sous-algèbres de Lie

Soit G un groupe de Lie, d'élément neutre e, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Théorème 5.18 *Soit* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$. *Alors il existe un couple* (H, i) *où* H *est un groupe de Lie connexe, et* $i : H \to G$ *un morphisme injectif de groupes de Lie de* H *dans* G, *tel que* $T_e i$ *soit un isomorphisme d'algèbres de Lie de l'algèbre de Lie de* H *sur* $\mathfrak{h}$.

De plus, si (H', i') *est un autre tel couple, alors il existe un et un seul isomorphisme de groupes de Lie* $f : H' \to H$ *tel que* $i' = i \circ f$.

Un tel sous-groupe $i(H)$ est appelé un *sous-groupe de Lie immergé* de G, bien que ce ne soit pas un sous-groupe de Lie de G en général. Par exemple, lorsque $G = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ où $n \geq 2$, comme les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ sont exactement les sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$, pour la plupart des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ (et c'est le cas de toutes les droites de pentes irrationelles lorsque $n = 2$), le sous-groupe de Lie immergé $i(H)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ n'est pas localement fermé, donc n'est pas un sous-groupe de Lie. On identifie par abus H avec son image par i et l'algèbre de Lie de H avec son image par $T_e i$. Notons que H est muni de deux topologies, sa *topologie intrinsèque* (en tant que groupe de Lie) et sa *topologie induite* (en tant que partie de G), qui peuvent être différentes.

Preuve. Soit p la dimension de $\mathfrak{h}$, et Δ le champ de p-plans invariant à gauche par G et valant $\mathfrak{h}$ en e :

$$\forall g \in G, \quad \Delta_g = T_e L_g(\mathfrak{h}) \ .$$

Ce champ de p-plans est clairement de classe C^∞ (et on peut remplacer C^∞ par C^ω dans toute cette preuve si G est muni de sa structure analytique réelle canonique, voir le théorème 5.5). En effet, soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une base de $\mathfrak{h}$. Alors les champs de vecteurs invariants à gauche associés à $X_1, \ldots, X_p$ sont C^∞ et forment en tout point g de G une base de Δ_g. On applique alors la proposition 4.10.

Puisque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie, par la proposition 5.13, et par le théorème de Frobenius 4.11, le champ de p-plans Δ est intégrable.

Soit H la feuille du feuilletage $\mathcal{F}$ associé à Δ passant par e, munie de sa structure de variété C^∞ définie par la topologie des feuilles. On a vu au paragraphe 4.8 que l'injection $i : H \to G$ est une immersion C^∞ injective de H dans G.

Montrons que H est un sous-groupe de G. Pour tout g dans G, puisque le C^∞-difféomorphisme L_g préserve le champ de p-plans Δ, il préserve le feuilletage $\mathcal{F}$, et donc $L_g(H)$ est la feuille de $\mathcal{F}$ passant par g. En particulier, si g appartient à H, alors $L_g(H) = H$. On en déduit que H est stable par multiplication, ainsi que si g appartient à H, alors il existe h dans H tel que $gh = e$, ce qui implique que $g^{-1} = h$, donc que g^{-1} appartient à H.

Enfin, la restriction à H de l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ est encore C^∞, car cette propriété est locale, et car H est une sous-variété immergée C^∞ dans G.

L'unicité découle de l'unicité de la feuille d'un feuilletage intégrant un champ de p-plans donné et passant par un point donné. □

Avec les identifications qui précèdent cette preuve, le résultat suivant découle immédiatement du théorème 5.18.

Porisme 5.19 *Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application qui à un sous-groupe de Lie immergé de G associe son algèbre de Lie est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de Lie immergés connexes de G sur l'ensemble des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$.* □

Montrons maintenant la réciproque de la proposition 5.4.

Théorème 5.20 *(E. Cartan) Tout sous-groupe fermé H de G est un sous-groupe de Lie de G.*

Preuve. Notons $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \forall\, t \in \mathbb{R}\ , \ \ \exp\ tX \ \in H\}$. C'est le candidat pour être l'algèbre de Lie de H.

Étape 1. Montrons d'abord que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Comme $T_0 \exp = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$, et puisque l'application tangente en (e,e) à la multiplication $G \times G \to G$ est l'application somme $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, on a $\exp X\ \exp Y = \exp(X + Y + o(||X||, ||Y||))$ (pour n'importe quelle norme sur $\mathfrak{g}$). Donc pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$, t dans $\mathbb{R}$ et α, β dans $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to\infty} (\exp \frac{t\alpha X}{n}\ \exp \frac{t\beta Y}{n})^n = \exp\ t(\alpha X + \beta Y)\ .$$

Donc, comme H est un sous-groupe fermé, le sous-ensemble $\mathfrak{h}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$. Montrons que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, i.e. que $[X, Y]$ appartient à $\mathfrak{h}$ pour tous X, Y dans $\mathfrak{h}$. Or

$$\mathrm{ad}\ X\ (Y) = \frac{d}{ds}_{|s=0} e^{s\,\mathrm{ad}\ X}(Y) = \frac{d}{ds}_{|s=0} \mathrm{Ad}(\exp sX)(Y)\ .$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ad}(\exp sX)(Y)$ appartient à $\mathfrak{h}$ pour tout s, c'est-à-dire que, pour tout t dans $\mathbb{R}$, l'élément $\exp(t\,\mathrm{Ad}(\exp sX)(Y))$ appartient à H. Or, par les propriétés de l'application exponentielle,

$$\exp(\mathrm{Ad}(\exp sX)(tY)) = \exp sX\ \exp tY\ \exp(-sX)\ ,$$

ce qui conclut, car H est un sous-groupe.

Étape 2. Montrons que H est une sous-variété de G au voisinage de e. Par translations à gauche, ceci montrera que H est une sous-variété de G (donc un sous-groupe de Lie).

Soit $\mathcal{F}$ le feuilletage C^∞ intégrant le champ de plans invariant à gauche défini par $\mathfrak{h}$, et V un domaine de carte feuilletée en e. Notons $\mathcal{F}_{e,V}$ la feuille locale de e (pour mémoire, c'est la composante connexe de e dans V pour la topologie des feuilles dans V, et c'est une sous-variété C^∞ de V). Il suffit de montrer que si V est suffisamment petit, alors $V \cap H = \mathcal{F}_{e,V}$.

Montrons tout d'abord que le sous-groupe de Lie immergé $\mathcal{F}_e$ de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est contenu dans H. Muni de sa topologie intrinsèque (i.e. de la topologie des feuilles du feuilletage $\mathcal{F}$), le groupe de Lie connexe $\mathcal{F}_e$ est engendré par tout voisinage U de e dans $\mathcal{F}_e$. Il existe un tel voisinage U qui est l'image d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{h}$ par l'application exponentielle. Donc par définition de $\mathfrak{h}$, le voisinage U, et donc $\mathcal{F}_e$, est contenu dans H.

Lemme 5.21 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers X dans $\mathfrak{g}$. S'il existe une suite de nombres réels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positifs, qui converge vers 0, telle que $\exp\ t_n X_n$ appartienne à H pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors X appartient à $\mathfrak{h}$.*

Preuve. Pour tout t dans $\mathbb{R}$, notons k_n la partie entière de t/t_n. Alors, comme t_n converge vers 0,

$$\exp\ tX = \lim_{n\to\infty} \exp(k_n t_n X_n) = \lim_{n\to\infty} (\exp(t_n X_n))^{k_n}\ .$$

Comme H est un sous-groupe fermé, $\exp\ tX$ appartient à H. □

Terminons la preuve de l'étape 2. Nous avons déjà vu que $\mathcal{F}_e$, et donc $\mathcal{F}_{e,V}$, est contenu dans H. Montrons alors, par l'absurde, qu'il existe un voisinage U de e tel que $U \cap H \subset \mathcal{F}_{e,V}$.

Sinon, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans G, qui converge vers e, telle que $g_n \in H - \mathcal{F}_{e,V}$. Soit $\mathfrak{h}'$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, muni d'une norme quelconque. Rappelons que exp est un difféomorphisme local en 0, d'application tangente en 0 égale à l'identité. Il existe donc, par le théorème d'immersion locale, un voisinage W (resp. W') de 0 dans $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}'$), tels que l'application de $W \times W'$ dans G définie par $(x, y) \mapsto \exp\ x\ \exp\ y$ soit un C^∞-difféomorphisme sur un ouvert de V. Écrivons $g_n = \exp\ x_n\ \exp\ y_n$ avec x_n, y_n dans $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ respectivement, et convergeant vers 0. Puisque g_n n'appartient pas à $\mathcal{F}_e$, le vecteur y_n est non nul, donc quitte à extraire, $X_n = y_n/||y_n||$ converge vers un vecteur X n'appartenant pas à $\mathfrak{h}$. Ceci contredit le lemme précédent. □

Comme corollaire du théorème de Cartan, montrons le théorème 5.6.

Porisme 5.22 *Soient G et H deux groupes de Lie. Alors tout morphisme de groupes continu f de G dans H est un morphisme de groupes de Lie.*

Preuve. Le graphe $\mathcal{G}$ de l'application f est un sous-groupe fermé du groupe topologique métrisable $G \times H$, donc est un sous-groupe de Lie du groupe de Lie produit $G \times H$ par le théorème de Cartan. Il est clair que la restriction de la seconde projection pr_2 à $\mathcal{G}$ est un morphisme de groupes de Lie de $\mathcal{G}$ dans H. La restriction g de la première projection pr_1 à $\mathcal{G}$ est un morphisme de groupes de Lie bijectif, donc un isomorphisme de groupes de Lie par la proposition 5.2. Donc $f = \mathrm{pr}_2 \circ g^{-1}$ est un morphisme de groupes de Lie. □

5.7 Revêtements et groupes de Lie

Le but de ce paragraphe est de montrer que le problème de classification des groupes de Lie (réels) connexes se ramène au problème de classification des algèbres de Lie (réelles) de dimension finie. Ceci se fait en deux étapes, en passant d'abord des groupes de Lie connexes aux groupes de Lie simplement connexes, puis des groupes de Lie simplement connexes aux algèbres de Lie.

Nous renvoyons à l'appendice A.4 pour la définition d'un espace topologique simplement connexe (qui contient par définition l'hypothèse de connexité par arcs).

Soient G et G' deux groupes de Lie, d'éléments neutres e et e' respectivement. Un *revêtement de groupes de Lie* de G' dans G est un morphisme de groupes de Lie de G' dans G, qui est un revêtement (entre les espaces topologiques sous-jacents). Un *(iso)morphisme (de revêtements de groupes de Lie)* d'un revêtement de groupes de Lie $p : G' \to G$ dans un revêtement de groupes de Lie $p' : G'' \to G$ est un (iso)morphisme de groupes de Lie $\psi : G' \to G''$ qui est un (iso)morphisme de revêtement (i.e. tel que $p' \circ \psi = p$).

Les exemples cruciaux de revêtements de groupes de Lie sont les suivants (voir l'exercice E.125).

Proposition 5.23 *Si H est un sous-groupe distingué discret de G, alors il existe une et une seule structure de groupe de Lie sur $H\backslash G$ telle que $\pi : G \to H\backslash G$ soit un revêtement de groupes de Lie et un C^∞-difféomorphisme local. De plus, $T_e\pi : T_eG \to T_H(H\backslash G)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

L'ensemble quotient $H\backslash G$ sera, sauf mention explicite du contraire, munie de cette structure de groupe de Lie, et sera appelé *groupe de Lie quotient* de G par H. On identifiera souvent les algèbres de Lie de G et de $H\backslash G$ par $T_e\pi$.

Preuve. Il est immédiat que H agit continuement, librement et proprement sur l'espace topologique G par translations à gauche. Donc (voir le paragraphe 2.4.2), l'espace topologique quotient $H\backslash G$ admet une unique structure de variété C^∞ telle que $\pi : G \to H\backslash G$ soit un C^∞-difféomorphisme local. En particulier, comme le problème de vérifier qu'une application est C^∞ est local, la variété $H\backslash G$, munie de sa structure de groupe quotient, est un groupe de Lie, et la projection canonique $\pi : G \to H\backslash G$ est un revêtement de groupes de Lie. L'unicité est immédiate.

L'application tangente $T_e\pi$ est bien un isomorphisme (d'algèbres de Lie) de l'algèbre de Lie de G sur l'algèbre de Lie du groupe de Lie quotient $H\backslash G$. En effet, si $f : M \to M'$ est un revêtement de variétés de classe C^1, alors pour tout x dans M, l'application $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} M'$ est un isomorphisme linéaire. □

Par exemple, puisque $\{\pm\mathrm{Id}\}$ est un sous-groupe distingué discret du groupe de Lie $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$ pour tout entier n, le quotient

$$\mathrm{PSL}_{2n}(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})/\{\pm\mathrm{Id}\}$$

est un groupe de Lie quotient.

Puisque $\{\pm\mathrm{Id}\}$ est un sous-groupe distingué discret du groupe de Lie $\mathrm{SO}(2n)$ pour tout entier n, le quotient

$$\mathrm{PSO}(2n) = \mathrm{SO}(2n)/\{\pm\mathrm{Id}\}$$

est un groupe de Lie quotient.

Rappelons que le *centre* $Z(G)$ d'un groupe G est l'ensemble des éléments de G commutant avec tous les éléments de G :

$$Z(G) = \{g \in G \ : \ \forall\, h \in G, \ \ gh = hg\} \ .$$

Un sous-groupe de G est *central* s'il est contenu dans le centre de G. Tout sous-groupe central est distingué.

Lemme 5.24 *Soit H un groupe topologique connexe, et Γ un sous-groupe distingué discret. Alors Γ est central dans H.*

Preuve. Pour tout g dans Γ, l'application continue $h \mapsto hgh^{-1}$ de l'espace connexe H à valeurs dans l'espace discret Γ est constante, donc égale à $ege^{-1} = g$. Donc g commute avec tout élément de H. □

La proposition suivante est la proposition clef pour passer du problème de classification des groupes de Lie connexes à celui des groupes de Lie simplement connexes.

Proposition 5.25 *Soit G un groupe de Lie connexe. Il existe un revêtement de groupes de Lie $\widetilde{\pi} : \widetilde{G} \to G$, unique à unique isomorphisme près, tel que $\widetilde{G}$ soit simplement connexe.*

De plus, le sous-groupe $\Gamma = \widetilde{\pi}^{-1}(e)$ de $\widetilde{G}$ est distingué, discret, central, et le groupe de Lie G est isomorphe au groupe de Lie quotient $\Gamma\backslash\widetilde{G}$.

Si H est un groupe de Lie connexe, et $f : G \to H$ un morphisme de groupes de Lie, alors il existe un et un seul morphisme de groupes de Lie $\widetilde{f} : \widetilde{G} \to \widetilde{H}$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{G} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{H} \\ \widetilde{\pi}\downarrow & & \downarrow\widetilde{\pi} \\ G & \xrightarrow{f} & H \ . \end{array}$$

Preuve. Soit $\widetilde{\pi} : \widetilde{G} \to G$ un revêtement universel de la variété topologique G (voir l'appendice A.4). Munissons $\widetilde{G}$ de la structure de variété de classe C^∞ image réciproque (voir le paragraphe 2.4.2), de sorte que $\widetilde{\pi}$ soit un C^∞-difféomorphisme local. Soit $\widetilde{e}$ un point de $\widetilde{\pi}^{-1}(e)$. Montrons qu'il existe une et une seule structure de groupe de Lie sur $\widetilde{G}$, d'élément neutre $\widetilde{e}$, telle que $\widetilde{\pi}$ soit un morphisme de groupes.

Soit $m : G \times G \to G$ la multiplication de G (définie par $m : (x, y) \mapsto xy$). Remarquons que $\widetilde{G} \times \widetilde{G}$ est simplement connexe (voir l'exercice E.184 (6) de l'appendice A.4). Donc, par le théorème du relèvement A.10 de l'appendice A.4, l'application composée de $\widetilde{\pi} \times \widetilde{\pi} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G \times G$ et de $m : G \times G \to G$ se relève en une unique application continue $\widetilde{m} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ telle que $\widetilde{m}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}$. Cette application est même de classe C^∞, car $\widetilde{\pi}$ est un C^∞-difféomorphisme local. De même, l'application $x \mapsto (\widetilde{\pi}(x))^{-1}$ de $\widetilde{G}$ dans G se relève en une unique application C^∞, notée $x \mapsto x^{-1}$, de $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ telle que $\widetilde{e}^{-1} = \widetilde{e}$.

L'unicité des relèvements dans le théorème du relèvement A.10 de l'appendice A.4 permet de montrer que la loi $\widetilde{m}$ est associative, a pour élément neutre $\widetilde{e}$ et pour inverse d'un élément x de $\widetilde{G}$ l'élément x^{-1}. En effet, les applications $(x, y, z) \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{m}(x, y), z)$ et $(x, y, z) \mapsto \widetilde{m}(x, \widetilde{m}(y, z))$ de l'espace simplement connexe $\widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ sont deux relèvements par $\widetilde{\pi}$ de l'application $(x, y, z) \mapsto \widetilde{\pi}(x)\widetilde{\pi}(y)\widetilde{\pi}(z)$, qui coïncident en $(\widetilde{e}, \widetilde{e}, \widetilde{e})$, donc sont égales. De plus, les trois applications $x \mapsto \widetilde{m}(x, \widetilde{e})$, $x \mapsto \widetilde{m}(\widetilde{e}, x)$ et $x \mapsto x$ de l'espace simplement connexe $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ sont trois relèvements par $\widetilde{\pi}$ de l'application $x \mapsto \widetilde{\pi}(x)$, qui coïncident en $\widetilde{e}$, donc sont égales. Enfin, les trois applications $x \mapsto \widetilde{m}(x, x^{-1})$, $x \mapsto \widetilde{m}(x^{-1}, x)$ et $x \mapsto \widetilde{e}$ de l'espace simplement connexe $\widetilde{G}$ dans $\widetilde{G}$ sont trois relèvements par $\widetilde{\pi}$ de l'application $x \mapsto e$, qui coïncident en $\widetilde{e}$, donc sont égales.

L'application $\widetilde{\pi}$, par construction, est C^∞, est un morphisme de groupes, et est un revêtement, donc est un revêtement de groupes de Lie. L'unicité découle de l'unicité d'un revêtement universel, voir le corollaire A.11. La dernière assertion de la proposition 5.25 découle du théorème du relèvement.

Comme $\widetilde{\pi}$ est un morphisme de groupes, la fibre $\Gamma = \widetilde{\pi}^{-1}(e)$ est un sous-groupe distingué de $\widetilde{G}$. Comme $\widetilde{\pi}$ est un revêtement, elle est discrète dans $\widetilde{G}$. On conclut alors par le lemme 5.24. □

Remarque 5.26 *Avec les notations de cette proposition, l'action de Γ par translations à gauche sur $\widetilde{G}$ définit un morphisme injectif de groupe de Γ dans le groupes des difféomorphismes de $\widetilde{G}$, dont l'image est exactement le groupe des automorphismes de revêtement de $\pi : \widetilde{G} \to G$.*

Exemples. (1) L'application $t \mapsto e^{it}$ de $\mathbb{R}$ dans le groupe de Lie $\mathbb{S}_1$ des nombres complexes de module 1 est un revêtement universel de groupes de Lie, car $\mathbb{R}$ est simplement connexe et cette application est un morphisme de groupes de Lie.

(2) Par la décomposition polaire (voir l'exercice E.17), le groupe de Lie $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^3 \times \mathrm{O}(2)$, le groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{SO}(2)$, et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{PSO}(2)$, donc à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_1$. Le revêtement universel $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$ est donc un groupe de Lie homéomorphe à $\mathbb{R}^3$, de centre infini cyclique.

(3) Si $n \geq 3$, le revêtement universel de groupes de Lie de $\mathrm{SO}(n)$, noté $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$, est un revêtement à deux feuillets (voir l'exercice E.109 ci-dessous). De plus, le revêtement universel de groupes de Lie $\mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{PSO}(n)$ est à deux feuillets si n est impair, et à quatre feuillets sinon.

Notons $\mathcal{G}'_{\mathrm{Lie,sc}}$ l'ensemble des couples (G, Γ) où G est un groupe de Lie simplement connexe et Γ un sous-groupe (distingué) discret central dans G, modulo la relation d'équivalence $(G, \Gamma) \sim (G', \Gamma')$ s'il existe un isomorphisme de groupes de Lie $\varphi : G \to G'$ tel que $\varphi(\Gamma) = \Gamma'$. Notons $\mathcal{G}_{\mathrm{Lie}}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de groupes de Lie connexes. Le fait que ces ensembles soient bien des ensembles vient de l'hypothèse de séparabilité des groupes de Lie, qui implique que leur cardinal est au plus celui du continu. Le résultat suivant découle alors immédiatemment de la proposition 5.25.

Porisme 5.27 *L'application de $\mathcal{G}'_{\mathrm{Lie,sc}}$ dans $\mathcal{G}_{\mathrm{Lie}}$, induite par l'application qui à un couple (G, Γ) associe le groupe de Lie quotient $\Gamma \backslash G$, est une bijection.* □

Soient G et G' deux groupes de Lie, d'éléments neutres e et e' respectivement. Un *morphisme local (de groupes de Lie)* de G dans G' est une application h de classe C^∞ d'un voisinage ouvert U de e dans G à valeurs dans un voisinage ouvert U' de e' dans G', telle que, pour tous x et y dans U tels que xy appartienne à U, on ait

$$h(xy) = h(x)h(y) \ .$$

Un *isomorphisme local (de groupes de Lie)* de G dans G' est un morphisme local $h : U \to U'$ qui est un C^∞-difféomorphisme de U sur U'. Notons que $h^{-1} : U' \to U$ est alors aussi un morphisme local de groupes de Lie de G' dans G. Deux groupes de Lie sont *localement isomorphes* s'il existe un isomorphisme local de l'un dans l'autre. La relation « être localement isomorphes » est une relation d'équivalence.

Pour une remarque historique, notons que Sophus Lie [Lie] n'a pas introduit la notion de groupe de Lie, mais celle de *groupe de Lie local*, correspondant à un « germe » en l'identité de groupe de Lie. Ce n'est que plus tard que l'on a montré que l'on pouvait bien globaliser les choses, pas forcément de manière unique, mais effectivement unique si l'on rajoute l'hypothèse de simple connexité. Le notion de groupe de Lie local est alors tombée en désuétude (et c'est pour cela que nous ne la définirons pas), par contre la notion de morphisme local est toujours utile pour le passage des algèbres de Lie aux groupes de Lie en ce qui concerne leur classification.

Théorème 5.28 *Soient G et G' deux groupes de Lie, d'éléments neutres e et e', et d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ respectivement.*

(1) Si G est simplement connexe, alors tout morphisme local de groupes de Lie de G dans G' se prolonge, de manière unique, en un morphisme de groupes de Lie de G dans G'.

(2) Pour tout morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, il existe un morphisme local de groupes de Lie f de G dans G' tel que $T_e f = \mathfrak{f}$. De plus, tout autre tel morphisme local de groupes de Lie coïncide avec f au voisinage de l'élément neutre e de G.

(3) Si G est connexe, alors l'application $f \mapsto T_e f$ de l'ensemble des morphismes de groupes de Lie de G dans G', à valeurs dans l'ensemble des morphismes d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}'$ est injectif, et bijectif si G est simplement connexe.

(4) Deux groupes de Lie sont localement isomorphes si et seulement si leurs algèbres de Lie sont isomorphes.

(5) Si G et G' sont simplement connexes, alors pour tout isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{f} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$, il existe un et un seul isomorphisme de groupes de Lie $f : G \to G'$ tel que $T_e f = \mathfrak{f}$.

Preuve. (1) Soit h un morphisme local de groupes de Lie de G dans G'. Soit V un voisinage ouvert connexe (donc connexe par arcs) de e dans G, tel que $V^{-1} = V$ (où $V^{-1} = \{x^{-1} \ : \ x \in V\}$) et $V^2 = \{xy \ : \ x, y \in V\}$ soient contenus dans le domaine de h. Comme G est connexe, tout voisinage de e engendre G (voir l'exercice E.105). Donc, pour tout x dans G, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans V tels que $x = x_1 x_2 \ldots x_k$. Si $\overline{h}$ est un morphisme de G dans G' prolongeant h alors $\overline{h}(x) = h(x_1)h(x_2)\ldots h(x_k)$, d'où l'unicité de $\overline{h}$.

Lemme 5.29 *Pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans V tels que $x_1 x_2 \ldots x_k = e$, on a*

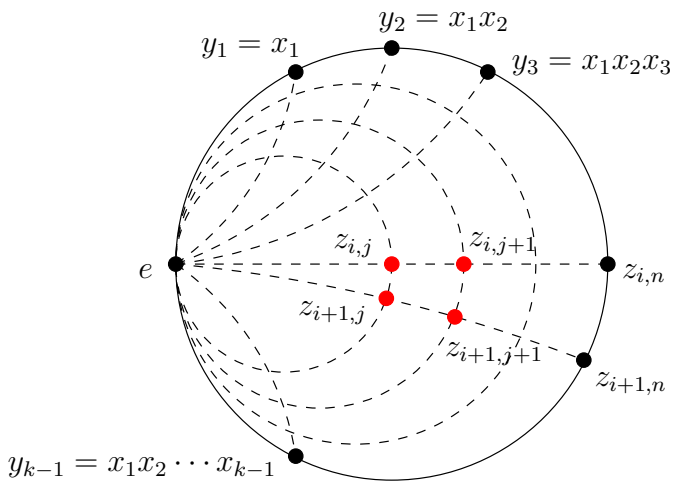
$$h(x_1)h(x_2)\ldots h(x_k) = e' \ .$$

Preuve. (C'est le genre de preuve qui se comprend mieux par un dessin que par une rédaction exhaustive, voir la figure ci-dessous).

Posons $y_0 = e$ et $y_{\ell+1} = y_\ell x_{\ell+1}$ pour $\ell = 0, \cdots, k-1$, de sorte que $y_k = e$. Soit $\gamma_\ell : [\frac{\ell}{k}, \frac{\ell+1}{k}] \to G$ un chemin continu de y_ℓ à $y_{\ell+1}$ contenu dans $y_\ell V$. Soit $\gamma : [0,1] \to G$ le chemin continu obtenu par concaténation de ces chemins. Comme $\gamma(0) = \gamma(1)$ et par simple connexité de G, il existe une application continue $f : [0,1] \times [0,1] \to G$ telle que $f(t,0) = f(0,s) = f(1,s) = e$, et $f(t,1) = \gamma(t)$. Par compacité de $[0,1] \times [0,1]$, il existe des subdivisions $0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1$ et $0 = s_0, s_1, \ldots, s_n = 1$ de l'intervalle $[0,1]$, plus fines que la subdivision $(\frac{i}{k})_{0 \le i \le k}$, telles que, pour tous les $i, i', j, j' \in \{1, \ldots, n\}$tels que $|i' - i| \le 1, |j' - j| \le 1$, on ait

$$f([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subset f(t_{i'}, s_{j'})V \ .$$

Posons $z_{i,j} = f(t_i, s_j)$, de sorte en particulier que $z_{i',j'}^{-1} z_{i,j}$ appartienne à V si $|i' - i| \le 1$ et $|j' - j| \le 1$.



Montrons par récurrence sur $j = 0, \ldots, n$ que

$$h({z_{0,j}}^{-1} z_{1,j})h({z_{1,j}}^{-1} z_{2,j})\ldots h({z_{n-1,j}}^{-1} z_{n,j}) = e' \ .$$

L'assertion est immédiate pour $j = 0$. Le passage de j à $j+1$ découle du fait que

$${z_{i,j+1}}^{-1} z_{i+1,j+1} = ({z_{i,j+1}}^{-1} z_{i,j})({z_{i,j}}^{-1} z_{i+1,j})({z_{i+1,j+1}}^{-1} z_{i+1,j})^{-1} \ ,$$

que h est un morphisme local sur V^2 et que $V = V^{-1}$.

Comme γ_i est à valeurs dans $y_i V$, et puisque h est un morphisme local sur V^2, on a, si $i < i'$ sont tels que $t_i = \frac{\ell}{k}, t_{i'} = \frac{\ell+1}{k}$,

$$\begin{aligned} h(x_{\ell+1}) &= h(y_\ell^{-1} y_{\ell+1}) = h({z_{i,n}}^{-1} z_{i',n}) \\ &= h\big(({z_{i,n}}^{-1} z_{i+1,n})({z_{i+1,n}}^{-1} z_{i',n})\big) = h({z_{i,n}}^{-1} z_{i+1,n}) h({z_{i+1,n}}^{-1} z_{i',n}) \\ &= h({z_{i,n}}^{-1} z_{i+1,n}) h({z_{i+1,n}}^{-1} z_{i+2,n}) \dots h({z_{i'-1,n}}^{-1} z_{i',n}) \ . \end{aligned}$$

Donc la récurrence au rang $j = n$ conclut. □

Pour terminer la preuve de l'assertion (1), si un élément x dans G s'écrit $x = x_1 x_2 \dots x_k$ et $x = x'_1 x'_2 \dots x'_{k'}$, où $x_1, x_2, \dots, x_k, x'_1, x'_2, \dots, x'_{k'}$ sont des éléments de V, alors

$$x'_1 x'_2 \dots x'_{k'} x_k^{-1} x_{k-1}^{-1} \dots x_1^{-1} = e \ ,$$

donc par le lemme,

$$h(x'_1) h(x'_2) \dots h(x'_{k'}) = h(x_1) h(x_2) \dots h(x_k) \ .$$

On peut donc poser $\overline{h}(x) = h(x_1) h(x_2) \dots h(x_k)$, ce qui définit une application $\overline{h}$ de G dans G'. Cette application est clairement un morphisme de groupes, et coïncide avec h sur un voisinage de e. En particulier, $\overline{h}$ est continue en e, donc c'est un morphisme de groupes continu par l'exercice E.105. Par le corollaire 5.22, $\overline{h}$ est donc un morphisme de groupes de Lie.

(2) Considérons le groupe de Lie produit $G \times G'$, dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'algèbre de Lie produit $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Le graphe $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{f}$ est clairement une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$. Soit H le sous-groupe de Lie immergé connexe de $G \times G'$ dont l'algèbre de Lie s'identifie à $\mathfrak{h}$ (voir le théorème 5.18). La restriction à un petit voisinage de e dans H de la première projection $pr_1 : G \times G' \to G$ est un morphisme local de H sur G, qui est un isomorphisme local, car son application tangente en l'élément neutre de H est un isomorphisme. La restriction à tout voisinage de e dans H de la seconde projection est un morphisme local de H sur G'. En composant (sur des voisinages suffisamment petits des éléments neutres) l'inverse du premier avec le second, on obtient donc un morphisme local f de G dans G'. La composition des applications tangentes en e est $\mathfrak{f}$.

Si f' est un autre tel morphisme local, alors son graphe dans $G \times G'$ est, au voisinage de (e, e') une feuille du feuilletage invariant à gauche défini par $\mathfrak{h}$, donc coïncide, sur un voisinage de (e, e'), avec H. Par conséquent, f et f' coïncident sur un voisinage de e.

(3) L'injectivité découle, par l'assertion (2), du fait que si G est connexe, alors G est engendré par un voisinage de e, donc deux morphismes qui coïncident sur un voisinage de e sont égaux. La surjectivité découle des assertions (1) et (2).

Enfin, les assertions (4) et (5) découlent facilement des assertions (2) et (1) (en utilisant l'unicité). □

Nous admettrons le résultat suivant, dont la preuve est trop longue pour être incorporée ici (voir par exemple [Bou4, Chap. I, page 99]). Notons qu'avec l'assertion (1) du théorème 5.28, il implique le théorème 5.9.

Théorème 5.30 *(Ado) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie (réelle) de dimension finie. Alors il existe un élément n dans $\mathbb{N}$ et un morphisme d'algèbres de Lie injectif de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.* □

Porisme 5.31 *Toute algèbre de Lie réelle de dimension finie est isomorphe à l'algèbre de Lie d'au moins un groupe de Lie réel.*

Preuve. Le théorème d'Ado 5.30 (que nous n'avons pas démontré dans ces notes) dit que toute telle algèbre de Lie admet un morphisme (d'algèbres de Lie) injectif dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, pour n assez grand. Or $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On conclut alors par le théorème 5.18. □

Porisme 5.32 *L'application qui à un groupe de Lie associe son algèbre de Lie induit une bijection Θ de l'ensemble des classes d'isomorphisme de groupes de Lie réels simplement connexes sur l'ensemble des classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie réelles de dimension finie.*

Preuve. L'application Θ est bien définie, comme conséquence de la proposition 5.12. Elle est surjective par le corollaire 5.31, et le fait qu'un groupe de Lie et le revêtement universel de sa composante neutre sont localement isomorphes, donc ont des algèbres de Lie isomorphes. L'injectivité de Θ découle de l'assertion (5) du théorème 5.28. □

Ainsi, nous avons bien réussi à montrer que le problème de classification des groupes de Lie (réels) connexes se ramène au problème de classification des algèbres de Lie (réelles) de dimension finie : par le corollaire 5.27, les groupes de Lie connexes sont, à isomorphisme près, les groupes de Lie quotient d'un groupe de Lie simplement connexe par un sous-groupe discret central ; et par le corollaire 5.32, les groupes de Lie simplement connexes sont, à isomorphisme près, uniquement déterminés par leurs algèbres de Lie, qui peut être n'importe quelle algèbre de Lie de dimension finie.

Notons que cette même classification (disons les résultats 5.27, 5.32) sont valables en remplaçant groupes et algèbres de Lie réels par groupes et algèbres de Lie complexes.

En ce qui concerne le problème de la classification des algèbres de Lie réelles ou complexes de dimension finie, nous renvoyons par exemple à [Bou4, Hel, Ser3].

Nous terminons ce paragraphe en regardant le cas des groupes de Lie classiques (voir par exemple [MT]). On note

— G_0 la composante neutre d'un groupe de Lie G,

— $Z(G)$ le centre de G (ce qui permet de construire des groupes de Lie, en prenant Γ un sous-groupe discret de $Z(G)$ (tout tel sous-groupe est distingué dans G), et en considérant le groupe de Lie quotient $\Gamma\backslash G$),

— $\pi_0(G)$ le groupe G/G_0 des composantes connexes de G, et

— $\pi_1(G_0)$ le groupe des automorphismes de revêtement d'un revêtement universel $\widetilde{G_0} \to G_0$ de G_0, qui s'identifie (voir la remarque 5.26), via l'action par translations à gauche de Γ sur $\widetilde{G}$, au sous-groupe (distingué) discret central Γ de $\widetilde{G_0}$ tel que l'application $\widetilde{G_0} \to G_0$ induise un isomorphisme de groupes de Lie $\Gamma\backslash\widetilde{G_0} \to G_0$.

Exercice E.109 *Dans le tableau qui suit, n, p, q sont des éléments de $\mathbb{N} - \{0\}$ avec $p \leq q$, $\mathbb{U}_n$ est le groupe des racines n-èmes de l'unité, $\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ et $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.*

Montrer que, pour tout groupe de Lie G de la colonne de gauche, les groupes $Z(G), \pi_0(G)$ et $\pi_1(G_0)$ sont isomorphes à ceux donnés dans les trois autres colonnes.

G	$Z(G)$	$\pi_0(G)$	$\pi_1(G_0)$
$\mathbb{S}_1$	$\mathbb{S}_1$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{T}^n$	$\mathbb{T}^n$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}^n$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}^*\mathrm{Id}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\begin{cases} \{\pm\,\mathrm{Id}\} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\{1\}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$	$\{1\}$	$\begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \text{ impair} \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \text{si } n\geq 3 \text{ pair} \end{cases}$
$\mathrm{PSL}_{2n}(\mathbb{R})$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n=1 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \text{si } n\geq 2 \end{cases}$
$\mathrm{O}(n)$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{SO}(n)$	$\begin{cases} \mathrm{SO}(2) & \text{si } n=2 \\ \{\pm\,\mathrm{Id}\} & \text{si } n\neq 2 \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\{1\}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{O}(p,q)$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } p=q=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p=1, q=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p=1, q\geq 3 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } p=q=2 \\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p=2, q\geq 3 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \text{si } p,q\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{SO}(p,q)$	$\begin{cases} \{\pm\,\mathrm{Id}\} & \text{si } p+q \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } p=q=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } p=1, q=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p=1, q\geq 3 \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } p=q=2 \\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } p=2, q\geq 3 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & \text{si } p,q\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{C}^*\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\mathbb{U}_n$
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$	$\mathbb{U}_n\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C})$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\mathbb{U}_n$
$\mathrm{U}(n)$	$\mathbb{S}_1\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{SU}(n)$	$\mathbb{U}_n\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\mathrm{U}(p,q)$	$\mathbb{S}_1\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
$\mathrm{SU}(p,q)$	$\mathbb{U}_{p+q}\,\mathrm{Id}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}$
$\mathrm{Sp}(p,q)$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\{1\}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$	$\begin{cases} \{\pm\,\mathrm{Id}\} & \text{si } n \text{ pair} \\ \{1\} & \text{sinon} \end{cases}$	$\{1\}$	$\begin{cases} \{1\} & \text{si } n=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } n=2 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } n\geq 3 \end{cases}$
$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C})$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\{1\}$	$\{1\}$
$\mathrm{Sp}_*(n)$	$\{\pm\,\mathrm{Id}\}$	$\{1\}$	$\{1\}$

En particulier, si $n, p, q \in \mathbb{N} - \{0\}$, alors les groupes de Lie

$$\mathrm{O}(n), \ \ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \ \ \mathrm{SO}(p,q), \ \ \mathrm{O}_n(\mathbb{C}), \ \ \mathrm{O}(p,q)$$

ne sont pas connexes, et ont exactement deux, deux, deux, deux, quatre composantes connexes respectivement. Les groupes de Lie

$$\mathbb{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}, \ \ \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, \ \ \mathrm{SO}(n) \text{ si } n \neq 1, \ \ \mathrm{U}(n), \ \ \mathrm{U}(p,q), \ \ \mathrm{SU}(p,q),$$

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), \ \ \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \text{ si } n \neq 1, \ \ \mathrm{PSL}_{2n}(\mathbb{R}), \ \ \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \ \ \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) \text{ si } n \neq 1$$

sont connexes, mais ne sont pas simplement connexes. Enfin, les groupes de Lie

$$\mathbb{R}^n, \ \ \mathrm{SU}(n), \ \ \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \ \ \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}), \ \ \mathrm{Sp}_*(n)$$

sont simplement connexes.

En petite dimension, il existe un certain nombre d'isomorphismes, dit *remarquables*, entre ces groupes (voir par exemple [MT] ou [Hel, page 519]). Nous en énonçons quelques-un sous forme d'exercices, bien que certains de ceux-ci ne soit pas du tout immédiats. Le préfixe P devant un groupe signifie le quotient par son centre (en général $\{\pm \mathrm{Id}\}$).

Exercice E.110 *Montrer l'existence d'isomorphismes*

$$\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \ ,$$

$$\mathrm{PSO}(4) \simeq \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{SO}(3) \ ,$$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(1,2)_0 \simeq \mathrm{SU}(1,1) \simeq \mathrm{PSp}_1(\mathbb{R}) \ ,$$

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}(1,3)_0 \simeq \mathrm{PSp}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \ ,$$

$$\mathrm{PSO}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \ ,$$

$$\mathrm{PSO}(2,2) \simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \ .$$

5.8 Espaces homogènes

• **Actions continues de groupes topologiques.**

Nous renvoyons à l'appendice A.2 pour des rappels sur le vocabulaire des actions de groupes. En particulier, si G est un groupe agissant sur un ensemble X, alors l'application orbitale en x de G dans X, définie par $\varphi_x : g \mapsto gx$, induit une bijection canonique Θ_x de G/G_x dans $G \cdot x$.

Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Une *action continue (à gauche)* de G sur X est une action (à gauche) de G sur X qui est continue, i.e. c'est une application continue de $G \times X$ dans X, notée $(g,x) \mapsto g \cdot x$ ou tout simplement $(g,x) \mapsto gx$ s'il y a pas de risque de confusion, telle que

$$\forall \, x \in X, \ \ \forall \, g, h \in G, \ \ e \cdot x = x, \quad \text{et} \quad (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \ .$$

Dans toute la suite de ce texte et sauf mention contraire, toute action d'un groupe topologique sur un espace topologique sera une action continue (à gauche).

Notons qu'alors, pour tout g dans G, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est un homéomorphisme de X, d'inverse $x \mapsto g^{-1} \cdot x$, et que l'application du groupe G dans le groupe des homéomorphismes de X défini par $g \mapsto (x \mapsto g \cdot x)$ est un morphisme de groupes. Pour employer la terminologie de l'appendice A.2, une action continue d'un groupe topologique sur un espace topologique est en particulier une action par homéomorphismes. La réciproque est vraie si le groupe est discret, mais ne l'est pas en général.

Par exemple, si G est un groupe topologique, si H est un sous-groupe de G, alors les actions de H sur G par translations à gauche et par translations à droite sont clairement continues. Nous verrons dans le corollaire 5.34 ci-dessous que les actions de G par translations à droite sur l'espace topologique quotient $H\backslash G$ et par translations à gauche sur l'espace topologique quotient G/H sont continues.

Soient G un groupe topologique, et X un espace topologique muni d'une action (continue) de G. Notons $\pi : X \to G\backslash X$ la projection canonique et $\mathcal{R} \subset X \times X$ la relation d'équivalence « être dans la même orbite ». Chaque orbite sera, sauf mention contraire, munie de la topologie induite, et l'ensemble quotient $G\backslash X$ sera muni de la topologie quotient. Rappelons que celle-ci est la moins fine rendant continue π (voir l'appendice A.1), et que π est ouverte (voir la proposition A.1 de l'appendice A.2). En particulier, si H est un sous-groupe de G, alors G/H et $H\backslash G$ sont munis de la topologie quotient.

Proposition 5.33 *L'espace topologique quotient $G\backslash X$ est séparé si et seulement si $\mathcal{R}$ est un fermé de $X \times X$. Dans ce cas, toute orbite de G dans X est fermée.*

Preuve. Soient x et y deux points de X qui ne sont pas dans la même orbite.

Si $G\backslash X$ est séparé, alors il existe deux ouverts saturés disjoints U et V contenant respectivement x et y. Donc $U \times V$ est un voisinage de (x, y) dans $X \times X$ ne rencontrant pas $\mathcal{R}$, et $\mathcal{R}$ est fermé.

Réciproquement, si $\mathcal{R}$ est fermé, il existe un voisinage ouvert U de x et V de y tels que $(U \times V) \cap \mathcal{R} = \emptyset$. Comme π est ouverte, $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont deux voisinages ouverts de $\pi(x)$ et $\pi(y)$ respectivement, qui sont disjoints par construction. Donc $G\backslash X$ est séparé. Comme l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé, la dernière assertion est claire. □

Porisme 5.34 *Si G est un groupe topologique, H un sous-groupe, et $\pi : G \to G/H$ la projection canonique, alors*

- *l'application π est continue et ouverte, et l'action de G sur G/H par translations à gauche est continue.*
- *l'espace topologique quotient G/H est séparé si et seulement si H est fermé.*

Ce résultat est bien sûr encore valable en remplaçant G/H par $H\backslash G$ et translations à gauche par translations à droite.

Preuve. Le résultat découle de la proposition 5.33 et de l'alinéa qui la précède, par les deux remarques suivantes.

(1) Soit $\psi : G \times G/H \to G/H$ l'action de G sur G/H, définie par $(g, g'H) \mapsto gg'H$. Pour tout ouvert U de G/H, l'ensemble

$$V = \{(g, g') \in G \times G \ : \ gg' \in \pi^{-1}(U)\}$$

est ouvert, car la multiplication dans G et l'application π sont continues. L'application $\pi' : (G \times G) \to G \times (H\backslash G)$ définie par $(g, g') \mapsto (g, g'H)$ est ouverte (voir la proposition A.1 de l'appendice A.2). Donc $\psi^{-1}(U) = \pi'(V)$ est ouvert, et ψ est continue.

(2) Soient $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence « être dans la même classe à droite par H » sur G, et $\phi : G \times G \to G$ l'application continue $(x, y) \mapsto xy^{-1}$. Alors $\mathcal{R} = \phi^{-1}(H)$. De plus, H est l'orbite de e pour l'action par translations à gauche de H sur G. □

• **Actions différentiables de groupes de Lie.**

Soit G un groupe de Lie, et X une variété de classe C^k, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Une action de G sur X est dite *de classe* C^k si l'application $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de $G \times X$ dans X est C^k. Notons qu'alors, pour tout g dans G, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est un C^k-difféomorphisme de X. Par exemple, les actions d'un sous-groupe de Lie H par translations à gauche et par translations à droite sur G sont de classe C^∞. Une variété de classe C^k est dite *homogène* si elle admet une action C^k transitive d'un groupe de Lie connexe. (En particulier, elle est connexe.) Il n'y a pas forcément unicité d'un tel groupe de Lie, et les propriétés « géométriques » d'une variété homogène dépendent du groupe de Lie transitif considéré. Par exemple, tout groupe de Lie G est une variété homogène C^∞, pour l'action de G sur lui-même par translations à gauche.

Lemme 5.35 *Si X est C^∞ et si l'action de G sur X est C^∞, alors pour tout x dans X, l'application orbitale $\varphi_x : g \mapsto gx$ de G dans X est une application C^∞ de rang constant, et le stabilisateur G_x de x est un sous-groupe de Lie.*

Remarquons que nous pourrions dire que G_x est clairement fermé, et appliquer le théorème de Cartan 5.20, pour conclure à la seconde assertion, mais ce serait utiliser un marteau-pilon pour écraser une mouche.

Preuve. Pour tout g dans G, les applications $L_g : G \to G$ et $M_g : X \to X$ définies respectivement par $h \mapsto gh$ et $y \mapsto gy$ sont des C^∞-difféomorphismes, et, par définition d'une action, on a

$$\varphi_x \circ L_g = M_g \circ \varphi_x \ .$$

Donc $T_g\varphi_x \circ T_eL_g = T_xM_g \circ T_e\varphi_x$, et par conséquent $T_g\varphi_x, T_e\varphi_x$ ont même rang.

Comme $G_x = \varphi_x^{-1}(x)$, le résultat découle alors de la proposition 2.20. □

• **Espaces homogènes quotients.**

Si H est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie G, alors H agit librement et proprement par translations à gauche sur G, et donc, par la proposition 2.25, $H\backslash G$ admet une unique structure de variété C^∞ telle que $\pi : G \to H\backslash G$ soit un C^∞-difféomorphisme local. Le but de ce paragraphe est d'étendre ceci au cas où H est seulement supposé un sous-groupe fermé (ou, de manière équivalente par le théorème de Cartan 5.20, un sous-groupe de Lie) de G.

Dans tout ce paragraphe, notons G un groupe de Lie, H un sous-groupe de Lie de G, et $\pi : G \to G/H$ la projection canonique.

Théorème 5.36 *Il existe une et une seule structure de variété différentielle de classe C^∞ sur l'espace topologique quotient G/H, telle que π soit une submersion.*

De plus,

- $\dim(G/H) = \dim(G) - \dim(H)$ *;*

- *l'action de G par translations à gauche sur G/H est de classe C^∞ ;*
- *l'application π est une fibration C^∞ de fibre H ;*
- *pour tout g dans G, l'application $T_g\pi : T_gG \to T_{gH}(G/H)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_gG)/(T_g(gH)) \simeq T_{gH}(G/H)$;*
- *pour toute variété M de classe C^k, une application $f : G/H \to M$ est de classe C^k si et seulement si $f \circ \pi$ l'est.*

Cette structure s'appelle la structure de *variété quotient* sur G/H. En particulier, l'application $T_e\pi$ induit un isomorphisme linéaire de T_eG/T_eH sur $T_{eH}(G/H)$.

Preuve. Tout d'abord, comme H est fermé (voir la proposition 5.4), et par le corollaire 5.34, l'espace G/H est séparé. Il est à base dénombrable, comme tout espace quotient d'un espace à base dénombrable par une action dont la projection canonique est ouverte.

Soient p la dimension de H, n celle de G et Δ le champ de p-plans sur G, invariant à gauche, tel que $\Delta_e = T_eH$. Ce champ de p-plans est intégrable (voir le début de la preuve du théorème 5.18). Il est donc tangent à un feuilletage $\mathcal{F}$, dont les feuilles sont, par unicité, les translatés à gauche par G de la composante neutre de H. Soit (U, φ) une carte locale feuilletée C^∞ pour ce feuilletage, où U est un voisinage de e et $\varphi : U \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ est un C^∞-difféomorphisme qui envoie le feuilletage $\mathcal{F}_{|U}$ sur le feuilletage dont les feuilles sont les sous-espaces horizontaux $\mathbb{R}^p \times \{x\}$. Quitte à réduire U, comme H est une sous-variété, pour tout g dans G, l'intersection $gH \cap U$ est vide ou ne contient qu'une seule feuille locale de $\mathcal{F}$ dans U. Notons $pr_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^{n-p}$ la seconde projection. Alors $\mathrm{pr}_2 \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ induit par passage au quotient une bijection $\overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi}$ de $\pi(U)$ sur $\mathbb{R}^{n-p}$. Comme π est continue et ouverte (corollaire 5.34), cette bijection est un homéomorphisme. Alors la famille $\left(\pi(L_gU), \overline{\mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ L_g^{-1}}\ \right)_{g\in G}$ est un atlas de cartes C^∞ sur G/H, car les applications de transitions sont localement de la forme $x \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ \varphi \circ L_g^{-1} \circ L_{g'} \circ \varphi^{-1}(0, x)$, donc sont de classe C^∞.

L'application π est alors une submersion C^∞, car, lue dans les cartes locales C^∞ précédentes, c'est juste la seconde projection pr_2 :

$$\begin{array}{ccc} L_gU & \xrightarrow{\varphi\circ L_g^{-1}} & \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mathrm{pr}_2 \\ \pi(L_gU) & \xrightarrow{\overline{\mathrm{pr}_2\circ\varphi\circ L_g^{-1}}} & \mathbb{R}^{n-p} \end{array}$$

L'avant dernière assertion en découle aussi. De plus, par le théorème de forme normale des submersions 2.8, pour tout x dans G/H, il existe un voisinage V de x dans G/H et une section locale de π sur V, i.e. une application $\sigma : V \to G$ de classe C^∞ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}$. La dernière assertion du théorème en découle, par le théorème de dérivation des fonctions composées.

Pour montrer l'unicité, il suffit de montrer que s'il existe deux structures C^∞ sur G/H telles que π soit une submersion, alors l'identité de G/H est un C^∞-difféomorphisme entre ces deux structures. Ceci découle de l'exercice E.29 (du paragraphe 2.5), ou en disant que localement, l'identité coïncide avec $\pi \circ \sigma$, et que π est C^∞ pour une structure, et σ est C^∞ pour l'autre.

De même, le fait que l'action à gauche $\lambda : G \times G/H \to G/H$ soit C^∞ vient du fait que localement, on peut écrire

$$\lambda(g, g'H) = \pi(g\ \sigma(g'H))\ ,$$

avec σ une section locale comme ci-dessus.

Enfin, si V est un voisinage ouvert de $x_0 \in G/H$ tel qu'il existe une section locale σ de π définie sur V, alors l'application θ de $\pi^{-1}(V)$ dans $V \times H$ définie par

$$g \mapsto (\pi(g), g\ (\sigma \circ \pi(g))^{-1})$$

est un C^∞-difféomorphisme, d'inverse $(x, h) \mapsto \sigma(x)\ h$, qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V) & \xrightarrow{\theta} & V \times H \\ & {\scriptstyle \pi} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{pr}_1} & \\ & V & \end{array} .$$

Donc π est une fibration C^∞ de fibre H. □

Remarque. Si de plus H est distingué, alors G/H, muni de ses structures de variété quotient et de groupe quotient, est un groupe de Lie, et la projection canonique $\pi : G \to G/H$ est un morphisme de groupes de Lie.

En effet, si σ et σ' sont des sections locales de π, alors l'application $G/H \times G/H \to G/H$, définie par $(xH, yH) \mapsto xy^{-1}H$, coïncide, sur le produit des domaines de définition de σ et σ', avec $(u, v) \mapsto \pi(\sigma(u)\ \sigma(v)^{-1})$, qui est de classe C^∞.

La remarque tautologique suivante permet de construire une structure de variété sur un ensemble, en exhibant celui-ci comme ensemble quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe de Lie.

Remarque 5.37 *Soit G un groupe de Lie, agissant transitivement sur un ensemble E, tel que le stabilisateur G_x d'un point x de E soit un sous-groupe de Lie de G (ou, de manière équivalente par le théorème de Cartan 5.20, un sous-groupe fermé). Alors il existe sur E une et une seule structure de variété C^∞ telle que*

- *l'action de G sur E soit de classe C^∞,*
- *la bijection canonique $G/G_x \to E$ soit un C^∞-difféomorphisme.*

□

Dans la section suivante, nous verrons que si E admettait une structure de variété C^∞ pour laquelle l'action de G fut C^∞, alors cette structure et celle construite dans la remarque précédente coïncideraient.

- **Actions transitives de groupes de Lie.**

Le paragraphe précédent montre qu'une variété quotient G/H d'un groupe de Lie G par un sous-groupe de Lie H est une variété homogène C^∞. Le but de cette partie est de montrer que, à C^∞-difféomorphisme près, toute variété homogène C^∞ est de cette forme.

Théorème 5.38 *Soit M une variété C^∞, munie d'une action C^∞ transitive d'un groupe de Lie G. Alors pour tout x dans M, la bijection canonique $\Theta_x : G/G_x \to M$ est un C^∞-difféomorphisme.*

Preuve. Comme $\Theta = \Theta_x$ est obtenue par passage au quotient de l'application orbitale $\varphi_x : g \mapsto gx$ de classe C^∞, la bijection Θ est C^∞ (voir le théorème 5.36). Le théorème d'inversion locale nous dit que Θ est un C^∞-difféomorphisme dès que $T_u\Theta$ est injective en tout point u de G/G_x. Il suffit de le vérifier pour $u = eG_x$, car pour tout g dans G,

les actions de g sur G/G_x et sur M sont des C^∞-difféomorphismes, rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} G/G_x & \xrightarrow{\Theta} & M \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ G/G_x & \xrightarrow{\Theta} & M \end{array} .$$

Le théorème de forme normale des applications de rang constant (ou l'exercice E.56), appliqué à $\varphi_x : g \mapsto gx$ (voir le lemme 5.35), montre que

$$\mathrm{Ker}\, T_e\varphi_x = T_eG_x \ .$$

Notons que π est une submersion et que $\varphi_x = \Theta \circ \pi$. Si $X \in \mathrm{Ker}\, T_{G_x}\Theta \subset T_{G_x}(G/G_x)$, alors en choisissant Y tel que $T_e\pi(Y) = X$, on a $Y \in \mathrm{Ker}\, T_e\varphi_x = T_eG_x$. Or par le théorème 5.36, l'application $T_e\pi : T_eG \to T_{G_x}(G/G_x)$ induit un isomorphisme linéaire $(T_eG)/(T_eG_x) \simeq T_{G_x}(G/G_x)$. Donc $X = 0$ et $T_{G_x}\Theta$ est injective, ce qui montre le résultat. □

Remarque. Le théorème 5.38 implique immédiatement le corollaire suivant.

Porisme 5.39 *Soit M une variété C^∞, munie d'une action C^∞ d'un groupe de Lie G. Alors pour tout x dans M tel que $G \cdot x$ soit une sous-variété C^∞ de M, l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \to G \cdot x$ est un C^∞-difféomorphisme.* □

Voici une condition nécessaire et suffisante pour qu'une orbite soit une sous-variété, donnant une généralisation du théorème 5.38.

Théorème 5.40 *Soient M une variété C^∞, munie d'une action C^∞ d'un groupe de Lie G, et $x \in M$. L'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété C^∞ si et seulement si elle est localement fermée.*

Si $G \cdot x$ est localement fermée, alors l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \to G \cdot x$ est un C^∞-difféomorphisme.

En particulier, si une orbite est fermée, alors c'est une sous-variété.

Preuve. Nous avons déjà vu que toute sous-variété est localement fermée (voir la remarque 2.15).

Supposons que $G \cdot x$ soit localement fermée, donc localement compacte. Montrons que l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \to M$ est un homéomorphisme sur son image. Comme c'est une application C^∞, et comme la preuve du théorème 5.38 implique que c'est une immersion, l'application canonique Θ_x sera donc un plongement C^∞. Donc (voir la proposition 2.18) son image est une sous-variété C^∞, et Θ_x est un C^∞-difféomorphisme.

Si nous montrons que l'application $\varphi_x : G \to G \cdot x$, définie par $g \mapsto gx$, est ouverte, alors l'application $\Theta_x : G/G_x \to G \cdot x$ sera une bijection continue et ouverte (car $\Theta_x(U) = \varphi_x(\pi^{-1}(U))$ pour tout ouvert U de G/G_x), donc un homéomorphisme.

Soit U un voisinage ouvert de e dans G, montrons que Ux est un voisinage ouvert de x dans $G \cdot x$. Ceci concluera, car pour tout g dans G, la partie Ug est un voisinage ouvert de g, $\Theta_x(Ug) = \Theta_{gx}(U)$ et $G \cdot gx = G \cdot x$.

Soit V un voisinage compact de e dans G tel que $V^{-1}V \subset U$. Alors Vx est compact (car φ_x est continue et $G \cdot x$ séparé), donc fermé dans $G \cdot x$. Comme G est séparable, il existe

une suite $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans G telle que $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i V$. Donc $G \cdot x = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} g_i(Vx)$. Si Vx est d'intérieur vide, alors l'espace localement compact non vide $G\dot{x}$ est une union dénombrable d'ensembles fermés d'intérieur vide, ce qui contredit le théorème de Baire. Soit donc g dans V tel que gx soit un point intérieur de Vx. Alors $g^{-1}Vx$ est un voisinage de x, contenu dans Ux, ce qui montre le résultat. □

Porisme 5.41 *Soient M une variété C^∞, munie d'une action C^∞ d'un groupe de Lie compact G, et $x \in M$. Alors l'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété C^∞ compacte de M, et l'application canonique $\Theta_x : G/G_x \to G \cdot x$ est un C^∞-difféomorphisme.*

Preuve. Puisque G est compact et l'action continue, toute orbite est compacte, donc fermée, et on applique le théorème précédent. □

• **Exemples de variétés homogènes.**

(1) *Les sphères.* Le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n+1)$ (resp. spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n+1)$) agit (par rotations) transitivement sur la sphère unité $\mathbb{S}_n$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^{n+1}$. En effet, étant donné deux vecteurs unitaires distincts, l'application qui vaut l'identité sur le supplémentaire orthogonal d'un plan vectoriel réel contenant ces deux vecteurs, et la rotation d'angle égal à l'angle entre ces deux vecteurs sur ce plan, envoie le premier vecteur sur le second. L'application de $\mathrm{O}(n)$ (resp. $\mathrm{SO}(n)$) dans $\mathrm{O}(n+1)$ (resp. $\mathrm{SO}(n+1)$) définie par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $\mathrm{O}(n)$ (resp. $\mathrm{SO}(n)$) sur le stabilisateur de $(1, 0, \ldots, 0)$, par lequel on identifie $\mathrm{O}(n)$ (resp. $\mathrm{SO}(n)$) avec son image. Donc les applications orbitales en $(1, 0, \ldots, 0)$ induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathbb{S}_n \simeq \mathrm{O}(n+1)/\mathrm{O}(n) \simeq \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{SO}(n)\ .$$

Le groupe unitaire $\mathrm{U}(n+1)$ (resp. spécial unitaire $\mathrm{SU}(n+1)$), agit transitivement sur la sphère unité $\mathbb{S}_{2n+1}$ de l'espace hermitien usuel $\mathbb{C}^{n+1}$. En effet, considérons un plan vectoriel complexe P contenant deux vecteurs unitaires, muni d'une base hermitienne telle que ces deux vecteurs aient respectivement pour coordonnées $(1, 0)$ et (α, β), avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. L'application, qui vaut l'identité sur le supplémentaire orthogonal de P, et admet comme matrice sur P, dans la base choisie, la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

est un élément de $\mathrm{SU}(n+1)$ qui envoie le premier vecteur sur le second. L'application de $\mathrm{U}(n)$ (resp. $\mathrm{SU}(n)$) dans $\mathrm{U}(n+1)$ (resp. $\mathrm{SU}(n+1)$) définie par

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme de $\mathrm{U}(n)$ (resp. $\mathrm{SU}(n)$) sur le stabilisateur du point $(1, 0, \ldots, 0)$, par lequel on identifie $\mathrm{U}(n)$ (resp. $\mathrm{SU}(n)$) avec son image. Donc les applications orbitales en $(1, 0, \ldots, 0)$ induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathbb{S}_{2n+1} \simeq \mathrm{U}(n+1)/\mathrm{U}(n) \simeq \mathrm{SU}(n+1)/\mathrm{SU}(n)\ .$$

(2) *Les espaces projectifs.* L'action du groupe orthogonal $\mathrm{O}(n+1)$ (resp. spécial orthogonal $\mathrm{SO}(n+1)$) sur la sphère unité $\mathbb{S}_n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ préserve l'antipodie, donc induit une action C^∞ de $\mathrm{O}(n+1)$ (resp. $\mathrm{SO}(n+1)$) sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Le stabilisateur du point $[1,0,\dots,0]$ est le sous-groupe

$$\{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in O(n+1)\} \quad (\text{resp. } \{\begin{pmatrix} \frac{1}{\det A} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in SO(n+1)\}\ )$$

qui s'identifie de manière évidente au groupe de Lie $\{\pm 1\} \times \mathrm{O}(n)$ (resp. $\mathrm{O}(n)$). Donc les applications orbitales en $[1,0,\dots,0]$ induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{O}(n+1)/(\{\pm 1\} \times \mathrm{O}(n)) \simeq \mathrm{SO}(n+1)/\mathrm{O}(n)\ .$$

(3) *Les variétés grassmanniennes.* Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agit sur la variété grassmannienne $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathbb{R}^n$, par l'application qui à un sous-espace vectoriel C et à un automorphisme linéaire g associe le sous-espace vectoriel $g(C)$. Cette action est C^∞. Pour montrer cela, par définition d'une action, il suffit de montrer que pour tout g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application de $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ définie par $C \mapsto g(C)$ est C^∞, et que l'action $(g,C) \mapsto g(C)$ est C^∞ en (e,A) pour tout A dans $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$.

Reprenons (voir le paragraphe 2.4.3) l'atlas de cartes $((U_B, \varphi_{A,B}))_{A,B}$ de $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$, où A parcourt $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ et B parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels supplémentaires à A, U_B est l'ouvert des sous-espaces vectoriels supplémentaires à B, et $\varphi_{A,B} : U_B \to \mathcal{L}(A,B)$ est l'application telle que $\varphi_{A,B}^{-1}(f)$ soit le graphe de l'application linéaire $f : A \to B$ dans la décomposition $\mathbb{R}^n = A \oplus B$.

Pour tout g dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et toute telle carte $(U_B, \varphi_{A,B})$, la restriction à U_B de l'action de g sur $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ est C^∞, car le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} C & \mapsto & g(C) \\ U_B & \longrightarrow & U_{g(B)} \\ {\scriptstyle \varphi_{A,B}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi_{g(A),g(B)}} \\ \mathcal{L}(A,B) & \longrightarrow & \mathcal{L}(g(A),g(B)) \\ f & \mapsto & g \circ f \circ g^{-1} \end{array}$$

est commutatif, et l'application $f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$ est de classe C^∞.

Soient $(U_B, \varphi_{A,B})$ une carte comme ci-dessus, U un voisinage de e dans G et U'_B un voisinage de A contenu dans U_B, tels que pour tous g dans U et C dans U'_B, le sous-espace vectoriel $g(C)$ soit supplémentaire à B. Notons pr_1 la projection de $\mathbb{R}^n$ sur A parallèlement à B, et pr_2 la projection de $\mathbb{R}^n$ sur B parallèlement à A. Remarquons que si $C = (\mathrm{id}+f)(A)$ est le graphe d'une application linéaire $f : A \to B$, alors $g(C) = g \circ (\mathrm{id}+f)(A)$. Pour tous les g dans U et f dans l'ouvert $\varphi_{A,B}(U'_B)$ de $\mathcal{L}(A,B)$, l'application $\psi(g,f) = \mathrm{pr}_1 \circ g \circ (\mathrm{id}+f)$ est un isomorphisme linéaire de A dans A, et dépend de manière C^∞ de (g,f), donc son inverse aussi. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (g,C) & \mapsto & g(C) \\ U \times U'_B & \longrightarrow & U_B \\ {\scriptstyle \mathrm{id}\times\varphi_{A,B}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi_{A,B}} \\ U \times \varphi_{A,B}(U'_B) & \longrightarrow & \mathcal{L}(A,B) \\ (g,f) & \mapsto & \mathrm{pr}_2 \circ g \circ (\mathrm{id}+f) \circ \psi(g,f)^{-1} \end{array}$$

est commutatif (car

$$(\mathrm{id} + \mathrm{pr}_2 \circ g \circ (\mathrm{id} + f) \circ \psi(g,f)^{-1})(\psi(g,f)(x)) = g \circ (\mathrm{id} + f)(x)$$

pour tous les $g \in U$, $f \in \varphi_{A,B}(U'_B)$ et $x \in A$). Donc l'application $(g, C) \mapsto g(C)$ est C^∞ en (e, A).

Le stabilisateur du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ est le sous-groupe triangulaire supérieur par blocs

$$P_{n,k} = \{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \ : \ A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})\} \ .$$

Le sous-groupe de Lie $\mathrm{O}(n)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agit aussi transitivement sur $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$, de stabilisateur du sous-espace $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ égal à

$$\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(n) \ : \ A \in \mathrm{O}(k)\} \ ,$$

qui s'identifie de manière évidente au groupe $\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)$. Donc les applications orbitales induisent des C^∞-difféomorphismes

$$\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/P_{n,k} \simeq \mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)) \ .$$

Lorsque $k = 1$, on retrouve le cas des espaces projectifs.

(4) *Le demi-plan de Poincaré.* Le groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit de manière C^∞ sur le demi-plan supérieur $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}\ z > 0\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{C}$, donc une variété C^∞, par homographies

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \ .$$

En effet, $cz + d$ est non nul si $\mathrm{Im}\ z > 0$ et $c, d \in \mathbb{R}$, et $\mathrm{Im}\,(\frac{az+b}{cz+d}) = \frac{\mathrm{Im}\ z}{|cz+d|^2}$. Donc cette application est bien définie, et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ préserve $\mathcal{H}$, et il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une action C^∞. Le stabilisateur du point i est le sous-groupe

$$\mathrm{SO}(2) = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \ : \ \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \ .$$

Donc l'application orbitale en i induit un C^∞-difféomorphisme

$$\mathcal{H} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2) \ .$$

(5) *Les espaces hyperboliques.* Nous avons vu (dans l'exercice E.35) que le sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$, défini par

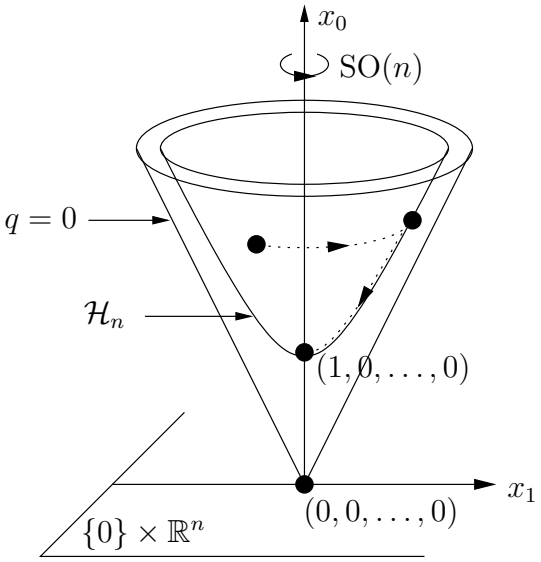
$$\mathcal{H}_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ x_0 > 0, -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\} \ ,$$

et appelé le *demi-hyperboloïde supérieur*, est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considérons le sous-groupe de Lie $\mathrm{SO}_0(1,n)$ de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$, qui est la composante neutre du sous-groupe de Lie $\mathrm{SO}(1,n)$ des éléments de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ préservant la forme quadratique $q = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$ sur $\mathbb{R}^n$. La restriction à $\mathrm{SO}_0(1,n) \times \mathcal{H}_n$ de l'action linéaire de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ est une action C^∞ de $\mathrm{SO}_0(1,n)$ sur $\mathcal{H}_n$, car l'hyperboloïde $\{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ :$

$-x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1\}$, qui est préservé par $\mathrm{SO}(1,n)$, possède deux composantes connexes, qui, par connexité, sont toutes les deux préservées par $\mathrm{SO}_0(1,n)$. Le stabilisateur du point $(1,0,\ldots,0)$ est le sous-groupe de Lie

$$\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \ : \ A \in \mathrm{SO}(n)\} \ ,$$

qui s'identifie de manière évidente avec $\mathrm{SO}(n)$.



Tout point de $\mathcal{H}_n$ peut être envoyé, par un élément de ce stabilisateur $\mathrm{SO}(n)$, sur un point de l'hyperbole d'équations $x_2 = \cdots = x_n = 0$ et $-x_0^2 + x_1^2 = -1$. Tout point de cette hyperbole s'écrit $(\cosh t, \sinh t, 0, \ldots, 0)$ pour un t dans $\mathbb{R}$. Et ce point peut être envoyé sur le point $(1,0,\ldots,0)$ par l'élément

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh t & -\sinh t \\ -\sinh t & \cosh t \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-2} \end{pmatrix} ,$$

qui appartient à $\mathrm{SO}_0(1,n)$. Donc l'action de $\mathrm{SO}_0(1,n)$ sur $\mathcal{H}_n$ est transitive. Par conséquent, l'application orbitale en $(1,0,\ldots,0)$ induit un C^∞-difféomorphisme

$$\mathcal{H}_n \simeq \mathrm{SO}_0(1,n)/\mathrm{SO}(n) \ .$$

(6) *L'espace des produits scalaires unimodulaires.* Notons $\mathcal{Q}_n$ l'espace des formes quadratiques réelles q sur $\mathbb{R}^n$, définies positives et dont le déterminant de la forme bilinéaire associée

$$b_q(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

vaut 1. L'application $q \mapsto b_q$ identifie $\mathcal{Q}_n$ avec une sous-variété C^∞ de codimension 1 de l'espace vectoriel de dimension finie des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbb{R}^n$ (car l'application déterminant sur l'ouvert de cet espace vectoriel formé des formes définies positives est une submersion), donc munit $\mathcal{Q}_n$ d'une structure de variété C^∞.

Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ agit (à gauche) sur $\mathcal{Q}_n$ par

$$(g, q) \mapsto \{x \mapsto q(g^{-1}(x))\} \ .$$

Cette action est évidemment C^∞, car, en passant aux matrices (dans la base canonique), il s'agit tout simplement de l'application C^∞

$$(M_g, B_q) \mapsto {}^tM_g^{-1} B_q M_g^{-1} \ ,$$

où B_q est la matrice de b_q, de sorte que $q(x) = {}^tXB_qX$ si X est le vecteur colonne de x, et où M_g est la matrice de g.

Le stabilisateur du produit scalaire euclidien usuel q_0 est le sous-groupe de Lie $\mathrm{SO}(q_0) \simeq \mathrm{SO}(n)$ de $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Par le théorème de réduction des formes quadratiques définies positives, le groupe $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ agit transitivement sur l'ensemble des formes quadratiques réelles, définies positives, sur $\mathbb{R}^n$, donc $\mathrm{SL}(\mathbb{R}^n)$ agit transitivement sur $\mathcal{Q}_n$. Par conséquent, l'application orbitale en q_0 induit un C^∞-difféomorphisme

$$\mathcal{Q}_n \simeq \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n) \ .$$

Nous renvoyons à [MT] pour de nombreux autres exemples d'espaces homogènes, ainsi que [Hel, Ebe].

• **Variétés quotients.**

Dans ce paragraphe, notons G un groupe de Lie, X une variété C^∞ munie d'une action C^∞ de G, $\pi : X \to G\backslash X$ la projection canonique et $\mathcal{R} \subset X \times X$ la relation d'équivalence « être dans la même orbite ». Le résultat suivant, qui implique le théorème 5.36 (ainsi que la proposition 2.25 pour $k = \infty$), est démontré dans [Die2, 16.10.3].

Théorème 5.42 *Si $\mathcal{R}$ est une sous-variété fermée de classe C^∞ de $X \times X$, alors il existe une et une seule structure de variété différentielle de classe C^∞ sur l'espace topologique quotient $G\backslash X$, telle que π soit une submersion C^∞.* □

Lorsqu'elle existe, cette structure est appelée la structure de *variété quotient* de X par l'action de G.

Remarque. L'hypothèse que $\mathcal{R}$ soit une sous-variété fermée est nécessaire pour l'existence de cette variété quotient. En effet, $\pi \times \pi : (X \times X) \to (G\backslash X \times G\backslash X)$ est une submersion car π l'est. La diagonale Δ de $G\backslash X \times G\backslash X$ est une sous-variété C^∞, fermée, de $G\backslash X \times G\backslash X$. Donc $\mathcal{R} = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta)$ est une sous-variété C^∞, fermée, de $X \times X$ (voir la proposition 2.23).

5.9 Autres exercices

Exercice E.111 Soient G un groupe topologique, et X un espace topologique muni d'une action (continue) de G.

Montrer que si $G\backslash X$, ainsi que les orbites de G dans X, sont connexes, alors G l'est. En déduire, pour tout sous-groupe H de G, que si H et $H\backslash G$ sont connexes, alors G l'est.

Exercice E.112 Soit G un groupe muni d'une structure de variété de classe C^∞, dans lequel l'application $(x, y) \mapsto xy$ est C^∞. Montrer que G est un groupe de Lie. On pourra considérer l'application $(x, y) \mapsto (x, xy)$ au voisinage de (e, e).

Exercice E.113

1. Soient $\mathcal{A}_n$ le groupe de Lie des matrices réelles de taille $n \times n$ diagonales ayant des valeurs propres strictement positives, $\mathcal{N}_n$ le groupe de Lie des matrices réelles triangulaires supérieures de taille $n \times n$ avec des 1 sur la diagonale, et $\mathcal{K}_\mathbf{n} = \mathrm{O}(n)$, où $n \geq 1$. Montrer que l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{K}_n \times \mathcal{A}_n \times \mathcal{N}_n & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (K, A, N) & \mapsto & KAN \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme C^∞. Cette décomposition s'appelle la *décomposition d'Iwasawa* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. Notons $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille $n \times n$ et $\mathcal{K}_n = \mathrm{O}(n)$, où $n \geq 1$. Montrer que l'application

$$\Psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{K}_n \times \mathcal{S}_n & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (K, S) & \mapsto & KS \end{array} \right.$$

est un difféomorphisme C^∞. Cette décomposition s'appelle la *décomposition polaire* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

3. En déduire que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $\mathrm{SO}(n) \times \mathbb{R}^{(n+2)(n-1)/2}$.
4. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas simplement connexes et que leur revêtement universel (voir l'appendice A.4 pour des rappels) est difféomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Exercice E.114 Si G est un groupe de Lie, on note G_0 la composante connexe de son élément neutre. Montrer que les groupes de Lie $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})/\{\pm\mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}(3,3)_0$ sont isomorphes. On pourra montrer et utiliser le fait que le produit extérieur dans $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ (voir l'appendice A.5) fournit une forme quadratique de signature $(3, 3)$ sur $\mathbb{R}^6$. Montrer que les groupes de Lie $\mathrm{PSO}(4) = \mathrm{SO}(4)/\{\pm\mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}(3) \times SO(3)$ sont isomorphes. (Voir aussi l'exercice E.127 pour une autre méthode.)

Exercice E.115 Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel usuel $\wedge$ est une algèbre de Lie. On considèrera les champs de vecteurs X, Y, Z sur $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$X = z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad Z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

On montrera qu'ils engendrent, dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, une sous-algèbre de Lie isomorphe à $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel.

Exercice E.116 Dans cet exercice, on considère $\mathbb{R}^3$ muni de ses coordonnées usuelles (x, y, z). On note X_1, X_2, X_3 les champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ définis au point (x, y, z) par

$$\left\{\begin{array}{lcl} X_1 & = & -2z\frac{\partial}{\partial z} + 2y\frac{\partial}{\partial y} \\ \\ X_2 & = & -y\frac{\partial}{\partial x} + 2x\frac{\partial}{\partial z} \\ \\ X_3 & = & z\frac{\partial}{\partial x} - 2x\frac{\partial}{\partial y} \end{array}\right. .$$

(1) Montrer que l'application $\Delta : (x, y, z) \mapsto \mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3)$ est un champ de 2-plans de classe C^∞ intégrable sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

(2) Si $\mathcal{F}$ est le feuilletage de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ auquel est tangent Δ, montrer que toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, qui sont C^∞-difféomorphes au plan $\mathbb{R}^2$ ou au cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$.

On considère le groupe de Lie $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, d'élément neutre la matrice identité Id, et son algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Pour tout X dans $\mathfrak{g} - \{0\}$, on note $\psi_X : G \to \mathfrak{g}$ l'application $g \mapsto gXg^{-1}$.

(3) Montrer que l'application $X \mapsto T_{\mathrm{Id}}\ \psi_X(\mathfrak{g})$, qui à X dans $\mathfrak{g} - \{0\}$ associe l'image de $T_{\mathrm{Id}}\ \psi_X$, est un champ de 2-plans intégrable sur $\mathfrak{g} - \{0\}$.

(4) Montrer que pour tout X_0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\mathrm{tr}\ X_0^2$ soit non nul, l'ensemble

$$\{gX_0g^{-1}\ :\ g \in G\}$$

est une sous-variété connexe de dimension 2 de classe C^∞ de $\mathfrak{g} - \{0\}$, égale à la composante connexe de X_0 dans l'ensemble des éléments X de $\mathfrak{g} - \{0\}$ tels que

$$\mathrm{tr}\ X^2 = \mathrm{tr}\ X_0^2\ .$$

Exercice E.117 Soit G le groupe des transformations affines de $\mathbb{R}$ de la forme $f_{a,b} : x \mapsto ax + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que G est un groupe de Lie difféomorphe à $\mathbb{R}^2$. Il est appelé le *groupe affine* de la droite. Montrer qu'il est isomorphe au sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ :\ a > 0, b \in \mathbb{R}\right\}\ .$$

2. Soient A et B les générateurs évidents de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Calculer $[A, B]$.
3. Quels sont les sous-groupes à un paramètre de G ?
4. Montrer que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G.

Exercice E.118 Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $\exp : \mathfrak{g} \to G$ l'application exponentielle. On munit $\mathfrak{g}$ d'une norme quelconque.

(1) Montrer que pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\exp\ X\ \exp\ Y = \exp(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + r_1(X, Y))$$

où $\frac{||r_1(X,Y)||}{||X||\,||Y||}$ tend vers 0 quand X, Y tendent vers 0.

(2) En déduire que pour tous X, Y dans $\mathfrak{g}$, on a

$$\exp\ X\ \exp\ Y \exp(-X)\ \exp(-Y) = \exp([X, Y] + r_2(X, Y))$$

où $\frac{||r_2(X,Y)||}{||X||\,||Y||}$ tend vers 0 quand X, Y tendent vers 0.

Exercice E.119 Montrer qu'un groupe de Lie (réel) est sans petit sous-groupe.

Exercice E.120 Si G est un groupe de Lie d'élément neutre e, montrer qu'il existe une structure de groupe de Lie sur TG telle que les applications d'inclusion $T_eG \to TG$ (où T_eG est le groupe de Lie additif de l'espace vectoriel T_eG) et de projection $TG \to G$ canoniques soient des morphismes de groupes de Lie. Est-elle unique ?

