

EXPOENTE¹¹

MANUAL DO
PROFESSOR

MATEMÁTICA A

Daniela Raposo
Luzia Gomes

MANUAL CERTIFICADO
SOCIEDADE PORTUGUESA
DE MATEMÁTICA

DE ACORDO COM
NOVO PROGRAMA E
METAS CURRICULARES

VOL. 3

ASA

EXPOENTE¹¹

MATEMÁTICA A

Daniela Raposo
Luzia Gomes

VOL. 3

ASA

TEMA IV

Funções Reais de Variável Real

1. Funções racionais	6
1.1. Simplificação de frações racionais	7
1.2. Operações com frações racionais	9
1.3. Equações fracionárias	11
1.4. Inequações fracionárias	12
2. Limites segundo Heine de funções reais de variável real	16
2.1. Pontos aderentes a um conjunto de números reais	16
2.2. Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio	16
2.3. Limites laterais	20
2.4. Limites no infinito	24
2.5. Operações com limites e casos indeterminados	28
2.6. Produto de uma função limitada por uma função com limite nulo	31
2.7. Limite de uma função composta	32
2.8. Levantamento algébrico de indeterminações	33
3. Continuidade de funções	42
3.1. Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio	42
3.2. Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas	45
4. Assíntotas ao gráfico de uma função	48
4.1. Assíntotas verticais, horizontais e oblíquas ao gráfico de uma função	48
4.2. Assíntotas e representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x - c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)	59
Síntese	63
Aprende fazendo	68

5. Derivadas de funções reais de variável real e aplicações	86
5.1. Taxa média de variação de uma função e derivada de uma função num ponto	86
5.2. Interpretação geométrica da taxa média de variação e da derivada de uma função num ponto	89
5.3. Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto	91
5.4. Diferenciabilidade e continuidade num ponto	93
5.5. Função derivada	94
5.6. Regras de derivação	95
5.7. Sinal da derivada, sentido de variação e extremos	109
Síntese	119
Aprende fazendo	122
Desafios	133

TEMA V

Estatística

1. Introdução	136
2. Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação	137
2.1. Amostras bivariadas	137
2.2. Reta de mínimos quadrados e coeficiente de correlação	140
Síntese	158
Aprende fazendo	160
Desafios	171
Soluções	172

VOL. 1

TEMA I – Trigonometria e Funções
Trigonométricas
TEMA II – Geometria Analítica

VOL. 2

TEMA III – Sucessões

Desafio - Dobragem minimalista

Neste tema irás conhecer técnicas desenvolvidas por algumas das mentes mais trabalhadoras (e por isso brilhantes) do século XVII. Essas técnicas permitiram resolver problemas complicados de geometria e de física até então inacessíveis; hoje permitem resolver os mais variados problemas de otimização, fundamentais no setor industrial e em diversas atividades económicas, desde a engenharia aeroespacial (ex., em cálculos de resistência) à indústria de calçado (ex., na minimização de desperdícios no corte de couro).

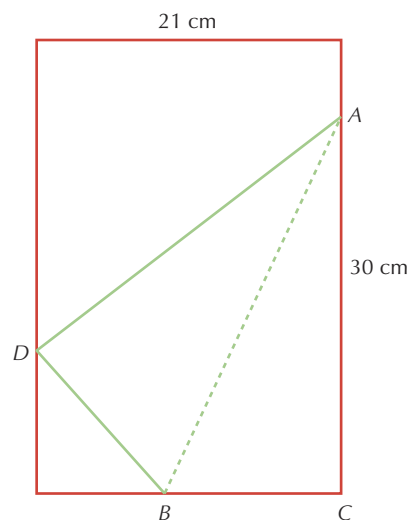
Com o objetivo de mostrar algumas das vantagens desses métodos, fica aqui um desafio para ires tentando resolver enquanto vais lendo o tema. Medita um pouco nele antes de passares às páginas seguintes, para o ficares a conhecer bem, e depois vai pensando nele periodicamente.

Considera a figura ao lado, que representa uma folha com dimensões muito próximas do tamanho A4. Dobra a folha a partir de um ponto do bordo inferior (em B) de modo a que o vértice C toque o lado esquerdo (em D), mas sem que a dobra atinja o interior do bordo superior. O problema consiste em determinar a que distância de C deve estar o ponto B para que o vinco AB tenha o menor comprimento possível.

20 AULA DIGITAL

■ Vídeo

"Dobragem minimalista."



António Machiavello



TEMA IV

Funções Reais de Variável Real

1. Funções racionais
2. Limites segundo Heine de funções reais de variável real
3. Continuidade de funções
4. Assíntotas ao gráfico de uma função
5. Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

UNIDADE 1

Funções racionais



FRVR11_2.6

20 AULA DIGITAL

■ Resolução

PowerPoint: Todos os exercícios de "Funções racionais"

- 1 Determina o domínio das seguintes funções.

a) $f(x) = \frac{x-4}{x+1}$

b) $g(x) = \frac{5x^2-1}{2x}$

c) $h(x) = \frac{2x}{x^2-5}$

d) $i(x) = \frac{2x}{x^2+5}$

e) $j(x) = \frac{2x}{x^3+5}$

f) $k(x) = \frac{-2x^3-\sqrt{3}}{-x^2+5x-6}$

No 10.º ano estudaste algumas funções como, por exemplo, a função afim, a função quadrática, outras funções polinomiais, a função módulo, a função raiz quadrada, a função raiz cúbica, bem como transformações dos gráficos destas funções.

Neste domínio, retomaremos o estudo das funções iniciado anteriormente, começando por estudar mais uma família de funções – as **funções racionais**.

Definição

Uma **função racional** é uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.

A expressão $\frac{P(x)}{Q(x)}$ designa-se por **fração racional**.

Exemplos

As funções $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x-3}$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{5x}{x^2-2}$, $i(x) = \frac{-2x^4}{x^2+1}$ e $j(x) = \frac{3x^4-x^3-10}{5}$

são alguns exemplos de funções racionais, por se tratarem do quociente entre duas funções polinomiais.

Nota que **uma função polinomial $P(x)$ é uma função racional**, pois $P(x) = \frac{P(x)}{1}$.

Uma função racional tem como domínio o conjunto dos números reais que não anulam o denominador $Q(x)$, isto é, $D = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

Nos exemplos anteriores:

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x^2-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Cálculo auxiliar

$$x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=2 \\ \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$$

- $D_i = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2+1}_{\text{Condição universal}} \neq 0\} = \mathbb{R}$
- $D_j = \mathbb{R}$

PROFESSOR

Soluções

1.

a) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

d) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{-5}\}$

f) $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

1.1. Simplificação de frações racionais

Já sabes, de anos anteriores, que, multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtém-se uma fração equivalente.

De forma análoga, multiplicando ou dividindo ambos os termos de uma fração racional por um mesmo polinómio, não nulo, obtém-se uma fração equivalente, para todo o valor de x que não anule os denominadores.

Vejamos a seguir como este princípio ajuda a simplificar frações, nomeadamente nos casos em que se divide ambos os termos de uma fração racional por um divisor comum.

Exemplos

$$1. \frac{15x^2}{5x+10} = \frac{15x^2}{5(x+2)} = \frac{3x^2}{x+2}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 5x+10 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$2. \frac{(x-4)(x+1)}{x+1} = x-4, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Observa que a simplificação foi rápida, pois o polinómio que se encontra no numerador já estava fatorizado. No geral, para simplificar uma fração racional, decompõem-se os seus termos em fatores, dividindo ambos os termos pelos fatores comuns: obtém-se, assim, uma fração mais simples.

Deves, portanto, recordar as estratégias que aprendeste para fatorizar polinómios.

$$3. \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+3}{x-2}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2-5x+6 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$$

Cálculos auxiliares

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \times 1 \times 6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=3$$

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

$$4. \frac{x^3+3x^2+2x}{x^3-x} = \frac{x(x^2+3x+2)}{x(x^2-1)} = \frac{x(x+1)(x+2)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x-1}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^3-x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

Cálculos auxiliares

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \times 1 \times 2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=-2$$

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

2 Simplifica as seguintes frações racionais, indicando o domínio onde a simplificação é válida.

$$a) \frac{2x^2-18}{2x+6}$$

$$b) \frac{3x^2-6x-9}{2x^2+6x+4}$$

$$c) \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-1}$$

$$d) \frac{x^4+4x^3+3x^2}{x^6+5x^5+7x^4+3x^3}$$

Recorda

Dado um polinómio $P(x)$, de grau $n \in \mathbb{N}$, cujas raízes distintas $x_1, x_2, \dots, x_k$ têm multiplicidade $n_1, n_2, \dots, n_k$, respetivamente, existe um polinómio $Q(x)$, sem raízes, tal que

$$P(x) = (x-x_1)^{n_1} \times (x-x_2)^{n_2} \times \dots \times (x-x_k)^{n_k} Q(x)$$

PROFESSOR

Soluções

2.

$$a) x-3, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

$$b) \frac{3x-9}{2x+4}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}.$$

$$c) \frac{x^2-2x+1}{x+1}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

$$d) \frac{1}{x^2+x}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}.$$

Recorda

2 é uma raiz de multiplicidade dois do polinómio $x^2 - 4x + 4$.

$$\begin{aligned} 5. \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 4x + 4} &= \frac{(x-2)(x^2 + 2x - 3)}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{(x-2)(x+3)(x-1)}{(x-2)(x-2)} = \\ &= \frac{(x+3)(x-1)}{x-2}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{2\}. \end{aligned}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Cálculos auxiliares

	1	0	-7	6
2		2	4	-6
	1	2	-3	0 = R

$$x^3 - 7x + 6 = (x-2)(x^2 + 2x - 3)$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$$

$$\text{Assim, } x^3 - 7x + 6 = (x-2)(x^2 + 2x - 3) = (x-2)(x+3)(x-1).$$

$$6. \frac{2x^2 + 4x - 6}{x+3} = \frac{2(x+3)(x-1)}{x+3} = 2x - 2, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$$

$$2x^2 + 4x - 6 = 2(x+3)(x-1)$$

**Erro típico**

Um erro muito frequente na resolução do exercício anterior consiste no seguinte:

$$\frac{2x^2 + 4x - 6}{x+3} = \frac{(x+3)(x-1)}{x+3} = x-1$$

Erro!

O erro resultou de uma fatorização errada do polinómio $2x^2 + 4x - 6 = (x+3)(x-1)$, em vez de $2x^2 + 4x - 6 = 2(x+3)(x-1)$.

Recorda a propriedade que está na base da fatorização de polinómios de 2º grau:

Dado um polinómio $P(x)$ de grau 2, com duas raízes distintas x_1 e x_2 , então $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que a é o coeficiente do termo de grau 2.

Repara que, em todos os exemplos, a simplificação é válida no domínio da fração inicial.

Neste último exemplo, a simplificação $\frac{2x^2 + 4x - 6}{x+3} = 2x - 2$ é válida em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, apesar de $2x - 2$ ter domínio $\mathbb{R}$.

1.2. Operações com frações racionais

Observa os seguintes exemplos, onde se efetuaram as operações indicadas e se simplificou, sempre que possível, o resultado obtido no respetivo domínio.

Adição e subtração

Exemplos

$$1. \frac{x^2 + 4x - 7}{x + 3} + \frac{x + 1}{x + 3} = \frac{x^2 + 4x - 7 + x + 1}{x + 3} = \frac{x^2 + 5x - 6}{x + 3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$2. \frac{1}{4x^3} - \frac{x - 1}{4x^3} = \frac{1 - (x - 1)}{4x^3} = \frac{1 - x + 1}{4x^3} = \frac{-x + 2}{4x^3}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 4x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Nos exemplos acima, as frações apresentam o mesmo denominador e, portanto, mantém-se o mesmo denominador e somam-se/subtraem-se os respetivos numeradores.

Nos exemplos seguintes, as frações têm denominadores diferentes e é, portanto, necessário substituí-las por frações equivalentes que apresentem denominadores iguais.

$$3. \frac{1}{12x} + \frac{x + 1}{6x} = \frac{1}{12x} + \frac{2(x + 1)}{12x} = \frac{1 + 2x + 2}{12x} = \frac{2x + 3}{12x}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 12x \neq 0 \wedge 6x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$4. \frac{11}{7x^2} - \frac{x - 3}{2} = \frac{22}{14x^2} - \frac{7x^2(x - 3)}{14x^2} = \frac{22}{14x^2} - \frac{7x^3 - 21x^2}{14x^2} = \frac{22 - (7x^3 - 21x^2)}{14x^2} =$$

$$= \frac{-7x^3 + 21x^2 + 22}{14x^2}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: 7x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$5. \frac{x - 3}{x^2 - 1} + \frac{5}{4x - 4} = \frac{x - 3}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{5}{4(x - 1)} = \frac{4(x - 3)}{4(x - 1)(x + 1)} + \frac{5(x + 1)}{4(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{4(x - 3) + 5(x + 1)}{4(x - 1)(x + 1)} = \frac{4x - 12 + 5x + 5}{4(x - 1)(x + 1)} = \frac{9x - 7}{4(x - 1)(x + 1)} =$$

$$= \frac{9x - 7}{4x^2 - 4}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 1 \neq 0 \wedge 4x - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Recorda

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

- 3 Efetua as operações indicadas e simplifica o resultado final, indicando o domínio onde a simplificação é válida.

a) $\frac{1}{x + h} - \frac{1}{x}$

b) $\frac{1}{x - 3} - \frac{2}{x^2 - 9}$

c) $\frac{6}{x^2 - 9} + \frac{x}{x^2 + 3x}$

d) $\frac{1}{x - 2} + \frac{x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

e) $\frac{x + 1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 3}$

Recorda

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5}$$

$$= \frac{5}{30} + \frac{2}{30} = \frac{7}{30}$$

Repara que, para reduzir as frações ao mesmo denominador, podíamos sempre ter multiplicado os denominadores um pelo outro, obtendo 90 como denominador comum. Apesar de obtermos naturalmente uma fração equivalente, $\frac{21}{90}$, os números envolvidos são maiores.

PROFESSOR

Soluções

3.

a) $\frac{-h}{x^2 + xh}; \mathbb{R} \setminus \{-h, 0\}$

b) $\frac{x + 1}{x^2 - 9}; \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

c) $\frac{1}{x - 3}; \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$

d) $\frac{2}{x - 3}; \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$

e) $\frac{2x^2 + 6x + 5}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)};$
 $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$

Recorda

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

- 4 Efetua as operações indicadas e simplifica o resultado final, indicando o domínio onde a simplificação é válida.

a) $\frac{2x}{x+5} \times \frac{x+5}{2x^3-2x}$

b) $\frac{x^2-x-2}{x+3} \times \frac{x^2+6x+9}{x^2-1}$

c) $\frac{x^2-36}{x^2-5x-6} \times \frac{x^4-1}{2x^2+12x}$

Recorda

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\}$$

- 5 Efetua as operações indicadas e simplifica o resultado final, indicando o domínio onde a simplificação é válida.

a) $\frac{x^2+3x}{x-2} : \frac{x^2-9}{4-x^2}$

b) $\frac{\frac{x^4-1}{x^2+1}}{5x}$

c) $\left(\frac{x}{x-5} + \frac{5}{x+5}\right) : \left(\frac{x}{x-5} - \frac{5}{x+5}\right)$

Nota que, neste último exemplo, para substituir as frações envolvidas por frações equivalentes com igual denominador entre si, começou por procurar-se fatores comuns aos denominadores dessas frações, isto para que o denominador comum ficasse com o menor grau possível.