Exercice E.121 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ le groupe de ses automorphismes d'algèbres de Lie. Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, dont l'algèbre de Lie est la sous-algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Exercice E.122 Montrer qu'il n'existe pas de structure de groupe de Lie sur une sphère de dimension paire non nulle.

Exercice E.123 Soient H un sous-groupe de Lie immergé connexe d'un groupe de Lie G. Soit $\phi : G \to G$ un morphisme de groupes continu injectif tel que $\phi(H) \subset H$. Montrer que la restriction de ϕ à H est un C^∞-difféomorphisme de H.

Exercice E.124 (Groupes unipotents) Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Soient G le groupe de Lie formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec des 1 sur la diagonale, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

1. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, montrer que $\mathrm{ad}(X)$ est nilpotent.
2. Montrer que l'exponentielle est un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G.
3. Montrer qu'il existe une application $C : \mathfrak{g}^2 \to \mathfrak{g}$ polynomiale telle que, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$,
$$\exp(X)\exp(Y) = \exp(C(X, Y))\ .$$

4. Si X et Y appartiennent à une même sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, montrer que $C(X,Y)$ appartient à $\mathfrak{h}$. On pourra vérifier que la fonction $F(t) = C(tX, tY)$ est solution d'une certaine équation différentielle.
5. Montrer que tout sous-groupe de Lie immergé connexe de G est fermé et simplement connexe.

Exercice E.125 Soient G, G' des groupes de Lie connexes, et $p : G' \to G$ un revêtement de groupes de Lie. Montrer qu'il existe un sous-groupe distingué discret Γ de G', et un isomorphisme de groupes de Lie $\theta : \Gamma\backslash G' \to G$ tels que, si $\pi : G' \to \Gamma\backslash G'$ est la projection canonique, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & G' & \\ {}^{\pi}\swarrow & & \searrow^{p} \\ \Gamma\backslash G' & \xrightarrow{\theta} & G \end{array} .$$

Exercice E.126 (1) Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_3$.

(2) Soit V l'espace vectoriel des matrices complexes de taille 2, antihermitiennes et de trace nulle. Exhiber un produit scalaire sur V qui soit invariant par l'action naturelle de SU(2) sur V.

(3) En déduire l'existence d'un revêtement SU $\to$ SO(3). Quel est le cardinal de chaque fibre ? Quel est (à isomorphisme de groupes de Lie près) le revêtement universel de SO(3) ?

(4) Montrer que SO(3) est difféomorphe à $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Exercice E.127 On note $\mathcal{H}$ l'espace des quaternions de Hamilton et $\mathbb{S}_3 \subset \mathcal{H}$ la sphère des quaternions unités. Pour h dans $\mathcal{H}$ et q_1, q_2 dans $\mathbb{S}_3$, on note $\pi(q_1, q_2)(h) = q_1 h \overline{q}_2$.

(1) Montrer que $\mathbb{S}_3$ est un groupe de Lie pour la multiplication. Montrer que π est une action C^∞ de $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3$ sur $\mathcal{H}$. Quel est son noyau ?

(2) En déduire l'existence d'un revêtement $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3 \to$ SO(4). Quel est le cardinal de ses fibres ?

Exercice E.128 (Groupes de Lie abéliens) (1) Si G est un groupe de Lie commutatif, montrer que le crochet de Lie sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nul.

(2) Réciproquement, si G est un groupe de Lie connexe dont le crochet de Lie est nul, montrer que les flots de deux champs de vecteurs invariants à gauche commutent. En déduire que G est commutatif.

(3) Montrer que pour tout sous-groupe fermé F de $\mathbb{R}^n$, il existe un automorphisme linéaire f de $\mathbb{R}^n$ tel que $f(F) = \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q$ avec p, q dans $\mathbb{N}$ et $p + q \leq n$.

(4) Montrer qu'un groupe de Lie (réel) commutatif, connexe et simplement connexe de dimension n est isomorphe au groupe de Lie $\mathbb{R}^n$.

(5) Montrer que tout groupe de Lie (réel) G, commutatif, de dimension n, est isomorphe à un groupe de Lie produit $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \times F$, pour p dans $\mathbb{N}$ avec $p \leq n$, et F un groupe abélien discret.

(6) Soit G un groupe de Lie complexe compact connexe. Si V est un espace vectoriel complexe de dimension finie et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est un morphisme de groupes de Lie complexes, montrer que $\rho(G) = \{\mathrm{Id}\}$. On pourra utiliser le fait qu'une application holomorphe bornée de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est constante.

(7) Montrer qu'un groupe de Lie complexe compact connexe est commutatif.

Exercice E.129 Soit $n \geq 1$. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{n+1}$ donnée par

$$q(x_0, \ldots, x_n) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2.$$

On note $\mathrm{O}(1,n)$ le groupe orthogonal de q, $\mathrm{SO}(1,n)$ le sous-groupe de $\mathrm{O}(1,n)$ formé des éléments de déterminant 1 et $\mathrm{SO}_0(1,n)$ la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{SO}(1,n)$.

1. Montrer que $O(1,n)$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.
2. Déterminer $\mathrm{O}(1,1)$, $\mathrm{SO}(1,1)$ et $\mathrm{SO}_0(1,1)$.
3. On note $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ l'ensemble des $x = (x_0, \ldots, x_n)$ tels que $q(x) = 1$ et $x_0 > 0$. Montrer que $\mathrm{SO}_0(1,n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. En déduire le nombre de composantes connexes de $\mathrm{O}(1,n)$.
4. Soit A l'espace vectoriel des matrices réelles, carrées, symétriques et de taille 2. Montrer que le déterminant est une forme quadratique sur A. En déduire l'existence d'un revêtement de groupes de Lie (réels) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_0(1,2)$. Quel est son noyau ?
5. Construire un revêtement de groupes de Lie (réels) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}_0(1,3)$. Quel est le cardinal de ses fibres ?

Exercice E.130 Montrer que les groupes de Lie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{SO}_0(1,2), \mathrm{SU}(1,1)$ sont isomorphes.

Exercice E.131 Soient $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, et V, V' deux espaces vectoriels de dimension finie sur K.

(1) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V') & \longrightarrow & \mathbb{P}(V \otimes V') \\ (Kx, Ky) & \mapsto & K(x \otimes y) \end{array}$$

(voir l'appendice A.5 pour les rappels sur le produit tensoriel) est un plongement K-analytique.

(2) Un *drapeau de type* $\underline{n} = (n_0, \ldots, n_k)$ est une suite finie $D = (V_i)_{0 \leq i \leq k}$ de sous-espaces vectoriels emboités ($V_{i-1} \subset V_i$ pour $1 \leq i \leq k$) tels que la dimension de V_i soit n_i. On note $\mathcal{D}_{\underline{n}}$ l'ensemble des drapeaux de type $\underline{n}$. Le groupe linéaire $G = \mathrm{GL}(V)$ agit sur $\mathcal{D}_{\underline{n}}$ par

$$g.(V_i)_{0 \leq i \leq k} = (gV_i)_{0 \leq i \leq k}\ .$$

On note G_D le stabilisateur d'un drapeau D. Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de V est *adaptée* à D si $(e_j)_{1 \leq j \leq n_i}$ est une base de V_i pour $1 \leq i \leq k$. On considère l'application

$$\Theta : \mathcal{D}_{\underline{n}} \to \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(\Lambda^i V)$$

définie par $D \mapsto (Ke_1 \wedge \cdots \wedge e_{n_i})_{1 \leq i \leq k}$ pour $(e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée à D. Montrer que Θ est bien définie, qu'elle est une bijection sur son image, que celle-ci est une sous-variété K-analytique, et calculer sa dimension.

(3) En déduire que pour tout drapeau D, l'espace homogène G/G_D se plonge (de manière K-analytique) dans un espace projectif de dimension $\prod_{i=0}^{k}(n_i+1) - 1$ sur K. En particulier, si P est le sous-groupe de Lie des matrices triangulaires supérieures du groupe de Lie $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que l'espace homogène G/P se plonge (de manière analytique réelle) dans l'espace projectif réel de dimension $n! - 1$.

Exercice E.132 On considère, sur l'espace vectoriel réel $V = \mathbb{R}^{2n}$, identifié avec l'ensemble $\mathbb{C}^n$ par l'application $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \mapsto z = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$, la forme bilinéaire réelle

$$B(z, z') = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i' - y_i x_i') \ .$$

Un sous-espace vectoriel réel L de dimension réelle n de V est dit *lagrangien* si B est nulle sur $L \times L$.

(1) Montrer que le sous-ensemble des sous-espaces lagrangiens de V est une sous-variété C^∞ de la variété grassmannienne $\mathcal{G}_n(V)$.

(2) En remarquant que $O(n) = U(n) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que cette sous-variété est C^∞-difféomorphe à $U(n)/O(n)$.

Exercice E.133 Pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, on note $G = \mathrm{SO}(2n)$ le groupe de Lie (réel) des matrices g réelles $2n \times 2n$ de déterminant 1 et orthogonales (i.e. $g^{-1} = {}^t g$). On note Asym_{2n} l'espace vectoriel des matrices X de taille $2n \times 2n$ qui sont antisymétriques (i.e. ${}^t X = -X$). On définit l'ensemble $M = G \cap \mathrm{Asym}_{2n}$. On note I_n la matrice identité $n \times n$, et

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \ .$$

(1) Montrer que tout élément de M est conjugué à J_n par un élément de G. Si $X \in M$, quel est le rang de l'application linéaire de Asym_{2n} dans l'espace vectoriel des matrices réelles $2n \times 2n$ définie par $Y \mapsto XY + YX$?

(2) Montrer que M est une sous-variété C^∞ de G. Quelle est sa dimension ?

(3) Soit H l'ensemble des matrices g de G telles que $gJ_n = J_n g$. Montrer que H est un sous-groupe de Lie de G. Quelle est sa dimension ?

(4) On considère l'application $\varphi : G/H \to M$ définie par $gH \mapsto gJ_n{}^t g$. Montrer que φ est bien définie, et est un C^∞-difféomorphisme.

Exercice E.134 (Espaces symétriques de groupes orthogonaux et unitaires) Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$ et V le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Soit q une forme quadratique (respectivement hermitienne) non dégénérée de signature (p', p) avec $1 \leq p \leq p'$ (p est le nombre de signes $+$) sur V. Rappelons (voir la partie 2.4.3) que

$\mathcal{G}_p(V)$ est la variété analytique réelle (respectivement complexe) des sous-espaces vectoriels de dimension p de V. Notons $X = X_G$ l'ensemble des éléments L de $\mathcal{G}_p(V)$ tels que la restriction de q à $L \times L$ soit définie positive.

(1) Montrer que X est une sous-variété analytique réelle (respectivement complexe) de $\mathcal{G}_p(V)$.

(2) Soit G la composante neutre du groupe de Lie réel des bijections $\mathbb{K}$-linéaires de V de déterminant 1 préservant q, aussi noté $\mathrm{SO}_0(q)$ (respectivement $\mathrm{SU}(q)$). Montrer que $(g, L) \mapsto g(L)$ est une action analytique réelle de G sur X.

(3) Fixons L_0 un élément de X. Notons $L_0^\perp$ son orthogonal pour q, et K le stabilisateur du point L_0 pour l'action de G sur X. Montrer que K est un sous-groupe de Lie compact de G, isomorphe au sous-groupe, noté $S(O(p) \times O(p'))$ (respectivement $S(U(p) \times U(p'))$), des matrices diagonales par blocs, de blocs diagonaux dans $O(p), O(p')$ (respectivement $U(p), U(p')$) et de déterminant 1. Montrer qu'il existe un difféomorphisme analytique réel entre X et la variété analytique réelle quotient G/K.

(4) Notons p_0 et $p_0^\perp$ les projections orthogonales sur L_0 et $L_0^\perp$. Soit $\mathcal{L}(L_0, L_0^\perp)$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications $\mathbb{K}$-linéaires de L_0 dans $L_0^\perp$. Notons $Y = Y_G$ l'ensemble des A dans $\mathcal{L}(L_0, L_0^\perp)$ tels que $\mathrm{Id} - A^*A$ soit définie positive, où A^* est l'adjoint de A pour les produits scalaires $q_{|L_0 \times L_0}$ et $-q_{|L_0^\perp \times L_0^\perp}$. Montrer que l'application $\varphi : X \to \mathcal{L}(L_0, L_0^\perp)$, qui à L associe $p_0^\perp \circ (p_{0|L})^{-1}$, est un difféomorphisme analytique réel (respectivement complexe) de X sur l'ouvert borné Y de $\mathcal{L}(L_0, L_0^\perp)$.

(5) Quelle est l'adhérence de X dans $\mathcal{G}_p(V)$? Montrer que l'action de G sur X s'étend continuement en une action de G sur son adhérence $\overline{X}$, et que G n'a qu'un nombre fini d'orbites sur $\overline{X}$, dont une seule est fermée.

(6) Notons $\check{S}_X$ l'ensemble des éléments L de $\mathcal{G}_p(V)$ isotropes pour q, $\check{S}_Y$ l'ensemble (appelé *frontière de Shilov* du domaine borné Y_G) des éléments A de $\mathcal{L}(L_0, L_0^\perp)$ tels que $\mathrm{Id} - A^*A = 0$, et P le stabilisateur dans G d'un sous-espace isotrope maximal de V. Montrer que $\check{S}_X, \check{S}_Y$ sont des sous-variétés analytiques réelles (respectivement complexes) de $\mathcal{G}_p(V), \mathcal{L}(L_0, L_0^\perp)$, qui sont difféomorphes (par un difféomorphisme analytique réel) à la variété analytique réelle quotient G/P.

(6) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p = p' = 1$, expliciter Y_G. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $p = p'$, montrer que l'application de Y_G dans l'espace vectoriel complexe $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ définie par $Z \mapsto i(\mathrm{Id} + Z)(\mathrm{Id} - Z)^{-1}$ des matrices de taille $p \times p$ est un difféomorphisme analytique complexe sur son image, que l'on déterminera.

Exercice E.135 (Espaces symétriques de groupes symplectiques) Soit V un espace vectoriel réel de dimension $2n$, muni d'une *forme symplectique* $\langle\ ,\ \rangle$ (i.e. d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$). On rappelle qu'une *structure complexe* sur V est un automorphisme linéaire J de V tel que $J^2 = -\mathrm{Id}$.

(1) Si W est un espace vectoriel complexe de dimension n, et q une forme hermitienne non dégénérée, montrer que la multiplication par i est une structure complexe sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à W, et que $\mathrm{Im}\ q$ est une forme symplectique non dégénérée sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à W . Si J est une structure complexe sur V, montrer qu'il

existe une unique structure d'espace vectoriel complexe sur V telle que la multiplication par i soit l'automorphisme J. Nous la noterons V_J dans la suite.

Notons $\mathrm{Sp}(V)$ le groupe des *symplectomorphismes* de V, i.e. des automorphismes linéaires de l'espace vectoriel V préservant la forme symplectique de V.

Notons $X = X_{\mathrm{Sp}(V)}$ l'ensemble des automorphismes linéaires J de V tels que J soit une structure complexe sur V, et l'application $h_J : (x, y) \mapsto \langle x, Jy\rangle + i\langle x, y\rangle$ soit une forme hermitienne définie positive sur l'espace vectoriel complexe V_J.

(2) Montrer que J appartient à X si et seulement si J est une structure complexe sur V et $(x, y) \mapsto \langle x, Jy\rangle$ est une forme quadratique définie positive sur V.

(3) Montrer que X est une sous-variété analytique réelle de $\mathrm{GL}(V)$.

(4) Montrer que $\mathrm{Sp}(V)$ est un sous-groupe de Lie du groupe de Lie réel $\mathrm{GL}(V)$. Montrer que l'action par conjugaison de $\mathrm{Sp}(V)$ sur $\mathrm{GL}(V)$ préserve X, est transitive sur X et que le stabilisateur d'un point est un groupe de Lie réel isomorphe à $U(n)$.

(5) Soit $V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ le complexifié de V, qui est un espace vectoriel complexe, et $\sigma : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ la conjugaison complexe (i.e. l'unique application $\mathbb{R}$-linéaire telle que $\sigma(x \otimes z) = x \otimes \overline{z}$). Si f est une forme $\mathbb{R}$-multilinéaire sur V, on note $f_{\mathbb{C}}$ l'unique forme $\mathbb{C}$-multilinéaire sur $V_{\mathbb{C}}$ telle que

$$f_{\mathbb{C}}(x_1 \otimes z_1, \ldots, x_p \otimes z_p) = z_1 \ldots z_p f(x_1, \ldots, x_p) \ .$$

Montrer que l'application de l'ensemble des structures complexes sur V dans l'ensemble des décompositions en somme directe d'espaces vectoriels réels $V_{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ préservées par σ, qui à J associe la décomposition $V_{\mathbb{C}} = W_+(J) \oplus W_-(J)$ en espaces propres de $V_{\mathbb{C}}$ pour $J_{\mathbb{C}}$ correspondant aux valeurs propres $+i, -i$ respectivement, est une bijection.

Montrer que $h : (x, t) \mapsto i\langle x, \sigma(y)\rangle_{\mathbb{C}}$ est une forme hermitienne non dégénérée de signature (n, n) sur l'espace vectoriel complexe $V_{\mathbb{C}}$.

(6) En rappelant la notation $X_{\mathrm{SU}(h)}$ de l'exercice E.134 précédent, montrer que l'application de $X_{\mathrm{Sp}(V)}$ dans $X_{\mathrm{SU}(h)}$ qui à J associe $W_+(J)$ est un plongement analytique réel, équivariant sous l'action du morphisme de groupes de Lie de $\mathrm{Sp}(V)$ dans $\mathrm{SU}(h)$ défini par $g \mapsto g_{\mathbb{C}}$, et dont l'image $S_{\mathrm{Sp}(V)}$ (appelé l'*espace de Siegel*) est l'ensemble des L dans la variété grassmannienne $\mathcal{G}_n(V_{\mathbb{C}})$ tels que $h_{|L\times L}$ soit définie positive et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}|L\times L}$ soit nulle.

En déduire que $X_{\mathrm{Sp}(V)}$ admet une structure de variété analytique complexe invariante par l'action de $\mathrm{Sp}(V)$.

(7) Montrer que l'application $\varphi : X_{\mathrm{SU}(h)} \to Y_{\mathrm{SU}(h)}$ définie dans l'exercice E.134 (4) induit un difféomorphisme analytique réel de l'espace de Siegel $S_{\mathrm{Sp}(V)}$ sur la sous-variété $Y_{\mathrm{Sp}(V)}$ de $Y_{\mathrm{SU}(h)}$ formée des $A \in Y_{\mathrm{SU}(h)}$ tels que l'application $\mathbb{R}$-bilinéaire $(x, y) \to \langle x, Ay\rangle_{\mathbb{C}}$ sur $(V \otimes 1) \times (V \otimes 1)$ soit symétrique.

(8) Montrer que l'action de $\mathrm{Sp}(V)$ sur l'espace de Siegel $S_{\mathrm{Sp}(V)}$ induite par le plongement de la question (6) s'étend continuement à l'adhérence $\overline{S_{\mathrm{Sp}(V)}}$ de $S_{\mathrm{Sp}(V)}$ dans $\mathcal{G}_n(V_{\mathbb{C}})$, que l'action de $\mathrm{Sp}(V)$ sur $\overline{S_{\mathrm{Sp}(V)}}$ possède $n + 1$ orbites, dont la seule qui est fermée est la sous-variété analytique réelle $\check{S}_{\mathrm{Sp}(V)}$ de $\mathcal{G}_n(V_{\mathbb{C}})$ (appelée la *frontière de Shilov* de $\mathrm{Sp}(V)$) formée des L tels que à la fois $h_{|L\times L}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}|L\times L}$ soient nulles.

5.10 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.105 Soit U un voisinage ouvert de l'élément neutre e dans un groupe topologique G, et H le sous-groupe de G engendré par U. Si $g \in H$, alors gU est un voisinage ouvert de g, contenu dans H, donc H est ouvert. Si $g \in \overline{H}$, alors le voisinage ouvert gU de g rencontre H, donc $g \in H$ car H est un groupe contenant U, et H est fermé. Par connexité, on a $G = H$.

Schème E.106 Nous ne traitons ici que le cas de $\mathrm{O}(n)$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, de $\mathrm{U}(p, q)$ dans $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{C})$ et de $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$. Nous identifions aussi leurs algèbres de Lie, et nous vérifions que l'exponentielle des matrices envoie l'algèbre de Lie du sous-groupe de Lie dans ce sous-groupe de Lie (ce qui découle de la propriété (6) c)).

Les arguments sont très similaires dans les trois cas. Pour vérifier que les parties $\mathrm{O}(n), \mathrm{U}(p, q), \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-variétés C^∞, nous allons les écrire comme $\phi^{-1}(x)$ pour une certaine submersion ϕ de classe C^∞ et un certain x.

Dans le cas de $\mathrm{O}(n)$, soit ϕ l'application $x \mapsto {}^t x x$, de l'ouvert $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans l'espace vectoriel réel de dimension fini S des matrices réelles symétriques de taille $n \times n$. Elle est de classe C^∞ (car polynomiale), de différentielle $d\phi_x(X) = {}^t x X + {}^t X x$. Montrons que $d\phi_x$ est surjective. Soit s une matrice symétrique, alors $X = {}^t x^{-1} s/2$ vérifie $d\phi_x(X) = s$, ce qui conclut. Le sous-ensemble $\mathrm{O}(n) = \phi^{-1}(I_n)$, image réciproque d'un point par une submersion, est donc une sous-variété de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. De plus, son espace tangent en un point x est donné par le noyau de $d\phi_x$. En particulier, son algèbre de Lie, i.e. son espace tangent en I_n, est donné par $\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ X + {}^t X = 0\} = \mathfrak{o}(n)$, l'espace vectoriel des matrices antisymétriques. La variété $\mathrm{O}(n)$ est de dimension égale à la dimension de cet espace vectoriel, et donc de dimension $n(n-1)/2$.

Dans le cas de $\mathrm{U}(p, q)$, soit $n = p + q$. On prend ϕ l'application $x \mapsto {}^t \bar{x} I_{p,q} x$, de l'ouvert $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ dans l'espace vectoriel réel de dimension fini des matrices hermitiennes, qui est C^∞. Sa différentielle, donnée par $d\phi_x(X) = {}^t \bar{x} I_{p,q} X + {}^t \bar{X} I_{p,q} x$, est surjective : un antécédent de la matrice hermitienne s est $I_{p,q}\, {}^t \bar{x}^{-1} s/2$. Comme ϕ est une submersion C^∞, $\mathrm{U}(p, q)$ est donc une sous-variété C^∞ de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Son algèbre de Lie est donnée par

$$\ker d\phi_{I_n} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ : \ {}^t \bar{X} I_{p,q} + I_{p,q} X = 0\} = \mathfrak{u}(p, q) \ .$$

De plus, $\mathrm{U}(p, q)$ est de dimension $2n^2 - n(n-1)/2 - n(n+1)/2 = n^2$.

Enfin, pour $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, on prend $\phi(x) = {}^t x J_n x$, à valeurs dans l'espace des matrices antisymétriques. Les arguments ci-dessus se répètent sans difficulté. Son algèbre de Lie est

$$\{X \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^t X J_n + J_n X = 0\} = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) \ ,$$

et sa dimension $4n^2 - 2n(2n-1)/2 = n(2n+1)$.

Montrons maintenant que les exponentielles de ces algèbres de Lie sont incluses dans les groupes de Lie correspondants.

Soit X une matrice dans l'algèbre de Lie de $\mathrm{O}(n)$, i.e., antisymétrique. Alors X et ${}^t X$ commutent donc

$${}^t\exp(X) \exp(X) = \exp({}^t X) \exp(X) = \exp({}^t X + X) = I_n \ .$$

Ainsi, $\exp(X)$ appartient bien à $\mathrm{O}(n)$.

Un argument similaire fonctionne pour $\mathrm{U}_{p,q}$. Soit X telle que ${}^t\bar{X} I_{p,q} + I_{p,q} X = 0$. Alors $I_{p,q}^{-1}\, {}^t\bar{X} I_{p,q} + X = 0$. En particulier, les deux matrices $I_{p,q}^{-1}\, {}^t\bar{X} I_{p,q}$ et X commutent, donc

$$\begin{aligned} I_n &= \exp(I_{p,q}^{-1}\, {}^t\bar{X} I_{p,q} + X) = \exp(I_{p,q}^{-1}\, {}^t\bar{X}\, I_{p,q}) \exp(X) = I_{p,q}^{-1} \exp({}^t\overline{X})\, I_{p,q} \exp(X) \\ &= I_{p,q}^{-1}\, {}^t\overline{\exp(X)}\, I_{p,q} \exp(X). \end{aligned}$$

Ainsi, $\exp(X)$ appartient à $\mathrm{U}(p,q)$. Le même argument fonctionne directement pour le groupe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Schème E.108 Voir les indications de solution de l'exercice E.106.

Schème E.109 Voir par exemple [MT].

Schème E.112 Il s'agit de voir que l'inversion est C^∞.

Soit $F : (x,y) \mapsto (x, xy)$. Elle est C^∞. Comme $F(x,e) = (x,x)$, l'image de $T_{(e,e)}F$ contient la diagonale $\Delta = \{(y,y)\} \subset T_eG \times T_eG$. De même, $F(e,y) = (e,y)$ donc l'image de $T_{(e,e)}F$ contient $\{0\} \times T_eG$. Comme $\Delta \oplus (\{0\} \times T_eG) = T_eG \times T_eG$, la différentielle $T_{(e,e)}F$ est surjective, donc bijective, et le théorème d'inversion locale montre que F admet un inverse local F^{-1}. Algébriquement, on a $F^{-1}(x,y) = (x, x^{-1}y)$. Soit π_2 la projection sur la deuxième coordonnée. Alors $x^{-1} = \pi_2 \circ F^{-1}(x,e)$, donc $x \mapsto x^{-1}$ est C^∞ au voisinage de e.

Soit maintenant g arbitraire dans G. Pour x proche de g, on a

$$x^{-1} = (xg^{-1}g)^{-1} = g^{-1}(xg^{-1})^{-1}.$$

Comme $x \mapsto (xg^{-1})^{-1}$ est C^∞ au voisinage de g, on en déduit que $x \mapsto x^{-1}$ est également C^∞.

Schème E.113 (1) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En orthogonalisant ses colonnes, on vérifie qu'il existe des matrices K orthogonale et D triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale, telles que $M = KD$. Comme D s'écrit aisément sous la forme AN avec $A \in \mathcal{A}_n$ et $N \in \mathcal{N}_n$, on obtient la surjectivité de Φ.

Si $KAN = K'A'N'$, alors ${}^tK'K = A'N'N^{-1}A^{-1}$. La matrice ${}^tK'K$ est orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, c'est donc l'identité, et $K' = K$. Cela implique aisément que $A = A'$ et $N = N'$. Ainsi, Φ est une bijection.

On va montrer que Φ est un C^∞-difféomorphisme local. En particulier, l'image d'un ouvert sera ouverte par le théorème d'inversion locale, donc Φ^{-1} sera C^∞ et cela conclura la preuve.

Soient $(K,A,N) \in \mathcal{K}_n \times \mathcal{A}_n \times \mathcal{N}_n$. Alors $T_K\mathcal{K}_n = \{U \ : \ {}^tUK + {}^tKU = 0\}$ est de dimension $n(n-1)/2$, tandis que $T_A\mathcal{A}_n$ est constitué des matrices diagonales, de dimension n, et $T_N\mathcal{N}_n$ est constitué des matrices triangulaires supérieures strictes, de dimension $n(n-1)/2$. Comme $n(n-1)/2 + n + n(n-1)/2 = n^2$, les dimensions coïncident et il suffit de vérifier que $T_{(K,A,N)}\Phi$ est injective.

Soient U, V, W telles que $T_{(K,A,N)}\Phi(U,V,W) = 0$, i.e. $UAN + KVN + KAW = 0$, i.e. ${}^tKUAN + VN + AW = 0$. La matrice $U' = {}^tKU$ est antisymétrique, et $U' = -(VN + AW)N^{-1}A^{-1}$. En particulier, U' est triangulaire supérieure. Par antisymétrie, $U' = 0$, puis $U = 0$. Ainsi, $VN + AW = 0$. Comme W est triangulaire supérieure stricte, les coefficients diagonaux de AW sont nuls, et les coefficients diagonaux de VN également.

Mais ces coefficients sont ceux de V, donc $V = 0$. Finalement, on obtient aussi $W = 0$, ce qui conclut.

(2) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La matrice ${}^tMM$ est alors symétrique définie positive. En la diagonalisant dans une base orthonormée puis en prenant la racine carrée de chaque coefficient sur la diagonale, on obtient une matrice symétrique définie positive S telle que ${}^tMM = S^2 = {}^tSS$. Alors $K = MS^{-1}$ satisfait ${}^tKK = I_n$, i.e. K est orthogonale. On a montré la surjectivité de Ψ.

Réciproquement, soit $(K, S) \in \mathcal{K}_n \times \mathcal{S}_n$ tel que $M = KS$. Pour démontrer l'unicité de S, il suffit donc de voir que toute matrice X de S admet une unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n$. C'est immédiat si X est de la forme $\lambda\mathrm{Id}$ (avec $\lambda > 0$). Si S est une racine carrée de X, alors S et X commutent, et par diagonalisation simultannée, on se ramène au cas précédent.

Ainsi, Ψ est une bijection. Il reste à montrer que c'est un difféomorphisme. Soient $K \in \mathcal{K}_n$ et $S \in \mathcal{S}_n$. L'espace tangent à $\mathcal{K}_n$ en K est formé des matrices U telles que ${}^tKU + {}^tUK = 0$, et est de dimension $n(n-1)/2$, tandis que l'espace tangent à $\mathcal{S}_n$ en S est formé des matrices symétriques, et est de dimension $n(n+1)/2$. Les dimensions coïncident bien, il suffit donc de vérifier que $T_{(K,S)}\Psi$ est injective pour conclure.

Soit $(U, V) \in T_K\mathcal{K}_n \times T_S\mathcal{S}_n$, alors $T_{(K,S)}\Psi(U, V) = KV + US$. Si $T_{(K,S)}\Psi(U, V) = 0$, on a donc $V + {}^tKUS = 0$. La matrice $U' = {}^tKU$ est antisymétrique, et vérifie $V + U'S = 0$, donc $U'S$ est symétrique, puis

$$U'S = {}^t(U'S) = {}^tS\,{}^tU' = -SU'.$$

Quitte à diagonaliser S dans une base orthonormée, on peut supposer que S est la matrice diagonale de coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec $\lambda_i > 0$ puisque S est définie positive. L'équation $(U'S)_{ij} = -(SU')_{ij}$ donne alors $(\lambda_i + \lambda_j)U'_{ij} = 0$, puis $U'_{ij} = 0$ car $\lambda_i + \lambda_j > 0$. Ainsi, $U' = 0$, puis $U = KU' = 0$, et enfin $V = -U'S = 0$.

(3) L'application Ψ se restreint à $\mathrm{SO}(n) \times \mathcal{S}_n$ en un difféomorphisme entre $\mathrm{SO}(n) \times \mathcal{S}_n$ et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de déterminant strictement positif. Notons $\mathcal{S}_{n,1}$ la sous-variété de $\mathcal{S}_n$ formé des matrices symétriques définies positives de déterminant 1. Alors Ψ se restreint en un difféomorphisme entre $\mathrm{SO}(n) \times \mathcal{S}_{n,1}$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Finalement, l'exponentielle est un difféomorphisme entre l'espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{S}_n$ (voir l'exercice E.181), qui se restreint en un difféomorphisme entre l'espace vectoriel des matrices symétriques de trace nulle et $\mathcal{S}_{n,1}$. Ainsi, $\mathcal{S}_{n,1}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{(n+2)(n-1)/2}$.

(4) L'application Ψ est un difféomorphisme entre $\mathrm{SO}(2) \times \mathcal{S}_{n,1}$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. En quotientant par $\{\pm 1\}$, on obtient un difféomorphisme entre $(\mathrm{SO}(2)/\{\pm 1\}) \times \mathcal{S}_{n,1}$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. De plus, le groupe de Lie $\mathrm{SO}(2)$ des rotations du plan est isomorphe au cercle $\mathbb{S}_1$. Dans $\mathrm{SO}(2)/\{\pm 1\}$, on identifie deux points opposés, et on obtient donc une variété difféomorphe à $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, i.e. à $\mathbb{S}_1$. Ainsi, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est difféomorphe à $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}^2$.

Comme un revêtement universel de $\mathbb{S}_1$ est $\mathbb{R}$, le groupe de Lie $\widetilde{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}$, revêtement universel de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (et donc de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$), est donc difféomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Schème E.114 Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $(\mathbb{R}^4)^*$, ce qui fournit une base $(e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$ de $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$. Notons $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ les coordonnées de $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$ dans cette base, et, par l'orientation de $\mathbb{R}^4$, identifions $\Lambda^4(\mathbb{R}^4)^*$ avec $\mathbb{R}$ par l'application $t\ e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \mapsto t$. En composant le produit extérieur par cette application, on obtient donc une forme bilinéaire sur $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$, qui est symétrique, et dont la forme quadratique associée s'exprime dans les coordonnées ci-dessus comme

$q = 2(x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4)$, qui est bien de signature $(3,3)$, et le groupe de Lie connexe $SO(q)_0$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(3,3)_0$.

Pour g dans $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$, notons g^* l'application linéaire induite sur $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$, dont on sait qu'elle vérifie $(g \circ h)^* = h^* \circ g^*$ et $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$. Comme g est de déterminant 1, l'application linéaire g^* préserve la forme quadratique q. Donc l'application $g \mapsto (g^{-1})^*$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ dans $SO(q)$. Il est évidemment de classe C^∞ (les coefficients de g^* dans la base précédente sont des polynômes en les coefficients de g). Par connexité de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$, ce morphisme est à valeurs dans $SO(q)_0$. Comme $\{\pm\mathrm{Id}\}$ agit trivialement sur $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$, nous obtenons donc, par passage au quotient par le sous-groupe distingué discret $\{\pm\mathrm{Id}\}$, un morphisme de groupes de Lie de $\Theta : \mathrm{PSL}_4(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}(3,3)_0$. Pour montrer que c'est un isomorphisme de groupes de Lie, par un résultat du cours, il suffit de montrer qu'il est bijectif.

Schème E.115 En utilisant la formule donnant le crochet de Lie en fonction des dérivées partielles, on calcule $[X,Y] = Z$. Par permutation circulaire, on obtient aussi $[Y,Z] = X$ et $[Z,X] = Y$.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel canonique, soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique. On a $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$ et $e_3 \wedge e_1 = e_2$. Ainsi, l'application envoyant X sur e_1, Y sur e_2 et Z sur e_3 est un isomorphisme d'espace vectoriel qui envoie le crochet de Lie sur le produit vectoriel. On en déduit en particulier que $(\mathbb{R}^3, \wedge)$ est une algèbre de Lie (ce qui n'était pas évident a priori, il fallait vérifier que l'identité de Jacobi était satisfaite, ce qui est immédiat maintenant puisqu'elle est toujours satisfaite par les champs de vecteurs).

Schème E.116 (1) Ces champs de vecteurs X_1, X_2, X_3 sont clairement C^∞, et vérifient la relation de colinéarité $xX_1 + zX_2 + yX_3 = 0$. De plus, sur chacun des ouverts d'équation $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ (dont la réunion recouvre $\mathbb{R}^3 - \{0\}$), les couples de champs de vecteurs (X_2, X_3), (X_1, X_2) et (X_1, X_3) sont libres, donc forment une base de Δ. En particulier, Δ est un champ de 2-plans C^∞ sur $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, d'équation au point (x,y,z),

$$xX + zY + yZ = 0\ .$$

Un petit calcul (lorsque l'on connait la formule pour le crochet de champs de vecteurs !) donne

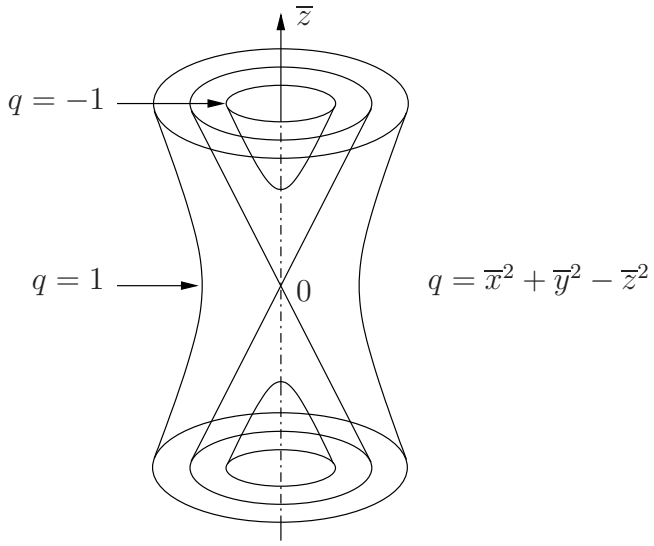
$$[X_1, X_2] = 2X_2, \quad [X_1, X_3] = -2X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1\ .$$

Donc, par le théorème de Frobénius (ne pas oublier de citer le nom des théorèmes que l'on utilise), le champ de 2-plans Δ est intégrable.

On peut aussi raisonner de manière directe (ce qui est utile pour la seconde question). Considérons l'application f de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2/2 + yz$. Il est clair que cette application est une submersion surjective, donc par le théorème des fonctions implicites, les composantes connexes des préimages $f^{-1}(c)$ pour c dans $\mathbb{R}$ forment un feuilletage de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Le calcul évident de la différentielle de f, qui donne $df_{(x,y,z)}(X,Y,Z) = xX + zY + yZ$, montre que le champ de 2-plans Δ est tangent à ce feuilletage.

(2) Le changement linéaire (donc C^∞) de variables $\overline{x} = 2x, \overline{y} = y + z, \overline{z} = y - z$ montre que les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les composantes connexes des surfaces dans $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ d'équation $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 - \overline{z}^2 = c$ où c est une constante. Ces surfaces sont des surfaces de révolution autour de l'axe des $\overline{z}$. Elles sont connexes et C^∞-difféomorphes à un cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$ si $c > 0$,

et ont deux composantes connexes, chacune C^∞-difféomorphes à un disque ouvert (donc à $\mathbb{R}^2$) si $c > 0$. Enfin, si $c = 0$, cette surface (qui est le cône privé de son origine) a deux composantes connexes, chacune C^∞-difféomorphe à un cylindre.



(3) On a

$$\mathfrak{g} = T_{\mathrm{Id}}\, G = \{X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{R}\} \ .$$

En particulier, l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ est engendré par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Donc le champ de sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, T_{\mathrm{Id}}\, \psi_X$ est engendré par les champs de vecteurs

$$\frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tA} X e^{-tA}, \ \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tB} X e^{-tB}, \ \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tC} X e^{-tC} \ .$$

Un petit calcul montre que ces champs de vecteurs sont exactement

$$-2c\frac{\partial}{\partial c} + 2b\frac{\partial}{\partial b}, \ -b\frac{\partial}{\partial a} + 2a\frac{\partial}{\partial c}, \ c\frac{\partial}{\partial a} - 2a\frac{\partial}{\partial b} \ .$$

On conclut alors par (1).

(4) Comme

$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^2 = 2(a^2 + bc) \ ,$$

le résultat découle de (2).

On peut aussi montrer par des moyens d'algèbre linéaire que deux matrices non nulles de trace nulle sont conjuguées par un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si elles sont dans la même composante connexe d'une surface de niveau de $X \mapsto \mathrm{tr} X^2$, et dire que l'application de $\mathfrak{g} - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $X \mapsto \mathrm{tr} X^2$ est une submersion.

Schème E.117 (1) On identifie $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et G par l'application $(a,b) \mapsto f_{a,b}$. On vérifie que $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{ac,ad+b}$ et $f_{a,b}^{-1} = f_{1/a,-b/a}$. Ainsi, la composition et l'inversion sont C^∞ sur la variété $G = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, ce qui montre que G est bien un groupe de Lie.

Comme le groupe de matrices indiqué vérifie la même formule pour la composition, les deux groupes sont isomorphes.

(2) On voit G comme un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est donc une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, de base $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ s'obtient comme restriction à $\mathfrak{g}$ du crochet de Lie de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, qui est simplement le crochet de Lie des matrices. Ainsi, $[A,B] = AB - BA = B$, comme on le vérifie en faisant le produit matriciel.

(3) On obtient l'exponentielle de $\mathfrak{g}$ comme restriction de l'exponentielle de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{R})$, qui est simplement l'exponentielle de matrice. Notons que

$$\exp \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & \frac{e^x-1}{x} y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (*)$$

Dans G, on obtient donc :

$$\exp(xA + yB) = f_{e^x, \frac{e^x-1}{x} y} .$$

Les sous-groupes à un paramètre de G sont de la forme $t \mapsto \exp(tX)$ pour un élément X de G. On écrit $X = xA + yB$ pour $x, y \in \mathbb{R}$, et on en déduit que le sous-groupe à un paramètre précédemment mentionné est donné par

$$t \mapsto f_{e^{tx}, \frac{e^{tx}-1}{x} y} .$$

(4) En identifiant $f_{a,b}$ avec le couple $(a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, l'exponentielle est donnée par $\exp(x,y) = (e^x, \frac{e^x-1}{x} y)$. Ainsi, sa différentielle s'écrit

$$d\exp_{(x,y)}(u,v) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ \frac{e^x x - (e^x-1)}{x^2} y & \frac{e^x-1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} .$$

En particulier, le déterminant de $d\exp_{(x,y)}$ est non nul, ce qui montre que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local.

La formule (*) montre de plus que c'est une bijection entre $\mathfrak{g}$ et G, ce qui conclut.

Schème E.119 L'application exponentielle exp est un C^∞-difféomorphisme d'un voisinage convexe U de 0 sur un voisinage de e, et $\exp(nX) = (\exp(X))^n$ si $nX \in U$.

Schème E.120 L'espace vectoriel $\mathfrak{g} = T_e G$ est bien sûr un groupe de Lie. Rappelons que chaque espace tangent étant naturellement identifié avec $\mathfrak{g}$, le groupe de Lie G est parallélisable, et donc TG est difféomorphe à $G \times \mathfrak{g}$, de sorte que la projection $TG \to G$ corresponde à la première projection de $G \times \mathfrak{g}$ dans G, et l'inclusion $\mathfrak{g} \to TG$ à l'application $x \mapsto (e,x)$. En munissant $G \times \mathfrak{g}$ de la structure de groupe de Lie produit, le résultat en découle. Il n'y a pas unicité, car la loi

$$(X,g)(X',g') = (X + \mathrm{Ad}\, g\, (X'), g\, g') ,$$

dont on vérifie qu'elle est encore une loi de groupe de Lie sur la variété produit $G \times \mathfrak{g}$, convient aussi

Schème E.122 S'il existait une structure de groupe de Lie sur une telle sphère, on définirait un champ de vecteurs partout non nul en fixant un vecteur v non nul de T_eG, puis en posant $X(g) = T_eL_x(v)$ où L_x est la multiplication à gauche par x. C'est absurde, car on sait qu'il n'existe pas de champ de vecteurs partout non nul sur une sphère de dimension paire (voir l'exercice E.81).

Schème E.123 Le corollaire 5.22 montre que $\phi : G \to G$ est une application C^∞. C'est de plus une immersion (par injectivité et rang constant), c'est donc un C^∞-difféomorphisme de G sur $\phi(G)$. Pour conclure, il reste à voir que $\phi(H) = H$.

L'ensemble $K = \phi(H)$ est un sous-groupe de H. Comme ϕ est un difféomorphisme local, K est ouvert dans H. Son complémentaire dans H est réunion de classes à gauche, et est donc ouvert, si bien que K est fermé. Par connexité, $H = K$.

Schème E.124 (1) Le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ est obtenu par restriction du crochet de Lie de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, si $X \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(X) = L_X - R_X$. Comme L_X et R_X commutent, $\mathrm{ad}(X)^k = \sum_{j=0}^k L_X^j(-R_X)^{k-j}$. La matrice X étant nilpotente, $R_X^n = L_X^n = 0$. Ainsi, pour $k \geq 2n-1$, $\mathrm{ad}(X)^k = 0$.

(2) Si $X \in \mathfrak{g}$, son exponentielle est donnée par $\exp(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$. Considérons la fonction $\ell : G \to \mathfrak{g}$ donnée par $\ell(x) = \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\frac{(x-1)^j}{j}$: c'est le début du développement en série du logarithme.

L'égalité entre séries formelles $\exp(\log(1+z)) = 1+z$ et $\log(\exp(z)) = z$ donne alors $\ell \circ \exp = \mathrm{id}$ et $\exp \circ l = \mathrm{id}$. De plus, ℓ est polynomiale. Par conséquent, l'exponentielle est un C^∞-difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G.

(3) Il suffit de prendre $C(X,Y) = \ell(\exp(X)\exp(Y))$, qui est manifestement polynomiale.

(4) Posons $Z(u,v) = C(uX, vY)$, avec $\exp(Z(u,v)) = \exp(uX)\exp(vY)$. Soit $g(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$. En dérivant par rapport à v, le membre de gauche donne $T_eL_{\exp(Z)}g(\mathrm{ad}\, Z)\frac{\partial Z}{\partial v}$ (voir la proposition 5.16) et le membre de droite donne $T_{\exp(vY)}L_{\exp(uX)}T_eL_{\exp(vY)}Y$. En identifiant et en prenant $v = 0$, on obtient

$$g(\mathrm{ad}\, Z)\frac{\partial Z}{\partial v} = Y \ .$$

Notons que $\mathrm{ad}\, Z$ est nilpotent, si bien que $g(\mathrm{ad}\, Z)$ est en fait simplement un polynôme en $\mathrm{ad}\, Z$. Soit $h_1(z) = 1/g(z)$, on a $h_1(\mathrm{ad}\, Z) = g(\mathrm{ad}\, Z)^{-1}$ (et $h_1(\mathrm{ad}\, Z)$ est encore un polynôme en $\mathrm{ad}\, Z$). Ainsi,

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = h_1(\mathrm{ad}\, Z)(Y) \ .$$

On peut aussi dériver l'équation $\exp(-Z(u,v)) = \exp(-vY)\exp(-uX)$ par rapport à u (on a changé les signes pour avoir une multiplication à *gauche* par $\exp(-vY)$, ce qui permet de mener à bien les calculs). On obtient

$$g(-\mathrm{ad}\, Z)\frac{\partial Z}{\partial u} = -X \ .$$

Soit $h_2(z) = -1/g(-z)$, on a donc

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = h_2(\mathrm{ad}\, Z)(X) \ .$$

Par conséquent, la fonction $F(t) = C(tX, tY) = Z(t,t)$ satisfait

$$\frac{dF}{dt}(t) = h_1(\operatorname{ad} F(t))(Y) + h_2(\operatorname{ad} F(t))(X) \ .$$

Posons $\Phi(u) = h_1(\operatorname{ad} u)(Y) + h_2(\operatorname{ad} u)(X)$. C'est un champ de vecteurs polynomial sur $\mathfrak{g}$, et $F'(t) = \Phi(F(t))$. Pour $u \in \mathfrak{h}$, on a $\Phi(u) \in \mathfrak{h}$ puisque X et Y appartiennent à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Ainsi, une solution de l'équation différentielle $f' = \Phi(f)$ partant d'une condition initiale dans $\mathfrak{h}$ reste dans $\mathfrak{h}$. C'est le cas de $F(t)$ puisque $F(0) = 0$.

(5) Soient H un sous-groupe de Lie immergé connexe de G, et $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Lie correspondante. Alors H est engendré par $\exp(\mathfrak{h})$. Mais la question précédente montre que $\exp(\mathfrak{h})$ est un sous-groupe de G, donc $H = \exp(\mathfrak{h})$. Comme l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre $\mathfrak{g}$ et G, et $\mathfrak{h}$ est une partie fermée et simplement connexe de $\mathfrak{g}$, on obtient la même conclusion pour H.

Schème E.126 (1) Soit $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$. L'égalité ${}^t\overline{x}x = I_2$ donne $|a|^2 + |c|^2 = 1$ et $|b|^2 + |d|^2 = 1$. L'égalité $x\,{}^t\overline{x} = I_2$ donne aussi $|a|^2 + |b|^2 = 1$ et $|c|^2 + |d|^2 = 1$. Ainsi, $|a| = |d|$ et $|b| = |c|$.

De plus, $1 = \det(x) = ad - bc$. Par Cauchy-Schwarz,

$$1 \leq |ad| + |bc| = |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz montre que $ad \in \mathbb{R}_+$ et $bc \in \mathbb{R}_-$. Ainsi, si $a = re^{i\theta}$, on a $d = re^{-i\theta}$, et si $b = r'e^{i\theta'}$ on a $c = -r'e^{-i\theta'}$. On a montré que x était de la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 + ix_4 \\ x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}$$

avec $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{S}_3$. Réciproquement, une telle matrice appartient bien à SU(2). Ainsi, la formule ci-dessus définit un difféomorphisme entre $\mathbb{S}_3$ et SU(2).

(2) L'espace vectoriel V est l'algèbre de Lie de SU(2). Ainsi, SU(2) agit naturellement sur V par conjugaison (c'est l'action Ad). Un élément $X = \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix}$ de V a pour déterminant $x^2 + y^2 + z^2$. On définit alors une norme euclidienne sur V par $||X|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Comme la conjugaison ne modifie pas le déterminant, cette norme est invariante sous l'action de SU(2).

(3) Soit $\Phi = \mathrm{Ad} : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(V)$. Pour la norme de la question précédente, Φ prend ses valeurs dans $\mathrm{O}(V)$. Comme SU(2) est connexe, on a même $\Phi(\mathrm{SU}(2)) \subset \mathrm{SO}(V)$. De plus, $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(V)$ est C^∞ car polynomiale, c'est donc est un morphisme de groupes de Lie.

Si $g \in \ker(\Phi)$, alors g commute avec toutes les matrices de V. En particulier, g commute avec toutes les matrices antisymétriques réelles (prendre $x = z = 0$) et toutes les matrices symétriques réelles (prendre $y = 0$ et ajouter λI_2). Ainsi, g commute avec toutes les matrices réelles, c'est donc une homothétie, puis $g = \pm I_2$. Ainsi, Φ engendre un morphisme injectif $\tilde{\Phi} : \mathrm{SU}(2)/\{\pm I_2\} \to \mathrm{SO}(V)$.

Ces deux groupes de Lie sont de même dimension 3, donc $\tilde{\Phi}$ est un difféomorphisme local : il est de rang constant, et si ce rang était strictement inférieur à 3 alors $\tilde{\Phi}$ ne serait pas injectif. En particulier, l'image de $\tilde{\Phi}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SO}(V)$, et il est

donc égal à $\mathrm{SO}(V)$ par connexité (rappelons que $\exp : \mathfrak{so}(V) \to \mathrm{SO}(V)$ est surjective (voir l'exercice E.181), donc $\mathrm{SO}(V)$ est connexe comme image continue d'un connexe). On a montré que $\mathrm{SO}(V)$ était difféomorphe à $\mathrm{SU}(2)/\{\pm I_2\}$.

Finalement, $\Phi : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(V)$ est un revêtement et ses fibres sont de cardinal 2. Comme $\mathrm{SU}(2)$, qui est difféormorphe à $\mathbb{S}_3$, est simplement connexe, c'est donc un revêtement universel de $\mathrm{SO}(V)$.

(4) D'après la question précédente, $\mathrm{SO}(V)$ est difféomorphe à $\mathbb{S}_3/\{\pm\mathrm{Id}\} = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Schème E.127 (1) L'application π est clairement une action C^∞. Soit $(q_1, \overline{q}_2) \in \ker \pi$. En prenant $h = 1$, on obtient $q_1\overline{q}_2 = 1$, i.e. $q_1 = q_2$ puisque ces deux quaternions sont de module 1. L'équation $q_1 h \overline{q}_1 = h$ s'écrit aussi $q_1 h = h q_1$, i.e. q_1 commute avec tous les quaternions. C'est donc un réel. Comme il est de norme 1, on obtient $h = \pm 1$. Finalement, $\ker \pi = \{\pm 1\}$.

(2) L'action π préserve le carré du module des quaternions, qui est une forme quadratique de signature $(4, 0)$ sur $\mathcal{H}$. Ainsi, π définit un morphisme de $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3$ dans $\mathrm{O}(4)$. Par connexité, il est à valeurs dans $\mathrm{SO}(4)$.

Les deux groupes sont de même dimension 6, et π est localement injectif. Comme π est de rang constant, c'est localement une immersion, donc localement un difféomorphisme. En particulier, l'image de π est ouverte. Par connexité de $\mathrm{SO}(4)$, l'application π est surjective.

Finalement, π est un revêtement dont les fibres sont de cardinal 2.

Schème E.128 (1) Voir l'exemple (1) du paragraphe 5.3. Voici une autre preuve. Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. Soient $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les champs de vecteurs invariants à gauche correspondants, de flots respectifs ϕ_t et ψ_t (qui sont également donnés par $\phi_t(g) = g\exp(tX)$ et $\psi_t(g) = g\exp(tY)$). La commutativité de G assure que $\phi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_t$. En particulier, $\phi_t \circ \psi_t \circ \phi_{-t} \circ \psi_{-t} = \mathrm{Id}$. Comme le champ de vecteurs $[\overline{X}, \overline{Y}]$ est obtenu en dérivant cette expression, on obtient $[\overline{X}, \overline{Y}] = 0$, puis $[X, Y] = 0$ grâce à la correspondance entre les champs de vecteurs invariants à gauche et l'algèbre de Lie.

(2) Comme le crochet de Lie est nul, $[\overline{X}, \overline{Y}]$ est nul pour tous les champs de vecteurs invariants à gauche $\overline{X}$ et $\overline{Y}$. Mais $[\overline{X}, \overline{Y}]$ mesure le défaut de commutation des flots de $\overline{X}$ et de $\overline{Y}$ (voir la preuve du théorème de Frobenius). Ainsi, ces flots commutent, i.e. $\exp(tX)\exp(sY) = \exp(sY)\exp(tX)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. Comme l'exponentielle est un difféomorphisme local en 0, son image contient un voisinage de e, et il existe un voisinage U de e tel que, pour tous g, g' dans U, on ait $gg' = g'g$. Comme G est connexe, U engendre G, donc G est commutatif.

(4) Si G est un groupe de Lie commutatif de dimension n, alors son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est commutative, donc isomorphe à l'algèbre de Lie commutative $\mathbb{R}^n$.

Soit $\pi : \tilde{G}_0 \to G_0$ un revêtement universel du groupe de Lie G_0. Le groupe de Lie $\tilde{G}_0$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, par la question précédente. Donc G_0 est isomorphe au groupe de Lie quotient $\mathbb{R}^n/\ker(\pi)$. De plus, $\ker(\pi)$, comme sous-groupe fermé discret de $\mathbb{R}^n$, est isomorphe à $\mathbb{Z}^q$ pour un certain q. Finalement, le groupe de Lie G_0 est bien isomorphe à $\mathbb{R}^{n-q} \times \mathbb{T}^q$.

(5) Soit G_0 la composante neutre de G. Le groupe G est alors isomorphe à $G_0 \times G/G_0$, et G/G_0 est un groupe commutatif discret. Il suffit donc de montrer que G_0 est de la forme $\mathbb{R}^p \times \mathbb{T}^q$ pour conclure, par dimension.

(6) Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $X \in \mathfrak{g}$. Considérons une base de $\mathrm{GL}(V)$, ce qui permet d'identifier $\mathrm{GL}(V)$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $\pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ une des fonctions coordonnées. La

fonction $z \mapsto \pi \circ \rho \circ \exp(zX)$ est holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et bornée, puisque son image est contenue dans le compact $\pi(\rho(G))$. Par conséquent, elle est constante égale à $\pi \circ \rho \circ \exp(0)$. Ainsi, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on obtient $\rho(\exp(X)) = \mathrm{Id}$.

Ainsi, $\ker \rho$ contient le sous-groupe engendré par l'image de l'exponentielle, c'est-à-dire G puisque G est connexe.

(7) D'après la question précédente, l'application $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ est constante égale à l'identité. Par conséquent, sa dérivée ad est nulle. Comme $[X, Y] = \mathrm{ad}X(Y)$, le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ est nul. D'après la deuxième question, G est donc commutatif.

Schème E.129 (1) Soit S_{n+1} l'espace vectoriel de dimension finie des matrices réelles symétriques de taille $n+1$. Notons

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R}) & \to & S_{n+1} \\ x & \mapsto & {}^t x I_{1,n} x \end{array} \right. .$$

Cette application est une submersion. Comme $\mathrm{O}(1,n) = \phi^{-1}(I_{1,n})$, c'est une sous-variété, de codimension $(n+1)(n+2)/2$. Ainsi, $\dim \mathrm{O}(1,n) = n(n+1)/2$.

(2) On a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si une matrice appartient à $O(1,1)$, elle vérifie

$$a^2 = b^2 + 1, \quad d^2 = c^2 + 1, \quad ac = bd.$$

De plus, en multipliant l'équation ${}^t x I_{1,1} x = I_{1,1}$ à droite par $I_{1,1}\, {}^t x$ et à gauche par $I_{1,1}\, {}^t x^{-1}$, on obtient aussi $x I_{1,1}\, {}^t x = I_{1,1}$. Sur les coefficients, on trouve

$$a^2 = c^2 + 1, \quad d^2 = b^2 + 1, \quad ab = cd.$$

En particulier, $a^2 = d^2 = b^2 + 1 = c^2 + 1$. Comme $a^2 = c^2 + 1$, on a $a^2 \geq 1$, et il existe donc $\epsilon_a \in \{-1, 1\}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $a = \epsilon_a \cosh(t)$. On peut alors écrire $d = \epsilon_d \cosh(t)$, $b = \epsilon_b \sinh(t)$ et $c = \epsilon_c \sinh(t)$. Quitte à changer le signe de t, on peut supposer que $\epsilon_b = 1$. L'égalité $ac = bd$ donne alors $\epsilon_d = \epsilon_a \epsilon_b$ (ou $d = 0$, auquel cas le signe ϵ_d n'a pas d'importance).

On a montré que $\mathrm{O}(1,1)$ était inclus dans l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} \epsilon \cosh(t) & \epsilon\delta \sinh(t) \\ \sinh(t) & \delta \cosh(t) \end{pmatrix} \ : \ t \in \mathbb{R}, \epsilon, \delta \in \{-1, 1\} \right\}.$$

La réciproque est immédiate.

Ainsi, $\mathrm{O}(1,1)$ a quatre composantes connexes toutes difféomorphes à $\mathbb{R}$. Le sous-ensemble $\mathrm{SO}(1,1)$ correspond aux matrices pour lesquelles $\epsilon = \delta$, et $\mathrm{SO}_0(1,1)$ correspond à $\epsilon = \delta = 1$.

(3) On va montrer que tout élément $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ peut être envoyé sur $a = (1, 0, \ldots, 0)$ par un élément de $\mathrm{SO}_0(1,n)$. (Voir pour cela l'exemple (5) de variétés homogènes du paragraphe 5.8.)

Le groupe $\mathrm{SO}(n)$ agit transitivement sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Par conséquent, il existe une matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ de $\mathrm{SO}_0(1,n)$ qui envoie x sur un vecteur de la forme

$(x_0, x_1', 0, \ldots, 0)$. On peut écrire $x_0 = \cosh(t)$ et $x_1' = -\sinh(t)$ pour un certain $t \in \mathcal{R}$. La matrice $\begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$ envoie (x_0, x_1') sur $(1, 0)$. En la complétant par un bloc diagonal de la forme I_{n-1}, on obtient un élément de $\mathrm{SO}_0(1, n)$ envoyant $(x_0, x_1', 0, \ldots, 0)$ sur a.

Ainsi, $\mathrm{SO}_0(1, n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$. On définit alors une application $\Phi : O(1, n) \to \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}$ ainsi : si $M(a)$ appartient à $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, on pose $\Phi(M) = (1, \det M)$, et sinon $\Phi(M) = (-1, \det M)$. C'est un morphisme continu. Il est surjectif (utiliser des matrices obtenues en complétant des matrices de $\mathrm{O}(1, 1)$ par un bloc diagonal I_{n-1}).

Montrons que $\Phi^{-1}(1, 1)$ est connexe, et donc égal à $\mathrm{SO}_0(1, 1)$. Cela montrera que $\mathrm{O}(1, n)$ a exactement 4 composantes connexes.

Soit M avec $\Phi(M) = (1, 1)$. Comme $\mathrm{SO}_0(1, n)$ agit transitivement sur $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, il existe $M' \in \mathrm{SO}_0(1, n)$ tel que $M'M(a) = a$. Ainsi, $M'M$ s'écrit par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ {}^tL & {}^tB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ {}^tL & {}^tLL - {}^tBB \end{pmatrix}.$$

Cette matrice doit être égale à $I_{1,n}$, donc $L = 0$ et $B \in \mathrm{O}(n)$. Comme $\det M = 1$, la matrice B est de déterminant 1 et appartient à $\mathrm{SO}(n)$. Par connexité de $\mathrm{SO}(n)$, $M'M$ appartient à la composante connexe de l'identité, ce qui conclut.

(4) Si $M = \begin{pmatrix} x+y & z \\ z & x-y \end{pmatrix}$, alors $\det(M) = x^2 - y^2 - z^2$, qui est une forme quadratique en les coefficients de M, de signature $(1, 2)$

On peut définir une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur A en posant $\Phi(x)M = xM\,{}^tx$. Elle préserve le déterminant, donc Φ est une application de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{O}(1, 2)$. Par connexité, Φ est à valeurs dans $\mathrm{SO}_0(1, 2)$. C'est un morphisme de groupes de Lie, entre variétés de même dimension 3.

Calculons son noyau. Si $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient au noyau de Φ, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $a^2 = 1$ et $c = 0$. De même, $d^2 = 1$ et $b = 0$. Il reste donc $x = \pm I_2$. Réciproquement, ces matrices sont bien dans le noyau de $\ker \Phi$. Finalement, $\ker \Phi = \{\pm I_2\}$.

En particulier, l'application Φ est localement injective. Comme c'est un morphisme de groupes de Lie, elle est de rang constant. Si ce rang était < 3, elle ne serait pas localement injective (par le théorème de forme normale des applications de rang constant), ce qui est absurde. Ainsi, Φ est un difféomorphisme local.

L'image de Φ est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{SO}_0(1, 2)$, et est donc égale à $\mathrm{SO}_0(1, 2)$ par connexité. Ainsi, Φ est surjective.

En passant au quotient, on obtient un difféomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_0(1, 2)$.

(5) L'argument est très semblable à celui de la question précédente, mais en agissant sur l'espace B des matrices hermitiennes, par $\Phi(x).M = xM\,{}^t\overline{x}$. Cette action préserve le déterminant, qui est une forme quadratique de signature $(1, 3)$, donc Φ est un morphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SO}_0(1, 3)$. Ces deux groupes sont de même dimension 6.

Une matrice appartenant au noyau de Φ est de la forme $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, par les mêmes arguments que dans la question précédente. Comme elle commute avec $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, on a $e^{2i\theta} = 1$, puis $x = \pm I_2$.

Finalement, Φ est localement injectif, c'est donc un difféomorphisme local, et il induit un difféomorphisme entre $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{SO}_0(1,3)$.

Schème E.131 (1) Voir l'exercice E.45.

Schème E.134 et Schème E.135 Voir par exemple [BILW].

6 Formes différentielles

Nous renvoyons au paragraphe 3.7 pour la construction des fibrés vectoriels des p-formes alternées $\lambda_p : \Lambda^p T^*M \to M$ et celui des formes alternées $\lambda_* : \Lambda^* T^*M \to M$ sur une variété donnée M.

6.1 Formes différentielles

Soient n et p deux éléments de $\mathbb{N}$, et M une variété C^{r+1} de dimension n, avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$.

Une *p-forme différentielle* (resp. *p-forme différentielle de classe* C^r) sur M est une section (resp. une section de classe C^r) du fibré vectoriel $\lambda_p : \Lambda^p T^*M \to M$. Ainsi, une p-forme différentielle ω associe, à tout x dans M, une forme p-linéaire alternée ω_x sur l'espace tangent T_xM à M en x. De même, une *forme différentielle* (resp. *forme différentielle de classe* C^r) sur M est une section (resp. une section de classe C^r) du fibré vectoriel $\lambda_* : \Lambda^* T^*M \to M$. Ainsi, une forme différentielle ω associe, à tout x dans M, une somme de formes multilinéaires alternées ω_x sur l'espace tangent T_xM à M en x.

On note $\Omega^{p,(r)}(M)$ (et $\Omega^p(M)$ quand r est sous-entendue) l'ensemble des p-formes différentielles C^r sur M, et $\Omega^{(r)}(M)$ (et $\Omega(M)$ quand r est sous-entendue) l'ensemble des formes différentielles C^r sur M. On a une inclusion évidente $\Omega^{p,(r)}(M) \to \Omega^{(r)}(M)$.

Comme $\Lambda^0 T^*M$ s'identifie avec $M \times \mathbb{R}$, notons que $\Omega^{0,(r)}(M)$ s'identifie avec $\mathrm{C}^r(M, \mathbb{R})$. Par convention, on pose $\Omega^{p,(r)}(M) = \{0\}$ si $p < 0$.

• **Structure d'algèbre.**

Rappelons que l'ensemble des sections d'un fibré vectoriel, muni des opérations d'addition et de multiplication externe point par point, est un espace vectoriel. Soient ω, ω' dans $\Omega^{(r)}(M)$, et a dans $\mathbb{R}$. On appelle *addition* de ω et ω' la forme différentielle

$$\omega + \omega' : x \mapsto \omega_x + \omega'_x \ .$$

On appelle *multiplication externe* de ω par a la forme différentielle

$$a\omega : x \mapsto a\omega_x \ .$$

On appelle *produit extérieur* de ω et ω' la forme différentielle

$$\omega \wedge \omega' : x \mapsto \omega_x \wedge \omega'_x \ .$$

Proposition 6.1 *L'ensemble $\Omega^{(r)}(M)$, muni des opérations ci-dessus et de la famille $(\Omega^{p,(r)}(M))_{p\in\mathbb{N}}$, est une algèbre réelle (associative, unitaire) graduée, anticommutative, i.e.*

- *$(\Omega^{(r)}(M), +, \cdot, \wedge)$ est une algèbre (associative, unitaire) sur $\mathbb{R}$, et $\Omega^{p,(r)}(M)$ est un sous-espace vectoriel ;*
- *$\Omega^{(r)}(M) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Omega^{p,(r)}(M)$, et si $\alpha \in \Omega^{p,(r)}(M)$ et $\beta \in \Omega^{q,(r)}(M)$, alors $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{p+q,(r)}(M)$;*
- *si $\alpha \in \Omega^{p,(r)}(M)$ et $\beta \in \Omega^{q,(r)}(M)$, alors $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$.*

Remarque. En posant, pour toute fonction réelle f de classe C^r sur M et toute forme différentielle ω de classe C^r sur M,

$$f \cdot \omega : x \mapsto f(x)\omega_x \ ,$$

l'ensemble $\Omega^{(r)}(M)$ est muni d'une structure d'algèbre (associative, unitaire) graduée anticommutative sur l'anneau $\mathrm{C}^r(M,\mathbb{R})$.

Preuve. Il est immédiat que les opérations préservent la régularité C^r des formes différentielles. Le résultat découle alors du théorème A.16 de l'appendice A.5. $\square$

Par exemple, si $f : M \to \mathbb{R}$ est une application C^{r+1}, alors l'application $df : M \to T^*M$, qui au point x de M vaut la forme linéaire

$$df_x : X \mapsto T_x f(X)$$

sur l'espace tangent T_xM, est une 1-forme différentielle C^r, appelée la *différentielle* de f. Il ne faut pas confondre $df : M \to T^*M$ et $Tf : TM \to T\mathbb{R}$, même si l'un détermine l'autre.

Si U est un ouvert de M, alors l'application

$$\omega \mapsto \omega_{|U}$$

est un morphisme d'algèbres (unitaires), gradué de degré 0, de $\Omega^{(r)}(M)$ dans $\Omega^{(r)}(U)$. De même que pour les champs de vecteurs, les formes différentielles vérifient la propriété de localité des faisceaux : si U est un ouvert, réunion d'ouverts U_i, si ω_i est une forme différentielle C^r sur U_i, tels que $\omega_i = \omega_j$ sur $U_i \cap U_j$, alors l'unique application $\omega : U \to \Lambda^* T^*U$ telle que $\omega_{|U_i} = \omega_i$ est une forme différentielle C^r sur U.

Remarque. Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors comme TU s'identifie avec $U \times \mathbb{R}^n$, la carte (U, id) de la variété U fournit une identification

$$\Lambda^* T^*U = U \times \Lambda^*(\mathbb{R}^n)^* \ .$$

Une forme différentielle $x \mapsto (x, \omega_x)$ sur U s'identifie donc à une application $x \mapsto \omega_x$ de U dans $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$. Cette forme différentielle sur U est de classe C^r si et seulement si l'application $x \mapsto \omega_x$ est C^r. Nous ferons cette identification dans toute la suite de ces notes.

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $(e_I^*)_{I \in \mathcal{I}_n}$, où $\mathcal{I}_n$ est l'ensemble des suites strictement croissantes dans $\{1, \ldots, n\}$, la base correspondante de $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$. Toute forme différentielle ω sur U s'écrit alors, de manière unique,

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} f_I \, e_I^* \ ,$$

où $f_I : U \to \mathbb{R}$ est une application, de classe C^r si ω l'est.

Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et si $f : U \to \mathbb{R}$ est une application C^{r+1}, alors la 1-forme différentielle df est l'application qui à x dans U associe la différentielle (ou application dérivée) df_x, au sens du calcul différentiel. Par exemple, si x_i (avec notation abusive, mais parlante) est l'application i-ème coordonnée $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, qui est linéaire, alors la différentielle dx_i est constante sur U, et vaut encore l'application i-ème coordonnée. C'est-à-dire, en tout point x de U, la suite $(dx_1, \ldots, dx_n)$ est la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dx_i \ .$$

De plus, en posant $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ pour tout $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$ et p dans $\mathbb{N}$ (par convention $dx_\emptyset = 1$), alors toute forme différentielle ω sur U s'écrit, de manière unique,

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} \omega_I \, dx_I$$

où $\omega_I \in \mathrm{C}^r(U, \mathbb{R})$. De même,

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1, \ldots, i_p} \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

si ω est une p-forme différentielle. La famille $(dx_I)_{I \in \mathcal{I}_n}$ est donc une base du module $\Omega^{(r)}(U)$ sur l'anneau $\mathrm{C}^r(U, \mathbb{R})$. Attention, pour une variété générale M, le $\mathrm{C}^r(M, \mathbb{R})$-module $\Omega^{(r)}(M)$ n'est pas forcément libre.

Proposition 6.2 *Si $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont des 1-formes différentielles sur M, et si $X_1, \ldots, X_p$ sont des champs de vecteurs sur M, alors, pour tout x dans M, on a*

$$(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)_x (X_1(x), \ldots, X_k(x)) = \det \left((\omega_i)_x (X_j(x)) \right)_{1 \leq i,j \leq k} .$$

Preuve. Ceci découle de la proposition A.17 de l'appendice A.5. □

• **Image réciproque.**
Soient N une variété C^{r+1} avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, et $f : M \to N$ une application C^{r+1}.

Pour tout $\omega \in \Omega^{p,(r)}(N)$, on note $f^*\omega$, et on appelle *image réciproque* de ω par f, la forme différentielle $x \mapsto (T_x f)^*(\omega_{f(x)})$, donc définie, pour tout x dans M et tous $X_1, \ldots, X_p$ dans $T_x M$, par

$$(f^*\omega)_x (X_1, \ldots, X_p) = \omega_{f(x)} (T_x f(X_1), \ldots, T_x f(X_p)) .$$

Il est immédiat que $f^*\omega$ est de classe C^r. On étend par linéarité f^* à $\Omega^{(r)}(N)$. Si g appartient à $\Omega^{0,(r)}(M) = \mathrm{C}^r(M, \mathbb{R})$, alors

$$f^* g = g \circ f .$$

Si ω est une 1-forme différentielle, et si ${}^t(T_x f)$ est l'application linéaire de $T^*_{f(x)} N$ dans $T^*_x M$, duale de $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$, alors

$$(f^*\omega)_x = {}^t(T_x f)(\omega_{f(x)}) .$$

Remarquons que si U est un ouvert de N, et si $i : U \to N$ est l'inclusion, alors

$$\forall \, \omega \in \Omega(N), \quad i^*\omega = \omega_{|U} ,$$

donc l'opération de restriction aux ouverts est un cas particulier d'image réciproque.

Exercice E.136 *Montrer que si $g : N \to \mathbb{R}$ est une application C^{r+1}, alors $f^*(dg) = d(g \circ f) = d(f^* g)$.*

Proposition 6.3 *L'application $f^* : \Omega^{(r)}(N) \to \Omega^{(r)}(M)$ est un morphisme d'algèbres (unitaires) graduées, qui commute aux restrictions, i.e. f^* est linéaire, $f^*1 = 1$,*

$$\forall\, \omega, \eta \in \Omega^{(r)}(N), \quad f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)\ ,$$

$f^*(\Omega^{p,(r)}(N)) \subset \Omega^{p,(r)}(M)$, et, pour tout ouvert U de N et tout $\omega \in \Omega^{(r)}(N)$,

$$(f^*\omega)_{|f^{-1}(U)} = (f_{|f^{-1}(U)})^*(\omega_{|U}))\ .$$

De plus, si $g : N \to P$ est une application C^{r+1}, alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\ .$$

Preuve. La commutation avec les restrictions est immédiate, et découle de la dernière assertion, en remarquant que si $i : U \to N$ et $j : f^{-1}(U) \to M$ sont les inclusions, alors $f \circ j = i \circ (f_{|f^{-1}(U)})$.

La première partie découle du théorème A.16 de l'appendice A.5. La dernière assertion, découle, par le théorème de dérivation des fonctions composées, de la nature contravariante des algèbres extérieures :

$$((g \circ f)^*\omega)_x = (T_x(g \circ f))^*(\omega_{g\circ f(x)}) = (T_x f)^*\big((T_{f(x)}g)^*(\omega_{g(f(x))})\big) = (f^* \circ g^*(\omega))_x\ .$$

□

Voici quelques calculs pratiques d'images réciproques. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $f : U \to V$ une application C^1 avec $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Notons $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées dans U et $y_1, \ldots, y_m$ celles dans V.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, m\}$, comme $T_x f = (T_x f_1, \ldots, T_x f_m)$ et comme y_j est l'application j-ème coordonnée, on a

$$f^* dy_j = d(f_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\, dx_i\ .$$

Soit ω une forme différentielle sur V, d'écriture $\omega = \sum_{J\in\mathcal{I}_m} \omega_J dy_J$ dans la base $(dy_J)_{J\in\mathcal{I}_m}$ du module $\Omega^{(r)}(V)$ sur l'anneau $\mathrm{C}^r(V, \mathbb{R})$. Si $J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ avec $j_1 < \cdots < j_p$, notons

$$df_J = d(f_{j_1}) \wedge \cdots \wedge d(f_{j_p})\ .$$

Comme f^* est linéaire et commute au produit extérieur, on a, d'après la formule précédente,

$$f^*\omega = \sum_{J\in\mathcal{I}_m} (\omega_J \circ f) df_J\ .$$

(Du point de vue des calculs, on remplace donc y par $f(x)$ et dy_j par $d(f_j)$.) En particulier, si $\omega \in \Omega^{p,(r)}(V)$, alors

$$f^*\omega = \sum_{j_1<\cdots<j_p,\ 1\le i_1,\ldots,\ i_p\le n} \omega_{j_1,\ldots,j_p} \circ f\ \frac{\partial f_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f_{j_p}}{\partial x_{i_p}}\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}\ .$$

De plus, si $n = m$, si

$$J_f(x) = \det T_x f = \det \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right)_{1\le i,j\le n}$$

est le jacobien de f en x, et si $\omega : y \mapsto c(y)\, dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, alors

$$(f^*\omega)_x = c \circ f(x) J_f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ .$$

Cette formule est appelée la *formule de changement de variable* des formes différentielles de degré maximal.

Exemples : (1) Si $f : \mathbb{R} \to]\,0, +\infty[$ est l'application exponentielle $x \mapsto e^x$, alors

$$f^*\left(\frac{dy}{y}\right) = dx \ .$$

(2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos\ \theta, r \sin\ \theta)$, alors

$$f^*(dx \wedge dy) = r\ dr \wedge d\theta \ .$$

(3) Si $f :]0, +\infty[\ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ est l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos\ \theta, r \sin\ \theta)$, alors (voir l'exercice E.147)

$$f^*\left(\frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2}\right) = d\theta \ .$$

Lorsque le changement de variable est clair, on note parfois encore ω la forme différentielle $f^*\omega$ (par exemple, on écrit $dx \wedge dy = r\ dr \wedge d\theta$ avec le changement de variable (2) ci-dessus).

Remarque. Si (U, φ) est une carte locale C^{r+1} de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et si $\omega \in \Omega^{(r)}(M)$, alors

$$(\varphi^{-1})^*(\omega_{|\varphi(U)}) \in \Omega^{(r)}(U) \ .$$

En particulier, on peut utiliser la base de $\Omega^{(r)}(U)$ pour exprimer la forme différentielle $(\varphi^{-1})^*(\omega_{|\varphi(U)})$, appelée *forme différentielle ω lue dans la carte (U, φ)*). C'est ce point de vue qu'il est souvent le plus utile d'utiliser dans les calculs. En particulier, on déduit le résultat suivant de l'écriture canonique d'une forme différentielle dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 6.4 *Avec les notations ci-dessus, on note $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les composantes de φ et, pour tout $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $d\varphi_I = d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_p}$. Alors pour tout ω dans $\Omega^{(r)}(M)$, il existe une unique famille $(\omega_I)_{I \in \mathcal{I}_n}$ d'applications de classe C^r sur U telle que, dans $\Omega^{(r)}(U)$, l'égalité*

$$\omega_{|U} = \sum_{I \in \mathcal{I}_n} \omega_I d\varphi_I$$

soit satisfaite. □

• **Différentielle extérieure.**

On suppose, pour simplifier, que $r = \infty$ dans ce paragraphe. On note $\Omega^p(M) = \Omega^{p,(\infty)}(M)$ et $\Omega(M) = \Omega^{(\infty)}(M)$.

L'application $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$, qui à une application $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ associe sa différentielle

$$df : x \mapsto \{df_x : X \mapsto T_x f(X)\} \ ,$$

est une application linéaire, telle que

$$d(fg) = g\,df + f\,dg\ .$$

Le résultat suivant dit que cette application s'étend, de manière unique, à toutes les formes différentielles. Le passage (de l'infinitésimal au global) des propriétés de linéarité et de fonctorialité des algèbres extérieures d'espaces vectoriels de dimension finie, à celles des formes différentielles, peut être traitée (et a été traitée dans les paragraphes précédents) de manière directe. En ce qui concerne la définition de la différentielle extérieure qui suit, pour éviter de trop longues discussions sur la structure de l'espace tangent du fibré des formes alternées sur une variété, nous ferons une étape de plus, en passant de l'infinitésimal au local, puis du local au global. La situation locale consistera à étudier le cas des formes différentielles sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, en suivant en cela de nombreux autres ouvrages sur le sujet (voir [CarH, Laf, Die2]).

Théorème 6.5 *Il existe une et une seule application linéaire $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ graduée de degré $+1$, i.e. $d(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M)$, telle que*

(1) pour tout f dans $\Omega^0(M)$, la forme différentielle df est égale à la différentielle de f définie ci-dessus ;

(2) d est une antidérivation de l'algèbre graduée $\Omega(M)$, i.e. pour tous $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$, on a

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)\ ;$$

(3) $d \circ d = 0$.