Multiplicação

Para multiplicar frações, multiplicam-se os numeradores entre si e os denominadores entre si, simplificando, sempre que possível, o produto obtido.

Exemplos

1. $\frac{1}{4x^3} \times \frac{x-1}{4x^3} = \frac{x-1}{16x^6}$, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} : 4x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. $\frac{x-1}{x^2-1} \times \frac{5x+5}{4x-4} = \frac{(x-1) \times (5x+5)}{(x^2-1)(4x-4)} = \frac{(x-1) \times 5(x+1)}{(x+1)(x-1) \times 4(x-1)} = \frac{5}{4x-4}$, em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2-1 \neq 0 \wedge 4x-4 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Nota que, mais uma vez, o domínio em que as operações são válidas é o domínio da fração inicial.

Divisão

Para dividir frações, multiplica-se a primeira fração pela fração inversa da segunda, simplificando, sempre que possível, o produto obtido.

Exemplos

1. $\frac{2x}{x-1} : \frac{x+3}{x-7} = \frac{2x}{x-1} \times \frac{x-7}{x+3} = \frac{2x(x-7)}{(x-1)(x+3)} = \frac{2x^2-14x}{x^2+2x-3}$, em $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 7\}$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0 \wedge x-7 \neq 0 \wedge x+3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 7\}$$

2. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} : \frac{x^3-1}{x-2} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} \times \frac{x-2}{x^3-1} = \frac{(x^2-2x+1)(x-2)}{(x^2-3x+2)(x^3-1)} = \frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^2+x+1}$, em $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2-3x+2 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0 \wedge x^3-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

PROFESSOR**Soluções**

4.

a) $\frac{1}{x^2-1}$; $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0, -1, 1\}$

b) $\frac{x^2+x-6}{x-1}$; $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$

c) $\frac{x^3-x^2+x-1}{2x}$; $\mathbb{R} \setminus \{-6, 6, -1, 0\}$

5.

a) $\frac{-x^2-2x}{x-3}$; $\mathbb{R} \setminus \{2, -2, 3, -3\}$

b) $\frac{5x^2-5}{x^3}$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $\frac{x^2+10x-25}{x^2+25}$; $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$

Cálculos auxiliares

$$x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4 \times 1 \times 2}}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=2, \text{ logo } x^2-3x+2 = (x-1)(x-2).$$

1	0	0	-1
1	1	1	1
1	1	1	0 = R

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

1.3. Equações fracionárias

Exemplos

1. Como resolver a equação fracionária $\frac{2x^2 - 11x + 5}{2x - 1} = 0$?

Repara que a fração $\frac{2x^2 - 11x + 5}{2x - 1}$ anula-se para os valores de x que anulam o numerador sem anularem o denominador, ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - 11x + 5}{2x - 1} = 0 &\Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 = 0 \wedge 2x - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \times 2 \times 5}}{2 \times 2} \wedge x \neq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(x = \frac{11 + 9}{4} \vee x = \frac{11 - 9}{4} \right) \wedge x \neq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(x = 5 \vee x = \frac{1}{2} \right) \wedge x \neq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 5\end{aligned}$$

C.S. = {5}

2. Para resolver a equação fracionária $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x-1} = 3$, começamos por reduzi-la à forma

$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$, de modo a determinar, como no exemplo anterior, os valores de x que anulam o numerador sem anularem o denominador.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x-1} = 3 &\Leftrightarrow \frac{-1}{x-1} - \frac{2}{x-1} - \frac{3}{(x-1)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-1 - 2 - 3(x-1)}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-1 - 2 - 3x + 3}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x}{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x = 0 \wedge x - 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \wedge x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0\end{aligned}$$

C.S. = {0}

Esquematisando / Resumindo

Em geral, para resolveres analiticamente uma equação fracionária, podes seguir os seguintes passos:

- 1º passo: Reduz a equação fracionária à forma $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.
- 2º passo: Escreve $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$.
- 3º passo: Resolve a condição acima.
- 4º passo: Apresenta o conjunto-solução.

6. Resolve as seguintes equações.

a) $\frac{1}{x+2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{x} = 0$

b) $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{6-5x}{4-x^2}$

c) $\frac{x-2}{2x^2-x-1} = \frac{x+1}{2x^2+3x+1} - \frac{1}{2x+1}$

d) $-\frac{3}{-x^2+x+2} - 1 = \frac{1}{x-2}$

Nota

Repara que, se pretendêssemos determinar os zeros de uma função racional definida por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, teríamos que resolver a equação fracionária $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

PROFESSOR

Soluções

6.

a) $\left\{1, -\frac{3}{2}\right\}; \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

b) $\{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}; \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

c) $\{2\}; \mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$

d) $\{-2\}; \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

20 AULA DIGITAL

■ Simulador

GeoGebra: "Quadro de variação de uma função"

7 Resolva as seguintes inequações.

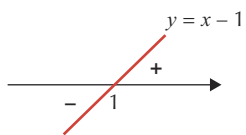
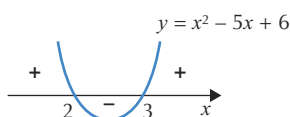
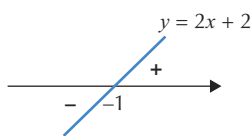
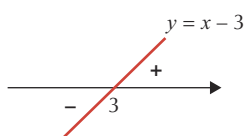
a) $\frac{x-3}{x^2-1} > 0$

b) $\frac{x^2-3x+2}{x+2} \leq 0$

c) $\frac{3-x^2}{x-2} \leq -x-3$

d) $\frac{x^2+3x}{x-4} > x-3$

e) $\frac{1}{x-x^2} > -\frac{1}{3} - \frac{1}{x-1}$



PROFESSOR

Soluções

7.

a) $]-1, 1[\cup]3, +\infty[$

b) $]-\infty, -2[\cup]1, 2]$

c) $]2, 3]$

d) $]-\infty, \frac{6}{5}[\cup]4, +\infty[$

e) $]-\infty, -3[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

1.4. Inequações fracionárias

Exemplos

1. Como resolver a inequação fracionária $\frac{x-3}{2x+2} > 0$?

Como sabes, o quociente de dois números é positivo quando os dois números são ambos positivos ou ambos negativos. Assim, a resolução de uma inequação fracionária passa pelo estudo do sinal do numerador e do denominador. Façamos esse estudo recorrendo, por exemplo, a um quadro de sinais.

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$2x+2$	-	0	+	+	+
$\frac{x-3}{2x+2}$	+	n.d.	-	0	+

Cálculos auxiliares

Zeros do numerador:

$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

Zeros do denominador:

$2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$

n.d.: não definida (observa que o domínio da expressão inicial é $\{x \in \mathbb{R}: 2x+2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)

Estuda-se o sinal do numerador e do denominador, começando por colocar os seus zeros, por ordem crescente, na primeira linha da tabela. A última linha corresponde ao sinal do quociente em causa.

Assim:

$$\frac{x-3}{2x+2} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 3$$

$$C.S. =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 2. \frac{x^2-3x}{x-1} &\leq 2 - \frac{4}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{x-1} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{4}{x-1} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2-3x-2(x-1)+4}{x-1} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-1} \leq 0
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

Zeros do numerador:

$$\begin{aligned}
 x^2-5x+6=0 &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4 \times 1 \times 6}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x=3 \vee x=2
 \end{aligned}$$

Zeros do denominador:

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
x^2-5x+6	+	+	+	0	-	0	+
$x-1$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{x^2-5x+6}{x-1}$	-	n.d.	+	0	-	0	+

Assim:

$$\frac{x^2-3x}{x-1} \leq 2 - \frac{4}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee 2 \leq x \leq 3$$

$$C.S. =]-\infty, 1[\cup]2, 3]$$

Esquematisando / Resumindo

Em geral, para resolveres analiticamente uma inequação fracionária, podes seguir os seguintes passos:

1º passo: Reduz a inequação fracionária à forma $\frac{A(x)}{B(x)} \begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix} 0$.

2º passo: Estuda o sinal da fração $\frac{A(x)}{B(x)}$, recorrendo, por exemplo, a um quadro de sinais.

3º passo: Apresenta sob a forma de condição os valores de x que satisfazem a ine-

$$\text{quação } \frac{A(x)}{B(x)} \begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix} 0.$$

4º passo: Apresenta o conjunto-solução.

Nota

Repara que, se pretendêsemos estudar quando é que uma função racional, definida por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ é positiva}$$

ou negativa teríamos que resolver a inequação

$$\text{fracionária } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0$$

$$\text{ou } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0.$$

- 8 Determina os zeros e estuda o sinal de cada uma das funções cuja expressão analítica se indica.

$$\text{a) } h(x) = \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x^2-3x} - \frac{3}{5x}$$

$$\text{b) } j(x) = \frac{3x-6}{10-2x} \times \frac{x^2-5x}{4-x^2}$$

$$\text{c) } p(x) = \frac{x^3+x^2-9x-9}{x^2-4x+3}$$

$$\text{d) } r(x) = \frac{16x-x^5}{5-x^2}$$

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

Exercício resolvido

Determina os zeros e estuda o sinal de cada uma das funções cuja expressão analítica se indica.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2-2x-3}{4x-x^2}$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{4}{2-2x} - \frac{5}{x^2-1}$$

Adaptado de Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

Sugestão de resolução

a) Zeros de f

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{4x-x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0 \wedge 4x-x^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \times 1 \times (-3)}}{2} \wedge x(4-x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \wedge (x \neq 0 \wedge 4-x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x=3 \vee x=-1) \wedge (x \neq 0 \wedge x \neq 4)$$

$$\Leftrightarrow x=3 \vee x=-1$$

$$\text{C.S.} = \{3, -1\}$$

Os zeros de f são 3 e -1.

(continua)

PROFESSOR

Soluções

8.

a) Zero de h : -2

h é positiva em $]-2, 0[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -2[\cup]0, 3[$.

Zero de j : 0

j é positiva em

$]-\infty, -2[\cup]0, 2[\cup]2, 5[\cup]5, +\infty[$ e é negativa em $]-2, 0[$.

Zeros de p : -3 e -1

p é positiva em

$]-3, -1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -3[\cup]-1, 1[$.

Zeros de r : -2, 0 e 2

r é positiva em

$]-\sqrt{5}, -2[\cup]0, 2[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$ e é negativa em

$]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-2, 0[\cup]2, \sqrt{5}[$.

Exercício resolvido

(continuação)

Sugestão de resolução

Sinal de f

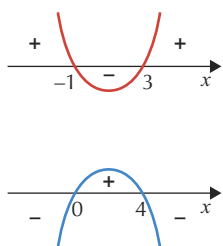
Para estudarmos o sinal de f , vamos analisar o sinal do numerador e do denominador, recorrendo a um quadro de sinais.

Zeros do numerador:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1 \text{ (já calculado)}$$

Zeros do denominador:

$$4x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(4 - x) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$



x	$-\infty$	-1		0		3		4	$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$4x - x^2$	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$\frac{x^2 - 2x - 3}{4x - x^2}$	-	0	+	n.d.	-	0	+	n.d.	-

Concluimos, assim, que:

- $f(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee 3 < x < 4$
 f é positiva em $] -1, 0[\cup]3, 4[$.
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 3 \vee x > 4$
 f é negativa em $] -\infty, -1[\cup]0, 3[\cup]4, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) &= \frac{4}{2 - 2x} - \frac{5}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{2}{1 - x} + \frac{5}{(1 - x)(1 + x)} = \\ &= \frac{2 + 2x}{(1 - x)(1 + x)} + \frac{5}{(1 - x)(1 + x)} = \\ &= \frac{2x + 7}{(1 - x)(1 + x)}, \text{ em } \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : 2 - 2x \neq 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{aligned}$$

Sugestão de resolução

Zeros de g

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+7}{(1-x)(1+x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x+7=0 \wedge (1-x)(1+x) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \wedge (x \neq 1 \wedge x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{7}{2} \right\}$$

O zero de g é $-\frac{7}{2}$.

Sinal de g

Para estudarmos o sinal de g , vamos analisar o sinal do numerador e do denominador, recorrendo a um quadro de sinais.

Zeros do numerador:

$$x = -\frac{7}{2} \text{ (calculado acima)}$$

Zeros do denominador:

$$(1-x)(1+x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$		-1		1	$+\infty$
$2x+7$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(1-x)(1+x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{2x+7}{(1-x)(1+x)}$	$+$	0	$-$	n.d.	$+$	n.d.	$-$

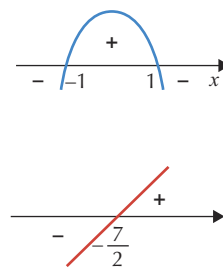
Concluimos, assim, que:

$$\bullet g(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{7}{2} \vee -1 < x < 1$$

$$g \text{ é positiva em } \left] -\infty, -\frac{7}{2} \right[\cup] -1, 1[.$$

$$\bullet g(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < -1 \vee x > 1$$

$$g \text{ é negativa em } \left] -\frac{7}{2}, -1 \right[\cup] 1, +\infty[.$$



APRENDE FAZENDO

Págs. 78, 84 e 85
Exercícios 30, 50 e 54



CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Pág. 50
Exercícios 1, 2 e 3



AULA DIGITAL

■ Apresentação
"Funções racionais"
■ Teste interativo
"Funções racionais"

UNIDADE 2

Limites segundo Heine de funções reais de variável real



20 AULA DIGITAL

■ Resolução

PowerPoint: Todos os exercícios de "Limites segundo Heine de funções reais de variável real"

Notas

1. Todo o ponto $a \in A$ é um ponto aderente de A (basta considerar a sucessão $x_n = a$).
2. Pode ter-se um ponto a aderente de A , sem que a pertença a A (no exemplo ao lado, 1 é um ponto aderente de A e $1 \notin A$).

9 Indica o conjunto dos pontos de aderência dos conjuntos seguintes.

- $]-1, 5[$
- $[0, 4[\cup \left[\sqrt{19}, \frac{9}{2}\right]$
- $[-2, 0] \cup \{\sqrt{2}, \pi\}$

PROFESSOR

Soluções

9. $]-1, 5[$
- $[0, 4[\cup \left[\sqrt{19}, \frac{9}{2}\right]$
- $[-2, 0] \cup \{\sqrt{2}, \pi\}$

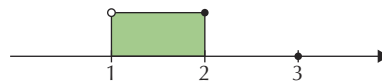
2.1. Pontos aderentes a um conjunto de números reais

Definição

Dados um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$, diz-se que a é um **ponto aderente de A** quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.

Exemplo

Seja $A =]1, 2] \cup \{3\}$.



- 1 é um ponto aderente de A , pois existe uma sucessão (u_n) de elementos de A , definida por $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, por exemplo, tal que $\lim u_n = 1$.
- 2 é um ponto aderente de A , pois existe uma sucessão (v_n) de elementos de A , definida por $v_n = 2 - \frac{1}{n+1}$, por exemplo, tal que $\lim v_n = 2$.
- $\frac{5}{4}$ é um ponto aderente de A , pois existe uma sucessão (w_n) de elementos de A , definida por $w_n = \frac{5}{4}$, por exemplo, tal que $\lim w_n = \frac{5}{4}$.
- 3 é um ponto aderente de A , pois existe uma sucessão (y_n) de elementos de A , definida por $y_n = 3$, por exemplo, tal que $\lim y_n = 3$.

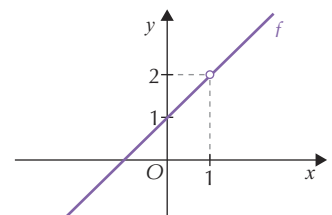
2.2. Limite de uma função num ponto aderente ao respetivo domínio

Considera a função real de variável real f definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Para $x \neq 1$, tem-se:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$$

Assim, o gráfico de f é a reta de equação $y = x + 1$, sem o ponto de abscissa 1.



Consideremos também as sucessões definidas por:

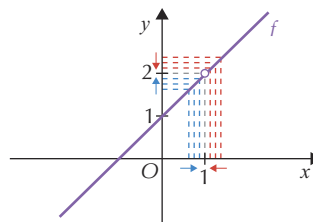
$$a_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad b_n = 1 - \frac{1}{n^3} \quad \text{e} \quad c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Observemos alguns dos seus primeiros termos:

n	a_n	b_n	c_n
1	2	0	0
2	1,25	0,88	1,5
3	1,11	0,96	0,67
4	1,06	0,98	1,25
5	1,04	0,99	0,8
...	...	...	...
$n \rightarrow +\infty$	$\lim a_n = 1$	$\lim b_n = 1$	$\lim c_n = 1$

Determinemos, ainda, alguns dos primeiros termos das sucessões definidas por $f(a_n)$, $f(b_n)$ e $f(c_n)$:

n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$
1	3	1	1
2	2,25	1,88	2,5
3	2,11	1,96	1,67
4	2,06	1,98	2,25
5	2,04	1,99	1,8
...	...	...	...
$n \rightarrow +\infty$	$\lim f(a_n) = 2$	$\lim f(b_n) = 2$	$\lim f(c_n) = 2$



A tabela sugere-nos que a sucessões de objetos convergentes para 1, ponto aderente do domínio de f , correspondem novas sucessões de imagens, por f , convergentes para 2. Este resultado não depende da sucessão convergente para 1 escolhida, já que a qualquer sucessão (x_n) de elementos do domínio, que tenda para 1, corresponderá sempre uma sucessão de imagens, $(f(x_n))$, que tende para 2. Provemos que assim é:

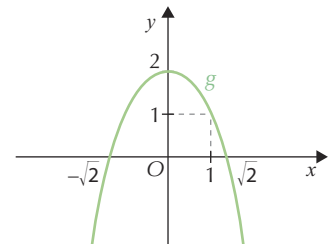
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1, \text{ para todo o } x \neq 1.$$

Seja (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_f tal que $x_n \rightarrow 1^-$.

$$\lim f(x_n) = \lim (x_n + 1) = \lim x_n + \lim 1 = 1 + 1 = 2$$

Dizemos, então, que, quando x tende para 1, $f(x)$ tende para 2, e escrevemos $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Considera, agora, a função real de variável real g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = -x^2 + 2$ e a respetiva representação gráfica.



Consideremos novamente as sucessões definidas por:

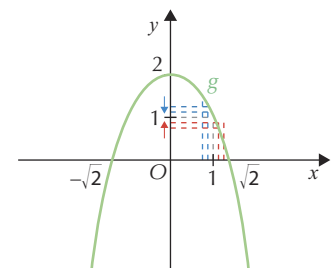
$$a_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad b_n = 1 - \frac{1}{n^3} \quad \text{e} \quad c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

Considera alguns dos seus primeiros termos:

n	a_n	b_n	c_n
1	2	0	0
2	1,25	0,88	1,5
3	1,11	0,96	0,67
4	1,06	0,98	1,25
5	1,04	0,99	0,8
...	...	...	...
$n \rightarrow +\infty$	$\lim a_n = 1$	$\lim b_n = 1$	$\lim c_n = 1$

Determinemos, à semelhança do exemplo anterior, alguns dos primeiros termos das sucessões definidas por $g(a_n)$, $g(b_n)$ e $g(c_n)$:

n	$g(a_n)$	$g(b_n)$	$g(c_n)$
1	-2	2	2
2	0,44	1,23	-0,25
3	0,77	1,08	1,55
4	0,88	1,04	0,44
5	0,92	1,02	1,36
...	...	...	...
$n \rightarrow +\infty$	$\lim g(a_n) = 1$	$\lim g(b_n) = 1$	$\lim g(c_n) = 1$



A tabela sugere-nos que a sucessões de objetos convergentes para 1, ponto aderente do domínio de g , correspondem novas sucessões de imagens, por g , convergentes também para 1. Este resultado não depende da sucessão de objetos convergente para 1 escolhida, já que a qualquer sucessão (x_n) de elementos do domínio, que tenda para 1, corresponderá sempre uma sucessão de imagens, $(g(x_n))$, que tende para 1. Provemos que assim é:

Seja (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_g tal que $x_n \rightarrow 1$.

$$\lim g(x_n) = \lim (-x_n^2 + 2) = \lim (-x_n^2) + \lim 2 = -(\lim x_n)^2 + 2 = -1 + 2 = 1$$

Dizemos, então, que, quando x tende para 1, $g(x)$ tende para 1 e escrevemos $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$.

Chega-se assim à definição de limite segundo Heine:

Definição

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto $a \in \mathbb{R}$, o número real b designa-se por **limite de $f(x)$ quando x tende para a** quando a for um ponto aderente do domínio de f , e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$.

Decorre da definição que, para $a \in D_f$, **se o limite existir é igual a $f(a)$** , uma vez que se considerarmos a sucessão constante $x_n = a$, fica claro que o limite de $f(x_n) = f(a)$.

O limite de $f(x)$ quando x tende para a , se existir, é **único**.

Repara que esta definição se baseia no conceito, já estudado, de limite de uma sucessão e, como vimos, uma sucessão convergente admite um único limite.

Com efeito, consideremos uma qualquer sucessão de valores de x a tender para a , por valores do domínio de f : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

O limite de $f(x_n)$, quando x_n tende para a , se existir, é único, como já sabemos.

Então, o limite da função, quando x tende para a , que pela definição de limite segundo Heine é igual a $\lim f(x_n)$, também é único.

Representa-se por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e diz-se que “ $f(x)$ tende para b quando x tende para a ”.

Definição

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto $a \in \mathbb{R}$, $+\infty$ (ou $-\infty$) designa-se por **limite de $f(x)$ quando x tende para a** , quando a for um ponto aderente do domínio de f e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = +\infty$ (ou $\lim f(x_n) = -\infty$, respetivamente).

O limite referido na definição anterior, se existir, é **único**.

Notas

1. Para se poder “falar” em $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, tem, antes de mais, que fazer sentido escrever $x \rightarrow a$, isto é, tem de existir pelo menos uma sucessão que tenha todos os seus termos no domínio de f e que tenda para a (nestes casos, diz-se que a é um ponto aderente do domínio de f).
2. Ao considerarmos $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, não exigimos que a pertença ao domínio de f .
3. Se a é um ponto do domínio de f , se existe algum $\varepsilon > 0$ tal que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap D_f = \{a\}$ e se uma sucessão (x_n) de elementos de D_f converge para a , então, para n suficientemente grande, tem-se $x_n = a$, de onde se conclui que a sucessão $(f(x_n))$ também é constante e $f(x_n) = f(a)$. Logo, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
4. Resulta da definição que, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, então, dada uma sucessão (x_n) de elementos pertencentes a D_f e que tenda para a , verifica-se que $\lim f(x_n) = b$.



20 AULA DIGITAL

Simulador

GeoGebra: “Limite de uma função segundo Heine”

- 10 Considera a função f definida por:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{4}{(x-1)^2}$$

Recorrendo à definição de limite segundo Heine, prova que:

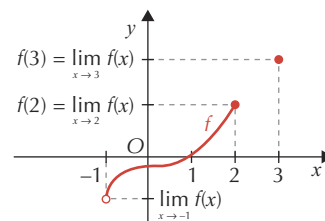
a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

Exemplo

Seja $D_f =]-1, 2] \cup \{3\}$.

Só faz sentido escrever $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ se $a \in]-1, 2] \cup \{3\}$.



Observação

Um ponto a do domínio de f nas condições enunciadas na nota 3, diz-se um **ponto isolado**.

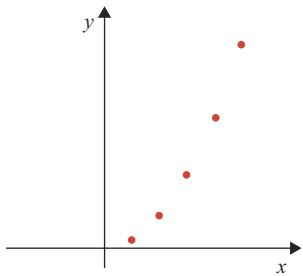


Recorda

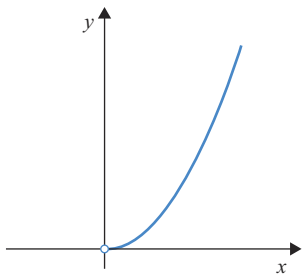
Sejam A e B conjuntos,
 $f: A \rightarrow B$ uma função
e $C \subset A$.
Chama-se **restrição de f**
a C à função $f|_C: C \rightarrow B$,
tal que $\forall x \in C, f|_C(x) = f(x)$.

Exemplo

Seja f a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
definida por $f(x) = x^2$.
A função $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida
por $g(x) = x^2$, é a restrição
da função f ao conjunto dos
números naturais, $\mathbb{N}$: $g = f|_{\mathbb{N}}$.



A função $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida
por $h(x) = x^2$ também é uma
restrição da função f , mas,
desta vez, ao conjunto
dos números reais positivos,
 $\mathbb{R}^+$: $h = f|_{\mathbb{R}^+} = f|_{]0, +\infty[}$



2.3. Limites laterais

Definições

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto $a \in \mathbb{R}$, o número real b designa-se por:

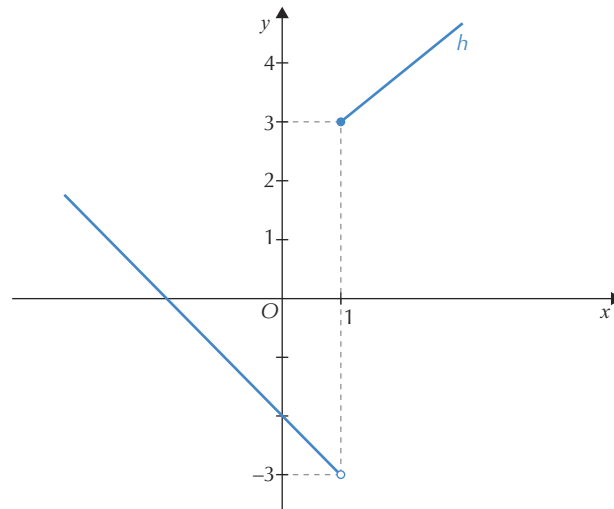
- **limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a ou limite de $f(x)$ à esquerda de a** , quando $b = \lim_{x \rightarrow a^-} f|_{]-\infty, a[}(x)$, e representa-se por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.
Diz-se que " $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores inferiores a a ".
- **limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a ou limite de $f(x)$ à direita de a** , quando $b = \lim_{x \rightarrow a^+} f|_{]a, +\infty[}(x)$, e representa-se por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$.
Diz-se que " $f(x)$ tende para b quando x tende para a por valores superiores a a ".

Exemplo

Considera a função real de variável real h definida em $\mathbb{R}$ por:

$$h(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{se } x < 1 \\ x + 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

A representação gráfica desta função é:



Observando a representação gráfica, pode constatar-se que:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = -3$, visto que a qualquer sucessão de valores de x a tender para 1, por valores inferiores a 1, corresponde uma sucessão de valores de $h(x)$ a tender para -3, isto é,
 $\lim_{x \rightarrow 1} h|_{]-\infty, 1[}(x) = -3$;
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 3$, visto que a qualquer sucessão de valores de x a tender para 1, por valores superiores a 1, corresponde uma sucessão de valores de $h(x)$ a tender para 3, isto é,
 $\lim_{x \rightarrow 1} h|_{]1, +\infty[}(x) = 3$.

Definições

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto $a \in \mathbb{R}$, $+\infty$ (ou $-\infty$) designa-se por:

- **limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores inferiores a a ou limite de $f(x)$ à esquerda de a** , quando $\lim_{x \rightarrow a^-} f|_{]-\infty, a[}(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f|_{]-\infty, a[}(x) = -\infty$, respetivamente), e representa-se por $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$, respetivamente).

Diz-se que “ $f(x)$ tende para $+\infty$ (ou $-\infty$, respetivamente) quando x tende para a por valores inferiores a a ”.

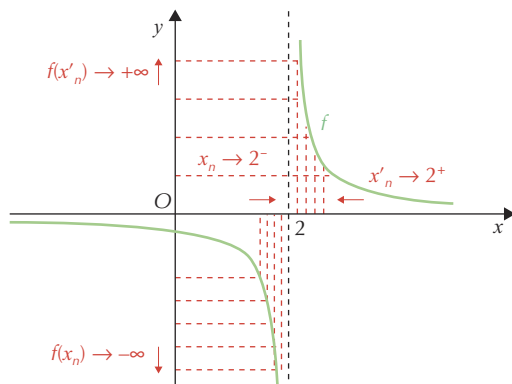
- **limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores superiores a a ou limite de $f(x)$ à direita de a** , quando $\lim_{x \rightarrow a^+} f|_{]a, +\infty[}(x) = +\infty$ (ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f|_{]a, +\infty[}(x) = -\infty$, respetivamente), e representa-se por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$, respetivamente).

Diz-se que “ $f(x)$ tende para $+\infty$ (ou $-\infty$, respetivamente) quando x tende para a por valores superiores a a ”.

Exemplo

Considera a função real de variável real f definida em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ por $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

A representação gráfica desta função é:



Observando a representação gráfica, pode constatar-se que:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$, visto que a qualquer sucessão de valores de x a tender para 2, por valores inferiores a 2, corresponde uma sucessão de valores de $f(x)$ a tender para $-\infty$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 2} f|_{]-\infty, 2[}(x) = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$, visto que a qualquer sucessão de valores de x a tender para 2, por valores superiores a 2, corresponde uma sucessão de valores de $f(x)$ a tender para $+\infty$, isto é, $\lim_{x \rightarrow 2} f|_{]2, +\infty[}(x) = +\infty$.

Teorema

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f e $a \notin D_f$, se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.



FRVR11_1.3
FRVR11_1.4
FRVR11_1.5

11 Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x > 2 \\ -x + 5 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Determina, caso exista,
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

PROFESSOR

Solução

11. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$



- 12 Considere a função real de variável real g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{se } x < 3 \\ 7 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Recorrendo à definição de limite segundo Heine, calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

- 13 Considere a função real de variável real definida por $h(x) = \sqrt{4-x}$.

a) Determina o domínio de h .

b) Recorrendo à definição de limite segundo Heine, determina $\lim_{x \rightarrow 4} h(x)$.

Nota

Se a função f está definida apenas à direita (ou à esquerda) de a , então o valor de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ coincide com o limite à direita (ou à esquerda) de a , desde que se possam considerar cada um dos limites laterais.