De plus, les applications d commutent avec les restrictions aux ouverts : pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega(M)$, pour tout ouvert U de M,

$$(d\omega)_{|U} = d(\omega_{|U})\ .$$

Enfin, les applications d commutent avec les images réciproques : pour toutes les variétés M et N de classe C^∞, pour toute application $f : M \to N$ de classe C^∞, et pour toute forme différentielle $\omega \in \Omega(N)$, on a

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega)\ .$$

Cette application d est appelée la *différentielle extérieure* (ou *différentielle* tout court) des formes différentielles. Par convention, on note $d : \Omega^{-1}(M) \to \Omega^0(M)$ l'application nulle.

Remarque. Nous verrons dans la démonstration qu'il suffit dans (3) de demander la condition $d \circ d = 0$ sur les applications.

Preuve. Pour prouver l'unicité, montrons que, pour tout ω dans $\Omega(M)$, les propriétés de la différentielle déterminent uniquement $d\omega$ sur un voisinage suffisament petit de tout point. Cela concluera, par les propriétés de localité ci-dessus des formes différentielles. Commençons par démontrer le lemme suivant, qui dit qu'un opérateur linéaire $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ qui vérifie les propriétés (1) et (2) est un opérateur « local ».

Lemme 6.6 *Si V est un ouvert de M, et si α, β sont des formes différentielles sur M telles que $\alpha_{|V} = \beta_{|V}$, alors $(d\alpha)_{|V} = (d\beta)_{|V}$.*

Preuve. Pour tout x dans V, soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, de support contenu dans V, valant 1 sur un voisinage de x. Alors $f(\alpha - \beta) = 0$ et, par linéarité $d(f(\alpha - \beta)) = 0$. Comme d coïncide avec la différentielle des fonctions sur $\Omega^0(M)$, on a $df_x = 0$ et $f(x) = 1$. De plus,

$$d(f(\alpha - \beta)) = df \wedge (\alpha - \beta) + f \wedge d(\alpha - \beta)$$

par (2). Donc par linéarité, $d\alpha_x = d\beta_x$. Comme x est arbitraire, ceci montre le résultat. □

Pour tout x dans M, soit (U, φ) une carte locale de M en x à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, avec $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les composantes de φ, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, de support contenu dans U, valant 1 sur un voisinage ouvert V de x. Pour $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ où $i_1 < \cdots < i_p$, posons $d(f\varphi)_I = d(f\varphi_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f\varphi_{i_p})$. Par la proposition 6.4, on écrit

$$\omega_{|U} = \sum_I \omega_I d\varphi_I \ .$$

Les formes différentielles ω et $\sum_I (f\omega_I) d(f\varphi)_I$ coïncident sur V, donc, par le lemme ci-dessus, leurs différentielles coïncident sur V. Par linéarité et par les propriétés de la différentielle, on a, en restriction à V,

$$d\omega = d\left(\sum_I (f\omega_I) d(f\varphi)_I\right) = \sum_I d(f\omega_I) \wedge d(f\varphi)_I \ .$$

Le terme de droite ne faisant plus intervenir que des différentielles de fonctions, par la propriété (1), le résultat d'unicité en découle.

Pour montrer l'existence, supposons tout d'abord que $M = U$ soit un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$. Pour tout ω dans $\Omega^p(U) = \mathrm{C}^\infty(U, \Lambda^p \check{E})$, pour tout x dans U, comme $T_x\omega \in \mathcal{L}(E, \Lambda^p \check{E})$, posons, pour tous $X_1, \ldots, X_{p+1}$ dans E,

$$d\omega_x(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} T_x\omega(X_i)(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{p+1}) \ .$$

Cette application $d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+1}(U)$ est linéaire, et coïncide bien avec la différentielle des applications pour $p = 0$. On l'étend par linéarité à $\Omega(U)$ en une application linéaire graduée de degré $+1$.

Lemme 6.7 *L'application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ ainsi définie vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Si $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$, et si $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$ et $\omega = f dx_I$, alors*

$$d\omega = df \wedge dx_I \ .$$

2. *Pour tous $\alpha \in \Omega^p(U)$ et $\beta \in \Omega^q(U)$, on a*

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta) \ .$$

3. *L'application $d \circ d : \Omega^p(U) \to \Omega^{p+2}(U)$ est nulle.*

4. *Si V est un ouvert contenu dans U, alors, pour tout ω dans $\Omega(U)$,*

$$(d\omega)_{|V} = d(\omega_{|V}) \ .$$

5. *Si V est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et si $\varphi : U \to V$ est une application C^∞, alors, pour tout ω dans $\Omega^p(V)$,*

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega) \ .$$

Preuve. (1) Comme dx_I est constante sur U, on a, pour tout x dans U et X dans E, $T_x\omega(X) = df_x(X)dx_I$. Donc, pour tous $X_0, \ldots, X_{p+1}$ dans E, par définition de d puis par définition du produit extérieur,

$$\begin{aligned} d\omega_x(X_1, \ldots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} df_x(X_i)\, dx_I(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{p+1}) \\ &= (df_x \wedge dx_I)(X_1, \ldots, X_{p+1}) \ . \end{aligned}$$

(2) Par linéarité, il suffit de montrer le résultat pour $\alpha = f\, dx_I$ (où I est de cardinal p) et $\beta = g\, dx_J$. Comme $\alpha \wedge \beta = fg\, dx_I \wedge dx_J$, on a, en utilisant (1),

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J = (g\, df) \wedge dx_I \wedge dx_J + (f\, dg) \wedge dx_I \wedge dx_J =$$

$$(df \wedge dx_I) \wedge (g\, dx_J) + (-1)^p (f\, dx_I) \wedge (dg \wedge dx_J) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta) \ .$$

(3) Par linéarité, il suffit de montrer que pour $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$ et $\omega = f\, dx_I$, on a $(d \circ d)(\omega) = 0$. Or

$$d(df) = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \left(d\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \ .$$

En utilisant le lemme de Schwarz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et l'antisymétrie du produit extérieur $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$, on obtient que $d(df) = 0$. Notons que (par exemple par l'assertion (1))

$$d(dx_I) = 0 \ .$$

Donc

$$d(d\omega) = d(df \wedge dx_I) = (d(df)) \wedge dx_I - df \wedge d(dx_I) = 0 \ .$$

(4) C'est immédiat (et cela découle de (5) en considérant l'inclusion φ de U dans V).

(5) Tout d'abord, dans le cas particulier où $p = 0$, le résultat découle de l'exercice E.136 (voir la solution dans le paragraphe 6.8).

En général, et par linéarité, il suffit de montrer le résultat pour $\omega = f\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$ où $f \in \mathrm{C}^\infty(U)$. Par les propriétés de l'image réciproque (voir la proposition 6.3) et le cas $p = 0$, on a

$$\varphi^*\omega = \varphi^* f\, d(\varphi^* x_{i_1}) \wedge ... \wedge d(\varphi^* x_{i_p}) \ .$$

Donc

$$d(\varphi^*\omega) = d(\varphi^* f) \wedge d(\varphi^* x_{i_1}) \wedge ... \wedge d(\varphi^* x_{i_p}) = \varphi^*(df \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_p}) = \varphi^*(d\omega) \ . \ \square$$

Pour montrer l'existence en général, pour tout ω dans $\Omega(M)$, pour toute carte locale (U, φ) de classe C^∞ de M et tout x dans U, comme la différentielle a été définie sur $(\varphi^{-1})^*\omega \in \Omega(\varphi(U))$, posons

$$(d\omega)_{|U} = \varphi^* d((\varphi^{-1})^*(\omega_{|U})) \ .$$

Par les propriétés de commutation des images réciproques et des différentielles sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, cette formule ne dépend pas de la carte choisie, et définit, par les propriétés de localité des formes différentielles, une forme différentielle sur M. Les propriétés du théorème 6.5 découlent facilement de celles du lemme 6.7. □

Remarque. Si M est une variété de classe C^{r+1} avec $r \in \mathbb{N} - \{0\}$, la preuve ci-dessus montre qu'il existe une application $d : \Omega^{(r)}(M) \to \Omega^{(r-1)}(M)$, vérifiant (1) et (2) et commutant avec les images réciproques par des applications de classe C^{r+1}, et qui, si $r \geq 2$, vérifie (3) et est unique.

Voici quelques calculs pratiques de la différentielle extérieure de formes différentielles. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$, alors par les propriétés de la différentielle extérieure (ou le lemme 6.7 (1)),

$$d(dx_I) = 0$$

et, si $f : U \to \mathbb{R}$ est une application C^∞,

$$d(f dx_I) = df \wedge dx_I \ .$$

Donc, par linéarité, si ω une forme différentielle sur U, d'écriture $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ dans la base usuelle de $\Omega(U)$ sur l'anneau $\mathrm{C}^\infty(U)$, alors

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx_I \ .$$

En particulier, si $\omega \in \Omega^p(U)$, alors

$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} d\omega_{i_1,\ldots,i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p,\, j} \frac{\partial \omega_{i_1,\ldots,i_p}}{\partial x_j} \, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \ .$$

On peut alors utiliser l'antisymétrie du produit extérieur pour donner l'écriture de $d\omega$ dans la base usuelle du module (libre) $\Omega(U)$ sur l'anneau $\mathrm{C}^\infty(U)$.

Exemples. (1) Si $M = \mathbb{R}^3$, et si

$$\omega = A \, dy \wedge dz + B \, dz \wedge dx + C \, dx \wedge dy$$

est une 2-forme différentielle de classe C^∞, alors, en utilisant que

$$d\omega = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy \ ,$$

on obtient

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \ .$$

(2) Si $M = \mathbb{R}^3$, et si

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$$

est une 1-forme différentielle de classe C^∞, alors, en utilisant que

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \ ,$$

on obtient

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \ .$$

• **Produit intérieur et dérivée de Lie.**

Ce paragraphe exploite une idée de « dualité » entre champs de vecteurs et 1-formes différentielles. On suppose toujours, pour simplifier, que $r = \infty$.

Étant donné un champ de vecteurs X de classe C^∞ sur M, nous avons défini, dans le paragraphe 4.5, une dérivation $\mathcal{L}_X : \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ (aussi notée $f \mapsto X(f)$), qui vérifiait, outre sa définition $\mathcal{L}_X(f) : x \mapsto T_x f(X(x))$, les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{L}_X : \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est linéaire,
2. $\mathcal{L}_X(fg) = g\mathcal{L}_X(f) + f\mathcal{L}_X(g)$,
3. $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$,
4. si (ϕ_t) est le flot local de X, alors $\mathcal{L}_X(f) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f \circ \phi_t$.

Le résultat 6.9 ci-dessous dit en particulier que cette dérivation s'étend en une dérivation (de degré 0) de l'algèbre graduée $\Omega(M)$. Avant de l'énoncer, introduisons un nouvel outil.

Soient X un champ de vecteurs de classe C^∞ sur M et $\omega \in \Omega^p(M)$. On appelle *produit intérieur* de ω par X, et on note $i_X\omega$, la forme différentielle, appartenant à $\Omega^{p-1}(M)$, définie par $i_X\omega = 0$ si $p = 0$, et sinon, pour tout x dans M et tous $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ dans T_xM,

$$(i_X\omega)_x(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) = \omega_x(X(x), \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \ .$$

On étend additivement l'application i_X à $\Omega(M)$.

Proposition 6.8 *L'application $i_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ est une antidérivation de degré -1 de l'algèbre graduée $\Omega(M)$, i.e.*

1. *$i_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ est linéaire et $i_X(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p-1}(M)$ pour tout p dans $\mathbb{N}$.*
2. *pour tous α dans $\Omega^p(M)$ et β dans $\Omega^q(M)$, on a*

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \, \alpha \wedge (i_X\beta) \ .$$

De plus, l'opérateur i_X vérifie la propriété de localité suivante : pour tout ouvert U de M, on a

$$(i_X\omega)_{|U} = i_{(X_{|U})}(\omega_{|U}) \ .$$

Preuve. La propriété de localité est immédiate par définition. Le reste de la preuve découle facilement de la proposition A.20. □

Remarque. Il découle de la définition que i_X est $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-linéaire, i.e. pour tout f dans $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et tout ω dans $\Omega(M)$, on a

$$i_X(f\omega) = f \ i_X\omega \ .$$

Proposition 6.9 *Pour tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur M, il existe une et une seule application linéaire $\mathcal{L}_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$, graduée de degré 0, i.e. $\mathcal{L}_X(\Omega^p(M)) \subset \Omega^p(M)$, telle que*

1. *$\mathcal{L}_X$ coïncide sur $\Omega^0(M) = \mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ avec la dérivation $\mathcal{L}_X$ ci-dessus ;*
2. *$\mathcal{L}_X$ est une dérivation de l'algèbre $\Omega(M)$, i.e. pour tous les α, β dans $\Omega(M)$, on a*
$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta) \ ;$$
3. *$\mathcal{L}_X$ et d commutent, i.e.*
$$\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X \ .$$

De plus, l'opérateur $\mathcal{L}_X$ vérifie les propriétés suivantes.

(i) Il est local, c'est-à-dire pour tout ouvert U de M, on a
$$(\mathcal{L}_X\omega)_{|U} = \mathcal{L}_{X_{|U}}(\omega_{|U}) \ .$$

(ii) Pour tous les champs de vecteurs X et Y de classe C^∞ sur M, on a
$$\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X \ .$$

(iii) Pour tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur M, on a
$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \ .$$

(iv) Pour toute variété N de classe C^∞, pour tout C^∞-difféomorphisme local $\varphi : M \to N$, pour tout champ de vecteurs X de classe C^∞ sur N, et pour toute forme différentielle ω de classe C^∞ sur N, on a
$$\varphi^*(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_{\varphi^*X}(\varphi^*\omega) \ .$$

La dérivation $\mathcal{L}_X$ est appelée la *dérivée de Lie* des formes différentielles par le champ de vecteurs X.

Remarque. Nous verrons dans la preuve qu'il suffit dans (3) de demander la condition $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$ sur les fonctions (i.e. les éléments de $\Omega^0(M)$).

Preuve. L'unicité de la dérivée de Lie se montre exactement comme l'unicité de la différentielle extérieure, en montrant comme précédemment que tout point de x admet un voisinage sur lequel $\mathcal{L}_X\omega$ s'exprime sous la forme
$$\mathcal{L}_X\omega = \sum_I \mathcal{L}_X(f\omega_I)(d\mathcal{L}_X(f\varphi))_I$$
en utilisant la commutation de d et $\mathcal{L}_X$ sur les fonctions.

Pour l'existence, posons
$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \ .$$
Comme $i_X f = 0$ si $f \in \Omega^0(M)$, l'application $\mathcal{L}_X$ coïncide bien avec la dérivation usuelle associée à X sur les fonctions. Il est immédiat, par les propriétés de d et de i_X, que $\mathcal{L}_X$

est une dérivation graduée de degré 0, i.e. est linéaire, graduée de degré 0, et vérifie (2). Comme $d \circ d = 0$, on a bien

$$d \circ \mathcal{L}_X = d \circ i_x \circ d = \mathcal{L}_X \circ d \ ,$$

ce qui montre l'existence.

Vérifions les propriétés supplémentaires, (iii) découlant de la construction. La propriété (i) découle des propriétés de localité de d et de i_X (ou de la propriété (iv) en considérant les applications d'inclusions). L'application $\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ est clairement linéaire, graduée de degré 0, et une dérivation de l'algèbre $\Omega(M)$. De plus, par définition du crochet de champs de vecteurs, elle coïncide avec $\mathcal{L}_{[X,Y]}$ sur les fonctions. Elle commute clairement avec d, donc la propriété (ii) en découle par unicité.

Enfin, pour vérifier la propriété (iv), par localité, on se ramène au cas où φ est un C^∞-difféomorphisme. L'application $\varphi^* \circ \mathcal{L}_X \circ (\varphi^{-1})^*$ de $\Omega(M)$ dans lui-même commute avec d, car la dérivée de Lie et l'image réciproque le font. C'est une dérivation graduée de degré 0 de $\Omega(M)$, car $\mathcal{L}_X$ l'est sur $\Omega(N)$ et φ^* est linéaire, graduée de degré 0, et vérifie $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge (\varphi^*\beta)$. Sur une application f de classe C^∞, pour tout x dans M, on a, par le théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\varphi^* \circ \mathcal{L}_X \circ (\varphi^{-1})^* f(x) = T_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1})(X(\varphi(x))) = T_x f\big((T_x\varphi)^{-1}(X(\varphi(x)))\big) = \mathcal{L}_{\varphi^* X} f(x) \ .$$

Donc la propriété (iv) en découle, par unicité. □

Exercice E.137 *Soient M et N deux variétés C^∞, soit $\varphi : M \to N$ un C^∞-difféomorphisme local, soit X un champ de vecteurs C^∞ sur N, et soit ω une forme différentielle C^∞ sur N.*

1. *Montrer que*
$$\varphi^*(i_X\omega) = i_{\varphi^* X}(\varphi^*\omega) \ .$$
2. *Donner une autre preuve de l'assertion (iv) ci-dessus.*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit X un champ de vecteurs C^∞ sur U, de flot local (ϕ_t), et soit ω une forme différentielle C^∞ sur U. Pour tout x_0 dans U, l'application $(t, x) \mapsto (\phi_t^*\omega)_x$ définie sur un voisinage de $(0, x_0)$ dans $\mathbb{R} \times U$, à valeurs dans l'espace vectoriel réel de dimension finie $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)^*$, est C^∞, car, en supposant par linéarité que $\omega \in \Omega^p(U)$, pour tous $\xi_1, \ldots, \xi_p$ dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$(\phi_t^*\omega)_x(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \omega_{\phi_t(x)}(T_x\phi_t(\xi_1), \ldots, T_x\phi_t(\xi_p)) \ .$$

Proposition 6.10 *Avec les notations ci-dessus, pour tout x dans U, on a,*

$$(\mathcal{L}_X\omega)_x = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t^*\omega)_x \ .$$

Preuve. L'application $\omega \mapsto \{x \mapsto \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t^*\omega)_x\}$ de $\Omega(U)$ dans lui-même est clairement linéaire graduée de degré 0. Comme $\varphi_t^*(\alpha \wedge \beta) = (\varphi_t^*\alpha) \wedge (\varphi_t^*\beta)$, cette application est une dérivation de l'algèbre $\Omega(U)$. Comme image réciproque et différentielle extérieure commutent, et comme la différentielle extérieure est linéaire, cette application commute avec la différentielle extérieure. Par unicité, le résultat en découle. □

Remarque. Nous aurions pu utiliser cette proposition pour définir $\mathcal{L}_X$ sur les ouverts de $\mathbb{R}^n$, puis, par un passage du local au global comme dans la preuve du théorème 6.5, définir $\mathcal{L}_X$ sur toutes les variétés. Nous laissons au lecteur le soin de rédiger une telle preuve.

• **Gradient, divergence, rotationnel.**
Soient n un élément de $\mathbb{N}$, et U un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$.

Si f est une application C^∞ (mais C^1 suffirait pour la définition), on note grad f ou ∇f, et on appelle *gradient* de f, le champ de vecteurs C^∞

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

L'application $\nabla : \mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R}) = \Omega^0(U) \to \mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU)$ est linéaire et

$$\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f) \ .$$

Si $X \in \Gamma(TU)$ est un champ de vecteurs C^∞ (mais C^1 suffirait pour la définition) sur U, on note div X, et on appelle *divergence* de X, l'application C^∞

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

si $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. L'application div : $\mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU) \to \mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU)$ est linéaire.

Si $n = 3$ et si $X \in \Gamma(TU)$ est un champ de vecteurs C^∞ (mais C^1 suffirait pour la définition) sur U, on note rot X, et on appelle *rotationnel* de X, le champ de vecteurs C^∞

$$x \mapsto \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial z} \ .$$

si $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$. L'application rot : $\mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU) \to \mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) = \Gamma(TU)$ est linéaire.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur E.

Si $X \in \Gamma(TU)$ est un champ de vecteurs C^∞ sur U, alors l'application de U dans le dual $\check{E}$ de E, définie par

$$x \mapsto (v \mapsto \langle X(x), v \rangle) \ ,$$

est une 1-forme différentielle C^∞, notée $X^\perp$.

Si ω est une 1-forme différentielle C^∞, alors l'application de U dans E définie par $x \mapsto X(x)$, où $X(x)$ est l'unique élément de E tel que $\langle X(x), v \rangle = \omega_x(v)$ est un champ de vecteurs C^∞ sur U, notée $\omega^\perp$.

Il est immédiat de voir que l'application $X \mapsto X^\perp$ est un isomorphisme linéaire de $\Gamma(TU)$ dans $\Omega^1(U)$, d'inverse $\omega \mapsto \omega^\perp$.

Exercice E.138 *Montrer les formules suivantes.*

(1) $\nabla f = (df)^\perp$,

(2) $i_{\mathrm{rot}\ X}(dx \wedge dy \wedge dz) = d(X^\perp)$,

(3) $\mathcal{L}_X(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (\text{div } X)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$,

(4) $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$,

(5) $\text{div}(\text{rot } X) = 0$,

(6) $\text{div}(fX) = f \text{ div } X + \langle \text{grad } f, X \rangle$.

Comme $(\mathcal{L}_X \omega)_x = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\phi_t^* \omega)_x$, on déduit de (3) que le flot local du champ de vecteurs X préserve la forme volume $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ si et seulement si div $X = 0$ (voir aussi le paragraphe 6.3).

Il découle de la question (3) de cet exercice, et de la proposition 6.10, que le flot local d'un champ de vecteurs X sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ préserve la mesure de Lebesgue sur U si et seulement si sa divergence est nulle, i.e. div $X = 0$.

6.2 Cohomologie de de Rham

Nous renvoyons à l'excellent [God] pour le contenu, avec de nombreux compléments, de cette partie, ainsi qu'à [deR] pour un livre source sur la cohomologie de de Rham, et à [BT].

Toutes les formes différentielles de cette partie seront C^∞. Sauf mention explicite du contraire, le symbole $\simeq$ désignera un isomorphisme d'espaces vectoriels réels dans toute cette partie.

Pour résumer les paragraphes qui précédent, nous avons montré, pour toute variété M de classe C^∞, que

$$(\Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(M), d)$$

est une algèbre différentielle graduée, i.e. $\Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^p(M)$ est un espace vectoriel gradué, qui, muni de l'application bilinéaire $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$, est une algèbre (unitaire, associative) graduée (i.e. $\Omega^p(M) \wedge \Omega^q(M) \subset \Omega^{p+q}(M)$) anticommutative (i.e. si $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^q(M)$, alors $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$), et $d : \Omega(M) \to \Omega(M)$ est une application linéaire, graduée de degré $+1$ (i.e. $d(\Omega^p(M)) \subset \Omega^{p+1}(M)$), qui est une antidérivation (i.e. si $\alpha \in \Omega^p(M)$, alors $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$), vérifiant l'équation cruciale

$$d \circ d = 0 \, .$$

• **Algèbre de cohomologie de de Rham.**
Soient n un élément de $\mathbb{N}$ et M une variété C^∞ de dimension n.

Une forme différentielle α sur M est dite *fermée* si $d\alpha = 0$, et *exacte* s'il existe une forme différentielle β sur M telle que $d\beta = \alpha$. Une forme différentielle exacte est fermée, car $d \circ d = 0$.

Notons $Z^*(M) = \text{Ker } d$ et $Z^p(M) = Z^*(M) \cap \Omega^p(M)$. Alors $Z^*(M)$ est une sous-algèbre (unitaire) de $\Omega(M)$, somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des $Z^p(M)$ pour p dans $\mathbb{N}$. En effet, la forme différentielle constante 1 est fermée, une forme différentielle est fermée si et seulement si ses composantes dans les $\Omega^p(M)$ sont fermées, et si α et β sont fermées, alors $\alpha \wedge \beta$ aussi, car $d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (d\beta)$ si $\alpha \in \Omega^p(M)$.

Notons $B^*(M) = \text{Im } d$ et $B^p(M) = B^*(M) \cap \Omega^p(M)$. Alors $B^*(M)$ est un idéal bilatère de $Z^*(M)$, somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des $B^p(M)$ pour p dans

$\mathbb{N}$. En effet, si α est exacte et si β est fermée, alors $\alpha \wedge \beta$ est exacte (et de même pour $\beta \wedge \alpha$ par anticommutativité), car si $\alpha = d\,\alpha' \in \Omega^{p+1}(M)$, alors $d(\alpha' \wedge \beta) = (d\,\alpha') \wedge \beta + (-1)^p \alpha' \wedge (d\beta) = \alpha \wedge \beta$.

Donc

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M) = Z^*(M)/B^*(M)$$

est une algèbre (associative, unitaire) anticommutative, graduée par

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} H^p_{\mathrm{DR}}(M) \ ,$$

où

$$H^p_{\mathrm{DR}}(M) = Z^p(M)/B^p(M) \ .$$

L'algèbre $H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ s'appelle *l'algèbre* (ou parfois l'espace) *de cohomologie de de Rham* de M, et l'espace vectoriel réel $H^p_{\mathrm{DR}}(M)$ le p-ème espace (ou parfois le p-ème groupe) de *cohomologie de de Rham* de M. Comme la cohomologie de de Rham sera la seule cohomologie que nous rencontrerons dans ces notes, nous noterons parfois $H^*(M)$ l'algèbre et $H^p(M)$ les espaces vectoriels ci-dessus.

Pour tout α dans $Z^*(M)$, nous noterons $[\alpha]$ sa classe dans $H^*(M)$. Nous dirons que deux formes différentielles fermées α et β sont *cohomologues* si $[\alpha] = [\beta]$. Nous notons les lois de compositions de l'algèbre $H^*(M)$ de la même manière que les lois de compositions de $\Omega(M)$:

$$a[\alpha] + b[\beta] = [a\alpha + b\beta], \quad [1] = 1 \quad \text{et} \quad [\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta] \ .$$

Comme $\Omega^p(M) = \{0\}$ si $p > n$ ou $p < 0$, on a $H^p_{\mathrm{DR}}(M) = 0$ si $p > n$ ou $p < 0$. Comme $d : \Omega^{-1}(M) \to \Omega^0(M)$ est l'application nulle, on a $H^0(M) = Z^0(M)$.

Exercice E.139 *Si M est la variété somme disjointe $M = \coprod_{i \in I} M_i$, alors on a des isomorphismes naturels d'algèbres*

$$H^*_{\mathrm{DR}}(M) \simeq \prod_{i \in I} H^*_{\mathrm{DR}}(M_i) \ ,$$

et $H^p_{\mathrm{DR}}(M) \simeq \prod_{i \in I} H^p_{\mathrm{DR}}(M_i)$.

Voici le premier calcul de la cohomologie de de Rham d'une variété, celle de l'espace réduite à un point. Il nous faudra attendre le paragraphe sur la suite exacte de Mayer-Vietoris avant d'obtenir d'autres calculs de la cohomologie de de Rham.

Proposition 6.11 *(1) Si $\pi_0 M$ est l'ensemble des composantes connexes de M, alors*

$$H^0_{\mathrm{DR}}(M) \simeq \mathbb{R}^{\pi_0 M}$$

et en particulier $H^0_{\mathrm{DR}}(M) = \mathbb{R}$ si M est connexe.

(2) Si M est un singleton, alors $H^*_{\mathrm{DR}}(M) = H^0_{\mathrm{DR}}(M) = \mathbb{R}$.

Preuve. Par l'exercice précédent, il suffit de montrer la première assertion lorsque M est connexe. Si $f \in Z^0(M)$, alors $df = 0$, donc f est constante sur M, ce qui montre le résultat. L'identification d'une fonction constante sur M avec sa valeur donne un isomorphisme canonique entre $H^0_{\mathrm{DR}}(M)$ et $\mathbb{R}$, et nous identifierons ces espaces vectoriels par cette application.

Si M est un singleton, alors $\Omega^p(M) = \{0\}$ si $p > 0$. La seconde assertion en découle. $\square$

Soient N une variété C^∞ et $f : M \to N$ une application C^∞. Comme $f^* \circ d = d \circ f^*$, on a

$$f^*(Z^*(N)) \subset Z^*(M) \quad \text{et} \quad f^*(B^*(N)) \subset B^*(M) \ .$$

Donc le morphisme d'algèbres graduées unitaires $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ induit un morphisme d'algèbres graduées unitaires, encore noté f^*, entre les algèbres de cohomologie de de Rham de N et de M :

$$\begin{array}{rccc} f^* \ : & H^*_{\mathrm{DR}}(N) & \longrightarrow & H^*_{\mathrm{DR}}(M) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f^*\alpha] \end{array} \ .$$

On a donc

$$f^*(ax + by) = af^*(x) + bf^*(y), \ \ f^*(1) = 1, \ \ f^*(x \wedge y) = f^*(x) \wedge f^*(y),$$

$$f^*(H^p_{\mathrm{DR}}(N)) \subset H^p_{\mathrm{DR}}(M) \ .$$

Comme pour les images réciproques des formes différentielles, on a $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, et si P est une variété C^∞ et $g : N \to P$ est une application C^∞, alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \ .$$

Donc l'association H^*_{DR}, à une variété M de l'algèbre $H^*_{\mathrm{DR}}(M)$, et à une application $f : M \to N$ du morphisme $f^* : H^*_{\mathrm{DR}}(N) \to H^*_{\mathrm{DR}}(M)$, est un foncteur contravariant de la catégorie des variétés C^∞ dans la catégorie des algèbres graduées (associatives unitaires) anticommutatives. En particulier, si $f : M \to N$ est un C^∞-difféomorphisme, alors $f^* : H^*_{\mathrm{DR}}(N) \to H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ est un isomorphisme d'algèbres graduées unitaires, et

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^* \ .$$

Porisme 6.12 *Si deux variétés C^∞ sont C^∞-difféomorphes, alors leurs algèbres de cohomologie de de Rham sont isomorphes.* $\square$

Proposition 6.13 *(1) Si M et N sont connexes, alors $f^* : H^0_{\mathrm{DR}}(N) = \mathbb{R} \to H^0_{\mathrm{DR}}(M) = \mathbb{R}$ (avec les identifications précédentes) est l'identité.*

(2) Si f est une application constante, alors $f^* : H^p_{\mathrm{DR}}(N) \to H^p_{\mathrm{DR}}(M)$ est l'application nulle pour $p \neq 0$.

Preuve. (1) Si M est connexe, alors $H^0(M)$ est l'espace vectoriel des applications constantes sur M et f^* envoie l'application constante valant a sur N sur l'application constante valant encore a sur M.

(2) Si $f : M \to N$ est l'application constante valant un élément donné a de N, alors f factorise par l'application constante $g : M \to \{a\}$ et l'injection $i : \{a\} \to N$. Donc par la proposition 6.11 (2), si $p > 0$, alors l'application linéaire $f^* = (i \circ g)^* = g^* \circ i^* : H^p(N) \to H^p(M)$ factorise par l'application nulle $i^* : H^p(N) \to H^p(\{a\})$, donc est nulle. $\square$

Exercice E.140 *Soient G un groupe fini discret, agissant librement par C^∞-difféomorphismes sur M, et $\pi : M \to N = G\backslash M$ le revêtement C^∞ associé. Montrer que l'application $\pi^* : H^*_{\mathrm{DR}}(N) \to H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ est injective.*

• **Invariance par homotopie.**

Soient M et N deux variétés C^∞, et soient f et g deux applications C^∞ de M dans N.

Nous renvoyons à l'appendice A.4 pour des rappels sur les homotopies (continues) d'applications continues entre espaces topologiques. Nous commençons ce paragraphe par étendre la notion d'application homotope au cadre différentiable.

Une *homotopie* C^∞ de f à g est une application $h : M \times \mathbb{R} \to M$ de classe C^∞ telle que $h(x,t) = f(x)$ pour $t \leq 0$ et $h(x,t) = g(x)$ pour $t \geq 1$.

Par exemple, $(x,t) \mapsto f(x)$ est une homotopie C^∞ de f à f ; si h est une homotopie C^∞ de f à g, alors $(x,t) \mapsto h(x,1-t)$ est une homotopie C^∞ de g à f ; si h est une homotopie C^∞ de f_1 à f_2, et si h' est une homotopie C^∞ de f_2 à f_3, alors

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} h(x,3t) & \text{si } t < \frac{2}{3} \\ h'(x,3t-2) & \text{si } t > \frac{1}{3} \end{cases}$$

est une homotopie C^∞ de f_1 à f_3.

Les applications f et g sont dites *différentiablement homotopes* s'il existe une homotopie C^∞ de f à g. La relation « être différentiablement homotopes » est donc une relation d'équivalence.

Théorème 6.14 *Si f et g sont deux applications C^∞ différentiablement homotopes, alors $f^* = g^*$.*

Preuve. La preuve de ce théorème repose sur la proposition suivante, où, pour tout t dans $\mathbb{R}$, on note $J_t : M \to M \times \mathbb{R}$ l'application C^∞ définie par $x \mapsto (x,t)$.

Proposition 6.15 *Pour toute variété M de classe C^∞, il existe une application K : $\Omega(M \times \mathbb{R}) \to \Omega(M)$ linéaire, graduée de degré -1, i.e. $K(\Omega^p(M \times \mathbb{R})) \subset \Omega^{p-1}(M)$, telle que*

$$d \circ K + K \circ d = J_1^* - J_0^* \ ,$$

et telle que, pour toute variété N de classe C^∞ et toute application φ de classe C^∞ de M dans N, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Omega(N \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{K} & \Omega(N) \\ {\scriptstyle (\varphi \times \mathrm{id})^*} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \varphi^*} \\ \Omega(M \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{K} & \Omega(M) \end{array} \ .$$

Preuve. Supposons tout d'abord que $M = U$ soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées dans U et t la coordonnée dans $\mathbb{R}$, de sorte que $x_1, \ldots, x_n, t$ soient les coordonnées dans $U \times \mathbb{R}$. Posons, pour $p \geq 0$ dans le premier cas et $p \geq 1$ dans le second,

$$\begin{array}{ll} K\alpha = 0 & \text{si } \ \alpha = a\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\ K\beta = \left(\int_0^1 b\, dt\right)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} & \text{si } \ \beta = b\, dt \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}} \end{array} \ .$$

Alors K définit une application linéaire de $\Omega^p(M \times \mathbb{R})$ dans $\Omega^{p-1}(M)$, que l'on étend par linéarité en une application linéaire, graduée de degré -1, de $\Omega(M \times \mathbb{R})$ dans $\Omega(M)$. La commutativité du dernier diagramme si N est aussi un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est immédiate.

La vérification de la propriété (dite d'homotopie) de K découle des calculs suivants :

$$\begin{aligned}
&dK\alpha = 0\\
&Kd\alpha = \left(\int_0^1 \tfrac{\partial a}{\partial t}\, dt\right)\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} = (J_1^* - J_0^*)\alpha\\
&dK\beta = \textstyle\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \tfrac{\partial b}{\partial x_i}\, dt\right) dx_i \wedge\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}\\
&Kd\beta = -\textstyle\sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \tfrac{\partial b}{\partial x_i}\, dt\right) dx_i \wedge\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{p-1}}\\
&J_1^*\beta = J_0^*\beta = 0\ .
\end{aligned}$$

Maintenant, pour montrer la proposition en général, on utilise des cartes locales et un argument de partition de l'unité.

Plus précisément, choisissons $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de cartes C^∞ et $(\psi_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de M. Alors $(U_i \times \mathbb{R}, \overline{\varphi}_i = \varphi_i \times \mathrm{id})_{i\in I}$ est un atlas de cartes C^∞ sur $M \times \mathbb{R}$, et $(\overline{\psi}_i = \psi_i \circ \mathrm{pr}_1)_{i\in I}$, où $\mathrm{pr}_1 : M \times \mathbb{R} \to M$ est la première projection, est une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $(U_i \times \mathbb{R})_{i\in I}$ de $M \times \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \Omega(M \times \mathbb{R})$, posons, avec les abus de notations évidents concernant les restrictions,

$$\widehat{K}(\alpha) = \sum_{i\in I} {\varphi_i}^* \left(K \left((\overline{\varphi}_i^{-1})^* (\overline{\psi}_i \alpha) \right) \right)\ .$$

Cette formule ne dépend pas du choix de $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$, $(\psi_i)_{i\in I}$. En effet, soit $(U'_i, \varphi'_i)_{i\in I}$, $(\psi'_i)_{i\in I}$ un autre choix. Par la commutativité du diagramme de l'énoncé dans le cas des ouverts numériques, si le support d'une forme différentielle β est contenu dans $(U_i \cap U'_j) \times \mathbb{R}$, alors ${\varphi_i}^* K(\overline{\varphi}_i^{-1})^*(\beta) = {\varphi'_j}^* K(\overline{\varphi}'_j{}^{-1})^*(\beta)$. Donc

$$\widehat{K}(\alpha) = \sum_{i\in I} {\varphi_i}^* K(\overline{\varphi}_i^{-1})^*(\overline{\psi}_i \sum_{j\in J} \overline{\psi}'_j \alpha) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} {\varphi_i}^* K(\overline{\varphi}_i{}^{-1})^*(\overline{\psi}_i \overline{\psi}'_j \alpha) =$$

$$\sum_{j\in J}\sum_{i\in I} {\varphi'_j}^* K(\overline{\varphi}'_j{}^{-1})^*(\overline{\psi}'_j \overline{\psi}_i \alpha) = \sum_{j\in J} {\varphi'_j}^* K(\overline{\varphi}'_j{}^{-1})^*(\overline{\psi}'_j \alpha)\ .$$

Alors $\widehat{K}$ est clairement une application linéaire, graduée de degré -1, de $\Omega(M \times \mathbb{R})$ dans $\Omega(M)$, rendant le dernier diagramme de l'énoncé commutatif. De plus, si le support de β est contenu dans $U_i \times \mathbb{R}$, alors celui de $d\beta$ aussi, et $\widehat{K}(\alpha) = {\varphi_i}^* K(\overline{\varphi}_i^{-1})^*(\beta)$, car comme $\overline{\psi}_k \beta$ est alors à support dans $(U_i \cap U_k) \times \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{K}(\alpha) = \sum_{k\in I} {\varphi_k}^* K(\overline{\varphi}_k^{-1})^*(\overline{\psi}_k \beta) = \sum_{k\in I} {\varphi_i}^* K(\overline{\varphi}_i^{-1})^*(\overline{\psi}_k \beta) = {\varphi_i}^* K(\overline{\varphi}_i^{-1})^*(\beta)\ .$$

Donc, en utilisant les propriétés des images réciproques, et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
U_i & \xrightarrow{J_\nu} & U_i \times \mathbb{R}\\
{\scriptstyle \varphi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\varphi}_i}\\
\varphi_i(U_i) & \xrightarrow{J_\nu} & \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}
\end{array}$$

pour $\nu = 0, 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
(d\widehat{K} + \widehat{K}d)\alpha &= (d\widehat{K} + \widehat{K}d)(\textstyle\sum_{i\in I} \overline{\psi}_i\alpha) \\
&= \textstyle\sum_{i\in I} d\widehat{K}(\overline{\psi}_i\alpha) + \widehat{K}d(\overline{\psi}_i\alpha) \\
&= \textstyle\sum_{i\in I} \varphi_i{}^* dK\left((\overline{\varphi}_i^{-1})^*(\overline{\psi}_i\alpha)\right) + \varphi_i{}^* Kd\left((\overline{\varphi}_i^{-1})^*(\overline{\psi}_i\alpha)\right) \\
&= \textstyle\sum_{i\in I} \varphi_i{}^*(J_1^* - J_0^*)\left(\overline{\varphi}_i^{-1})^*(\overline{\psi}_i\alpha)\right) \\
&= \textstyle\sum_{i\in I}(J_1^* - J_0^*)(\overline{\psi}_i\alpha) \\
&= J_1^*\alpha - J_0^*\alpha \ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. □

Terminons maintenant la preuve du théorème 6.14. Si $h : M \times \mathbb{R} \to M$ est une homotopie C^∞ de f à g, alors $h \circ J_0 = f$ et $h \circ J_1 = g$. Donc, par les propriétés des images réciproques, et par la propriété d'homotopie de K, on a, pour toute forme différentielle fermée α,

$$\begin{aligned}
g^*\alpha - f^*\alpha &= J_1^* h^*\alpha - J_0^* h^*\alpha \\
&= dK(h^*\alpha) + Kd(h^*\alpha) \\
&= d(Kh^*\alpha) \ ,
\end{aligned}$$

donc $g^*\alpha$ et $f^*\alpha$ sont cohomologues, et $f^* = g^*$. □

Maintenant, nous allons utiliser un théorème d'approximation de fonctions continues par des applications C^∞ pour montrer l'invariance topologique et homotopique de l'algèbre de cohomologie de de Rham.

Théorème 6.16 *(1) Toute application continue de M dans N est homotope à une application C^∞ de M dans N.*

(2) Deux applications C^∞ de M dans N, qui sont homotopes, sont différentiablement homotopes.

Preuve. Voir par exemple [God]. □

Soit $f : M \to N$ une application continue. Choisissons une application $\overline{f} : M \to N$ de classe C^∞, homotope à f (voir le théorème 6.16 (1)). Remarquons que, par le théorème 6.16 (2), si $\overline{f}' : M \to N$ est une autre application C^∞ homotope à f, alors $\overline{f}$ et $\overline{f}'$ sont différentiablement homotopes, donc, par le théorème 6.14, induisent la même application en cohomologie de de Rham. Donc l'application $\overline{f}^* : H^*(N) \to H^*(M)$ ne dépend pas des choix, et sera notée

$$f^* : H^*_{\mathrm{DR}}(N) \to H^*_{\mathrm{DR}}(M) \ ,$$

ce qui est compatible avec la notation précédente lorsque f est C^∞.

Notons que si $f : M \to N$ est homotope à une application $\overline{f} : M \to N$ de classe C^∞, si $g : N \to P$ est une application continue homotope à une application $\overline{g} : N \to P$ de classe C^∞, alors $g \circ f$ est homotope à l'application $\overline{g} \circ \overline{f} : M \to N$, qui est de classe C^∞ (car si $(x,t) \mapsto h_t(x)$ est une homotopie de f à $\overline{f}$ et $(x,t) \mapsto h'_t(x)$ une homotopie de g à $\overline{g}$, alors $(x,t) \mapsto h'_t \circ h_t(x)$ est une homotopie de $g \circ f$ à $\overline{g} \circ \overline{f}$). Donc les applications de $H^*(P)$ dans $H^*(M)$ suivantes coïncident :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \ .$$

Rappelons (voir l'appendice A.4) que deux espaces topologiques X et Y *ont même type d'homotopie* s'il existe une *équivalence d'homotopie* de X dans Y, i.e. une application continue $f : X \to Y$ ayant la propriété qu'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité.

Proposition 6.17 *Si $f : M \to N$ est une équivalence d'homotopie, alors $f^* : H^*_{\mathrm{DR}}(N) \to H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Preuve. Soit $g : M \to N$ une application continue telle que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes à l'identité. Alors $f^* \circ g^* = \mathrm{id}$ et $g^* \circ f^* = \mathrm{id}$. Le résultat s'en déduit. □

Cette proposition montre l'invariance homotopique (et donc topologique) de l'algèbre de cohomologie de de Rham : si deux variétés C^∞ ont le même type d'homotopie, alors leurs algèbres de cohomologie de de Rham sont isomorphes.

Porisme 6.18 *(1) Si $f : M \to N$ est un homéomorphisme, alors $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ est un isomorphisme d'algèbres.*

(2) Si une variété M de classe C^∞ se rétracte par déformation forte sur une sous-variété N de classe C^∞, alors l'inclusion $i : N \to M$ induit un isomorphisme d'algèbres

$$i^* : H^*(N) \to H^*(M) \ .$$

(3) L'algèbre de cohomologie de de Rham d'une variété M de classe C^∞, qui est contractile, est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{R}$:

$$H^*(M) = H^0(M) = \mathbb{R} \ .$$

Preuve. Un homéomorphisme est une équivalence d'homotopie. Comme rappelé dans l'appendice A.4, un espace topologique X, qui se rétracte par déformation forte sur un sous-espace Y, a le même type d'homotopie que Y, et un espace contractile a le même type d'homotopie que l'espace réduit à un point. Le corollaire découle alors des propositions 6.17 et 6.11 (2). □

Exemples. (1) Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dit *étoilé* s'il existe un point x dans U tel que pour tout y dans U, le segment $[x, y]$ entre x et y soit contenu dans U. Il est immédiat qu'un ouvert étoilé est contractile, et qu'un ouvert convexe non vide est étoilé. Le *lemme de Poincaré* dit que l'algèbre de cohomologie de de Rham d'un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{R}$. C'est bien un cas particulier du corollaire précédent, qui a joué un rôle historique important. Nous laissons au lecteur l'exercice de montrer ce résultat sans utiliser le théorème d'approximation 6.16.

(2) Une couronne (ou *anneau*) $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ a < |z| < b\}$, où $a < b$, est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ qui se rétracte (radialement) par déformation forte sur le cercle $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = (a+b)/2\}$, donc qui a le même type d'homotopie que le cercle (dont nous calculerons ci-dessous l'algèbre de cohomologie de de Rham).

(3) L'ouvert $\mathbb{R}^n - \{0\}$ de $\mathbb{R}^n$ se rétracte par déformation forte sur la sphère $\mathbb{S}_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| = 1\}$ (radialement, i.e. par l'homotopie $h(x,t) = t\frac{x}{||x||} + (1-t)x$). Donc $\mathbb{R}^n - \{0\}$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$ (dont nous calculerons ci-dessous l'algèbre de cohomologie de de Rham).

(4) Si M et N sont des variétés C^∞, avec N contractile (par exemple $N = \mathbb{R}$), alors $M \times N$ se rétracte par déformation forte sur $M \times \{x\}$ pour tout x dans N, donc $M \times N$

et M ont le même type d'homotopie, donc leurs algèbres de cohomologie de de Rham sont isomorphes.

(5) Si $p : E \to M$ est un fibré vectoriel C^∞ (par exemple le fibré tangent d'une variété C^∞), alors p est une équivalence d'homotopie, car si $\sigma : M \to E$ est la section nulle de p (qui est un C^∞-difféomorphisme sur son image), alors E se rétracte par déformation forte sur $\sigma(M)$ radialement dans chaque fibre, i.e. par l'homotopie $h : E \times [0,1] \to E$ définie par $(x,t) \mapsto t\,\sigma \circ p(x) + (1-t)x$ (en remarquant que $\sigma \circ p(x)$ est le vecteur nul de la fibre de p passant par x). On peut prendre une homotopie C^∞ en considérant $h : E \times \mathbb{R} \to E$ définie par $(x,t) \mapsto \varphi(t)\sigma \circ p(x) + (1-\varphi(t))x$ où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application C^∞ valant 0 sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[1, +\infty[$.

Notons une conséquence négative de l'invariance homotopique de la cohomologie de de Rham : l'algèbre de cohomologie de de Rham ne permet pas de distinguer deux structures C^∞ différentes sur une même variété topologique. Des invariants plus fins sont nécessaires (comme les invariants de Donaldson en dimension 4, voir par exemple [FM, Mor], mais le problème reste encore ouvert en cette dimension).

• **Suite exacte de Mayer-Vietoris.**

Dans une variété M de classe C^∞, soient U et V deux ouverts de M recouvrant M, et

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{\underline{i}} & U \\ \underline{j}\downarrow & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow{j} & M \end{array}$$

le diagramme commutatif des inclusions. On note $(i^*, j^*) : \Omega(M) \to \Omega(U) \times \Omega(V)$ l'application

$$\omega \mapsto (i^*\omega = \omega_{|U}, j^*\omega = \omega_{|V}) \ ,$$

ainsi que l'application $H^*(M) \to H^*(U) \times H^*(V)$ induite en cohomologie. On note $\underline{i}^* - \underline{j}^* : \Omega(U) \times \Omega(V) \to \Omega(U \cap V)$ l'application $(\omega, \omega') \mapsto \underline{i}^*\omega - \underline{j}^*\omega' = \omega_{|U\cap V} - \omega'_{|U\cap V}$, ainsi que l'application $H^*(U) \times H^*(V) \to H^*(U \cap V)$ induite en cohomologie. (On prendra garde à ne pas oublier le signe $-$ dans les calculs.) Si M' est une autre variété C^∞ munie d'un recouvrement ouvert $\{U', V'\}$, on notera $\underline{i}', \underline{j}', i', j'$ les inclusions correspondant à $\underline{i}, \underline{j}, i, j$ ci-dessus.

Théorème 6.19 *Pour toute variété M de classe C^∞, munie d'un recouvrement ouvert $\{U, V\}$, il existe une suite exacte longue d'espaces vectoriels réels, dite* suite exacte de Mayer-Vietoris *de M,*

$$... \to H^{k-1}_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^k_{\mathrm{DR}}(M) \xrightarrow{(i^*, j^*)} H^k_{\mathrm{DR}}(U) \times H^k_{\mathrm{DR}}(V) \xrightarrow{\underline{i}^* - \underline{j}^*} H^k_{\mathrm{DR}}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}_{\mathrm{DR}}(M) \to ...$$

telle que, pour toute variété M' de classe C^∞, munie d'un recouvrement ouvert $\{U', V'\}$, pour toute application continue $f : M \to M'$ telle que $f(U) \subset U', f(V) \subset V'$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} ... H^{k-1}(U' \cap V') & \xrightarrow{\delta} & H^k(M') & \xrightarrow{(i'^*, j'^*)} & H^k(U') \times H^k(V') & \xrightarrow{\underline{i}'^* - \underline{j}'^*} & H^k(U' \cap V') ... \\ \downarrow (f_{|U\cap V})^* & & \downarrow f^* & & \downarrow (f_{|U})^* \times (f_{|V})^* & & \downarrow (f_{|U\cap V})^* \\ ... H^{k-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^k(M) & \xrightarrow{(i^*, j^*)} & H^k(U) \times H^k(V) & \xrightarrow{\underline{i}^* - \underline{j}^*} & H^k(U \cap V) ... \ . \end{array}$$

Preuve. La preuve repose sur la proposition suivante. Nous renvoyons à l'appendice A.6 pour la définition d'une suite exacte courte de complexes de cochaînes, et d'un morphisme de suites exactes courtes de complexes de cochaînes.

Proposition 6.20 *La suite*

$$0 \longrightarrow \Omega(M) \stackrel{(i^*,j^*)}{\longrightarrow} \Omega(U)\times\Omega(V) \stackrel{\underline{i}^*-\underline{j}^*}{\longrightarrow} \Omega(U\cap V) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de cochaînes, et si $f : M \to M'$ est une application C^∞*, alors le triplet*

$$(f^*, (f_{|U})^* \times (f_{|V})^*, (f_{|U\cap V})^*)$$

est un morphisme de suites exactes courtes de complexes de cochaînes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \Omega(M') & \stackrel{(i'^*,j'^*)}{\longrightarrow} & \Omega(U')\times\Omega(V') & \stackrel{\underline{i}'^*-\underline{j}'^*}{\longrightarrow} & \Omega(U'\cap V') & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow f^* & & \downarrow (f_{|U})^*\times(f_{|V})^* & & \downarrow (f_{|U\cap V})^*) & \\
0 \longrightarrow & \Omega(M) & \stackrel{(i^*,j^*)}{\longrightarrow} & \Omega(U)\times\Omega(V) & \stackrel{\underline{i}^*-\underline{j}^*}{\longrightarrow} & \Omega(U\cap V) & \longrightarrow 0 \ .
\end{array}$$

Preuve. L'application linéaire $(i^*,\, j^*)$ est injective, car une forme différentielle sur M est déterminée par ses restrictions aux ouverts U et V qui recouvrent M.

L'égalité entre $\mathrm{Im}((i^*,\, j^*))$ et $\mathrm{Ker}(\underline{i}^* - \underline{j}^*)$ découle de la propriété de localité des formes différentielles : les restrictions à $U\cap V$ des restrictions à U et à V d'une forme différentielle sur M coïncident, et si les restrictions à $U\cap V$ de deux formes différentielles α sur U et β sur V, toutes deux de classe C^∞, coïncident, alors il existe une forme différentielle C^∞ sur M dont les restrictions à U et à V sont α et β respectivement.

Pour la surjectivité de $\underline{i}^* - \underline{j}^*$, fixons une partition de l'unité $\{\varphi, \psi\}$ de classe C^∞ subordonnée au recouvrement $\{U, V\}$ (voir la proposition 2.9). Donc les applications $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ sont C^∞, positives ou nulles, de support contenu dans U, V respectivement et $\varphi + \psi$ est l'application constante 1. Soit $\omega \in \Omega(U\cap V)$. Notons α la forme différentielle sur U, nulle en dehors de $U\cap V$, et qui coïncide avec $\psi\omega$ sur $U\cap V$, qui est bien C^∞ sur U. De même, notons β la forme différentielle sur V, nulle en dehors de $U\cap V$, et qui coïncide avec $-\varphi\omega$ sur $U\cap V$, qui est bien C^∞ sur V. Alors, sur $U\cap V$,

$$\underline{i}^*\alpha - \underline{j}^*\beta = \varphi\omega + \psi\omega = \omega \ .$$

Donc $\underline{i}^* - \underline{j}^*$ est surjective.

Les commutations des diagrammes sont évidentes. □

Preuve. La proposition A.21 des rappels d'algèbre homologique de l'appendice A.6 associe, de manière fonctorielle, une suite exacte longue en cohomologie à toute suite exacte courte de complexes de cochaînes. On l'applique à la proposition précédente. Le résultat en découle. □

Remarque. (1) Dans certaines applications, on n'a pas besoin de connaître explicitement les morphismes dans les suites exactes de Mayer-Vietoris, leur existence suffisant. On omettra donc de les désigner nommément, pour simplifier les notations. Mais par défaut, les morphismes seront ceux indiqués ci-dessus.

(2) Si U et V sont des ouverts connexes d'une variété M de classe C^∞, tels que $U\cap V$ soit connexe, alors l'application $\underline{i}^* - \underline{j}^* : H_0(U)\times H_0(V) \to H_0(U\cap V)$ est surjective.

En effet, après identification des espaces avec $\mathbb{R}$ par les applications qui à une fonction constante associe sa valeur, cette application s'écrit $(x, y) \mapsto x - y$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Une présentation pratique des calculs est la suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & M & U & V & U \cap V \\
0 & H^0(M) \arrow[r] & H^0(U) \times & H^0(V) \arrow[r] & H^0(U \cap V) \arrow[dll, rounded corners] \\
1 & H^1(M) \arrow[r] & H^1(U) \times & H^1(V) \arrow[r] & H^1(U \cap V) \arrow[dll, rounded corners] \\
2 & H^2(M) \arrow[r] & H^2(U) \times & H^2(V) \arrow[r] & H^2(U \cap V) \arrow[dll, rounded corners] \\
3 & \arrow[r] & & &
\end{tikzcd}$$

Porisme 6.21 *Soit M une variété C^∞, munie d'un recouvrement ouvert $\{U, V\}$. Si les espaces vectoriels $H^*(U)$, $H^*(V)$ et $H^*(U \cap V)$ sont de dimension finie, alors $H^*(M)$ est de dimension finie.*

Preuve. Par exactitude de la suite de Mayer-Vietoris

$$H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{f_-} H^k(M) \xrightarrow{f_+} H^k(U) \times H^k(V) \ ,$$

on a

$$\dim H^k(M) = \dim \operatorname{Im} f_+ + \dim \operatorname{Ker} f_+ = \dim \operatorname{Im} f_+ + \dim \operatorname{Im} f_- \ .$$

Le résultat en découle. □

Soit M une variété C^∞ telle que $H^*(M)$ soit de dimension finie. Alors on appelle *caractéristique d'Euler* le nombre entier (dans $\mathbb{Z}$)

$$\chi(M) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim H^k(M) \ .$$

Notons que par invariance homotopique de la cohomologie de de Rham, la caractéristique d'Euler est aussi un invariant homotopique (donc topologique, donc différentiel), i.e. si M et N sont deux variétés C^∞ qui ont le même type d'homotopie, alors $\chi(M) = \chi(N)$.

Porisme 6.22 *Soit M une variété C^∞, munie d'un recouvrement ouvert $\{U, V\}$. Si les espaces vectoriels $H^*(U), H^*(V)$ et $H^*(U \cap V)$ sont de dimension finie, alors*

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V) \ .$$

Preuve. Cette formule découle du lemme d'algèbre linéaire suivant, appliqué à la suite exacte de Mayer-Vietoris (qui n'a qu'un nombre fini de termes non nuls).

Lemme 6.23 *Si $0 \longrightarrow E^0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow E^n \longrightarrow 0$ est une suite exacte d'espaces vectoriels de dimension finie, alors*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E^k = 0 \ .$$

Preuve. Si f^i est l'application $E^i \to E^{i+1}$ (avec $E^{-1} = 0$ et $E^{n+1} = 0$), alors dim $E^i =$ dim Im $f^i +$ dim Im f^{i-1}. Le résultat s'en déduit par sommation alternée. □ □

- **Calcul de la cohomologie des sphères.**

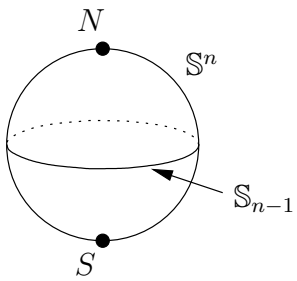
Proposition 6.24 *Pour tous p, n dans $\mathbb{N}$,*

$$H^p_{\mathrm{DR}}(\mathbb{S}_n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{si} \quad 0 = p = n \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad 0 = p < n \\ 0 & \text{si} \quad 0 < p < n \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad 0 < p = n \\ 0 & \text{si} \quad p > n\ . \end{cases}$$

Preuve. Si $n = 0$, alors $\mathbb{S}_n = \{-1, +1\}$, et le résultat est déjà connu (voir l'exercice corrigé E.139 et la proposition 6.11). On suppose donc $n \geq 1$.

On montre le résultat par récurrence sur p. Si $p = 0$, alors le résultat est déjà connu, car $\mathbb{S}_n$ est connexe (proposition 6.11). On suppose donc $p \geq 1$.

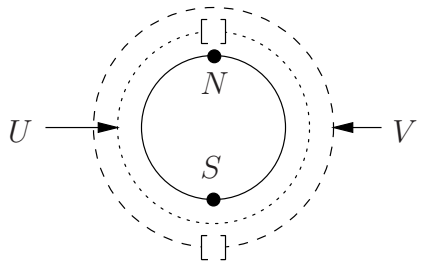
Soit N le pôle nord de $\mathbb{S}_n$, S le pôle sud de $\mathbb{S}_n$, $U = \mathbb{S}_n - \{N\}$, $V = \mathbb{S}_n - \{S\}$. Alors U, V sont des ouverts contractiles, donc ont la même cohomologie de de Rham que le point. L'inclusion $\mathbb{S}_{n-1} \hookrightarrow U \cap V$ est une équivalence d'homotopie (car $U \cap V$ se rétracte par déformation forte sur l'équateur $\mathbb{S}_{n-1}$ le long des grands cercles passant par les pôles). Elle induit donc un isomorphisme en cohomologie de de Rham.



Pour $p = 1$, la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à la variété $\mathbb{S}_n$ munie du recouvrement ouvert $\{U, V\}$ donne une suite exacte

$$H^0(U) \times H^0(V) \xrightarrow{\phi} H^0(U \cap V) \xrightarrow{\psi} H^1(M) \longrightarrow H^1(U) \times H^1(V)\ .$$

L'espace vectoriel réel $H^1(U) \times H^1(V)$ est nul, donc ψ est surjective. L'espace vectoriel réel $H^0(U) \times H^0(V)$ est isomorphe à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Si $n > 1$, alors l'application ϕ est surjective (voir la remarque (2) suivant la proposition 6.20). Donc par exactitude, ψ est l'application nulle et $H^1(\mathbb{S}_n) = 0$. Comme dim $H^0(M) =$ dim $H^0(U) =$ dim $H^0(V) =$ dim $H^0(U \cap V) = 1$, on peut aussi conclure par sommation alternée des dimensions (voir le lemme 6.23).



Si $n = 1$, alors $H^0(U \cap V) \simeq H^0(\mathbb{S}_0) \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'application ϕ s'écrit $(x, y) \mapsto (x - y, x - y)$, car l'application constante 1 sur U, qui engendre $H^0(U)$, s'envoie, par restriction, sur l'application constante 1 sur chacune des deux composantes connexes de $U \cap V$ (et de même pour V). En particulier, l'image de ϕ est isomorphe à $\mathbb{R}$, donc par exactitude, le noyau de ψ est $\mathbb{R}$, et $H^1(\mathbb{S}_1) = \mathbb{R}$. Comme dim $H^0(M) =$ dim $H^0(U) =$ dim $H^0(V) = 1$ et dim $H^0(U \cap V) = 2$, on peut aussi conclure par sommation alternée des dimensions (voir le lemme 6.23).

Pour $p > 1$, la suite exacte de Mayer-Vietoris appliquée à la variété $\mathbb{S}_n$ munie du recouvrement ouvert $\{U, V\}$ donne une suite exacte

$$H^{p-1}(U) \times H^{p-1}(V) \longrightarrow H^{p-1}(U \cap V) \longrightarrow H^p(\mathbb{S}_n) \longrightarrow H^p(U) \times H^p(V) \ .$$

Les espaces vectoriels réels aux extrémités étant nuls, on a un isomorphisme $H^p(\mathbb{S}_n) \simeq H^{p-1}(U \cap V) \simeq H^{p-1}(\mathbb{S}_{n-1})$. On conclut par récurrence. $\square$

Porisme 6.25 *Pour tout $n \geq 1$, l'algèbre graduée $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{S}_n)$ est isomorphe à l'algèbre (associative, unitaire, commutative) graduée (en degré 0 et n) $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ munie du produit $(x, y) \wedge (x', y') = (xx', xy' + yx')$.*

Preuve. On a $H^*(\mathbb{S}_n) = H^0(\mathbb{S}_n) \oplus H^n(\mathbb{S}_n) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, et le résultat découle des propriétés d'algèbre graduée de $H^*(\mathbb{S}_n)$. $\square$

Remarque. Pour $n, m \geq 1$, les algèbres (unitaires) $H^*(\mathbb{S}_n)$ et $H^*(\mathbb{S}_m)$ sont isomorphes, mais les algèbres graduées $H^*(\mathbb{S}_n)$ et $H^*(\mathbb{S}_m)$ ne le sont pas !

Voici une application du calcul des groupes de cohomologie de de Rham des sphères et des boules, et de la propriété de fonctorialité de la cohomologie de de Rham. Le résultat suivant est une version faible du théorème d'invariance du domaine de Brouwer 2.1. Nous renvoyons à [Spa, Hat] pour d'autres applications.

Porisme 6.26 (Théorème d'invariance du domaine de Brouwer I) *Si $n \neq m$, alors $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes.*

Preuve. Si $n \neq m$, alors les espaces vectoriels $H^n(\mathbb{S}_n)$ et $H^n(\mathbb{S}_m)$ ne sont pas isomorphes. Par l'invariance topologique de la cohomologie de de Rham, les espaces topologiques $\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{S}_m$ ne sont donc pas homéomorphes. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^k$ est homéomorphe à $\mathbb{S}_k$ (voir l'exercice E.169 de l'appendice A.1). Si deux espaces topologiques localement compacts sont homéomorphes, alors leurs compactifiés d'Alexandrov le sont (voir l'exercice E.169 de l'appendice A.1). Donc $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes. $\square$

Pour n dans $\mathbb{N}$, on note $||\cdot||$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$ (on rappelle que $||(x_1, \cdots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$). Soit $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ ||x|| \leq 1\}$ la boule unité (fermée) de $\mathbb{R}^n$.

Porisme 6.27 (Théorème du point fixe de Brouwer) *Toute application continue de $\mathbb{B}_n$ dans $\mathbb{B}_n$ admet un point fixe.*

Preuve. Si A est une partie d'un espace topologique X et $i : A \to X$ est l'inclusion, une *rétraction* de X dans A est une application <u>continue</u> $r : X \to A$ telle que $r \circ i = id_A$.

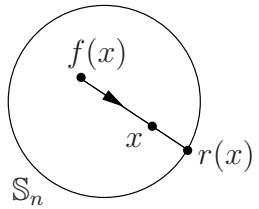
Lemme 6.28 *Il n'existe pas de rétraction $r : \mathbb{B}_{n+1} \to \mathbb{S}_n$.*

Preuve. On étend r radialement à l'extérieur de $\mathbb{B}_{n+1}$ en une rétraction $r : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{S}_n$, et on note $i : \mathbb{S}_n \to \mathbb{R}^n$ l'inclusion. Si le résultat n'est pas vrai, par fonctorialité, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H^n(\mathbb{R}^{n+1}) \arrow[dr, "i^*"] & \\
H^n(\mathbb{S}_n) \arrow[ur, "r^*"] \arrow[rr, "id_{H^n(\mathbb{S}_n)}"'] & & H^n(\mathbb{S}_n)
\end{tikzcd}$$

Si $n > 0$, alors $H^n(\mathbb{R}^{n+1}) = 0$ et $H^n(\mathbb{S}_n) \neq 0$, donc r^* n'est pas injective, ce qui contredit l'injectivité de $id_{H^n(\mathbb{S}_n)}$. Si $n = 0$, alors $H^n(\mathbb{R}^{n+1}) = \mathbb{R}$ et $H^n(\mathbb{S}_n) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donc l'application linéaire i^* n'est pas surjective, ce qui contredit la surjectivité de $id_{H^n(\mathbb{S}_n)}$. (si $n = 0$, on peut aussi dire que $\mathbb{S}_1$ est connexe, alors que $\mathbb{S}_0$ ne l'est pas, donc $\mathbb{S}_0$ n'est pas l'image d'une application continue de $\mathbb{S}_1$ dans $\mathbb{S}_0$. □

La preuve du théorème du point fixe de Brouwer découle de ce lemme de la manière suivante.



Le théorème est vrai pour $n = 0$. Supposons qu'il existe une application continue $f : \mathbb{B}_{n+1} \to \mathbb{B}_{n+1}$ sans point fixe. Alors l'application $r : \mathbb{B}_{n+1} \to \mathbb{S}_n$ définie par $\{r(x)\} = \mathbb{S}_n \cap \{f(x) + t(x - f(x)) \ : t \geq 1\}$ est une rétraction, ce qui contredit le lemme. □

• **Autres calculs de cohomologie de de Rham.**

Les tores. Nous allons calculer l'algèbre graduée de cohomologie de de Rham des tores par transformation de Fourier. Notons $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore de dimension n, et $\check{\mathbb{R}}^n$ l'espace vectoriel dual de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que l'espace vectoriel $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^n, \Lambda^*\check{\mathbb{R}}^n)$, muni du produit extérieur point par point, est une algèbre graduée (associative unitaire) anticommutative différentielle (en un sens évident que nous ne précisons pas ici), qui s'identifie au sous-espace de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^*\check{\mathbb{R}}^n) = \Omega(\mathbb{R}^n)$ constitué des applications périodiques (par $\mathbb{Z}^n$). Si $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ est l'application canonique de revêtement, alors le morphisme d'algèbres graduées différentielles $p^* : \Omega(\mathbb{T}^n) \to \Omega(\mathbb{R}^n) = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda^*\check{\mathbb{R}}^n)$ est injectif, et a pour image la sous-algèbre des formes différentielles périodiques. Donc les algèbres graduées différentielles $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^n, \Lambda^*\check{\mathbb{R}}^n)$ et $\Omega(\mathbb{T}^n)$ sont isomorphes, et donc calculent la même algèbre de cohomologie. (Notons qu'une situation analogue se passe pour toutes les variétés parallélisables, voir l'exercice E.148).

Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, qui permet en particulier d'identifier $\mathbb{R}^n$ avec son dual $\check{\mathbb{R}}^n$, par l'application $k \mapsto \{\check{k} : v \mapsto \langle k, v \rangle\}$. Rappelons que, pour tout ω dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{T}^n, \Lambda^*\check{\mathbb{R}}^n)$, pour tout k dans $\mathbb{Z}^n$, le k-ème coefficient de la série de Fourier de ω est

$$w_k = \int_{x \in [0,1]^n} e^{-2\pi i \langle k, x \rangle} \omega(x) \, dx \ ,$$

qui est un élément de l'algèbre $\Lambda^*(\check{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C})$ des formes alternées sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs complexes, avec bien sûr $w_k \in \Lambda^p(\check{\mathbb{R}}^n, \mathbb{C})$ si $\omega \in \Omega^p(\mathbb{T}^n)$. La transformation de Fourier inverse exprime ω en fonction de sa série de Fourier (à décroissance rapide) par

$$\omega_x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i \langle k, x \rangle} w_k \ .$$

L'application tangente en x de ω est donc

$$T_x\omega : X \mapsto 2\pi i \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \check{k}(X) e^{2\pi i \langle k, x \rangle} w_k \ .$$

Le calcul de la différentielle extérieure de ω, par sa définition même, se fait alors « fréquence par fréquence », en utilisant la définition de la différentielle extérieure comme l'application

tangente rendue alternée (voir la preuve du théorème 6.5) et la définition du produit extérieur des formes alternées (voir l'appendice A.5) :

$$(d\omega)_x = 2\pi i \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\langle k,x\rangle}\check{k}\wedge w_k \ .$$

Considérons l'algèbre graduée

$$\bigoplus_{p\in\mathbb{N}}\left(\prod_{k\in\mathbb{Z}^n}\Lambda^p(\check{\mathbb{R}}^n,\mathbb{C})\right) \ ,$$

le produit s'effectuant composante par composante. En notant $\Omega(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})$ l'algèbre des formes différentielles à valeurs complexes sur $\mathbb{T}^n$, l'application qui à une forme différentielle associe sa série de Fourier est donc un isomorphisme d'algèbres graduées sur son image

$$\Theta : \Omega(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}) \to \bigoplus_{p\in\mathbb{N}}\prod_{k\in\mathbb{Z}^n}\Lambda^p(\check{\mathbb{R}}^n,\mathbb{C}) \ ,$$

qui envoie la différentielle d sur l'opérateur linéaire (préservant l'image de Θ) défini par

$$\delta : (w_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \mapsto (2\pi i\ \check{k}\wedge w_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \ .$$

Lemme 6.29 *Pour tout ω dans $\Lambda^p(\check{\mathbb{R}}^n,\mathbb{C})$, et tout élément non nul k de $\mathbb{R}^n$, on a $\check{k}\wedge\omega = 0$ si et seulement si $\omega = \check{k}\wedge\omega'$ avec ω' dans $\Lambda^{p-1}(\check{\mathbb{R}}^n,\mathbb{C})$.*

Preuve. Rappelons que l'espace $\Lambda^{p-1}(\check{\mathbb{R}}^n,\mathbb{C})$ est nul par convention si $p=0$. En utilisant le produit intérieur par k (voir la proposition A.20 de l'appendice A.5), si $\check{k}\wedge\omega = 0$, alors

$$0 = i_k(\check{k}\wedge\omega) = i_k(\check{k})\wedge\omega - \check{k}\wedge i_k(\omega) \ .$$

Comme $i_k(\check{k})$ est la 0-forme différentielle constante de valeur $||k||^2 \neq 0$, le lemme en découle. □

En particulier, si $\delta(w_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} = 0$, alors il existe $(w'_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ tel que $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} = \delta(w'_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} + w_0$, en identifiant w_0 avec la suite indexée par $k\in\mathbb{Z}^n$, dont tous les élements son nuls, sauf celui pour $k=0$ qui vaut w_0. Donc l'application $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \mapsto w_0$ induit un isomorphisme d'algèbres graduées de l'algèbre graduée quotient $(\mathrm{Ker}\ \delta_{|\mathrm{Im}\ \Theta})/(\mathrm{Im}\ \delta_{|\mathrm{Im}\ \Theta})$ dans $\Lambda^*(\check{\mathbb{R}}^n,\mathbb{C})$. Le résultat suivant en découle.

Proposition 6.30 *L'application $[\omega] \mapsto w_0$ est un isomorphisme d'algèbres graduées de $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{T}^n)$ dans $\Lambda^*\check{\mathbb{R}}^n$.* □

En particulier, la dimension de l'espace vectoriel réel $H^k(\mathbb{T}^n)$ est le coefficient binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ et la dimension de l'espace vectoriel réel $H^*(\mathbb{T}^n)$ est 2^n.

Les espaces projectifs complexes.

Proposition 6.31 *Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Les espaces de cohomologie de de Rham de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ sont*

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 0\leq k\leq 2n \text{ et } k \text{ pair} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En particulier sa caractéristique d'Euler est $n+1$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur n. Rappelons que $\mathbb{P}_0(\mathbb{C})$ est réduit à un point, que la variété $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est C^∞-difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$ (voir l'exercice E.15), et que $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est connexe et de dimension $2n$. Nous pouvons donc supposer $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq 2n$. Supposons le résultat vrai pour $n-1$.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{n+1}$ de ses coordonnées canoniques $(z_0, \ldots, z_n)$, et on identifie $\mathbb{C}^n$ avec l'hyperplan vectoriel d'équation $z_0 = 0$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, on considère le point x de coordonnées homogènes $[1 : 0 : \ldots : 0]$, l'ouvert $U = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \{x\}$ et l'ouvert $V = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) - \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. Nous avons vu (voir le paragraphe 2.4.3) que V est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{C}^n$ (c'est le domaine d'une carte affine d'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$), donc V a le même type d'homotopie que le point. De plus, U se rétracte par déformation forte sur $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$, par l'homotopie $([z_0 : z_1 : \ldots : z_n], t) \mapsto [tz_0 : z_1 : \ldots : z_n]$, donc a le même type d'homotopie que $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$. L'intersection $U \cap V$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{C}^n - \{0\}$, donc a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}_{2n-1}$.

La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\cdots \to H^{k-1}(U \cap V) \to H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \to H^k(U) \times H^k(V) \to H^k(U \cap V) \to \ldots$$

donne donc des suites exactes

$$H^0(U) \times H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \to H^1(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) = 0 \ ,$$

$$0 \to H^{2n-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \to H^{2n-1}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) = 0 \to H^{2n-1}(\mathbb{S}_{2n-1}) \to H^{2n}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \to 0 \ ,$$

et, pour $1 < k < 2n-1$,

$$0 \to H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \to H^k(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) \to 0 \ .$$

Comme l'application $H^0(U) \times H^0(V) \to H^0(U \cap V)$ est surjective (puisque $U, V, U \cap V$ sont connexes, voir la remarque (2) suivant la proposition 6.20), le résultat s'en déduit. $\square$

Les sommes connexes. Soient M_1 et M_2 deux variétés C^∞ connexes de même dimension n. On appelle *somme connexe* de M_1 et M_2, et l'on note $M_1 \sharp M_2$, toute variété construite de la manière suivante. Notons $B(0,r)$ et $\overline{B}(0,r)$ les boules ouvertes et fermées de rayon r dans l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$. Pour $i = 1, 2$, notons $\varphi_i : B(0,3) \to M_i$ un plongement C^∞, et $B_i = \varphi_i(\overline{B}(0, 1/2))$. Notons $\psi : B(0,2) - \overline{B}(0,1/2) \to B(0,2) - \overline{B}(0,1/2)$ le C^∞-difféomorphisme $x \mapsto x/(||x||^2)$. On définit $M_1 \sharp M_2$ comme l'espace topologique quotient de la variété C^∞ somme disjointe $(M_1 - B_1) \coprod (M_2 - B_2)$ par la relation d'équivalence engendrée par $\varphi_1(x) \sim \varphi_2 \circ \psi(x)$ pour tout x dans $B(0,2) - \overline{B}(0,1/2)$. Il n'est pas difficile de montrer que $M_1 \sharp M_2$ admet une unique structure de variété C^∞ telle que la projection canonique induise un plongement C^∞ de $M_1 - B_1$ et de $M_2 - B_2$ sur des ouverts de $M_1 \sharp M_2$. Cette construction dépend du choix des φ_1, φ_2, mais on montre (voir par exemple [Hir]) qu'à C^∞-difféomorphisme près, elle n'en dépend pas. On montre de même qu'à C^∞-difféomorphisme près, l'opération de somme connexe est associative. La variété topologique sous-jacente à $M_1 \sharp M_2$ est la variété topologique somme connexe au sens du paragraphe 2.4.1 des variétés topologiques sous-jacentes à M_1 et M_2.

Lemme 6.32 *Soit M une variété C^∞ de dimension $n \geq 2$, et x un point de M. Alors l'inclusion $M - \{x\} \to M$ induit un isomorphisme en cohomologie de de Rham, pour tout $k \neq n, n-1$:*

$$H^k(M) \simeq H^k(M - \{x\}) \ .$$

Preuve. Le résultat est vrai pour $k = 0$, car comme $n \geq 2$, le point x ne disconnecte pas la composante connexe de M qui le contient. On suppose donc $k \geq 1$.

On utilise la suite de Mayer-Vietoris pour le recouvrement ouvert $\{M - \{x\}, V\}$ de M, où V est un voisinage ouvert de x difféomorphe à la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^n$, en utilisant que V est contractile, donc possède la même cohomologie que le point, et que $(M - \{x\}) \cap V = V - \{x\}$ possède le même type d'homotopie, donc la même cohomologie, que la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$. Comme $H^k(V) = 0$, on a une suite exacte

$$H^{k-1}(V - \{x\}) \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(M - \{x\}) \longrightarrow H^k(V - \{x\}) \ .$$

Le terme $H^{k-1}(V - \{x\})$ est nul si $k \neq 1, n$. Si $k = 1$, alors la flèche précédente dans la suite exacte de Mayer-Vietoris $H^{k-1}(M - \{x\}) \times H^{k-1}(V) \to H^{k-1}(V - \{x\})$ est surjective (car $M - \{x\}, V, V - \{x\}$ sont connexes, voir la remarque (2) suivant la proposition 6.20), donc $H^{k-1}(V - \{x\}) \to H^k(M)$ est l'application nulle. Le terme $H^k(V - \{x\})$ est nul si $k \neq n - 1$. □

Proposition 6.33 *Soient M_1 et M_2 deux variétés C^∞ connexes de même dimension $n \geq 3$. Alors, pour tout $k \neq 0, n, n-1$, on a un isomorphisme*

$$H^k(M_1 \sharp M_2) \simeq H^k(M_1) \times H^k(M_2) \ .$$

Preuve. Montrons que pour tout $k \neq 0, n, n-1$, on a un isomorphisme $H^k(M_1 \sharp M_2) \to H^k(M_1 - \{x_1\}) \times H^k(M_2 - \{x_2\})$. Le résultat découlera alors du lemme précédent.

On reprend les notations de la définition de $M_1 \sharp M_2$. Notons U_1, U_2 les images de $M_1 - B_1$ et de $M_2 - B_2$ dans $M_1 \sharp M_2$. L'intersection $U_1 \cap U_2$ a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$. Remarquons que $M_1 - B_1$ et $M_2 - B_2$ ont le même type d'homotopie que $M_1 - \{x_1\}$ et $M_2 - \{x_2\}$ pour x_1, x_2 des points de B_1, B_2 respectivement. La suite exacte de Mayer-Vietoris de $M_1 \sharp M_2$ pour le recouvrement $\{U_1, U_2\}$ donne une suite exacte

$$H^{k-1}(\mathbb{S}_{n-1}) \longrightarrow H^k(M_1 \sharp M_2) \longrightarrow H^k(M_1 - \{x_1\}) \times H^k(M_2 - \{x_2\}) \longrightarrow H^k(\mathbb{S}_{n-1}) \ .$$

Si $k \neq 0, 1, n, n-1$ les termes extrêmaux sont nuls. Si $k = 1$, un raisonnement déjà vu (voir la remarque (2) suivant la proposition 6.20) montre que la flèche la plus à gauche est nulle. □

Remarque. Pour $n \geq 1$ et $k = 0, n$, le résultat précédent est faux, comme le montre le cas $M_1 = M_2 = \mathbb{S}_n$. Comme le montre l'exercice E.141 (2) ci-dessous, le résultat est faux si $n = 2$ et $k = 1$, mais il est vrai par la proposition 6.35 ci-dessous si $k = 1$ et si M_1 et M_2 sont deux surfaces compactes connexes orientables. Il découle de la dualité de Poincaré (voir le paragraphe 6.5) que le résultat est vrai si $n \geq 3$, $k = n - 1$ et M_1 et M_2 sont deux variétés compactes connexes orientables.