PROFESSOR

Soluções

12.

a) 7 b) 7 c) 7

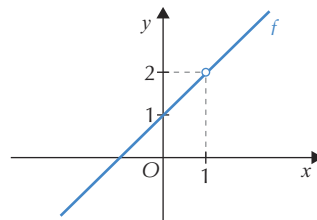
13.

a) $D_h =]-\infty, 4]$ b) 0

Retomemos o exemplo da página 16.

Exemplo

Considere a função real de variável real f definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ por $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ e a respetiva representação gráfica:



1 é um ponto aderente a D_f e $1 \notin D_f$.

Verifica-se que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

Então, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$.

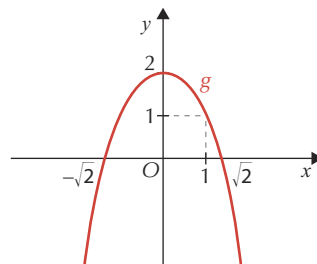
Teorema

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto $a \in D_f$, se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Retomemos o exemplo da página 18.

Exemplo

Considere a função real de variável real g definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = -x^2 + 2$ e a respetiva representação gráfica:



Temos que $1 \in D_g$.

Verifica-se que $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$ e $g(1) = 1$.

Então, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$.

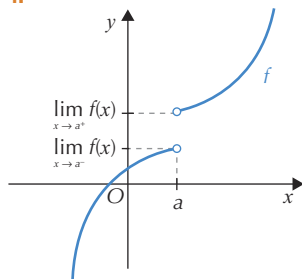
Observação

Da definição de limite e do teorema acima, podemos concluir que se um limite lateral existe e não é igual ao valor da função no ponto, então a função não tem limite nesse ponto.

Exemplos

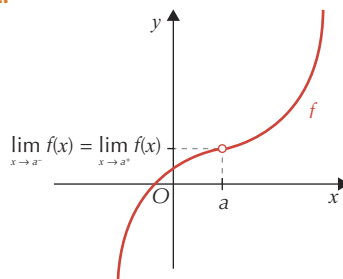
Observe os seguintes exemplos, onde $a \notin D_f$:

1.



- $a \notin D_f$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

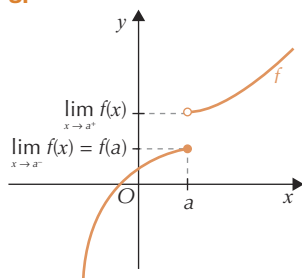
2.



- $a \notin D_f$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

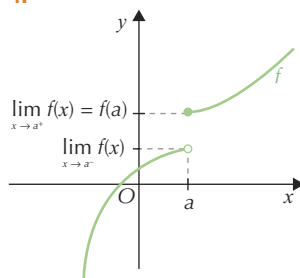
Observe os seguintes exemplos, onde $a \in D_f$:

3.



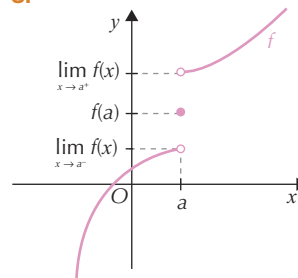
- $a \in D_f$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$

4.



- $a \in D_f$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$

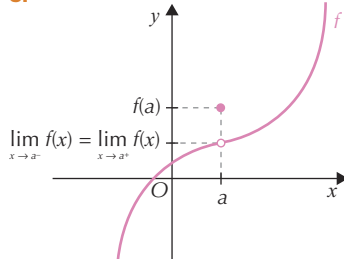
5.



- $a \in D_f$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$

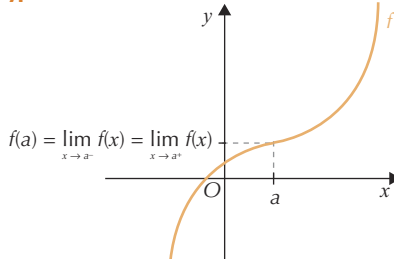
$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

6.



- $a \in D_f$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$
- $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

7.



- $a \in D_f$
- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$



- 14 Considera a função f definida por:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{4}{x^2 - 1}$$

Recorrendo à definição de limite segundo Heine, prova que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2.4. Limites no infinito

Definição

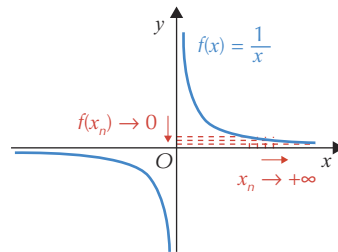
Dada uma função real de variável real f cujo domínio não é majorado, o número real b designa-se por **limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito**, quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f , com limite $+\infty$, $\lim f(x_n) = b$. Representa-se por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ e diz-se que “ $f(x)$ tende para b quando x tende para mais infinito”.

O limite de $f(x)$ quando x tende para $+\infty$, se existir, é **único**.

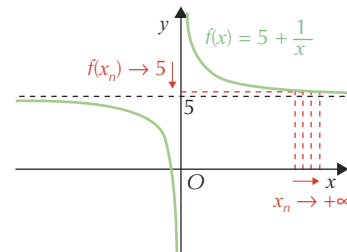
Considerando uma qualquer sucessão de valores de x a tender para $+\infty$, por valores do domínio de f : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, tem-se que o limite da sucessão $f(x_n)$ quando x_n tende para $+\infty$, se existir, é único, como já sabemos. Então, o limite da função quando x tende para $+\infty$, que pela definição de limite segundo Heine é igual a $\lim f(x_n)$, também é único.

Exemplos

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$



2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = 5$



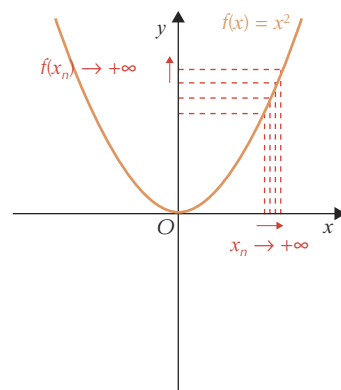
Definição

Dada uma função real de variável real f , $+\infty$ (ou $-\infty$) designa-se por **limite de $f(x)$ quando x tende para mais infinito**, quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $+\infty$, $\lim f(x_n) = +\infty$ (ou $\lim f(x_n) = -\infty$, respetivamente).

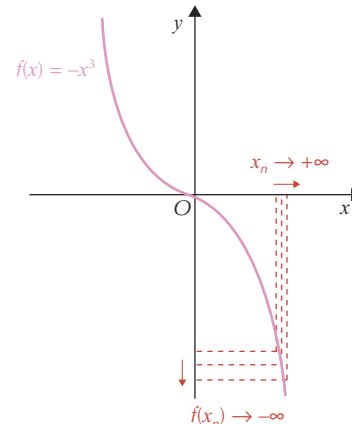
Analogamente ao que foi referido na definição anterior, este limite, se existir, é **único**.

Exemplos

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$



2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$





Definição

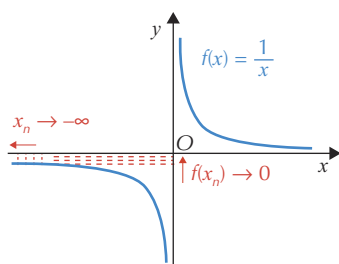
Dada uma função real de variável real f cujo domínio não é minorado, o número real b designa-se por **limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito**, quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $-\infty$, $\lim f(x_n) = b$. Representa-se por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ e diz-se que “ $f(x)$ tende para b quando x tende para menos infinito”.

O limite de $f(x)$ quando x tende para $-\infty$, se existir, é **único**.

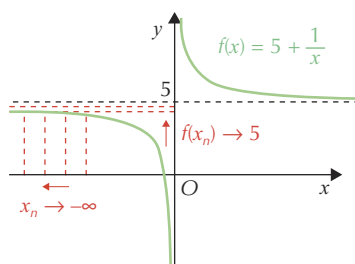
Considerando uma qualquer sucessão de valores de x a tender para $-\infty$, por valores do domínio de f : $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, tem-se que o limite da sucessão $f(x_n)$ quando x_n tende para $-\infty$, se existir, é único, como já sabemos. Então, o limite da função quando x tende para $-\infty$, que pela definição de limite segundo Heine é igual a $\lim f(x_n)$, também é único.

Exemplos

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$



2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right) = 5$



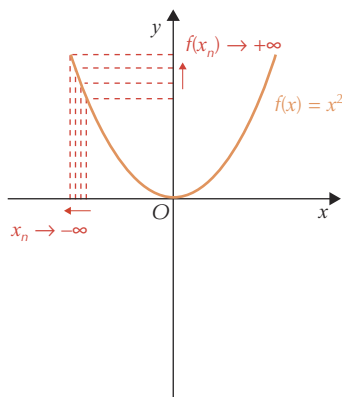
Definição

Dada uma função real de variável real f , $+\infty$ (ou $-\infty$) designa-se por **limite de $f(x)$ quando x tende para menos infinito**, quando, para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f com limite $-\infty$, $\lim f(x_n) = +\infty$ (ou $\lim f(x_n) = -\infty$, respetivamente).

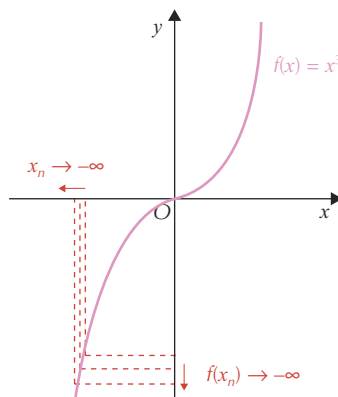
Analogamente ao que foi referido para a definição anterior, o limite referido nesta definição, se existir, é **único**.

Exemplos

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$



2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$



- 15 Considera a função f definida por:

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2 - \frac{3}{x-1}$$

Recorrendo à definição de limite segundo Heine, prova que:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$
 c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

Exercícios resolvidos

1. Recorrendo à definição de limite de uma função segundo Heine, prova que:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x^2 + 2} = \frac{1}{2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 + \frac{1}{x^3 - 4} \right) = 5$
 c) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(1 - \frac{7}{x+3} \right) = +\infty$

Sugestão de resolução

- a) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \frac{3}{x^2 + 2}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_f tal que $x_n \rightarrow 2$:

$$\begin{aligned} \lim f(x_n) &= \lim \left(\frac{3}{x_n^2 + 2} \right) = \frac{\lim 3}{\lim (x_n^2 + 2)} = \\ &= \frac{3}{\lim (x_n^2) + \lim 2} = \\ &= \frac{3}{(\lim x_n)^2 + 2} = \\ &= \frac{3}{2^2 + 2} = \\ &= \frac{3}{6} = \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x^2 + 2} = \frac{1}{2}$.

- b) Seja g a função real de variável real definida por $g(x) = 5 + \frac{1}{x^3 - 4}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_g tal que $x_n \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \lim g(x_n) &= \lim \left(5 + \frac{1}{x_n^3 - 4} \right) = \lim 5 + \lim \frac{1}{x_n^3 - 4} = \\ &= 5 + \frac{\lim 1}{\lim x_n^3 - \lim 4} = \\ &= 5 + \frac{1}{(\lim x_n)^3 - 4} = \\ &= 5 + \frac{1}{(-\infty)^3 - 4} = \\ &= 5 + \frac{1}{-\infty} = \\ &= 5 + 0 = \\ &= 5 \end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 + \frac{1}{x^3 - 4} \right) = 5$.

Sugestão de resolução

- c) Seja h a função real de variável real definida por $h(x) = 1 - \frac{7}{x+3}$ e (x_n) uma sucessão qualquer de termos pertencentes a D_h tal que $x_n \rightarrow -3 \wedge x_n < -3$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lim h(x_n) &= \lim \left(1 - \frac{7}{x_n + 3} \right) = \lim 1 - \lim \frac{7}{x_n + 3} = \\ &= 1 - \frac{7}{\lim x_n + 3} = \\ &= 1 - \frac{7}{-3^- + 3} = \\ &= 1 - \frac{7}{0^-} = \\ &= 1 - (-\infty) = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Conclui-se, assim, que $\lim_{x \rightarrow -3^-} \left(1 - \frac{7}{x+3} \right) = +\infty$.

2. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio $\mathbb{R}$.

Considera a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n^2}$.

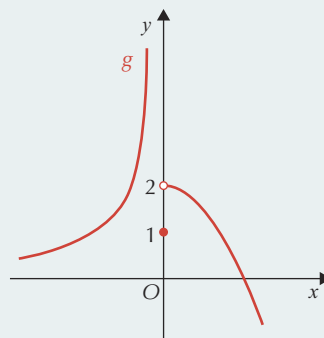
- a) Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(u_n)$?

(A) $+\infty$ (B) 2 (C) 1 (D) 0

- b) Seja (v_n) uma sucessão tal que $\lim g(v_n) = +\infty$.

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (v_n) ?

(A) $n^2 + 10$ (B) $\frac{(-1)^n}{n}$ (C) $-\frac{5}{\sqrt{n}}$ (D) $1 + \frac{n+1}{n^2}$



Sugestão de resolução

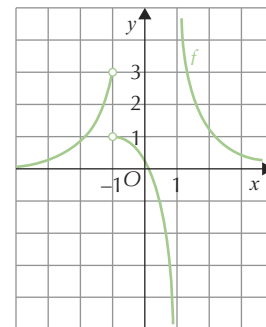
- a) Sabemos que $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0^+$, isto é, a sucessão (u_n) tende para 0 por valores superiores a 0. Por observação do gráfico, quando uma sucessão de objetos tende para 0 por valores à sua direita, constatamos que a sucessão das respetivas imagens tende para 2.

Logo, a opção correta é a (B).

- b) Procuramos o termo geral de uma sucessão de objetos (v_n) cuja sucessão de imagens por g tenda para $+\infty$. Da observação do gráfico, sabemos que (v_n) terá que tender para 0^- .

Dado que $n^2 + 10 \rightarrow +\infty$; $\frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$; $-\frac{5}{\sqrt{n}} \rightarrow 0^-$ e $1 + \frac{n+1}{n^2} \rightarrow 1^+$, a opção correta é a (C).

- 16 Na figura está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.



- a) Considera a sucessão de termo geral

$$u_n = -1 - \frac{1}{n^2}.$$

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$?

(A) -1
(B) 1
(C) 3
(D) Não existe.

- b) Considera uma sucessão (v_n) , $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = +\infty$.

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (v_n) ?

(A) n^2
(B) $1 + \frac{1}{n}$
(C) $-n^2$
(D) $1 - \frac{1}{n}$



APRENDE FAZENDO

Págs. 68, 72, 77, 78 e 79
Exercícios 1, 2, 13, 27, 31, 32, 33 e 34



CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Pág. 51
Exercícios 4 e 5

PROFESSOR

Soluções

16.

- a) Opção (C)
b) Opção (B)



2.5. Operações com limites e casos indeterminados

Como o limite de uma função foi definido a partir do conceito de limite de uma sucessão, podemos deduzir, para os limites de funções reais de variável real, teoremas análogos aos estudados no tema das sucessões.