Les surfaces.

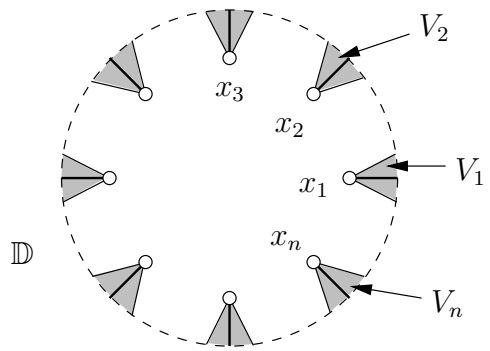
Notons $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan euclidien $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et $x_1, \ldots, x_n$ des points distincts, avec $n \geq 0$.

Proposition 6.34 *Les espaces de cohomologie de de Rham du disque privé de n points sont*

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{D} - \{x_1, \ldots, x_n\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^n & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En particulier sa caractéristique d'Euler est $1 - n$.

Preuve. Par connexité, le résultat est clair pour $k = 0$. Par dimension, le résultat est clair si $k > 2$. Nous pouvons donc supposer que $k = 1, 2$. À difféomorphisme près, nous pouvons supposer que $x_j = \frac{1}{2}e^{2i\pi j/n}$ pour $1 \leq j \leq n$. Notons $M = \mathbb{D} - \{x_1, \ldots, x_n\}$, U le disque D privé des segments entre x_j et $e^{2i\pi j/n}$, V_j un voisinage de ce segment dans M comme dans le dessin ci-dessous, et $V = \cup_{j=1}^n V_j$.



Notons que les ouverts U et V_j sont contractiles et que $U \cap V_k$ a le type d'homotopie de la somme disjointe de deux points. Donc par la suite exacte de Mayer-Vietoris, on a $H^k(M) = 0$ si $k = 2$. De plus, le début de la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H^0(U) \times H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow H^1(U) \times H^1(V)$$

s'écrit donc

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0\ .$$

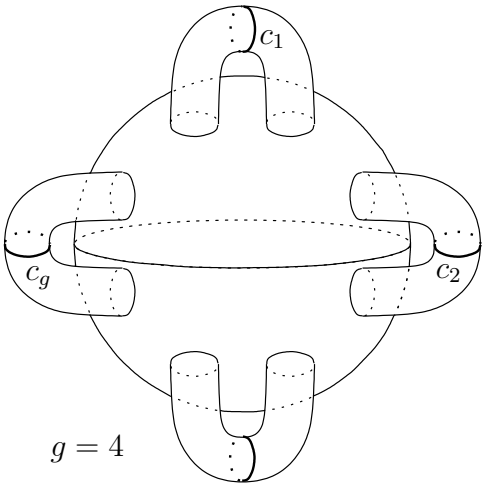
Un argument de dimension (voir par exemple le lemme 6.23) permet alors de conclure. □

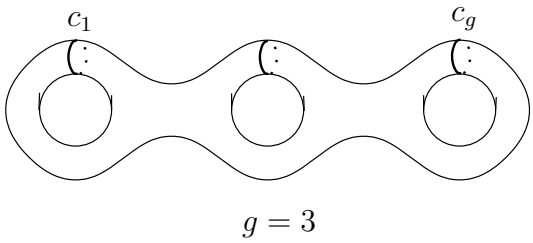
Proposition 6.35 *Les espaces de cohomologie de de Rham de la somme connexe* $\sharp_g\ \mathbb{T}^2$ *de* $g \geq 0$ *tores de dimension* 2 *sont*

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\sharp_g\ \mathbb{T}^2) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^{2g} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

En particulier sa caractéristique d'Euler est $2 - 2g$.

Preuve. Posons $M = \sharp_g\ \mathbb{T}^2$. Notons U un ouvert de M obtenu en enlevant g cercles $C_1, \ldots, C_g$ plongés de manière disjointe dans M, de sorte que U soit difféomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$ privée de $2g$ disques fermés, donc ait le même type d'homotopie qu'un disque privé de $2g - 1$ points. Notons V la réunion disjointe de voisinages ouverts V_i de chacun de ces cercles, où chaque V_i est difféomorphes à une couronne, donc a le même type d'homotopie qu'un cercle, et tel que $V_i - C_i$ soit difféomorphe à la somme disjointe de deux anneaux.





Comme M est de dimension 2, on a $H^k(M) = 0$ si $k > 2$. Le début de la suite exacte de Mayer-Vietoris est

$$0 \to H^0(M) \to H^0(U) \times H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(M) \to H^1(U) \times H^1(V)$$
$$\to H^1(U \cap V) \to H^2(M) \to H^2(U) \times H^2(V) \ .$$

Nous verrons que $H^2(M) \simeq \mathbb{R}$ dans le paragraphe suivant (mais on peut aussi le calculer en explicitant les flèches). On a donc une suite exacte

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{g+1} \to \mathbb{R}^{2g} \to H^1(M) \to \mathbb{R}^{3g-1} \to \mathbb{R}^{2g} \to \mathbb{R} \to 0 \ .$$

Un argument de dimension (voir par exemple le lemme 6.23) permet alors de conclure que $H^1(M) \simeq \mathbb{R}^{2g}$. □

Exercice E.141 *(1) Montrer que les espaces de cohomologie de de Rham de $\sharp_g \, \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, la somme connexe de $g \geq 1$ plans projectifs, sont*

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\sharp_g \, \mathbb{P}_2(\mathbb{R})) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^{g-1} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En déduire que sa caractéristique d'Euler est $2 - g$.

(2) Montrer que les espaces de cohomologie de de Rham de $\sharp_g \, \mathbb{T}^2 - \{x_1, \ldots, x_n\}$, la somme connexe de $g \geq 0$ tores de dimension 2 privée de $n \geq 1$ points distincts, sont

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\sharp_g \, \mathbb{T}^2 - \{x_1, \ldots, x_n\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^{2g+n-1} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En déduire que sa caractéristique d'Euler est $2 - 2g - n$.

(3) Montrer que les espaces de cohomologie de de Rham de $\sharp_g \, \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) - \{x_1, \ldots, x_n\}$, la somme connexe de $g \geq 1$ plans projectifs privée de $n \geq 1$ points distincts, sont

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\sharp_g \, \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) - \{x_1, \ldots, x_n\}) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{R}^{g+n-1} & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En déduire que sa caractéristique d'Euler est $2 - g - n$.

On montre (voir par exemple [Hir, Gra]) que toute surface C^∞ compacte connexe est C^∞-difféomorphe à $\sharp_g\ \mathbb{T}^2$, c'est-à-dire à une somme connexe de $g \geq 0$ tores de dimension 2, ou à $\sharp_g\ \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire à une somme connexe de $g \geq 1$ plans projectifs. La proposition 6.35 et l'exercice E.141 (1) montrent que deux telles surfaces ne sont pas C^∞-difféomorphes (et même n'ont pas le même type d'homotopie), car leurs cohomologies de de Rham diffèrent.

6.3 Intégration des formes différentielles

Toutes les formes différentielles dans ce paragraphe seront supposées C^∞, pour simplifier, mais une régularité C^0, C^1, voire C^2 suffit dans la plupart des cas (voir la remarque finale de ce paragraphe).

Le but de ce paragraphe est de définir une intégration des formes différentielles de degré maximum sur une variété M de classe C^∞. Deux problèmes vont se poser, la non compacité (mais c'est un problème classique pour l'intégration usuelle, facilement contournable) et la non orientabilité (qui est la grosse différence entre l'intégration usuelle et l'intégration des formes différentielles)

Si ω est une forme différentielle C^∞ sur M, appelons *support* de ω l'adhérence des points x où ω_x n'est pas nul. On note $\Omega_c(M)$ la sous-algèbre graduée de $\Omega(M)$ (qui n'est pas unitaire si M n'est pas compacte) des formes différentielles à support compact sur M.

• **Intégration dans les ouverts de $\mathbb{R}^n$.**

Soit n un élément de $\mathbb{N} - \{0\}$. Rappelons que si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors toute n-forme différentielle est de la forme $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ où $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Notons $dx_1 \dots dx_n$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout borélien B de U, et toute n-forme différentielle $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sur U telle que $f_{|B} \in \mathbb{L}^1(B, dx_1 \dots dx_n)$, on pose

$$\int_B \omega = \int_B f\, dx_1 \dots dx_n\ .$$

La condition d'intégrabilité est satisfaite par exemple si l'intersection de B et du support de ω est contenue dans un compact, car toute fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ est localement intégrable pour la mesure de Lebesgue. Lorsque ω est à support compact dans U, l'application

$$B \mapsto \int_B \omega = \int_B f\, dx_1 \dots dx_n$$

où B parcourt les boréliens de U, est une mesure de Radon (borélienne, réelle, régulière) finie sur U, qui est positive si f est positive. (C'est juste la mesure de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue).

Lemme 6.36 (Formule du changement de variable local) *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : U \to V$ un C^∞-difféomorphisme, $\omega \in \Omega^n(V)$ et K un compact de V tel que le signe ε du jacobien J_φ de φ soit constant sur $\varphi^{-1}(K)$. Alors*

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*\omega = \varepsilon \int_K \omega\ .$$

Preuve. On a vu (juste après la proposition 6.3) que

$$(\varphi^*(f\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n))_x = f \circ \varphi(x)\ J_\varphi(x)\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\ .$$

Comme sur $\varphi^{-1}(K)$, on a $J_\varphi(x) = \varepsilon|J_\varphi(x)|$, le résultat découle alors de la formule de changement de variable pour la mesure de Lebesgue, car $\int_{\varphi^{-1}(K)} \mu = \int_K \varphi_*\mu$ pour toute mesure μ sur $\varphi^{-1}(K)$, $\varphi_*(g\, dx_1 \dots dx_n) = g \circ \varphi^{-1}\ \left|J_{\varphi^{-1}}\right| dx_1 \dots dx_n$ pour toute fonction mesurable g sur $\varphi^{-1}(K)$ et $J_\varphi \circ \varphi^{-1} \cdot J_{\varphi^{-1}} = 1$. □

Exemples. Soit U un voisinage ouvert de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$.

(1) Si $\omega = f\, dx$, alors

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(x)\, dx\ .$$

(2) Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i\, dx_i \in \Omega^1(V)$, U un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et $\gamma : U \to V$ un chemin C^∞ dans V, de composantes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Alors $\gamma^*\omega \in \Omega^1(U)$ et, pour tous a, b dans U,

$$\int_{[a,b]} \gamma^*\omega = \sum_{i=1}^n \int_{[a,b]} (\omega_i \circ \gamma)\, \gamma_i'(t) dt\ .$$

Si $\alpha = \gamma_{|[a,b]}$, cette intégrale est appelée l'*intégrale* de ω le long du chemin α, et parfois notée $\int_\alpha \omega$.

La présence du signe ε dans la formule du changement de variable local ci-dessus pose des problèmes si l'on essaie d'étendre la notion d'intégrale de formes différentielles des ouverts de $\mathbb{R}^n$ aux variétés générales.

• **Orientation des variétés.**

Soit n un élément de $\mathbb{N} - \{0\}$.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Rappelons qu'une *orientation* de E est une classe d'équivalence de bases de E pour la relation $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ si l'application linéaire envoyant $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$ est de déterminant strictement positif, ou, de manière équivalente, est une classe d'équivalence de n-formes alternées sur E pour la relation $\omega \sim \omega'$ s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\omega' = \lambda\omega$. Il existe exactement deux orientations sur E. On dit que E est *orienté* s'il est muni d'une orientation. Une base appartenant à cette orientation est alors dite *positive*. Une n-forme alternée appartenant à cette orientation est alors dite *positive*. La correspondance entre les deux définitions d'orientation se comprend comme suit : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, de base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, alors $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$ est positive si et seulement si $(e_1, \dots, e_n)$ est positive. Un isomorphisme linéaire de E dans un espace vectoriel réel orienté F *préserve l'orientation* s'il envoie l'orientation de E sur l'orientation de F, i.e. s'il envoie une/toute base positive de E sur une base positive de F, ou de manière équivalente, si son déterminant, dans des bases positives de E et de F, est strictement positif. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de l'orientation (dite *canonique*) telle que sa base canonique soit positive.

Un C^∞-difféomorphisme entre des ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ *préserve l'orientation* si le signe de son jacobien est positif en tout point, ou de manière équivalente, si pour tout point x de U, sa différentielle en x est un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ qui préserve l'orientation.

Un atlas de cartes C^∞ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sur un espace topologique M est dit *orienté* si ses applications de changement de cartes préservent l'orientation. Une *variété orientée* C^∞ est un espace topologique N, séparé et à base dénombrable (ou, de manière équivalente, métrisable et séparable, voir la proposition 2.2), muni d'un atlas de cartes C^∞ orienté, maximal parmi les atlas de cartes C^∞ orientés. Une carte de cet atlas sera appelée une *carte orientée* (ou *positive*) de N. Si M est une variété orientée C^∞, nous noterons encore M par abus la variété C^∞, qui est l'espace topologique sous-jacent de M, muni de l'atlas de cartes C^∞ maximal contenant l'atlas de cartes C^∞ orienté de M.

Soit M une variété de classe C^∞. Une *orientation* de M est un sous-atlas orienté maximal de son atlas de cartes maximal. L'espace topologique sous-jacent à M, muni de ce sous-atlas, est alors une variété orientée C^∞. On dit que M est *orientable* si elle admet une orientation. *Orienter* M, c'est choisir une orientation sur M, et nous noterons souvent de la même manière la variété orientée C^∞ obtenue.

Un C^∞-difféomorphisme local $f : M \to N$ entre deux variétés C^∞ orientées *préserve l'orientation* si f envoie toute carte orientée suffisamment petite de M sur une carte orientée de N, i.e. pour toute carte orientée (V, φ) de N et tout ouvert U de M tels que $f_{|U} : U \to V$ soit un C^∞-difféomorphisme, la carte $(U, \varphi \circ f)$ est une carte orientée de M, ou, de manière équivalente, si l'application f, lue dans toute paire de cartes orientées suffisamment petites, préserve l'orientation (en tant que C^∞-difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$). Il est immédiat qu'alors f^{-1} préserve aussi l'orientation.

Exemples. (1) La variété $\mathbb{R}^n$ est orientable, et orientée par l'atlas orienté maximal contenant l'application identité.

(2) Tout ouvert U d'une variété orientable M est orientable, en prenant les cartes orientées de M de domaine contenu dans U, et sera, sauf mention explicite du contraire, munie de cette orientation.

(3) Si $(M_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable de variétés orientées C^∞, alors l'espace topologique somme disjointe des espaces topologiques sous-jacents de $(M_i)_{i\in I}$, muni de l'atlas C^∞ orienté maximal contenant la réunion des atlas C^∞ orientés maximaux des M_i, est l'unique structure de variété orientée C^∞ sur l'ensemble somme disjointe des ensembles M_i telle que l'inclusion canonique $M_i \to M$ soit un C^∞-difféomorphisme sur son image qui préserve l'orientation. Cette variété orienté C^∞ est notée $\coprod_{i\in I} M_i$, et appelée *variété orientée somme disjointe*.

(4) Si M_1, M_2 sont deux variétés orientées C^∞, alors l'espace topologique produit des espaces topologiques sous-jacents de M_1, M_2, muni de l'atlas C^∞ orienté maximal contenant les produits de cartes locales orientées de M_1, M_2, est une variété C^∞ orientée, notée $M_1 \times M_2$, et appelée *variété orientée produit*.

(5) Soient M_1, M_2 deux variétés connexes orientées C^∞, et $M_1 \sharp M_2$ la variété somme connexe, construite à partir de plongements préservant l'orientation $\varphi_i : B(0,3) \to M_i$ pour $i = 0, 1$, comme dans la partie précédente. Comme le difféomorphisme de recollement $\psi : B(0,2) - \overline{B(0,1/2)} \to B(0,2) - \overline{B(0,1/2)}$ renverse l'orientation (c'est une restriction de l'inversion par rapport à la sphère unité), la variété $M_1 \sharp M_2$ admet une unique structure de variété orientée, telle que toute carte locale orientée de M_i, de domaine contenue dans $M_i - \varphi_i(\overline{B(0,1/2)})$ soit une carte orientée de $M_1 \sharp M_2$. La variété $M_1 \sharp M_2$, munie de cette orientation, est appelée la variété *somme connexe orientée* de M_1 et M_2. À difféomorphisme préservant l'orientation près, elle ne dépend pas des choix des φ_i (voir par exemple [Hir]).

(6) Un point important est qu'alors que tout espace vectoriel réel de dimension finie,

et tout ouvert de $\mathbb{R}^n$, admet une orientation, il existe des variétés C^∞ qui ne sont pas orientables. C'est le cas par exemple du ruban de Möbius, qui est la variété quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action libre et propre du groupe $\mathbb{Z}$, où $1 \in \mathbb{Z}$ agit par $(x, y) \mapsto (x + 1, -y)$, voir l'exercice ci-dessous.

Exercice E.142 *(1) Montrer que tout revêtement de classe* C^∞ *d'une variété orientée* C^∞ *admet une unique orientation, dite* image réciproque*, telle que la projection de revêtement soit un* C^∞*-difféomorphisme local préservant l'orientation.*

(2) Soit M une variété C^∞*, munie d'une action libre et propre par* C^∞*-difféomorphismes d'un groupe discret G. Montrer que si la variété quotient $G\backslash M$ est orientée, alors G agit par* C^∞*-difféomorphismes préservant l'orientation pour l'orientation image réciproque sur M. Montrer que si M est orientée et si G agit par* C^∞*-difféomorphismes préservant l'orientation, alors la variété quotient $G\backslash M$ est orientable, et admet une unique orientation telle que l'orientation image réciproque sur M soit l'orientation originelle de M.*

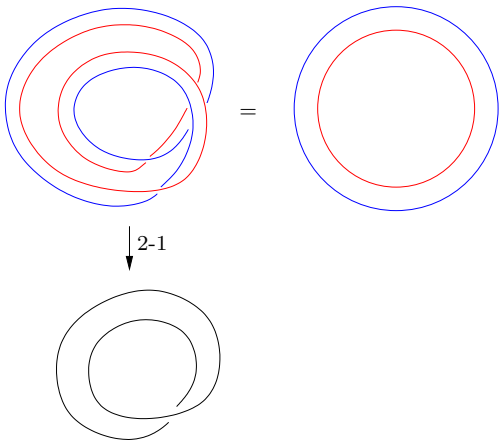
(3) Montrer que le ruban de Möbius n'est pas orientable.

(4) Montrer que l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est orientable.

(5) Montrer que l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.

(6) Montrer que toute variété M de classe C^∞ *admet un revêtement double (i.e. à deux feuillets) $\pi : \widetilde{M} \to M$ qui est orientable. Si M est connexe, et non orientable, montrer que ce revêtement est connexe et unique à isomorphisme de revêtements près, et qu'il existe une action libre de $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\widetilde{M}$ telle que la variété quotient $G\backslash\widetilde{M}$ soit* C^∞*-difféomorphe à M. (On l'appelle un* revêtement d'orientation *de M.)*

Exemples. (1) Le cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}_1$, identifié au quotient de $\mathbb{R}^2$ par l'action libre et propre du groupe $\mathbb{Z}$, où $1 \in \mathbb{Z}$ agit par $(x, y) \mapsto (x + 2, y)$, muni de sa projection naturelle sur le ruban de Möbius, est un revêtement d'orientation du ruban de Möbius.



(2) Pour tout n dans $\mathbb{N} - \{0\}$, la projection canonique $\mathbb{S}_{2n} \to \mathbb{P}_{2n}(\mathbb{R})$ est un revêtement d'orientation de l'espace projectif réel de dimension $2n$ par la sphère de dimension $2n$.

Proposition 6.37 *Soit M une variété* C^∞ *orientée de dimension n. Il existe une forme différentielle ω dans $\Omega^n(M)$, unique à multiplication près par une application* C^∞ *strictement positive sur M, telle que, pour toute carte orientée (U, φ) de M,*

$$(\varphi^{-1})^*(\omega_{|U}) = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où f est à valeurs strictement positives sur $\varphi(U)$.

Une telle forme ω sera appelée une *forme volume* de M.

Preuve. Soit $(U_i, \varphi_i)_{i\in I}$ un atlas de cartes C^∞ orienté de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et $(f_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i\in I}$. Pour tout i, on prolonge par 0 en dehors de U_i la forme différentielle $f_i{\varphi_i}^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$, et on pose

$$\omega = \sum_{i\in I} f_i{\varphi_i}^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \ .$$

Cette somme étant localement finie, elle définit une forme différentielle sur M. Il n'est pas difficile de montrer qu'elle convient et vérifie la propriété d'unicité de l'énoncé, par la formule du changement de variable local (lemme 6.36). L'unicité est facile à démontrer. $\square$

Remarques. Soit M une variété C^∞ de dimension n.

(1) La variété M est orientable si et seulement s'il existe une n-forme différentielle ω qui ne s'annule pas sur M.

En effet, si M est orientable, alors toute forme volume d'une orientation de M vérifie cette propriété de ne pas s'annuler sur M. Réciproquement, si ω est une n-forme différentielle ω ne s'annulant pas sur M, alors l'ensemble des cartes locales (U, φ) de M telles que $(\varphi^{-1})^*(\omega_{|U}) = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ où $f \in \mathrm{C}^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}_+^*)$, est un atlas de cartes C^∞ orienté maximal, par la formule de changement de variable. Le fait que les domaines de ces cartes recouvrent M vient du fait que, pour toute carte locale (U, φ) de M, sur l'ouvert $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$, toute n-forme différentielle ne s'annulant pas est de la forme $f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ où $f \in \mathrm{C}^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$ est de signe constant (sur chaque composante connexe de $\varphi(U)$), donc quitte à composer la carte φ par une réflexion (sur chaque composante connexe de U où $f \circ \varphi$ est négative), on obtient une carte de la bonne forme.

(2) La formule du changement de variable local (lemme 6.36) montre aussi que si M est munie d'une orientation et si ω est une forme volume sur M pour cette orientation, alors une carte locale (U, φ) de la variété C^∞ est orientée si et seulement si $(\varphi^{-1})^*(\omega_{|U}) = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ où f est à valeurs strictement positives sur $\varphi(U)$.

(3) L'application, qui à une orientation de M associe une de ses formes volumes, induit une bijection de l'ensemble des orientations de M dans l'ensemble des classes d'équivalence des n-formes différentielles ne s'annulant pas sur M, modulo multiplication par un élément de $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$. Si $\pi_0(M)$ est l'ensemble des composantes connexes de M, lorsque M est orientable, il y a donc une bijection entre l'ensemble des orientations de M et $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\pi_0(M)}$, puisqu'une application continue qui ne s'annule pas sur un connexe est ou bien partout strictement positive, ou bien partout strictement négative. En particulier, une variété C^∞ connexe admet 0 ou 2 orientations.

(4) Rappelons qu'une orientation d'un espace vectoriel réel E de dimension finie $n \geq 1$ est défini, de manière équivalente, comme le choix de l'une des deux classes de bases de E modulo l'action des automorphismes linéaires de déterminant strictement positif, ou comme le choix de l'un des deux éléments de $(\Lambda^n \check{E})/\mathbb{R}_+^*$. Si E et F sont des espaces vectoriels orientés, alors l'espace vectoriel orienté produit $E \times F$ est l'espace vectoriel produit, muni de l'orientation telle qu'une base obtenue en prenant une base positive de E suivie d'une base positive de F soit positive. Tout espace vectoriel orienté est naturellement une variété orientée, pour l'atlas orienté maximal contenant un isomorphisme linéaire de E dans $\mathbb{R}^n$ préservant l'orientation.

Si M est orientée, alors l'espace tangent en chaque point de M est orienté, de sorte qu'une carte locale (U, φ) de M soit orientée si et seulement si $T_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ préserve l'orientation pour tout x dans U.

Orienter une variété M revient à trouver une orientation (localement) cohérente des espaces tangents. Plus précisément, M est orientable si et seulement s'il existe une orientation de l'espace tangent en tout point de M, telle que pour toute carte locale (U, φ) de M, l'isomorphisme linéaire $T_x\varphi : T_xM \to \mathbb{R}^n$ préserve l'orientation pour tout x dans U : l'ensemble des telles cartes locales est un atlas orienté.

Si M_1, M_2 sont deux variétés orientées C^∞, et si $M = M_1 \times M_2$ est la variété orientée produit, alors, pour tout (x, y) dans M, l'orientation de l'espace vectoriel $T_{(x,y)}M$ est l'orientation produit $T_xM_1 \times T_yM_2$ des orientations des espaces vectoriels T_xM_1 et T_yM_2.

(5) La variété TM est toujours orientable, car l'atlas de cartes C^∞ de TM associé à un atlas de cartes C^∞ de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (par la construction du paragraphe 3.3) est un atlas de cartes C^∞ orienté à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ (voir l'exercice E.154).

Exemples. (1) La sphère $\mathbb{S}_n$ est orientable. En effet, si

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i \, dx_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \ ,$$

alors σ est (en restriction à $\mathbb{S}_n$) une forme volume sur $\mathbb{S}_n$, car si $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $T_x\mathbb{S}_n$ (identifié à $x^\perp$), alors

$$\sigma_x(v_1, \ldots, v_n) = \det(x, v_1, \ldots, v_n) \neq 0 \ .$$

En fait, si

$$X = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

est le champ de vecteurs normal sortant sur $\mathbb{S}_n$, et si $\omega = dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$, alors

$$\sigma = i_X\omega \ .$$

(2) L'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est orientable (voir l'exercice E.142 (4)).

(3) Toute variété M de classe C^∞ parallélisable est orientable. En effet, (la dimension n de M a été supposée non nulle) le fibré tangent de M est isomorphe à $M \times \mathbb{R}^n$, donc son fibré des formes n-linéaires alternées est isomorphe à $M \times \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$, et si ω est une n-forme alternée non nulle sur $\mathbb{R}^n$, alors $x \mapsto (x, \omega)$ est une n-forme différentielle C^∞ sur M, qui ne s'annule pas, donc est une forme volume.

En particulier, tout groupe de Lie G est orientable. De plus, en supposant la dimension n de G non nulle, si ω est une forme n-linéaires alternée non nulle sur l'algèbre de Lie de G, alors

$$g \mapsto \omega_g = (T_eL_g)^*\omega$$

est une n-forme différentielle C^∞ sur G, qui est une forme volume de G.

(4) La surface compacte connexe, somme connexe de $g \geq 1$ tores $\mathbb{T}^2$, est orientable. En effet, le tore $\mathbb{T}^2$ est orientable, par exemple car parallélisable, ou car quotient de la variété orientée $\mathbb{R}^2$ par le groupe $\mathbb{Z}^2$ agissant librement et proprement en préservant l'orientation (voir l'exercice E.142 (2)). On applique alors l'exemple (5) précédant l'exercice E.142.

• **Intégration de formes différentielles.**

Proposition 6.38 *Soit M une variété C^∞ orientée, de dimension $n \geq 1$. Il existe une unique forme linéaire $\int_M : \Omega_c^n(M) \to \mathbb{R}$ telle que, pour toute carte orientée (U, φ) de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et pour tout ω dans $\Omega_c^n(U)$,*

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega \ .$$

Preuve. Soient $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de cartes C^∞ orienté de M, et $(f_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i \in I}$. Comme pour tout ω dans $\Omega_c^n(M)$, on a $\omega = \sum_{i \in I} f_i \omega$ où $f_i \omega \in \Omega_c^n(U_i)$, on doit avoir par linéarité

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i)} (\varphi_i^{-1})^* (f_i \omega) \ .$$

En particulier, ceci montre l'unicité. Cette formule permet aussi de définir une forme linéaire $\int_M$. Le fait qu'elle vérifie la propriété voulue découle de la formule de changement de variables pour les ouverts de $\mathbb{R}^n$ (voir le lemme 6.36). En effet, si $\omega \in \Omega_c^n(U)$, alors

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(U_i \cap U)} (\varphi_i^{-1})^* (f_i \omega) = \sum_{i \in I} \int_{\varphi(U_i \cap U)} (\varphi^{-1})^* (f_i \omega) =$$

$$\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* (\sum_{i \in I} f_i \omega) = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega \ .$$

□

Remarques. (1) Cette forme linéaire $\int_M$ dépend de l'orientation de M. Si M est connexe, et si $-M$ est la variété M munie de l'orientation différente, dite *opposée*, alors

$$\int_{-M} = -\int_M \ .$$

(2) Si U est un ouvert de M, muni de l'orientation induite, alors, pour tout ω dans $\Omega_c^n(M)$, si le support de ω est contenu dans U, alors

$$\int_M \omega = \int_U \omega_{|U} \ .$$

(3) Si $(M_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable de variétés orientées C^∞, et $M = \coprod_{i \in I} M_i$ la variété orientée somme disjointe, alors pour tout ω dans $\Omega_c^n(M)$, le support de ω ne rencontre qu'un nombre fini de M_i, et

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{M_i} \omega_{|M_i} \ .$$

(4) Si $\varphi : M \to N$ est un C^∞-difféomorphisme préservant l'orientation entre variétés C^∞ orientées, alors, par unicité, pour tout ω dans $\Omega_c^n(N)$, on a la *formule de changement de variable globale* pour l'intégration des formes différentielles

$$\int_M \varphi^* \omega = \int_N \omega \ .$$

(5) Pour tout borélien B de M, on définit de même la forme linéaire $\int_B$ comme l'unique forme linéaire sur l'espace vectoriel des n-formes différentielles C^∞ dont l'intersection du support avec B est contenue dans un compact, telle que, pour toute telle forme différentielle ω et toute carte locale orientée (U, φ) telle que l'intersection du suppport de ω avec B soit contenue dans un compact de U, on ait $\int_B \omega = \int_{\varphi(U\cap B)} (\varphi^{-1})^*\omega$. Lorsque U est un ouvert de M, on a $\int_U \omega = \int_U \omega_{|U}$ pour tout ω à support compact dans U. En particulier, si $\omega \in \Omega_c^n(M)$, alors $B \mapsto \int_B \omega$ est une mesure de Radon (borélienne, réelle, régulière) finie, positive si ω est une forme volume de la variété orientée M.

(6) Une partie A d'une variété N de classe C^1 est dite *de mesure nulle* si pour toute carte locale (U, φ) de N à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, la partie $\varphi(A \cap U)$ est de mesure nulle. Comme les difféomorphismes C^1 entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ préservent les ensembles de mesure nulle, il suffit de le vérifier pour une famille de cartes locales de N dont les domaines recouvrent A.

Si A est une partie de mesure nulle d'une variété C^∞ orientée M, alors pour tout ω dans $\Omega_c^n(M)$, on a $\int_A \omega = 0$.

(7) Si la variété $\mathbb{R}$ est munie de l'orientation usuelle, alors pour tous $a < b$ et tout $\omega = f\,dt$ dans $\Omega^1(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t)dt \ .$$

Remarque. Si $n = 0$, on définit une *orientation* de M comme une application $\varepsilon : M \to \{\pm 1\}$. L'intégration sur une variété orientée de dimension 0, et d'orientation $\varepsilon : M \to \{\pm 1\}$, est définie en posant, pour tout $\omega \in \Omega_c^0(M)$,

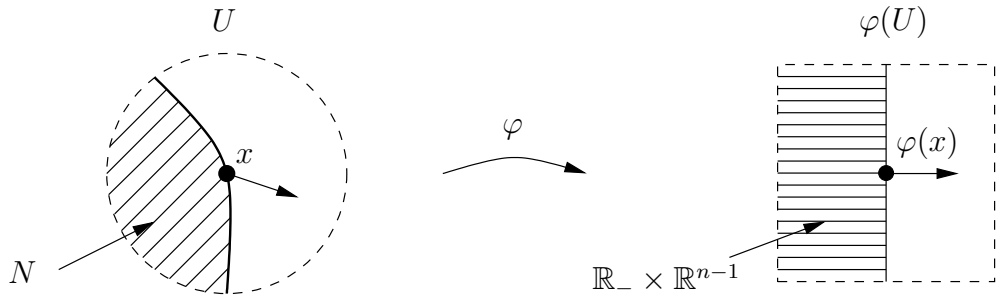
$$\int_M \omega = \sum_{x \in M} \varepsilon(x)\omega(x) \ .$$

• **Le théorème de Stokes.**

On note $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$. Soit M une variété C^∞ de dimension $n \geq 1$.

Une partie N de M est un *domaine à bord lisse* ou *domaine régulier* (ou une *sous-variété fermée* C^∞ *à bord, de codimension* 0) si pour tout point x de M, il existe une carte locale (U, φ) de classe C^∞ de M en x à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\varphi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi(U)$.

Un domaine à bord lisse de M est fermé dans M (car on demande la propriété ci-dessus pour tout point x de M, et pas seulement pour tout point x de N). La frontière $\partial N = N \cap \overline{{}^cN}$ de N dans M est aussi appelée le *bord* de N. Si x est un point de ∂N, alors le dessin à avoir en tête est le suivant :



Proposition 6.39 *Soit M une variété C^∞ de dimension $n \geq 1$, et N un domaine à bord lisse de M.*

(1) Le bord ∂N de N est une sous-variété C^∞ de codimension 1 de M.

(2) Si M est orientée et si $n \geq 2$, alors il existe une unique orientation sur ∂N telle que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

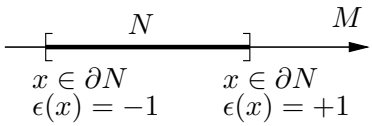
(i) en posant $\mathrm{pr} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n)$, *si (U, φ) est une carte locale orientée de M en $x \in \partial N$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\varphi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi(U)$, alors le couple $(U \cap \partial N, \mathrm{pr} \circ \varphi)$ est une carte locale orientée de ∂N ;*

(ii) pour tout x dans ∂N, si $(v_2, \ldots, v_n)$ est une base orientée de $T_x \partial N$, et si v_1 est un vecteur tangent en x à M pointant vers l'extérieur (i.e. $v_1 = \dot{c}(0)$ où $c :]-\epsilon, +\epsilon[\to M$ de classe C^∞, avec $c(0) = x$, $\dot{c}(0) \notin T_x N$ et $c(t) \notin N$ si $t > 0$), alors $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une base orientée de $T_x M$.

L'orientation de ∂N ci-dessus est appelée l'*orientation par la direction sortante* (ou *normale sortante*). Sauf mention explicite du contraire, le bord de tout domaine à bord lisse d'une variété C^∞ orientée sera muni de cette orientation.

Exemple : Nous le savions déjà, mais la sphère $\mathbb{S}_n$ et la surface compacte connexe, somme connexe de $g \geq 0$ tores $\mathbb{T}^2$, sont orientables, car frontières de domaines réguliers.

Remarque. Si M est orientée et si $n = 1$, alors la définition (ii) a encore un sens : il existe une unique orientation sur la variété ∂N de dimension 0 telle que si (U, φ) est une carte locale orientée de M en $x \in \partial N$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (avec U suffisamment petit), alors la valeur en x de l'orientation de ∂N est, par définition, $+1$ si au voisinage de $\varphi(x)$, l'image $\varphi(U \cap N)$ est contenue dans $]-\infty, \varphi(x)]$.



Preuve de la proposition 6.39. (1) Pour tout point x de ∂N, soit (U, φ) une carte locale de M en x à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\varphi(U \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi(U)$. Alors $\varphi(U \cap \partial N) = (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi(U)$, ce qui montre le résultat (par la définition locale par redressement d'une sous-variété, voir le théorème 2.5).

(2) Ceci découle du fait que si un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ préservant l'orientation, préserve un demi-espace, alors sa restriction au bord du demi-espace préserve l'orientation de ce demi-espace définie par le vecteur sortant du demi-espace. □

Pour motiver le résultat suivant, rappelons le *théorème fondamental de l'intégration.* Un intervalle compact $N = [a, b]$ est un domaine à bord lisse de la variété orientée $M = \mathbb{R}$ de dimension $n = 1$. Une forme différentielle ω de degré $n - 1 = 0$ sur $\mathbb{R}$ est une fonction $\omega : t \mapsto \omega(t)$ de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et sa différentielle extérieure $d\omega$ s'écrit donc $\omega'(t)\, dt$. Le théorème fondamental de l'intégration $\int_a^b \omega'(t)\, dt = \omega(b) - \omega(a)$ s'écrit donc

$$\int_N d\omega = \int_{\partial N} i^* \omega \ .$$

Théorème 6.40 (Formule de Stokes) *Soit M une variété C^∞ orientée de dimension $n \geq 1$. Soit N un domaine à bord lisse de M, et $i : \partial N \to M$ l'inclusion. Pour toute $(n-1)$-forme différentielle ω de classe C^∞ sur M dont l'intersection du support avec N est compacte, on a*

$$\int_{\partial N} i^* \omega = \int_N d\omega \ .$$

Nous noterons $\int_{\partial N} \omega = \int_{\partial N} i^*\omega$ par abus (ω est une $(n-1)$-forme différentielle). Puisque N est un borélien de M, le nombre $\int_N d\omega$ a été défini dans la remarque (5) précédente.

Preuve. Supposons tout d'abord que $M = \mathbb{R}^n$ et $N = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$. Une $(n-1)$-forme différentielle ω s'écrit $\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} f_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$. Donc

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ .$$

En appliquant le théorème de Fubini à l'intégrale $\int_N d\omega$, on obtient

$$\int_N d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \, dx_1 \right) dx_2 \ldots dx_n \ + \sum_{i=2}^n \int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_i \right) dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n \ .$$

Comme f_k est à support compact en restriction à N, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx_i = 0$ pour $2 \leq i \leq n$, et $\int_{-\infty}^0 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \, dx_1 = f_1(0, x_2, \ldots, x_n)$. Comme $i^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n) = 0$ si $i \neq 1$ (car x_1 est constant sur ∂N), on a

$$\begin{aligned} \int_{\partial N} \omega &= \int_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} i^* \left(\sum_{i=1}^n f_i \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_n) \, dx_2 \ldots dx_n = \int_N d\omega \ . \end{aligned}$$

Maintenant, soit ω comme dans l'énoncé. Par compacité du support de ω dans N, il existe un atlas de cartes C^∞ orienté $(U_j, \varphi_j)_{j \in I}$ de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, tel que

$$\varphi_j(U_j \cap N) = (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap \varphi_j(U_j) \ ,$$

et $(f_j)_{j \in I}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $(U_j)_{j \in I}$, tels que la somme

$$\omega = \sum_{j \in I} f_j \omega$$

n'ait qu'un nombre fini de termes non identiquement nuls sur N.

Posons $\alpha_j = (\varphi_j^{-1})^*(f_j \omega_{|U_j})$, qui, prolongée par 0 en dehors de $\varphi_j(U_j)$, est une $(n-1)$-forme différentielle C^∞ dans $M' = \mathbb{R}^n$, dont l'intersection du support avec $N' = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$ est compact. Notons que $\varphi_{j|\partial N}$ est un C^∞-difféomorphisme, préservant les orientations par les directions sortantes, de l'ouvert $\partial N \cap U_j$ de ∂N sur son ouvert image dans $\partial N'$. Notons que α_j est nulle au voisinage de tout point de $\partial N'$ qui n'est pas dans $\varphi_j(\partial N \cap U_j)$ et que $i^*(f_j \omega)$ est à support dans $\partial N \cap U_j$. Donc (avec l'abus de notation mentionné ci-dessus), par la formule de changement de variable globale,

$$\int_{\partial N} (f_j \omega) = \int_{\partial N'} \alpha_j \ .$$

Comme φ_j préserve l'orientation, et comme φ_j^* commute avec la différentielle, on a, par la formule de changement de variable globale,

$$\int_N d(f_j \omega) = \int_{N'} d\alpha_j \ .$$

Par sommation, le résultat découle donc du cas particulier traité en premier. $\square$

Porisme 6.41 *Soit M une variété C^∞ orientée de dimension $n \geq 1$. Pour tout $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$, on a*

$$\int_M d\omega = 0 \ .$$

Preuve. La partie M de M est un domaine à bord lisse, dont le bord est vide. La formule de Stokes permet alors de conclure. □

Exemples. (1) Soit D un domaine à bord lisse, compact, de $\mathbb{R}^2$, U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant D et $\alpha = Pdx + Qdy$ une 1-forme différentielle C^∞ sur U. Alors la formule de Stokes donne

$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy \ .$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Green-Riemann.*

(2) Soit D un domaine à bord lisse, compact, de $\mathbb{R}^3$, U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant D et $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Si X est un champ de vecteurs C^∞ sur U, alors $i_X\omega$ est une 2-forme différentielle C^∞ sur U, et

$$d(i_X\omega) = \mathcal{L}_X\omega = (\mathrm{div}\ X)\ \omega$$

par le paragraphe 6.1. Alors la formule de Stokes donne $\int_{\partial D} i_X\omega = \int_D (\mathrm{div}\ X)\ \omega$, c'est-à-dire, si $X = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y} + R\frac{\partial}{\partial z}$,

$$\int_{\partial D} (P\ dy \wedge dz + Q\ dz \wedge dx + R\ dx \wedge dy) = \int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx\,dy\,dz \ .$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule de Gauss-Ostrogradski.*

Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^3$. Soit N le champ de vecteurs unitaires normal sortant sur ∂D, étendu de n'importe quelle manière C^∞ à $\mathbb{R}^3$, et $j : \partial D \to \mathbb{R}^3$ l'inclusion. On appelle *forme d'aire* de ∂D la 2-forme différentielle sur ∂D définie par

$$\sigma = j^*(i_N(dx \wedge dy \wedge dz)) \ .$$

On définit le *flux* du champ de vecteurs X à travers ∂D par

$$\mathrm{flux}_{\partial D}(X) = \int_{\partial D} \langle X, N \rangle \sigma \ .$$

Comme ω est une 3-forme différentielle, elle est nulle en restriction à tout sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace tangent en un point. En écrivant le champ de vecteurs X le long de ∂D comme somme d'un champ de vecteurs $\langle X, N \rangle N$ colinéaire au champ normal N et d'un champ de vecteurs tangent à ∂D, on obtient $j^*(i_X(dx \wedge dy \wedge dz)) = \langle X, N \rangle \sigma$. La formule d'Ostrogradski pour le champ de vecteurs X s'écrit donc

$$\mathrm{flux}_{\partial D}(X) = \int_D (\mathrm{div}\ X)\ dx\,dy\,dz \ .$$

(3) Soit S un domaine à bord lisse, compact, d'une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$, et C le bord de S. Soit X un champ de vecteurs C^∞ sur (un voisinage ouvert de S dans)

$\mathbb{R}^3$, et $X^\perp$ la 1-forme différentielle (sur ce voisinage) définie avant l'exercice E.138. Alors $d(X^\perp) = i_{\mathrm{rot}\ X}(dx \wedge dy \wedge dz)$ par cet exercice. La formule de Stokes donne donc

$$\int_C X^\perp = \int_S i_{\mathrm{rot}\ X}(dx \wedge dy \wedge dz) \ .$$

Cette formule est connue sous le nom de *formule d'Ampère-Stokes* (le flux du rotationnel du champ magnétique à travers n'importe quelle surface plongée de bord C est indépendant de cette surface).

• **Régularité.**

Concluons cette partie par une remarque sur la régularité. Dans le lemme 6.36, on peut prendre ω de classe C^0, et φ un C^1-difféomorphisme. Les définitions d'orientation des variétés sont valables en classe C^1. La proposition 6.37 est vraie pour M de classe C^1, la forme volume ω étant alors C^0, et unique à multiplication près par une fonction continue strictement positive. Les remarques (1), (2), (3), (4) suivant cette proposition sont valables en C^1, et la remarque (5) en C^2. La proposition 6.38 est vérifiée avec M de classe C^1, et les formes différentielles C^0, ainsi que les remarques (1) à (6) qui suivent (en demandant une régularité C^1 pour φ dans (4)). La définition de domaine à bord lisse et la proposition 6.39 sont valables en remplaçant C^∞ par C^1. La formule de Stokes est vraie au moins lorsque M et N sont C^2, et lorsque ω est C^1. Pour les formules de Green-Riemann et d'Ostrogradski, des hypothèses de régularité C^1 sur P, Q, R et C^1 par morceaux sur le domaine D suffisent.

6.4 Cohomologie à support compact

Soit M une variété C^∞ de dimension $n \geq 0$.

La différentielle extérieure d préserve la sous-algèbre (associative, mais pas unitaire si M est non compact) anticommutative, graduée $\Omega_c(M)$ des formes différentielles à support compact dans M. Le noyau de

$$d : \Omega_c(M) \to \Omega_c(M)$$

est noté $Z_c^*(M)$ et son image $B_c^*(M)$. On pose $Z_c^p(M) = Z_c^*(M) \cap \Omega_c^p(M)$ et $B_c^p(M) = B_c^*(M) \cap \Omega_c^p(M)$. Alors $Z_c^*(M)$ est une sous-algèbre de $\Omega_c(M)$, somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des $Z_c^p(M)$ pour p dans $\mathbb{N}$, et $B_c^*(M)$ est un idéal bilatère de $Z_c^*(M)$, somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des $B_c^p(M)$ pour p dans $\mathbb{N}$.

Donc

$$H_c^*(M) = Z_c^*(M)/B_c^*(M)$$

est une algèbre (associative, mais pas unitaire si M est non compact) anticommutative, graduée par

$$H_c^*(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} H_c^p(M) \ ,$$

où

$$H_c^p(M) = Z_c^p(M)/B_c^p(M) \ .$$

L'algèbre $H_c^*(M)$ s'appelle *l'algèbre* (ou parfois l'espace) *de cohomologie de de Rham à support compact* de M, et l'espace vectoriel réel $H_c^p(M)$ le p-ème espace (ou parfois le p-ème groupe) de *cohomologie de de Rham à support compact* de M.

Comme $\Omega_c^p(M) = \{0\}$ si $p > n$ ou $p < 0$, on a $H_c^p(M) = 0$ si $p > n$ ou $p < 0$. Comme $d : \Omega_c^{-1}(M) \to \Omega_c^0(M)$ est l'application nulle, on a $H_c^0(M) = Z_c^0(M)$.

Remarques. (1) Si M est compacte, alors $\Omega_c(M) = \Omega(M)$, donc $H_c^*(M) = H^*(M)$.

(2) Si M est la variété somme disjointe $M = \coprod_{i\in I} M_i$, comme une forme différentielle à support compact sur M ne rencontre qu'un nombre fini de composantes connexes de M, alors on a un isomorphisme naturel d'algèbres graduées

$$H_c^*(M) \simeq \bigoplus_{i\in I} H_c^*(M_i) \ ,$$

et des isomorphismes naturels d'espaces vectoriels $H_c^p(M) \simeq \bigoplus_{i\in I} H_c^p(M_i)$ (noter le symbole somme et non plus produit).

(3) Une application constante non nulle est à support compact si et seulement si son domaine de définition est compact. Donc, si $\pi_{0,c}M$ est l'ensemble des composantes connexes compactes de M, alors

$$H_c^0(M) \simeq \mathbb{R}^{(\pi_{0,c}M)} \ .$$

(Si E est un ensemble, on ne confondra pas l'espace vectoriel produit $\mathbb{R}^E$ et l'espace vectoriel somme $\mathbb{R}^{(E)}$ des applications $f : E \to \mathbb{R}$ ne prenant une valeur non nulle qu'en un nombre fini d'éléments de E : toutefois $\mathbb{R}^E$ et $\mathbb{R}^{(E)}$ coïncident si E est fini.)

En particulier $H_c^0(M) = \{0\}$ si M est connexe non compacte.

Rappelons (voir l'appendice A.1) qu'une application entre deux espaces topologiques localement compacts est propre si l'image réciproque de tout compact est compacte.

Soient N une variété C^∞ et $f : M \to N$ une application C^∞ propre. Comme le support de $f^*\omega$ est l'image réciproque par f du support de ω, on a

$$f^*(\Omega_c(N)) \subset \Omega_c(M) \ .$$

Comme $f^* \circ d = d \circ f^*$, on a

$$f^*(Z_c^*(N)) \subset Z_c^*(M) \quad \text{et} \quad f^*(B_c^*(N)) \subset B_c^*(M) \ .$$

Donc le morphisme d'algèbres graduées $f^* : \Omega_c(N) \to \Omega_c(M)$ induit un morphisme d'algèbres graduées, encore noté f^*, entre les algèbres de cohomologie de de Rham à support compact de N et de M :

$$\begin{array}{rccc} f^* \ : & H_c^*(N) & \longrightarrow & H_c^*(M) \\ & [\alpha] & \mapsto & [f^*\alpha] \end{array} \ .$$

Comme pour les images réciproques des formes différentielles, on a $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, et si P est une variété C^∞ et $g : N \to P$ est une application C^∞ propre, alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \ .$$

Donc l'association $H_{\mathrm{DR},c}^*$, à une variété M de l'algèbre $H_c^*(M)$, et à une application $f : M \to N$ du morphisme $f^* : H_c^*(N) \to H_c^*(M)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des variétés C^∞ et des applications C^∞ propres, dans la catégorie des algèbres graduées (associatives, mais pas forcément unitaires) anticommutatives. En particulier, si $f : M \to N$ est un C^∞-difféomorphisme, alors $f^* : H_c^*(N) \to H_c^*(M)$ est un isomorphisme d'algèbres graduées, et

$$(f^*)^{-1} = (f^{-1})^* \ .$$

Porisme 6.42 *Si deux variétés* C^∞ *sont* C^∞*-difféomorphes, alors leurs algèbres graduées de cohomologie de de Rham à support compact sont isomorphes.* □

• **Invariance par homotopie.**

Soient M et N deux variétés C^∞, et f et g deux applications C^∞ propres de M dans N.

Les applications f et g sont dites *proprement différentiablement homotopes* s'il existe $h : M \times \mathbb{R} \to N$, une homotopie C^∞ de f à g, qui est propre en restriction à $M \times [0,1]$. La relation « être proprement différentiablement homotopes » est une relation d'équivalence.

Théorème 6.43 *Si f et g sont deux applications* C^∞ *proprement différentiablement homotopes, alors $f^* = g^* : H_c^*(N) \to H_c^*(M)$.*

Comme dans la preuve du théorème 6.14, ce résultat découle de la proposition suivante. Notons $\Omega_\kappa(M \times \mathbb{R})$ la sous-algèbre des formes différentielles sur $M \times \mathbb{R}$ dont la projection du support sur M est compacte.

Proposition 6.44 *Il existe une application $K : \Omega_\kappa(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_c(M)$ linéaire, graduée de degré -1, i.e. $K(\Omega_\kappa^p(M \times \mathbb{R})) \subset \Omega_c^{p-1}(M)$, telle que*

$$d \circ K + K \circ d = J_1^* - J_0^* \ .$$

La preuve de ce résultat est analogue à celle de la proposition 6.15, en prenant U un ouvert relativement compact de $\mathbb{R}^n$ et $(U_i)_{i \in I}$ des ouverts relativement compacts de M.

Le théorème d'approximation 6.16 de fonctions continues par des applications C^∞ s'étend aux applications propres.

Théorème 6.45 *(1) Toute application continue propre de M dans N est proprement homotope (au sens de l'appendice A.4) à une application* C^∞ *propre de M dans N.*

(2) Deux applications C^∞ *propres de M dans N, qui sont proprement homotopes, sont proprement différentiablement homotopes.*

Preuve. Voir par exemple [God]. □

Soit $f : M \to N$ une application continue propre. Si $\overline{f} : M \to N$ est une application C^∞ propre, proprement homotope à f, alors l'application $\overline{f}^* : H_c^*(N) \to H_c^*(M)$ ne dépend pas du choix de $\overline{f}$, et sera notée

$$f^* : H_c^*(N) \to H_c^*(M) \ .$$

Si f et g sont deux applications continues propres, alors on a encore

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \ .$$

Ceci montre l'invariance topologique de l'algèbre de cohomologie de de Rham : si deux variétés C^∞ sont homéomorphes, alors leurs algèbres graduées de cohomologie de de Rham à support compact sont isomorphes.

• **Suite exacte de Mayer-Vietoris.**

La restriction à un ouvert de son domaine d'une forme différentielle à support compact n'est pas forcément à support compact. Par contre, les formes différentielles à support compact peuvent s'étendre par 0 sur un ouvert contenant leur domaine. Ceci explique le changement de sens dans la suite exacte de Mayer-Vietoris à support compact ci-dessous par rapport à la suite de Mayer-Vietoris précédente.

Soient M une variété C^∞, et U, V deux ouverts de M recouvrant M. Notons alors $\underline{i}_c : \Omega_c(U \cap V) \to \Omega_c(U)$, $\underline{j}_c : \Omega_c(U \cap V) \to \Omega_c(V)$, $i_c : \Omega_c(U) \to \Omega_c(M)$ et $j_c : \Omega_c(V) \to \Omega_c(M)$ les applications d'extension par 0 des formes différentielles à support compact. Ces applications d'extension commutent avec les différentielles extérieures, donc envoient formes fermées sur formes fermées, et formes exactes sur formes exactes. On note

$$I : \Omega_c(U \cap V) \to \Omega_c(U) \times \Omega_c(V)$$

l'application $\omega \mapsto (\underline{i}_c\, \omega, \underline{j}_c\, \omega)$, et I^* l'application $H_c^*(U \cap V) \to H_c^*(U) \times H_c^*(V)$ induite en cohomologie à support compact. On note

$$J : \Omega_c(U) \times \Omega_c(V) \to \Omega_c(M)$$

l'application $(\omega, \omega') \mapsto i_c\, \omega - j_c\, \omega'$, et J^* l'application $H_c^*(U) \times H_c^*(V) \to H_c^*(M)$ induite en cohomologie à support compact.

Théorème 6.46 *La suite*

$$0 \longrightarrow \Omega_c(U \cap V) \xrightarrow{I} \Omega_c(U) \times \Omega_c(V) \xrightarrow{J} \Omega_c(M) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de complexes de cochaînes, qui induit une suite exacte longue d'espaces vectoriels réels, dite suite exacte de Mayer-Vietoris à support compact *de M,*

$$\ldots \longrightarrow H_c^{k-1}(M) \xrightarrow{\delta} H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{I^*} H_c^k(U) \times H_c^k(V) \xrightarrow{J^*} H_c^k(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{k+1}(U \cap V) \longrightarrow \ldots .$$

Preuve. L'application linéaire I est injective, car $\underline{i}_c$ l'est. On a $J \circ I = 0$, car $i_c \circ \underline{i}_c = j_c \circ \underline{j}_c$. Si $(\omega, \omega') \in \Omega_c(U) \times \Omega_c(V)$ vérifie $J(\omega, \omega') = 0$, alors ω est nulle en dehors du support de ω', ω' est nulle en dehors du support de ω, et $\omega = -\omega'$ sur l'intersection des supports de ω et de ω', qui est un compact de $U \cap V$. Donc $(\omega, \omega') = I(\omega'')$ où ω'' est la restriction de $\omega = -\omega'$ sur $U \cap V$. Enfin, l'application linéaire J est surjective, car si $\{\varphi, \psi\}$ est une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement $\{U, V\}$ (voir la proposition 2.9), si $\omega \in \Omega_c(M)$, alors $(\varphi\omega)_{|U} \in \Omega_c(U), (\psi\omega)_{|V} \in \Omega_c(V)$ et

$$J((\varphi\omega)_{|U}, (\psi\omega)_{|V}) = \varphi\omega + \psi\omega = \omega\ .$$

La dernière assertion du théorème découle de la première, comme dans la preuve du théorème 6.19. □

Le résultat suivant se démontre alors exactement comme le corollaire 6.21.

Porisme 6.47 *Soit M une variété C^∞, munie d'un recouvrement ouvert $\{U, V\}$. Si les espaces vectoriels $H_c^*(U)$, $H_c^*(V)$ et $H_c^*(U \cap V)$ sont de dimension finie, alors $H_c^*(M)$ est de dimension finie.* □

6.5 Dualité de Poincaré

Nous commençons cette partie par un cas particulier du théorème de dualité de Poincaré, qui sera utile pour sa preuve.

Lemme 6.48 *Pour tout $n \geq 1$, l'intégration $\int_{\mathbb{R}^n} : \Omega_c^n(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ induit un isomorphisme linéaire*

$$H_c^n(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$$

défini par

$$[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega \ ,$$

et on a

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Preuve. Cette application est bien définie par le corollaire 6.41. La linéarité et la surjectivité sont immédiates. Soit $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$. Montrons que ω est exacte si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0$. Ceci implique que l'application $[\omega] \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \omega$ est injective.

Toute n-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\omega = f \ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ .$$

Toute $(n-1)$-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i \ dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n \ ,$$

et sa différentielle est

$$d\eta = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \ .$$

Il suffit donc de montrer que pour tout $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f \ dx_1 \ldots dx_n = 0$, pour tout i, il existe $f_i \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tels que $f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$.

Pour cela, on raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, il suffit de poser $f_1(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt$, qui est bien nulle au voisinage de $\pm\infty$.

Supposons le résultat vrai pour $n-1$. Posons

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \, dt \ .$$

Alors $g \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ et par le théorème de Fubini, $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g \ dx_1 \ldots dx_{n-1} = 0$. Donc par l'hypothèse de récurrence, il existe $g_i \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ tels que $g = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$. Soit $\rho \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$. Posons $f_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = g_i(x_1, \ldots, x_{n-1})\rho(x_n)$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et

$$f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} (f(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) - g(x_1, \ldots, x_{n-1})\rho(t)) \ dt \ .$$

On vérifie que les f_i sont C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^n$, et que $f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$. La première affirmation du lemme 6.48 en découle.

Maintenant, le calcul de $H_c^k(\mathbb{R}^n)$ est connu pour $k \leq 0$ et $k \geq n$. On peut donc supposer $1 \leq k \leq n-1$. On identifie $\mathbb{R}^n$ (par la projection stéréographique, par exemple) avec le complémentaire dans la sphère $\mathbb{S}_n$ du pôle nord N. Alors les formes différentielles à support compact sur $\mathbb{R}^n$ s'identifient avec les formes différentielles sur $\mathbb{S}_n$ nulles au voisinage de N, ceci de manière compatible avec les différentielles extérieures. Si $\alpha \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ est fermée, par le calcul des groupes de cohomologie de de Rham de $\mathbb{S}_n$, il existe une $(k-1)$-forme différentielle β sur $\mathbb{S}_n$, telle que $d\beta = \alpha$. En particulier, $d\beta = 0$ au voisinage de N. Si $k = 1$, alors β est une fonction constante égale à c sur un voisinage de N, et $\alpha = d(\beta - c)$, avec $\beta - c$ une $(k-1)$-forme différentielle nulle sur un voisiange de N. Si $k \geq 2$, il existe donc, sur un voisinage ouvert U de N homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, une $(k-2)$-forme différentielle γ sur U telle que $\beta_{|U} = d\gamma$. À l'aide d'une fonction plateau, on construit une forme différentielle γ' sur $\mathbb{S}_n$ telle que γ' et γ coïncident au voisinage de N. Alors $\beta - d\gamma'$ est nulle au voisinage de l'infini, donc définit un élément de $\Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\alpha = d(\beta - d\gamma')$. □

Soit M une variété C^∞ de dimension $n \geq 1$. Un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de M est dit *à intersections cellulaires* si pour toute partie J de I, l'intersection $\bigcap_{j \in J} U_j$ est vide ou homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Le résultat technique suivant sera bien utile.

Proposition 6.49 *Toute variété* C^∞ *compacte M admet au moins un recouvrement ouvert fini à intersections cellulaires.*

Preuve. Soit $x \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ une application qui à un point x de M associe un produit scalaire sur T_xM, telle que, pour tous les champs de vecteurs X, Y de classe C^∞ sur M, l'application $x \mapsto \langle X(x), Y(y) \rangle_x$ soit C^∞. (Une telle application est une section C^∞ du fibré C^∞ des formes bilinéaires symétriques sur les espaces tangents de M, que l'on construit comme le fibré des formes alternées sur les espaces tangents de M (voir le paragraphe 3.7), et qui de plus est définie positive sur chaque espace tangent). L'existence d'une telle application est immédiate sur une carte locale, et par partition de l'unité, l'existence globale en découle. Une autre manière est de plonger M dans $\mathbb{R}^m$ pour m assez grand (voir le théorème 2.19) et de prendre pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ la restriction à T_xM du produit scalaire de $\mathbb{R}^m$. Nous noterons $||v||_x = \langle v, v \rangle_x$ la norme associée sur T_xM.

Pour toute courbe $\gamma : [0,1] \to M$ de classe C^1 par morceaux, posons

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 ||\dot{\gamma}(t)||_{\gamma(t)} \, dt \, .$$

Pour tous x, y dans M, notons $d(x,y)$ la borne inférieure des $\ell(\gamma)$ pour $\gamma : [0,1] \to M$ une courbe de classe C^1 par morceaux entre x et y. Alors d vérifie l'inégalité triangulaire, et est symétrique. De plus, par continuité du produit scalaire, d ne s'annule que sur la diagonale de $M \times M$. Donc d est une distance.

Pour toute carte locale (U, φ) de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, et tout dans U, si $\epsilon > 0$ est assez petit, alors, par convexité stricte des boules d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie, et par un argument de continuité, l'image $\varphi(B(x, \epsilon))$ est un convexe de $\mathbb{R}^n$. Comme l'intersection de convexes est un convexe, un argument de compacité permet alors de conclure. □

Proposition 6.50 *Soit M une variété C^∞, admettant un recouvrement ouvert fini à intersections cellulaires. Alors l'algèbre de cohomologie de de Rham de M est de dimension finie, et l'algèbre de cohomologie de de Rham à support compact de M est de dimension finie.*

Preuve. Notons que l'algèbre de cohomologie de de Rham de $\mathbb{R}^n$, qui est $\mathbb{R}$, est de dimension finie. Par récurrence sur le cardinal d'un tel recouvrement, la première assertion découle du lemme 6.21. La même preuve fournit la seconde assertion, en utilisant cette fois le lemme 6.48 qui implique que l'algèbre de cohomologie de de Rham à support compact de $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, ainsi que le corollaire 6.47. $\square$

Par exemple, si M est compacte, alors les deux propositions précédentes impliquent que l'espace vectoriel réel $H^*(M) = H_c^*(M)$ est de dimension finie.

Rappelons que si E est un espace vectoriel réel, alors E^* ou $\check{E}$ désigne le dual de E.

Théorème 6.51 (Dualité de Poincaré) *Soit M une variété orientée C^∞ de dimension $n \geq 1$, admettant un recouvrement ouvert fini à intersections cellulaires. Alors pour $0 \leq k \leq n$, l'application*

$$\Omega^k(M) \to \Omega_c^{n-k}(M)^* \ ,$$

définie par

$$\alpha \mapsto \left\{ \beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \right\} \ ,$$

induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathcal{P}_M : H^k(M) \to H_c^{n-k}(M)^* \ .$$

Preuve. Le fait que l'application $\alpha \mapsto \left\{ \beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta \right\}$ induise une telle application $\mathcal{P}_M$ vient du fait que si α et β sont fermées, alors la valeur de cette intégrale est inchangée si on remplace α par $\alpha + d\alpha'$ et β par $\beta + d\beta'$, par la formule de la différentielle extérieure du produit extérieur de deux formes différentielles, ainsi que par le corollaire 6.41 (car β et β' sont à support compacts) :

$$\int_M (\alpha + d\alpha') \wedge (\beta + d\beta') = \int_M \alpha \wedge \beta + \int_M d(\alpha' \wedge (\beta + d\beta')) \pm \int_M d((\alpha + d\alpha') \wedge \beta') = \int_M \alpha \wedge \beta \ .$$

La linéarité est immédiate.

Pour montrer que $\mathcal{P}_M$ est un isomorphisme, on raisonne par récurrence sur le cardinal p d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{1 \leq i \leq p}$ fini à intersections cellulaires. Si $p = 1$, le résultat découle du lemme 6.48 (et de l'invariance par homéomorphismes de la cohomologie de de Rham).

On pose $U = U_p$, $V = U_1 \cup \cdots \cup U_{p-1}$. Ainsi $\{U, V\}$ est un recouvrement ouvert de M, et $U, V, U \cap V = \bigcup_{i=1}^{p-1} (U_i \cap U_p)$ sont des variétés C^∞ orientées, admettant un recouvrement ouvert fini à intersections cellulaires, de cardinal inférieur ou égal à $p - 1$. Considérons le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{k-1}(U) \times H^{k-1}(V) & \longrightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^k(M) & \longrightarrow \\
\downarrow \mathcal{P}_U \times \mathcal{P}_V & & \downarrow \mathcal{P}_{U \cap V} & & \downarrow \mathcal{P}_M & \\
H_c^{n-k+1}(U)^* \times H_c^{n-k+1}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k+1}(U \cap V)^* & \xrightarrow{{}^t\delta} & H_c^{n-k}(M)^* & \longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & H^k(U)\times H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U\cap V) \\ & \downarrow \mathcal{P}_U\times\mathcal{P}_V & & \downarrow \mathcal{P}_{U\cap V} \\ \longrightarrow & H_c^{n-k}(U)^*\times H_c^{n-k}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k}(U\cap V)^* \end{array}$$

Tous les espaces vectoriels sont de dimension finie par la proposition 6.50. La première ligne est la suite exacte de Mayer-Vietoris de M pour le recouvrement ouvert $\{U,V\}$. La seconde ligne est la suite duale de la suite exacte de Mayer-Vietoris à support compact de M pour le recouvrement ouvert $\{U,V\}$, où l'on identifie de manière usuelle $\check{E}\times\check{F}$ au dual de $E\times F$, par l'application qui à (f,g) associe $(x,y)\mapsto f(x)+g(y)$. En particulier, ${}^t\delta$ est l'opérateur dual de $\delta : H_c^{n-k}(M)\to H_c^{n-k+1}(U\cap V)$. La seconde ligne est exacte, car prendre le dual préserve l'exactitude des suites d'espaces vectoriels.

On vérifie facilement que le diagramme est commutatif, sauf peut-être la relation

$$\mathcal{P}_M\circ\delta = {}^t\delta\circ\mathcal{P}_{U\cap V}\ ,$$

qui se montre ainsi. Par définition des opérateurs δ (voir la preuve de la proposition A.21 de l'appendice A.6), si $z\in Z^{k-1}(U\cap V)$, on a $\delta[z]=[x]$ où $x\in Z^k(M)$ et il existe $(y,y')\in\Omega^{k-1}(U)\times\Omega^{k-1}(V)$ tels que $y_{|U\cap V}-y'_{|U\cap V}=z$ et $(x_{|U},x_{|V})=(dy,dy')$. De plus, si $\gamma\in Z_c^{n-k}(M)$, on a $\delta[\gamma]=[\alpha]$ où $\alpha\in Z^{n-k+1}(U\cap V)$ et il existe $(\beta,\beta')\in\Omega_c^{n-k}(U)\times\Omega_c^{n-k}(V)$ tels que, on notant $\overline{\omega}^W$ l'extension par 0 à un ouvert W, on ait $\overline{\beta}^M-\overline{\beta'}^M=\gamma$ et $(\overline{\alpha}^U,\overline{\alpha}^V)=(d\beta,d\beta')$. La relation de commutation cherchée découle alors du calcul suivant, où les notations sont les précédentes, et la troisième égalité découle de la formule de Stokes (plus précisément du corollaire 6.41) :

$$\int_{U\cap V} z\wedge\alpha = \int_U y\wedge\overline{\alpha}^U - \int_V y'\wedge\overline{\alpha}^V = \int_U y\wedge d\beta - \int_V y'\wedge d\beta' =$$

$$\int_U dy\wedge\beta - \int_V dy'\wedge\beta' = \int_M x\wedge\overline{\beta}^M - \int_M x\wedge\overline{\beta'}^M = \int_M x\wedge\gamma\ .$$

Par récurrence, le théorème découle alors du lemme des cinq (voir l'exercice E.187 de l'appendice A.6). □

Porisme 6.52 *Soit M une variété C^∞ de dimension $n\geq 1$, compacte et orientée. Alors pour $0\leq k\leq n$, l'application*

$$H^k(M)\to H^{n-k}(M)^*$$

définie par

$$[\alpha]\mapsto\left\{[\beta]\mapsto\int_M\alpha\wedge\beta\right\}\ ,$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve. Ce résultat découle du théorème 6.51, par la proposition 6.49. □

Porisme 6.53 *Soit M une variété C^∞ compacte orientable de dimension $n\geq 1$. Alors les espaces vectoriels réels $H^k(M)$ et $H^{n-k}(M)$ ont même dimension.*

Si n est impair, alors la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ est nulle.

Preuve. La première assertion découle du fait qu'un espace vectoriel et son dual ont la même dimension. Si $n = 2k+1$, alors

$$\sum_{i=0}^{2k+1} (-1)^i \dim H^i(M) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \Big(\dim H^i(M) - \dim H^{2k+1-i}(M)\Big) = 0 \ . \quad \square$$

Porisme 6.54 *Si M est une variété C^∞ compacte connexe orientée de dimension $n \geq 1$, alors l'application*

$$H^n(M) \to \mathbb{R}$$

définie par

$$[\omega] \mapsto \int_M \omega$$

est un isomorphisme linéaire.

Preuve. En effet, $H^0(M) = \mathbb{R}$, et on applique le corollaire précédent pour $k = 0$. $\square$

Par exemple, si M est une surface compacte connexe, somme connexe de $g \geq 1$ tores $\mathbb{T}^2$, alors $H^2(M) \simeq \mathbb{R}$.

Ce résultat 6.54 reste valable, en remplaçant $H^n(M)$ par $H^n_c(M)$ lorsque M n'est pas supposée compacte (voir par exemple [God]). Dans le cas non orientable, le résultat change complètement :

Proposition 6.55 *Si M est une variété C^∞ connexe non orientable de dimension $n \geq 1$, alors*

$$H^n_c(M) = \{0\} \ .$$

Preuve. Soit $\pi : \widetilde{M} \to M$ le revêtement à deux feuillets d'orientation de M, et $\sigma : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ l'isomorphisme de revêtements non trivial (voir l'exercice E.142). La variété $\widetilde{M}$ est orientable, connexe et σ renverse l'orientation.

Si $\omega \in \Omega^n_c(M)$, alors $\widetilde{\omega} = \pi^*\omega \in \Omega^n_c(\widetilde{M})$ vérifie $\sigma^*\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}$. Donc, en munissant $\widetilde{M}$ d'une orientation quelconque,

$$\int_{\widetilde{M}} \widetilde{\omega} = \int_{\widetilde{M}} \sigma^*\widetilde{\omega} = -\int_{\widetilde{M}} \widetilde{\omega} \ .$$

Donc $\int_{\widetilde{M}} \widetilde{\omega} = 0$ et $\widetilde{\omega}$ est exacte, par le corollaire précédent. Soit $\widetilde{\alpha} \in \Omega^{n-1}_c(\widetilde{M})$ tel que $\widetilde{\omega} = d\widetilde{\alpha}$. Alors $\frac{1}{2}(\widetilde{\alpha} + \sigma^*\widetilde{\alpha})$ est une $(n-1)$-forme différentielle sur $\widetilde{M}$, invariante par σ, dont la différentielle coïncide avec $\widetilde{\omega}$. Elle définit donc une forme différentielle α sur M, telle que $\pi^*\alpha = \widetilde{\alpha}$. Alors $\omega = d\alpha$, car π est un difféomorphisme local, ce qui montre le résultat. $\square$

Par conséquent, si M est une variété C^∞ compacte connexe non orientable de dimension $n \geq 1$, alors

$$H^n(M) = \{0\} \ .$$

- **Cohomologie de de Rham des espaces projectifs réels.**

Proposition 6.56 *Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Les espaces de cohomologie de de Rham de l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sont*

$$H^k_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \text{ ou si } k = n \text{ avec } n \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

En particulier, sa caractéristique d'Euler est 1 *si n est pair, et* 0 *sinon.*

Preuve. Rappelons que $\mathbb{P}_0(\mathbb{R})$ est réduit à un point, que la variété $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ est C^∞-difféomorphe au cercle $\mathbb{S}_1$, et que $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est connexe et de dimension n. De plus, si $n \geq 1$, alors $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est orientable si et seulement si n est impair (voir l'exercice E.142 (3)), donc le corollaire 6.54 et la proposition 6.55 donnent la valeur de $H^n(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}))$. Nous pouvons donc supposer $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$. On raisonne par récurrence sur n. Supposons le résultat vrai pour $n-1$.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$ de ses coordonnées $(x_0, \ldots, x_n)$, et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'hyperplan vectoriel d'équation $x_0 = 0$. Dans l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, on considère le point x de coordonnées homogènes $[1 : 0 : \ldots : 0]$, l'ouvert $U = \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) - \{x\}$ et l'ouvert $V = \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) - \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. Nous avons vu (voir le paragraphe 2.4.3) que V est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ (c'est le domaine d'une carte affine d'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$), donc V a le même type d'homotopie que le point. De plus, U se rétracte par déformation forte sur $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, par l'homotopie $([x_0 : x_1 : \ldots : x_n], t) \mapsto [tx_0 : x_1 : \ldots : x_n]$, donc a le même type d'homotopie que $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. L'intersection $U \cap V$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{R}^n - \{0\}$, donc a le même type d'homotopie que la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$.

La suite exacte de Mayer-Vietoris

$$\cdots \to H^{k-1}(U \cap V) \to H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \to H^k(U) \times H^k(V) \to H^k(U \cap V) \to \ldots$$

donne donc des suites exactes

$$H^0(U) \times H^0(V) \to H^0(U \cap V) \to H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \to H^1(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})) \to H^1(\mathbb{S}_{n-1}) \to H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \ ,$$

$$0 \to H^{n-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \to H^{n-1}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})) \to H^{n-1}(\mathbb{S}_{n-1}) \to H^n(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \to 0 \ ,$$

et, pour $1 < k < n-1$,

$$0 \to H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \to H^k(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})) \to 0 \ .$$

Comme l'application $H^0(U) \times H^0(V) \to H^0(U \cap V)$ est surjective (voir la remarque (2) suivant la proposition 6.20), la première équation donne $H^1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = 0$ (en distinguant les cas $n = 2$ et $n > 2$). La seconde équation donne $H^{n-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = 0$ pour $n > 2$ (en distinguant les cas n pair et n impair). Par récurrence, la dernière équation donne $H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = 0$ pour $1 < k < n-1$. Le résultat s'en déduit. □

6.6 Théorie du degré

6.6.1 Degré d'une application entre variétés de même dimension.

Soient M et N deux variétés orientées C^∞ compactes de dimension $n \geq 1$, avec N connexe, et $f : M \to N$ une application continue.

Nous appellerons *degré* de f, et noterons deg f, le nombre réel r tel que, pour $m_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de multiplication par r, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^n(N) & \xrightarrow{f^*} & H^n(M) \\ \int_N \downarrow & & \downarrow \int_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{m_r} & \mathbb{R} \end{array}$$

Ce nombre existe par linéarité, et le fait que la flèche verticale de gauche soit un isomorphisme par connexité de N, voir le corollaire 6.54. Donc, par définition de f^*, si g est une application C^∞ homotope à f, alors

$$\deg f = \frac{\int_M g^*\omega}{\int_N \omega}$$

pour tout $\omega \in \Omega^n(N)$ tel que $\int_N \omega \neq 0$.

Remarques. Le degré des applications vérifie les propriétés suivantes.

(1) *Le degré d'une application constante est nulle.* Si f est constante, alors deg $f = 0$, car $f^* : H^n(N) \to H^n(M)$ est l'application nulle, puisque $n \geq 1$.

Plus généralement, le degré d'une application continue non surjective f de M dans N est nul. En effet, soit ω une forme différentielle à support compact contenu dans le complémentaire de l'image de f, telle que $\int_N \omega = 1$ (qui existe, car ce complémentaire est un ouvert non vide de N, car M est compacte). Soit $g : M \to N - \mathrm{Supp}\ \omega$ une application C^∞ homotope à f. Alors deg $f = \int_M g^*\omega = 0$.

(2) *Le degré dépend en général de l'orientation des variétés M et N.* Plus précisément, pour ϵ dans $\{\pm 1\}$ et P une variété orientée C^∞, notons ϵP la variété orientée P si $\epsilon = +1$, et la variété P où chaque composante connexe de P est munie de l'orientation opposée si $\epsilon = -1$. Soient ϵ, ϵ' dans $\{\pm 1\}$ et notons g l'application f de la variété orientée ϵM dans la variété orientée $\epsilon' N$. Alors par construction

$$\deg g = \epsilon\, \epsilon' \deg f\ .$$

Par exemple, si f est un C^∞-difféomorphisme, alors deg f vaut 1 si f préserve l'orientation, par la formule de changement de variable globale, et donc -1 sinon (car alors f préserve l'orientation de M dans la variété orientée opposée de N).

En particulier, comme l'antipodie $-\mathrm{id}$ de $\mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ renverse l'orientation si et seulement si n est pair, on en déduit que

$$\deg\ (-\mathrm{id} : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n) = (-1)^{n-1}\ .$$

Remarquons aussi que si $N = M$, alors le degré de f ne dépend pas de l'orientation de M (à condition de prendre la même à la source et au but !).

(3) *Le degré est additif pour les sommes disjointes à la source.* Plus précisément, si $M_1, \ldots, M_k$ sont des variétés orientées C^∞ compactes de dimension n, en notant $M' = \coprod_{1 \leq i \leq k} M_i$ la variété orientée somme disjointe, alors pour toute application continue $f : M' \to N$, on a

$$\deg f = \sum_{i=1}^{k} \deg f_{|M_i}\ .$$

En effet, si $g : M \to N$ est une application C^∞ homotope à f, alors $g_{|M_i}$ est C^∞ et homotope à $f_{|M_i}$, et pour tout $\omega \in \Omega^n(N)$ tel que $\int_N \omega = 1$,

$$\deg f = \int_{M'} g^*\omega = \sum_{i=1}^{k} \int_{M_i} (g_{|M_i})^*\omega = \sum_{i=1}^{k} \deg f_{|M_i} \ .$$

(4) *Le degré est invariant par homotopie.* Plus précisément, si $g : M \to N$ est une application continue, qui est homotope à f, alors

$$\deg g = \deg f \ .$$

Ceci découle de l'invariance par homotopie de la cohomologie de de Rham.

Par exemple, si $M = N$, alors l'application id : $M \to M$, de degré 1, n'est pas homotope à une application continue non surjective (par exemple constante), qui est de degré 0.

Porisme 6.57 (Théorème de non-peignage des sphères) *Pour tout entier $n \geq 1$, tout champ de vecteurs continu sur la sphère $\mathbb{S}_{2n}$ possède au moins un zéro.*

Preuve. Sinon, $\mathbb{S}_{2n}$ possède un champ de vecteurs X continu de norme 1. L'application $h : \mathbb{S}_{2n} \times [0,1] \to \mathbb{S}_{2n}$ définie par

$$(x,t) \mapsto (\cos \pi t)\, x + (\sin \pi t) X(x)$$

est une homotopie entre les applications id et $-$id, qui sont de degré 1 et $(-1)^{2n-1}$ respectivement, contradiction. □

(5) *Le degré est invariant par cobordisme*, au sens suivant : si M est la variété orientée frontière d'un domaine à bord lisse D d'une variété C^∞ orientée P, si M est compacte, alors

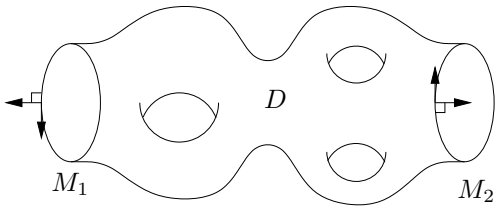
$$\deg f = 0 \ .$$

(Remarquons que M n'est pas forcément connexe, et qu'elle est orientée par la normale sortante). En effet, grâce à une partition de l'unité, on prolonge une application $g : M \to N$ de classe C^∞ et homotope à f en une application $g' : P \to N$ de classe C^∞. En notant $i : M = \partial D \to P$ l'inclusion, on a donc $g' \circ i = g$. D'où, pour tout $\omega \in \Omega^n(N)$, qui est en particulier fermée, on a par le théorème de Stokes,

$$\int_M g^*\omega = \int_M i^*(g')^*\omega = \int_D d((g')^*\omega) = \int_D (g')^*(d\omega) = 0 \ .$$

Par conséquent, si M_1, M_2 sont les deux composantes connexes de la frontière d'un domaine D à bord lisse compact (orientées par la normale sortante) dans une variété C^∞, si $f_1 : M_1 \to N$ et $f_2 : M_2 \to N$ sont deux applications continues, alors

$$\deg f_1 = -\deg f_2 \ .$$



La remarque (4) est un cas particulier de cette remarque, en prenant le domaine à bord lisse $D = M \times [0,1]$ dans $M \times \mathbb{R}$, et en faisant attention que les orientations par la normale sortante des deux composantes de bord de D donnent des orientations opposées sur M identifié d'une part à $M \times \{0\}$, de l'autre à $M \times \{1\}$.