Assim, no que diz respeito às operações com limites, já sabes que, sendo as sucessões (u_n) e (v_n) e sendo $\lim u_n = l_1$ e $\lim v_n = l_2$, com $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, tem-se que:

- $\lim (u_n + v_n) = l_1 + l_2$
- $\lim (u_n v_n) = l_1 l_2$
- $\lim \left(\frac{v_n}{u_n} \right) = \frac{l_2}{l_1}$, se $u_n \neq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $l_1 \neq 0$.
- $\lim (au_n) = al_1$, $a \in \mathbb{R}$
- $\lim (u_n)^r = (l_1)^r$, $r \in \mathbb{N}$
- $\lim (u_n)^r = (l_1)^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}^+$ e $u_n \geq 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
- $\lim (u_n)^r = (l_1)^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}$ e $u_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos, então, algumas propriedades operatórias sobre limites de funções reais de variável real.

Seja a um ponto finito (ponto aderente do respetivo domínio) ou infinito:

1. Limite da função constante

O limite de uma função constante é a própria constante.

$$\lim_{x \rightarrow a} k = k$$

Exemplos

1. $\lim_{x \rightarrow 3} 5 = 5$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 = 5$

2. Limite da função identidade

$$\lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Exemplos

1. $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

Recorda

$$+\infty + l = +\infty, \text{ com } l \in \mathbb{R}.$$

$$+\infty + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + l = -\infty, \text{ com } l \in \mathbb{R}.$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty$$

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ Indeterminação}$$

3. Limite da soma

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem e não são infinitos de sinais contrários, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Exemplos

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1 = -1 + 1 = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = (-\infty) + 1 = -\infty$$

Nota

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ são ambos infinitos, mas de sinais contrários, nada se pode afirmar sobre $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$. Estamos perante uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$. Mais à frente iremos ver que as estratégias que te permitirão resolver esta situação são idênticas às utilizadas no levantamento de indeterminações envolvendo sucessões.

4. Limite do produto

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem e não são um deles zero e outro infinito, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Exemplos

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} 5x = \lim_{x \rightarrow 2} 5 \times \lim_{x \rightarrow 2} x = 5 \times 2 = 10$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \times x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \lim_{x \rightarrow -\infty} x = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

Nota

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ são um deles zero e o outro infinito, nada se pode afirmar sobre $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$. Estamos perante uma indeterminação do tipo $0 \times \infty$. Mais à frente iremos ver estratégias que te permitirão resolver esta situação.

5. Limite do quociente

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existem, e se os dois limites não são ambos zero ou ambos infinito, então:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

Exemplos

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2}{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$



FRVR11_1.9

Recorda

$(+\infty) \times / = +\infty$, com $/ \in \mathbb{R}^+$.
 $(+\infty) \times / = -\infty$, com $/ \in \mathbb{R}^-$.
 $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
 $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$
 $(-\infty) \times / = -\infty$, com $/ \in \mathbb{R}^+$.
 $(-\infty) \times / = +\infty$, com $/ \in \mathbb{R}^-$.
 $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
 $\infty \times 0$ Indeterminação

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} \text{ Indeterminação}$$

$$\frac{0}{0} \text{ Indeterminação}$$

17 Considera a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\text{por } f(x) = \frac{5x - 4}{x + 1}.$$

a) Determina $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.

b) O que se pode concluir quanto à existência de $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$?

PROFESSOR

Soluções

17.

a) $-\infty$; $+\infty$

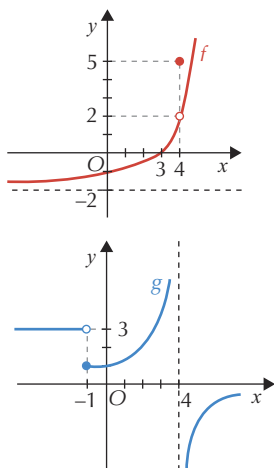
b) Não existe.



Recorda

$(+\infty)^r = +\infty$, com $r \in \mathbb{Q}^+$.
 $(-\infty)^r = +\infty$, se $r \in \mathbb{N}$ é par.
 $(-\infty)^r = -\infty$, se $r \in \mathbb{N}$ é ímpar.

- 18 Considera as funções f e g representadas graficamente por:



Indica o valor de:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f \times g)(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))^2$
 e) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt[3]{g(x)}$
 f) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x)}$

PROFESSOR

Soluções

18.
 a) $+\infty$
 b) -6
 c) 0
 d) 4
 e) $-\infty$
 f) 0

Nota

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ são ambos zero ou são ambos infinito, nada se pode afirmar sobre $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$. Estamos perante uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e, mais uma vez, iremos ver, mais à frente, estratégias que te permitirão resolver estas situações.

6. Limite da potência

Se existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então:

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, $r \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}^+$ e $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in D_f$;
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}$ e $f(x) > 0$, para todo o $x \in D_f$.

Exemplos

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x\right)^3 = (-\infty)^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 - \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 4 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right)^3 - 3 \times \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right)^2 + 4 = 2^3 - 3 \times 2^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} x} = \sqrt[3]{-\infty} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1}{0^+}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

A notação simbólica utilizada nos limites de sucessões também se mantém.

Operações com limites infinitos em notação simbólica

Adição	Multiplicação	Divisão
$+\infty + l = +\infty$, com $l \in \mathbb{R}$.	$(+\infty) \times l = +\infty$, com $l \in \mathbb{R}^+$.	$\frac{1}{0^+} = +\infty$
$+\infty + (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) \times l = -\infty$, com $l \in \mathbb{R}^-$.	$\frac{1}{0^-} = -\infty$
$-\infty + l = -\infty$, com $l \in \mathbb{R}$.	$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$-\infty + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$	$\frac{0}{\infty} = 0$
$(+\infty) + (-\infty)$ Indeterminação	$(-\infty) \times l = -\infty$, com $l \in \mathbb{R}^+$.	$\frac{\infty}{0} = \infty$
	$(-\infty) \times l = +\infty$, com $l \in \mathbb{R}^-$.	$\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminação
	$(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$	$\frac{0}{0}$ Indeterminação
	$(+\infty)^r = +\infty$, com $r \in \mathbb{Q}^+$.	
	$(-\infty)^r = +\infty$, se $r \in \mathbb{N}$ é par.	
	$(-\infty)^r = -\infty$, se $r \in \mathbb{N}$ é ímpar.	
	$\infty \times 0$ Indeterminação	

Esquemmatizando / Resumindo

Sejam f e g duas funções tais que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$, com $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ e a é um ponto finito (ponto aderente do respetivo domínio) ou infinito, então:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l_1 l_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$ se $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in D_g$ e $l_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow a} (k \times f)(x) = k l_1$, $k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, $r \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}^+$ e $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in D_f$.
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}$ e $f(x) > 0$, para todo o $x \in D_f$.

Todas as propriedades acima enunciadas são suscetíveis de serem alargadas ao caso de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ serem infinitos, exceto se conduzirem a situações do tipo $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$.

2.6. Produto de uma função limitada por uma função com limite nulo

Teorema

Dados $D \subset \mathbb{R}$, as funções $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto a aderente a D , se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e se g é limitada, então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0$.

Seja a um ponto aderente a D . Por um lado, sabemos que:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ significa, pela definição de limite segundo Heine, que para toda a sucessão (x_n) de elementos de D convergente para a , se tem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$, isto é, $f(x_n)$ é uma sucessão com limite nulo;

Por outro lado, temos que:

- sendo g uma função limitada, então a sucessão $g(x_n)$ é naturalmente uma sucessão limitada.

No tema anterior, já tínhamos provado que o produto de uma sucessão limitada por uma sucessão com limite nulo tende para zero, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \times g(x_n)) = 0$, que segundo a definição de limite segundo Heine corresponde a $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = 0$

Exemplos

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, pois $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$, pois $-1 \leq \cos x \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.



FRVR11_1.10

19. Considera as funções reais de variável real definidas por $f(x) = \frac{-3}{x^2 + 1}$ e

$$g(x) = x^3 - \frac{2}{x}.$$

- a) Determina $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

- b) Determina $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$.

20. Determina, se existir, cada um dos seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 + x^2 + 5x - 2)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 3}{-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{7 - x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 3$

f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{3 - \sqrt{9 - x}}$

21. Determina, se existir, o $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(4x)}{x^2 + 2x - 10}$.

Nota

O teorema ao lado também se estende ao caso de limites laterais (por valores superiores ou inferiores a a), bem como ao caso de limites em $\pm\infty$.

Recorda

Dada uma sucessão (u_n) limitada e uma sucessão (v_n) com limite nulo, tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = 0$.

PROFESSOR

Soluções

19.

a) 0; $+\infty$

b) 0; $-\infty$

20.

a) -10

b) $+\infty$

c) $+\infty$

d) 0

e) 0

f) 10

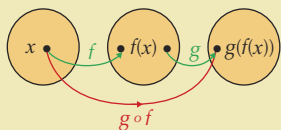
21. 0



FRVR11_1.11

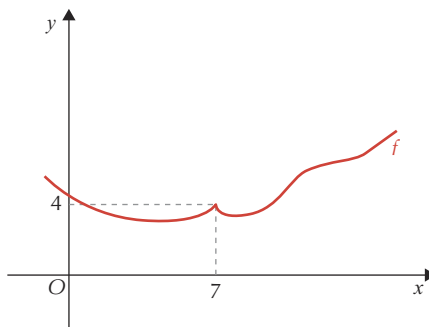
Recorda

A função composta de g com f é a função $g \circ f: D_{g \circ f} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D_{g \circ f} = \{x \in D_f; f(x) \in D_g\}$ e $\forall x \in D_{g \circ f} (g \circ f)(x) = g(f(x))$.



2.7. Limite de uma função composta

Seja f a função real de variável real cuja representação gráfica se encontra abaixo:



Suponhamos que pretendíamos determinar $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x + 1)$.

Designemos $3x + 1$ por y , isto é, consideremos a mudança de variável $3x + 1 = y$.

Se $x \rightarrow 2$, então $3x + 1 \rightarrow 7$, isto é, $y \rightarrow 7$.

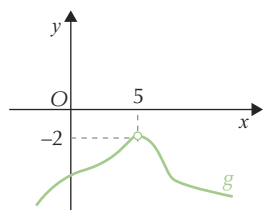
Assim, $\lim_{x \rightarrow 2} f(3x + 1) = \lim_{y \rightarrow 7} f(y) = 4$.

O método de cálculo de limites que apresentamos no exemplo acima, conhecido por **mudança de variável**, é uma aplicação direta do seguinte teorema:

Sejam f e g duas funções reais de variável real e a um ponto aderente a $D_{g \circ f}$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

- 22 Na figura abaixo está parte da representação gráfica de uma função g definida em $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.



Determina o valor de $\lim_{x \rightarrow -1} g(x^2 + 4)$.

- 23 Calcula $\lim_{x \rightarrow 2^+} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right)$, recorrendo a uma mudança de variável.

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

PROFESSOR

Soluções

22. -2

23. $+\infty$

Demonstração

Seja (x_n) uma sucessão de pontos de $D_{g \circ f}$ tal que $\lim x_n = a$. Então, $\lim f(x_n) = b$ e, portanto, $\lim g(f(x_n)) = c$. Como isto acontece para qualquer sucessão de pontos de $D_{g \circ f}$ que tende para a , então $\lim (g \circ f)(x) = c$.

Exercício resolvido

Determina, se existir, $\lim_{x \rightarrow -2} |x^2 - 5|$.

Sugestão de resolução

A função $x \mapsto |x^2 - 5|$ é a composta da função $x \mapsto |x|$ com a função $x \mapsto x^2 - 5$.

$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 5) = (-2)^2 - 5 = -1$ e $\lim_{x \rightarrow -1} |x| = \lim_{x \rightarrow -1} (-x) = 1$

Então, $\lim_{x \rightarrow -2} |x^2 - 5| = 1$.

Cálculo auxiliar

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2.8. Levantamento algébrico de indeterminações

Como vimos anteriormente, nem sempre as propriedades operatórias são suficientes para determinar o limite ou para concluir que ele não existe. Para “levantar a indeterminação”, e dependendo de vários fatores, existem estratégias apropriadas, umas que já conheces, aquando do estudo das sucessões, e outras que iremos agora abordar.

Limites de funções racionais

Caso 1: $x \rightarrow a$ (finito)

• Indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$

Exemplo

Como calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$?

A indeterminação é do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, pois 2 é um zero comum a ambos os termos da fração, o que significa que ambos são divisíveis por $(x - 2)$. Assim, decompondo em fatores o numerador e o denominador, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

• Indeterminação do tipo $(0 \times \infty)$

Exemplo

Como calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^3 - 1) \times \frac{2}{x^2 + 2x - 3} \right]$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $(0 \times \infty)$ mas, se efetuarmos a multiplicação indicada, este caso reduz-se ao anterior.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^3 - 1) \times \frac{2}{x^2 + 2x - 3} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^3 - 1)}{x^2 + 2x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 + x + 1)}{x+3} = \\ &= \frac{2 \times 3}{4} = \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 = R \end{array}$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

24 Determina, se existir, cada um dos seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{4x - 12}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - \frac{5}{2}x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 2)^3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 2)^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^3 - 1) \times \frac{1}{1 - x} \right]$

PROFESSOR

Soluções

24.

a) $\frac{3}{2}$

b) $-\frac{2}{3}$

c) -1

d) $-\infty$

e) Não existe.

f) -3

- 25) Determina, se existir, cada um dos seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2x+1}{x^2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

- 26) Considera a função real de variável real f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x < 0 \\ x^4 - 3x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Determina, se existirem, os seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

• Indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Exemplo

Como calcular $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{2}{x+3}}{\frac{x}{x^2-9}}$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ mas, se efetuarmos a divisão indicada, este caso reduz-se à indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{2}{x+3}}{\frac{x}{x^2-9}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x^2-9)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)(x-3)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x-3)}{x} = \frac{-12}{-3} = 4$$

• Indeterminação do tipo $(+\infty - \infty)$

Exemplo

Como calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{2}{x^2-4x+3} \right)$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $(\infty - \infty)$ mas, se efetuarmos a subtração indicada, este caso também se reduz à indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{2}{x^2-4x+3} \right) & \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-1)(x-2)} - \frac{2}{(x-1)(x-3)} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} - \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)(x-2)} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3-2x+4}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \\ & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-2)(x-3)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Caso 2: $x \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$)

• Indeterminação do tipo $(+\infty - \infty)$

Exemplo

Como calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 4x^2 - x + 7)$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $(+\infty - \infty)$. Colocando em evidência o termo de maior grau, estratégia esta que já estudaste no levantamento de indeterminações que envolviam sucessões, vem que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 4x^2 - x + 7) & \stackrel{(+\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x^3 \left(1 + \frac{4x^2}{2x^3} - \frac{x}{2x^3} + \frac{7}{2x^3} \right) \right] = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{7}{2x^3} \right) \right] = \\ & = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{7}{2x^3} \right) = \\ & = (+\infty) \times (1 + 0 - 0 + 0) = +\infty \end{aligned}$$

PROFESSOR

Soluções

25.

a) 0

b) $-\infty$

26.

a) -6

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) Não existe.

• Indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Exemplo

Como calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^6 - 5}$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Colocando em evidência o termo de maior grau no numerador e no denominador, vem que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^6 - 5} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 \left(1 + \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^6 \left(1 - \frac{5}{x^6}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^6} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{5}{x^6}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{5}{x^6}} = \\ &= \frac{1}{+\infty} \times \frac{1 + 0 + 0}{1 - 0} = 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

• Indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$

Exemplo

Como calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{2x^3 + 1}}{\frac{2}{7x^4 + 1}}$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ mas, se efetuarmos a divisão indicada, este caso reduz-se à indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{2x^3 + 1}}{\frac{2}{7x^4 + 1}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3(7x^4 + 1)}{2(2x^3 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{21x^4 + 3}{4x^3 + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{21x^4 \left(1 + \frac{3}{21x^4}\right)}{4x^3 \left(1 + \frac{2}{4x^3}\right)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{21x^4}{4x^3} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{21x^4}}{1 + \frac{2}{4x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{21x}{4} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{21x^4}}{1 + \frac{2}{4x^3}} = \\ &= (-\infty) \times \frac{1 + 0}{1 + 0} = -\infty \end{aligned}$$

27 Determina, se existir, cada um dos seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 9}{4 - x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5x + 1}{3 - x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 - 1}$

28 Determina, se existir, cada um dos seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4x}{x^2 + 1}}{\frac{x^2}{2x^4 + 1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{3x + 1} \times \frac{1}{x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{x^2 + 1} \times (x + 2) \right]$

PROFESSOR

Soluções

27.

a) -8

b) 2

c) $+\infty$

d) 0

28.

a) $-\infty$

b) $\frac{1}{3}$

c) 1

• Indeterminação do tipo $(0 \times \infty)$

Exemplo

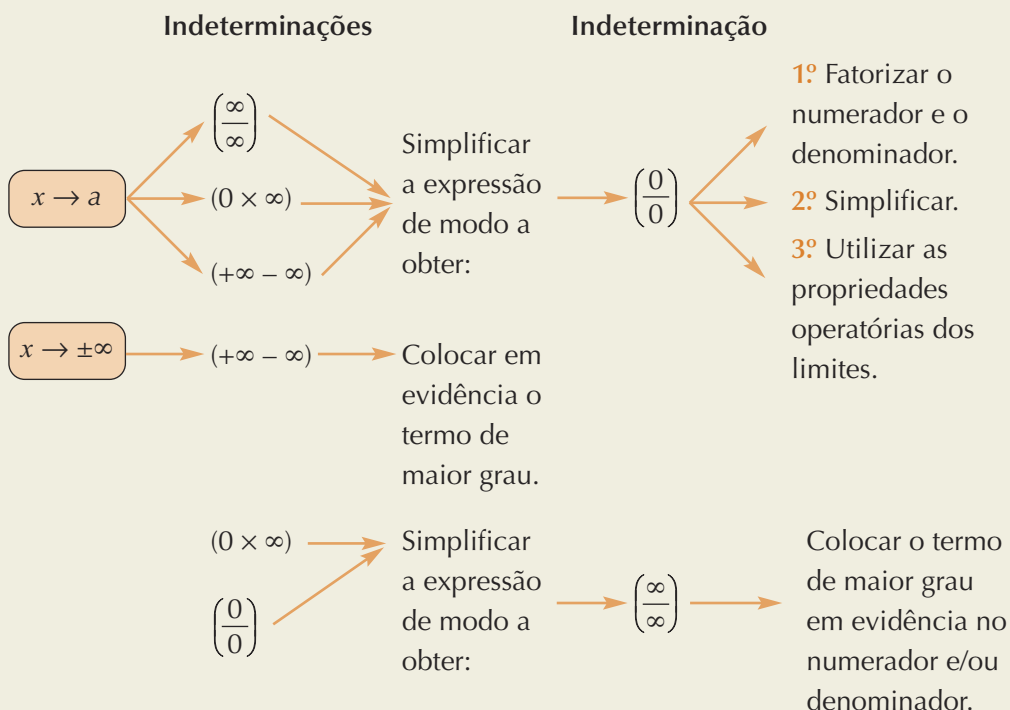
Como calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7x^3 - 5x^2} \times (x^5 + 1) \right)$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $(0 \times \infty)$ mas, se efetuarmos a multiplicação indicada, este caso reduz-se à indeterminação do tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{7x^3 - 5x^2} \times (x^5 + 1) \right) & \stackrel{(0 \times \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 + 2}{7x^3 - 5x^2} = \\
 & \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 \left(1 + \frac{2}{2x^5}\right)}{7x^3 \left(1 - \frac{5x^2}{7x^3}\right)} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5}{7x^3} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{2x^5}}{1 - \frac{5x^2}{7x^3}} = \\
 & = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{7} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^5}}{1 - \frac{5}{7x}} = \\
 & = (+\infty) \times \frac{1 + 0}{1 - 0} = +\infty
 \end{aligned}$$

Esquematisando / Resumindo

No cálculo de limites de funções racionais que envolvem indeterminações, debes seguir o esquema seguinte:



Limites de funções irracionais

No cálculo de limites de funções irracionais, também é frequente o aparecimento de indeterminações. Nestes casos, também existem estratégias que permitem o “levantamento” destas indeterminações.

Repara nos seguintes exemplos e nas estratégias usadas em cada um deles para determinar o respetivo limite.

Exemplos

1. Multiplicar pelo conjugado

Como calcular $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Esta indeterminação levanta-se se multiplicarmos o numerador e o denominador por $(\sqrt{x} + 2)$, ou seja, a expressão conjugada de $(\sqrt{x} - 2)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $(+\infty - \infty)$. Esta indeterminação levanta-se se multiplicarmos e dividirmos a expressão dada por $(\sqrt{x^2 + 1} - x)$, ou seja, a expressão conjugada de $(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \\ &= \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

29 Prova que:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

30 Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1})$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-1}}{3x+2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

d) (*) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2}}$

e) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-9}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{\sqrt{x^2-1}}$

h) (*) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+2}}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x}}$

(*) grau de dificuldade elevado

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Recorda

$$\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\sqrt{x})^2 = x, \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

PROFESSOR

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Soluções

30.

a) $+\infty$

b) 0

c) 2

d) -2

e) 1

f) $+\infty$

g) 0

h) $3\sqrt{2}$

i) 0

2. Multiplicar pela própria raiz

Como calcular $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x-3}$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Esta indeterminação levanta-se

se multiplicarmos o numerador e o denominador por $(\sqrt{x-3})$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\left(\frac{0}{0}\right) (\sqrt{x-3}) (\sqrt{x-3})}{(x-3) (\sqrt{x-3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(\sqrt{x-3})^2}{(x-3)(\sqrt{x-3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x-3})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-3}} =$$

$$= \frac{1}{0^+} =$$

$$= +\infty$$

3. Colocar em evidência

Como calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $(+\infty - \infty)$. Esta indeterminação levanta-se se transformarmos esta expressão num produto, colocando x em evidência.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) =$$

$$= (+\infty) \times \left(1 - \frac{1}{+\infty} \right) =$$

$$= (+\infty) \times 1 =$$

$$= +\infty$$

Como calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x}$?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \times \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \times \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \times \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}} \right) = \\ &= -\sqrt{1 - 0 + 0} = \\ &= -\sqrt{1} = \\ &= -1 \end{aligned}$$

31 Determina, se existirem, os seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+|x|}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 10x}{x} + \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|-3}{9-x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x|-3}{9-x^2}$

Recorda

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Limites de funções que envolvem módulos

Exemplo

Como calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-x}$?

Este limite enquadra-se numa indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Podes começar por definir a função $|x-1|$ por ramos:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -x+1 & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Assim, para conseguirmos determinar o limite pretendido, podemos calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x+1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x} = -1$$

Dado que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x^2-x} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-x}$, conclui-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x^2-x}$.

PROFESSOR

Soluções

31.

a) 1

b) Não existe.

c) Não existe.

d) -9

e) $-\frac{1}{3}$

f) $-\frac{1}{6}$

20 AULA DIGITAL

■ Animação

"Resolução do exercício 33"

- 32 Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

a) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|5x - 2x^2|}{5x + 3}$

b) (*) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{|2x - 1|}{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}$

(*) grau de dificuldade elevado

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

- 33 Considera a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 64}{(x - 4)^2} & \text{se } x < 4 \\ \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Determina, se existirem, os seguintes limites.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- c) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

PROFESSOR

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Soluções

32.

- a) $+\infty$
- b) 0

33.

- a) 0
- b) $-\infty$
- c) Não existe.

Exercícios resolvidos

1. Considera a função f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$. Determina, se existirem, os seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Sugestão de resolução

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1) = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

Para conseguirmos determinar o limite, podemos calcular os limites laterais:

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, conclui-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2. Considera a função h definida por $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{se } x > 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

Determina, se existirem, os seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \\
 &= \frac{1}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-1}{x-1} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(x^3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

c) Uma vez que, para $x > 1$, a expressão analítica de h é distinta da expressão analítica para $x < 1$, vamos calcular os limites laterais:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^4-1}{x-1} \\
 &\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{x-1} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3+x^2+x+1) = 4
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	0	-1
1		1	1	1	1
	1	1	1	1	0 = R

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$, conclui-se que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$.



APRENDE FAZENDO

Págs. 70, 71, 77, 79, 80 e 85

Exercícios 6, 7, 9, 11, 12, 28, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 55 e 56



CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Pág. 52

Exercícios 6, 7, 8 e 9



20 AULA DIGITAL

■ Apresentação

“Limites segundo Heine de funções reais de variável real”

■ Teste interativo

“Limites segundo Heine de funções reais de variável real”

UNIDADE 3

Continuidade de funções



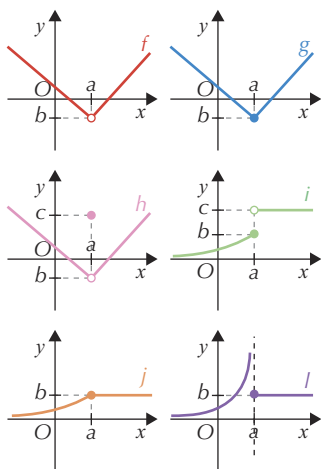
FRVR11_2.2

20 AULA DIGITAL

■ Resolução

PowerPoint: Todos os exercícios de "Continuidade de funções"

- 34 Considera as representações gráficas das funções reais de variável real f, g, h, i, j e l , em que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ e as restantes funções têm domínio $\mathbb{R}$.



- a) Quais das representações gráficas dizem respeito a funções que têm limite quando $x \rightarrow a$?
- b) Quais das representações gráficas dizem respeito a funções contínuas em a ?

PROFESSOR

Soluções

34.

a) f, g e j b) g e j

O conceito de função contínua, que vamos agora estudar, é muito utilizado para exprimir o facto de pequenas oscilações de uma certa grandeza darem origem a pequenas oscilações de uma outra grandeza que dependa da primeira.

Vejamos então o seu significado.

3.1. Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio

Acabámos de estudar a definição de limite de uma função real de variável real f num ponto a do respetivo domínio.

Vimos também que, decorre da definição que, para $a \in D_f$, se $\lim f(x)$ existir, então é igual a $f(a)$.

Definição

Seja f uma função real de variável real e seja a um ponto do respetivo domínio. Diz-se que f é **contínua em a** quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.

Exemplos

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq f(a)$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
f não é contínua em a .	f não é contínua em a .	f é contínua em a .

Notas

1. Se um ponto não pertencer ao domínio de uma função, não faz sentido falar em continuidade da função nesse ponto.
2. Como já vimos atrás, se a é um ponto isolado do domínio de f , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ou seja, a função é contínua nesse ponto.
3. Uma função que não é contínua num ponto do seu domínio diz-se descontínua nesse ponto.

FRVR11_2.3
FRVR11_2.4

- 35 Determina o valor de k de modo que a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 5k & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 1$.

Definição

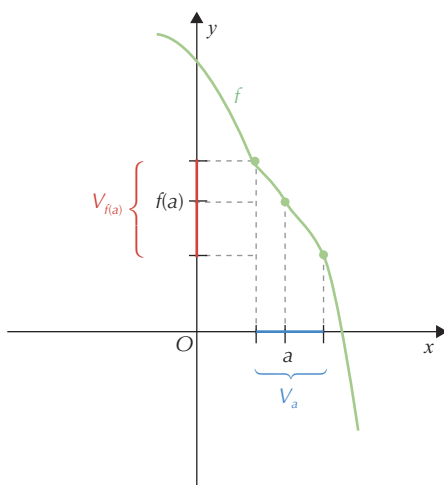
Sejam f uma função real de variável real de domínio D_f e $A \subset D_f$. Diz-se que:

- f é **contínua no conjunto** A quando f é contínua em todos os pontos de A .
- f é **contínua** quando f é contínua em todos os pontos de D_f .

Teorema

Seja f uma função real de variável real de domínio D_f , contínua em $a \in D_f$ e $f(a) \neq 0$ (respetivamente, $f(a) > 0$ ou $f(a) < 0$), existe uma vizinhança V de a tal que f não se anula (respetivamente, f é positiva ou f é negativa) em $V \cap D_f$.

Repara que o teorema afirma que, se f é contínua em a e se $f(a) > 0$ (ou $f(a) < 0$), podemos sempre escolher uma vizinhança de a , de tal forma que as imagens de todos os pontos dessa vizinhança sejam positivas (ou negativas).



- 36 Estuda a continuidade das funções f e g nos pontos indicados:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{se } x < 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \\ x-2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

em $x = 3$.

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{se } x < -1 \\ \pi & \text{se } x = -1 \\ \frac{1}{x+5} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

em $x = -1$.

PROFESSOR

Soluções

35. $k = -\frac{2}{5}$

36.

a) f é contínua em $x = 3$.

b) g não é contínua em $x = -1$.

- 37 Estuda a continuidade das funções f , g e h nos pontos indicados.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} & \text{se } x \neq 1, \\ -4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$
em $x = 1$.

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
em $x = 0$.

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{3 - \sqrt{2x + 5}} & \text{se } x > 2, \\ |x - 3| & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$
em $x = 2$.

Exercícios resolvidos

1. Determina o valor de k de modo que a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 3}{x + 1} & \text{se } x < -1 \\ 3x - k & \text{se } x \geq -1 \end{cases} \text{ seja contínua em } x = -1.$$

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

Sugestão de resolução

Para que f seja contínua em $x = -1$ terá que se verificar $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$:

- $f(-1) = 3 \times (-1) - k = -3 - k$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x - k) = -3 - k$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3(x^2 - 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} 3(x - 1) = 3 \times (-2) = -6$

Assim, $-3 - k = -6$, logo $k = 3$.

2. Averigua se é contínua em $x = -3$ a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 7x + 12}{3x + 9} & \text{se } x > -3 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = -3 \\ \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x} & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

Adaptado de Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

Sugestão de resolução

Para que g seja contínua em $x = -3$, terá que se verificar $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = g(-3)$:

- $g(-3) = \frac{1}{3}$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x + 3)(x + 2)}{x(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x + 2}{x} = \frac{-3 + 2}{-3} = \frac{1}{3}$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -2$$

- $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 7x + 12}{3x + 9} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x + 3)(x + 4)}{3(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x + 4}{3} = \frac{-3 + 4}{3} = \frac{1}{3}$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \times 12}}{2} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -4$$

Como $\lim_{x \rightarrow -3^-} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x)$ existem e são ambos iguais a $g(-3)$, então existe o $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = g(-3) = \frac{1}{3}$. Conclui-se que a função g é contínua em $x = -3$.