(6) *Le degré est multiplicatif pour la composition.* Si P est une variété orientée C^∞ compacte connexe de dimension $n \geq 1$, et $g : N \to P$ une application continue, alors

$$\deg\,(g \circ f) = (\deg\, f)(\deg\, g)\ .$$

Ceci découle immédiatement du fait que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, et que $m_{rr'} = m_{r'} \circ m_r$.

En particulier, si $M = N$ et si $g : M \to P$ est un homéomorphisme, alors

$$\deg\,(g \circ f \circ g^{-1}) = \deg\, f\ .$$

Donnons maintenant un moyen pratique de calculer le degré d'une application, ce qui montrera aussi que le degré est un nombre entier.

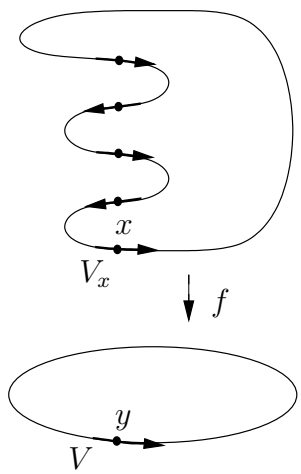
Rappelons que l'orientation d'une variété définit une orientation de l'espace tangent en tout point (voir la partie 6.3). Pour tout point x de M tel que l'application linéaire $T_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ soit bijective (et il suffit, par égalité des dimensions, que f soit une immersion ou une submersion en x), appelons *indice de f en x*, et notons $\mathrm{Ind}(f, x)$, le nombre $+1$ si $T_x f$ préserve l'orientation, et -1 sinon.

Théorème 6.58 *Soient M et N deux variétés orientées C^∞ compactes de dimension $n \geq 1$, avec N connexe, et $f : M \to N$ une application de classe C^∞. Si $y \in N$ est une valeur régulière de f, alors*

$$\deg\, f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{Ind}(f, x)\ .$$

Preuve. Si y est une valeur régulière, alors $F = f^{-1}(y)$ est une sous-variété de dimension $n - n = 0$ de M, donc est discrète, et comme M est compacte, la fibre F est finie. Pour tout x dans F, l'application f est une submersion en x, donc $T_x f$ est bijective. Donc le membre de droite est bien défini (et appartient à $\mathbb{Z}$).

Par le théorème d'inversion locale et par finitude de F, il existe un voisinage ouvert connexe V de y, que nous supposerons contenu dans un domaine de carte de N, et, pour tout x dans F, un voisinage ouvert V_x de x, avec les V_x deux à deux disjoints, tels que $f_{|V_x} : V_x \to V$ soit un C^∞-difféomorphisme pour tout x dans F. Soit $\omega \in \Omega^n(N)$ à support contenu dans V telle que $\int_N \omega = 1$, ce qui existe. Alors le support de $f^*\omega$ est contenu dans $f^{-1}(V)$, qui est réunion disjointe des V_x pour x dans F.



Par le théorème de changement de variable local 6.36, on a

$$\deg f = \int_M f^*\omega = \int_{f^{-1}(V)} f^*\omega = \sum_{x\in F} \int_{V_x} (f_{|V_x})^*\omega =$$

$$\sum_{x\in F} \mathrm{Ind}(f,x) \int_V \omega = \sum_{x\in F} \mathrm{Ind}(f,x) \ . \quad \square$$

Ce théorème est utilisable à cause du théorème de Sard, qui dit que l'ensemble des valeurs régulières de f est dense dans N (voir le théorème 2.21). Comme nous n'en avions pas donné de preuve, en voici une adaptée à notre cas (voir le théorème 2.21 pour un énoncé plus général).

Proposition 6.59 (Théorème de Sard) *Soient M, N deux variétés C^1 de même dimension $n \geq 1$, et $f : M \to N$ une application C^1. L'ensemble des valeurs régulières de f est dense.*

Preuve. En utilisant des cartes locales, il suffit de montrer le résultat lorsque $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $N = \mathbb{R}^n$. Nous allons montrer que, pour C l'ensemble des points critiques, l'ensemble $f(C)$ est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue λ, ce qui implique le résultat. Rappelons que la mesure de Lebesgue d'une boule de rayon r dans $\mathbb{R}^n$ est $\omega_n r^n$ où $\omega_n > 0$ est une constante.

Lemme 6.60 *Pour tout compact K dans U, il existe $\delta > 0$ et $\epsilon : [0,\delta] \to [0,+\infty[$ telle que $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$, et, pour tous x, y dans K tels que $||x-y|| \leq \delta$,*

$$||f(y) - f(x) - Df_x(y-x)|| \leq \epsilon(||x-y||)||x-y|| \ .$$

Preuve. On a $f(y) - f(x) = \int_0^1 Df_{x+t(y-x)}(y-x)$, donc

$$\begin{aligned} ||f(y) - f(x) - Df_x(y-x)|| &\leq || \int_0^1 (Df_{x+t(y-x)}(y-x) - Df_x(y-x))dt|| \\ &\leq \int_0^1 |||Df_{x+t(y-x)} - Df_x|||dt||x-y|| \ . \end{aligned}$$

D'où le résultat par uniforme continuité de Df sur K. $\square$

Il suffit de montrer que $f(C \cap B)$ est de mesure nulle, pour tout cube B de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in C$, alors Df_x n'est pas surjective, donc son image est contenue dans (au moins) un hyperplan H_x de $\mathbb{R}^n$. Soit $r > 0$ et $y \in U$ tel que $||y-x|| < r$.

Par le lemme, $d(f(y), f(x) + H_x) < r\epsilon(r)$. Si $K = \max_{x\in B} |||Df_x|||$, alors $||f(y) - f(x)|| \leq Kr$, donc $f(B(x,r))$ est contenue dans le cylindre de base $(f(x)+H_x)\cap B(f(x), Kr)$ et de hauteur $2r\epsilon(r)$. Ce cylindre est de mesure $2r\epsilon(r) \times \omega_{n-1}(Kr)^{n-1}$. Si a est la longueur d'une arête du cube B, alors B est réunion de k^n cubes de longueurs d'arête a/k. Chacun de ces cubes rencontrant C est contenu dans une boule $B(x, 2a\sqrt{n}/k)$ où $x \in C$. Donc

$$\lambda(f(C \cap B)) \leq 2k^n K^{n-1} \omega_{n-1} (2a\sqrt{n}/k)^n \epsilon(2a\sqrt{n}/k) \ .$$

D'où le résultat en faisant tendre k vers $+\infty$. $\square$

Porisme 6.61 *(1) Le degré de f est un élément de $\mathbb{Z}$.*

(2) Le cardinal d'une fibre régulière est constant modulo 2.

(3) Si le degré de f est non nul, alors f est surjective.

En particulier, si f est homotope à une application non surjective, alors $\deg f = 0$.

(4) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application C^∞ qui vaut l'identité au voisinage de l'infini (i.e. en dehors d'un compact), alors f est surjective.

(5) Si f est un revêtement à n feuillets préservant l'orientation, alors

$$\deg f = n \ .$$

Preuve. Par le théorème de Sard, l'application f admet au moins une valeur régulière. L'assertion (1) est alors immédiate à partir du théorème 6.58. Celui-ci montre aussi que si $\deg f$ est non nul, alors l'image réciproque $f^{-1}(y)$ de toute valeur régulière de f est non vide. Or tout élément de N qui n'est pas dans l'image de f est une valeur régulière de f, donc l'assertion (3) en découle.

L'assertion (2) est immédiate, car $\deg f = \mathrm{Card}\ f^{-1}(y) \bmod 2$ pour toute valeur régulière y, puisque $1 = -1 \bmod 2$.

En identifiant $\mathbb{R}^n$ avec le complémentaire d'un point dans $\mathbb{S}_n$ (par projection stéréographique), on prolonge f en une application $g : \mathbb{S}_n \to \mathbb{S}_n$ de classe C^∞, valant l'identité au voisinage d'un point. Donc le théorème 6.58 appliqué en ce point (qui est régulier) montre que le degré de g vaut 1, donc est non nul. Par conséquent g est surjective par (3), donc f est surjective, ce qui montre (4).

La dernière assertion découle du fait que pour tout y dans N, le point y est une valeur régulière de f, d'image réciproque de cardinal n, en tout point de laquelle l'application tangente de f préserve l'orientation, par définition d'un C^∞-difféomorphisme local préservant l'orientation. □

En particulier, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, l'application $f : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{S}_1$ définie par $z = e^{i\theta} \mapsto z^n = e^{in\theta}$ est de degré n.

Exercice E.143 *Soit $f \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle à coefficients complexes, et Z l'ensemble (fini) des ses pôles. Nous identifions $\mathbb{C}$ au domaine d'une carte affine de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (voir partie 2.4.3), et nous notons ∞ le point complémentaire.*

(1) Montrer que $f : \mathbb{C} - Z \to \mathbb{C}$ s'étend en une application holomorphe, donc C^∞, de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, encore notée f.

(2) Montrer que si f est un polynôme non nul de degré d, alors

$$\deg f = d \ .$$

(Il n'y a donc pas de conflit notationnel. La condition de non nullité de f est nécessaire, car le degré d'une application constante est nul, alors que le degré du polynôme nul est $-\infty$.)

(3) Montrer que si $f = P/Q$ avec P, Q deux polynômes non nuls premiers entre eux, alors

$$\deg f = [\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(f)] = \max\{\deg P, \deg Q\} \ ,$$

où $[\mathbb{C}(X) : \mathbb{C}(f)]$ est le degré de l'extension $\mathbb{C}(X)$ du sous-corps $\mathbb{C}(f)$ engendré par f.

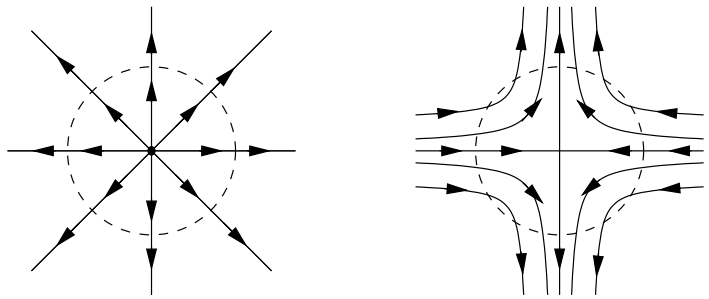
6.6.2 Indice d'un champ de vecteurs en un zéro isolé.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ où $n \geq 2$, et $X \in \Gamma(TU) = \mathrm{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteurs C^∞ sur U. Si $x \in U$ est un zéro isolé de X, définissons l'*indice* du champ de vecteurs X en x comme le degré de l'application de $\mathbb{S}_{n-1}$ dans $\mathbb{S}_{n-1}$ (orientée par la normale sortante de la boule) définie par

$$v \mapsto \frac{X(x+\epsilon v)}{||X(x+\epsilon v)||}$$

pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit (ce qui, par invariance du degré par homotopie, ne dépend pas d'un tel ϵ).

Soient M une variété C^∞ de dimension $n \geq 2$, et $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs C^∞ sur M. Si $x \in M$ est un zéro isolé de X, et si (U, φ) est une carte locale de M en x, définissons l'*indice* du champ de vecteurs X en x, que nous noterons $\mathrm{Ind}(X, x)$, comme l'indice en $\varphi(x)$ du champ de vecteurs X lu dans cette carte, c'est-à-dire du champ de vecteurs $(\varphi^{-1})^* X$ sur l'ouvert $\varphi(U)$. Ceci ne dépend pas de la carte locale, par la remarque (6) précédente.



puits
$\mathrm{Ind} = 1$

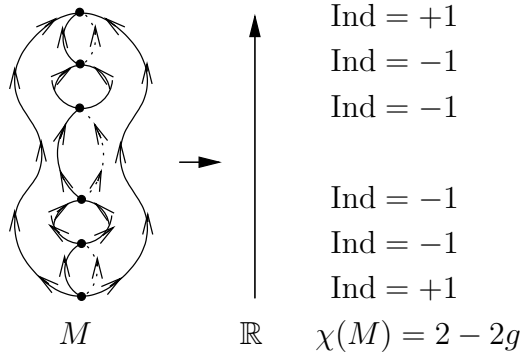
selle à $2k$ branches
$\mathrm{Ind} = 1 - k$

Nous renvoyons par exemple à [Spi] pour une preuve du théorème remarquable suivant.

Théorème 6.62 (Théorème de Poincaré-Hopf) *Soient M une variété C^∞ compacte de dimension $n \geq 2$, et $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs C^∞ sur M, dont l'ensemble des zéros Z est fini. Alors*

$$\chi(M) = \sum_{x \in Z} \mathrm{Ind}(X, x) \ . \quad \square$$

Par exemple, on retrouve facilement, en considérant le champ de vecteurs gradient d'une fonction hauteur sur une surface compacte connexe orientable de genre g, que sa caractéristique d'Euler est $2-2g$, car le champ de vecteurs ci-contre possède $2g+2$ zéros, dont un puits et une source, d'indice $+1$, et $2g$ selles à quatre branches, d'indice -1.



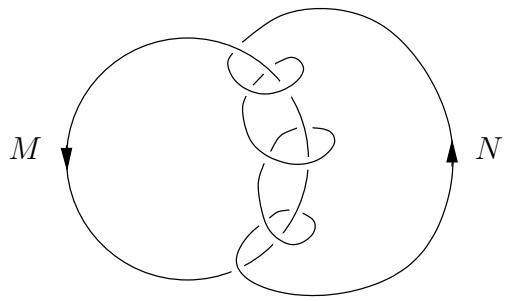
Ce résultat montre de nouveau que pour tout entier $n \geq 1$, tout champ de vecteurs C^∞ sur la sphère $\mathbb{S}_{2n}$ possède au moins un zéro, car la caractéristique d'Euler de $\mathbb{S}_{2n}$ vaut 2, qui est non nul.

Plus généralement, si $\chi(M)$ est non nul, alors il n'existe pas de champ de vecteurs ne s'annulant pas sur M. Par exemple, parmi les surfaces compactes connexes orientables C^∞, seul le tore est de caractéristique d'Euler non nulle, et il admet un champ de vecteurs ne s'annulant pas, comme on peut le voir en prenant pour le tore le quotient de $\mathbb{R}^2$ par son sous-groupe discret $\mathbb{Z}^2$, et pour le champ de vecteurs, le champ de vecteurs quotient du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$.

6.6.3 Nombre d'enlacement.

Soient M et N des sous-variétés C^∞ orientées compactes disjointes, de dimension p et q respectivement, dans $\mathbb{R}^{n+1}$, avec $p, q \geq 1$ et $p + q = n$. On appelle *nombre d'enlacement* de N et M dans $\mathbb{R}^n$, et on note $\ell\mathrm{k}(M, N)$, le degré de l'application $\psi_{M,N}$ de la variété orientée produit $M \times N$ dans la variété orientée $\mathbb{S}_n$ (par la normale sortante de la boule), définie par

$$\psi_{M,N} : (x, y) \mapsto \frac{y - x}{||y - x||} \ .$$



$\ell\mathrm{k}(M, N) = +4$

Remarque. Le nombre d'enlacement vérifie les propriétés suivantes :

(1) Il est additif par somme disjointe en M et en N : si M est la somme disjointe orientée de $M_1, \ldots, M_r$ et N est la somme disjointe orientée de $N_1, \ldots, N_s$, alors la variété orientée produit $M \times N$ est la somme disjointe orientée des variétés orientées produits $M_i \times N_j$, donc par l'additivité par somme connexe du degré, on a

$$\ell\mathrm{k}(M, N) = \sum_{1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s} \ell\mathrm{k}(M_i, N_j) \ .$$

(2) Il dépend en général de l'orientation de chaque composante connexe de M et de N. Avec les notations vues ci-dessus,

$$\ell\mathrm{k}(\epsilon M, \epsilon' N) = \epsilon\epsilon' \ell\mathrm{k}(M, N) \ .$$

(3) Il est antisymétrique en M et N :

$$\ell\mathrm{k}(N, M) = (-1)^{(p+1)(q+1)} \ell\mathrm{k}(M, N) \ .$$

En particulier, si p ou q est impair, alors $\ell\mathrm{k}(N,M) = \ell\mathrm{k}(M,N)$.

En effet, si $\sigma : (x,y) \mapsto (y,x)$ est l'application d'échange de $M \times N$ dans $N \times M$, alors son degré est $(-1)^{pq}$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \stackrel{\psi_{M,N}}{\longrightarrow} & \mathbb{S}_n \\ \sigma \downarrow & & \downarrow -\mathrm{id} \\ N \times M & \stackrel{\psi_{N,M}}{\longrightarrow} & \mathbb{S}_n \end{array} .$$

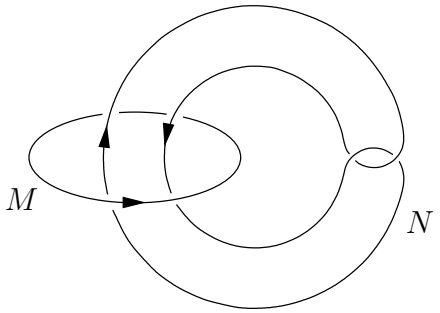
Comme l'antipodie de $\mathbb{S}_n$ est de degré $(-1)^{n+1}$, le résultat découle alors de la remarque (5) précédente.

(4) S'il existe un hyperplan affine séparant M de N, alors

$$\ell\mathrm{k}(M,N) = 0 .$$

En effet, l'application $\psi_{M,N}$ n'est alors pas surjective.

La réciproque est fausse, par exemple, dans l'*entrelac de Whitehead* ci-contre, le nombre d'enlacement des deux nœuds M et N est nul, mais on ne peut pas disjoindre l'un de l'autre.



(5) Le nombre d'enlacement est invariant par isotopie. Plus précisément, s'il existe des applications continues $f : M \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ et $g : N \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ telles que, en notant $f_t : M \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $f_t(x) = f(x,t)$ et $g_t : N \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $g_t(x) = g(x,t)$, les applications f_0, g_0, f_1, g_1 soient des plongements C^∞, et que pour tout t, les images de f_t et de g_t soient disjointes, alors

$$\ell\mathrm{k}(f_0(M), g_0(N)) = \ell\mathrm{k}(f_1(M), g_1(N)) .$$

En effet, l'application

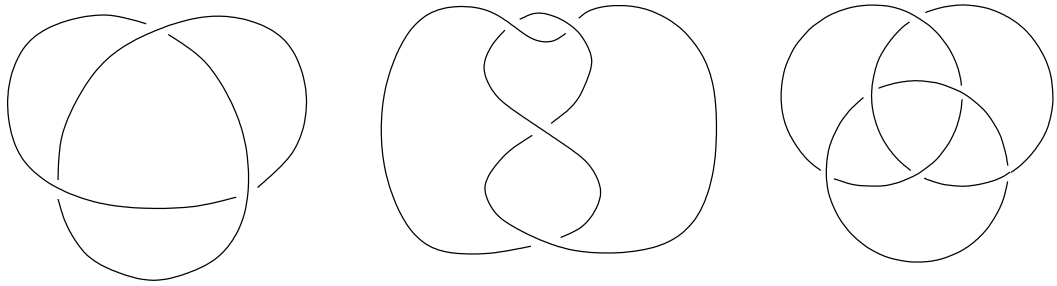
$$(x,y,t) \mapsto \frac{f_t(x) - g_t(y)}{||f_t(x) - g_t(y)||}$$

est bien définie, et continue. C'est une homotopie entre les applications

$$(x,y) \mapsto \frac{f_0(x) - g_0(y)}{||f_0(x) - g_0(y)||} \quad \text{et} \quad (x,y) \mapsto \frac{f_1(x) - g_1(y)}{||f_1(x) - g_1(y)||} .$$

Ces applications ont donc même degré.

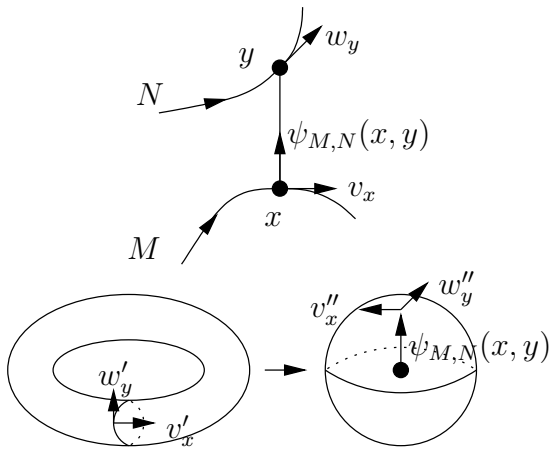
(6) Supposons que $p = q = 1$. Donc $n + 1 = 3$, et M et N sont deux sous-variétés C^∞ compactes orientées de dimension 1 dans $\mathbb{R}^3$. Une telle sous-variété est appelée un *entrelac orienté*, ou *nœud orienté* si elle est connexe. Parmi les très nombreuses références sur les nœuds et entrelacs, nous recommendons [Rol] (voir aussi [BZ, KRT], et pour avoir une idée des nombreux problèmes de recherche actuels, dont certains sont plus profonds que d'autres, voir par exemple les actes de conférences [Kaw, GJK]).



Nœud de trèfle — Nœud de huit — Entrelac borroméen

Donnons pour finir quelques formules de calcul du nombre d'enlacement de deux entrelacs orientés M et N.

(i) Pour tout $(x, y) \in M \times N$, notons v_x le vecteur tangent unitaire orienté de M en x et w_y le vecteur tangent unitaire orienté de N en y. Alors (x, y) est un point régulier pour $\psi_{M,N}$ si et seulement si $(\psi_{M,N}(x, y), v_x, w_y)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et $\psi_{M,N}$ préserve l'orientation d'un voisinage d'un point régulier (x, y) dans $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1$ dans un voisinage de $\psi_{M,N}(x, y)$ dans $\mathbb{S}_2$ (et donc le difféomorphisme local $\psi_{M,N}$ en (x, y) est d'indice $+1$) si et seulement si cette base est directe. Par exemple, dans le dessin ci-contre, cette base n'est pas directe, et $\psi_{M,N}$ renverse l'orientation au voisinage de (x, y) (attention au signe dans $y - x$!).

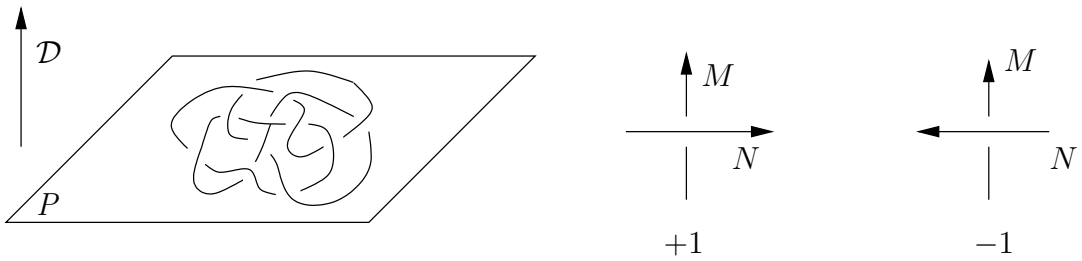


Donc, par le théorème 6.58, pour toute valeur régulière u de $\psi_{M,N}$ dans $\mathbb{S}_2$, on a

$$\ell\mathrm{k}(M, N) = \sum_{(x,y) \in \psi_{M,N}^{-1}(u)} \varepsilon(x, y) \ ,$$

où $\varepsilon(x, y)$ est le signe du déterminant de u, v_x, w_y.

(ii) Soit $\mathcal{D}$ une direction de droite orientée de $\mathbb{R}^3$, ne contenant pas de droite tangente à $M \cup N$, ni de droite passant par trois points de $M \cup N$, ni de droite D passant par un point x de $M \cup N$ et un point y de $M \cup N$ telle que les plans $D \oplus T_x(M \cup N)$ et $D \oplus T_y(M \cup N)$ soient confondus. Alors la projection orthogonale $\pi : \mathbb{R}^3 \to P$ sur le plan vectoriel P orthogonal à $\mathcal{D}$ est une immersion en restriction en $M \cup N$, les points multiples de son image sont doubles, et les deux tangentes en un point double de l'image sont distinctes. De plus, l'orientation de $\mathcal{D}$ permet de donner un sens aux expressions « passer au-dessous » ou « passer en-dessus » au voisinage d'un point double. Le plan P est muni de l'orientation qui, suivie de l'orientation de $\mathcal{D}$, donne l'orientation de $\mathbb{R}^3$.



Pour tout point double α où M passe au-dessous de N, posons $\varepsilon_\alpha = +1$ si l'orientation de $\pi(N)$ en α suivie de l'orientation de $\pi(M)$ en α coïncide avec l'orientation de P en α, et -1 sinon (voir figure précédente). Soit Z l'ensemble des points doubles de $\pi(M \cup N)$ où M passe en-dessous de N.

Proposition 6.63

$$\ell\mathrm{k}(M,N) = \sum_{\alpha \in Z} \varepsilon_\alpha \ .$$

Preuve. La preuve découle de la formule du point (i) ci-dessus, en prenant pour point u de $\mathbb{S}_2$ le point défini par la direction orientée $\mathcal{D}$, qui est bien une valeur régulière pour $\psi_{M,N}$, dont la préimage par $\psi_{M,N}$ est formée des points (x,y) de $M \times N$ tels que $\alpha = \pi(x) = \pi(y)$ soit un point double de $\pi(M \cup N)$ où M passe en-dessous de N, et $\varepsilon_\alpha = \varepsilon(x,y)$. □

(iii) Nous terminons par une très jolie formule intégrale.

Proposition 6.64 (Formule de Gauss) *Si M et N sont deux nœuds orientés disjoints dans $\mathbb{R}^3$, alors pour $\alpha : \mathbb{R}/a\mathbb{R} \to M$ et $\beta : \mathbb{R}/b\mathbb{R} \to N$ des difféomorphismes préservant l'orientation, qui sont des paramétrages par longueur d'arc,*

$$\ell\mathrm{k}(M,N) = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{\det(\alpha(s) - \beta(t), \dot\alpha(s), \dot\beta(t))}{||\alpha(s) - \beta(t)||^3} ds dt \ .$$

Preuve. Si θ, φ sont les angles de latitude et de longitude sur $\mathbb{S}_2$, alors $\omega = \frac{1}{4\pi} \sin\theta \, d\theta d\varphi$ est une forme d'aire normalisée (c'est-à-dire une forme volume de $\mathbb{S}_2$, définissant l'orientation de $\mathbb{S}_2$, d'intégrale 1 sur $\mathbb{S}_2$, invariante par rotations). Elle est proportionelle par un coefficient positif à la 2-forme $x\, dy \wedge dz \ - \ y\, dz \wedge dx \ + \ z\, dx \wedge dy$.

Un petit calcul montre que le membre de droite de l'équation (appelé *intégrale de Gauss*) vaut $\int_{\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_1} (\psi_{M,N})^* \omega$, qui, comme ω est d'intégrale 1, coïncide avec le nombre d'enlacement $\ell\mathrm{k}(M,N)$ par la définition de celui-ci comme degré de l'application $\psi_{M,N}$. D'où le résultat. □

6.7 Autres exercices

Exercice E.144 (1) Soit ω la $n-1$-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_n \ .$$

Calculer $d\omega$.

(2) Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?

Exercice E.145 (Plongement de Plücker) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de l'espace vectoriel dual E^*. Pour chaque m-uplet $I = (i_1, \ldots, i_m)$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n$, notons e_I la forme m-linéaire alternée $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$. Si W est un sous-espace de E^* de dimension m et $x_1, \ldots, x_m$ une base de W, alors la forme m-linéaire alternée $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$ s'écrit $\sum a_I e_I$ pour certains coefficients $a_I \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que, à une constante multiplicative globale près, les coefficients $(a_I)_I$ ne dépendent pas du choix de la base de W et définissent une application *injective* de l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de E^* dans l'espace projectif $\mathbb{P}_N(\mathbb{R})$, où $N = \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} - 1$.

Les coefficients a_I s'appellent les *coordonnées de Plücker* de W.

(2) Montrer que les coordonnées de Plücker déterminent un plongement C^∞ de la variété grassmanienne $\mathcal{G}_m(E^*)$ dans $\mathbb{P}_N(\mathbb{R})$.

Ce plongement s'appelle le *plongement de Plücker* de $\mathcal{G}_m(E^*)$ dans $\mathbb{P}_N(\mathbb{R})$.

(3) Montrer qu'une forme bilinéaire alternée ω sur $\mathbb{R}^4$ s'écrit sous la forme $x_1 \wedge x_2$ avec x_1, x_2 formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^4$, si et seulement si $\omega \neq 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$.

(4) En paramétrant l'image de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ par le plongement de Plücker, montrer que $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ est difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Pour $\omega = \sum_{i<j} a_{i,j}\, e_i \wedge e_j \in \Lambda^2(\mathbb{R}^4)^*$, on pourra poser $x_1 = a_{12} + a_{34}$, $x_2 = a_{23} + a_{14}$, $x_3 = a_{31} + a_{24}$, $y_1 = a_{12} - a_{34}$, $y_2 = a_{23} - a_{14}$, $y_3 = a_{31} - a_{24}$.

Exercice E.146 Soit ω une forme bilinéaire alternée sur $\mathbb{R}^4$. On notera dx_i la forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$ donnée par $dx_i(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_i$.

(1) Prouver qu'il existe $T \in \mathrm{SO}(4)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $T^*\omega = \lambda dx_1 \wedge dx_2 + \mu dx_3 \wedge dx_4$.

(2) Calculer $\omega \wedge \omega$ en fonction de λ et μ.

(3) Si on suppose que $|\lambda|$ est différent de $|\mu|$, déterminer le sous-groupe des éléments T de $\mathrm{SO}(4)$ tels que $T^*(\omega) = \omega$.

Exercice E.147 Soit $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$ l'application de classe C^∞ définie par $(\rho, \theta) \mapsto (x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta)$. Montrer que

$$f^* \left(\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right) = d\theta \ .$$

Exercice E.148 Soit M une variété C^∞ de dimension n. Montrer que si M est parallélisable, alors le fibré des formes alternées sur M est trivialisable. En déduire que si M est parallélisable, alors il existe un isomorphisme d'algèbres graduées $\Omega(M) \simeq \mathrm{C}^\infty(M, \Lambda^* \check{\mathbb{R}}^n)$.

Exercice E.149 (Forme de Liouville) (1) Considérons dans $\mathbb{R}^{2n}$ la 2-forme linéaire alternée ω_0 définie par $\omega_0 = a_1 dx_1 \wedge dx_2 + a_2 dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + a_n dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le produit extérieur de n exemplaires de ω_0.

(2) Soit $E = \mathbb{R}^n$, et $F = E \times E^*$ (qu'on peut identifier à $\mathbb{R}^{2n}$). On définit une 1-forme différentielle sur F par $\omega(q,p).(u,v) = \langle p, u\rangle$. Montrer que sa différentielle est donnée par $d\omega(q,p).((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = \langle v_1, u_2\rangle - \langle v_2, u_1\rangle$. Que pensez-vous de la notation classique $d\omega = dp \wedge dq$?

(3) Soient M une variété de dimension n, et $\pi : T^*M \to M$ la projection canonique. On définit une 1-forme différentielle ω, appelée 1-*forme de Liouville*, sur T^*M par $\omega_x(X) = \langle x, T_x\pi(X)\rangle$ pour $x \in T^*M$ et $X \in T_x(T^*M)$. Vérifier que cette définition a un sens, puis montrer que le produit extérieur de n exemplaires de $d\omega$ est une forme volume.

Exercice E.150 Soit ω une 1-forme différentielle ne s'annulant pas sur une variété M. Montrer qu'il existe une 1-forme θ sur M telle que $d\omega = \theta \wedge \omega$ si et seulement si $d\omega \wedge \omega = 0$. Que se passe-t-il si ω admet des zéros ?

Exercice E.151 (1) Soit ω une 1-forme différentielle sur une variété M de dimension n. Montrer que pour tous les champs de vecteurs X et Y, on a

$$d\omega(X,Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X,Y]) \quad (*)$$

où $X \cdot g$ désigne la dérivation de la fonction g suivant la direction X (parfois notée également $X(g)$ ou $L_X(g)$).

(2) Soient X_1 et X_2 deux champs de vecteurs sur une variété M de dimension 2, linéairement indépendants en tout point de M. Supposons que α_1 et α_2 soient deux 1-formes différentielles sur M telles qu'en chaque point x de M les bases $(\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ et $(X_1(x), X_2(x))$ soient duales. Si les fonctions f et g sont définies par l'égalité $[X_1, X_2] = fX_1 + gX_2$, montrer que l'on a :

$$d\alpha_1 = (-f)\,\alpha_1 \wedge \alpha_2, \quad d\alpha_2 = (-g)\,\alpha_1 \wedge \alpha_2.$$

(3) Soient $X_1, \ldots, X_n$ n champs de vecteurs sur une variété M de dimension n, linéairement indépendants en tout point de M. Supposons que $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ soient des 1-formes différentielles sur M telles qu'en chaque point x de M les bases $(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x))$ et $(X_1(x), \ldots X_n(x))$ soient duales. Définissons les fonctions c_{ij}^k par les égalités $[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k$. Montrer que l'on a :

$$d\alpha_k = -\sum_{i<j} c_{ij}^k\, \alpha_i \wedge \alpha_j.$$

Exercice E.152 (1) Soit P un champ de k-plans de classe C^∞ dans une variété M de dimension n de classe C^∞. On note $\mathcal{I}$ l'idéal de $\Omega(M)$ engendré par les formes différentielles de degré 1 qui s'annulent sur P. Montrer que le champ P est intégrable si et seulement si $\mathcal{I}$ est stable par la différentielle extérieure. On pourra utiliser l'énoncé du théorème de Frobenius 4.11 sur les champs de vecteurs et la formule (*) de l'exercice E.151.

(2) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k}$ des formes différentielles de degré 1 sur M, linéairement indépendantes en tout point. Posons $P(x) = \bigcap_{i=1}^{n-k} \ker(\alpha_i(x))$, et $\omega = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$. Montrer que le champ de k-plans P est intégrable si et seulement s'il existe au voisinage de tout x une fonction f de classe C^∞ non nulle en x telle que $d(f\omega) = 0$. Existe-t-il nécessairement une telle fonction globalement ?

Exercice E.153 Montrer que toute variété C^∞ admettant un atlas de cartes formé d'une ou deux cartes de domaines connexes et à intersections connexes est orientable.

Exercice E.154 Soit M une variété de classe C^2. Montrer que TM est orientable.

Exercice E.155 Soit ω une p-forme différentielle sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, avec $0 \leq p \leq n-1$. Soient $v_1, \ldots, v_{p+1}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants. Pour tout $\epsilon > 0$, notons

$$P_\epsilon = \{t_1 v_1 + \cdots + t_{p+1} v_{p+1} \ : \ 0 \leq t_i \leq \epsilon \text{ pour } 1 \leq i \leq p+1\}.$$

Le pavé P_ϵ n'est pas une variété à bord au sens du cours (il a des coins), mais on admettra que la formule de Stokes s'applique quand même. Calculer

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^{p+1}} \int_{\partial P_\epsilon} \omega \ .$$

Exercice E.156 Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, \cos t, \sin t)$. Quelle est l'algèbre de cohomologie de de Rham de l'ouvert $\mathbb{R}^3 - \gamma(\mathbb{R})$?

Exercice E.157 (1) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $H^*(\mathbb{R} \times U)$ et $H^*(U)$ sont isomorphes.

(2) Soit A une partie fermée de $\mathbb{R}^n$, incluse strictement dans $\mathbb{R}^n$. On la plonge dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par $x \mapsto (x, 0)$. Montrer que

1. $H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A) \simeq H^p(\mathbb{R}^n - A)$ pour $p \geq 1$,
2. $H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \simeq H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R}$,
3. $H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \simeq \mathbb{R}$.

(3) Soit V un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$. Que vaut $H^*(\mathbb{R}^n - V)$?

(4) Soient $k \geq 2$ et $V_1, \ldots, V_k$ des sous-espaces affines deux à deux disjoints de $\mathbb{R}^n$. Calculer l'algèbre de cohomologie $H^*(\mathbb{R}^n - (V_1 \cup \cdots \cup V_k))$.

(5) Soient S une sphère et V un sous-espace affine strict de $\mathbb{R}^n$. Calculer

$$H^*(\mathbb{R}^n - (V \cap S)) \ .$$

Exercice E.158 (Invariant de Hopf) Soit $n > 1$. On considère les sphères orientées $\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{S}_{2n-1}$. Soit $f : \mathbb{S}_{2n-1} \to \mathbb{S}_n$ une application C^∞.

(1) Soit ω une forme volume sur $\mathbb{S}_n$ telle que $\int_{\mathbb{S}_n} \omega = 1$. Montrer qu'il existe une $(n-1)$-forme différentielle β sur $\mathbb{S}_{2n-1}$ telle que $f^*\omega = d\beta$.

(2) Montrer que le nombre réel $\int_{\mathbb{S}_{2n-1}} \beta \wedge d\beta$ ne dépend pas du choix de β. On peut donc le noter $H(f, \omega)$.

(3) Montrer que $H(f, \omega)$ est en fait indépendant de ω. C'est *l'invariant de Hopf* de f, que l'on note $H(f)$.

(4) Si f est une application constante, que vaut $H(f)$? Si $f : \mathbb{S}_3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\} \to \mathbb{S}_2 = \widehat{\mathbb{C}}$ l'application définie par $f(z, w) = z/w$ si $w \neq 0$ et $f(z, 0) = \infty$. Que vaut $H(f)$?

Exercice E.159 (Mesure de Haar) Soit $U = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vu comme ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. On définit une forme volume ω sur U par $\omega(A) = \frac{1}{(\det A)^n}\omega_0$, où ω_0 est la forme volume standard sur $\mathbb{R}^{n^2}$. Montrer que, pour tout $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $L_g^*\omega = R_g^*\omega = \omega$. Montrer de plus que toute forme volume sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant cette propriété est multiple de ω. La mesure définie par cette forme volume est appelée la *mesure de Haar* de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice E.160 (1) Soient M une variété C^∞ compacte de dimension $n > 1$ et P un point de M. Notons $j : M - \{P\} \to M$ le morphisme d'inclusion et

$$j_* : H_c^i(M - \{P\}) \to H^i(M)$$

l'application qui envoie la classe de cohomologie d'une forme fermée $\omega \in \Omega_c^i(M - \{P\})$ vers celle de son prolongement nul en P. En quels degrés les applications j_* sont-elles des isomorphismes ?

(2) Montrer que le complémentaire d'un point dans le tore $\mathbb{T}^2$ et le complémentaire de deux points dans $\mathbb{R}^2$ ont des groupes de cohomologie de de Rham à support compact isomorphes. Ces deux variétés sont-elles difféomorphes ?

Exercice E.161 (Cohomologie de nilvariétés) Soient n un élément de $\mathbb{N}$ et M une variété C^∞. On note $\Omega(M)$ l'algèbre des formes différentielles C^∞ sur M.

$\boxed{\text{A}}$ (1) Montrer que, pour tous les champs de vecteurs X, Y de classe C^∞ sur M, on a l'égalité suivante entre applications de $\Omega(M)$ dans $\Omega(M)$:

$$i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X \ .$$

(On commencera par montrer que cette égalité est vérifiée sur les différentielles de fonctions.)

(2) Soit α une 1-forme différentielle C^∞ sur M ne s'annulant pas. On note Δ_x le noyau de la forme linéaire $\alpha_x : T_xM \to \mathbb{R}$. Montrer que l'application $x \mapsto \Delta_x$ est un champ d'hyperplans C^∞ sur M. Montrer que ce champ d'hyperplans est intégrable si et seulement si α est fermée.

$\boxed{\text{B}}$ (i) On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe de Lie (réel) des matrices $n \times n$ réelles inversibles. Pour $(t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, on pose

$$\theta(t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdot\cdot & x_n & t \\ & 1 & & & & y_1 \\ & & 1 & & & \vdots \\ & & & \cdot & & y_{n-1} \\ & & & & 1 & y_n \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

les autres coefficients étant nuls. Montrer que l'application $\theta : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un plongement C^∞, dont l'image H est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous X, Y, Z dans l'algèbre de Lie de H, on a $[[X, Y], Z] = 0$. On note 0 le vecteur nul de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

(ii) Une forme différentielle ω sur H est dite *invariante à gauche* si pour tout g dans H, en notant $L_g : H \to H$ la multiplication à gauche par g, on a $(L_g)^*\omega = \omega$. Montrer qu'il existe une et une seule 1-forme différentielle β de classe C^∞ invariante à gauche sur H telle que $(\theta^*\beta)_0 = dt$. Calculer $\alpha = \theta^*\beta$ et $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n}$ (où $(d\alpha)^{\wedge n}$ est le produit extérieur de n copies de $d\alpha$). Le champ d'hyperplans formé par les noyaux de β est-il intégrable ?

(iii) On note $H_{\mathbb{Z}} = H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que la variété quotient $H_{\mathbb{Z}} \backslash H$ est une fibration C^∞ sur le tore $\mathbb{T}^{2n}$, de fibre le cercle $\mathbb{S}_1$, qui admet une section C^∞.

(iv) Montrer que la variété quotient $H_{\mathbb{Z}} \backslash H$ possède une $(2n+1)$-forme différentielle ne s'annulant en aucun point.

Pour $n = 1$, calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $H_{\mathbb{Z}} \backslash H$.

$\boxed{\text{C}}$ On suppose que la dimension de M est $2n+1$. Soit α une 1-forme différentielle C^∞ sur M telle que $\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n}$ ne s'annule pas sur M.

a) Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs Z sur M tel que $i_Z\alpha$ soit la fonction constante 1 et $i_Z d\alpha = 0$.

b) Montrer que pour tout point x de M, il existe une carte locale (U, φ) en x, de classe C^∞, à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni des coordonnées $(t, x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, telle que, dans cette carte, $Z = \frac{\partial}{\partial t}$. Dans les questions *c*) à *e*), on suppose que $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

c) Montrer que la restriction ω de $d\alpha$ au sous-espace N de M d'équation $t = 0$ est une 2-forme différentielle fermée, telle que ω_x soit une forme bilinéaire non dégénérée sur T_xN pour tout x dans N.

d) Montrer que pour toute fonction f de classe C^∞ sur N, il existe un unique champ de vecteurs X de classe C^∞ sur N tel que $i_X\omega = df$.

e) Montrer que, pour tout point x de N, il existe un voisinage V de x, des champs de vecteurs X, Y de classe C^∞ sur V et une application ϕ de classe C^∞ sur V, tels que

- $i_X\omega = dx_1$
- $\mathcal{L}_X\phi = 1$
- $i_Y\omega = d\phi$
- $\omega(X, Y) = 1$
- $[X, Y] = 1$.

$f\rangle$ Montrer, par récurrence sur n, que pour tout point x de N, il existe une carte locale en x sur laquelle

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \cdots + dx_n \wedge dy_n \ .$$

$g\rangle$ En déduire que pour tout point x de M, il existe une carte locale en x sur laquelle

$$\alpha = dt + x_1\, dy_1 + \cdots + x_n\, dy_n \ .$$

Exercice E.162 (Cohomologie de grasmaniennes) On note $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ la variété grassmanienne C^∞ des plans vectoriels de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire euclidien usuel. On note $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ le groupe de Lie (réel) des matrices 2×2 réelles inversibles. On note U le sous-ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ supplémentaires à $\mathbb{R}^2 \times \{0\}^2$, et V le sous-ensemble des plans vectoriels supplémentaires à $\{0\}^2 \times \mathbb{R}^2$. On note U' le sous-ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ ne contenant pas la droite vectorielle $\mathbb{R} \times \{0\}^3$, et V' le sous-ensemble des plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ non contenus dans l'hyperplan vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}^3$.

(1) Calculer l'algèbre de cohomologie de de Rham de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que $U \cap V$ est un ouvert de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ qui est C^∞-difféomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(3) Calculer l'algèbre de cohomologie de de Rham de $U \cup V$.

(4) Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de U', en regardant l'application définie sur P par $P \mapsto (P \oplus (\mathbb{R} \times \{0\}^3))^\perp$.

(5) Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de V', en regardant l'application définie sur P par $P \mapsto P \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^3)$.

(6) Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$.

Exercice E.163 (Signature) Soit M une variété C^∞ compacte orientée de dimension $4n \geq 4$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} H^{2n}(M) \times H^{2n}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([\alpha],[\beta]) & \mapsto & \int_M \alpha \wedge \beta \end{array}$$

est une forme bilinéaire, symétrique, non dégénérée. Sa signature est appelée la *signature* de M, et notée $\sigma(M)$. En déduire que si $n = 4$, et si $H^2(M)$ est de dimension 1, alors il n'existe pas de difféomorphisme de M renversant l'orientation. Que valent la signature de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, et de $S \times S'$ pour S, S' des surfaces compactes connexes orientées de genre g et g' (où le *genre* g de S est l'unique entier tel que S soit C^∞-difféomorphe à $\sharp_g\, \mathbb{T}^2$) ?

Exercice E.164 (Géométrie différentielle des quadriques) Le but de ce problème est d'étudier la géométrie différentielle des quadriques réelles affines et projectives. Les parties II, III, IV, V du problème ci-dessous sont indépendantes, et pourront être traités dans n'importe quel ordre. Seule la dernière question de la partie VI dépend de la partie V.

Rappels : Si E et E' sont des espaces vectoriels, si R est une forme quadratique sur E', et si $f : E \to E'$ est une application linéaire, on notera f^*R la forme quadratique sur E définie par $f^*R\,(x) = R(f(x))$ pour tout x dans E.

Si M est une variété C^∞, X un champ de vecteurs C^∞ sur M, et ω une k-forme différentielle C^∞ sur M, on note $i_X\omega$ la $(k-1)$-forme différentielle C^∞ sur M définie par

$$\forall\, x \in M,\ \ \forall\, X_1, \ldots, X_{k-1} \in T_xM, \quad (i_X\omega)_x(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \omega_x(X(x), X_1, \ldots, X_{k-1})\ .$$

Notations : Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{S}_n = \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\ :\ t_0^2 + \cdots + t_n^2 = 1\}$ la sphère usuelle de dimension n.

Soient p et q dans $\mathbb{N}$ avec p non nul. On note $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{p,q}$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, muni de sa base canonique, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$.

On note $Q = Q_{p,q}$ la forme quadratique sur $\mathbb{E}$ définie en posant, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ dans $\mathbb{E}$,

$$Q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - y_1^2 - \cdots - y_q^2\ .$$

On note $\mathrm{O}(p,q)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ constitué des automorphismes linéaires g de $\mathbb{E}$ préservant la forme quadratique Q (i.e. tels que $g^*Q = Q$). On note $M = M_{p,q}$ le sous-ensemble des points x de $\mathbb{E}$ tels que $Q(x) = 1$.

L'espace projectif de l'espace vectoriel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est noté $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{p,q}$, et est muni de sa structure de variété C^∞ usuelle. On note $[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}$. On identifie $\mathbb{E}$ avec son image dans $\mathbb{P}$ par l'application

$$(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \mapsto [1 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]\ ,$$

et on note $\overline{M} = \overline{M}_{p,q}$ l'adhérence de M dans $\mathbb{P}$.

$\boxed{\text{Partie I}}$ (1) Montrer que M est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{E}$. Quelle est sa dimension ?

(2) Montrer que $\overline{M}$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{P}$. Quelle est sa dimension ?

(3) Montrer que $\overline{M} - M$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{P}$. Quelle est sa dimension ?

$\boxed{\text{Partie II}}$ On suppose que $p, q \geq 2$ dans cette partie. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ dans M, on pose

$$A(x) = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2},\ \ B(x) = y_2\frac{\partial}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial}{\partial y_2},\ \ C(x) = y_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial y_1}\ .$$

(1) Montrer que A, B et C sont des champs de vecteurs C^∞ complets sur M. Calculer le flot de C, et le crochet $[A, C]$ des champs de vecteurs A et C.

(2) Pour tout x dans M, on note Δ_x le sous-espace de T_xM engendré par $A(x), B(x), C(x)$. Montrer que sur l'ouvert U des points $x = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ dans M tels que $x_1y_1 \neq 0$, l'application $\Delta : x \mapsto \Delta_x$ est un champ de 3-plans de classe C^∞, qui est intégrable.

$\boxed{\text{Partie III}}$ On note $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ le sous-groupe diagonal par blocs de $\mathrm{O}(p,q)$ dans la décomposition $\mathbb{R} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$.

(1) Montrer que $\mathrm{O}(p,q)$ est un sous-groupe de Lie du groupe de Lie $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$, et que $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{O}(p,q)$. Quelle est la dimension de $\mathrm{O}(p,q)$?

(2) Montrer qu'il existe un sous-groupe de Lie H de $\mathrm{O}(p,q)$ tel que la variété M soit C^∞-difféomorphe à la variété homogène $\mathrm{O}(p,q)/H$.

$\boxed{\text{Partie IV}}$ (1) a) Montrer que M se rétracte par déformation forte sur $M \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$.
b) Calculer la cohomologie de de Rham de M.

(2) a) Montrer que si G est un groupe fini agissant librement par C^∞-difféomorphismes sur une variété de classe C^∞ connexe orientée N, alors la variété C^∞ quotient $G\backslash N$ est orientable si et seulement si les éléments de G préservent l'orientation.
b) Montrer qu'il existe un revêtement C^∞ à deux feuillets de $\mathbb{S}_{p-1} \times \mathbb{S}_q$ dans $\overline{M}$.
c) Quand $\overline{M} = \overline{M}_{p,q}$ est-elle orientable ?

(3) a) Montrer que $V = \overline{M} - M \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ se rétracte par déformation forte sur $\overline{M} - M$.
b) Montrer que si $q \geq 1$, alors $M \cap V$ a la même type d'homotopie que $\mathbb{S}_{p-1} \times \mathbb{S}_{q-1}$.
c) Calculer la cohomologie de de Rham de $\overline{M}_{2,1}$ et $\overline{M}_{2,2}$.

$\boxed{\text{Partie V}}$ On note $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, et Q' la forme quadratique $X \mapsto -\operatorname{tr} X^2$ sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

(1) Montrer qu'il existe un isomorphime linéaire θ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{E}_{1,2}$ tel que $\theta^* Q_{1,2} = Q'$, qui est unique modulo postcomposition par un élément de $\mathrm{O}(1,2)$.

(2) En notant $\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$ la représentation adjointe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, montrer que l'application $g \mapsto \theta \circ (\mathrm{Ad}\, g) \circ \theta^{-1}$ induit un isomorphisme ρ du groupe de Lie quotient $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ sur la composante neutre de $\mathrm{O}(1,2)$.

(3) On rappelle que le groupe de Lie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ agit par C^∞-difféomorphismes sur l'ouvert $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ par

$$(\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z) \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \, .$$

Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{H} \to M_{1,2}$, envoyant le point i de $\mathbb{H}$ sur le point $(1,0,0)$, d'image une composante connexe de $M_{1,2}$, qui est un C^∞-difféomorphisme sur son image, et qui est équivariante pour ρ, au sens que pour tout g dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et z dans $\mathbb{H}$, on a $\varphi(g\, z) = \rho(g)\varphi(z)$.

$\boxed{\text{Partie VI}}$ On suppose $p \geq 1$. On note ω la forme différentielle $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_q$ sur $\mathbb{E}$.

(1) Quel est l'ensemble des éléments g de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ tels que $g^*\omega = \omega$?

(2) Montrer qu'il existe un champ de vecteurs complet X de classe C^∞ sur $\mathbb{E}$, tel que pour tout x dans M, le vecteur $X(x)$ soit orthogonal, pour la forme bilinéaire associée à Q, à l'espace tangent $T_x M$, et vérifie $Q(X(x)) = 1$ et $X(1,0,0,\ldots,0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

(3) Soient N, N' deux variétés C^∞, $g : N \to N'$ un C^∞-difféomorphisme local, Z un champ de vecteurs C^∞ sur N' et α une forme différentielle C^∞ sur N'. Montrer que $g^*(i_Z \alpha) = i_{g^*Z}(g^*\alpha)$.

(4) En notant $f : M \to \mathbb{E}$ l'inclusion, montrer que $\omega' = f^*(i_X \omega)$ est une forme volume sur M, invariante par la composante neutre $\mathrm{O}_0(p,q)$ de $\mathrm{O}(p,q)$ au sens que $g^*\omega' = \omega'$ pour

tout g dans $\mathrm{O}_0(p,q)$. Montrer que deux formes volumes invariantes par $\mathrm{O}_0(p,q)$ sur M sont proportionnelles sur chaque composante connexe de M.

(5) On reprend les notations de la partie V, avec $p=1, q=2$. On note $\mathcal{D}$ la partie de $\mathbb{H}$ définie par

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}\, z \geq 1, \ |\mathrm{Re}\, z| \leq 1\} \ .$$

Calculer

$$\int_{\mathcal{D}} \varphi^* \omega' \ .$$

Exercice E.165 (Espace symétrique de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$) Soit n un entier positif non nul. Pour toute matrice X, on note ${}^tX$ la matrice transposée de X. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'algèbre réelle (resp. l'espace vectoriel réel) de dimension finie des matrices réelles de taille n x n (resp. n x 1), $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le groupe de Lie réel des matrices réelles n x n de déterminant 1, et $\mathrm{SO}(n)$ le sous-groupe de Lie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ des matrices g de déterminant 1 telles que $g^{-1} = {}^tg$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{S}_{n-1}$ la sphère

$$\mathbb{S}_{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \ .$$

On note $\mathcal{E}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques définies positives de déterminant 1.

(1) Montrer que pour tout x dans $\mathcal{E}_n$, le sous-ensemble E_x des éléments X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que ${}^tXxX = 1$ est une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, difféomorphe à $\mathbb{S}_{n-1}$. Quel est l'espace tangent à E_x en un point X de E_x ?

(2) a) Montrer que $\mathcal{E}_n$ est une sous-variété connexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?

b) Pour tout g dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, on note $\underline{g} : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ l'application $x \mapsto gx\,{}^tg$; montrer que $\underline{g}$ est un C^∞-difféomorphisme de $\mathcal{E}_n$.

c) Montrer que $\mathcal{E}_n$ et la variété quotient $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ sont C^∞-difféomorphes.

d) On considère la réunion disjointe $\widetilde{\mathcal{E}}_n = \bigsqcup_{x \in \mathcal{E}_n} E_x$ et l'application canonique $\widetilde{\mathcal{E}}_n \to \mathcal{E}_n$, qui à un élément de E_x associe x. Montrer qu'il existe sur l'ensemble $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ une unique structure de variété C^∞ telle que l'application canonique $\widetilde{\mathcal{E}}_n \to \mathcal{E}_n$ soit une fibration C^∞ de fibre $\mathbb{S}_{n-1}$, et telle que la structure de variété sur E_x coïncide avec celle définie par la sous-variété E_x de la variété $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ pour tout x dans E_n.

(3) Soit α une forme différentielle C^∞ sur $\mathcal{E}_n$.

a) Montrer que $G_\alpha = \{g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \ : \ \underline{g}^*\alpha = \alpha\}$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Quelle est son algèbre de Lie ?

b) Construire une 1-forme différentielle exacte telle que $G_\alpha = \mathrm{SO}(n)$.

(4) Une forme différentielle α sur $\mathcal{E}_n$ est dite *invariante* si $G_\alpha = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

a) Soit $s : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ l'application $x \mapsto x^{-1}$. Montrer que s est un C^∞-difféomorphisme de $\mathcal{E}_n$, et calculer sa différentielle en la matrice I_n.

b) Montrer que si α est une forme différentielle invariante, alors $d\alpha$ et $s^*\alpha$ aussi.

c) Montrer que toute forme différentielle invariante sur $\mathcal{E}_n$ est fermée.

(5) Soit k un entier positif non nul, et $\rho : \mathbb{Z}^k \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes.

a) Pour tout γ dans $\mathbb{Z}^k$, tout (t,g) dans $\mathbb{R}^k \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et tout (t,x) dans $\mathbb{R}^k \times \mathcal{E}_n$, on pose $\gamma \cdot (t,g) = (t+\gamma, \rho(\gamma)g)$ et $\gamma \cdot (t,x) = (t+\gamma, \underline{\rho(\gamma)}(x))$. Montrer que ces formules

définissent des actions libres et propres par C^∞-difféomorphismes de $\mathbb{Z}^k$ sur les variétés C^∞ produits $\mathbb{R}^k \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^k \times \mathcal{E}_n$.

b) On note M et N les variétés C^∞ quotients $\mathbb{Z}^k\backslash(\mathbb{R}^k \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$ et $\mathbb{Z}^k\backslash(\mathbb{R}^k \times \mathcal{E}_n)$ respectivement. Montrer qu'il existe une fibration C^∞ de M dans N, de fibre $\mathrm{SO}(n)$.

c) Montrer qu'il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ de classe C^∞ sur M dont les feuilles sont les images par la projection canonique de $\mathbb{R}^k \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ dans M des sous-espaces $\mathbb{R}^k \times \{g\}$ pour g dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Donner un exemple de ρ pour laquelle $\mathcal{F}$ possède toutes ses feuilles compactes (resp. toutes ses feuilles non compactes, resp. une feuille qui ne soit pas une sous-variété de M).

Exercice E.166 (Forme de Kähler de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note $\mathbb{S}_n = \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ t_0^2 + \cdots + t_n^2 = 1\}$ la sphère usuelle de dimension n, et $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$. Dans cet exercice, les formes différentielles sont à valeurs complexes. En particulier, si $f : M \to \mathbb{C}$ est une application C^∞ sur la variété M à valeurs complexes, alors df est la forme différentielle (à valeurs complexes) définie par $df = d(\mathrm{Re}\, f) + i\, d(\mathrm{Im}\, f)$.

(1) Calculer les espaces de cohomologie de de Rham de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_4$ et de $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_4$.

(2) On considère un entier $n \geq 1$. On note $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n]$ les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Pour $p \in \{0, \ldots, n\}$, on note U_p l'ouvert des $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ tels que $z_p \neq 0$.

a) Pour $p, j \in \{0, \ldots, n\}$, on note $u_{p,j} : U_p \to \mathbb{C}$ l'application $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \mapsto z_j/z_p$, et $\varphi_p : U_p \to \mathbb{C}$ l'application $[z_0 : z_1 : \ldots : z_n] \mapsto \sum_{j=0}^n |z_j/z_p|^2$. Montrer que ces applications sont de classe C^∞.

b) On note i le nombre complexe imaginaire pur usuel. Soit

$$\omega_p = \frac{i}{\varphi_p} \sum_{j=0}^n du_{p,j} \wedge d\,\overline{u_{p,j}} \ - \ \frac{i}{\varphi_p^2} \sum_{j,k=0}^n u_{p,j}\, \overline{u_{p,k}}\, du_{p,k} \wedge d\,\overline{u_{p,j}} \ .$$

Montrer qu'il existe une 2-forme différentielle ω de classe C^∞ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ telle que $\omega_{|U_p} = \omega_p$ pour tout $p = 0, \ldots, n$.

c) Montrer que ω est fermée.

d) On définit $\omega^1 = \omega$ et par récurrence $\omega^m = \omega^{m-1} \wedge \omega$ pour tout entier $m \geq 2$. Montrer que ω^n est une forme volume sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

e) Montrer que ω n'est pas exacte, et que sa classe de cohomologie dans $H^2(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ engendre (en tant qu'algèbre réelle) l'algèbre $H^*(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$.

(3) En déduire que les variétés $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_4$ et $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ ne sont pas homéomorphes.

(4) On munit $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de l'orientation, dite usuelle, telle que l'application de U_0 dans $\mathbb{C}^n$ définie par $\bullet \mapsto (u_{0,1}(\bullet), u_{0,2}(\bullet), \ldots, u_{0,n}(\bullet))$ soit un difféomorphisme préservant l'orientation.

a) Comparer cette orientation et celle pour laquelle ω^n est une forme volume positive.

b) Pour marquer la dépendance en la dimension, on pose $\omega[n] = \omega$. Si $f_{k,n} : \mathbb{P}_k(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est l'inclusion standard $[z_0 : z_1 : \ldots : z_k] \mapsto [z_0 : z_1 : \ldots : z_k : 0 : \ldots : 0]$, montrer que $f_{k,n}$ est un plongement C^∞ et comparer $f_{k,n}^*(\omega[n])$ et $\omega[k]$.

c) Calculer $\int_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} f_{1,n}^* \omega$.

(5) On rappelle que l'action linéaire de $\mathrm{SU}(n+1)$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ induit une action C^∞ du groupe de Lie $\mathrm{SU}(n+1)$ sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Pour tout g dans $\mathrm{SU}(n+1)$, on note $\underline{g}$ le difféomorphisme associé. Pour tout g dans $\mathrm{SU}(n+1)$, que peut-on dire de $\underline{g}^*\omega$?

Remarque. *La 2-forme différentielle ω s'appelle la forme de Kähler standard de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (mais plusieurs conventions différent, surtout à un facteur 2 près).*

Exercice E.167 (Espaces de configurations) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa norme euclidienne usuelle $||\cdot||$. On note $\mathbb{S}_n$ la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Soient M une variété différentielle C^∞ et k un entier positif non nul. Notons $X_k(M)$ l'ensemble des k-uplets de points deux à deux distincts de M.

(1) Montrer que $X_k(M)$ est une sous-variété de la variété produit M^k, et que pour $1 \leq i \leq k$, l'application $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_i$ de $X_k(M)$ dans M est une submersion C^∞.

(2) Soit n un entier positif non nul, montrer que si $k \geq 2$, alors l'ensemble des éléments $(x_1, \ldots, x_k)$ de $X_k(\mathbb{R}^n)$ tels que $\sum_{i,j=1}^k ||x_i - x_j||^2 = 1$ est une sous-variété C^∞ de $X_k(\mathbb{R}^n)$.

(3) Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ agit par permutation des composantes sur $X_k(M)$, et on pose $Y_k(M) = \mathfrak{S}_k \backslash X_k(M)$. Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentielle C^∞ sur $Y_k(M)$ telle que la projection canonique $X_k(M) \to Y_k(M)$ soit une submersion C^∞.

(4) Soit n un entier positif non nul. Le groupe orthogonal $G = \mathrm{O}(n+1)$ agit sur $X_2(\mathbb{S}_n)$ par $(g, (x, y)) \mapsto (gx, gy)$. Montrer que toute orbite $\mathcal{O}$ de G dans $X_2(\mathbb{S}_n)$ est une sous-variété C^∞ de $X_2(\mathbb{S}_n)$, et qu'il existe un sous-groupe de Lie H de G tel que G/H et $\mathcal{O}$ soient C^∞-difféomorphes. Est-ce que H, à isomorphisme de groupes de Lie près, dépend de l'orbite $\mathcal{O}$?

(5) Soit n un entier au moins égal à 2. Soit $s : \mathbb{S}_1 \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $(x, y) \mapsto (x, y, 0, \ldots, 0)$, montrer que l'application $\sigma : \mathbb{S}_1 \to X_2(\mathbb{R}^n)$ définie par $x \mapsto (s(x), -s(x))$ est un C^∞-plongement. Pour tout entier positif ou nul p, calculer les espaces de cohomologie de de Rham $H^p_{DR}(X_2(\mathbb{R}^n))$ et $H^p_{DR}\big(X_2(\mathbb{R}^n) - \sigma(\mathbb{S}_1)\big)$.

(6) Soit n un entier positif non nul, montrer que l'application p_n de $X_2(\mathbb{S}_n)$ dans $\mathbb{S}_n$ définie par $(x, y) \mapsto \frac{x-y}{||x-y||}$ est une fibration C^∞. Pour tout entier positif ou nul p, calculer $H^p_{DR}(X_2(\mathbb{S}_n))$.

Exercice E.168 (Crochet de Poisson) Si E est un espace vectoriel réel de dimension finie, d'espace vectoriel dual E^*, on rappelle qu'une forme bilinéaire alternée ou symétrique $f : E \times E \to \mathbb{R}$ est *non dégénérée* si l'application de E dans E^*, qui à $x \in E$ associe la forme linéaire $y \mapsto f(x, y)$, est injective ou, de manière équivalente, un isomorphisme.

On dit qu'une 2-forme différentielle ω sur une variété différentielle M de classe C^∞ est *non dégénérée* si pour tout x dans M, la forme bilinéaire alternée ω_x sur T_xM est non dégénérée.

On rappelle que si X est un champ de vecteurs C^∞ sur M, et si w est une $(p+1)$-forme différentielle C^∞ sur M avec $p \in \mathbb{N}$, alors $i_X w$ est la p-forme différentielle C^∞ sur M définie par

$$\forall\, x \in M,\ \ \forall\, X_1, \ldots, X_p \in T_xM, \quad (i_X w)_x(X_1, \ldots, X_p) = w_x(X(x), X_1, \ldots, X_p)\ .$$

Soient M une variété différentielle C^∞, et ω une 2-forme différentielle C^∞ non dégénérée sur M.

(1) Soit n un entier positif non nul. On suppose dans cette question que $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, et on note $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées canoniques sur M. Montrer que

$$\Omega_n = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

est une 2-forme différentielle C^∞ non dégénérée et exacte sur M.

(2) Pour toute application $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X_f de classe C^∞ sur M tel que

$$i_{X_f}\omega = -df \ .$$

(3) Si $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\omega = \Omega_n$, et $f : (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2$, calculer X_f.

(4) Montrer qu'une application $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ est constante sur chaque courbe intégrale de X_f.

(5) On suppose que $M = G$ est un groupe de Lie, et que ω est G-invariante (i.e. que $(L_g)^*\omega = \omega$ pour tout g dans G, où $L_g : x \mapsto gx$ est la translation à gauche sur G). Si $f : G \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes de Lie, montrer que X_f est un champ de vecteurs invariant à gauche.

Réciproquement, si X_f est un champ de vecteurs invariant à gauche, est-ce que $f : G \to \mathbb{R}$ est un morphisme de groupes de Lie ? Si $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe une 2-forme différentielle non dégénérée ω telle que $\omega_e(X, Y) = \mathrm{Im}\ (\mathrm{tr}(X\ Y^*))$, où tr est la trace et Y^* la matrice adjointe, et si $f = \mathrm{Im}\ \det$, calculer $X_f(e)$. Est-ce que ω est alors fermée ?

(6) Si f et g sont deux applications C^∞ de M dans $\mathbb{R}$, on appelle *crochet de Poisson*, et on note $\{f, g\}$, l'application $x \mapsto \omega_x(X_f(x), X_g(x))$ de classe C^∞. Montrer que

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \ ,$$

$$\{f, g\} = dg(X_f) = -\mathcal{L}_{X_g}(f) \ ,$$

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g \ ,$$

cette dernière identité s'appelant l'*identité de Leibnitz*.

(7) Soient $f, g : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, montrer que g est constante sur les courbes intégrales de X_f si et seulement si $\{f, g\} = 0$.

(8) a) Pour tous les champs de vecteurs X, Y de classe C^∞ sur M, montrer, en commencant par les 0-formes différentielles et leurs différentielles, l'égalité suivante entre applications de $\Omega(M)$ dans $\Omega(M)$:

$$i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X \ .$$

b) On suppose que ω est fermée. Soient $f, g, h : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, montrer que

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$$

et que

$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0\ ,$$

cette dernière identité s'appelant l'*identité de Jacobi* du crochet de Poisson.

6.8 Indications pour la résolution des exercices

Schème E.136 C'est une application du théorème de dérivation des fonctions composées. Pour tout x dans M et X dans T_xM, on a

$$(f^*dg)_x(X)=dg_{f(x)}(T_xf(X))=T_{f(x)}g(T_xf(X))=T_x(g\circ f)(X)=d(g\circ f)_x(X)\ .$$

Schème E.137 (1) Pour tout x dans X et $X_1,\dots,X_n$ dans T_xM, on a

$$\begin{aligned}\varphi^*(i_X\omega)_x(X_1,\dots,X_n)&=(i_X\omega)_{\varphi(x)}(T_x\varphi(X_1),\dots,T_x\varphi(X_n))\\&=\omega_{\varphi(x)}(X(\varphi(x)),T_x\varphi(X_1),\dots,T_x\varphi(X_n))\\&=(\varphi^*\omega)_x\big((T_x\varphi)^{-1}X(\varphi(x)),X_1,\dots,X_n\big)\\&=(i_{\varphi^*X}(\varphi^*\omega))_x(X_1,\dots,X_n)\ .\end{aligned}$$

(2) L'assertion (iv) découle alors de l'assertion (iii) en utilisant la commutation de la dérivation extérieure et de l'image réciproque ($\varphi^*(d\,\eta)=d(\varphi^*\eta)$ pour toute forme différentielle η sur N).

Schème E.138 (1) C'est la définition.

(2) C'est la formule de l'exemple (2) à la fin du paragraphe sur la différentielle extérieure.

(3) Comme $\mathcal{L}_X(dx_i)=d(X_i)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\,dx_j$, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n)&=\sum_{i=1}^n dx_1\wedge\cdots\wedge\mathcal{L}_X(dx_i)\wedge\cdots\wedge dx_n\\&=\sum_{i=1}^n\frac{\partial X_i}{\partial x_i}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_i\wedge\cdots\wedge dx_n\\&=(\operatorname{div}X)\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\ .\end{aligned}$$

Schème E.139 L'application $\omega\mapsto(\omega_{|M_i})_{i\in I}$ est un isomorphisme de l'algèbre $\Omega(M)$ dans l'algèbre produit $\prod_{i\in I}\Omega(M_i)$, qui commute avec les différentielles. Le résultat s'en déduit par passage au quotient.

Schème E.142 (1) Soient M une variété C^∞, N une variété orientée C^∞ et $p:M\to N$ un revêtement C^∞. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des cartes (U,φ) de M telles qu'il existe une carte orientée (V,ψ) de N telle que $p_{|U}:U\to V$ soit un difféomorphisme C^∞, et $\varphi=\psi\circ p_{|U}$. Il est immédiat que $\mathcal{A}$ est un atlas de cartes sur M, orienté (car ses changements de cartes sont des changement de cartes orientées de N). Par définition, p préserve l'orientation, et tout atlas de carte orienté maximal sur M tel que p préserve l'orientation contient $\mathcal{A}$. Le résultat en découle. De plus tout automorphisme de revêtements préserve donc l'orientation.

(2) Si $G\backslash M$ est orientée, alors G, qui agit par automorphismes de revêtements, préserve l'orientation. Si G préserve une orientation et si $\pi:M\to G\backslash M$ est la projection canonique,

alors l'atlas des cartes $(\pi(U), \varphi \circ \pi_{|U}^{-1})$, où (U, φ) est une carte locale de M telle que $\pi_{|U}$ soit un difféomorphisme de U sur un ouvert de $G\backslash M$, est orienté, et convient.

(3) Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit librement mais en ne préservant aucune des deux orientations sur l'anneau $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R}$, par $(e^{i\theta}, t) \mapsto (e^{i(\theta+\pi)}, -t)$. Donc par la question (2), le ruban de Mobius $(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ n'est pas orientable.

(4) L'action par antipodie du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur la sphère $\mathbb{S}_n$ (munie de son orientation usuelle) préserve une orientation si et seulement si n est impair. Donc par (2), l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{S}_n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est orientable si et seulement si n est impair.

(5) Soit $\tilde{M}$ l'ensemble des couples (x, ε) où x est un point de M et ε une des deux orientations de T_xM, et $\pi : \tilde{M} \to M$ l'application $(x, \varepsilon) \mapsto x$. Si $f : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels réels de dimension finie, et ε une orientation de E (par exemple la classe d'une base $\mathcal{B}$ de E), notons $f_*\varepsilon$ l'orientation image par f de ε (par exemple la classe de la base $f(\mathcal{B})$ de F). Soient ε_- et ε_+ les deux orientations de $\mathbb{R}^n$. Pour toute carte locale (U, φ) de M à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, notons $\varphi_\pm : \varphi(U) \to \tilde{M}$ la bijection sur son image définie par $y \mapsto (\varphi^{-1}(y), (T_y\ \varphi^{-1})_*(\varepsilon_\pm))$. Munissons $\tilde{M}$ de la topologie la plus fine rendant continue les applications $\varphi_\pm$. Comme pour la construction du fibré tangent (voir la partie 3.3), on montre que l'atlas formé des $(\varphi_\pm(\varphi(U)), \varphi_\pm^{-1})$ sur l'espace topologique $\tilde{M}$ définit une structure de variété C^∞ sur $\tilde{M}$, telle que $\pi : \tilde{M} \to M$ soit un revêtement à deux feuillets, qui est orientable. Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit librement sur $\tilde{M}$ par $(x, \varepsilon) \mapsto (x, -\varepsilon)$, où $-\varepsilon$ est l'orientation opposée de ε, et $\pi : \tilde{M} \to M$ induit par passage au quotient un C^∞-difféomorphisme de $\tilde{M}/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ dans M. Un argument de connexité par arc montre que si M est connexe non orientable, alors $\tilde{M}$ est connexe. Si $\tilde{M}$ est connexe, et si $\pi : \widehat{M} \to M$ est un autre revêtement orientable à deux feuillets, alors l'application p se relève par π en une application $\widehat{p} : \widetilde{M} \to \widehat{M}$, qui est un isomorphisme de revêtements.

Schème E.144 (1) Dans $d\omega$, tous les termes donnent, après être réordonnés, un $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Ainsi,

$$d\omega = n\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Pour calculer $A^*\omega$, on peut utiliser une méthode astucieuse ou une méthode calculatoire, cette dernière étant plus à même d'être utilisée dans d'autres situations. Notons que $A^*(dx_i) = \sum_j A_{ij} dx_j$, si bien que

$$\begin{aligned} &A^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \left(\sum_{\sigma:[1,n]-\{i\}\to[1,n]-\{k\}} \epsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} \ldots A_{n\sigma(n)} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Le coefficient qui apparaît, soit C_{ik}, est le déterminant de la matrice formée à partir de A en retirant la i-ème ligne et la k-ème colonne.

Comme $A^*(x_i) = \sum A_{ir} x_r$, on obtient finalement, en notant $\omega_k = dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \ldots \wedge dx_n$, que

$$\begin{aligned} A^* \left(\textstyle\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i \omega_i \right) &= \textstyle\sum_{i,k,r} (-1)^{i-1} A_{ir} x_r C_{ik} \omega_k \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{r=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k}\, {}^tC_{ki} A_{ik} \right) x_r \right) \omega_k. \end{aligned}$$

La matrice $(-1)^{i+k}\, {}^tC$ est la transposée de la comatrice de A, donc son produit avec A donne $\det(A)\mathrm{Id}$. Finalement, il reste que $A^*\omega = \det(A)\omega$.

Pour une méthode plus rapide, remarquons que

$$\omega(x).(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \ .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(A^*\omega)(x).(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= \omega(Ax).(A\xi_1, \dots, A\xi_{n-1}) = \det(Ax, A\xi_1, \dots, A\xi_{n-1}) \\ &= \det(A)\det(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det(A)\omega(x).(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})\end{aligned}$$

i.e. $A^*\omega = \det(A)\omega$.

Schème E.145 (1) Si $y_1, \dots, y_m$ est une autre base de W, il existe une matrice A dans $\mathrm{GL}(W)$ envoyant x_i sur y_i. Alors $y_1 \wedge \dots \wedge y_m = (\det A)\ x_1 \wedge \dots \wedge x_m$.

Ainsi, l'application $W \mapsto [x_1 \wedge \dots \wedge x_m]$ est bien définie. Pour montrer qu'elle est injective, il s'agit de voir que, si $x_1 \wedge \dots \wedge x_m = \alpha\, y_1 \wedge \dots \wedge y_m$, alors $\mathrm{Vect}(x_1, \dots x_m) = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_m)$. On complète $x_1, \dots, x_m$ en une base $x_1, \dots, x_n$. On peut écrire $y_i = \sum a_{ij}x_j$. Alors

$$y_i \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}x_j \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k.$$

Mais $y_i \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \alpha y_i \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_k = 0$. Par conséquent, $a_{ij} = 0$ pour $j > k$. Ainsi, $y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, ce qui conclut.

(2) Soit P l'application de Plücker. On va montrer que c'est un difféomorphisme local en chaque point de $\mathcal{G}_m(E^*)$. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaire à la source et au but, il suffit de travailler au voisinage de $W = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ (avec $P(W) = [1 : 0 : \dots : 0]$).

La coordonnée canonique de $\mathcal{G}_m(E^*)$ au voisinage de W est donnée par $\phi : A \mapsto \mathrm{Im}\begin{pmatrix} I_k \\ A \end{pmatrix}$ lorsque $A \in \mathcal{M}_{n-k,k}$. Une base de $\phi(A)$ est $e_1 + Ae_1, \dots, e_m + Ae_m$. On peut écrire

$$(e_1 + Ae_1) \wedge \dots \wedge (e_m + Ae_m) = e_1 \wedge \dots \wedge e_m + \sum_{I \neq \{1,\dots,m\}} a_I(A)e_I,$$

où les fonctions a_I sont polynômiales en A (et donc C^∞). Dans les cartes, l'application P est donnée par $Q : A \mapsto (a_I(A))_{I \neq \{1,\dots,m\}}$; elle est donc polynomiale.

Calculons la dérivée de Q en 0. On a

$$(e_1 + Ae_1) \wedge \dots \wedge (e_m + Ae_m) = e_1 \wedge \dots \wedge e_m + \sum_{i=1}^{m} e_1 \wedge \dots \wedge Ae_i \wedge \dots e_m + O(||A||^2).$$

Mais $Ae_i = \sum_j A_{ji}e_{j+m}$. Ainsi, $dQ_0(A) = ((-1)^{m-i}A_{ji}e_{\{1,\dots,\hat{i},\dots,m,j+m\}})$. Cette différentielle est injective.

Ainsi, P est une immersion injective. Elle est propre puisque $\mathcal{G}_m(E^*)$ est compact. C'est donc un plongement C^∞.

(3) Si $\omega = x_1 \wedge x_2$ avec (x_1, x_2) libre, alors ω est non nulle et $\omega \wedge \omega = 0$. Réciproquement, soit ω telle que $\omega \neq 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$.

Le théorème de réduction des formes bilinéaires antisymétriques assure qu'une forme bilinéaire alternée peut s'écrire dans une certaine base avec une matrice de 0 et des blocs

diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. S'il n'y avait aucun bloc diagonal, on aurait $\omega = 0$, ce qui est absurde. S'il y a exactement un bloc diagonal, alors $\omega = x_1 \wedge x_2$ et on a gagné. Enfin, s'il y a deux blocs diagonaux, alors $\omega = x_1 \wedge x_2 + x_3 \wedge x_4$ où (x_1, x_2, x_3, x_4) forme une base de E^*. On obtient $\omega \wedge \omega = 2x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \neq 0$, ce qui est encore absurde.