PROFESSOR

Soluções

37.

- a) f é contínua em $x = 1$.
b) g não é contínua em $x = 0$.
c) h não é contínua em $x = 2$.

3.2. Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas

As propriedades operatórias dos limites, já estudadas, permitem-nos tirar conclusões acerca da continuidade da soma, do produto, do quociente, da potência e da raiz de funções contínuas num ponto.

Sejam f e g duas funções reais de variável real $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, contínuas num ponto a . Então, também são contínuas em a as funções:

- $f + g$
- $f - g$
- $f \times g$
- $\frac{f}{g}$, se $g(a) \neq 0$.
- f^n , com $n \in \mathbb{N}$.
- $\sqrt[n]{f}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $f(a) \geq 0$, se n for par.

Consequências

- Toda a função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.

Repara que toda a função polinomial resulta de operações entre funções contínuas de domínio $\mathbb{R}$ (potências, multiplicações e adições).

Exemplo

A função $f(x) = -x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \sqrt{5}$ é contínua.

- Toda a função racional é contínua no seu domínio.

Repara que toda a função racional resulta do quociente entre funções polinomiais e, portanto, contínuas.

Exemplo

A função $g(x) = \frac{-3x^4 + x^2 + 2}{x^5 - 1}$ é contínua.

Como sabes, uma função diz-se contínua quando é contínua em todos os pontos do seu domínio. Neste caso, dizer que g é contínua é o mesmo que dizer que g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Também se tem que:

- as funções seno e cosseno são contínuas em $\mathbb{R}$;
- a função tangente é contínua no respetivo domínio, por se tratar do quociente entre duas funções contínuas.



FRVR11_2.5
FRVR11_2.7
FRVR11_2.8
FRVR11_2.9

- 38 Considera as funções f e g , reais de variável real, tais que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prova que:

- a) f e g não são contínuas em $x = 0$;
b) $f \times g$ é uma função contínua em $x = 0$.

- 39 Dá um exemplo de uma função racional contínua em $\mathbb{R}$.

Recorda

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \text{ e}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

PROFESSOR

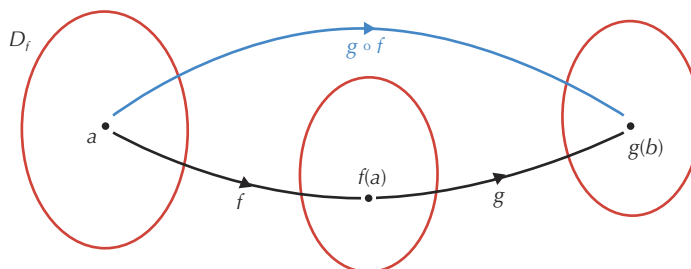
Solução

39. Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.



Sejam f e g duas funções reais de variável real e $a \in D_{g \circ f}$.

Se f é contínua em a e g é contínua em $f(a)$, então a função composta $g \circ f$ é contínua em a .



- 40 Estuda a continuidade das seguintes funções no seu domínio.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2 + x}{x^3 + 3x^2 + 2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Repara que esta propriedade resulta diretamente da propriedade de limites (limite da função composta) já conhecida:

Sejam f e g duas funções reais de variável real e a um ponto aderente a $D_{g \circ f}$.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

Como, neste caso, $a \in D_{g \circ f}$, existir cada um dos limites anteriores é o mesmo que dizer que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow f(a)} g(x) = g(f(a))$, então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(f(a))$.

Ou seja, $g \circ f$ é contínua em a .

A continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas estudada permite-nos justificar a continuidade de funções que resultam da aplicação sucessiva das operações soma algébrica, multiplicação, divisão e composição de funções, já conhecidas como funções contínuas (funções polinomiais, potências de expoente racional e as funções seno, cosseno e tangente).

Exemplos

1. A função $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x + 3}$ é contínua, por se tratar da composta da função raiz quadrada $x \mapsto \sqrt{x}$ com a função polinomial $x \mapsto x^3 - 5x + 3$.
2. A função $g(x) = \left(\frac{x^3 - 5x}{2x + 1}\right)^2$ é contínua, por se tratar da composta da função quadrática $x \mapsto x^2$ com a função racional $x \mapsto \frac{x^3 - 5x}{2x + 1}$.
3. A função $g(x) = \cos(\sin(x))$ é contínua, por se tratar da composta da função cosseno com a função seno.

PROFESSOR

Soluções

40.

a) f é contínua em $\mathbb{R}$.

b) g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício resolvido

Considera a função h , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} - x & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{3x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estuda a continuidade de h no domínio $\mathbb{R}$.

Sugestão de resolução

Estudar a continuidade de uma função consiste em averiguar a continuidade em cada ponto do seu domínio.

- No intervalo $]0, +\infty[$, a função é contínua, por se tratar da diferença entre duas funções contínuas: uma que é a composta da função raiz quadrada com uma função polinomial ($x \mapsto \sqrt{x^2 + 4}$) e outra que é uma função afim ($x \mapsto x$).
- No intervalo $]-\infty, 0[$, a função é contínua, por se tratar do quociente de duas funções contínuas: a função polinomial $x \mapsto x^3 - 7x^2 + 6x$ e a função afim $x \mapsto 3x$, que não se anula no intervalo considerado.
- Averiguar a continuidade no ponto $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 7x^2 + 6x}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 - 7x + 6)}{3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 7x + 6}{3} = \\ &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + 4} - x) = \sqrt{4} = 2$$

$$h(0) = 2$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$, a função h é contínua no ponto $x = 0$.

Concluimos, assim, que a função h é contínua em $\mathbb{R}$.

- 41 Mostra que a função h definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}$.

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

- 42 Seja h a função real de variável real definida por:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ 10 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Caracteriza uma extensão contínua de h de domínio $\mathbb{R}$.

- 43 Para um certo número real a e para um certo número real b é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{se } 0 < x < 4 \\ b & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Determina a e b .



APRENDE FAZENDO

Págs. 69, 72, 77 e 81
Exercícios 3, 5, 14, 29, 41 e 42



CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Pág. 53
Exercícios 10, 11, 12 e 13



AULA DIGITAL

- **Apresentação**
"Continuidade de funções"
- **Teste interativo**
"Continuidade de funções"

PROFESSOR

Soluções

42. Por exemplo:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{11}{3}x - \frac{25}{3} & \text{se } 2 < x < 5 \\ 10 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

43. $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$

UNIDADE 4

Assíntotas ao gráfico de uma função



FRVR11_3.1

20 AULA DIGITAL

■ Resolução

PowerPoint: Todos os exercícios de "Assíntotas ao gráfico de uma função"

■ Simulador

GeoGebra: "Assíntota ou buraco"

44. Considera uma função f , definida em $]-\infty, 2[$, positiva em todo o seu domínio. Sabe-se que a reta de equação $x = 2$ é assíntota ao gráfico de f . Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{f(x)}$?
- (A) $+\infty$
 (B) $-\infty$
 (C) 0
 (D) $\frac{1}{2}$

Nota

Nos exemplos ao lado, vimos gráficos de funções que admitem assíntotas verticais. Existem também funções cujo gráfico não admite assíntotas verticais, como é o caso da função f do exemplo 1, e funções cujo gráfico admite infinitas assíntotas verticais, como é o caso da função g do exemplo 2.

PROFESSOR

Solução

44. Opção (C)

4.1. Assíntotas verticais, horizontais e oblíquas ao gráfico de uma função

Assíntotas verticais

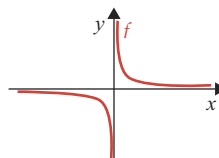
Dados um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ designa-se por **assíntota vertical ao gráfico de f** , quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.

Exemplos

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

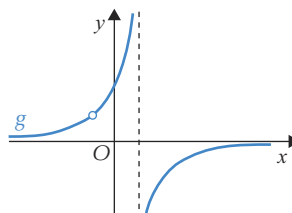
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$



A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

2. $g(x) = \frac{x+1}{1-x^2}$ $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{1-x^2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(1-x)(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



A reta de equação $x = -1$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

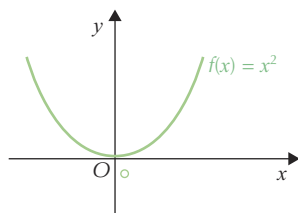
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{1-x^2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{1-x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

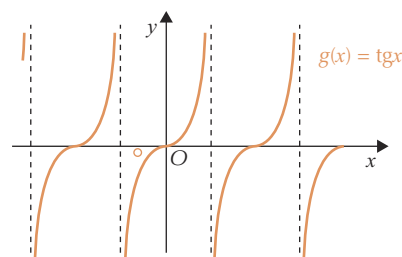
A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de g .

Exemplos

1.



2.



Esquematizando / Resumindo

Para determinares as assíntotas verticais ao gráfico de uma função, podes seguir os seguintes passos:

1º passo: Determina os pontos a , tais que a reta de equação $x = a$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f :

- $a \in D_f$, mas é um ponto de descontinuidade de f ;
- $a \notin D_f$, mas é um ponto aderente do domínio (por exemplo: $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $]a, \dots[$, $]\dots, a[$).

2º passo: Calcula $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e/ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

3º passo: Se algum dos limites calculados anteriormente é $+\infty$ ou $-\infty$, conclui que a reta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

45 Determina, caso existam, as assíntotas verticais ao gráfico das funções definidas por cada uma das expressões seguintes.

a) $g(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 9}$

b) $h(x) = \frac{x}{1 - x^2}$

c) $i(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{3x^2 + 1}$

Nota

Se uma função é contínua e se o seu domínio é $\mathbb{R}$ ou um intervalo fechado, o seu gráfico não admite qualquer assíntota vertical.

Exercício resolvido

Seja f a função de domínio $[0, 2[\cup]2, +\infty[$ definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 2}$. Estuda f quanto à existência de assíntotas verticais ao seu gráfico.

Sugestão de resolução

A função f é contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas (a função raiz quadrada e uma função polinomial).

Portanto, só a reta de equação $x = 2$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

Tem-se:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x}}{x - 2} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x}}{x - 2} = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Concluimos, assim, que apenas a reta de equação $x = 2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

PROFESSOR

Soluções

45.

a) $x = -3$

b) $x = 1$ e $x = -1$

c) Não tem.



20 AULA DIGITAL

■ Simulador

GeoGebra: "Assíntotas não verticais"

- 46 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}^+$. A reta de equação $y = x - 1$ é uma assíntota ao gráfico de f . Qual das afirmações é verdadeira?

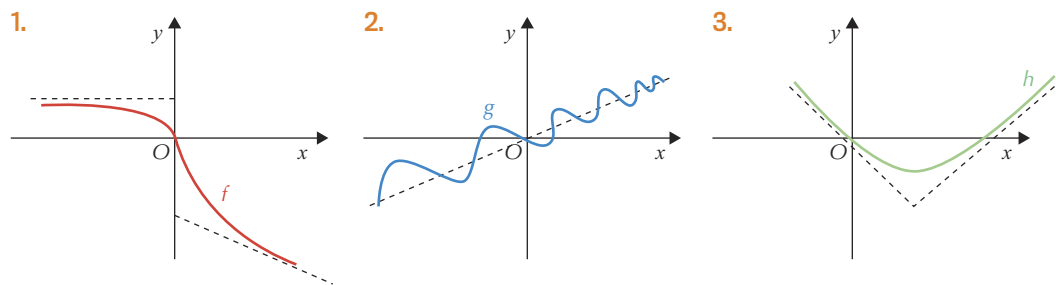
- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 1] = 0$
 (B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$
 (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 (D) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$

- 47 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota ao gráfico de f . Então, podes concluir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$ é igual a:

- (A) $+\infty$
 (B) $-\infty$
 (C) 0
 (D) $\frac{1}{2}$

Assíntotas não verticais

Exemplos



Observa que, quando $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, os gráficos das funções acima tendem a “confundir-se” com as retas representadas a tracejado (que podem ser horizontais ou oblíquas).

Dada uma função real de variável real f e dado um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$ designa-se por:

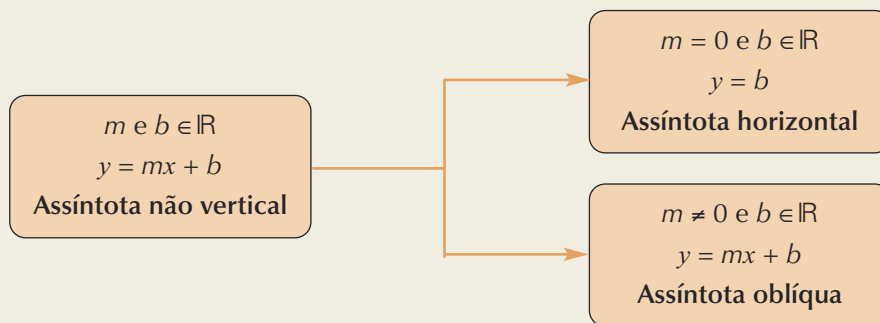
- **assíntota ao gráfico de f em $+\infty$** se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$;
- **assíntota ao gráfico de f em $-\infty$** se $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$.

Quando $m = 0$, designa-se por **assíntota horizontal ao gráfico de f** .

Repara que, de acordo com a propriedade acima:

- a reta de equação $y = b$ é uma **assíntota horizontal ao gráfico de uma função f** , quando $x \rightarrow +\infty$, se e só se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - b) = 0$, isto é, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$;
- a reta de equação $y = b$ é uma **assíntota horizontal ao gráfico de uma função f** , quando $x \rightarrow -\infty$, se e só se $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - b) = 0$, isto é, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Esquemmatizando / Resumindo



PROFESSOR

Soluções

46. Opção (B)
 47. Opção (D)

Nota

Quando $x \rightarrow +\infty$ (ou $x \rightarrow -\infty$), apenas pode ocorrer uma das seguintes possibilidades: o gráfico tem uma assíntota horizontal ou o gráfico tem uma assíntota oblíqua ou o gráfico não tem assíntota.

Exercícios resolvidos

1. Seja h uma função de domínio $]-\infty, 2]$ tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) + 2x - 3) = 0$.

O gráfico de h tem uma assíntota não vertical. Indica uma equação dessa assíntota.

Sugestão de resolução

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - (-2x + 3)) = 0$$

Logo, por definição de assíntota não vertical, concluímos que a reta de equação $y = -2x + 3$ é uma assíntota não vertical ao gráfico de f .

2. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, definida por $f(x) = \frac{3x+1}{2x-8}$.

Estuda a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreve as suas equações.