(4) Une 2-forme non nulle

$$\omega = a_{12}e_1 \wedge e_2 + a_{31}e_3 \wedge e_1 + a_{14}e_1 \wedge e_4 + a_{23}e_2 \wedge e_3 + a_{24}e_2 \wedge e_4 + a_{34}e_3 \wedge e_4$$

est dans l'image du plongement de Plücker si et seulement si $\omega \wedge \omega = 0$, d'après la question précédente. Mais

$$\omega \wedge \omega = 2(a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24} + a_{14}a_{23})\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Ainsi, l'image de P est donnée par la surface d'équation $a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$.

Dans les coordonnées indiquées dans l'énoncé de l'exercice, cette équation devient $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Ainsi, $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ est difféomorphe à la sous-variété

$$E = \{[x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3] \in \mathbb{P}_5(\mathbb{R}) \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\}.$$

Cet ensemble est le quotient de $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$ par l'action diagonale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Schème E.146 C'est simplement le théorème classique de réduction des matrices antisymétriques dans les bases orthonormées, qui affirme qu'une matrice antisymétrique peut se réduire, dans une base orthonormée, en une matrice diagonale par blocs avec des blocs de la forme $B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Ce théorème peut se démontrer en complexifiant, en vérifiant que les valeurs propres de A sont nécessairement imaginaires pures et que l'orthogonal d'un espace propre est stable par A. Pour revenir au cas réel, on remarque que si $u + iv$ est vecteur propre de A pour une valeur propre $i\alpha$, alors $v + iu$ est vecteur propre pour $-i\alpha$.

(2) On calcule :

$$\begin{aligned} T^*\omega \wedge T^*\omega &= \lambda dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \mu dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\lambda + \mu) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4. \end{aligned}$$

Comme T^{-1} est de déterminant 1, on en déduit que

$$\omega \wedge \omega = T^{-1*}(T^*\omega \wedge T^*\omega) = (\lambda + \mu) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \ .$$

(3) Soit A la matrice de ω, digonale par blocs dans une base orthonormale bien choisie, avec des blocs B_λ et B_μ. Matriciellement, l'égalité $T^*\omega = \omega$ pour $T \in \mathrm{SO}(4)$ se traduit par $TAT^{-1} = A$. Après complexification, la matrice A possède 4 valeurs propres distinctes $i\lambda, -i\lambda, i\mu, -i\mu$. En particulier, ses espaces propres sont stabilisés par T. En revenant en réel, on obtient que T stabilise $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$, et elle est donc diagonale par blocs avec deux blocs $T_1, T_2 \in \mathrm{O}(2)$.

L'un des deux coefficients λ et μ est non nul, mettons $\lambda \neq 0$. On identifie les coefficients dans l'équation $T_1 B_\lambda = B_\lambda T_1$, et on trouve que T_1 est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Par

conséquent, $\det(T_1) = a^2 + b^2 \geq 0$, donc $T_1 \in \mathrm{SO}(2)$. Réciproquement, toute matrice de $\mathrm{SO}(2)$ commute avec B_λ. Comme $\det(T_2) = \det(T_1)$, on a aussi $T_2 \in \mathrm{SO}(2)$.

Finalement, l'ensemble des matrices recherché est $\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$.

Schème E.149 (1) Quand on développe $\omega_0^{\wedge n}$, tous les termes vont se simplifier car il y aura répétition d'un dx_i, à l'exception de $\omega_1 = a_1 \dots a_n \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2n}$. Il y a $n!$ manières de l'obtenir, et le réarrangement est toujours pair, si bien que $\omega_0^n = n! \, a_1 \dots a_n \, \omega_1$.

(2) Faisons les calculs en coordonnées, en considérant une base de E et la base duale de E^*, si bien que l'accouplement est donné par $\langle p, u \rangle = \sum_i p_i u_i$. Ainsi, $\omega(q,p) = \sum_i p_i dq_i$. La formule de la différentielle extérieure en coordonnées donne $d\omega(q,p) = \sum dp_i \wedge dq_i$, i.e.

$$d\omega(q,p).((u_1,v_1),(u_2,v_2)) = \sum_i (v_1)_i (u_2)_i - (v_2)_i (u_1)_i = \langle v_1, u_2 \rangle - \langle v_2, u_1 \rangle.$$

La notation $dp \wedge dq$ est un peu trompeuse : appliquée à $((u_1,v_1),(u_2,v_2))$, on voudrait écrire formellement que cela donne $v_1 u_2 - v_2 u_1$, sauf que l'on a affaire à des vecteurs et pas des nombres. Cependant, comme il y a un accouplement naturel entre les espaces, on est tenté d'interpréter $v_1 u_2$ comme $\langle v_1, u_2 \rangle$, ce qui correspond bien à la formule correcte. Plus formellement, on peut interpréter dp comme une 1-forme différentielle à valeurs dans E^* et dq à valeurs dans E, si bien que $dp \wedge dq$ serait une 2-forme à valeurs dans $E^* \otimes E$. L'abus de notation est là : on suppose implicitement que l'on applique en plus directement l'accouplement $E^* \otimes E \to \mathbb{R}$.

Remarque. Dans le même genre, on écrit souvent $\omega = p \, dq$, qui s'interprète de la même façon.

(3) Un changement local de coordonnées permet de se ramener à la question précédente. En changeant l'ordre des coordonnées, on vérifie de plus que $d\omega$ est égale à la forme ω_0 de la première question avec $a_0 = \dots a_n = 1$, ce qui montre que $(d\omega)^n$ est partout non nul.

Schème E.150 L'implication $\Rightarrow$ est évidente. Pour l'autre implication, montrons d'abord le résultat au voisinage d'un point p arbitraire. Comme $\omega(p) \neq 0$, on peut le compléter par $\omega_2, \dots, \omega_n$ en une base du dual de $\mathbb{R}^n$. Comme le fait d'être une base est ouvert, $(\omega(x), \omega_2, \dots, \omega_n)$ reste une base pour x proche de p. Décomposons $d\omega$ sur la base des $\omega_i \wedge \omega_j$ (pour $i < j$, et en notant $\omega_1 = \omega$). Comme $d\omega \wedge \omega = 0$, on obtient que les coefficients des $\omega_i \wedge \omega_j$ sont nuls pour $i, j \geq 2$, i.e. $d\omega = \theta \wedge \omega$ pour un certain θ.

Pour chaque point p, on a construit un ouvert U_p voisinage de p sur lequel $d\omega = \theta_p \wedge \omega$ pour une certaine 1-forme θ_p. La théorie des partitions de l'unité assure qu'il existe des fonctions ϕ_p de classe C^∞ à support dans U_p telles que, au voisinage de chaque point, seul un nombre fini de ces fonctions soit non nul, et avec $\sum \phi_p = 1$. Posons alors $\theta = \sum \phi_p \theta_p$, il vérifie bien $d\omega = \theta \wedge \omega$.

Remarque. La fin de l'argument est si classique qu'elle s'abrège souvent par "on conclut en prenant des partitions de l'unité".

Schème E.151 (1) Même s'il existe des méthodes plus intrinsèques, un calcul en coordonnées est toujours sûr d'aboutir. En décomposant composante par composante, on peut supposer que $\omega(x) = f(x) dx_1$. Alors $\omega(Y) = f(x) Y_1(x)$, si bien que $X \cdot \omega(Y) = (X \cdot f) Y_1 + f.(X \cdot Y_1)$. De même, $Y \cdot \omega(X) = (Y \cdot f) X_1 + f.(Y \cdot X_1)$. Finalement,

$\omega([X,Y]) = f(X \cdot Y - Y \cdot X)_1 = f(X \cdot Y_1 - Y \cdot X_1)$. En réunissant ces formules, on trouve que

$$X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X,Y]) = (X \cdot f)Y_1 - (Y \cdot f)X_1.$$

De plus, $d\omega = -\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge dx_j$, si bien que

$$d\omega(X,Y) = -\sum \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_1 Y_j - X_j Y_1) = -X_1(Y \cdot f) + Y_1(X \cdot f).$$

Les deux expressions coïncident bien.

(2) On peut écrire $d\alpha_1 = \lambda \alpha_1 \wedge \alpha_2$, puisque en chaque point $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ forme une base de $\Lambda^2(E)^*$. Pour identifier la fonction λ, on applique l'égalité aux vecteurs (X_1, X_2), et on obtient :

$$\lambda = d\alpha_1(X_1, X_2) = X_1 \cdot \alpha_1(X_2) - X_2 \cdot \alpha_1(X_1) - \alpha_1([X_1, X_2]).$$

Comme $\alpha_1(X_2)$ et $\alpha_1(X_1)$ sont des constantes, on obtient 0 en les dérivant suivant X_1 ou X_2, si bien qu'il reste juste $-\alpha_1([X_1, X_2]) = -\alpha_1(fX_1 + gX_2) = -f$.

On procède de même pour α_2.

(3) La méthode est exactement la même que dans la question précédente, sauf qu'on décompose $d\alpha_i$ sur la base des $\alpha_i \wedge \alpha_j$ $(i < j)$, et qu'on obtient le coefficient de $\alpha_i \wedge \alpha_j$ en l'appliquant aux vecteurs (X_i, X_j).

Remarque. Il est beaucoup plus agréable de calculer des produits extérieurs de formes différentielles que des crochets de Lie de champs de vecteurs. Cet exercice montre cependant que les deux points de vue sont complètement équivalents. Ainsi, dès que l'on a des calculs à faire en géométrie, il est souvent profitable de prendre un point de vue "formes différentielles".

Schème E.155 D'après la formule de Stokes sur les pavés, on a $\int_{\partial P_\epsilon} \omega = \int_{P_\epsilon} d\omega$. Complétons $v_1, \dots, v_{p+1}$ en une base $v_1, \dots, v_n$ de l'espace. On peut alors écrire $d\omega = \sum_{|I|=p+1} f_I dv_I$. Si $I \neq I_0 = \{1, \dots, p+1\}$, la restriction de dv_I à P est nulle. On obtient donc

$$\int_{P_\epsilon} d\omega = \int_{t_1=0}^{\epsilon} \dots \int_{t_{p+1}=0}^{\epsilon} f_{I_0}(t_1 v_1 + \dots + t_{p+1} v_{p+1}) dv_1 \dots dv_{p+1}.$$

Cette intégrale est équivalente à $f_{I_0}(0)\epsilon^{p+1}$. Autrement dit,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^{p+1}} \int_{\partial P_\epsilon} \omega = d\omega(0).(v_1, \dots, v_{p+1}).$$

Schème E.156 L'application $(x, y, z) \mapsto (x, y + \cos x, z + \sin x)$ est un difféomorphisme de $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 - \{0\})$ sur $\mathbb{R}^3 - \gamma(\mathbb{R})$. Ainsi, ces deux variétés ont même cohomologie. Comme $\mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 - \{0\})$ se rétracte par déformation forte sur $\mathbb{S}_1$, cette cohomologie vaut donc $\mathbb{R}$ en degrés 0 et 1, et 0 ailleurs, et la structure d'algèbre graduée est celle de $\mathbb{S}_1$, voir le corollaire 6.25.

Schème E.157 (1) L'espace $\mathbb{R} \times U$ se rétracte par déformation forte sur U. Comme la cohomologie de de Rham est invariante par équivalence d'homotopie, cela démontre le résultat.

(2) Soient $U = \mathbb{R}^{n+1} - (A \times [0, \infty[)$ et $V = \mathbb{R}^{n+1} - (A \times]-\infty, 0])$. Calculons la cohomologie de U (et de V). L'identité de U est homotope à l'application $(x, z) \mapsto (x, -1)$ (par $F(x, z, t) = (x, -1+t(z-1))$), elle-même homotope à $(x, z) \mapsto (0, -1)$ (par $G(x, z, t) = (tx, -1)$). Ainsi, la cohomologie de U est égale à celle du point.

Comme $U \cap V = \mathbb{R}^{n+1} - A \times \mathbb{R}$, l'identité de $U \cap V$ est homotope à l'application $(x, z) \mapsto (x, 0)$. Ainsi, le plongement de $\mathbb{R}^n - A$ dans $U \cap V$ est un isomorphisme en cohomologie.

Finalement, $U \cup V = \mathbb{R}^{n+1} - A$. On écrit alors la suite exacte de Mayer-Vietoris. Pour $p \geq 1$, comme $H^p(U) \oplus H^p(V) = 0$ et $H^{p+1}(U) \oplus H^{p+1}(V) = 0$, on trouve que $H^p(U \cap V) \simeq H^{p+1}(U \cup V)$, i.e. $H^p(\mathbb{R}^n - A) \simeq H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} - A)$. En petit degré, la suite exacte donne

$$0 \to H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \to \mathbb{R}^2 \to H^0(\mathbb{R}^n - A) \to H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \to 0 \,.$$

Mais $\mathbb{R}^{n+1} - A$ est connexe, donc $H^0(\mathbb{R}^{n+1} - A) \simeq \mathbb{R}$. La suite exacte ci-dessus donne donc $H^1(\mathbb{R}^{n+1} - A) \simeq H^0(\mathbb{R}^n - A)/\mathbb{R}$.

(3) Si V est de dimension s, alors $\mathbb{R}^n - V$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n - (\mathbb{R}^s \times \{0\}^{n-s}) = \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^{n-s} - \{0\})$. Par conséquent, il se rétracte par déformation sur la sphère de dimension $n - s - 1$. Si $s < n - 1$, on a donc $H^i(\mathbb{R}^n - V) = \mathbb{R}$ si $i = 0$ ou $n - s - 1$, et 0 sinon. Pour $s = n - 1$, on a $H^0(\mathbb{R}^n - V) = \mathbb{R}^2$, et $H^i(\mathbb{R}^n - V) = 0$ sinon.

(4) Si $A = \mathbb{R}^n - V_k$ et $B = \mathbb{R}^n - (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1})$, on a $A \cup B = \mathbb{R}^n$, qui a la cohomologie du point. La suite exacte de Mayer-Vietoris donne alors $H^i(A \cap B) \simeq H^i(A) \oplus H^i(B)$ pour $i > 0$, et $H^0(A \cap B) \simeq H^0(A) \oplus H^0(B)/\mathbb{R}$. On en déduit immédiatement par récurrence que, si $i > 0$,

$$\dim H^i(\mathbb{R}^n - (V_1 \cup \cdots \cup V_k)) = \mathrm{Card}\{1 \leq j \leq k \ : \ \dim V_j = n - 1 - i\}$$

tandis que

$$\dim H^0(\mathbb{R}^n - (V_1 \cup \cdots \cup V_k)) = 1 + \mathrm{Card}\{1 \leq j \leq k \ : \ \dim V_j = n - 1\}.$$

(5) L'ensemble $V \cap S$ est soit vide, soit un point, soit une sphère de V (suivant que la distance de V à $\{0\}$ est > 1, $= 1$ ou < 1). Dans le premier cas, la cohomologie de $\mathbb{R}^n - (S \cap V)$ est celle de $\mathbb{R}^n$. Dans le deuxième cas, c'est celle de $\mathbb{S}_{n-1}$.

Il reste à traiter le cas où $S \cap V$ est une sphère de dimension $s - 1$ (où $s = \dim V$). On peut sans perte de généralité supposer que V est le sous-espace vectoriel standard $\mathbb{R}^s \times \{0\}$, auquel cas $V \cap S = \mathbb{S}_{s-1} \times \{0\}$.

Calculons la cohomologie de $\mathbb{R}^s - \mathbb{S}_{s-1}$. Si $s \geq 2$, cet ensemble a deux composantes connexes. La première est contractile (et a donc l'homologie du point), tandis que la seconde est difféomorphe à $\mathbb{R}^s - \{0\}$ (il manque le point à l'infini) et a la cohomologie de $\mathbb{S}_{s-1}$. Ainsi, $H^i(\mathbb{R}^s - \mathbb{S}_{s-1}) = \mathbb{R}^2$ si $i = 0$, $\mathbb{R}$ si $i = s - 1$, et 0 sinon. La question 2 donne alors $H^i(\mathbb{R}^{s+1} - \mathbb{S}_{s-1}) = \mathbb{R}$ si $i = 0, 1$ ou s et 0 sinon. Par récurrence, on obtient $H^i(\mathbb{R}^{s+p} - \mathbb{S}_s) = \mathbb{R}$ si $i = 0, p$ ou $s + p - 1$, et 0 sinon. Finalement, $H^i(\mathbb{R}^n - (S \cap V)) = \mathbb{R}$ si $i = 0, n - s$ ou $n - 1$, et 0 sinon.

Supposons finalement que $s = 1$. Alors $H^i(\mathbb{R}^s - \mathbb{S}_{s-1}) = \mathbb{R}^3$ si $i = 0$, et 0 sinon. En remontant la dimension grâce à la question 2, on obtient $H^i(\mathbb{R}^n - (S \cap V)) = \mathbb{R}$ si $i = 0$, $\mathbb{R}^2$ si $i = n - 1$, et 0 sinon.

Schème E.158 (1) On a $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$. Ainsi, $f^*\omega$ est fermée sur $\mathbb{S}_{2n-1}$. Mais $H^n(\mathbb{S}_{2n-1}) = 0$. Elle est donc exacte. Il existe donc β de degré $n - 1$ telle que $f^*\omega = d\beta$.

(2) Soit β' une autre forme différentielle telle que $d\beta' = d\beta$. Alors $\beta - \beta'$ est fermée. C'est une forme différentielle de degré $n-1$, et $0 < n-1 < 2n-1$ puisque $n > 1$. Comme $H^{n-1}(\mathbb{S}_{2n-1}) = 0$, elle est donc exacte : on peut écrire $\beta' = \beta + du$. Alors

$$\int \beta' \wedge d\beta' = \int \beta \wedge d\beta + \int du \wedge d\beta.$$

Il faut donc vérifier que $\int du \wedge d\beta = 0$. Mais $du \wedge d\beta = d(u \wedge d\beta)$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{S}_{2n-1}} du \wedge d\beta = \int_{\mathbb{S}_{2n-1}} d(u \wedge d\beta) = \int_{\partial \mathbb{S}_{2n-1}} u \wedge d\beta = 0,$$

puisque $\partial \mathbb{S}_{2n-1} = \emptyset$.

(3) Soit ω' une autre forme volume sur $\mathbb{S}_n$ avec $\int \omega' = 1$. Alors $\int(\omega' - \omega) = 0$. Mais l'application "intégrale" est un isomorphisme entre $H^n(\mathbb{S}_n)$ et $\mathbb{R}$, donc $\omega' - \omega$ est exacte : il existe une forme différentielle γ telle que $\omega' = \omega + d\gamma$.

Soit β telle que $f^*\omega = d\beta$. Alors $f^*\omega' = d\beta + d(f^*\gamma)$. Par conséquent,

$$H(f,\omega') = \int (\beta + f^*\gamma) \wedge d(\beta + f^*\gamma) = H(f,\omega) + \int f^*\gamma \wedge d\beta + \int f^*\gamma d(f^*\gamma) + \int \beta \wedge d(f^*\gamma).$$

De plus,

$$\int f^*\gamma \wedge d\beta = \int f^*\gamma \wedge f^*\omega = \int f^*(\gamma \wedge \omega).$$

Comme $\gamma \wedge \omega = 0$ car c'est une forme différentielle de degré $2n-1$ sur $\mathbb{S}_n$, cette intégrale est nulle. De même, $f * \gamma \wedge d(f^*\gamma) = f^*(\gamma \wedge d\gamma) = 0$.

Finalement, $d(\beta \wedge f^*\gamma) = d\beta \wedge f^*\gamma + (-1)^{n-1}\beta \wedge d(f^*\gamma)$. Comme $d\beta \wedge f^*\gamma = 0$, comme ci-dessus, on obtient

$$\int \beta \wedge d(f^*\gamma) = (-1)^{n-1} \int d(\beta \wedge f^*\gamma) = \int_{\partial \mathbb{S}_{2n-1}} \beta \wedge f^*\gamma = 0.$$

Cela montre que $H(f,\omega) = H(f,\omega')$.

Schème E.159 Si ϕ est un difféomorphisme local, on sait que

$$\phi^*(f\omega_0)(x) = J\phi(x) f(\phi(x))\omega_0 \ ,$$

où $J\phi$ est le jacobien de ϕ, c'est-à-dure le déterminant de sa différentielle.

Ici, ϕ est la multiplication à gauche par une matrice M, qui est linéaire donc égale à sa différentielle (le cas de la multiplication à droite est identique). Notons que le déterminant de ϕ est polynomial en les coefficients de la matrice M. Ainsi, il suffit de le déterminer sur un ouvert non vide pour le déterminer partout.

Soit E_{ij} la matrice élémentaire qui a un 1 en position (i,j) et des 0 ailleurs. Quand M est diagonale, $ME_{ij} = M_{ii}E_{ij}$, si bien que dans la base des E_{ij} la multiplication par M est diagonale, et son déterminant est $\prod (M_{ii})^n = \det(M)^n$. On en déduit le même résultat quand M est diagonalisable. Les matrices diagonalisables contenant un ouvert non vide (l'ensemble des matrices à valeurs propres réelles deux à deux disjointes), on obtient la même formule pour M quelconque. Ainsi, $J\phi(A) = \det(M)^n$, puis

$$\phi^*\omega(A) = \det(M)^n \det(AM)^{-n}\omega_0 = \det(A)^{-n}\omega_0 = \omega(A),$$

i.e. ω est invariante.

Pour l'unicité, si $\omega(A) = f(A)\omega_0$ est invariante, on peut supposer que $f(I_n) = 1$. En écrivant la même équation d'invariance que ci-dessus, on en déduit $f(A) = \det(A)^{-n}$.

Remarque. Dès qu'un groupe agit transitivement (i.e. $\forall x, y, \exists g, g(x) = y$) par difféomorphismes sur une variété, il y a de même au plus une forme volume invariante par le groupe sur cette variété, pour les mêmes raisons.

Schème E.160 (1) Notons $U = M - \{P\}$ et V une petite boule autour de P. On va appliquer la suite exacte de Mayer-Vietoris (en cohomologie à support compact) à U et V. Notons que $H_c^k(V) \simeq H^{n-k}(V) = \mathbb{R}$ si $k = n$ et 0 sinon. De même, en utilisant d'abord la dualité de Poincaré, puis le fait que $U \cap V$ se rétracte par déformation forte sur $\mathbb{S}_{n-1}$, on a $H_c^k(U \cap V) \simeq H^{n-k}(U \cap V) = \mathbb{R}$ si $k = 1$ ou n et 0 sinon.

Le début de la suite exacte donne

$$0 \to H_c^0(U \cap V) \to H_c^0(U) \oplus H_c^0(V) \to H_c^0(U \cup V) \to H_c^1(U \cap V) \to \dots.$$

Mais $H_c^0(U \cap V) = H_c^0(V) = 0$. Il reste $0 \to H_c^0(U) \to H_c^0(U \cup V) \to \mathbb{R} \to \dots$. La flèche $H_c^0(U) \to H_c^0(U \cup V)$ n'est pas surjective puisqu'une fonction constante sur un voisinage de P et à support compact est nulle. Ainsi, on a une suite exacte courte $0 \to H_c^0(U) \to H_c^0(U \cup V) \to \mathbb{R} \to 0$.

La fin de la suite exacte est

$$H_c^n(U \cap V) \longrightarrow H_c^n(U) \oplus H_c^n(V) \longrightarrow H_c^n(U \cup V) \longrightarrow 0.$$

Comme la flèche $H_c^n(U \cap V) \to H_c^n(V)$ est un isomorphisme (dans les deux cas, ces espaces sont identifiés avec $\mathbb{R}$ par l'intégration des formes différentielles), on en déduit que $j_* : H_c^n(U) \to H_c^n(M)$ est un isomorphisme.

Finalement, dans les degrés intermédiaires (et compte tenu de ce qui se passe en degré 0 et n), on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow H_c^k(U) \longrightarrow H_c^k(U \cup V) \longrightarrow 0.$$

Autrement dit, j_* est un isomorphisme en degré k.

(2) On peut utiliser la question précédente pour calculer la cohomologie à support compact du tore privé d'un point. Cependant, il est plus rapide de remarquer que le tore privé d'un point se rétracte sur un bouquet de deux cercles, et qu'il en va de même de $\mathbb{R}^2$ privé de deux points. Ainsi, ces deux espaces ont même type d'homotopie. Ils ont donc même cohomologie de de Rham. Par dualité de Poincaré, ils ont même cohomologie à support compact.

Cependant, ils ne sont pas difféomorphes. Par exemple, on peut regarder le nombre de "bouts" (le nombre minimum de composantes connexes non compactes dans le complémentaire d'un ouvert d'adhérence compact) : il y en a 1 pour le tore privé d'un point, et 3 pour le plan privé de deux points.

Schème E.164 $\boxed{\text{Partie I}}$ (1) L'application $f : \mathbb{E} - \{0\} \to \mathbb{R}$, restriction de Q, est C^∞ car polynomiale, et sa différentielle en un point $x = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ est l'application linéaire

$$(X_1, \dots, X_p, Y_1, \dots, Y_q) \mapsto 2\sum_{i=1}^{p} x_i X_i - 2\sum_{j=1}^{q} y_j Y_j \ ,$$

qui est non nulle, car $x \neq 0$, donc surjective car $\mathbb{R}$ est de dimension 1. Donc f est une submersion, et comme p est non nul, 1 est dans l'image de f (*on n'oubliera pas de vérifier cette condition, sinon M serait vide, et la formule de la codimension ne serait pas satisfaite*). Donc par le théorème des submersions, $M = f^{-1}(1)$ est une sous-variété C^∞ de $\mathbb{E} - \{0\}$, donc de $\mathbb{E}$, de codimension 1, donc de dimension $p+q-1$.

(2) Il est immédiat que $\overline{M}$ est l'ensemble des $[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]$ dans $\mathbb{P}$ tels que

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - y_1^2 - \cdots - y_q^2 = x_0^2 \ ,$$

car cet ensemble est fermé, et contient de manière dense M. Pour montrer que $\overline{M}$ est une sous-variété C^∞ de dimension $p+q-1$, il suffit de montrer, par localité, que l'intersection de $\overline{M}$ avec le domaine des cartes affines usuelles de $\mathbb{P}$ est une sous-variété C^∞ de dimension $p+q-1$. Notons U_i l'ouvert de $\mathbb{P}$ défini par $x_i \neq 0$ pour $0 \leq i \leq p$ et, si $q \geq 1$, V_j celui défini par $y_j \neq 0$ pour $1 \leq j \leq q$. Pour $1 \leq i \leq p$, soit $\varphi_i : U_i \to \mathbb{E}_{q+1,p-1}$ la carte locale C^∞ définie par

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \frac{y_1}{x_i}, \ldots, \frac{y_q}{x_i}, \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_p}{x_i} \right) \ ,$$

avec la notation usuelle du chapeau signifiant l'omission du terme. Alors $\varphi_i(U_i \cap \overline{M}) = M_{q+1,p-1}$, qui est une sous-variété C^∞ de dimension $p+q-1$ par (1). Si $1 \leq j \leq q$, soit $\psi_j : V_j \to \mathbb{E}_{p,q}$ la carte locale C^∞ définie par

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q] \mapsto \left(\frac{x_1}{y_j}, \ldots, \frac{x_p}{y_j}, \frac{y_1}{y_j}, \ldots, \widehat{\frac{y_j}{y_j}}, \ldots, \frac{y_q}{y_j}, \frac{x_0}{y_j} \right) \ .$$

Alors $\psi_j(V_j \cap \overline{M}) = M_{p,q}$, qui est une sous-variété C^∞ de dimension $p+q-1$ par (1). Enfin, si $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{E}_{p,q}$ est la carte locale C^∞ définie par

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_p}{x_0}, \frac{y_1}{x_0}, \ldots, \frac{y_q}{x_0} \right) \ ,$$

alors de même, $\varphi_0(U_0 \cap \overline{M}) = M$ est une sous-variété C^∞ de dimension $p+q-1$ de $\mathbb{E}$.

(3) Si $q = 0$, alors $\overline{M} - M$ est vide, donc une sous-variété de dimension $-\infty$. Sinon, $\overline{M}_{p,q} - M_{p,q}$ est l'image par le C^∞-plongement de $\mathbb{P}_{p,q-1}$ dans $\mathbb{P}_{p,q}$ défini par

$$[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_{q-1}] \mapsto [0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_{q-1} : x_0]$$

de $\overline{M}_{p,q-1}$, donc $\overline{M}_{p,q} - M_{p,q}$ est une sous-variété de $\mathbb{P}_{p,q}$ de codimension 2, donc de dimension $p+q-2$.

$\boxed{\text{Partie II}}$ (1) Par I (1), l'espace tangent en $x = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ à M est

$$T_x M = \operatorname{Ker} dQ_x = \{(X_1, \ldots, X_p, Y_1, \ldots, Y_q) \in \mathbb{E} \ : \ \sum_{i=1}^p x_i X_i - \sum_{j=1}^q y_j Y_j = 0\} \ .$$

Donc $A(x), B(x), C(x)$ appartiennent à $T_x M$. De plus, les applications $x \mapsto A(x), x \mapsto B(x), x \mapsto C(x)$ de M dans $\mathbb{E}$ sont C^∞, donc A, B, C sont des champs de vecteurs C^∞ sur la sous-variété M de $\mathbb{E}$. Soit φ_t l'application, clairement de M dans M, définie par

$$(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q) \mapsto (x_1 \cosh t + y_1 \sinh t, x_2 \ldots, x_p, x_1 \sinh t + y_1 \cosh t, y_2, \ldots, y_q) \ .$$

Alors $\varphi_0(x) = x$ et facilement $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = C(\varphi_t(x))$. Par unicité, $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est donc le flot de C. De même, les flots de A et B sont respectivement

$$(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \mapsto (x_1 \cos t + x_2 \sin t, -x_1 \sin t + x_2 \cos t, x_3 \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$$

et

$$(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) \mapsto (x_1, \dots, x_p, y_1 \cos t + y_2 \sin t, -y_1 \sin t + y_2 \cos t, y_3, \dots, y_q) \ .$$

Les trois flots sont définis sur $\mathbb{R}$, donc A, B, C sont complets.

Comme C ne dépend pas de x_2, et A ne dépend pas de y_1, on a

$$[A, C](x) = x_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{x_2}{x_1} C(x) - \frac{y_1}{x_1} A(x) \ ,$$

la dernière égalité étant vérifiée si x_1 est non nul.

(2) On se place dans l'ouvert considéré. Comme $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}$ sont linéairement indépendants, il est immédiat de voir que si la combinaison linéaire $\alpha A(x) + \beta B(x) + \gamma D(x)$ est nulle, alors, puisque $x_1 \neq 0$ et $y_1 \neq 0$, on a $\alpha = \beta = 0$, et donc $\gamma = 0$. Donc par (1), Δ est un champ de 3-plans sur M. Puisqu'il est engendré (en tant que $\mathrm{C}^\infty(M, \mathbb{R})$-module) par des champs de vecteurs C^∞, il est de classe C^∞. Comme ci-dessus, on vérifie que

$$[B, C](x) = y_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{y_2}{y_1} C(x) - \frac{x_1}{y_1} B(x) \ .$$

Clairement $[A, B]$ est le champ de vecteurs nuls. Donc Δ est stable par crochets de champs de vecteurs, et par le théorème de Frobénius, Δ est intégrable dans l'ouvert considéré.

$\boxed{\text{Partie III}}$ (1) Posons

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \ ,$$

avec I_n la matrice unité n-n. Matriciellement, $O(p, q)$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ des matrices inversibles x telles que ${}^t x \ I_{p,q} \ x = I_{p,q}$. Pour montrer que $O(p, q)$ est un sous-groupe de Lie, au moins trois solutions sont possibles :

1. il suffit de remarquer que $O(p, q)$ est le stabilisateur de Q pour l'action (polynomiale, donc C^∞) du groupe de Lie $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ sur l'espace vectoriel (donc la variété C^∞) des formes quadratiques sur $\mathbb{E}$, donc est un sous-groupe de Lie par un résultat de cours ;
2. on peut utiliser le théorème de Cartan, en remarquant que $O(p, q)$ est fermé, par continuité de l'application de $\mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{R})$ dans l'espace vectoriel de dimension finie Sym_{p+q} des matrices carrées symétriques réelles de taille $p + q$ définie par $x \mapsto {}^t x \ I_{p,q} \ x$;
3. par le théorème des submersions, il suffit aussi de remarquer que cette application, qui est C^∞ car polynomiale, est une submersion : sa différentielle en x est l'application de $\mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R})$ dans Sym_{p+q} définie par $y \mapsto {}^t x \ I_{p,q} \ y + {}^t y \ I_{p,q} \ x$, et toute matrice symétrique z de Sym_{p+q} s'écrit de la forme ${}^t x \ I_{p,q} \ y + {}^t y \ I_{p,q} \ x$ avec $y = \frac{1}{2} x \ I_{p,q} \ z \in \mathfrak{gl}_{p+q}(\mathbb{R})$ par exemple.

Les première et troisième méthodes donnent de plus que la dimension de $O(p,q)$ est $(p+q)^2-(p+q)(p+q+1)/2=(p+q)(p+q-1)/2$.

De même, $O(p)\times O(q)$, comme sous-groupe fermé de $O(p,q)$, est un sous-groupe de Lie de $O(p,q)$. Mais, matriciellement, c'est le sous-ensemble des matrices diagonales par blocs p-p et q-q, de premier bloc diagonal dans $O(p)$, et de second bloc diagonal dans $O(q)$, c'est donc une sous-variété de $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, contenue dans $O(p,q)$, donc une sous-variété de $O(p,q)$ qui est un sous-groupe, donc c'est un sous-groupe de Lie de $O(p,q)$.

(2) L'action linéaire de $O(p,q)$ sur $\mathbb{E}$ préserve chaque ligne de niveau de Q, par définition, donc préserve M. Par restriction à une sous-variété C^∞, l'action de $O(p,q)$ sur M est encore C^∞. Montrons qu'elle est transitive.

On peut simplement utiliser le théorème de Witt, en disant que si x,y sont dans M, comme Q est non dégénéré et que $Q(x)=Q(y)\neq 0$, alors il existe un élément de $O(p,q)$ envoyant x sur y. On peut aussi raisonner plus explicitement, comme suit. Comme le groupe orthogonal $O(n)$ agit transitivement sur chaque sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^n$, tout élément de M peut être envoyé, par un élément de $O(p)\times O(q)$, sur un élément de M de la forme $(x_1,0,\dots,0,y_1,0,\dots,0)$ avec $x_1\geq 0, y_1\geq 0$. Écrivons $x_1=\cosh t, y_1=\sinh t$, ce qui est possible car $x_1^2-y_1^2=1$ et $x_1,y_1\geq 0$. Alors, avec les notations de la question II (1), l'élément φ_{-t}, qui est dans $O(p,q)$, envoie $(x_1,0,\dots,0,y_1,0,\dots,0)$ sur $(1,0\dots,0)$, ce qui montre la transitivité.

Soit H le stabilisateur du point $(1,0\dots,0)$. Alors un résultat du cours montre que H est un sous-groupe de Lie de $O(p,q)$, et que M est C^∞-difféomorphe à la variété homogène $O(p,q)/H$.

$\boxed{\text{Partie IV}}$ (1) a⟩ Pour $x=(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ dans M et t dans $[0,1]$, posons

$$h(t,x)=\frac{1}{\sqrt{(x_1^2+\cdots+x_p^2)-(1-t)^2(y_1^2+\cdots+y_q^2)}}(x_1,\dots,x_p,(1-t)y_1,\dots,(1-t)y_q)\ ,$$

qui est bien défini, car le terme sous la racine carrée est strictement positif, et $h(t,x)$ appartient à M.

[Pour une formule plus compliquée, on pouvait aussi prendre la suivante. Pour $x=(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ dans M, posons

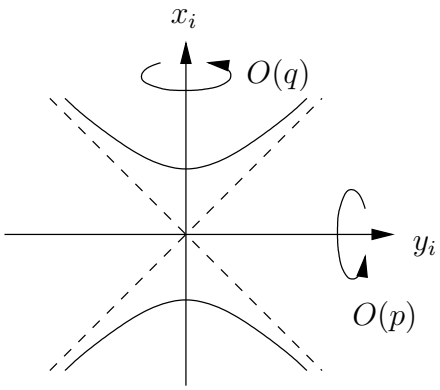
$$t(x)=\operatorname{argcosh}(x_1^2+\cdots+x_p^2)\ ,$$

qui existe car $x_1^2+\cdots+x_p^2\geq 1$, et est continu en x. Pour $s\in[0,1]$, posons $h(x,s)=(x_1(s),\dots,x_p(s),y_1(s),\dots,y_q(s))$ avec

$$x_i(s)=\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\cdots+x_p^2}}\cosh((1-s)t(x))\ \text{ et }\ y_j(s)=\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_q^2}}\sinh((1-s)t(x))$$

si $y_1^2+\cdots+y_q^2\neq 0$, et $y_j(s)=0$ sinon, pour $1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q$.]

Alors $h:M\times[0,1]\to M$ est continue (car $\frac{\sinh(st(x))}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_q^2}}\leq 1$), et $h(x,0)=x, h(x,1)\in M\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\})$ et $h(x,s)=x$ si $x\in M\cap(\mathbb{R}^p\times\{0\})$. Donc h est une rétraction par déformation forte cherchée.



b⟩ Par invariance par équivalence d'homotopie de la cohomologie de de Rham, la variété M admet donc la même cohomologie de de Rham que la sous-variété $M \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$ de M, qui est C^∞-difféomorphe à la sphère de dimension $p-1$. Donc, par le cours,

$$H^k_{\mathrm{DR}}(M) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{si} \quad 0 = k = p-1 \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad 0 = k < p-1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < k < p-1 \\ \mathbb{R} & \text{si} \quad 0 < k = p-1 \\ 0 & \text{si} \quad k > n\ . \end{cases}$$

(2) a⟩ **Méthode 1 :** Si G préserve l'orientation, alors l'atlas de cartes construit pour définir la structure de variété C^∞ de $G\backslash N$ à partir de cartes orientées de N est un atlas de cartes orienté, car obtenu en composant des cartes orientées de N avec des restrictions d'éléments de G.

Réciproquement, en notant π la projection canonique, si $G\backslash N$ est orientable, fixons l'une de ses orientations. Alors N admet une orientation, en prenant pour cartes les $(U, \varphi \circ \pi)$, où (V, φ) est une carte orientée de N, et $\pi : U \to V$ un C^∞-difféomorphisme. Et G préserve par construction cette orientation, car $\pi \circ g = \pi$ pour tout g dans G. Comme N est connexe, elle n'admet que deux orientations possibles, et si G préserve l'une, alors G préserve l'autre. Donc G agit en préservant l'orientation.

Méthode 2 : Si ω est une forme volume de N, si G préserve l'orientation, alors la somme finie $\sum_{g \in G} \omega$ est encore une forme volume (car dans chaque carte locale, le jacobien des g dans G sont de même signe). Cette forme volume est G-invariante par construction, donc définit une forme volume sur $G\backslash N$, et cette variété quotient est par conséquent orientable.

Réciproquement, si $G\backslash N$ est orientable, soit ω une forme volume sur $G\backslash N$ et $\pi : N \to G\backslash N$ la projection canonique, alors $\omega' = \pi^*\omega$ est G-invariante, car $\pi \circ g = \pi$ pour tout g dans G. Comme π est un C^∞-difféomorphisme local, ω' est une forme volume. Puisque $g^*\omega' = \omega'$ pour tout g dans G, le groupe G préserve l'orientation.

b⟩ Considérons l'application C^∞ de $\mathbb{S}_{p-1} \times \mathbb{S}_q$ dans $\overline{M}$, définie par

$$\pi : ((x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_q, x_0)) \mapsto [x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]\ .$$

Cette application est bien définie, par exemple parce que les x_i ne sont pas tous nuls. L'image de π est formée des $[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]$ tels que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 =$

$y_1^2 + \cdots + y_q^2 + x_0^2 = 1$, donc en particulier est contenue dans M. Réciproquement, pour tout élément $[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]$ de $\overline{M}$, en posant $t = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + \cdots + y_q^2 + x_0^2 > 0$, en multipliant les coordonnées homogènes par $t^{-1/2}$, on obtient que cet élément est bien dans l'image de π. L'image réciproque d'un point $[x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]$ de $\overline{M}$, écrit de sorte que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = y_1^2 + \cdots + y_q^2 + x_0^2 = 1$, est exactement $\{\pm((x_1, \ldots, x_p), (y_1, \ldots, y_q, x_0))\}$. Comme π est clairement un C^∞-difféomorphisme local (par exemple par le théorème d'inversion locale en prenant des cartes locales de $\mathbb{P}$), de cardinal des fibres égal à 2, c'est donc un revêtement à deux feuillets. Le groupe $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit librement par $x \mapsto \pm x$ sur $N = \mathbb{S}_{p-1} \times \mathbb{S}_q$, et π induit un C^∞-difféomorphisme de $G\backslash N$ sur $\overline{M}$.

c) Si $q = 0$, alors $\overline{M}$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{S}_{p-1}$, donc est orientable. Si $p = 1$, alors en prenant pour hyperplan à l'infini celui d'équation $x_1 = 0$, qui ne rencontre pas $\overline{M}$, on obtient que $\overline{M}$ est C^∞-difféomorphe à $\mathbb{S}_q$, donc est orientable. Si $(p-1)q \neq 0$, alors $N = \mathbb{S}_{p-1} \times \mathbb{S}_q$ est connexe, et par ce qui précède, $\overline{M}$ est donc orientable si et seulement si l'application $\tau : x \mapsto -x$ de N dans N préserve l'orientation. Or, pour tout (x, y) dans N, l'application $T_{(x,y)}\tau$ est diagonale par blocs de $T_x\mathbb{S}_{p-1} \times T_y\mathbb{S}_q$ dans $T_{-x}\mathbb{S}_{p-1} \times T_{-y}\mathbb{S}_q$, et lorsque ces espaces sont munis de bases positives, produits de bases positives, le signe du déterminant de $T_{(x,y)}\tau$ vaut le produit des signes des déterminants des applications tangentes des antipodies des sphères $\mathbb{S}_{p-1}$ et $\mathbb{S}_q$, donc vaut $(-1)^p(-1)^{q-1} = (-1)^{p+q-1}$.

Donc si $(p-1)q \neq 0$, alors $\overline{M}_{p,q}$ est orientable si et seulement si $p + q$ est impair.

(3) a) Soit $V = \overline{M} - M \cap (\mathbb{R}^p \times \{0\})$. Pour $x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]$ dans V et t dans $[0, 1]$, posons

$$h(x,t) = \left[tx_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 \frac{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_q^2+(1-t^2)x_0^2}}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_q^2}} : \ldots : y_q \frac{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_q^2+(1-t^2)x_0^2}}{\sqrt{y_1^2+\cdots+y_q^2}} \right] ,$$

qui est bien défini et appartient à V.

[Pour une formule plus compliquée, on pouvait aussi prendre la suivante. Soit $x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_p : y_1 : \ldots : y_q]$ dans V, où nous supposerons que $x_0 = 1$ si $x_0 \neq 0$. Remarquons que $y_1^2 + \cdots + y_q^2 \neq 0$, et posons

$$t(x) = \operatorname{argcosh}(x_1^2 + \cdots + x_p^2) ,$$

si $x_0 \neq 0$, qui existe alors car $x_1^2 + \cdots + x_p^2 \geq 1$, et est continu en x tant que $x_0 \neq 0$. Pour $s \in [0, 1]$, posons $h(x, s) = [x_0(s) : x_1(s) : \ldots : x_p(s) : y_1(s) : \ldots : y_q(s)]$ où, pour $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q$, on a $x_i(1) = x_i, y_j(1) = y_j$ et $x_0(1) = 0$, et si $s \neq 0$, alors $x_0(s) = 1$ et

$$x_i(s) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}} \cosh(\frac{1}{1-s} t(x)) \text{ et } y_j(s) = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_q^2}} \sinh(\frac{1}{1-s} t(x))$$

si $x_0 \neq 0$, et $x_0(s) = 0, x_i(s) = x_i, y_j(s) = y_j$ si $x_0 = 0$. Remarquons que si $x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 1 + y_1^2 + \cdots + y_q^2$ tend vers $+\infty$, alors $\cosh \frac{1}{1-s} t(x) \sim \sinh \frac{1}{1-s} t(x)$ uniformément pour s dans $[0, 1[$, et $x_1^2 + \cdots + x_p^2 \sim y_1^2 + \cdots + y_q^2$.]

Alors $h : V \times [0, 1] \to V$ est continue, et $h(x, 0) = x, h(x, 1) \in \overline{M} - M$ et $h(x, s) = x$ si $x \in \overline{M} - M$. Donc h est une rétraction par déformation forte cherchée.

b) Supposons que $q \neq 1$. En posant $U = M$, qui est un ouvert de $\overline{M}$, alors l'ouvert $U \cap V$ de $\overline{M}$ se rétracte par déformation forte sur la sous-variété S de M formée des

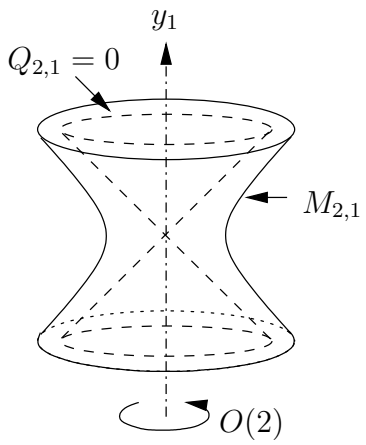
points $x = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ tels que $y_1^2 + \cdots + y_q^2 = 1$ (et donc $x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 2$). Il suffit comme précédemment de considérer l'application $h : (U \cap V) \times [0,1] \to (U \cap V)$, où, pour $s \in [0,1]$ et x dans $U \cap V$, on a $h(x,s) = (x_1(s), \ldots, x_p(s), y_1(s), \ldots, y_q(s))$ avec $t(x) = \operatorname{argcosh}(x_1^2 + \cdots + x_p^2)$ et

$$x_i(s) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}} \cosh((1-s)t(x) + s \operatorname{argcosh} \sqrt{2})$$

et

$$y_j(s) = \frac{y_i}{\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_q^2}} \sinh((1-s)t(x) + s \operatorname{argsinh} 1) \ .$$

On remarque que S est C^∞-difféomorphe à la variété C^∞ produit $\mathbb{S}_{p-1} \times \mathbb{S}_{q-1}$



c) Par ce qui précède, $\overline{M}_{2,1}$ est connexe (car $M_{2,1}$ l'est, ceci parce que $H^0(M_{2,1}) = \mathbb{R}$, mais c'est immédiat sur le dessin, car $M_{2,1}$ est l'hyperboloïde à une nappe), orientable, de dimension 2. Donc $H^0(\overline{M}_{2,1}) \simeq \mathbb{R}$, $H^2(\overline{M}_{2,1}) \simeq \mathbb{R}$ et $H^k(\overline{M}_{2,1}) = 0$ si $k > 2$.

La suite exacte de Mayer-Vietoris donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(\overline{M}_{2,1}) \longrightarrow H^0(U) \times H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow$$

$$H^1(\overline{M}_{2,1}) \longrightarrow H^1(U) \times H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \longrightarrow H^2(\overline{M}_{2,1}) \longrightarrow H^2(U) \times H^2(V) \ .$$

Comme U a le type d'homotopie de $\mathbb{S}_1$, V le type d'homotopie de $\mathbb{S}_1$, et $U \cap V$ le type d'homotopie de $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_0$, on a donc une suite exacte

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to H^1(\overline{M}_{2,1}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to 0 \ .$$

Comme la somme alternée des dimensions d'une suite exacte finie d'espaces vectoriels de dimension finie est nulle, on a donc $H^1(\overline{M}_{2,1}) \simeq \mathbb{R}^2$ (en fait, $\overline{M}_{2,1}$ est C^∞-difféomorphe au tore $\mathbb{T}^2$).

Maintenant, par ce qui précède, $\overline{M}_{2,2}$ est connexe (car $M_{2,2}$ l'est, par exemple parce que $H^0(M_{2,2}) = \mathbb{R}$), non-orientable, de dimension 3. Donc $H^0(\overline{M}_{2,2}) \simeq \mathbb{R}$, et $H^k(\overline{M}_{2,2}) = 0$ si $k \geq 3$. La suite exacte de Mayer-Vietoris donne une suite exacte

$$H^0(\overline{M}_{2,2}) \longrightarrow H^0(U) \times H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(\overline{M}_{2,2}) \longrightarrow H^1(U) \times H^1(V) \longrightarrow$$

$$H^1(U\cap V)\longrightarrow H^2(\overline{M}_{2,2})\longrightarrow H^2(U)\times H^2(V)\longrightarrow H^2(U\cap V)\longrightarrow H^3(\overline{M}_{2,2})\ .$$

Comme U a le type d'homotopie de $\mathbb{S}_1$, V le type d'homotopie de $\overline{M}_{2,1}$, et $U\cap V$ le type d'homotopie de $\mathbb{S}_1\times\mathbb{S}_1$, l'application $H^0(U)\times H^0(V)\to H^0(U\cap V)$ est surjective, et on a donc une suite exacte

$$0\to H^1(\overline{M}_{2,2})\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\to H^2(\overline{M}_{2,2})\to\mathbb{R}^2\to 0\ .$$

Il n'est pas difficile de voir que l'application $H^1(U)\times H^1(V)\to H^1(U\cap V)$ est surjective, donc par exactitude $H^1(\overline{M}_{2,2})\simeq\mathbb{R}$ et $H^2(\overline{M}_{2,2})\simeq\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{Partie V}}$ (1) L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est l'algèbre de Lie des matrices réelles 2-2 de trace nulle. Posons

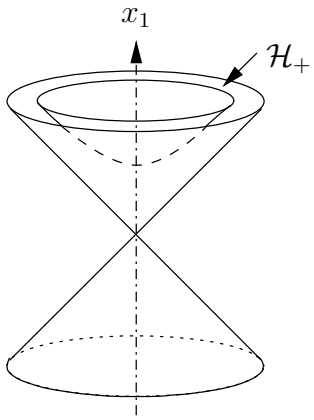
$$X=\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a\end{pmatrix}\ .$$

Alors tr $X^2=2a^2+2bc$. L'application

$$\theta : X\mapsto\left(\frac{b-c}{\sqrt{2}},\frac{b+c}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\,a\right)$$

convient. Si θ' est un autre tel isomorphisme linéaire, alors $\theta'\circ\theta^{-1}$ est un automorphisme linéaire de $\mathbb{E}_{1,2}$, qui préserve $Q_{1,2}$, donc est dans $\mathrm{O}(1,2)$.

(2) Comme $\mathrm{Ad} : g\mapsto\{X\mapsto gXg^{-1}\}$, on a $(\mathrm{Ad}\ g)^*Q'=Q'$ car tr $(gXg^{-1})^2=$ tr X^2. Si $g\in$ Ker Ad, alors g commute avec toute matrice de trace nulle, en particulier avec toute matrice diagonale non nulle de trace nulle, donc g est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et puisqu'elle commute avec $\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, ses coefficients diagonaux sont égaux, et puisque g est de déterminant 1, on a $g=\pm\mathrm{Id}$. Donc le morphisme de groupes de Lie Ad induit un morphisme de groupes de Lie injectif de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$, qui, quand on le conjugue par θ, est un morphisme de groupes de Lie injectif de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{O}(1,2)$. Comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est connexe, son image est contenue dans la composante neutre $\mathrm{O}_0(1,2)$ de $\mathrm{O}(1,2)$. Comme $\mathrm{O}_0(1,2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sont de dimension 3 (par la question III (1)), et puisqu'un morphisme de groupes de Lie est une application de rang constant, on déduit du théorème de forme normale des applications de rang constant que l'image de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ contient un voisinage de l'identité, mais comme l'image est un sous-groupe et que tout voisinage de l'identité d'un groupe de Lie connexe engendre ce groupe de Lie, l'application $g\mapsto\theta\circ(\mathrm{Ad}\ g)\circ\theta^{-1}$ est donc un isomorphisme de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{O}_0(1,2)$.



(3) Soit $\mathcal{H}_+$ la composante connexe de l'hyperboloïde à deux nappes $M_{1,2}$ contenant le point $(1,0,0)$. Alors $\mathrm{O}_0(1,2)$, qui préserve $\mathcal{H}_+$, agit transitivement sur $\mathcal{H}_+$, car $\mathrm{O}(2,1)$ agit transitivement sur $M_{1,2}$, et l'espace homogène $\mathrm{O}(2,1)/\mathrm{O}_0(2,1)$ est discret, car son espace tangent est de dimension nulle, car $\mathrm{O}(2,1)$ et $\mathrm{O}_0(2,1)$ ont même algèbre de Lie. Le stabilisateur du point $(1,0,0)$ dans $\mathrm{O}_0(1,2)$ est, comme le montre un petit calcul, le sous-groupe de Lie H formé des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathrm{S0}(2)$, donc est un groupe de Lie abélien compact. Donc $\rho^{-1}(H)$ est aussi un sous-groupe de Lie abélien compact de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Notons encore $\mathrm{SO}(2)$ le sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ image (injective) de $\mathrm{SO}(2)$ par la projection canonique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Par compacité et un argument de frome de Jordan, tout élément de $\rho^{-1}(H)$ est de valeurs propres de module 1, et de déterminant 1, donc conjugué à un élément de $\mathrm{SO}(2)$. Comme $\rho^{-1}(H)$ est abélien, quitte à conjuger ρ, nous pouvons donc supposer que $\rho^{-1}(H) \subset \mathrm{SO}(2)$, et il y a égalité par un argument de dimension.

Donc ρ induit une bijection, évidemment ρ-équivariante, entre les variétés homogènes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ et $\mathrm{O}_0(1,2)/H$. Par les applications orbitales en i et en $(1,0,0)$, ces espaces homogènes sont, de manière équivariante, C^∞-difféomorphes à $\mathbb{H}$ et $\mathcal{H}_+$ respectivement. Le résultat en découle.

$\boxed{\text{Partie VI}}$ (1) Par le théorème de changement de variable des formes différentielles, l'ensemble cherché est celui des éléments g de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ dont le jacobien (dans la base canonique de $\mathbb{E}$) est égal à 1. Comme la différentielle d'une application linéaire est égale à elle-même, l'ensemble cherché est $\mathrm{SL}(\mathbb{E})$.

(2) Posons $X(x) = x$. Alors X est un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{E}$. Son flot est défini par $\varphi_t(x) = e^t x$ pour tout t dans $\mathbb{R}$ et x dans $\mathbb{E}$, par unicité. En particulier, X est complet. Nous avons vu dans I (1) que T_xM est l'orthogonal de x pour la forme bilinéaire associée à Q. Donc X convient.

(3) Il suffit par linéarité de le montrer si α est une k-forme différentielle. Le calcul est alors sans surprise. Pour tout x dans N et $X_1, \ldots, X_{k-1}$ dans T_xN, on a

$$(g^*(i_Z\alpha))_x(X_1,\ldots,X_{k-1}) = (i_Z\alpha)_{g(x)}(T_xgX_1,\ldots,T_xgX_{k-1}) =$$

$$\alpha_{g(x)}(Z(g(x)),T_xgX_1,\ldots,T_xgX_{k-1}) =$$

$$\alpha_{g(x)}(T_xg(T_xg)^{-1}(Z(g(x))),T_xgX_1,\ldots,T_xgX_{k-1}) =$$

$$(g^*\alpha)_x(g^*Z(x),X_1,\ldots,X_{k-1}) = \left(i_{g^*Z}(g^*\alpha)\right)_x(X_1,\ldots,X_{k-1})\ .$$

(4) En notant encore x_i la restriction à M de la i-ème fonction coordonnée de $\mathbb{E}$, on a par linéarité et puisque $i_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(dx_i \wedge \alpha) = \alpha$,

$$\omega' = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_p \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_q -$$

$$\sum_{j=1}^{q} (-1)^{p+j-1} y_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_p \wedge dy_1 \wedge \ldots \widehat{dy_j} \wedge \cdots \wedge dy_q\ .$$

Comme $x = (x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q)$ ne s'annule pas si x est dans M, la forme différentielle de degré maximal ω' ne s'annule pas sur M, donc ω' est une forme volume sur M.

Comme g est linéaire, sa différentielle en tout point est égale à elle-même, donc $g^*X = X$. Comme $\mathrm{O}_0(p,q)$ est contenu dans $\mathrm{SL}(\mathbb{E})$ (il est en fait égal à $\mathrm{SO}_0(p,q)$), on a par (1) que $g^*\omega = \omega$. Enfin, $\mathrm{O}_0(p,q)$ préserve M, donc g^* commute avec f^*. Donc par la question précédente, $\mathrm{O}_0(p,q)$ préserve ω'.

Par transitivité de $\mathrm{O}_0(p,q)$ sur chaque composante connexe de M, et le fait que l'espace vectoriel des p-formes alternées sur un espace vectoriel de dimension p soit de dimension 1, le résultat en découle.

Schème E.165 Posons $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit $x \in \mathcal{E}_n$. L'application $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\} \to \mathbb{R}$, définie par $X \mapsto {}^tXxX$, est C^∞ car polynomiale, et sa différentielle en un point X est l'application linéaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $Y \mapsto {}^tYxX + {}^tXxY$ qui est non nulle (en prenant $Y = X \neq 0$, car x est définie positive), donc surjective car $\mathbb{R}$ est de dimension 1. Donc f est une submersion, et comme f est non nulle et quadratique, 1 est dans l'image de f (*on n'oubliera pas de vérifier cette condition, sinon la formule de la codimension ne serait pas satisfaite*). Donc par le théorème des submersions, $E_x = f^{-1}(1)$ est une sous-variété C^∞ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}$, donc de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de codimension 1. L'espace tangent en X est le noyau de $Y \mapsto {}^tYxX + {}^tXxY = 2^tXxY$ car x est symétrique. C'est donc l'orthogonal de X pour le produit scalaire défini par x.

(2) a) Soit $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques. La restriction f à $\mathcal{S}$ de l'application déterminant est C^∞ (car polynomiale) et, par multilinéarité, sa différentielle en un point x de $\mathcal{S}$ de vecteurs colonnes $x_1, \ldots, x_n$ est l'application linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H \mapsto \sum_{i=1}^{n} \det(x_1, \ldots, x_{k-1}, H_k, x_{k+1} \ldots, x_n) \ ,$$

où $H_1, \ldots, H_n$ sont les vecteurs colonnes de H. Si x appartient à $\mathcal{E}_n$, alors cette différentielle est non nulle, car en $H = x \in \mathcal{S}$, elle prend la valeur n. Comme I_n appartient à $\mathcal{E}_n$, le sous-ensemble non vide $\mathcal{E}_n = f^{-1}(1)$ est donc une sous-variété C^∞ de $\mathcal{S}$, donc de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n(n+1)/2 - 1$. La connexité (par arcs) de $\mathcal{E}_n$ découle du fait que tout élément de $\mathcal{E}_n$ est diagonalisable en base orthonormée, à valeurs propres réelles strictement positives, et par connexité par arc de l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$ de produit un.

[On pourrait aussi montrer que l'application exponentielle de l'espace des matrices de trace nulle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un C^∞-plongement (au sens de la définition précédent la proposition 2.17), d'image $\mathcal{E}_n$, ce qui entraîne par le cours que $\mathcal{E}_n$ est une sous-variété C^∞.]

b) Pour tout g dans G, l'application g est C^∞ (car restriction à sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une application linéaire), d'inverse g^{-1} à valeurs dans $\mathcal{E}_n$ car $\det(gx\,{}^tg) = 1$ si $\det(g) = \det(x) = 1$, donc est un C^∞-difféomorphisme.

c) L'application $G \times \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ définie par $(g, x) \mapsto gx\,{}^tg$ est une action (à gauche) C^∞ de G sur $\mathcal{E}_n$, transitive (car par un argument de diagonalisation dans une base orthonormée, tout élément de $\mathcal{E}_n$ peut s'écrire sous la forme $g\,{}^tg$ avec g dans G), de stabilisateur du point I_n égal à $\mathrm{SO}(n)$. Donc par le théorème 5.38, l'application orbitale $g \mapsto g\,{}^tg$ en I_n induit un C^∞-difféomorphisme de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n)$ dans $\mathcal{E}_n$.

d) L'application $f : \mathcal{E}_n \times (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\}) \to \mathbb{R}$, définie par $(x, X) \mapsto {}^tXxX$, est C^∞ car restriction d'application polynomiale, et sa différentielle en un point (x, X) est l'application

linéaire de $T_x\mathcal{E}_n \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(Y, Y') \mapsto {}^tY'xX + {}^tXxY' + {}^tXYX$ qui est non nulle (en prenant $Y' = X \neq 0$ et $Y' = 0$), donc surjective car $\mathbb{R}$ est de dimension 1. Donc f est une submersion, et 1 est dans l'image de f. L'ensemble $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ s'identifie à f^{-1} par lapplication $(X \in E_x) \mapsto (x, X)$. Donc par le théorème des submersions, $\widetilde{\mathcal{E}}_n = f^{-1}(1)$ est une sous-variété C^∞ de $\mathcal{E}_n \times (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0\})$. Par restriction, l'application $\pi : (x, X) \mapsto x$ de $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ dans $\mathcal{E}_n$ est C^∞, et les deux structures de sous-variétés sur les fibres coïncident bien. Pour tout x dans $\mathcal{E}_n$, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathcal{E}_n$, et une section $\sigma : \mathcal{E}_n \to G$ de classe C^∞ de la fibration $G \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(n) \simeq \mathcal{E}_n$. L'application $(x, X) \mapsto (x, \sigma(x)X)$ de $\pi^{-1}(U)$ dans $U \times \mathbb{S}_{n-1}$ est une trivialisation locale au-dessus de U de $\widetilde{\mathcal{E}}_n \to \mathcal{E}_n$.

[**Autre méthode :** l'application $\phi : \mathcal{E}_n \times \mathbb{S}_{n-1} \to \widetilde{\mathcal{E}}_n$ définie par

$$(x, X) \mapsto \big(x, \frac{1}{\sqrt{{}^tXxX}} X\big)$$

est une bijection, d'inverse $(x, X) \mapsto (x, \frac{1}{\sqrt{{}^tXX}} X)$. On munit $\mathcal{E}_n \times \mathbb{S}_{n-1}$ de sa structure de variété C^∞ produit, que l'on transporte par ϕ sur $\widetilde{\mathcal{E}}_n$. La première projection $\pi : \mathcal{E}_n \times \mathbb{S}_{n-1} \to \widetilde{\mathcal{E}}_n$ est un fibré trivial sur $\widetilde{\mathcal{E}}_n$, conjugué par ϕ à la projection canonique de $\widetilde{\mathcal{E}}_n$ dans $\mathcal{E}_n$. Donc celle-ci est un fibré C^∞ de fibre $\mathbb{S}_{n-1}$. Comme ϕ, en restriction à la fibre de x, est un C^∞-difféomorphisme sur E_x, le résultat s'en déduit.]

(3) a) Comme $(g \circ g')^* = (g')^* \circ g^*$ et $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$, le sous-ensemble G_α est un sous-groupe. Montrons que G_α est fermé. Il suffit de le faire lorsque α est une p-forme différentielle, car g^* est graduée, et par considération des diverses composantes de α dans $\Omega(G) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Omega^p(G)$. Pour tout x dans $\mathcal{E}_n$ et $X_1, \ldots, X_p$ dans $T_x\mathcal{E}_n$, l'application $g \mapsto (\underline{g}^*\alpha)_x(X_1, \ldots, X_p) = \alpha_{\underline{g}(x)}(T_x\underline{g}(X_1), \ldots, T_x\underline{g}(X_p))$ de G dans $\mathbb{R}$ est C^∞, car α et l'action de G sur $\mathcal{E}_n$ le sont. Donc

$$G_\alpha = \bigcap_{x\in\mathcal{E}_n,\, X_1,\ldots,X_p\in T_x\mathcal{E}_n} \{g \in G \ : \ (\underline{g}^*\alpha)_x(X_1, \ldots, X_p) = \alpha_x(X_1, \ldots, X_p)\}$$

est fermé. Par le théorème de Cartan, c'est donc un sous-groupe de Lie de G.

b) Comme la trace est une application C^∞ sur $\mathcal{E}_n$, sa différentielle α est une 1-forme différentielle exacte. De plus, comme $\underline{g}^*(d\ tr) = d(tr \circ \underline{g})$, et que la différentielle d'une application sur la variété connexe $\mathcal{E}_n$ est nulle si et seulement si l'application est constante, un élément g de G appartient à G_α si et seulement s'il existe une constante c telle que, pour tout x dans $\mathcal{E}_n$, on a

$$\mathrm{tr}\ gx\,{}^tg - \mathrm{tr}\ x = c\ .$$

On en déduit, par les propriétés de la trace, que $\mathrm{tr}\ (g\,{}^tg)^n - \mathrm{tr}\ (g\,{}^tg)^{n-1} = c$ pour tout entier $n \geq 1$. Par sommation alternée, on en déduit que la trace de $(g\,{}^tg)^n$ grandit au plus linéairement. Comme $g\,{}^tg$ est symétrique définie positive, ceci n'est possible que si $g\,{}^tg$ est l'identité. Le résultat s'en déduit.

(4) a) L'application s, qui est bien à valeurs dans $\mathcal{E}_n$ car l'inverse d'une matrice symétrique définie positive l'est encore, est C^∞, comme restriction, à la sous-variété $\mathcal{E}_n$ du groupe de Lie G, de l'application inverse (on peut aussi invoquer la formule donnant l'inverse d'une matrice à l'aide de la matrice des cofacteurs). Comme elle est involutive, c'est donc un C^∞-difféomorphisme. Sa différentielle en I_n est la restriction à $\mathcal{E}_n$ de la différentielle en I_n de l'application inverse de G, c'est donc $X \mapsto -X$.

b) Ceci découle du fait que la différentielle des formes différentielles commute avec les images réciproques, du fait que $\underline{{}^t g^{-1}} \circ s = s \circ \underline{g}$ car pour tout x dans $\mathcal{E}_n$, on a ${}^t(g^{-1})\ x^{-1}\ g^{-1} = (gx\,{}^t g)^{-1}$, et du fait que le groupe G soit stable par la transposition des matrices. En effet, soit α une forme différentielle invariante. Alors pour tout g dans G, on a $\underline{g}^*(d\alpha) = d(\underline{g}^*\alpha) = d\alpha$ et, comme ${}^t g \in G$,

$$\underline{g}^* s^* \alpha = (s \circ \underline{g})^* \alpha = (\underline{{}^t g^{-1}} \circ s)^* \alpha = s^*(\underline{{}^t g^{-1}})^* \alpha = s^* \alpha\ .$$

c) Soit α une forme différentielle invariante. Comme la différentielle est graduée de degré $+1$ et qu'une forme différentielle est invariante si et seulement si chacune de ses composantes dans $\Omega(G) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} \Omega^p(G)$ l'est (car les images réciproques sont graduées de degré 0), on peut supposer que α est une p-forme différentielle. Comme $s(I_n) = I_n$ et ds_{I_n} est l'application $-\mathrm{id}$, on a $(s^*\alpha)_{I_n} = (-1)^p \alpha_{I_n}$. Donc par invariance et transitivité de l'action de G sur $\mathcal{E}_n$, on a $(s^*\alpha) = (-1)^p \alpha$. Comme $d\alpha$ est aussi invariante, de degré $p+1$, on a $(-1)^p d\alpha = d(s^*\alpha) = s^*(d\alpha) = (-1)^{p+1} d\alpha$. D'où $d\alpha = 0$ et α est fermée.

(5) a) Il s'agit clairement d'actions à gauche par C^∞-difféomorphismes. Comme l'action par translation de $\mathbb{Z}^k$ sur le facteur $\mathbb{R}^k$ est propre et libre, il en est de même pour ces actions.

b) Considérons l'application de $\mathbb{R}^k \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^k \times \mathcal{E}_n$ définie par $(t, g) \mapsto (t, g\,{}^t g)$, qui est une fibration C^∞ de fibre $\mathrm{SO}(n)$. Elle passe au quotient en une application C^∞ de M dans N, qui est encore une fibration de fibre $\mathrm{SO}(n)$, car pour tout représentant (t, x) d'un point de N, si U est la boule ouverte de centre t et de rayon $1/2$, si V est un voisinage distingué de x pour la fibration $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}_n$, alors l'image dans N de $U \times V$ est un voisinage distingué de (t, x) pour la fibration de M dans N.

Schème E.166 (1) Les variétés $M_1 = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_4$ et $M_2 = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_4$, comme produits de variétés compactes connexes orientables, sont compactes connexes orientables, de dimension 5 et 6 respectivement. Donc $H_k(M_1)$ est nul pour $k \geq 6$, $H_k(M_2)$ est nul pour $k \geq 7$, et, par connexité et dualité de Poincaré, $H_0(M_1), H_0(M_2), H_5(M_1), H_6(M_2)$ sont isomorphes à $\mathbb{R}$. Toujours par dualité de Poincaré, on a

$$H_1(M_1) \simeq H_4(M_1),\ H_2(M_1) \simeq H_3(M_1),\ H_1(M_2) \simeq H_5(M_2),\ H_2(M_2) \simeq H_4(M_2)\ .$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on identifie $\mathbb{S}_k$ avec son image dans $\mathbb{S}_{k+1}$ par le plongement $(x_0, \cdots, x_k) \mapsto (x_0, \cdots, x_k, 0)$ qui est C^∞. On note $N = (1, 0, \ldots, 0)$ et $S = (-1, 0, \ldots, 0)$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, soit U_k (resp. V_k) le complémentaire de N (resp. S) dans $\mathbb{S}_k$, qui sont des ouverts contractiles, car homéomorphes à $\mathbb{R}^k$, qui recouvrent $\mathbb{S}_k$.

Notons $U = U_1 \times \mathbb{S}_4$, $V = V_1 \times \mathbb{S}_4$, qui sont des ouverts de M_1, qui la recouvrent, et se rétractent par déformation forte sur $\{*\} \times \mathbb{S}_4$, donc ont même type d'homotopie que $\mathbb{S}_4$. De plus, $U \cap V$ a même type d'homotopie que $\mathbb{S}_0 \times \mathbb{S}_4$, qui est une variété ayant deux composantes connexes toutes deux C^∞-difféomorphes à $\mathbb{S}_4$. La suite exacte de Mayer-Vietoris donne donc une suite exacte

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to H_1(M_1) \to 0 \to 0 \to H_2(M_1) \to 0\ ,$$

où la première flèche est l'application $(x, y) \mapsto (x - y, x - y)$. Donc $H_k(M_1) \simeq \mathbb{R}$ pour $k = 0, 1, 4, 5$ et $H_k(M_1) = 0$ sinon.

De la même manière, en considérant les ouverts $U = U_2 \times \mathbb{S}_4$, $V = V_2 \times \mathbb{S}_4$ recouvrant M_2, dont l'intersection a maintenant le même type d'homotopie que M_1, la suite exacte de Mayer-Vietoris donne donc une suite exacte

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \to H_1(M_2) \to 0 \to \mathbb{R} \to H_2(M_2) \to 0 \to 0 \to H_3(M_2) \to 0\ ,$$

où la première flèche $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est surjective (de la forme $(x,y) \mapsto x-y$). Donc $H_k(M_2) \simeq \mathbb{R}$ pour $k = 0, 2, 4, 6$ et $H_k(M_2) = 0$ sinon.

(2) a) On rappelle que les applications $u_p : U_p \to \mathbb{C}^n$ définies par

$$u_p : z \mapsto (u_{p,1}(z), \dots, \widehat{u_{p,p}(z)}, \dots, u_{p,n}(z))$$

sont des cartes locales de la variété $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, donc elles sont C^∞, et par composition, leurs coordonnées aussi. Comme l'application $(w_0, \dots, w_n) \mapsto w_0\overline{w_0} + \cdots + w_n\overline{w_n}$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ est C^∞, par composition par u_p, l'application φ_p est C^∞.

b) Tout d'abord, ω_p est bien une forme différentielle (à priori à valeurs complexes, car les $u_{p,j}$ sont des fonctions C^∞ sur U_p, et toute combinaison linéaire de produits extérieurs de différentielles de fonctions C^∞ est une forme différentielle), en fait à valeurs réelles sur U_p (c'est pour cela que l'on a multiplié par i : si x et y sont les parties réelle et imaginaire d'une application z de classe C^∞ à valeurs complexes, alors $dz = dx + idy$ et

$$dz \wedge d\overline{z} = -2i\, dx \wedge dy\ .$$

Par la propriété de localité (de faisceaux) des formes différentielles, il suffit alors de montrer que ω_p et ω_q coïncident sur $U_p \cap U_q$. Ceci découle du fait que sur $U_p \cap U_q$, on a $du_{p,j} = du_{q,j}\, \frac{z_q}{z_p}$ et $\varphi_p = \varphi_q\, |\frac{z_q}{z_p}|^2$.

c) Il suffit de montrer que ω_p est fermée sur U_p, par les propriétés de localité de la différentielle. Pour simplifier les notations, posons $u_j = u_{p,j}$ et $\varphi = \varphi_p$. On a $\varphi = \sum_{k=0}^n u_k\overline{u_k}$, donc

$$d\left(\frac{1}{\varphi^n}\right) = -n\frac{d\varphi}{\varphi^{n+1}} = \frac{-n}{\varphi^{n+1}} \sum_{\ell=0}^n (du_\ell)\, \overline{u_\ell} + u_\ell d\,\overline{u_\ell}\ .$$

Donc, après permutations et renumérotation, on a

$$\sum_{j=0}^n d\left(\frac{1}{\varphi}\right) \wedge du_j \wedge d\,\overline{u_j} = \sum_{j,k=0}^n \frac{1}{\varphi^2}\, d\,(u_j\,\overline{u_k}) \wedge du_k \wedge d\,\overline{u_j}\ .$$

Comme $d(u_j\overline{u_k}/\varphi^2) = d(u_j\overline{u_k})/\varphi^2 - 2u_j\overline{u_k}d\varphi/\varphi^3$, il suffit donc de montrer que

$$\sum_{j,k=0}^n u_j\,\overline{u_k}\, d\varphi \wedge du_k \wedge d\overline{u_j} = 0\ .$$

Or cette somme vaut

$$\sum_{j,k,\ell=0}^n u_j\,\overline{u_k}\,\overline{u_\ell}\, du_\ell \wedge du_k \wedge d\overline{u_j} + \sum_{j,k,\ell=0}^n u_j\,\overline{u_k}u_\ell\, d\overline{u_\ell} \wedge du_k \wedge d\overline{u_j}\ .$$

La première somme est nulle par permutation de k et ℓ. La seconde est nulle par permutation de j et ℓ.

e) Par le théorème de Stokes, si ω^n est exacte, alors $\int_{\mathbb{P}_n(\mathbb{C})} \omega^n = 0$, ce qui n'est pas possible pour une forme volume. Soit $1 \le k \le n$, alors ω^k n'est pas exacte non plus, car si $\omega^k = d\omega'$, alors puisque ω est fermée, et par la formule de dérivation, on a

$$\omega^n = (d\omega') \wedge \omega^{n-k} = d(\omega' \wedge \omega^{n-k})\ ,$$

et ω^n serait exacte. Par la proposition 6.31, on sait que $H^k(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ vaut $\mathbb{R}$ si k est pair, avec $0 \leq k \leq 2n$, et vaut 0 sinon. Donc la classe de cohomologie de ω^k dans $H^{2k}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$, qui est non nulle, engendre $H^{2k}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$. Donc l'algèbre graduée $H^*(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ est isomorphe à l'algèbre de polynôme tronquée $A = \mathbb{R}[X]/(X^{n+1}\mathbb{R}[X])$ de graduation $A = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A_k$ avec $A_k = \mathbb{R}X^k$ si k est pair et au plus $2n$, et 0 sinon.

(3) Les espaces vectoriels réels gradués $H^*(\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_4)$ et $H^*(\mathbb{P}_3(\mathbb{C}))$ sont donc isomorphes par ce qui précède, mais les algèbres graduées $H^*(\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_4)$ et $H^*(\mathbb{P}_3(\mathbb{C}))$ ne sont pas isomorphes, car si ω est un élément non nul de $H^2(\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_4)$, alors ω^2 est nul, tandis que si ω est un élément non nul de $H^2(\mathbb{P}_3(\mathbb{C}))$, alors ω^2 est non nul. Par invariance par homéomorphisme de l'algèbre de cohomologie de de Rham, les variétés $\mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_4$ et $\mathbb{P}_3(\mathbb{C})$ ne sont donc pas homéomorphes.

(4) c) Soient A (resp. B) les ouverts de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ formés des $[z_1 : z_2]$ tels que $|z_1| < |z_2|$ (resp. $|z_1| > |z_2|$), dont la réunion est de complémentaire de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (une partie d'une variété C^∞ est dite de mesure de Lebesgue nulle si son image dans toute carte locale C^∞ est nulle, ce qui est bien défini, car les applications C^∞ préservent les ensembles de mesure nulle de $\mathbb{R}^n$; l'intégrale d'une forme différentielle de degré maximum sur une partie de mesure nulle d'une variété compacte orientée est nulle). Sur un voisinage de A (resp. B), l'application $u_1 : A \to \mathbb{C}$ (resp. $u_2 : B \to \mathbb{C}$) définie par $[z_1 : z_2] \mapsto z_1/z_2$ (resp. $[z_1 : z_2] \mapsto z_2/z_1$) est une carte locale, et la forme différentielle $i^*\omega$ coïncide avec $\frac{i}{1+|u_1|^2}\, du_1 \wedge d\overline{u_1}$ (resp. $\frac{i}{1+|u_2|^2}\, du_2 \wedge d\overline{u_2}$) sur les ouverts A et B. De plus, le jacobien du changement de carte, qui est $z \mapsto \frac{1}{z}$, sur le complémentaire de $A \cup B$ est 1. Comme $dz \wedge d\overline{z} = -2i\, dx \wedge dy$, on a donc

$$\int_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})} f_{1,n}^*\omega = 2\int_{|z|\leq 1} \frac{1}{1+|z|^2}\, 2dxdy = 4\pi \int_0^1 \frac{2r\, dr}{1+r^2} = 4\pi \log 2\ .$$

Schème E.167 (1) Ceci découle du fait que $X_k(M)$ est ouvert dans M^k (comme complémentaire d'un fermé) et que l'application considérée est la restriction à cet ouvert de la i-ème projection de M^k dans M, qui est une submersion C^∞, par les propriétés des variétés produits.

(2) L'application $f : X_k(M) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{i,j=1}^k ||x_i - x_j||^2$ est de classe C^∞, et 1 est dans son image (car f est positive, n'est pas l'application nulle car $k \geq 2$, et est homogène : $f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k) = \lambda^2 f(x_1, \ldots, x_k)$). La i-ème différentielle partielle de f est

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : h = (h_1, \ldots, h_k) \mapsto 4\langle h_i, \sum_{j\neq i} x_i - x_j\rangle\ .$$

Si pour tout $1 \leq i \leq k$ on a $\sum_{j\neq i} x_i - x_j = 0$, alors par différence, $x_1 = x_2$, ce qui est impossible dans $X_k(\mathbb{R}^n)$. Soit donc i tel que $1 \leq i \leq k$ et $h_i = \sum_{j\neq i} x_i - x_j \neq 0$. Posons $h_j = 0$ pour $j \neq i$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x_i}(h_0 \ldots, h_k) = 2||h_i||^2$ est non nul, et donc la différentielle de f est surjective en tout point de l'ouvert $X_k(\mathbb{R}^n)$. Par le théorème des submersions, $f^{-1}(1)$ est donc une sous-variété C^∞ de $X_k(\mathbb{R}^n)$.

(3) Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ est fini, et l'action à gauche de $\mathfrak{S}_k$ sur $X_k(M)$ définie par $(\sigma, (x_1, \ldots, x_k)) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(k)})$ est une action par C^∞-difféomorphismes, qui est libre car si $(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(k)}) = (x_1, \ldots, x_k)$, alors $x_{\sigma^{-1}(i)} = x_i$ pour tout i, donc

$\sigma^{-1}(i) = i$ pour tout i, car on est dans $X_k(M)$, donc $\sigma = \mathrm{id}$. Le résultat découle alors de la construction des structures de variété quotient par une action libre et propre par C^∞-difféomorphismes d'un groupe discret.

(4) Soient $(a,b) \in X_2(\mathbb{S}_n)$, $\theta \in]0,\pi]$ l'angle de a à b, et $\mathcal{O} = G \cdot (a,b)$. Si $b = -a$, alors $\mathcal{O}$ est l'image par le C^∞-plongement $x \mapsto (x,-x)$ de $\mathbb{S}_n$ dans $X_2(\mathbb{S}_n)$ (car C^∞, injectif, immersif en regardant la première coordonnée, et de source compacte), donc est une sous-variété. Supposons donc $\theta < \pi$. Comme G préserve les angles, et agit transitivement sur les couples de vecteurs unitaires faisant un angle donné, on a $\mathcal{O} = \{(x,y) \in X_2(\mathbb{S}_n) \ : \ \langle x,y\rangle = \cos\theta\}$. L'application $f : X_2(\mathbb{S}_n) \to \mathbb{R}$ définie par $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ est C^∞ (car restriction d'une application bilinéaire à une sous-variété C^∞), et $\cos\theta$ est dans son image. Son application tangente, qui est $Tf_{(x,y)} : (h,\ell) \mapsto \langle h,y\rangle + \langle x,\ell\rangle$, où (h,ℓ) parcourt $x^\perp \times y^\perp$, est surjective pour (x,y) dans $\mathcal{O}$. En effet, on a alors $y \neq -x$ car $\theta < \pi$, donc $x^\perp \neq y^\perp$ (car $x \neq y$), et si par exemple $h \in x^\perp - y^\perp$, alors $Tf_{(x,y)}(h,0) \neq 0$. Donc par le théorème des submersions, $\mathcal{O} = f^{-1}(\cos\theta)$ est une sous-variété C^∞.

Le groupe de Lie G agit donc transitivement, de manière C^∞ par restriction, sur la variété $\mathcal{O}$ de classe C^∞, donc par le théorème sur les espaces homogènes, si $H = G_{(a,b)}$ est le stabilisateur de (a,b) dans G, alors H est un sous-groupe de Lie de G et la bijection canonique $G/H \to \mathcal{O}$ est un C^∞-difféomorphisme.

(5) L'application σ est C^∞, injective, immersive, car s l'est, donc c'est un C^∞-plongement, car $\mathbb{S}_1$ est compacte.

Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ y = x\}$ et $\Delta' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ : \ y = -x\}$. Alors Δ et Δ' sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si $u + v$ est l'écriture d'un vecteur de E dans la décomposition en somme directe $E = \Delta + \Delta'$, alors l'application $(t, u+v) \mapsto (1-t)u + v$ de $[0,1] \times X_2(\mathbb{R}^n) = E - \Delta$ dans $\Delta' - \{0\}$ est une rétraction par déformation forte. Comme $\mathbb{R}^n - \{0\}$ se rétracte par déformation forte sur la sphère $\mathbb{S}_{n-1}$, la variété $X_2(\mathbb{R}^n)$ a donc le même type d'homotopie que $\mathbb{S}_{n-1}$. Comme $n \geq 2$, on a alors, par invariance par homotopie de la cohomologie de de Rham et le calcul de la cohomologie des sphères, $H^p(X_2(\mathbb{R}^n)) \simeq \mathbb{R}$ si $p = 0, n-1$ et $H^p(X_2(\mathbb{R}^n)) = 0$ sinon.

Pour ϵ assez petit, soit V le ϵ-voisinage ouvert de $\sigma(\mathbb{S}_1)$, qui se rétracte par déformation forte sur $\sigma(\mathbb{S}_1)$, donc a le même type d'homotopie que le cercle.

Soit $U = X_2(\mathbb{R}^n) - \sigma(\mathbb{S}_1)$, qui est un ouvert, car $\sigma(\mathbb{S}_1)$ est compacte. Comme $n \geq 2$, l'ouvert U est connexe, donc $H^0(U) = \mathbb{R}$.

Alors $U \cup V = X_2(\mathbb{R}^n)$, qui a le même type d'homotopie que $\mathbb{S}_{n-1}$ par ce qui précède.

De plus, $U \cap V = V - \sigma(\mathbb{S}_1)$ a le même type d'homotopie (par rétraction radiale perpendiculaire à $\sigma(\mathbb{S}_1)$) que la variété produit $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2}$. Un argument élémentaire de suite exacte de Mayer-Vietoris, appliqué aux deux ouverts $(\mathbb{S}_1 - \{(1,0)\}) \times \mathbb{S}_{2n-2}$ et $(\mathbb{S}_1 - \{(-1,0)\}) \times \mathbb{S}_{2n-2}$ dans la variété connexe orientable $\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2}$ montre que $H^p(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2})$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ si $p = 0, 1, 2n-2, 2n-1$, et vaut 0 sinon, car $n \geq 2$.

Soit p un entier positif non nul. La suite exacte de Mayer-Vietoris fournit donc une suite exacte

$$H^{p-1}(\mathbb{S}_{n-1}) \to H^p(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2}) \to H^p(U) \times H^p(\mathbb{S}_1) \to H^p(\mathbb{S}_{n-1}) \to H^{p+1}(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_{2n-2}) \ .$$

Si $p \neq 1, n-1, 2n-2, 2n-1$ alors les termes de part et d'autre de $H^p(U) \times H^p(\mathbb{S}_1)$ s'annulent, donc $H^p(U) = 0$ par exactitude.

Si $p = 2n-1$, comme $n \geq 2$, on a une suite exacte $0 \to \mathbb{R} \to H^p(U) \times \{0\} \to 0$, et $H^p(U) \simeq \mathbb{R}$.

Si $n = 2$, remarquons tout d'abord que l'inclusion de $\sigma(\mathbb{S}_1)$ dans $X_2(\mathbb{R}^2)$ est une équivalence d'homotopie, et on a une suite exacte

$$H^0(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2) \to H^0(U) \times H^0(\mathbb{S}_1) \to H^0(\mathbb{S}_1) \to H^1(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2) \to H^1(U) \times H^1(\mathbb{S}_1)$$

$$\to H^1(\mathbb{S}_1) \to H^2(\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2) \to H^2(U) \times H^2(\mathbb{S}_1) \to H^2(\mathbb{S}_1) = 0\ .$$

La seconde flèche et la cinquième sont surjectives (par la remarque préliminaire). D'où deux suites exactes $0 \to \mathbb{R} \to H^1(U) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to 0$ et $0 \to \mathbb{R} \to H^2(U) \times \{0\} \to 0$, donc (par comptage de dimension) $H^1(U) \simeq \mathbb{R}$ et $H^2(U) \simeq \mathbb{R}$.

Nous pouvons donc supposer $n > 2$. Si $p = 2n-2$, comme $n > 2$, on a encore une suite exacte $0 \to \mathbb{R} \to H^p(U) \times \{0\} \to 0$, et $H^p(U) \simeq \mathbb{R}$. Si $p = n-1$, alors $1 < p < p+1 < 2n-2$, donc on a une suite exacte $0 \to H^p(U) \times \{0\} \to \mathbb{R} \to 0$, d'où $H^p(U) \simeq \mathbb{R}$. Enfin, si $p = 1$, alors on a une suite exacte $0 \to \mathbb{R} \to H^p(U) \times \{\mathbb{R}\} \to 0$, et donc $H^p(U) = 0$.

Pour résumer, $H^p(M) \simeq \mathbb{R}$ si $p = 0, n-1, 2n-2, 2n-1$, et $H^p(M) = 0$ sinon.

(6) Pour tout u dans $\mathbb{S}_n$, notons $H_u^- = \{w \in \mathbb{S}_n\ :\ \langle w, u\rangle < 0\}$ (resp. $H_u^+ = \{w \in \mathbb{S}_n\ :\ \langle w, u\rangle < 0\}$) l'hémisphère sud (resp. nord) ouvert de pôle nord u dans $\mathbb{S}_n$, et $f_u : H_u^- \to H_u^+$ le difféomorphisme C^∞ qui à un point x de H_u associe le point y intersection avec $\mathbb{S}_n$ de la droite affine passant par x de vecteur directeur u.

Alors la fibre $p_n^{-1}(u)$ est égale au graphe de l'application f_u, c'est-à-dire à l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in H_u$ et $y = f_u(x)$. Montrons que p_n est une C^∞-fibration de fibre la boule ouverte de dimension n. Soit u_0 dans $\mathbb{S}_n$, et $\mathbb{D}_{u_0}$ la boule ouverte équatoriale de pôle nord u_0. Pour tout u dans $H_{u_0}^+$, notons ρ_u la rotation de $\mathbb{R}^{n+1}$ fixant le sous-espce vectoriel engendré par u et u_0 et envoyant u sur u_0 par une rotation d'angle strictement inférieure à $\pi/2$. Alors l'application

$$(x, y) \mapsto (u = \frac{x-y}{||x-y||}, \rho_u(\frac{x+y}{2}))$$

de $p_n^{-1}(H_{u_0}^+)$ dans $\mathbb{S}_n \times \mathbb{D}_{u_0}$ est une trivialisation C^∞ locale de p_0 au-dessus de $H_{u_0}^+$, d'inverse

$$(u, v) \mapsto (\rho_u^{-1}(v) - \sqrt{1 - ||v||^2}u, \rho_u^{-1}(v) + \sqrt{1 - ||v||^2}u)\ .$$

Schème E.168 La 2-forme différentielle Ω_n est constante sur M, donc est C^∞. Pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ non nul dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, si $X' = (-y_1, \ldots, -y_n, x_1, \ldots, x_n)$, alors par définition du produit extérieur, $\Omega_n(X, X') = \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 \neq 0$, donc Ω_n est non dégénérée. Enfin, si $\lambda = \sum_{i=1}^n x_i\ dy_i$, alors $d\lambda = \Omega_n$, et donc Ω_n est exacte (si on ne veut pas expliciter λ, on peut aussi dire que Ω_n est fermée (car constante), que M est contractile, donc que $H^2(M) = \{0\}$ et par conséquent que Ω_n est exacte ; mais c'est plus long). [On ne confondra pas exacte et fermée !]

(2) Pour tout x dans M, puisque $-df_x$ est une forme linéaire sur T_xM, et puisque ω_x est non dégénérée, il existe un unique vecteur $X_f(x) \in T_xM$ tel que pour tout X' dans T_xM, on ait $\omega_x(X_f(x), X') = -df_x(X')$. Le champ de vecteurs $x \mapsto X_f(x)$ sur M est C^∞ car le probème est local, et par naturalité, il suffit de le montrer pour $M = U$ un ouvert de $E = \mathbb{R}^N$, où $\Omega^2(U) = \mathrm{C}^\infty(U, \Lambda^2 E^*)$. L'application de $U \times E$ dans $U \times E^*$ définie par $(x, u) \mapsto (x, v \mapsto \omega_x(u, v))$ est C^∞ (car ω_x l'est, et en prenant des coordonnées), bijective car ω est non dégénérée, et par calcul de différentielle par bloc, est un C^∞-difféomorphisme local par le théorème d'inversion locale. Donc c'est un difféomorphisme,

et si $(x,\ell) \mapsto (x,\theta(x,\ell))$ est son inverse, alors $X_f(x) = \theta(x,-df_x))$, qui dépend de manière C^∞ de x.

(3) Pour tout $x = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n) \in M$, posons

$$X_f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Alors X_f est bien un champ de vecteurs C^∞ sur M, par écriture C^∞ dans la base canonique. Pour tout $X' = (x'_1,\dots,x'_n,y'_1,\dots,y'_n)$ dans T_xM, on a

$$(\Omega_n)_x(X_f(x),X') = \sum_{i=1}^n (-y_i)y'_i - (x_i)x'_i = -\sum_{i=1}^n x_ix'_i + y_iy'_i = -df_x(X') \ ,$$

et le résultat en découle par unicité.

(4) Soit (ϕ_t) le flot local de X_f. Pour tout x dans M, on a, par dérivation des fonctions composées, par définition du flot, et par définition de X_f,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(f\circ\phi_t(x)) &= df_{\phi_t(x)}\big(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\big) = df_{\phi_t(x)}\big(X_f(\phi_t(x))\big)\\ &= -\omega_{\phi_t(x)}\big(X_f(\phi_t(x)),X_f(\phi_t(x))\big) = 0 \ ,\end{aligned}$$

car ω est alternée, et le résultat en découle.

(5) Pour tout C^∞-difféomorphisme local φ entre deux variétés C^∞, rappelons que φ^* désigne aussi bien l'image réciproque des champs de vecteurs que celle des formes différentielles. Pour tout g dans G, on a $(L_g)^*f = f\circ L_g = f + f(g)$ puisque f est un morphisme de groupes. Donc $-d((L_g)^*f) = -df_e$. En appliquant successivement l'invariance de ω, l'exercice E.137, la définition de X_f, la commutation des images réciproques et des différentielles extérieure, la formule juste obtenue et la définition de X_f, on a alors

$$\begin{aligned}i_{(L_g)^*X_f}\omega &= i_{(L_g)^*X_f}((L_g)^*\omega) = (L_g)^*(i_{X_f}\omega) = (L_g)^*(-df) = -d((L_g)^*f) = -df\\ &= i_{X_f}\omega \ .\end{aligned}$$

Par unicité, on a donc $(L_g)^*X_f = X_f$, c'est-à-dire que X_f est invariant par translations à gauche.

(6) La première équation découle du fait que ω_x est alternée pour tout x dans M. Pour tout x dans M, on a $\omega_x(X_f(x),X_g(x)) = -\omega_x(X_g(x),X_f(x)) = dg_x(X_f(x))$ et $\omega_x(X_f(x),X_g(x)) = -df_x(X_g(x)) = -\mathcal{L}_{X_g}(f)(x)$ par définition de la dérivée de Lie, ce qui montre la seconde équation. Enfin, par la seconde équation,

$$\{f,gh\} = d(gh)(X_f) = dg(X_f)h + dh(X_f)g = \{f,g\}h + \{f,h\}g \ ,$$

ce qui montre la troisième relation.

(7) Soit (ϕ_t) le flot local de X_f. Pour tout x dans M, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(g\circ\phi_t(x)) &= dg_{\phi_t(x)}\big(\frac{d}{dt}\phi_t(x)\big) = dg_{\phi_t(x)}\big(X_f(\phi_t(x))\big)\\ &= -\omega_{\phi_t(x)}\big(X_g(\phi_t(x)),X_f(\phi_t(x))\big) = -\{g,f\}(x) = \{f,g\}(x) \ .\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

(8) a) L'égalité $i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X$ est évidente sur les 0-formes différentielles (le produit intérieur s'y annule et le produit de Lie préserve les degrés). Pour une différentielle de fonction df, on a $i_Z(df) = df(Z) = \mathcal{L}_Z(f)$, donc, comme la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X$ et la différentielle extérieure d commutent,

$$(\mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X)(df) = (\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X)(f) = \mathcal{L}_{[X,Y]}(f) = i_{[X,Y]}(df) \ ,$$

ce qui montre la formule sur les différentielles de fonctions. Comme une dérivée de Lie $\mathcal{L}_Z$ est une dérivation préservant les degrés, et un produit intérieur i_Z une antidérivation, si la formule $i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X$ est vraie sur des formes différentielles α et β, alors elle est vraie sur $\alpha \wedge \beta$. Enfin, les deux membres de l'égalité $i_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X$ étant locaux, et comme localement, toute forme différentielle est produit extérieur de fonctions et de différentielles de fonctions, le résultat en découle.

b) Comme ω est non dégénérée, il suffit de montrer que $i_{[X_f,X_g]}\omega = i_{X_{\{f,g\}}}\omega$. Par la formule de Cartan, comme ω est fermée et $d \circ d = 0$ on a

$$\mathcal{L}_{X_f}\omega = (i_{X_f} \circ d + d \circ i_{X_f})\omega = i_{X_f}(d\omega) - d \circ df = 0 \ .$$

Or par a), comme la dérivée de Lie $\mathcal{L}_{X_f}$ et la différentielle extérieure d commutent, par la question (6), on a

$$\begin{aligned} i_{[X_f,X_g]}\omega &= \mathcal{L}_{X_f} \circ i_{X_g}(\omega) - i_{X_g} \circ \mathcal{L}_{X_f}(\omega) = \mathcal{L}_{X_f}(-dg) = -d\mathcal{L}_{X_f}(g) \\ &= d\{g,f\} = -d\{f,g\} = i_{\{f,g\}}\omega \ . \end{aligned}$$

La première équation en découle.

Par utilisation multiple de la question (6), on a alors

$$\begin{aligned} \{f,\{g,h\}\} &= -\mathcal{L}_{X_{\{g,h\}}}(f) = -\mathcal{L}_{[X_g,X_h]}(f) = -\mathcal{L}_{X_g} \circ \mathcal{L}_{X_h}(f) + \mathcal{L}_{X_h} \circ \mathcal{L}_{X_g}(f) \\ &= \mathcal{L}_{X_g}(\{f,h\}) - \mathcal{L}_{X_h}(\{f,g\}) = -\{\{f,h\},g\} + \{\{f,g\},h\} \ . \end{aligned}$$

L'identité de Jacobi du crochet de Poisson en découle, par anticommutativité.

A Annexes : rappels divers

A.1 Rappels de topologie

Les références pour cette partie sont [Bou2, Dug, Per] et [Pau, Appendice]. Soit X un espace topologique.

Rappelons qu'un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X est une *base d'ouverts* de la topologie de X si tout ouvert de X est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$. Si E est un ensemble, un critère bien pratique pour qu'un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de E soit une base d'ouverts d'une topologie sur E est que

$$\forall\, A, B \in \mathcal{B},\ \forall x \in A \cap B,\ \exists\, C \in \mathcal{B}, \quad x \in C \subset A \cap B\,. \qquad (*)$$

Une famille $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de parties de X est *localement finie* si pour tout x dans X, il existe un voisinage de x ne rencontrant qu'un nombre fini de U_α. Un recouvrement ouvert $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est *plus fin* qu'un recouvrement ouvert $(V_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ si pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe $\beta \in \mathcal{B}$ tel que V_β contienne U_α.

On dit que X est
- *à base dénombrable* s'il admet une base d'ouverts dénombrable,
- *séparé* (on dit *Hausdorff* en langue anglaise) si deux points distincts admettent des voisinages disjoints,
- *séparable* s'il admet une partie dénombrable dense,
- *localement compact* s'il est séparé et si tout point admet un voisinage compact (ces deux conditions impliquent que tout point admet alors un système fondamental de voisinages compacts, donc fermés),
- *σ-compact* s'il est séparé et union dénombrable de compacts,
- *dénombrable à l'infini* s'il est séparé et s'il existe une suite (dite *exhaustive*) de compacts $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de réunion X tels que K_i soit contenu dans l'intérieur de K_{i+1},
- *paracompact* s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert admet un recouvrement ouvert localement fini plus fin.

Attention à ne pas confondre la *séparation* (i.e. le fait d'être séparé) et la *séparabilité* (i.e. le fait d'être séparable). La séparation est cruciale pour montrer qu'un sous-espace compact d'un espace topologique séparé est fermé, ainsi que pour montrer qu'une application continue bijective d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme. Certains ouvrages, surtout de langue anglaise, omettent, à tort, l'hypothèse de séparation dans la définition de la compacité, locale compacité, σ-compacité, dénombrabilité à l'infini, paracompacité.

Soient X, Y deux espaces topologiques localement compacts. Une application $f : X \to Y$ est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte. Par exemple, si X est compact, toute application continue $f : X \to Y$ est propre. Une application continue injective propre entre espaces localement compacts est un homéomorphisme sur son image.

Exercice E.169 *Soient X un espace topologique localement compact, et ∞ un ensemble. Sur l'ensemble somme disjointe $\widehat{X} = X \coprod \{\infty\}$, on considère l'ensemble $\mathcal{O}$ de parties de $\widehat{X}$, formé des parties ouvertes U de X et des complémentaires ${}^cK \cup \{\infty\}$ de parties compactes K de X.*

(1) Montrer que $(\widehat{X}, \mathcal{O})$ est un espace topologique compact dans lequel X est ouvert, et de plus dense si X est non compact. Cet espace topologique est appelé le compactifié d'Alexandrov de X.

(2) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_n$.

(3) Montrer qu'une application continue propre (resp. un homéomorphisme) $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques localement compacts s'étend de manière unique en une application continue (resp. un homéomorphisme) $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$, de sorte que $\widehat{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ et $\widehat{f \circ g} = \widehat{f} \circ \widehat{g}$.

Si $\mathcal{P}$ est une propriété d'espaces topologiques, on dit qu'un espace topologique X est *localement* $\mathcal{P}$ si tout point de X admet un système fondamental de voisinages qui possèdent la propriété $\mathcal{P}$ (pour la topologie induite). Attention, cette terminologie n'est pas toujours consistante dans la littérature, voire dans ces notes : par exemple, la condition d'être localement compact comporte la clause globale de séparation.

Exercice E.170 *Soit A une partie d'un espace topologique X. Montrer que A est* localement fermée *(i.e. tout point de A admet un voisinage U dans X tel que $A \cap U$ soit fermé dans U) si et seulement si A est ouverte dans son adhérence, et si et seulement si A est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.*

Notons $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace de Hilbert réel des suites de réels de carrés sommables

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{i\in\mathbb{N}} {x_i}^2 < +\infty\},$$

muni du produit scalaire $\langle (x_i)_i \,|\, (y_i)_i \rangle = \sum_i x_i y_i$. Notons que $\ell^2(\mathbb{R})$ est métrisable séparable (l'ensemble des suites presques nulles de rationnels est dense) et que tout espace métrisable séparable admet un plongement topologique dans $\ell^2(\mathbb{R})$. En effet, si (X, d) est un espace métrique contenant une suite dénombrable dense $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, alors l'application $x \mapsto (\frac{1}{i+1} \min\{1, d(x, x_i)\})_{i\in\mathbb{N}}$ est un homéomorphisme de X sur son image dans $\ell^2(\mathbb{R})$.

Topologies initiales et finales

Si E est un ensemble, et $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ deux topologies sur E, on dit que $\mathcal{O}'$ est *plus fine* que $\mathcal{O}$ si $\mathcal{O}'$ « possède plus d'ouverts que » $\mathcal{O}$, i.e. si $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.

Soit X un ensemble et $\mathcal{R} \subset X \times X$ une relation d'équivalence sur X. On note $Y = X/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ et

$$\pi : X \to X/\mathcal{R} = Y$$

la projection canonique, qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $\mathcal{R}(x)$, que l'on note souvent $[x]$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. On rappelle la propriété universelle des quotients : pour tout ensemble Z et pour toute application $f : X \to Z$ constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, il existe une et une seule application (dite *induite par passage au quotient*) $f' : X/\mathcal{R} \to Z$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Z \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & \nearrow_{f'} & \\ X/\mathcal{R} & & \end{array}$$

commute.

Si X est un espace topologique, l'ensemble $Y = X/\mathcal{R}$ admet une unique topologie, appelée la *topologie quotient*, telle qu'une partie U de Y est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans X. Sauf mention contraire tout ensemble quotient d'un espace topologique sera muni de la topologie quotient. Celle-ci vérifie les propriétés suivantes.

- Une partie F de Y est fermée si et seulement si $\pi^{-1}(F)$ est fermé dans X.
- La projection canonique π est continue, et la topologie quotient est la topologie la plus fine sur Y rendant continue π.
- Pour tout espace topologique Z, une application $g : Y \to Z$ est continue si et seulement si $g \circ \pi : X \to Z$ est continue.

L'une des principales difficultés de la topologie quotient vient du fait qu'un espace topologique quotient d'un espace topologique séparé n'est pas toujours séparé (comme par exemple le quotient de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence définie par $x \sim y$ si et seulement si $y - x \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\,\mathbb{Z}$, voir aussi l'exercice E.3). Vérifier la propriété de séparation (ou de non-séparation) d'un espace topologique quotient doit être un réflexe !

Si $(X_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est une famille d'espaces topologiques et $X = \coprod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$ est l'ensemble réunion disjointe de cette famille d'ensembles, alors la *topologie somme disjointe* sur X est la topologie la plus fine rendant continue les injections canoniques $i_\alpha : X_\alpha \to X$ (i.e. une partie U de X est ouverte si et seulement si $i_\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert de X_α pour tout α). On identifie souvent X_α avec son image dans X par i_α.

Si X, Y sont des espaces topologiques, A un sous-espace de X et $f : A \to Y$ une application continue, on appelle *recollement de X sur Y par f* l'espace topologique quotient

$$X \coprod_f Y = (X \coprod Y)/\sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par la relation $x \sim y$ si $x \in A, y \in Y$ et $f(x) = y$. De nombreux espaces topologiques usuels sont construits par recollements (voir par exemple [Pau]).

Soit X un ensemble et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose chaque X_i munie d'une topologie. L'ensemble X admet une unique topologie, appelée la *topologie faible* définie par $(X_i)_{i\in I}$, vérifiant les propriétés suivantes (il suffit bien sûr de vérifier la première).

- Une partie O de X est ouverte si et seulement si $O \cap X_i$ est ouverte dans X_i pour tout i dans I.
- Une partie F de X est fermée si et seulement si $F \cap X_i$ est fermée dans X_i pour tout i dans I.
- Pour tout espace topologique Y, une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si sa restriction $f\,|_{X_i} : X_i \to Y$ à X_i est continue pour tout i dans I.

Par exemple, un espace topologique X est discret si et seulement si la topologie de X est la topologie faible définie par la famille des singletons (un singleton possède une et une seule topologie).

Exercice E.171 *Soit X un ensemble, muni de la topologie faible définie par une famille $(X_i)_{i\in I}$ de parties de X munies chacune d'une topologie. Montrer que si, pour tous i, j dans I, les topologies induites sur $X_i \cap X_j$ par celles de X_i et de X_j coïncident, et si $X_i \cap X_j$ est ouvert dans X_i et dans X_j, alors*

– *la topologie de X_i coïncide avec la topologie induite sur X_i par la topologie de X ;*
– *X_i est ouvert dans X.*

Donner un exemple où chaque X_i est séparé, mais où X ne l'est pas.

Topologie de l'ordre

Soit E un ensemble. Rappelons qu'un *ordre* sur E est une relation $\preceq$ qui est réflexive ($\forall\, x \in E,\ x \preceq x$), antisymétrique ($\forall\, x, y \in E$, si $x \preceq y$ et $y \preceq x$, alors $x = y$) et transitive ($\forall\, x, y, z \in E$, si $x \preceq y$ et $y \preceq z$, alors $x \preceq z$). On note $x \prec y$ si $x \preceq y$ et $x \neq y$. Un ensemble muni d'un ordre est un *ensemble ordonné*. Un *ordre total* sur E est un ordre $\preceq$ tel que pour tous x, y dans E, on a $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. Un ensemble muni d'un ordre total est un *ensemble totalement ordonné*. Un ordre total sur E est un *bon ordre* si toute partie non vide de E admet un plus petit élément (i.e. $\forall\, A \subset E$, si $A \neq \emptyset$ alors $\exists\, x \in A,\ \forall\, y \in A,\ x \preceq y$). Un ensemble muni d'un bon ordre est un *ensemble bien ordonné* (par définition, ceci implique qu'il est totalement ordonné).

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de son ordre usuel est bien ordonné. Par exemple, si E, F sont deux ensembles totalement ordonnés (resp. bien ordonnés), alors l'ensemble produit $E \times F$ muni de l'*ordre lexicographique*

$$(x, y) \preceq (x', y') \text{ si et seulement si } (x \preceq x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y'))$$

est totalement ordonné (resp. bien ordonné).

Une application $f : E \to F$ entre deux ensembles ordonnés E, F *préserve l'ordre* si pour tous x, y dans E, si $x \preceq y$ alors $f(x) \preceq f(y)$. Deux ensembles ordonnés sont dit *isomorphes* s'il existe une bijection de l'un dans l'autre préservant l'ordre, ainsi que son inverse. Un *ordinal* est une classe d'isomorphisme d'ensembles bien ordonnés. Comme un *cardinal* est une classe d'équivalence d'ensembles pour la relation « être en bijection », le cardinal d'un ordinal est bien défini. Un ordinal est dit *dénombrable* si son cardinal l'est (i.e. si son cardinal est le cardinal d'une partie de $\mathbb{N}$). Par un théorème de Zermelo (voir [Kri]), tout ensemble admet un bon ordre, et donc il existe un ordinal non dénombrable (voir ci-dessous pour un exemple ne dépendant pas de l'axiome du choix).

Soit E un ensemble bien ordonné. Un *segment initial* de E est une partie de la forme $\{y \in E \ :\ y \prec x\}$ pour un x dans E. Muni de l'ordre induit de celui de E, un segment initial de E est bien ordonné. Soit α, β deux ordinaux, on dit que $\alpha \prec \beta$ si α est isomorphe à un segment initial de β (ce qui ne dépend pas des choix des représentants). On note $\alpha \preceq \beta$ si $\alpha \prec \beta$ ou $\alpha = \beta$. On montre que tout ensemble d'ordinaux, muni de cet ordre $\preceq$, est bien ordonné. En particulier, la classe d'isomorphisme de l'ensemble (qui en est bien un) bien ordonné des ordinaux dénombrables est un ordinal non dénombrable, qui est le plus petit ordinal non dénombrable.

Soit E un ensemble totalement ordonné. La *topologie de l'ordre* est la topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble des

$$]x, y[= \{z \in E \ :\ x \prec z \prec y\}$$

pour les x, y dans E (l'ensemble de ces parties vérifie le critère pratique $(*)$). Cette topologie est séparée.

Exercice E.172 *Montrer que l'ensemble ordonné des ordinaux inférieurs ou égaux à un ordinal donné, muni de la topologie de l'ordre, est compact.*

A.2 Rappels sur les actions de groupes

Soit G un groupe et X un ensemble. Sauf mention explicite du contraire, toutes les actions seront des actions à gauche.

On considère une action (à gauche) de G sur X. Soit x dans X. On appelle *stabilisateur* (ou *fixateur*) de x, et on note G_x, le sous-groupe des éléments de G fixant x :

$$G_x = \{g \in G \ : \ gx = x\} \ .$$

On appelle *orbite* de x, et on note $G \cdot x$ (ou Gx s'il n'y a pas de risque de confusion) le sous-ensemble de X défini par

$$G \cdot x = \{y \in X \ : \ \exists \, g \in G, \ y = gx\} \ .$$

La relation « être dans la même orbite » est une relation d'équivalence sur X. Donc les orbites de l'action de G sur X forment une partition de X. L'ensemble des orbites est noté $G\backslash X$. La projection canonique $\pi : X \to G\backslash X$ est l'application qui à un point de X associe son orbite.

Une action de G sur X est dite *libre* (et on dit que G agit librement sur X) si le stabilisateur G_x de chaque point x de X est trivial (i.e. vaut $\{e\}$ où e est l'identité de G). Ceci équivaut à

$$\forall \, x \in X, \ \ \forall \, g, g' \in G, \quad gx = g'x \Rightarrow g = g' \ .$$

Une action de G sur X est dite *transitive* si elle n'a qu'une (ou aucune) orbite, i.e. si pour tous x, y dans X, il existe g dans G tel que $y = gx$. Une partie de X est dite *saturée* si elle contient l'orbite de chacun de ses points.

Par exemple, si G est un groupe, si H est un sous-groupe de G, alors H agit sur G *par translations à gauche*

$$(h, g) \mapsto hg \ ,$$

ainsi que par *translations à droite*

$$(h, g) \mapsto gh^{-1} \ ,$$

où $h \in H$ et $g \in G$. Ces actions sont libres. Dans le premier cas, les orbites sont les classes à gauche Hg pour $g \in G$, et dans le second cas, les orbites sont les classes à droite gH pour $g \in G$. L'ensemble des orbites se note $H\backslash G$ dans le premier cas, et G/H dans le second.

Le groupe G (et donc tout sous-groupe H' de G) agit (à gauche) sur l'espace quotient $H\backslash G$ des classes à gauche, par $(g, H\gamma) \mapsto H\gamma g^{-1}$, et (à gauche) sur l'espace quotient G/H des classes à droite, par $(g, \gamma H) \mapsto g\gamma H$. La première action s'appelle l'action *par translations à droite* de G sur $H\backslash G$, et la seconde l'action *par translations à gauche* de G sur G/H. Ces actions sont transitives.

Pour tout sous-groupe H' de G, l'application $(H'g)H \mapsto H'(gH)$ est une bijection naturelle

$$H'\backslash(G/H) \simeq (H'\backslash G)/H$$

par laquelle on identifie ces ensembles, que l'on note alors $H'\backslash G/H$.

Pour tout x dans X, l'application *orbitale* en x de G dans X est l'application définie par $\varphi_x : g \mapsto gx$. Elle induit une bijection Θ_x, dite *canonique*, de G/G_x dans $G \cdot x$. Cette

bijection est G-équivariante pour les actions de G sur G/G_x et sur $G \cdot x$: pour tous g dans G et y dans G/G_x,

$$\Theta_x(gy) = g\Theta_x(y) \ .$$

Soit X un espace topologique, et G un groupe. Une action de G sur l'ensemble X est dite *par homéomorphismes* si pour tout g dans G, l'application de X dans X définie par $x \mapsto gx$ est continue. Cette application est alors un homéomorphisme (car d'inverse $x \mapsto g^{-1}x$). En munissant G de la topologie discrète, une action de G sur X est par homéomorphismes si et seulement si l'action $(G \times X) \to X$ est continue.

Si G agit par homéomorphismes sur X, alors on munit $G\backslash X$ de la topologie quotient. La projection canonique π est alors continue par définition de la topologie quotient, mais elle est de plus ouverte.

Proposition A.1 *Pour toute action par homéomorphismes d'un groupe G sur un espace topologique X, la projection canonique $\pi : X \to G\backslash X$ est ouverte.*

Preuve. Pour tout ouvert U de X, son image $\pi(U)$ est un ouvert de $G\backslash X$, car $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$, qui est une union d'ouverts, car G agit par homéomorphismes. $\square$

Si G est discret (i.e. muni de la topologie discrète), et si X est un espace localement compact, alors une action continue de G sur X est dite *proprement discontinue* (ou *propre*, et on dit que G agit proprement sur X) si, pour tout compact K de X, la partie $\{g \in G \ : \ K \cap gK \neq \emptyset\}$ de G est finie. Notons que si G est fini, alors toute action continue est propre.

Les actions continues/différentiables de groupes topologiques/différentiables sur des espaces topologiques/variétés différentiables seront étudiées dans la partie 5.8, car nécessitant la notion de groupes topologiques/groupes différentiables (ces derniers étant appelés groupes de Lie).

A.3 Rappels de calcul différentiel

Nous renvoyons par exemple à [Ave, CarH, Die1] pour des preuves et commentaires des résultats de cette partie, et en particulier [Die1] pour ce qui concerne les applications analytiques réelles (ou de classe C^ω) et analytiques complexes.

Soient E, F deux espaces de Banach, U, V deux ouverts de E, F respectivement, $f : U \to V$ une application de classe C^1 et x un point de U.

On note $df_x : E \to F$ (ou aussi $f'(x) : E \to F$) la différentielle de f en x. On note $rk_x f$ le rang de df_x, i.e. $rk_x f = \dim \operatorname{Im} df_x$, appelé *rang* de f en x. C'est aussi le rang de la matrice de df_x dans des bases de E, F lorsque ceux-ci sont de dimension finie. Si $F = \mathbb{R}^q$, et si $f_1, \ldots, f_q$ sont les composantes de f, alors le rang de f en x est le rang du système de formes linéaires $(d(f_1)_x, \ldots, d(f_q)_x)$ dans le dual E^* de E. Si $E = \mathbb{R}^p$, alors le rang de f en x est le rang du système de vecteurs $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(x)\right)$ de F. Si $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^q$ et les bases sont les bases canoniques, la matrice de df_x, qui est, avec i l'indice de ligne et j l'indice de colonne,

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \le i \le q \\ 1 \le j \le p}},$$

est appelée la *matrice jacobienne* de f en x. Le rang de f en x est égal au rang de sa matrice jacobienne en x. L'application $x \mapsto rk_x f$ est *semi-continue inférieurement*, i.e. pour tout x dans U, il existe un voisinage U' de x dans U tel que, pour tout y dans U', on ait $rk_y f \ge rk_x f$ (car $\mathbb{N}$ est discret). Mais il ne faut pas croire que l'application $x \mapsto rk_x f$ soit localement constante ! On a

$$rk_x f \le \min\{\dim E, \dim F\} .$$

Si $E = F$ sont de même dimension finie, on note $j_x f : E \to \mathbb{R}$ le déterminant de l'application linéaire df_x (ou, ce qui revient au même, de la matrice jacobienne de f en x quand $E = F = \mathbb{R}^p$), que l'on appelle le *jacobien* de f en x.

On dit que f est une *immersion* en x si la différentielle $df_x : E \to F$ de f en x est injective. Si E est de dimension finie, ceci équivaut à dire que $rk_x f = \dim E$. On dit que f est une *immersion* si f est une immersion en tout point de U.

On dit que f est une *submersion* en x si la différentielle $df_x : E \to F$ de f en x est surjective. Si F est de dimension finie, ceci équivaut à dire que $rk_x f = \dim F$. On dit que f est une *submersion* si f est une submersion en tout point de U.

On dit que f est une *application de rang constant au voisinage* de x (on dit aussi une *subimmersion* en x) si la différentielle $df_y : E \to F$ est de rang constant pour tout y dans un voisinage de x dans U. Par exemple, par semi-continuité du rang, une immersion ou submersion en x est une application de rang constant au voisinage de x.

Soit k un élément de $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$. On dit qu'une application $f : U \to V$ de classe C^k est un C^k-*difféomorphisme* (ou *difféomorphisme* lorsque k est sous-entendu, par exemple $k = \infty$, ce qui sera souvent le cas dans les exercices) si f est bijective et si son inverse est de classe C^k. On dit aussi que f est *de classe* C^0 si elle est continue, et que f est un C^0-*difféomorphisme* si f est un homéomorphisme.

Théorème A.2 (Théorème d'inversion locale) *Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E, k un élément de $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$ et $f : U \to F$ une application de classe C^k. Si, en un point x de U, la différentielle $df_x : E \to F$ est bijective, alors il existe*

un voisinage ouvert V de x contenu dans U, et un voisinage ouvert W de $f(x)$, tels que $f : V \to W$ soit un C^k-difféomorphisme.

Notons que si $E = F = \mathbb{R}^n$ (muni de n'importe quelle norme), alors on peut bien sûr remplacer « bijective » par « injective » dans ce résultat. Le corollaire suivant est une application immédiate.

Porisme A.3 *Une application bijective entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, différentiable de classe C^k, dont le jacobien ne s'annule pas, est un C^k-difféomorphisme entre ces ouverts.* □

Le résultat suivant est essentiellement équivalent au précédent (voir l'exercice E.175).

Théorème A.4 (Théorème des fonctions implicites) *Soient E, F, G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, k un élément de $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$, et $f : U \to G$ une application de classe C^k. Si, en un point (a, b) de U, la différentielle partielle par rapport à la seconde variable $\partial_2 f(a, b) : F \to G$ est bijective, alors il existe un voisinage ouvert V de a dans E et un voisinage ouvert W de b dans F tels que $V \times W \subset U$, et une application $g : V \to W$ de classe C^k tels que l'assertion*

$$(x, y) \in V \times W \quad \text{et} \quad f(x, y) = 0$$

soit équivalente à l'assertion

$$x \in V \quad \text{et} \quad y = g(x) \ .$$

Comme précédemment, si $F = G = \mathbb{R}^n$, alors on peut remplacer « bijective » par « surjective » dans cet énoncé.

Voici quelques applications classiques des théorèmes précédents. On fixe $p, q \leq n$ dans $\mathbb{N}$ et k un élément de $(\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{\infty, \omega\}$. Rappelons qu'un *difféomorphisme local* de $\mathbb{R}^n$ *en un point* x_0 est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de x_0 sur un voisinage ouvert de x_0, qui envoie x_0 sur x_0. Les applications $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_q)$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$, et $(x_1, \ldots, x_p) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ où $r \leq \min\{p, q\}$, sont respectivement une immersion, une submersion, une application de rang constant r. Les résultats suivants disent que ces exemples sont, localement et modulo difféomorphismes locaux, les seuls.

Porisme A.5 (Théorème de forme normale locale des immersions) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k, qui est une immersion en 0 avec $f(0) = 0$. Alors il existe un C^k-difféomorphisme local ψ de $\mathbb{R}^n$ en 0 tel que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f\ (x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) \ . \quad \square$$

Porisme A.6 (Théorème de forme normale locale des submersions) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k, qui est une submersion en 0 avec $f(0) = 0$. Alors il existe un C^k-difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^n$ en 0, tel que, au voisinage de 0, on ait*

$$f \circ \varphi\ (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_q) \ . \quad \square$$

Porisme A.7 (Théorème de forme normale locale des applications de rang constant) *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant 0 et $f : U \to \mathbb{R}^q$ une application de classe C^k, qui est une application de rang constant $r \leq \min\{p, q\}$ sur un voisinage de 0 avec $f(0) = 0$. Alors, il existe un C^k-difféomorphisme local ψ de $\mathbb{R}^q$ en 0 et un C^k-difféomorphisme local φ de $\mathbb{R}^p$ en 0, tels que, au voisinage de 0, on ait*

$$\psi \circ f \circ \varphi\,(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)\ . \quad \square$$

- **Exercices de révision.**

Exercice E.173 Montrer que le sous-ensemble $A = \{(x, |x|) \ : \ x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ n'est pas l'image de $\mathbb{R}$ par une immersion C^1.

Donner un exemple d'une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dont l'image est A.

Exercice E.174 Soient U, V, W des ouverts d'espaces de Banach E, F, G respectivement, et $f : U \to V, g : V \to W$ deux applications. Si f et g sont des immersions, submersions ou applications de rang constant, que peut-on dire de $g \circ f$?

Exercice E.175 Montrer, en dimension finie et en classe de différentiabilité C^1, l'équivalence entre le théorème A.2 d'inversion locale et le théorème A.4 des fonctions implicites.

Exercice E.176 Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On considère l'application déterminant det définie sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles de taille $n \times n$; elle est de classe C^∞ car polynomiale.

1. Caractériser les matrices en lesquelles la différentielle de det est non nulle. Montrer que si A est inversible, alors
$$d(\det)_A : \ H \ \mapsto \ \det A \ \ \mathrm{tr}\, A^{-1}H\ .$$
2. Soit $X = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ \det(A) = 1\}$. Montrer que, pour tout $A \in X$, il existe un voisinage ouvert V de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathbb{R}^{n^2-1}$ et une application $f : U \to V$ de classe C^∞ qui est un homéomorphisme sur son image et possède une différentielle injective en 0, telle que $f(0) = A$ et $f(U) = V \cap X$.
3. Montrer le même résultat pour X l'ensemble des matrices de rang $n - 1$.
4. Montrer que ce résultat n'est pas valable pour l'ensemble des matrices de rang $\leq n-1$. On pourra par exemple considérer la matrice nulle.

Exercice E.177 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ une application de classe C^∞. Notons
$$X = \{x(z, \theta) = (f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z) \ : \ z \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}$$
la *surface de révolution* autour de l'axe Oz engendrée par f. Pour tout $x = x(z, \theta)$ dans X, montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un voisinage ouvert V de $(0, 0, z)$ dans le plan $\mathbb{R}(-\sin\theta, \cos\theta, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 1)$ tels que la projection orthogonale sur V soit un homéomorphisme de U dans V, dont la réciproque soit une immersion.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^∞. Notons

$$X = \{(f(z)x_1, \ldots, f(z)x_p, z) \ : \ x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}, \ \sum x_i^2 = 1, \ z \in \mathbb{R}^n\}$$

(une « surface de révolution en dimension $n+p$ »). Énoncer et démontrer un résultat analogue à celui de la première question.

Exercice E.178 Démontrer les corollaires A.5, A.6, A.7 à partir des théorèmes A.2 et A.4.

Exercice E.179 Soient $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ et f une application de classe C^1 d'un ouvert V non vide de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, injective. Montrer que $n \leq m$ et que df_x est injective sur un ouvert dense de V. L'application df_x est-elle nécessairement injective partout ?

Exercice E.180 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 propre, i.e. telle que

$$\lim_{||x|| \to +\infty} |f(x)| = +\infty \ .$$

On suppose que f possède (au moins) deux minima stricts (distincts) a et b. Le but de l'exercice est de montrer que f possède un troisième point critique.

1. Montrer que le résultat est évident si $n = 1$, ou si $n \geq 2$ et $f(x) \to -\infty$ quand $||x|| \to +\infty$. Dans la suite, on supposera donc $n \geq 2$ et $f(x) \to +\infty$ quand $||x|| \to +\infty$. On va supposer que f n'admet pas d'autre point critique et aboutir à une contradiction.
2. Pour tout m dans $\mathbb{R}$, soit K_m la réunion des compacts connexes contenant a et b sur lesquels f est majorée par m. Montrer que K_m est fermé. Montrer qu'il existe M dans $\mathbb{R}$ tel que $K_M \neq \emptyset$ et $K_m = \emptyset$ pour tout $m < M$.
3. Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que l'intérieur de K_M est connexe.
4. Conclure.

Exercice E.181 Dans cet exercice, on fixe un élément n de $\mathbb{N} - \{0\}$.

1. Montrer que l'application exponentielle des matrices $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une application C^∞, et calculer sa différentielle. Vérifier en particulier que $d\exp_0 = \mathrm{Id}$.
2. On note $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mathfrak{so}(n)$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application exponentielle envoie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(n)$ dans $\mathrm{SO}(n)$.
3. Montrer que $\exp : \mathfrak{so}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ est surjective, mais que $\exp : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ne l'est pas (on pourra vérifier qu'une matrice dans l'image de l'exponentielle est de trace au moins -2).

4. Montrer que l'exponentielle est un C^∞-difféomorphisme entre l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles et l'ouvert dans cet espace formé des matrices symétriques réelles définies positives.
5. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons L_M et R_M les opérateurs de multiplication à gauche et à droite par M, agissant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\operatorname{ad} M = L_M - R_M$. Montrer que $d\exp_M = \sum_{p,q\geq 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}$, puis en déduire que

$$\exp(-M)\, d\exp_M = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\operatorname{ad} M)^k}{(k+1)!}.$$

6. Montrer que $d\exp_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{ad} M$ n'a pas de valeur propre complexe de la forme $2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

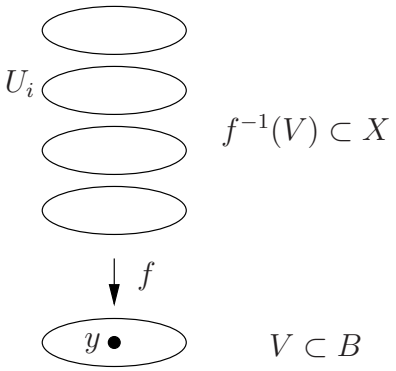
A.4 Rappels sur les revêtements

Nous renvoyons par exemple à [God, Hat, Spa, Pau] pour les rappels contenus dans cette section.

• **Revêtements.**

Soient X et B deux espaces topologiques, et $f : X \to B$ une application continue. On dit que f est un *revêtement* si pour tout $y \in B$, il existe un voisinage V de y, un espace discret D non vide et $h : V \times D \to f^{-1}(V)$ un homéomorphisme tel que le diagramme suivant commute :

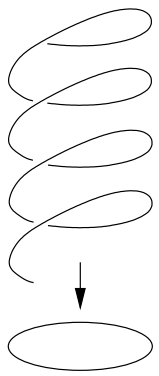
$$\begin{array}{ccc} V \times D & \xrightarrow{h} & f^{-1}(V) \\ & {}_{pr_1}\searrow & \downarrow f \\ & & V \end{array} .$$



On dit que B est la *base*, X l'*espace total*, $f^{-1}(y)$ la *fibre* au-dessus de y, V un *voisinage distingué* de y, et h une *trivialisation locale* de f au-dessus de V.

Il est facile de montrer que l'application f est un revêtement si et seulement si tout point y de B admet un voisinage V tel que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$, où les U_i sont des ouverts deux à deux disjoints de X, et $f\,|_{U_i} : U_i \to V$ est un homéomorphisme. Notons qu'un revêtement est surjectif.

Exercice E.182 *Montrer que l'application de la droite $\mathbb{R}$ dans le cercle $\mathbb{S}_1$ définie par $t \mapsto e^{it}$ est un revêtement.*



Soient $f : X \to B$ et $f' : X' \to B$ deux revêtements ayant même base. Un *isomorphisme de revêtements* de f sur f' est un homéomorphisme $\phi : X \to X'$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ {}_{f}\searrow & & \swarrow_{f'} \\ & B & \end{array} .$$

Si $f = f'$, alors un isomorphisme de revêtements de f sur f' est appelé un *automorphisme de revêtements*.

Un revêtement $f : X \to B$ est dit *trivial* s'il est isomorphe au revêtement $pr_1 : B \times D \to B$, avec D un espace discret non vide.

Soient X, Y deux espaces topologiques. Un *homéomorphisme local* est une application continue $f : X \to Y$ telle que pour tout x dans X, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f(U)$ soit ouvert et $f_{|U} : U \to f(U)$ soit un homéomorphisme. Un revêtement $f : X \to B$ est un *revêtement fini* si pour tout y dans B, le cardinal de $f^{-1}(y)$ est fini. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Un revêtement $f : X \to B$ est un *revêtement à n feuillets* si pour tout y dans B, le cardinal de $f^{-1}(y)$ est n.

Exercice E.183 *Soient $f : X \to Y$ une application continue et n dans $\mathbb{N} - \{0\}$. Supposons que X soit séparé. Montrer que f est un revêtement à n feuillets si et seulement si f est un homéomorphisme local et le cardinal de chaque fibre $f^{-1}(y)$ est fini constant égal à n.*

Nous renvoyons à l'appendice A.2 pour des rappels sur les actions de groupes.

Théorème A.8 *Soit G un groupe discret agissant (continûment) librement et proprement sur un espace topologique localement compact X. Alors*

1. *pour tout x dans X, il existe un voisinage V de x tel que $gV \cap V = \emptyset$ pour tout g dans $G - \{e\}$;*
2. *chaque orbite de G est discrète ;*
3. *l'espace topologique quotient $G\backslash X$ est séparé, donc localement compact ;*
4. *la projection canonique $X \to G\backslash X$ est un revêtement.*

Preuve. (1) Pour tout x dans X, soit U un voisinage compact de x. Comme l'action est propre, il existe $g_1, \ldots, g_k$ dans G tels que

$$\{g \in G - \{e\} \ : \ gU \cap U \neq \emptyset\} = \{g_1, \ldots, g_k\} \ .$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, comme l'action est libre, on a $g_i x \neq x$. Comme X est séparé, et l'action continue, il existe donc un voisinage ouvert U_i de x, contenu dans U, tel que $g_i U_i \cap U_i = \emptyset$. Alors $V = \cap_{1 \leq i \leq k} U_i$ est un ouvert qui convient.

(2) Ceci découle immédiatement de (1) par continuité de l'action.

(3) Soient x et y deux points de X qui ne sont pas dans une même orbite. Soient U et V des voisinages compacts de x et y respectivement. Comme $U \cup V$ est compact dans l'espace séparé X, et puisque l'action est propre, il existe $g_1, \ldots, g_k$ dans G tels que

$$\{g \in G \ : \ gU \cap V \neq \emptyset\} = \{g_1, \ldots, g_k\} \ .$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a $g_i x \neq y$. Comme X est séparé, et l'action continue, il existe donc des voisinages ouverts U_i, V_i de x, y contenus dans U, V respectivement, tels que $g_i U_i \cap V_i = \emptyset$. Comme π est ouverte (voir la proposition A.1 de l'appendice A.2), on a deux ouverts $\pi(\cap_{1 \leq i \leq k} U_i)$ et $\pi(\cap_{1 \leq i \leq k} V_i)$, contenant respectivement $\pi(x)$ et $\pi(y)$, et qui sont disjoints par construction. Donc $G\backslash X$ est séparé.

Comme π est ouverte et $G\backslash X$ est séparé, l'image d'un voisinage compact d'un point x de X est un voisinage compact de $\pi(x)$, donc $G\backslash X$ est localement compact.

(4) Pour tout x dans X, soit V un voisinage compact de x, d'intérieur U, tel que $gV \cap V = \emptyset$ pour tout g dans $G - \{e\}$. Remarquons que l'application $\pi_{|gV} : gV \to \pi(V)$ est une application continue injective, avec gV compact et $\pi(V)$ séparé, donc est un homéomorphisme. Alors $\pi(U)$ est un voisinage ouvert de $\pi(x)$, et $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ est une union disjointe d'ouverts de X, et l'application $\pi_{|gU} : gU \to \pi(U)$ est un homéomorphisme. Donc π est un revêtement. $\square$

Porisme A.9 *(1) Soit G un groupe fini (discret) agissant librement (par homéomorphismes) sur un espace localement compact X. Alors $G\backslash X$ est séparé (donc localement compact), et la projection canonique $X \to G\backslash X$ est un revêtement.*

(2) Soit H un sous-groupe discret d'un groupe localement compact G, alors H est fermé, $H\backslash G$ est séparé (donc localement compact) et la projection canonique $G \to H\backslash G$ est un revêtement. □

Exemples.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, si le groupe $\{\pm 1\}$ agit sur la sphère $\mathbb{S}_n$ par $x \mapsto \pm x$, alors $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}\backslash\mathbb{S}_n$ est un espace topologique compact, et l'application canonique $\mathbb{S}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un revêtement à deux feuillets.
2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N} - \{0\}$. Le groupe $\mathcal{U}_p = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ \lambda^p = 1\}$ des racines p-èmes de l'unité agit (continûment) sur la sphère de dimension impaire
$$\mathbb{S}_{2n+1} = \{(z_0, ..., z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ |z_0|^2 + ... + |z_n|^2 = 1\}$$
par $\lambda \cdot (z_0, ..., z_n) = (\lambda z_0, ..., \lambda z_n)$. Cette action est libre, donc $L_{n,p} = \mathcal{U}_p\backslash\mathbb{S}_{2n+1}$ est un espace topologique compact, appelé un *espace lenticulaire*, et l'application canonique $\mathbb{S}_{2n+1} \to L_{n,p}$ est un revêtement à p feuillets.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application canonique $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est un revêtement.

• **Homotopie.**

Soient X et Y deux espaces topologiques, et f et g deux applications continues de X dans Y. Une *homotopie* entre f et g est une application continue $h : X \times [0,1] \to Y$ telle que $h(x,0) = f(x)$ et $h(x,1) = g(x)$ pour tout x dans X. Si h est une homotopie entre f et g, et h' une homotopie entre g et une application continue $g' : X \to Y$, alors $(x,t) \mapsto h(x, 1-t)$ est une homotopie entre g et f, et
$$(x,t) \mapsto \begin{cases} h(x,2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ h'(x, 2t-1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$
est une homotopie entre f et g'. Les applications f et g sont dites *homotopes* s'il existe une homotopie entre f et g. La relation « être homotope à » est une relation d'équivalence.

Si X et Y sont localement compacts, les applications f et g sont dites *proprement homotopes* s'il existe une homotopie $h : X \times [0,1] \to Y$ de f à g, qui est propre. La relation « être proprement homotopes » est une relation d'équivalence.

Un espace topologique X est dit *simplement connexe* s'il est connexe par arcs, et si toute application continue du cercle $\mathbb{S}_1$ dans X se prolonge en une application continue du disque (fermé) $\mathbb{D}_2$ dans X. Un espace topologique X est *contractile* s'il existe x_0 dans X et une homotopie entre l'application identité de X et l'application constante en x_0, i.e. une application continue $h : X \times [0,1] \to X$ telle que $h(x,0) = x$ et $h(x,1) = x_0$ pour tout x dans X. Un espace topologique X se *rétracte par déformation forte* sur une partie A s'il existe une application continue $h : X \times [0,1] \to X$ telle que $h(x,0) = x$, $h(x,1) \in A$, et $h(a,t) = a$, pour tous t dans $[0,1]$, x dans X et a dans A.

Une *équivalence d'homotopie* entre X et Y est une application continue $f : X \to Y$ ayant la propriété qu'il existe une application continue $g : Y \to X$ telle que $f \circ g$ et

$g \circ f$ soient homotopes à l'identité. Deux espaces topologiques X et Y *ont même type d'homotopie* s'il existe une équivalence d'homotopie de X dans Y. La relation « avoir même type d'homotopie » est une relation d'équivalence. Par exemple, un espace topologique est contractile si et seulement s'il a le même type d'homotopie qu'un espace réduit à un point. Plus généralement, si un espace topologique X se rétracte par déformation forte sur un sous-espace Y, alors X et Y ont le même type d'homotopie.

Exercice E.184 *(1) Montrer que toute partie convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ (et en particulier $\mathbb{R}^n$ lui même) est contractile.*

(2) Montrer qu'un espace topologique qui se rétracte par déformation forte sur un sous-espace connexe par arcs (resp. simplement connexe) l'est encore. En déduire qu'un espace contractile est simplement connexe.

(3) Soit X un espace topologique. On suppose que $X = U \cup V$, où U, V sont deux ouverts simplement connexes de X, tels que $U \cap V$ soit non vide et connexe par arcs. Montrer que X est simplement connexe.

(4) Montrer que pour $n \geq 2$, la sphère $\mathbb{S}_n$ est simplement connexe.

(5) Montrer que pour $n \geq 1$, l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est simplement connexe.

(6) Montrer que le produit de deux espaces topologiques simplement connexes est simplement connexe.

Soit X un espace topologique. Appelons *chemin* dans X une application continue α de $[0,1]$ dans X. Appelons *lacet* en x dans X un chemin α tel que $\alpha(0) = \alpha(1) = x$. Si α est un chemin, on appelle *chemin inverse* de α le chemin $\overline{\alpha}$ tel que $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ pour tout t dans $[0,1]$. Soient α et β deux chemins dans X tels que $\alpha(1) = \beta(0)$. On appelle *chemin composé* (ou *concaténé*) de α et β, et on note $\alpha \cdot \beta$, le chemin

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si} \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Deux lacets $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ en x sont *homotopes* s'il existe une application continue $h : [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que $h(0,s) = h(1,s) = x$, $h(t,0) = \alpha(t)$ et $h(t,1) = \beta(t)$, pour tous s, t dans $[0,1]$. Notons que si α est un chemin, alors le lacet $\alpha \cdot \overline{\alpha}$ est homotope à un chemin constant, que si α, β, γ sont trois chemins, alors $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ et $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ sont homotopes (ce qui, lorsque l'on considère les chemins à homotopie près, permet de noter ce chemin $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$), et que si β' est homotope à β, alors $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ et $\alpha \cdot \beta' \cdot \gamma$ sont homotopes.

• **Revêtements universels.**

Le résultat suivant est un cas particulier du théorème du relèvement d'applications par un revêtement (voir [God, Hat, Spa, Pau]). Si $p : X \to B$ est un revêtement, et $f : Y \to B$ est une application continue, on appelle *relèvement* de f toute application continue $\widetilde{f} : Y \to X$ telle que $p \circ \widetilde{f} = f$, i.e. telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \widetilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & B \end{array}.$$

Proposition A.10 (Théorème du relèvement) *Soient $p : X \to B$ un revêtement et Y un espace topologique localement connexe par arcs et simplement connexe. Pour tous x dans X et y dans Y tels que $p(x) = f(y)$, pour toute application continue $f : Y \to B$, il existe un et un seul relèvement $\widetilde{f} : Y \to X$ de f tel que $\widetilde{f}(y) = x$.* □

Porisme A.11 *Deux revêtements $p : X \to B$ et $p' : X' \to B$, où X et X' sont localement connexes par arcs et simplement connexes, sont isomorphes. Plus précisément, si $x \in X$ et $x' \in X'$ vérifient $p(x) = p'(x')$, alors il existe un unique isomorphisme de revêtements $\phi : X \to X'$ envoyant x sur x'.*

Preuve. Soit $f : X \to X'$ le relèvement de l'application p par le revêtement p' tel que $f(x) = x'$, et g le relèvement de l'application p' par le revêtement p tel que $g(x') = x$. Alors $g \circ f$ et id_X sont deux relèvements de l'application p par le revêtement p (car $p \circ (g \circ f) = (p \circ g) \circ f = p' \circ f = p$), qui coïncident en x, donc coïncident. De même, $f \circ g = \mathrm{id}_{X'}$ donc f est un isomorphisme de revêtements cherché. L'unicité se montre de même. □

Si B est une variété topologique (voir le paragraphe 2.1) connexe, alors un revêtement $\widetilde{\pi} : \widetilde{B} \to B$ où $\widetilde{B}$ est une variété topologique simplement connexe est appelé un *revêtement universel* de B (cette définition n'est pas la plus intrinsèque, ni la bonne pour les espaces topologiques plus généraux, voir par exemple [Spa, Hat, Pau]). Par le corollaire ci-dessus, il est unique à isomorphisme près (et à unique isomorphisme près si l'on se fixe des points bases dans les espaces, en demandant aux applications de préserver ces points bases).

Par exemple, l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{S}_1$ avec $t \mapsto e^{2i\pi t}$, les projections canoniques $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{S}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$, et $\mathbb{S}_{2n+1} \to L_{n,p}$ pour $n \geq 1$ (avec $L_{n,p}$ l'espace lenticulaire), sont des revêtements universels, par l'exercice E.184.

Un espace topologique Y est *semilocalement simplement connexe* si tout point y de Y admet un voisinage U tel que tout lacet en y contenu dans U est homotope dans Y au lacet constant en y.

Si Y est localement contractile, par exemple si Y est une variété topologique, alors Y est semilocalement simplement connexe.

Théorème A.12 *Soit B un espace topologique séparé, connexe et localement connexe par arcs. Alors B admet un revêtement simplement connexe si et seulement si B est semilocalement simplement connexe.* □

En particulier, toute variété topologique connexe M admet un revêtement universel $\pi : \widetilde{M} \to M$, unique à isomorphisme de revêtements près. De plus, on a une classification des revêtements (connexes) d'une variété topologique (voir [God, Hat, Spa, Pau]), à l'aide du groupe des automorphismes de revêtements de π (aussi appelé *groupe fondamental*).

Théorème A.13 *Soit M une variété topologique connexe, $\pi : \widetilde{M} \to M$ un revêtement universel, et Γ le groupe des automorphismes de revêtements de π. Alors Γ agit librement et proprement sur $\widetilde{M}$. Pour tout sous-groupe Γ' de Γ, l'application π induit par passage au quotient un revêtement $\pi_{\Gamma'} : \Gamma' \backslash \widetilde{M} \to M$. Pour tout revêtement $p : N \to M$ avec N connexe, il existe un sous-groupe Γ' de Γ tel que les revêtements p et $\pi_{\Gamma'}$ soient isomorphes.* □

A.5 Rappels d'algèbre multilinéaire

Nous renvoyons par exemple à [Bou1, AB] pour des compléments sur cette partie.

Soit K un corps (commutatif). Tous les espaces vectoriels et applications linéaires et multilinéaires de cette partie seront définis sur K. On note E^* ou $\check{E}$ l'espace vectoriel dual d'un espace vectoriel E. On identifie dans la suite un espace vectoriel E de dimension finie avec son bidual $E^{**} = (E^*)^*$ par l'application canonique $E \to E^{**}$ définie par

$$x \mapsto \{f \mapsto f(x)\} .$$

• **Produit tensoriel.** Soient $E_1, \dots, E_r$ des espaces vectoriels de dimension finie, où $r \geq 2$. Si F est un espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; F)$ l'espace vectoriel des applications multilinéaires de $E_1 \times \cdots \times E_r$ dans F. On appelle *produit tensoriel* de $E_1, \dots, E_r$, et on note $E_1 \otimes \cdots \otimes E_r$, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E_1^*, \dots, E_r^*; K)$ des formes multilinéaires sur $E_1^* \times \cdots \times E_r^*$. Si $(e_1, \dots, e_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$, on note $e_1 \otimes \cdots \otimes e_r$ l'élément de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_r$ défini par

$$(f_1, \dots, f_r) \mapsto \prod_{i=1}^{r} f_i(e_i) .$$

Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes, pour E_i des espaces vectoriels de dimension finie.

1. **(Propriété universelle)** Pour toute application multilinéaire f de $E_1 \times \cdots \times E_r$ dans un espace vectoriel F, il existe une unique application linéaire $g : E_1 \otimes \cdots \otimes E_r \to F$ telle que $g(e_1 \otimes \cdots \otimes e_r) = f(e_1, \dots, e_r)$ pour tous les e_i dans E_i. En particulier, l'application $f \mapsto g$ est un isomorphisme linéaire de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_r; F)$ dans $\mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_r, F)$.
2. **(Associativité)** Il existe un unique isomorphisme $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$ dans $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3$, qui envoie $(e_1 \otimes e_2) \otimes e_3$ sur $e_1 \otimes e_2 \otimes e_3$ pour tous les e_i dans E_i. On identifie par la suite ces deux espaces vectoriels par cet isomorphisme.
3. **(Distributivité)** Il existe un unique isomorphisme $(E_1 \oplus E_2) \otimes E_3$ dans $(E_1 \otimes E_3) \oplus (E_2 \otimes E_3)$, qui envoie $(e_1 \oplus e_2) \otimes e_3$ sur $(e_1 \otimes e_3) \oplus (e_2 \otimes e_3)$ pour tous les e_i dans E_i.
4. **(Bases)** Si $(e_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i}$ est une base de E_i, alors $(e_{1,j_1} \otimes \cdots \otimes e_{r,j_r})_{1 \leq j_i \leq n_i, 1 \leq i \leq r}$ est une base de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_r$. En particulier, $\dim(E_1 \otimes \cdots \otimes E_r) = \prod_{i=1}^{r} \dim(E_i)$.
5. **(Isomorphismes)** Les applications linéaires $E_1 \to K \otimes E_1$ et $E_1 \to E_1 \otimes K$ définies par $x \mapsto 1 \otimes x$ et $x \mapsto x \otimes 1$ sont des isomorphismes. En particulier, l'application linéaire $K \to K \otimes K$ induite par $1 \mapsto 1 \otimes 1$ est un isomorphisme.

   On a un isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(E_1, E_3) \otimes \mathcal{L}(E_2, E_4)$ dans $\mathcal{L}(E_1 \otimes E_2, E_3 \otimes E_4)$ qui à un couple (u, v) associe l'unique application linéaire de $E_1 \otimes E_2$ dans $E_3 \otimes E_4$ associée par la propriété universelle à l'application bilinéaire $(x, y) \mapsto u(x) \otimes v(y)$ de $E_1 \times E_2$ dans $E_3 \otimes E_4$. En particulier, on a un isomorphisme canonique

   $$E_1^* \otimes E_2^* \to (E_1 \otimes E_2)^*,$$

   et un isomorphisme canonique

   $$E_1^* \otimes E_2 \to \mathcal{L}(E_1, E_2) ,$$

   qui à $f \otimes y$, pour $f \in E_1^*$ et $y \in E_2$ associe l'application linéaire $x \mapsto f(x)y$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On convient d'appeler *puissance tensorielle n-ème*, et de noter $E^{\otimes n}$, le produit tensoriel de $n \geq 2$ copies de E, ainsi que $E^{\otimes 1} = E, E^{\otimes 0} = K$. Un élément de $E^{\otimes p} \otimes (E^*)^{\otimes q}$, pour p, q dans $\mathbb{N}$, est appelé un *tenseur p fois contravariant et q fois covariant de E.*

Rappelons que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, le *groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ est le groupe (d'ordre $n\,!$) des bijections de $\{1, \ldots, n\}$. Il est engendré par les *transpositions* (i, j) pour $i \neq j$ dans $\{1, \ldots, n\}$, et même par les $(i, i+1)$ pour i dans $\{1, \ldots, n-1\}$. La *signature* est l'unique morphisme $\sigma \mapsto \varepsilon_\sigma$ de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{\pm 1\}$ valant -1 sur les transpositions, donc vérifiant

$$\varepsilon_\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \ .$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit sur l'espace vectoriel $E^{\otimes n}$ de la façon suivante. Pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$, l'action de σ sur $E^{\otimes n}$ est l'unique automorphisme linéaire tel que

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \qquad \sigma \cdot (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(N)} \ .$$

Un tenseur t de $E^{\otimes n}$ est dit *symétrique* s'il est invariant par $\mathfrak{S}_n$, i.e. si $\sigma \cdot t = t$ pour tout σ dans $\mathfrak{S}_n$. Un tenseur t de $E^{\otimes n}$ est dit *antisymétrique* si $\sigma \cdot t = \varepsilon_\sigma t$ pour toute permutation σ dans $\mathfrak{S}_n$ de signature ε_σ. Dans les deux cas, il suffit évidemment de vérifier ces propriétés pour les transpositions. On note $\mathrm{Sym}_n(E)$ le sous-espace des tenseurs symétriques de $E^{\otimes n}$, et $\mathrm{Asym}_n(E)$ celui des tenseurs antisymétriques.

• **Algèbre extérieure.**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et p un élément de $\mathbb{N}$. Une forme p-linéaire $\omega : E^p \to K$ est dite *alternée* si, pour tout $(x_1, \ldots, x_p)$ dans E^p, s'il existe i, j dans $\{1, \ldots, p\}$ tels que $i \neq j$ et $x_i = x_j$, alors $\omega(x_1, \ldots, x_p) = 0$. On note $\Lambda^p E^*$ ou $\Lambda^p \check{E}$ l'espace vectoriel des formes p-linéaires alternées sur E, et on a $\Lambda^0 \check{E} = K$ (par convention) et $\Lambda^1 \check{E} = \check{E}$. On note

$$\Lambda^* \check{E} = \oplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p \check{E} \ .$$

Soient F un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to F$ une application linéaire. Si $\omega \in \Lambda^p \check{F}$, alors l'application $f^*\omega : E^p \to K$ définie par

$$f^*\omega(x_1, \ldots, x_p) = \omega(f(x_1), \ldots, f(x_p))$$

est p-linéaire alternée. L'application $f^* : \omega \mapsto f^*\omega$ de $\Lambda^p \check{F}$ dans $\Lambda^p \check{E}$ (aussi notée $\Lambda^p \check{f}$ lorsque l'on veut préciser p) est linéaire. Elle s'étend par linéarité en une application linéaire f^* (aussi notée $\Lambda^* \check{f}$) de $\Lambda^* \check{F}$ dans $\Lambda^* \check{E}$. Si G est un espace vectoriel de dimension finie, et si $g : F \to G$ est une application linéaire, alors

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* \ .$$

Lemme A.14 *Une forme p-linéaire alternée ω sur E est antisymétrique, i.e. pour tout $(x_1, \ldots, x_p)$ dans E^p et tout σ dans $\mathfrak{S}_p$, on a*

$$\omega(x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(p)}) = \varepsilon_\sigma \, \omega(x_1, \ldots, x_p) \ .$$

Preuve. Comme les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_p$, et que la signature est un morphisme de groupes, il suffit de vérifier le résultat pour σ une transposition. On se ramène donc au cas $p = 2$. Dans ce cas, pour tous x, y dans E et ω dans $\Lambda^2 \check{E}$, comme

$$\omega(x + y, x + y) = \omega(x, x) + \omega(y, y) + \omega(x, y) + \omega(y, x) \ ,$$

on a $\omega(y, x) = -\omega(x, y)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. On a donc une inclusion $\Lambda^p \check{E} \subset \mathrm{Asym}_p(\check{E})$. Lorsque la caractéristique de K est différente de 2, une forme p-linéaire antisymétrique est alternée, et cette inclusion est une égalité.

Exemples. (1) Si la dimension de E est n et si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors l'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to K$, déterminant d'un n-uplet de vecteurs de E dans la base $\mathcal{B}$, est un élément non nul de $\Lambda^n E^*$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, pour tout ω dans $\Lambda^n E^*$, par multilinéarité et antisymétrie, on a

$$\omega(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)\ \omega(e_1, \ldots, e_n) \ ,$$

donc $\Lambda^n E^*$ est de dimension 1, engendré par l'élément non nul $\det_{\mathcal{B}}$:

$$\Lambda^n E^* = K \det_{\mathcal{B}} \ .$$

(2) Si la dimension de E est strictement inférieure à p, alors

$$\Lambda^p E^* = 0 \ .$$

En effet, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors pour tout ω dans $\Lambda^p E^*$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_p)$ dans E^p, le scalaire $\omega(x_1, \ldots, x_p)$ est une combinaison linéaire des scalaires $\omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$ avec $i_1, \ldots, i_p$ dans $\{1, \ldots, n\}$, qui sont nuls, car, comme $p > n$, au moins deux des vecteurs $e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}$ doivent être égaux.

En particulier, si la dimension de E est n, alors $\Lambda^* \check{E} = \bigoplus_{0 \leq p \leq n} \Lambda^p \check{E}$. En particulier, la dimension de $\Lambda^* \check{E}$ est finie.

Munissons maintenant l'espace vectoriel $\Lambda^* \check{E}$ d'une structure d'algèbre (unitaire, associative) naturelle.

Pour p, q deux entiers supérieurs ou égaux à 1, notons $\mathfrak{S}(p, q)$ l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}_{p+q}$ tels que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p + 1) < \cdots < \sigma(p + q) \ .$$

Une telle bijection σ est obtenue en prenant un paquet de $p + q$ cartes, en coupant ce paquet en un premier paquet de p cartes, et un second paquet de q cartes, puis en battant une fois ces paquets de cartes, intercalant ainsi les cartes du premier paquet dans le second. L'application $\sigma \mapsto \sigma(\{1, \ldots, p\})$ est une bijection de $\mathfrak{S}(p, q)$ dans l'ensemble des parties à p éléments de $\{1, \ldots, p + q\}$, donc le cardinal de $\mathfrak{S}(p, q)$ vaut $\frac{(p+q)!}{(p)!(q)!}$.

Soient ω dans $\Lambda^p \check{E}$ et η dans $\Lambda^q \check{E}$. On appelle *produit extérieur* de ω et de η la forme $(p + q)$-linéaire $\omega \wedge \eta : E^{p+q} \to K$ définie par

$$\omega \wedge \eta\ (x_1, \ldots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(p,q)} \varepsilon_\sigma\ \omega(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)})\ \eta(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) \ ,$$

si $p, q \geq 1$, et si $p = 0$ ou $q = 0$, alors $\omega \wedge \eta = \omega\eta$ ou $\omega \wedge \eta = \eta\omega$. On étend cette définition par bilinéarité à $\Lambda^* \check{E}$: si $\omega_i, \eta_i \in \Lambda^i \check{E}$ pour $i = 1, \ldots, n$, on pose

$$\left(\sum_i \omega_i\right) \wedge \left(\sum_i \eta_i\right) = \sum_{i,j} \omega_i \wedge \eta_i \ .$$

Remarque. Lorsque la caractéristique de K est nulle, on a

$$\omega \wedge \eta \ (x_1, \ldots, x_{p+q}) = \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon_\sigma \ \omega(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \ \eta(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) \ ;$$

il est alors immédiat de voir que $\omega \wedge \eta$ est antisymétrique, donc alternée.

Proposition A.15 *Si $\omega \in \Lambda^p \check{E}$ et $\eta \in \Lambda^q \check{E}$, alors $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{p+q} \check{E}$.*

Preuve. Soient $(x_1, \ldots, x_{p+q})$ dans E^{p+q} et i, j dans $\{1, \ldots, p+q\}$, tels que $x_i = x_j$. On partionne $\mathfrak{S}(p, q)$ en quatre parties :

1. $\mathfrak{S}(p, q)_{--}$, l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p, q)$ tels que i et j appartiennent à $\sigma(\{1, \ldots, p\})$,
2. $\mathfrak{S}(p, q)_{++}$, l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p, q)$ tels que i et j appartiennent à l'ensemble $\sigma(\{p+1, \ldots, p+q\})$,
3. $\mathfrak{S}(p, q)_{-+}$, l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p, q)$ tels que i appartienne à $\sigma(\{1, \ldots, p\})$, et j appartienne à $\sigma(\{p+1, \ldots, p+q\})$,
4. $\mathfrak{S}(p, q)_{+-}$, l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p, q)$ tels que i appartienne à $\sigma(\{p+1, \ldots, p+q\})$ et j appartienne à $\sigma(\{1, \ldots, p\})$.

Comme ω et η sont alternées, le terme de la somme définissant $\omega \wedge \eta \ (x_1, \ldots, x_{p+q})$ qui porte sur un σ dans $\mathfrak{S}(p, q)_{--} \cup \mathfrak{S}(p, q)_{++}$ est nul. Soit τ la transposition échangeant i et j. Alors la multiplication à gauche par τ induit une bijection de $\mathfrak{S}(p, q)_{-+}$ sur $\mathfrak{S}(p, q)_{+-}$. Donc $\omega \wedge \eta \ (x_1, \ldots, x_{p+q})$ est la somme sur tous les σ dans $\mathfrak{S}(p, q)_{-+}$ de

$$\varepsilon_\sigma \ \omega(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \ \eta(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) - \varepsilon_\sigma \ \omega(x_{\tau\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(p)}) \ \eta(x_{\tau\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(p+q)})$$

Ce terme est nul, car comme $x_i = x_j$, on a $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) = (x_{\tau\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(p+q)})$. $\square$

Théorème A.16 *Muni du produit extérieur $\wedge$, l'espace vectoriel $\Lambda^* \check{E} = \oplus_{p \in \mathbb{N}} \Lambda^p \check{E}$ est une algèbre (associative, unitaire) graduée anticommutative, i.e.*

1. **(Associativité)** $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$ *pour tous $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ dans $\Lambda^* \check{E}$;*
2. *Si $1 \in K = \Lambda^0 \check{E}$, alors pour tout ω dans $\Lambda^* \check{E}$, on a $1 \wedge \omega = \omega \wedge 1 = \omega$;*
3. **(Graduation)** $(\Lambda^p \check{E}) \wedge (\Lambda^q \check{E}) \subset \Lambda^{p+q} \check{E}$ *;*
4. **(Anticommutativité)** *si $\omega \in \Lambda^p \check{E}$ et $\eta \in \Lambda^q \check{E}$, alors $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$.*

De plus, si F est un espace vectoriel de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire, alors l'application linéaire $\omega \mapsto f^*\omega$ de $\Lambda^* \check{F}$ dans $\Lambda^* \check{E}$ est un morphisme d'algèbres graduées de degré 0, i.e. $f^*1 = 1$, $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$ et $f^*(\Lambda^p \check{F}) \subset \Lambda^p \check{E}$.

Preuve. (1) Notons $\mathfrak{S}(p,q,r)$ l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}_{p+q+r}$ tels que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{et} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(p+q) \quad \text{et} \quad \sigma(p+q+1) < \cdots < \sigma(p+q+r)\ .$$

Notons $\mathfrak{S}(\widehat{p},q,r)$ l'ensemble des σ dans $\mathfrak{S}(p,q,r)$ tels que σ vaille l'identité sur $\{1,\ldots,p\}$, et de même pour $\mathfrak{S}(p,q,\widehat{r})$. Il est facile de vérifier que la composition $(\sigma,\sigma') \mapsto \sigma\circ\sigma'$ induit des bijections $\mathfrak{S}(p,q+r)\times\mathfrak{S}(\widehat{p},q,r) \to \mathfrak{S}(p,q,r)$ et $\mathfrak{S}(p+q,r)\times\mathfrak{S}(p,q,\widehat{r}) \to \mathfrak{S}(p,q,r)$.

Soient $\omega_1 \in \Lambda^p\check{E}, \omega_2 \in \Lambda^q\check{E}, \omega_3 \in \Lambda^r\check{E}$. Alors

$$(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3))(x_1,\ldots,x_{p+q+r}) =$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p,q+r)} \varepsilon_\sigma\ \omega_1(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})\ (\omega_2\wedge\omega_3)(x_{\sigma(p+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q+r)}) =$$

$$\sum_{\substack{\sigma\,\in\,\mathfrak{S}(p,\,q+r)\\ \tau\,\in\,\mathfrak{S}(\widehat{p},\,q,\,r)}} \varepsilon_\sigma\ \omega_1(x_{\sigma\circ\tau(1)},\ldots,x_{\sigma\circ\tau(p)})\ \varepsilon_\tau\ \omega_2(x_{\sigma\circ\tau(p+1)},\ldots,x_{\sigma\circ\tau(p+q)})\ \omega_3(x_{\sigma\circ\tau(p+q+1)},\ldots,x_{\sigma\circ\tau(p+q+r)}) =$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p,q,r)} \varepsilon_\sigma\ \omega_1(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)})\ \omega_2(x_{\sigma(p+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q)})\ \omega_3(x_{\sigma(p+q+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q+r)}) =$$

$$((\omega_1\wedge\omega_2)\wedge\omega_3)(x_1,\ldots,x_{p+q+r})\ .$$

(4) Soit τ l'élément de $\mathfrak{S}(p+q)$ tel que $\tau(i) = i+p \bmod (p+q)$ pour tout i dans $\{1,\ldots,p+q\}$. Alors $\varepsilon_\tau = (-1)^{pq}$, et la composition $\sigma\mapsto\sigma\circ\tau$ est une bijection de $\mathfrak{S}(p,q)$ sur $\mathfrak{S}(q,p)$. Donc pour $\omega\in\Lambda^p\check{E}, \eta\in\Lambda^q\check{E}$, on a

$$(\eta\wedge\omega)\ (x_1,\ldots,x_{p+q}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(q,p)} \varepsilon_\sigma\ \eta(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(q)})\ \omega(x_{\sigma(q+1)},\ldots,x_{\sigma(p+q)}) =$$

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(p,q)} \varepsilon_{\sigma\circ\tau}\ \eta(x_{\sigma\circ\tau(1)},\ldots,x_{\sigma\circ\tau(q)})\ \omega(x_{\sigma\circ\tau(q+1)},\ldots,x_{\sigma\circ\tau(p+q)}) =$$

$$\varepsilon_\tau\ (\omega\wedge\eta)\ (x_1,\ldots,x_{p+q})\ .$$

Les autres affirmations sont immédiates. □

Proposition A.17 *Pour tous les $\omega_1,\ldots,\omega_p$ dans $\check{E}$ et tous les $x_1,\ldots,x_p$ dans E, on a*

$$(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_p)(x_1,\ldots,x_p) = \det\Big(\big(\omega_i(x_j)\big)_{1\le i,j\le p}\Big)\ .$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur p. La formule est immédiate pour $p=1$. On a

$$(\omega_1\wedge(\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p))(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1}\ \omega_1(x_j)(\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p)(x_1,\ldots,\widehat{x_j},\ldots,x_p)\ .$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence au rang $p-1$, on trouve le développement du déterminant de la matrice $\big(\omega_i(x_j)\big)_{1\le i,j\le p}$ par rapport à sa première ligne, ce qui montre le résultat. □

Porisme A.18 *Des formes linéaires $f_1,\ldots,f_k$ dans E^* sont linéairement indépendantes si et seulement si leur produit extérieur $f_1\wedge\cdots\wedge f_k$ est non nul.*

Preuve. Si $f_1, \dots, f_k$ sont linéairement indépendantes, alors il existe $x_1, \dots, x_k$ dans E tels que $f_i(x_j) = 1$ si $i = j$ et $f_i(x_j) = 0$ sinon. Donc, par la proposition précédente, $(f_1 \wedge \cdots \wedge f_k)(x_1, \dots, x_k) = 1$ et $f_1 \wedge \cdots \wedge f_k \neq 0$. La réciproque est évidente. $\square$

Remarque. Il découle de la propriété d'anticommutativité que si ω est une forme p-linéaire alternée avec p impair, alors $\omega \wedge \omega = 0$. Mais pour $E = \mathbb{R}^4$, si $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4)$ est la base duale de la base canonique, et si $\omega = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 + \epsilon_3 \wedge \epsilon_4$, alors $\omega \wedge \omega = 2\,\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 \wedge \epsilon_3 \wedge \epsilon_4 \neq 0$.

Proposition A.19 *Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\check{E}$, alors $(f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p})_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n}$ est une base de $\Lambda^p \check{E}$.*

Preuve. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base de E, dont la base duale est $(f_1, \dots, f_n)$. Pour ω dans $\Lambda^p \check{E}$ et $x_1, \dots, x_p$ dans E, par p-linéarité de ω, on a

$$\omega(x_1, \dots, x_p) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} f_{i_1}(x_1) \dots f_{i_p}(x_p)\, \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})\ .$$

Comme ω est alternée, les termes $\omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ sont nuls sauf peut-être si les indices $i_1, \dots, i_p$ sont deux à deux distincts. En utilisant une permutation pour mettre ces indices dans l'ordre croissant, en utilisant la formule d'un déterminant et en utilisant que $(f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p})(x_1, \dots, x_p) = \det\big(f_i(x_j)\big)_{1 \leq i,j \leq k}$ par la proposition A.17, on obtient que

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p}\ .$$

Cette écriture est unique, car pour tous $i_1 < \cdots < i_p$ et $j_1 < \cdots < j_p$, l'expression

$$(f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \det\big(f_{i_\alpha}(e_{j_\beta})\big)_{1 \leq \alpha, \beta \leq p}$$

est non nulle si et seulement si $i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p$. Ceci montre le résultat. $\square$

Remarque. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de $\check{E}$. Pour toute partie I de cardinal p de $\{1, \dots, n\}$, notons

$$f_I = f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_p}$$

où $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$. Le résultat ci-dessus dit que $(f_I)_I$, pour I de cardinal p, est une base de $\Lambda^p \check{E}$. La table de multiplication de cette base est la suivante :

$$f_I \wedge f_J = \begin{cases} \pm f_{I \cup J} & \text{si } I \cap J = \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\pm = (-1)^k$ pour k le nombre de couples (i, j) dans $I \times J$ tels que $i > j$.

On en déduit que la dimension de $\Lambda^p \check{E}$ est $C_n^p = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$, pour n la dimension de $\check{E}$. Donc la dimension de l'espace vectoriel $\Lambda^* \check{E}$ est $\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$. En particulier, pour n la dimension de $\check{E}$, l'espace vectoriel $\Lambda^n \check{E}$ est de dimension 1, engendré par $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$, qui est l'application déterminant de n vecteurs dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Tout élément w de $\Lambda^* \check{E}$ s'écrit de manière unique

$$w = \sum_I w_I\ f_I\ ,$$

avec w_I dans K. De plus, w appartient à $\Lambda^p\check{E}$ si et seulement si $w_I = 0$ pour tout I de cardinal différent de p. Plus précisément, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base de E, dont la base duale est $(f_1, \ldots, f_n)$, notons de même e^I le p-uplet $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$. Alors la preuve ci-dessus montre que pour tout ω dans $\Lambda^p\check{E}$, on a

$$\omega = \sum_I \omega(e^I) f_I \ .$$

Exercice E.185 *Soient $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels E et F de dimension finie n et m respectivement, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, de base duale $(\check{e}_1, \ldots, \check{e}_n)$, et $(f_1, \ldots, f_m)$ une base de F, de base duale $(\check{f}_1, \ldots, \check{f}_m)$. Si A est la matrice de f dans ces bases, calculer la matrice de l'application linéaire $\omega \mapsto f^*\omega$ de $\Lambda^*\check{F}$ dans $\Lambda^*\check{E}$, dans les bases $(\check{f}_I)_I$ et $(\check{e}_I)_I$.*

Soient X un élément de E et $\omega \in \Lambda^p\check{E}$. On appelle *produit intérieur* de ω par X, et on note $i_X\omega$, la forme $(p-1)$-linéaire alternée (par convention, $\Lambda^{-1}\check{E} = \{0\}$), définie par $i_X\omega = 0$ si $p = 0$, et sinon, pour tous $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ dans E,

$$(i_X\omega)(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) = \omega(X, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \ .$$

On étend additivement l'application i_X à $\Lambda^*\check{E}$.

Proposition A.20 *L'application $i_X : \Lambda^*\check{E} \to \Lambda^*\check{E}$ est une antidérivation de degré -1 de l'algèbre graduée $\Lambda^*\check{E}$, i.e.*

(1) $i_X : \Lambda^*\check{E} \to \Lambda^*\check{E}$ est linéaire et $i_X(\Lambda^p\check{E}) \subset \Lambda^{p-1}\check{E}$ pour tout p dans $\mathbb{N}$.

(2) pour tout α dans $\Lambda^p\check{E}$ et tout β dans $\Lambda^*\check{E}$, on a

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \, \alpha \wedge (i_X\beta) \ .$$

Preuve. L'assertion (1) est immédiate par définition. Pour montrer la seconde assertion, on raisonne par récurrence sur p. Le cas $p = 0$ est immédiat par linéarité. Si $p = 1$, alors, en posant $X_0 = X$, pour tous $X_1, \ldots, X_q$ dans E, on a

$$\begin{aligned}
& i_X(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_q) \\
&\quad = (\alpha \wedge \beta)(X_0, X_1, \ldots, X_q) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{q} (-1)^{i+1} \alpha(X_i) \beta(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_q) \\
&\quad = \alpha(X_0)\beta(X_1, \ldots, X_q) - \sum_{i=1}^{q} (-1)^i \alpha(X_i)(i_X\beta)_x(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_q) \\
&\quad = (i_X\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_q) - (\alpha \wedge i_X\beta)(X_1, \ldots, X_q) \ ,
\end{aligned}$$

ce qui montre le cas $p = 1$. Supposons maintenant $p \geq 2$, et supposons le résultat vrai au rang $p - 1$. Par linéarité, on se ramène au cas où $\alpha = \alpha' \wedge \alpha''$, avec α' de degré 1. Par

l'associativité et la distributivité du produit extérieur, on conclut alors par les cas $p = 1$ et $p - 1$:

$$\begin{aligned} i_X(\alpha \wedge \beta) &= i_X(\alpha' \wedge (\alpha'' \wedge \beta)) = (i_X\alpha') \wedge (\alpha'' \wedge \beta) - \alpha' \wedge i_X(\alpha'' \wedge \beta) \\ &= (i_X\alpha') \wedge (\alpha'' \wedge \beta) - \alpha' \wedge ((i_X\alpha'') \wedge \beta + (-1)^{p-1}\, \alpha'' \wedge (i_X\beta)) \\ &= ((i_X\alpha') \wedge \alpha'' - \alpha' \wedge (i_X\alpha'')) \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha' \wedge (\alpha'' \wedge (i_X\beta)) \\ &= (i_X\alpha) \wedge \beta + (-1)^p\, \alpha \wedge (i_X\beta)\ . \end{aligned}$$

□

Remarque. Le groupe $\mathrm{GL}(E)$ des automorphismes linéaires de E agit (à gauche) naturellement sur l'ensemble $\Lambda^*\check{E}$. En effet, posons

$$g \cdot \omega : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \big((g^{-1})^*\omega\big)\,(x_1, \ldots, x_p) = \omega(g^{-1}(x_1), \ldots, g^{-1}(x_p))$$

si $g \in \mathrm{GL}(E)$ et $\omega \in \Lambda^p\check{E}$. Cette action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\Lambda^p\check{E}$ est linéaire, et s'étend par linéarité en une action de $\mathrm{GL}(E)$ sur $\Lambda^*\check{E}$, qui préserve la structure d'algèbre graduée de $\Lambda^*\check{E}$, i.e. pour tout g dans $\mathrm{GL}(E)$, l'application $\omega \mapsto g \cdot \omega$ est linéaire, envoie $\Lambda^p\check{E}$ dans lui-même, et $g \cdot (\omega \wedge \eta) = (g \cdot \omega) \wedge (g \cdot \eta)$ pour tous les ω, η dans $\Lambda^*\check{E}$.

Remarque. On note $\Lambda^*E = \Lambda^*\check{\check{E}}$, que l'on appelle l'algèbre des *multi-vecteurs* de E. Par l'identification de $\check{\check{E}}$ et de E, tout élément de Λ^pE (appelé *p-vecteur*) est combinaison linéaire de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ pour des $v_1, \ldots, v_p$ dans E. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors $(e_I)_{I \in 2^{\{1,\ldots,n\}}}$ est une base de Λ^*E, avec comme ci-dessus $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ où $I = \{i_1, \ldots, i_p\}$ avec $i_1 < \cdots < i_p$. Si $(f_1, \ldots, f_n)$ est la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$, alors pour tout p-vecteur v, on a comme ci-dessus

$$v = \sum_I v(f^I)e_I\ ,$$

où la sommation porte sur toutes les parties de cardinal p de $\{1, \ldots, n\}$. L'espace Λ^pE vérifie la propriété universelle suivante : pour toute application p-linéaire alternée u de E^p dans un espace vectoriel F, il existe une et une seule application linéaire f de Λ^pE dans F telle que pour tous $x_1, \ldots, x_p$ dans E,

$$u(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p)\ .$$

En effet, comme $(e_I)_I$ est une base de Λ^pE, il suffit de définir f en demandant que $f(e_I) = u(e^I)$.

En particulier, le corollaire A.18 implique que des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ dans E sont linéairement indépendants si et seulement si leur produit extérieur $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ est un p-vecteur non nul.

On vérifie aisément qu'il existe une et une seule application bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\Lambda^p\check{E} \times \Lambda^pE \to K$, telle que, pour $x_1, \ldots, x_p$ dans E et $f_1, \ldots, f_p$ dans $\check{E}$, on ait

$$\langle f_1 \wedge \cdots \wedge f_p, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \rangle = \det\big(f_i(x_j)\big)_{1 \le i,j \le p}\ .$$

Cet accouplement induit un isomorphisme canonique de $\Lambda^*\check{E}$ sur le dual de Λ^*E. De plus, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et si $(\check{e}_1, \ldots, \check{e}_n)$ est sa base duale, alors les bases $(e_I)_I$ de Λ^*E et $(\check{e}_I)_I$ de $\Lambda^*\check{E}$ sont duales.

Si A est un espace vectoriel sur K muni d'une application bilinéaire $\Phi : A \times A \to A$, par exemple si A est une algèbre sur K avec sa multiplication, et en particulier si A est l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_n(K)$, alors on définit de la même manière l'espace, noté $\Lambda^p(\check{E}, A)$ (respectivement $\Lambda^*(\check{E}, A)$) des applications p-linéaires (respectivement multilinéaires) alternées à valeurs dans A. On définit de même le produit extérieur de deux éléments de $\Lambda^*(\check{E}, A)$ (en remplaçant le produit de deux éléments de K par l'évaluation de Φ sur deux éléments de A). Si A est une algèbre associative unitaire, alors $\Lambda^*(\check{E}, A)$ est encore une algèbre graduée associative unitaire. Mais elle n'est plus forcément anticommutative (par exemple si A est l'algèbre $\mathcal{M}_n(K)$ avec $n \geq 2$). Si A est de plus commutative (par exemple si $K = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{C}$), l'algèbre graduée associative unitaire $\Lambda^*(\check{E}, A)$ est par contre anticommutative.

- **Exercice de révision.**

Exercice E.186 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps K, et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire de E dans E. Pour préciser, on note $\Lambda^p \check{f} : \Lambda^p \check{E} \to \Lambda^p \check{E}$ l'application définie par $\omega \mapsto f^*\omega$.

– Montrer que l'application $\Lambda^n \check{f} : \Lambda^n \check{E} \to \Lambda^n \check{E}$ est la multiplication par $\det f$.

– Montrer que

$$\det(f - \lambda \operatorname{id}_V) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \operatorname{tr}(\Lambda^{n-i} \check{f})\, \lambda^i \ .$$

– En déduire que

$$\det(\operatorname{id}_V + f) = \operatorname{tr}(\Lambda^* \check{f} : \Lambda^* \check{E} \to \Lambda^* \check{E}) \ .$$

A.6 Rappels d'algèbre homologique

• **Catégories, foncteurs.**

Une *catégorie* $\mathcal{C}$ est la donnée

- d'une collection $\mathrm{Obj} = \mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$, dont les éléments sont appelés les *objets* de $\mathcal{C}$,
- d'un ensemble $\mathrm{Mor}(X,Y) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour tous les X, Y dans Obj, dont les éléments sont appelés les *morphismes* (ou *flèches*) de X dans Y dans la catégorie $\mathcal{C}$,
- d'un élément $\mathrm{Id} = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,X)}$ (appelé *(morphisme) identité* de X dans X) dans $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,X)$ pour tout X dans Obj, et
- d'une application $\circ$ (appelée *composition*) de $\mathrm{Mor}(X,Y) \times \mathrm{Mor}(Y,Z)$ dans $\mathrm{Mor}(X,Z)$ pour tous X, Y, Z dans Obj,

telle que

$$f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$$

et

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \ .$$

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories. Un *foncteur* (covariant) $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est la donnée

- pour tout objet X de $\mathcal{C}$, d'un objet $\mathcal{F}(X)$ de $\mathcal{C}'$,
- pour tout morphisme f dans l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, d'un morphisme $\mathcal{F}(f)$ dans l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$,

telle que

$$\mathcal{F}(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$$

et

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \ .$$

Un foncteur *contravariant* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est une telle donnée, sauf que maintenant $\mathcal{F}(f) \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$, et qui au lieu de la dernière condition vérifie la condition

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \ .$$

Une *sous-catégorie* $\mathcal{C}'$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une sous-collection $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}'}$ de $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}}$, et d'un sous-ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(X,Y)$ de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ pour tous X, Y dans $\mathrm{Obj}_{\mathcal{C}'}$, telle que $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(X,X)$ contienne $\mathrm{Id}_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,X)}$ et que la composition préserve les $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(X,Y)$. Une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, munie des identités et des compositions de $\mathcal{C}$, est une catégorie.

Par exemple, la *catégorie des ensembles* a pour objets les ensembles, pour morphismes les applications entre ensembles, pour identités les applications identités, et pour compositions les compositions d'applications.

Beaucoup des catégories que nous rencontrerons sont des catégories, dites *d'ensembles décorés*, dont les objets sont des ensembles munis de structures additionnelles, et dont les morphismes sont certaines applications entre ces ensembles, et où les identités sont les applications identités, et la composition est la composition des applications. Une telle catégorie est muni d'un foncteur évident, dit *foncteur oubli*, à valeurs dans la catégorie des ensembles, qui associe à un ensemble muni de structures additionnelles cet ensemble lui-même.

Par exemple, la *catégorie des espaces topologiques* est une catégorie d'ensembles décorés, dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes sont les applications continues, et dont le foncteur oubli est l'association à un espace topologique de son ensemble

sous-jacent. On définit de même la *catégorie* TOP *des variétés topologiques*, celle TOP_n des *variétés topologiques de dimension* n, qui sont des sous-catégories de la catégorie des espaces topologiques.

La *catégorie* DIFF_k *des variétés différentielles de classe* C^k est aussi une catégorie d'ensembles décorés, dont les objets sont les variétés différentielles de classe C^k et les morphismes sont les applications de classe C^k, et dont le foncteur oubli est l'association à une variété différentielle de son ensemble sous-jacent (on oublie à la fois la topologie et l'atlas maximal de cartes).

De nombreuses catégories seront définies dans ce cours.

- La catégorie DIFF_k des variétés différentielles de classe C^k (paragraphe 2.3).
- La catégorie $\mathrm{DIFF}_k(n)$ des variétés différentielles de classe C^k et de dimension n (paragraphe 2.3).
- La catégorie des fibrations de classe C^k (paragraphe 3.6).
- La catégorie des fibrés vectoriels de classe C^k (paragraphe 3.2).
- La catégorie des fibrés vectoriels de classe C^k et de rang n (paragraphe 3.2).
- La catégorie des revêtements (paragraphe A.4).
- La catégorie des groupes topologiques (paragraphe 5.1).
- La catégorie des groupes de Lie (paragraphe 5.1).
- La catégorie des algèbres de Lie (paragraphe 5.2).

De nombreux foncteurs seront définis dans ce cours.

- Le foncteur $\mathbb{P}$ de la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ et les flèches les applications linéaires injectives, dans la catégorie des variétés différentielles K-analytiques, qui à un espace vectoriel V associe l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ (paragraphe 2.4.3).
- Le foncteur $\mathcal{G}_k$ de la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels de dimension finie sur $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$ et les flèches les applications linéaires injectives, dans la catégorie des variétés différentielles K-analytiques, qui à un espace vectoriel V associe la variété grassmannienne $\mathcal{G}_k(V)$ (paragraphe 2.4.3).
- Le foncteur $\mathcal{G}_k$ de la catégorie des fibrés vectoriels de classe C^k et des morphismes de fibrés vectoriels injectifs sur les fibres dans la catégorie des fibrations de classe C^k, qui à un fibré vectoriel associe sa fibration grassmannienne (paragraphe 3.6).
- Le foncteur T, de la catégorie $\mathrm{DIFF}_{k+1}(n)$ des variétés différentielles de classe C^{k+1} et de dimension n, dans la catégorie des fibrés vectoriels de classe C^k et de rang n, qui à une variété associe son fibré tangent (paragraphes 3.3 et 3.4).
- Le foncteur contravariant de la sous-catégorie de la catégorie DIFF_{k+1}, formée des variétés différentielles de classe C^{k+1} et des morphismes étales entre ces variétés, à valeur dans la catégorie des espaces vectoriels réels, qui à une variété M de classe C^{k+1} associe l'espace vectoriel réel $\Gamma_k(TM)$ des champs de vecteurs C^k sur M, et à un morphisme étale f associe l'application linéaire $X \mapsto f^*X$ (paragraphes 4.1 et 4.2).
- Le foncteur de la catégorie des groupes de Lie dans celle des algèbres de Lie, qui à un groupe de Lie associe son algèbre de Lie (paragraphe 5.3).
- Le foncteur contravariant de la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps donné K, dans la catégorie des algèbres (associatives unitaires) graduées anti-commutatives sur K, qui à un tel espace vectoriel E associe $\Lambda^*\check{E}$, et à une application linéaire f associe le morphisme f^* (gradué de degré 0) (paragraphe A.5).

- Le foncteur contravariant de la catégorie $\mathrm{DIFF}_\infty(n)$ des variétés différentielles de classe C^∞ et de dimension n, dans la catégorie des fibrés vectoriels de classe C^∞ et de rang 2^n, qui à une variété associe son fibré des formes alternées (voir paragraphe 3.7). On peut définir aussi le foncteur contravariant de la catégorie des fibrés vectoriels C^k dans elle-même, qui à un fibré vectoriel E associe le fibré vectoriel $\Lambda^*\check{E}$.
- Le foncteur contravariant de la catégorie des variétés C^∞ et des applications C^∞, dans la catégorie des algèbres graduées (associatives unitaires) anticommutatives, et des morphismes d'algèbres graduées unitaires, qui à une variété M associe son algèbre des formes différentielles $\Omega(M)$ et à une application $f : M \to N$ associe $f^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ (paragraphe 6.1).
- Le foncteur contravariant *cohomologie de de Rham* H^*_{DR}, de la catégorie des variétés C^∞ et des applications continues entre ces variétés, dans la catégorie des algèbres graduées (associatives unitaires) anticommutatives, et des morphismes d'algèbres graduées unitaires, qui à une variété M associe l'algèbre $H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ et à une application $f : M \to N$ associe le morphisme $f^* : H^*_{\mathrm{DR}}(N) \to H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ (paragraphe 6.2).
- Le foncteur contravariant *cohomologie de de Rham à support compact* $H^*_{\mathrm{DR},c}$, de la catégorie des variétés C^∞ et des applications continues propres entre ces variétés, dans la catégorie des algèbres graduées (associatives pas forcément unitaires) anticommutatives, et des morphismes d'algèbres graduées, qui à une variété M associe l'algèbre $H^*_{\mathrm{DR},c}(M)$ et à une application $f : M \to N$ associe le morphisme $f^* : H^*_{\mathrm{DR},c}(N) \to H^*_{\mathrm{DR},c}(M)$ (paragraphe 6.4).
- Le foncteur *compactification d'Alexandrov* de la catégorie des espaces topologiques localement compacts et des applications continues propres, à valeurs dans la catégorie des espaces topologiques compacts et des applications continues, qui à un espace topologique localement compact X associe son compactifié d'Alexandrov $\widehat{X}$, et à une application continue propre f entre deux espaces topologiques localement compacts associe son unique extension $\widehat{f}$ aux compactifiés d'Alexandrov de ces espaces (voir l'exercice E.169 dans l'appendice A.1).

- **Complexes de cochaînes.**

On renvoie par exemple à [Spa, ES, CE] pour des compléments d'algèbre homologique.

Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif unitaire. Par module, on entend module sur $\mathbb{A}$. On rappelle que les modules sur l'anneau $\mathbb{Z}$ sont les groupes abéliens, et les modules sur un corps sont les espaces vectoriels. On rappelle qu'une suite finie ou infinie de morphismes de modules

$$... \to M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \to ...$$

est *exacte* si $\ker f_{n+1} = \mathrm{im}\, f_n$ pour tout n tel que f_{n+1} et f_n soient définis.

Un *complexe de cochaînes* $C = (C^*, \partial^*)$ est une suite de modules $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de morphismes de modules $(\partial^n : C^n \to C^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$

$$C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} C^n \xrightarrow{\partial} C^{n+1} \xrightarrow{\partial} ...$$

tels que

$$\partial^{n+1} \circ \partial^n = 0$$

pour tout entier n. Les ∂^n sont appelés les *morphismes de cobord* (ou différentielles), et notés ∂ quand n est sous-entendu. On pose par convention $C^{-1} = 0$ et $\partial^{-1} = 0$.

On définit les objets suivants.

- Un *morphisme de complexes de cochaînes* $f : C \to D$ est une suite de morphismes de modules $(f^n : C^n \to D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $f^{n+1} \circ \partial^n = \partial^n \circ f^n$ pour tout entier n.

$$\begin{array}{ccccccccccc} C^0 & \xrightarrow{\partial^0} & C^1 & \longrightarrow & ... & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{\partial^n} & C^{n+1} & \longrightarrow & ... \\ {\scriptstyle f^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^1} & & & & {\scriptstyle f^n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{n+1}} & & \\ D^0 & \xrightarrow{\partial^0} & D^1 & \longrightarrow & ... & \longrightarrow & D^n & \xrightarrow{\partial^n} & D^{n+1} & \longrightarrow & ... \end{array}$$

- L'*espace des n-cocycles* est $Z^n(C) = \ker(\partial : C^n \to C^{n+1})$. L'*espace des n-cobords* est $B^n(C) = \mathrm{im}(\partial : C^{n-1} \to C^n)$, qui est un sous-module de $Z^n(C)$. Le *n-ème groupe de cohomologie* de C (qui est un module) est le module quotient $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$, et le module (gradué) de cohomologie de C est

$$H^*(C) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^n(C) \ .$$

- *L'application induite en cohomologie* par un morphisme de complexes de cochaînes $f : C \to D$ est le morphisme de modules $f^* : H^n(C) \to H^n(D)$ défini par $f^*([z]) = [f^n(z)]$ si z est un n-cocycle de D.
- Si A est un corps, la *caractéristique d'Euler-Poincaré* d'un complexes de cochaînes C tel que l'espace vectoriel C^n sur A soit de dimension finie pour tout n, et nulle pour tout n assez grand, est définie par

$$\chi(C) = \sum_{i\in\mathbb{N}} (-1)^i \dim C^i \ .$$

- Une *suite exacte (courte)* de complexes de chaînes est la donnée notée

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

de complexes de cochaînes C, D, E et de morphismes de complexes de cochaînes $f : C \to D$, $g : D \to E$ tels que, pour tout n, la suite de morphismes de modules

$$0 \longrightarrow C^n \xrightarrow{f^n} D^n \xrightarrow{g^n} E^n \longrightarrow 0$$

soit exacte.
- Un *morphisme de suites exactes (courtes) de complexes de cochaînes* est un triplet (α, β, γ) de morphismes de complexes de cochaînes tel que le diagramme suivant soit commutatif en tout degré n :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \ . \end{array}$$

Remarques (1) Le module $H^n(C)$ mesure l'obstruction d'un cocycle à être un cobord (un n-cocycle étant un cobord si et seulement si son image dans $H_n(C)$ est nulle), ainsi que l'obstruction de la suite

$$C^0 \xrightarrow{\partial} C^1 \xrightarrow{\partial} C^2 \xrightarrow{\partial} ... \xrightarrow{\partial} C^n \xrightarrow{\partial} C^{n+1} \xrightarrow{\partial} ...$$

à être exacte (i.e. à vérifier $\ker \partial^n = \operatorname{im} \partial^{n-1}$ pour tout n.)

(2) Un morphisme de complexes de cochaînes $\phi : C \to D$ envoie cocycles sur cocycles et cobords sur cobords en chaque degré, ce qui montre que l'application induite en cohomologie par un morphisme de complexes de cochaînes est bien définie.

(3) On définit une catégorie des complexes de cochaînes sur l'anneau A, dont les objets sont les complexes de cochaînes et les morphismes les morphismes de cochaînes. Le morphisme identité, noté id, d'un complexe de cochaînes C est la suite $(\mathrm{id} : C^n \to C^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ sont des morphismes de cochaînes, alors le morphisme de cochaînes $g \circ f : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ défini par $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$ est la composition de f et de g.

Pour les applications induites en cohomologie, on a $(g \circ f)^* = g^* \circ f^*$ et $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}$. Ainsi $C \mapsto H^*(C)$ et $f \mapsto f^*$ est un foncteur (covariant) de la catégorie des complexes de cochaînes sur A dans la catégorie des A-modules gradués.

De même, les suites exactes (courtes) de complexes de cochaînes et les morphismes de suites exactes (courtes) de complexes de cochaînes forment une catégorie, pour la composition et les morphismes identité évidents.

Proposition A.21 *Si* $0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$ *est une suite exacte courte de complexes de cochaînes, il existe une suite exacte longue de modules*

$$... \longrightarrow H^{n-1}(E) \xrightarrow{\delta} H^n(C) \xrightarrow{f^*} H^n(D) \xrightarrow{g^*} H^n(E) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(C) \longrightarrow ...$$

telle que si (α, β, γ) *est un morphisme de suites exactes de complexes de cochaînes, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
... \longrightarrow & H^n(C) & \xrightarrow{f^*} & H^n(D) & \xrightarrow{g^*} & H^n(E) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C) & \longrightarrow ... \\
& \downarrow \alpha^* & & \downarrow \beta^* & & \downarrow \gamma^* & & \downarrow \alpha^* & \\
... \longrightarrow & H^n(C') & \xrightarrow{f'^*} & H^n(D') & \xrightarrow{g'^*} & H^n(E') & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(C') & \longrightarrow ... \quad .
\end{array}$$

Preuve. (1) Construisons tout d'abord le morphisme $\delta : H^n(E) \to H^{n+1}(C)$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
& & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\
0 & \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{f^n} & D^n & \xrightarrow{g^n} & E^n & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\
0 & \longrightarrow & C^{n+1} & \xrightarrow{f^{n+1}} & D^{n+1} & \xrightarrow{g^{n+1}} & E^{n+1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \quad .
\end{array}$$

Soit z un n-cocycle de E. Il s'agit de lui associer un $(n+1)$-cocycle x de C (bien défini modulo un cobord). Comme g^n est surjective, il existe $y \in D^n$ tel que $g^n(y) = z$. On considère $\partial y \in D^{n+1}$. Comme $g^{n+1}(\partial y) = \partial g^n(y) = \partial z = 0$, par exactitude, il existe $x \in C^{n+1}$ tel que $f^{n+1}(x) = \partial y$. On pose donc

$$\delta[z] = [x].$$

Vérifions que δ est bien défini. Tout d'abord, x est bien un cocycle, car

$$f^{n+2}(\partial x) = \partial f^{n+1}(x) = \partial\partial y = 0,$$

et comme f^{n+2} est injective, on en déduit que $\partial x = 0$.

De plus, $[x]$ ne dépend pas des choix du représentant z de $[z]$ et des éléments y, x comme ci-dessus. En effet, si (z', y', x') est un autre choix, alors comme $[z'] = [z]$, on a $z' - z = \partial z''$ avec $z'' \in E^{n-1}$. Soit $y'' \in D^{n-1}$ tel que $z'' = g^{n-1}(y'')$, qui existe par surjectivité de g^{n-1}. Alors

$$g^n(y' - y - \partial y'') = z' - z - \partial z'' = 0,$$

donc par exactitude, il existe $x'' \in C^n$ tel que $y' - y - \partial y'' = f^n(x'')$. Comme

$$f^{n+1}(x' - x - \partial x'') = \partial y' - \partial y - \partial f^n(x'') = \partial\partial y'' = 0,$$

par injectivité de f^{n+1}, on a $x' = x + \partial x''$, donc $[x'] = [x]$.

(2) Vérifions l'exactitude au niveau de $H^n(D)$.

Comme $g^* \circ f^* = (g \circ f)^* = 0$, on a $\operatorname{im} f^* \subset \ker g^*$.

Réciproquement, soit $[y] \in \ker g^*$. Comme $0 = g^*([y]) = [g^n(y)]$, il existe $z \in E^{n-1}$ tel que $g^n(y) = \partial z$. Par surjectivité de g^{n-1}, il existe $y' \in D^{n-1}$ tel que $z = g^{n-1}(y')$. Comme $g^n(y - \partial y') = 0$, par exactitude, il existe $x \in C^n$ tel que $y - \partial y' = f^n(x)$. De plus, x est un cocycle, car f^{n+1} est injective et

$$f^{n+1}(\partial x) = \partial f^n(x) = \partial y - \partial\partial y' = 0$$

car y est un cocycle. Enfin, $f^*([x]) = [f^n(x)] = [y]$, donc $[y] \in \operatorname{im} f^*$.

(3) Vérifions l'exactitude au niveau de $H^n(E)$.

Montrons que $\operatorname{im} g^* \subset \ker \delta$. Si y est un n-cocycle de D, par construction de δ, on a $\delta([g^n(y)]) = [x]$ où $f^{n+1}(x) = \partial y$. Comme y est un cocycle et f^{n+1} est injective, on a donc $\delta \circ g^* = 0$, ce qui prouve le résultat.

Réciproquement, montrons que $\ker \delta \subset \operatorname{im} g^*$. Soit z un n-cocycle de E tel que $\delta([z]) = 0$. Par construction, il existe $y \in D^n$ et $x \in C^{n+1}$ tels que $z = g^n(y)$, $f^{n+1}(x) = \partial y$ et $[x] = \delta([z]) = 0$. Soit $x' \in C^n$ tel que $x = \partial x'$. On pose $y' = y - f^n(x')$, qui est un n-cocycle de D. Alors $g^n(y') = z$, donc $g^*([y']) = [z]$, ce qui montre le résultat.

Les autres vérifications sont laissées en exercice. □

La seule classe d'exemples de complexes de cochaînes qui apparaît dans ce cours est la suivante. Soient M et N deux variétés C^∞, et $f : M \to N$ une application C^∞ (respectivement C^∞ et propre). Soient $\Omega^p(M)$ (respectivement $\Omega^p_c(M)$) l'espace vectoriel réel des p-formes différentielles C^∞ (respectivement C^∞ et à support compact) sur M et $d = d_{|\Omega^p(M)} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ la différentielle extérieure des formes différentielles (respectivement sa restriction $d = d_{|\Omega^p_c(M)} : \Omega^p_c(M) \to \Omega^{p+1}_c(M)$). Alors

$$\left(\Omega^p(M), d_{|\Omega^p(M)}\right)_{p\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\Omega^p_c(M), d_{|\Omega^p_c(M)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$$

sont des complexes de cochaînes. De plus, si $f^* : \Omega^p(N) \to \Omega^p(M)$ (respectivement $f^* : \Omega^p_c(N) \to \Omega^p_c(M)$) est l'application image réciproque par f des formes différentielles, qui commute avec la différentielle extérieure, alors

$$f^* : \left(\Omega^p(N), d_{|\Omega^p(N)}\right)_{p\in\mathbb{N}} \to \left(\Omega^p(M), d_{|\Omega^p(M)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$$

et

$$f^* : \left(\Omega^p(N), d_{|\Omega^p(N)}\right)_{p\in\mathbb{N}} \to \left(\Omega^p(M), d_{|\Omega^p(M)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$$

sont des morphismes de complexes de cochaînes.

On termine cet appendice par un exercice d'algèbre linéaire.

Exercice E.187 (Lemme des cinq) *On considère le diagramme commutatif suivant de modules, dont les flèches sont des morphismes de modules, et dont les lignes sont exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array} .$$

Si les première, seconde, quatrième et cinquième flèches verticales sont des isomorphismes, alors la troisième aussi.

A.7 Indications pour la résolution des exercices

Exercice E.170 Si A est l'intersection d'un ouvert U et d'un fermé F, alors U est un voisinage de tout point de A, tel que $U \cap A = F \cap U$, qui est fermé dans U. Si tout point admet un voisinage ouvert U dans X tel que $A \cap U$ soit fermé dans U, alors $A \cap U = F \cap U$ pour F un fermé de X, et $A \cap U \subset \overline{A} \cap U \subset \overline{F} \cap U = A \cap U$, donc $A \cap U = \overline{A} \cap U$ et A est ouvert dans $\overline{A}$. Enfin, si A est ouvert dans $\overline{A}$, alors il existe un ouvert U de X tel que $A = \overline{A} \cap U$, donc A est l'intersection d'un ouvert et d'un fermé.

Exercice E.171 Soit U un ouvert de X, alors $U \cap X_i$ est un ouvert de X_i. Donc tout ouvert de X_i pour la topologie induite est un ouvert de X_i pour la topologie originelle. Réciproquement, si U est un ouvert de X_i pour la topologie originelle (par exemple $U = X_i$), alors pour tout j, la partie $U \cap X_j = U \cap (X_i \cap X_j)$ est un ouvert de X_i, donc de X_j, donc U est un ouvert de X. Ceci montre le résultat.

Exercice E.173 Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ possède une différentielle partout non nulle, et que son image soit $\{(x, |x|) \ : \ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Notons $f(x) = (a(x), b(x))$. On peut supposer sans perte de généralité que $f(0) = 0$.

La fonction b atteint un minimum en 0, donc $b'(0) = 0$. Ainsi, $|b(x)| = o(x)$ au voisinage de 0. Comme $|a(x)| = |b(x)|$, on en déduit $a(x) = o(x)$, puis $a'(0) = 0$. Ainsi, $f'(0) = 0$, ce qui est absurde.

Si on retire la condition de non-nullité de f', on peut par exemple prendre $f(x) = (x^3, |x^3|)$ (et on peut même prendre un exemple C^∞ avec $(xe^{-1/x^2}, |x|e^{-1/x^2})$).

Exercice E.175 On peut supposer sans perte de généralité que $E = F = \mathbb{R}^n$, pour un n dans $\mathbb{N}$, dans l'énoncé du théorème d'inversion locale, que $E = \mathbb{R}^n$ et $F = G = \mathbb{R}^m$, pour des n, m dans $\mathbb{N}$, dans celui des fonctions implicites, et que tous les points particuliers (x et $f(x)$ dans l'énoncé du théorème d'inversion locale, a et b dans celui des fonctions implicites) sont égaux à 0.

Montrons que le théorème d'inversion locale implique celui des fonctions implicites. Soit $h(x, y) = (x, f(x, y))$. Alors h est définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, de classe C^1 et sa différentielle est inversible. On peut donc trouver un voisinage ouvert $V \times W$ de 0 sur lequel h et h^{-1} sont définies, de classe C^1 et injectives. Notons $g : x \mapsto \mathrm{pr}_2 \circ h^{-1}(x, 0)$, qui est de classe C^1 et définie sur V. On prend $V' \subset V$ tel que $g(V') \subset W$. On a alors

$$\{(x, y) \in V' \times W \ : \ f(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) \ : \ x \in V'\}.$$

Montrons l'inclusion du membre de droite dans celui de gauche : $(x, 0) = h(x, g(x)) = (x, f(x, g(x)))$ donc $f(x, g(x)) = 0$. Montrons l'inclusion opposée : si $f(x, y) = 0$, alors $h(x, g(x)) = (x, 0) = (x, f(x, y)) = h(x, y)$, donc $y = g(x)$, par injectivité de h sur $V' \times W$.

Montrons que le théorème des fonctions implicites implique celui d'inversion locale. Soit h l'application définie sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par $h(x, y) = f(y) - x$. Alors $\partial_y h(0, 0) = df_0$ est inversible, donc le théorème des fonctions implicites donne l'existence d'un voisinage $V \times W$ de $(0, 0)$ et d'une fonction $g : V \to W$ de classe C^1 tels que

$$\{(x, y) \in V \times W \ : \ f(y) = x\} = \{(x, g(x)) \ : \ x \in V\} \ .$$

Pour y assez proche de 0, on a $f(y) \in V$ et $y \in W$, si bien que, en posant $x = f(y)$, on a $y = g(x)$, puis $y = g \circ f(y)$. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}$ au voisinage de 0, et on montre de même que $f \circ g = \mathrm{id}$ au voisinage de 0.

Exercice E.176 (1) Notons $a_1, \ldots, a_n$ les colonnes de la matrice A et $h_1, \ldots, h_n$ celles de H. En utilisant la multilinéarité du déterminant, on vérifie que

$$\det(A+H) = \det(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{k=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) + O(||H||^2).$$

Ainsi, la différentielle du déterminant est donnée par

$$d(\det)_A(H) = \sum_{k=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{k-1}, h_k, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

En particulier, si A est inversible, alors on vérifie que

$$d(\det)_A : \ H \ \mapsto \ \det A \ \ \mathrm{tr}\, A^{-1}H \ ,$$

en montrant, en utilisant la formule de l'inverse d'une matrice, que les applications linéaires $d(\det)_A$ et $H \mapsto \det A \ \mathrm{tr}\, A^{-1}H$ coïncident sur la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices élémentaires $E_{k,\ell}$ pour $1 \leq k, \ell \leq n$, où les coefficients de $E_{k,\ell}$ sont nuls sauf celui en position (k, ℓ), qui vaut 1.

Supposons que $d(\det)_A = 0$. Pour $1 \leq k, \ell \leq n$, l'équation $d(\det)_A(E_{k,\ell}) = 0$ montre que le mineur de taille $n-1$ de A obtenu en supprimant la k-ème ligne et la l-ème colonne de A est nul. Ainsi, $d(\det)_A = 0$ si et seulement si tous les mineurs de taille $n-1$ de A sont nuls, i.e. si et seulement si le rang de A est strictement inférieur à $n-1$.

(2) Soient A un élément de X, E une droite vectorielle dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $d(\det)_A$ ne soit pas nul sur E, et F un supplémentaire de E, si bien que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est canoniquement identifié à $E \times F$. On va appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction ϕ donnée sur $E \times F$ par $\phi(M) = \det(M) - 1$. Comme $d\phi_A$ est non nul sur E, il existe un ouvert U de F et un ouvert V de E tels que $A \in U \times V$, et une application $\psi : U \to V$ de classe C^∞ telle que

$$\{B \in U \times V \ : \ \phi(B) = 0\} = \{(C, \psi(C)) \ : \ C \in U\}.$$

Pour conclure, on prend $f(C) = (C, \psi(C))$, qui est manifestement un homéomorphisme sur son image dont l'inverse est donné par la première projection, et dont la différentielle est partout injective.

(3) Les arguments sont les mêmes que dans la question précédente, à ceci près que, si on part de $A \in X$, il faudra se restreindre à un voisinage W de A sur lequel $\{B \in W \ : \ \det(B) = 0\} \subset X$. Cela ne pose pas de problème puisque le rang est semi-continu inférieurement.

(4) Soit X l'ensemble des matrices de rang au plus $n-1$. Supposons qu'il existe une application f définie sur un voisinage U de 0 dans $\mathbb{R}^{n^2-1}$ vérifiant les propriétés indiquées, avec $f(0) = 0$. Comme $n \geq 2$, la matrice $E_{k,l}$ appartient à X. Pour t assez petit, il existe donc un élément $e_{k,l}(t)$ de U tel que $f(e_{k,l}(t)) = tE_{k,l}$. Comme f est un homéomorphisme sur son image, $e_{k,l}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0. La suite $\frac{e_{k,l}(1/p)}{||e_{k,l}(1/p)||}$ appartient à la

sphère unité compacte de $\mathbb{R}^{n^2-1}$, on peut donc supposer qu'elle converge vers un vecteur $v_{k,l}$ de norme 1. Alors

$$df_0(v_{k,l}) = \lim \frac{f(e_{k,l}(1/p))}{||e_{k,l}(1/p)||}.$$

Comme $f(e_{k,l}(1/p))$ est proportionnel à la matrice $E_{k,l}$, on obtient en passant à la limite que $df_0(v_{k,l}) = \lambda E_{k,l}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme df_0 est injective, $\lambda \neq 0$. Ainsi, l'image de l'application linéaire df_0 contient toutes les matrices $E_{k,l}$. C'est absurde puisque df_0 est définie sur un espace de dimension $n^2 - 1$.

Exercice E.178

(Preuve du corollaire A.5) Quitte à appliquer un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que l'image de df_0 soit engendrée par les p premiers vecteurs de base de $\mathbb{R}^n$. Soit alors

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_p) + (0, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots, x_n) \ .$$

La différentielle de g en 0 est inversible, donc $\psi = g^{-1}$ est bien définie au voisinage de 0. Ainsi, au voisinage de 0,

$$(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) = \psi \circ g(x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0) = \psi \circ f(x_1, \ldots, x_p).$$

(Preuve du corollaire A.6) Quitte à appliquer un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$, on peut supposer que les images par df_0 des q premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ forment une base de $\mathbb{R}^q$. Soit alors

$$g : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f(x_1, \ldots, x_n), x_{q+1}, \ldots, x_n) \ .$$

L'application g est de classe C^k au voisinage de 0, envoie 0 sur 0, et sa différentielle en 0 est inversible. Par le théorème A.2 d'inversion locale, $\varphi = g^{-1}$ est un C^k-difféomorphisme local de $\mathbb{R}^n$ en 0, et, en considérant les q premières coordonnées de $g \circ \varphi = \mathrm{id}$, on a, au voisinage de 0,

$$f \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_q) \ .$$

(Preuve du corollaire A.7) Notons $(e_1, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $(f_1, \ldots, f_q)$ celle de $\mathbb{R}^q$. Nous pouvons supposer, quitte à appliquer un isomorphisme linéaire à la source et au but, que $df_0(e_i) = f_i$ pour $i = 1, \ldots, r$, et $df_0(e_i) = 0$ pour $i = r+1, \ldots, p$.

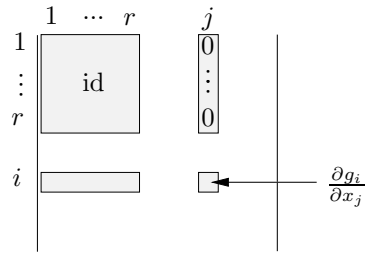
Soit π la projection sur les r premières composantes dans $\mathbb{R}^q$, et

$$F : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto (\pi(f(x_1, \ldots, x_p)), x_{r+1}, \ldots, x_p) \ .$$

Comme F est est de classe C^k et $dF_0 = \mathrm{id}$, l'application F admet un inverse local G, qui vérifie $\pi \circ f \circ G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r)$. Autrement dit, en faisant un changement de coordonnées à la source, on s'est ramené au cas où

$$f(x_1, \ldots, x_p) = (x_1, \ldots, x_r, g(x_1, \ldots, x_p)) \ .$$

Soient $i, j > r$. Pour x proche de 0, considérons le mineur de Jf_x, obtenu en ne gardant que les r premières lignes et colonnes, la i-ème ligne et la j-ème colonne. Ce mineur est nul, puisque df_x est de rang r.



Donc $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) = 0$. Ainsi, $g_i(x_1, \ldots, x_p) = g_i(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$. Donc

$$f(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \ .$$

Considérons maintenant f restreinte à $\mathbb{R}^r \times \{0\}$: elle est immersive en 0, si bien qu'on peut la transformer au voisinage de 0 en $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ par un C^k-difféomorphisme local au but. Ceci conclut.

Remarque. Ce résultat est moins anodin qu'il n'y paraît. Essayez par exemple de montrer le résultat suivant : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dont la différentielle est partout de rang 1, égale à l'identité sur $\mathbb{R} \times \{0\}$. Alors l'image de f est incluse dans $\mathbb{R} \times \{0\}$. Directement, ce n'est pas évident que f ne va pas s'écarter de la droite des abscisses, et que la condition de rang de la différentielle est une contrainte suffisante.

Exercice E.179 On montre que l'ouvert de V sur lequel f est immersive est dense dans V, par l'absurde. Sinon, soit U un ouvert non vide de V sur lequel f n'est immersive en aucun point , et $r < n$ le rang maximum de df_x, atteint en un point $x_0 \in U$. Par semi-continuité du rang, le rang de df_x pour x proche de x_0 est $\geq r$, et $\leq r$ par maximalité. Le théorème du rang constant s'applique et montre que f s'écrit, quitte à composer à droite et à gauche par un difféomorphisme local, sous la forme $f(x_0 + h) = f(x_0) + (h_0, \ldots, h_r, 0, \ldots, 0)$, ce qui contredit l'injectivité de f puisque $r < n$. Puisque f est immersive en au moins un point, on a $n \leq m$.

L'application df_x n'est pas nécessairement injective partout, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice E.180

1. Si $n = 1$, alors f atteint son maximum sur l'intervalle $]a, b[$ en un certain point c qui est un autre point critique de f. Si $n \geq 2$, alors la connexité de $\mathbb{R}^n - B(0, R)$ pour tout R implique que soit f tend vers $+\infty$ en ∞, soit f tend vers $-\infty$ en ∞. Dans le deuxième cas, le maximum de f fournit encore un autre point critique de f.
2. Comme f tend vers $+\infty$ en l'infini, l'ensemble K_m est borné. Ainsi, son adhérence est encore un compact connexe contenant a et b, ce qui montre que $\overline{K}_m \subset K_m$. Ainsi, K_m est fermé. Soit $M = \inf\{m \in \mathbb{R} \ : \ K_m \neq \emptyset\}$. Alors $(K_{M+1/n})_{n \in \mathbb{N} - \{0\}}$ forme une suite décroissante de compacts connexes non vides, donc son intersection est encore un compact connexe non vide, qui contient a et b. Sur ce compact, f est majorée par M. Ainsi, $K_M \neq \emptyset$.
3. Puisque $M > \sup\{f(a), f(b)\}$, sous l'hypothèse d'absence de point critique différent de a, b, on vérifie aisément que l'intérieur de K_M est constitué des points x de K_M tels que $f(x) < M$, tandis que sa frontière est constituée des points x de K_M tels

que $f(x) = M$ (en utilisant le théorème des fonctions implicites). On en déduit que K_M est l'adhérence de son intérieur.

Supposons que l'intérieur de K_M ne soit pas connexe, et qu'il s'écrive donc comme réunion de deux ouverts A et B. Alors $K_M = \overline{A} \cup \overline{B}$. Par connexité de K_M, les deux ensembles $\overline{A}$ et $\overline{B}$ ne sont pas disjoints, et ils se rencontrent donc en un point x. Il n'appartient ni à A ni à B car A et B sont ouverts et disjoints. Ainsi, $f(x) = M$. Le théorème des fonctions implicites appliqué au voisinage du point régulier x assure qu'il existe un voisinage U de x tel que $V = U \cap \overset{\circ}{K_M}$ soit connexe. Comme $V = (V \cap A) \cup (V \cap B)$, l'un des ouverts $V \cap A$ ou $V \cap B$ est donc vide par connexité, ce qui contredit le fait que x soit dans l'adhérence de A et de B.

4. L'intérieur de K_M est un ouvert connexe donc connexe par arcs. Il existe donc un chemin reliant a à b et restant dans l'intérieur de K_M. Ce chemin donne donc un compact connexe contenant a et b et sur lequel $f < M$, ce qui est absurde car cela contredit la minimalité de M.

Exercice E.181 (1) La fonction exponentielle est une série entière de domaine de convergence $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc analytique réelle, et en particulier C^∞, comme fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est donc C^∞ comme fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Comme $\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$, on a

$$d\exp_M(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} M^k X M^{n-k-1}}{n!}$$

(attention à la non commutativité du produit !). En particulier, $d\exp_0 = \mathrm{Id}$.

(2) La première assertion vient du fait que $\det \exp(M) = e^{\mathrm{tr}(M)}$. Si M est une matrice antisymétrique, alors M commute avec sa transposée, et si A et B sont deux matrices qui commutent, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Donc si M est antisymétrique, alors

$${}^t\exp(M)\ \exp(M) = \exp({}^tM)\ \exp(M) = \exp({}^tM + M) = \exp(0) = \mathrm{Id}\ .$$

(3) Soit $x \in \mathrm{SO}(n)$. Il existe une matrice orthogonale M telle que MxM^{-1} soit diagonale par blocs égaux à 1 ou de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ces blocs sont respectivement l'exponentielle de 0 et $\begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ (dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est conjuguée à $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$, qu'il est facile d'écrire comme une exponentielle de matrice, et on revient ensuite dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$). Il existe donc une matrice antisymétrique X telle que $MxM^{-1} = \exp(X)$. Finalement, $x = \exp(M^{-1}XM)$.

Montrons que, pour $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, i.e. $\mathrm{tr}(X) = 0$, alors $\mathrm{tr}(\exp(X)) \geq -2$. Si X a deux valeurs propres réelles, elles sont de la forme a et $-a$, et on a $\mathrm{tr}(\exp(X)) = e^a + e^{-a} \geq 0$. Sinon, les valeurs propres a et $-a$ de X sont complexes conjuguées, et elles sont donc imaginaires pures, i.e. $a = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$. En particulier, $\mathrm{tr}(\exp(X)) = e^{ib} + e^{-ib} = 2\cos(b) \geq -2$. Ainsi, la matrice $\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -1/10 \end{pmatrix}$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ n'appartient pas à $\exp(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}))$.

(4) En diagonalisant une matrice symétrique dans une base orthonormée, on vérifie que son exponentielle est symétrique définie positive. Réciproquement, soit M symétrique définie positive. En la diagonalisant dans une base orthonormée, puis en prenant le logarithme des valeurs propres, on construit une matrice symétrique X telle que $\exp(X) = M$. De plus, si P est le polynôme d'interpolation de Lagrange qui vaut $\log(\lambda_i)$ aux valeurs propres λ_i de M, on a $X = P(M)$.

Montrons que X est l'unique antécédent de M par l'exponentielle. Si $M = \exp(X')$, alors X' commute avec M, donc avec tous les polynômes en M, donc avec X. En particulier, $\exp(X' - X) = \exp(X')\exp(X)^{-1} = I_n$. En diagonalisant $X' - X$, on en déduit que $X' - X = 0$.

Ainsi, exp réalise une bijection entre l'espace $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et l'espace $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices symétriques définies positives. Elle est C^∞, car restriction d'une application C^∞ au sous-espace vectoriel $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, dont $\mathrm{Sym}_n^+(\mathbb{R})$ est un ouvert. Il reste à vérifier que c'est un C^∞-difféomorphisme.

Soit M une matrice symétrique, montrons que exp est une immersion en M. Quitte à diagonaliser M, on peut supposer que M est diagonale de coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. La formule de la différentielle de l'exponentielle montre alors que

$$d\exp_M(A)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!} A_{ij}.$$

Il suffit donc de vérifier que les coefficients $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k \lambda_j^{n-k-1}}{n!}$ sont non nuls. Si $\lambda_i = \lambda_j$, ce coefficient est égal à e^{λ_i}, et il n'y a rien à faire. Sinon, le coefficient est égal à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\lambda_i^n - \lambda_j^n}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{e^{\lambda_i} - e^{\lambda_j}}{\lambda_i - \lambda_j} \neq 0.$$

Ainsi, $d\exp$ est partout inversible sur l'espace des matrices symétriques. En particulier, exp est un difféomorphisme local, et une bijection, donc un difféomorphisme.

(5) La formule de la différentielle de l'exponentielle peut se réécrire

$$d\exp_M = \sum_{p,q\geq 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!}\ .$$

Notons de plus que les opérateurs L_M et R_M commutent.

Supposons tout d'abord $L_M - R_M$ inversible. Alors

$$\begin{aligned} d\exp_M &= \textstyle\sum_{p,q\geq 0} \frac{L_M^p R_M^q}{(p+q+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{L_M^n - R_M^n}{L_M - R_M} = \frac{1}{L_M - R_M} \left(\exp(L_M) - \exp(R_M)\right) \\ &= \frac{1}{\mathrm{ad}M} \exp(L_M) \left(\mathrm{Id} - \exp(-\mathrm{ad}M)\right) = \exp(L_M) \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mathrm{ad}M)^k}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat recherché.

Notons que cette preuve n'utilise que le fait que L_M et R_M commutent. Lorsque $L_M - R_M$ n'est pas inversible, le même argument s'applique donc à $L_M + \lambda\mathrm{Id}$ et R_M avec $\lambda > 0$ assez petit, de telle sorte que $L_M - R_M + \lambda\mathrm{Id}$ soit inversible. On conclut ensuite en faisant tendre λ vers 0.

(6) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n^2}$ sont les valeurs propres complexes de $\mathrm{ad}M$, la formule de la question précédente montre que les valeurs propres complexes de $\exp(-M)d\exp_M$ sont $\frac{1-e^{-\lambda_k}}{\lambda_k}$ si

$\lambda_k \neq 0$, et 1 si $\lambda_k = 0$. Ainsi, cet opérateur est inversible si et seulement si les valeurs propres non nulles satisfont $e^{-\lambda_k} \neq 1$, i.e. $\lambda_k \notin 2i\pi\mathbb{Z}$.

Exercice E.184 (3) Comme $U \cap V$ est non vide, X est connexe par arcs. Soit α un lacet en x. Par compacité, il existe $n \in \mathbb{N}$ non nul tel que $\alpha([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ soit contenu dans U ou dans V pour tout $i \in \{0, ..., n\}$. Pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, soit c_i un chemin entre x et $\alpha(\frac{i}{n})$, contenu dans $U, V, U \cap V$ si $\alpha(\frac{i}{n})$ appartient à $U, V, U \cap V$ respectivement (ce qui est possible car $U, V, U \cap V$ sont connexes par arcs), avec c_0 et c_n constants. On note α_i le chemin $t \mapsto \alpha(\frac{i+t}{n})$. Il n'est pas difficile de voir que le lacet α en x est homotope à

$$(\overline{c_0} \cdot \alpha_0 \cdot c_1) \cdot (\overline{c_1}\alpha_1 \cdot c_2) \cdot ... \cdot (\overline{c_{n-2}} \cdot \alpha_{n-2} \cdot c_{n-1}) \cdot (\overline{c_{n-1}} \cdot \alpha_{n-1}) \cdot c_n \ .$$

Pour $i \in \{0, ..., n-1\}$, le chemin $\overline{c_i} \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$, est un lacet en x contenu dans U ou dans V.

Comme U et V sont simplement connexes, chaque $\overline{c_i} \cdot \alpha_i \cdot c_{i+1}$ est homotope au lacet constant en x. Donc α est homotope au lacet constant en x. Par conséquent, X est simplement connexe.

(4) La sphère $\mathbb{S}_n$ est réunion de l'ouvert U complémentaire du pôle nord, et de l'ouvert V complémentaire du pôle sud. Les ouverts U, V sont contractiles, donc simplement connexes par (2). L'intersection $U \cap V$ se rétracte par déformation forte sur l'équateur $\mathbb{S}_{n-1}$, qui est connexe par arcs si $n \geq 2$.

(5) On raisonne par récurrence sur n. D'après l'exercice E.15, la droite projective $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}_2$, donc est simplement connexe par (4). On suppose maintenant $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ simplement connexe. Soit U (le domaine d')une carte affine de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$, et V le complémentaire d'un point de U dans $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$. Alors U est contractile, et V se rétracte par déformation forte sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, donc est simplement connexe. Par (3), l'espace $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ est simplement connexe.

Exercice E.185 Soit I une partie de $\{1, \ldots, m\}$ et J une partie de $\{1, \ldots, n\}$. Le coefficient I, J de la matrice de l'application $\Lambda^* f : \omega \mapsto f^*\omega$ est égal au mineur $M_{I,J}$ de la matrice de f correspondant aux lignes d'indice dans I et aux colonnes d'indice dans J :

$$\Lambda^* f(\check{e}_J) = \sum_I M_{I,J} \check{f}_I \ .$$

Index

action, 185
  de classe C^k, 187
  libre, 320
  par homéomorphismes, 321
  par translations
    à droite, 320
    à gauche, 320
  propre, 321
  transitive, 320
  à gauche, 185
algèbre de Lie, 161
  commutative, 161
  d'un groupe de Lie, 165
  produit, 162
alternée, 333
anneau, 235
anticommutativité, 104
antidérivation, 221
appauvrissement de structure, 15
application
  canonique, 320
  de classe C^k, 16
  de rang constant, 17
  de transition, 14
  étale, 29
  exponentielle, 169
  lue dans des cartes, 16
  orbitale, 320
  projective, 34
  propre, 316
  tangente, 71
  transverse, 85
atlas de cartes
  feuilletées, 109
atlas de cartes, 13
  orienté, 249
automorphisme
  de revêtements, 327

base, 67, 77, 327
  adaptée, 200
  d'ouverts, 316
  dénombrable, 316
  positive, 248
bord, 254
bouteille de Klein, 121

caractéristique
  d'Euler, 238
  d'Euler-Poincaré, 344
cardinal, 319
carte, 14
  affine, 35
  locale, 14
  orientée, 249
  positive, 249
catégorie, 341
  des ensembles, 341
  des algèbres de Lie, 161
  des espaces topologiques, 341
  des groupes de Lie, 156
  des groupes topologiques, 155
  des variétés différentielles
    de classe C^k, 342
  des variétés topologiques, 342
    de dimension n, 342
centre, 163, 177
champ
  de p-plans, 106
    image réciproque, 106
    lu dans une carte, 107
    restriction, 106
  de droites
    dirigé par, 107
  de vecteurs, 92
    associé, 167
    complet, 97
    image réciproque, 94
    invariant à droite, 167
    invariant à gauche, 167
    lu dans une carte, 96
    non singulier, 98
    tangent à un champ de plans, 106
changement de carte, 14
chemin, 330
  composé, 330
  inverse, 330
cobord, 344
cocycle, 344
codimension, 13, 23
cohomologie de de Rham, 230
  à support compact, 258
compactification d'Alexandrov, 343
compactifié d'Alexandrov, 317
C^k-compatibles, 14
complexe
  de cochaînes, 343
composition, 67
conjugaison, 158
contractile, 329
coordonnées

de Plücker, 278
homogènes, 35
courbe, 8, 15, 73
elliptique, 34
intégrale, 97
crochet
de Lie, 104, 161
de Poisson, 289

décomposition
d'Iwasawa, 196
polaire, 38, 196
degré, 268
demi-hyperboloïde
supérieur, 193
dénombrable à l'infini, 316
difféomorphisme, 17, 322
local, 29, 323
différentiablement homotopes, 232
différentielle, 217, 221
extérieure, 221
dimension, 8, 12
distribution
de p-plans, 106
domaine, 14
régulier, 254
à bord lisse, 254
drapeau, 200
dualité de Poincaré, 264
dérivation, 99
d'algèbres de Lie, 162
intérieure, 162
dérivée de Lie, 226

$\ell^2(\mathbb{R})$, 317
ensemble
bien ordonné, 319
ordonné, 319
isomorphe, 319
totalement ordonné, 319
entrelac
de Whitehead, 275
orienté, 275
équivalence d'homotopie, 329
espace
de Siegel, 203
des cobords, 344
des cocycles, 344
des feuilles, 11
lenticulaire, 33, 329
projectif, 34
complexe, 35
réel, 35
symétrique, 201, 202, 286
tangent, 71
total, 67, 77, 327
vectoriel
orienté, 248
espace topologique
à base dénombrable, 316
σ-compact, 316
contractile, 329
dénombrable à l'infini, 316
localement compact, 316
paracompact, 316
semilocalement simplement connexe, 331
séparable, 316
séparé, 316
simplement connexe, 329
étoilé, 235

faisceau, 18
feuille, 110
locale, 109
feuilletage, 109
de Reeb, 123
image réciproque, 111
linéaire, 112
standard, 109
quotient, 112
fibration, 77
de Hopf, 125
grassmannienne, 79
triviale, 78
trivialisable, 78
fibre, 67, 77, 327
fibré
cotangent, 81
de Seifert, 123
des k-plans, 79
en droites, 67
localement trivial, 77
tangent, 71
tautologique, 68, 69
vectoriel, 66
complexe, 66
des p-formes alternées, 81
des formes alternées, 81
holomorphe, 68
image réciproque, 81
produit, 82
produit tensoriel, 86
réel, 66
somme directe, 82
trivial, 68
trivialisable, 68

fixateur, 320
foncteur, 341
contravariant, 341
covariant, 341
forme
d'aire, 257
de Kähler, 288
de Liouville, 279
différentielle, 81, 216
cohomologues, 230
exacte, 229
fermée, 229
invariante, 286
invariante à gauche, 282
lue dans une carte, 220
multilinéaire
alternée, 333
symplectique, 202
volume, 251
p-forme différentielle, 216
formule
d'Ampère-Stokes, 258
de changement de variable, 220
globale, 253
locale, 247
de Gauss, 277
de Gauss-Ostrogradski, 257
de Green-Riemann, 257
de Stokes, 255
frontière de Shilov, 202, 203

genre, 283
germe, 97
graphe, 11
groupe
affine, 197
de Lie, 156
p-adique, 156
complexe, 156
local, 179
quotient, 176
réel, 156
discret, 157
fondamental, 331
linéaire, 37
orthogonal, 37
spécial linéaire, 37
spécial orthogonal, 37
spécial unitaire, 37
symétrique, 333
topologique, 155
sans petit sous-groupe, 160
unitaire, 37

G_x, 320

hermitienne, 37
homéomorphisme local, 328
homotopes, 330
différentiablement, 232
proprement, 260
proprement, 329
homotopie, 330
C^∞, 232
hypocycloïde, 39

identité
de Jacobi, 104, 161
de Leibnitz, 289, 290
image réciproque, 218
immersion, 17, 322
indice
d'un champ de vecteur, 273
d'une application, 270
intégrable, 112
intégrale de Gauss, 277
invariant, 31
de Hopf, 281
isomorphe, 17, 19, 29, 67, 78, 155, 156, 319
isomorphisme, 18
d'algèbres de Lie, 161
de revêtements, 327
de groupes de Lie, 176
de feuilletages, 111
de fibrations, 78
de fibrés vectoriels, 67
de groupes de Lie, 156
de groupes topologiques, 155
local de groupes de Lie, 179
remarquable, 185
isotope à l'identité, 117, 121
isotopie, 117

jacobien, 322

lacet, 330
lagrangien, 201
lemme
de Poincaré, 235
des cinq, 347
localement, 317
compact, 316
fermée, 24, 317
fini, 316
linéaire, 160
localement isomorphes, 179
longue droite, 11

matrice jacobienne, 322
mesure
de Haar, 281
nulle, 27, 254
morphisme, 341
d'algèbres de Lie, 161
de fibration, 78
de groupes de Lie, 156
de groupes topologiques, 155
de cobord, 343
de complexes de cochaînes, 344
de fibrés vectoriels, 67
de suites exactes
de complexes de chaînes, 344
identité, 67
local de groupes de Lie, 179
multi-vecteur, 339
multiplicateurs de Lagrange, 85

nœud
orienté, 275
sauvage, 25
nombre d'enlacement, 274

orbite, 320
ordinal, 319
dénombrable, 319
ordre, 319
bon, 319
lexicographique, 319
total, 319
orientation, 248
canonique, 248
image réciproque, 250
opposée, 253
par la direction sortante, 255
produit, 249
somme disjointe, 249
ouvert
distingué, 67, 77
étoilé, 235

paracompact, 316
parallélisable, 71
paramétrage local, 13
partition de l'unité, 8
subordonnée, 8
plongement, 25
de groupes de Lie, 157
de Plücker, 278
plus fin, 316
point critique, 27
pôle
Nord, 32
Sud, 32
produit
extérieur, 216, 334
intérieur, 225, 338
tensoriel, 332
projectifié, 79
propre, 316
proprement
différentiablement homotopes, 260
discontinue, 321
homotopes, 329
préserver l'orientation, 248, 249
puissance tensorielle, 333

rang, 16, 67, 322
recouvrement
ouvert
localement fini, 316
plus fin, 316
relèvement, 330
représentation
adjointe, 164, 165
revêtement, 29, 327
à n feuillets, 328
d'orientation, 250
de groupes de Lie, 176
fini, 328
holomorphe, 29
trivial, 327
universel, 331
ruban de Möbius, 108
réseau, 34
rétract par déformation forte, 329
rétraction, 240

saturée, 320
section, 68, 78
de classe C^k, 68
nulle, 68
segment initial, 319
semi-continue inférieurement, 322
semilocalement simplement connexe, 331
séparable, 316
séparé, 316
séparabilité, 316
séparation, 316
signature, 283, 333
simplement connexe, 329
somme connexe, 22, 243
orientée, 249
sous-algèbre de Lie, 161
sous-catégorie, 341
sous-espace

affine tangent, 65
vectoriel tangent, 65
sous-groupe
central, 177
de Lie, 156
de Lie immergé, 174
à un paramètre, 171
sous-variété, 12, 23
complexe, 13
immergée, 20
topologique, 13
transverse, 124
à bord, de codimension 0, 254
sphère, 32
de Riemann, 33
stabilisateur, 320
structure
complexe, 202
standard, 20, 24
subimmersion, 17, 322
submersion, 17, 322
suite exacte, 343
de complexes de cochaînes, 344
longue
de cohomologie, 345
de Mayer-Vietoris, 236, 261
suite exhaustive, 316
support, 8, 247
surface, 8, 15
de révolution, 324
de Veronese, 45
surface de niveau régulière, 27
symplectomorphisme, 203

tenseur, 333
antisymétrique, 333
symétrique, 333
théorème
d'Ado, 160, 182
d'Ehresmann, 79
d'invariance du domaine, 6, 240
d'inversion locale, 322
de Brouwer
d'invariance du domaine, 6, 240
du point fixe, 240
de Cartan, 174
de dualité de Poincaré, 264
de forme normale
des applications de rang constant, 17, 324
des immersions, 17, 323
des submersions, 17, 323
de Frobénius, 113
de Gleason, 160
de Montgomery-Zippin, 160
de non-peignage des sphères, 269
de Poincaré-Hopf, 273
de Sard, 27, 271
de Stokes, 255
de Whitney, 26
des fonctions implicites, 323
du point fixe, 240
du redressement, 98
du relèvement, 29, 330
fondamental de l'intégration, 255
topologie
de l'ordre, 319
des feuilles, 110
faible (définie par une famille de sous-espaces), 318
induite, 174
intrinsèque, 174
plus fine, 317
quotient, 318
somme disjointe, 318
tore, 33
de révolution, 34
translation
à droite, 155
à gauche, 155
transposition, 333
transversale locale, 109
transverse, 85, 124
trivialisation locale, 67, 77, 327
type, 200
type d'homotopie, 235, 330

valeur
critique, 27
régulière, 27
variété, 7
analytique
complexe, 15
rigide, 15
réelle, 15
banachique, 15
de Stiefel, 46
différentielle, 14
feuilletée, 109
grassmannienne, 37
holomorphe, 15
homogène, 187
lisse, 15
modelée sur un Banach, 15
orientable, 249
orientée, 249
produit, 249

somme disjointe, 249
parallélisable, 71
produit, 28
quotient, 30, 195
somme disjointe, 28
topologique, 7
non paracompacte, 10
non séparée, 10
vecteur
tangent, 64, 69
p-vecteur, 339
voisinage
distingué, 67, 77, 327

Références

[Ada] M. Adachi, *Embbedings and immersions*, Trans. Math. Mono. **124**, Amer. Math. Soc. 1993.

[Apé] F. Apéry, *Models of the real projective plane*, Vieweg, 1987.

[AB] J.-M. Arnaudiès, J. Bertin, *Groupes, algèbres et géométrie* Vol 1 & 2, Ellipses, 1995.

[Arn] V. Arnold, *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, Grund. math. Wiss. **250**, Springer Verlag, 1983.

[Aub] T. Aubin, *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*, Grund. math. Wissen. **252**, Springer Verlag, 1982.

[Ave] A. Avez, *Calcul différentiel*, Masson, 1983.

[BPV] W. Barth, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Ergebnisse Math. Grenz. **4**, Springer Verlag, 1984.

[Bes] G. Besson, *Une nouvelle approche de l'étude des variétés de dimension 3 [d'après R. Hamilton et G. Perelman]*, Séminaire Bourbaki, juin 2005.

[BT] R. Bott, L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer Verlag 1982.

[Bou1] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 1 à 3, Hermann, 1970.

[Bou2] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, 1971.

[Bou3] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 5 à 10, Hermann, 1974.

[Bou4] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Chap. I : 1960, Chap. II, III : 1972, Chap. VI, V, VI : 1968, Chap. VII, VIII : 1975, Chap. IX : 1982.

[Brou] L. Brouwer, *Collected works, vol. II*, North Holland, 1976.

[BZ] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, 2nd ed. de Gruyter, 2003.

[BILW] M. Burger, A. Iozzi, F. Labourie, A. Wienhard, *Maximal Representations of Surface Groups : Symplectic Anosov Structures*, Pure Appl. Math. Quaterly **1** (2005) 555–601.

[Car] E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann*, Gautiers-Villars, 1925.

[CarH] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, 2nde éd. 1977.

[CE] H. Cartan, S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton Univ. Press, 1956.

[CSM] R.W. Carter, G. Segal, I. MacDonald, *Lectures on Lie algebras and Lie groups*, Lond. Math. Soc. Student Texts **32**, Cambridge Univ. Press, 1995.

[deR] G. de Rham, *Variétés diférentiables*, Hermann 1960.

[Die1] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 1 : fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, 1971.

[Die2] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 3*, Gauthier-Villars, 2e éd. 1974.

[Die3] J. Dieudonné, *Éléments d'analyse t. 4*, Gauthier-Villars, 1971.

[Die4] J. Dieudonné, *A history of algebraic and differential topology 1900-1960*, Birkhaüser 1990.

[Don] S. K. Donaldson, *Floer homology groups in Yang-Mills theory*, Camb. Tracts Math. **147**, Cambridge Univ. Press, 2002.

[DNF] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, *Géométrie contemporaine I, II*, Editions MIR 1987.

[Dug] J. Dugundji, *Topology*, Wm. C. Brown Pub., 1989.

[Ebe] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lect. in Math., Chicago Univ. Press, 1996.

[ES] S. Eilenberg, N. Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton Univ. Press, 1952.

[FK] H. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*, 2nde éd., Springer-Verlag, 1991.

[Fre] M. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982) 357-453.

[FP] J. Fresnel, M. van der Put, *Géométrie analytique rigide et applications*, Prog. Math **18**, Birkhaüser, 1981.

[FM] R. Friedman, J.W. Morgan, *Smooth four-manifolds and complex surfaces* Ergeb. Math. Grenz. **27**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin. J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer Verlag, 1990.

[God] C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, 1971.

[Gode1] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.

[Gode2] R. Godement, *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, Pub. Math. Université Paris VII **011**, 1982.

[Gom] R. Gompf, *Three exotic* $\mathbb{R}^4$*'s and other anomalies*, J. Diff. Geom. **18** (1983) 317-328.

[GJK] C. McA. Gordon, V. F. R. Jones, L. H. Kauffman, eds., *Knots in Hellas '98*, (proc. inter. conf. on knot theory and its ramifications, Delphi, 1998), Series on knots and everything **24**, World Scientific, 2000.

[Gra] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, Press. Univ. France, 1971.

[Gro1] M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, rédigé par J. Lafontaine and P. Pansu, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981.

[Gro2] M. Gromov, *Asymptotics invariants of infinite groups*, Vol. 2 de "Geometric group theory", A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Hat] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, 2002, *http ://www.math.cornell.edu/∼hatcher*.

[Hel] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[Hir] M. Hirsch, *Differential topology*, GTM **33**, Springer, 1976.

[KRT] C. Kassel, M. Rosso, V. Turaev, *Quantum groups and knot invariants*, Pano. Synt. **5**, Soc. Math. France, 1997.

[Kat] S. Katok, *Fuchsian groups*, Chicago Univ. Press, 1992.

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Ency. Math. App. **54**, Camb. Univ. Press, 1995.

[Kaw] A. Kawauchi, ed. *Knots 90*, (Inter. Conf. on Knot Theory and Rel. Topics, Osaka, 1990), de Gruyter, 1992.

[Kere] B. Kerékjártó, *Vorlesungen über Topologie. 1, Flächentopologie*, Springer Verlag, 1923.

[Kerv] M. Kervaire, *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comm. Math. Helv. **34** (1960) 257-270.

[KM] M. Kervaire, J. Milnor, *Groups of homotopy spheres I*, Ann. Math. **77** (1963) 504-537.

[Kri] J.L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, Press. Univ. France, 1969.

[Laf] J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Press. Univ. Grenoble, 1996.

[Laz] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. 1 : classsical setting : line bundles and linear series*, Ergebnisse Math. Grenz. **48**, Springer Verlag, 2004.

[Lie] S. Lie, *Gesammelte Abhandlungen 5-6*, F. Engel, P. Heegard eds, Teubner, 1924-1927.

[McDS] D. McDuff, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Math. Mono. 2nd ed, Clarendon Press, 1998.

[Mil] J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Univ. Press Virginia, Charlottesville, 1965.

[Mil2] J. W. Milnor, *Vers la conjecture de Poincaré et la classification des variétés de dimension* 3, La Gazette des Mathématiques **99**, Soc. Math. France, 2004.

[MT] N. Mneimné, F. Testard, *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Hermann, 1986.

[Moi] E. Moise, *Geometric topology in dimension* 2 *and* 3, Springer Verlag, 1977.

[MZ] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups*, Huntington NY Robert E. Krieger, 1974.

[Mor] J. W. Morgan, *Seiberg-Witten invariants*, dans "Nouveaux invariants en géométrie et en topologie", M. Audin, J. W. Morgan, P. Vogel, Pano. Synth. **11**, Soc. Math. France, 2001.

[Pau] F. Paulin, *Topologie algébrique élémentaire*, Notes de cours de magistère, ENS Ulm, 2002. *http ://www.fimfa.ens.fr*

[Per] B. Perthame, *Topologie et analyse différentielle*, Notes de cours de magistère, ENS Ulm, 2003.

[Poi] H. Poincaré, *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1952.

[Pos] M. Postnikov, *Variétés différentiables*, Mir, Moscou, 1990.

[Rey] E. Reyssat, *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Prog. in Math. **77**, Birkhauser, 1989.

[Ric] I. Richards, *On the classification of noncompact surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963) 259–269.

[Rie] G. F. B. Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, dans "Gesammelte mathematische Werke", Springer Verlag, 1990.

[Rob] A. Robert, *A course in p-adic analysis*, Springer Verlag, 2000.

[Rol] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.

[Sch] W. Schikhof, *Ultrametric calculus, an introduction to p-adic analysis*, Camb. Stud. Adv. Math. **4**, Cambridge Univ. Press, 1984.

[Ser1] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.

[Ser2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmetique*, Press. Univ. France, Paris, 1970.

[Ser3] J.-P. Serre, *Lie algebras and Lie groups* : 1964 lectures given at Harvard University, 2nd ed., Springer Verlag, 1992.

[Spa] E. Spanier, *Algebraic topology*, Tata McGraw-Hill, 1981.

[Spi] M. Spivak, *Differential geometry*, Publish or Perish, 1979.

[Voi] C. Voisin, *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, Cours spécialisés **10**, Soc. Math. France, 2002.

[Whi] H. Whitney, *The selfintersections of a smooth n-manifold in* $2n$*-space*, Ann. of Math. **45** (1944) 220-246.

Département de Mathématique et Applications, UMR 8553 CNRS
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 PARIS Cedex 05, FRANCE
e-mail : Frederic.Paulin@ens.fr