Sugestão de resolução

Assíntotas verticais

A função f é contínua, por se tratar de uma função racional. Portanto, só a reta de equação $x = 4$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

Tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x+1}{2x-8} &= \frac{13}{0^+} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x+1}{2x-8} &= \frac{13}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

A reta de equação $x = 4$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Concluimos, assim, que apenas a reta de equação $x = 4$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas horizontais

Uma vez que o domínio de f não é majorado nem minorado, vamos estudar o comportamento do gráfico da função quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{2x-8} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x \left(1 + \frac{1}{3x}\right)}{2x \left(1 - \frac{8}{2x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{3x}}{1 - \frac{4}{x}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{2} \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{2x-8} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x \left(1 + \frac{1}{3x}\right)}{2x \left(1 - \frac{8}{2x}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{3x}}{1 - \frac{4}{x}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

A reta de equação $y = \frac{3}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

(continua)

48. Determina, caso existam, as assíntotas ao gráfico das funções definidas por cada uma das expressões seguintes.

a) $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

b) $g(x) = \frac{1}{2x+1}$

c) $h(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

PROFESSOR

Soluções

48.

a) $x = 2$ e $y = 3$

b) $x = -\frac{1}{2}$ e $y = 0$

c) $x = \frac{1}{2}$ e $y = 2$

- 49 Determina, caso existam, as assíntotas ao gráfico da função j definida pela expressão:

$$j(x) = \frac{|2x - 3|}{x + 4}$$

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Exercícios resolvidos

3. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por $f(x) = \frac{|2x + 1|}{x + 2}$. (continuação)

Estuda a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreve as suas equações.

Sugestão de resolução

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } 2x + 1 \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{se } 2x + 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x - 1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{x + 2} & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{-2x - 1}{x + 2} & \text{se } x < -\frac{1}{2} \wedge \text{se } x \neq -2 \end{cases}.$$

Assíntotas verticais

A função f é contínua, por se tratar do quociente de duas funções contínuas. Portanto, só a reta de equação $x = -2$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

Tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|2x + 1|}{x + 2} &= \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|2x + 1|}{x + 2} &= \frac{3}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

A reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Concluimos, assim, que a reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas horizontais

Uma vez que o domínio de f não é majorado nem minorado, vamos estudar o comportamento do gráfico da função quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

Tem-se:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2x + 1|}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x + 2} = 2 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x + 1|}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x - 1}{x + 2} = -2 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = 2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$, e a reta de equação $y = -2$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

PROFESSOR

Solução

49. $x = -4$, $y = 2$ e $y = -2$

Como determinar m e b ?



FRVR11_3.3

A propriedade abaixo dá-nos um método para determinar o valor do declive m da assíntota não vertical ao gráfico de uma função, caso esta exista:

Propriedade

Dada uma função real de variável real f , se a reta de equação $y = mx + b$ é uma assíntota ao gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$ (respetivamente, $x \rightarrow -\infty$), então $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$, (respetivamente, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$).

Consideremos a reta de equação $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$ uma assíntota ao gráfico da função de domínio $\mathbb{R}^+$.

Por definição, tem-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$, isto é:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - b] &= 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x) - mx - b}{x} \right] &= 0 \quad \left(\text{pois } \left(\frac{0}{\infty} = 0 \right) \right) \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{mx}{x} - \frac{b}{x} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} m - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - m - 0 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= m \end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - b] &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) - \lim_{x \rightarrow +\infty} b &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) - b &= 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) &= b \end{aligned}$$

Poderíamos fazer o estudo análogo para $x \rightarrow -\infty$, dependendo do domínio da função f .

- 50 Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que a reta de equação $y = 2x + 4$ é uma assíntota ao seu gráfico. Indica o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{g(x)}{x} \times (g(x) - 2x) \right]$
- (A) 0
(B) 6
(C) 8
(D) $+\infty$

PROFESSOR

Solução

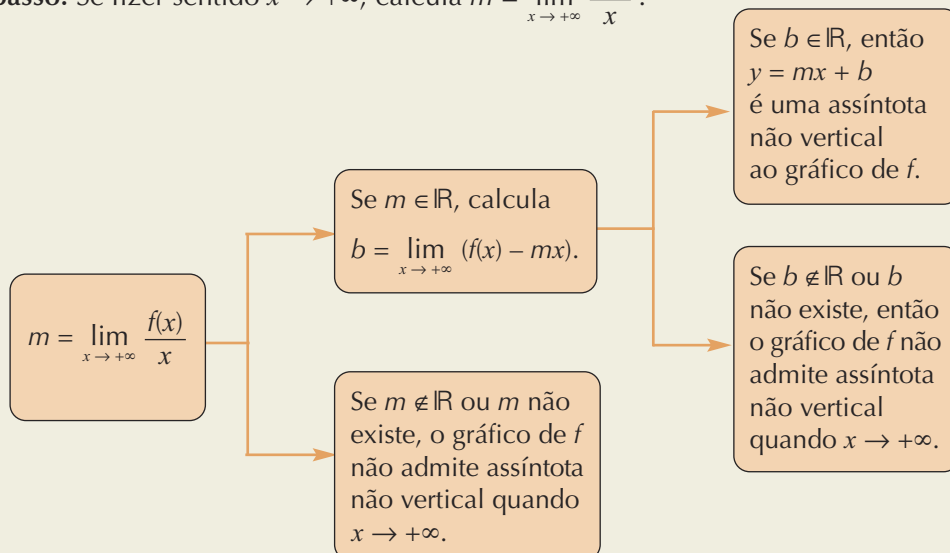
50. Opção (C)

Esquemmatizando / Resumindo

Para determinares as assíntotas não verticais ao gráfico de uma função, podes seguir os seguintes passos:

1º passo: Tem em atenção o domínio da função, isto é, observa se o domínio contém pelo menos um intervalo do tipo $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$, ou seja, se o domínio não é majorado ou não é minorado.

2º passo: Se fizer sentido $x \rightarrow +\infty$, calcula $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:



3º passo: Se fizer sentido $x \rightarrow -\infty$, aplica o raciocínio do passo anterior com $x \rightarrow -\infty$.

Nota

A condição $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$) não é suficiente para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$). Vejamos o seguinte exemplo:

Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = x + \sqrt{x}$.

Como o domínio de f é $[0, +\infty[$, vamos procurar uma assíntota não vertical para $x \rightarrow +\infty$.

$$\bullet m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 + \frac{1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$\bullet b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Como o valor obtido não é um número real, concluímos que o gráfico de f não admite assíntota não vertical.

Exercícios resolvidos

1. Estuda as funções seguintes quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico e, caso existam, escreve as suas equações.

a) $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 1}$

b) $g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$

Sugestão de resolução

$$a) f(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 1}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Assíntotas verticais

A função f é contínua, por se tratar de uma função racional. Portanto, só a reta de equação $x = 1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + x}{x - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + x}{x - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assim, a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$)

Como o domínio de g não é majorado nem minorado, vamos procurar uma assíntota não vertical para $x \rightarrow +\infty$ e para $x \rightarrow -\infty$.

$$x \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} \bullet m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2 + x}{x - 1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 \left(1 + \frac{1}{2x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{2x}}{1 - \frac{1}{x}} = 2 \times \frac{1}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + x}{x - 1} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 2x^2 + 2x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 3 \times \frac{1}{1} = 3 \end{aligned}$$

Concluimos, assim, que a reta de equação $y = 2x + 3$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

Observa que, quando $x \rightarrow -\infty$, os cálculos são idênticos e, portanto, também se obtém a mesma reta.

(continua)

- 51 Determina, caso existam, as assíntotas ao gráfico das funções definidas por cada uma das expressões seguintes.

$$a) f(x) = \frac{3x + 6}{(x + 2)^2}$$

$$b) g(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 + 1}$$

$$c) h(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}$$

$$d) j(x) = \frac{2x^2 + 3}{x + 3}$$

$$e) (*) p(x) = \frac{\sqrt{9x^2 + 5x}}{x + 1}$$

$$f) r(x) = \sqrt{4x^2 + 1}$$

$$g) (*) s(x) = \frac{x^2 - 3}{|5 - x|}$$

(*) grau de dificuldade elevado

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

PROFESSOR

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Soluções

51.

$$a) x = -2 \text{ e } y = 0$$

$$b) y = 2x$$

$$c) x = -1; x = 1 \text{ e } y = 2$$

$$d) x = -3 \text{ e } y = 2x - 6$$

$$e) x = -1; y = 3 \text{ e } y = -3$$

$$f) y = 2x \text{ e } y = -2x$$

$$g) x = 5, y = x + 5 \text{ e } y = -x - 5$$

Exercícios resolvidos

(continuação)

Sugestão de resolução

$$\text{b) } g(x) = \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{2x^2 + 1 \geq 0}\}_{\text{Condição universal em } \mathbb{R}} = \mathbb{R}$$

Condição universal em $\mathbb{R}$

Assíntotas verticais

A função g é contínua, por se tratar da composta da função raiz quadrada com uma função polinomial. Como g é contínua em $\mathbb{R}$, o seu gráfico não admite assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$)

Como o domínio de g não é majorado nem minorado, vamos procurar uma assíntota não vertical para $x \rightarrow +\infty$ e para $x \rightarrow -\infty$.

 $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{2 + \frac{1}{+\infty}} = \sqrt{2 + 0} = \sqrt{2} \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2}x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2}x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + 1})^2 - (\sqrt{2}x)^2}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2}x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2}x} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = \sqrt{2}x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

 $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} \right) = -\sqrt{2 + \frac{1}{+\infty}} = \sqrt{2 + 0} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2}x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{2}x)(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2}x)}{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2}x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{2x^2 + 1})^2 - (\sqrt{2}x)^2}{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1 - 2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2}x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2}x} = \frac{1}{+\infty} = 0
 \end{aligned}$$

A reta de equação $y = -\sqrt{2}x$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.

$$c) h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$D_h = \mathbb{R}$$

Assíntotas verticais

A função h é contínua em todo o seu domínio, exceto, eventualmente, no ponto 1, portanto, só a reta de equação $x = 1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de h .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical ao gráfico de h .

Assim, a reta de equação $x = 1$ é a única assíntota vertical ao gráfico de h .

Assíntotas não verticais ($y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$)

Como o domínio de h não é majorado nem minorado, vamos procurar uma assíntota não vertical para $x \rightarrow +\infty$ e para $x \rightarrow -\infty$.

$$x \rightarrow +\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

Como m não é um número real, conclui-se que o gráfico de h não apresenta assíntota não vertical quando $x \rightarrow +\infty$.

$$x \rightarrow -\infty$$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - 0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Concluimos, assim, que a reta de equação $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \rightarrow -\infty$.

(continua)

(*) grau de dificuldade elevado

52 De uma função g , de domínio $] -\infty, -1[$, sabe-se que é contínua no seu domínio e que:

- $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x) - 2x}{4x} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - mx + 1) = 3$,
 $m \in \mathbb{R}$

Determina as assíntotas ao gráfico de g .

APRENDE FAZENDO

Págs. 72, 73, 74, 75, 76, 81, 83, 84 e 85
Exercícios 15, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 43, 46, 48, 49, 51, 52, 53 e 57

CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Págs. 54 e 58
Exercícios 14, 15 e 28

PROFESSOR

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Solução

52. $x = -1$ e $y = 4x + 2$

Exercícios resolvidos

(continuação)

2. (*) Acerca de uma função f real de variável real, sabe-se que é contínua no seu domínio e que:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1$

Identifica as assíntotas ao gráfico de f .

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Sugestão de resolução

Assíntotas verticais

Uma vez que f é contínua no seu domínio, as retas de equações $x = -2$ e $x = 1$ são as únicas candidatas a assíntotas verticais ao gráfico da função f .

Tem-se que:

- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$
Logo, a reta de equação $x = -2$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ e, como $3 \in D_f$, então $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \in \mathbb{R}$, logo $x = 1$ não é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assim, concluímos que a reta de equação $x = -2$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$
Logo, a reta de equação $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1)) = 0$$

Logo, a reta de equação $y = 2x + 1$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$.

4.2. Assíntotas e representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

Considera a função racional definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $f(x) = \frac{1}{x}$.

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois $\frac{1}{x} \neq 0$, para todo o x pertencente ao domínio de f .
- f é contínua por se tratar de uma função racional.
- f é decrescente em $\mathbb{R}^+$ e em $\mathbb{R}^-$, pois:

sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer pertencentes a $]0, +\infty[$ tais que $x_1 < x_2$, então:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer pertencentes a $]-\infty, 0[$ tais que $x_1 < x_2$, então:

$$-x_1 \text{ e } -x_2 \text{ pertencem a }]0, +\infty[\text{ e } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

- **Assíntota vertical:** a reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

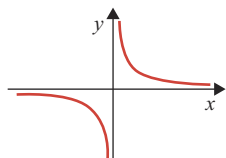
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- **Assíntota horizontal:** a reta de equação $y = 0$ é a única assíntota horizontal ao gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

- **Representação gráfica:** o gráfico de f designa-se por hipérbole.



Como sabes do ano anterior, quando estudaste transformações do gráfico de uma função, os gráficos das funções da família $g(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ obtêm-se a partir do gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ segundo:

- uma translação horizontal associada ao vetor $(c, 0)$;
- uma contração ou uma dilatação vertical de coeficiente $|b|$;
- uma reflexão em relação ao eixo Ox se $b < 0$;
- uma translação vertical associada ao vetor $(0, a)$.

20 AULA DIGITAL

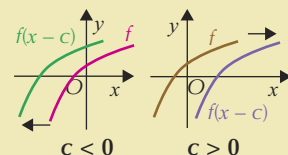
Simulador

GeoGebra: "Funções racionais do tipo

$$f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0"$$

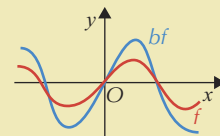
Recorda

O gráfico da função $x \mapsto f(x-c)$ obtém-se a partir do gráfico da função f segundo uma translação horizontal associada ao vetor $(c, 0)$:

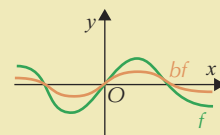


O gráfico da função $x \mapsto bf(x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f segundo uma:

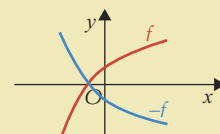
- dilatação vertical de coeficiente b se $b > 1$;



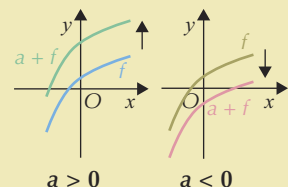
- contração vertical de coeficiente b se $0 < b < 1$.



O gráfico da função $x \mapsto -f(x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f segundo uma reflexão em relação ao eixo Ox :



O gráfico da função $x \mapsto a + f(x)$ obtém-se a partir do gráfico da função f segundo uma translação vertical associada ao vetor $(0, a)$:



20 AULA DIGITAL

■ Simuladores (GeoGebra)

– “Funções racionais do tipo

$$f(x) = \frac{a}{x-c}, a \neq 0$$

– “Funções racionais do tipo

$$f(x) = b + \frac{a}{x-c}, a \neq 0$$

Recorda

Numa divisão inteira:

$$\begin{array}{r} D \overline{) d} \\ R \quad Q \end{array}$$

$$D = d \times Q + R$$

$$\text{Logo, } \frac{D}{d} = Q + \frac{R}{d}.$$

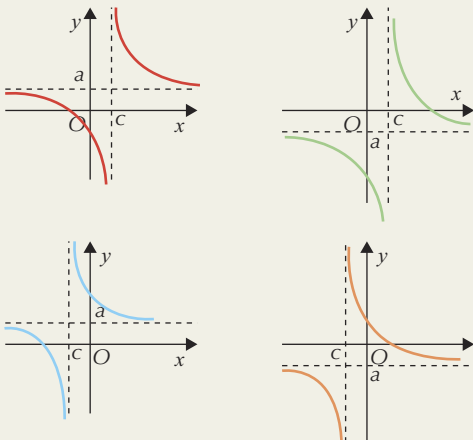
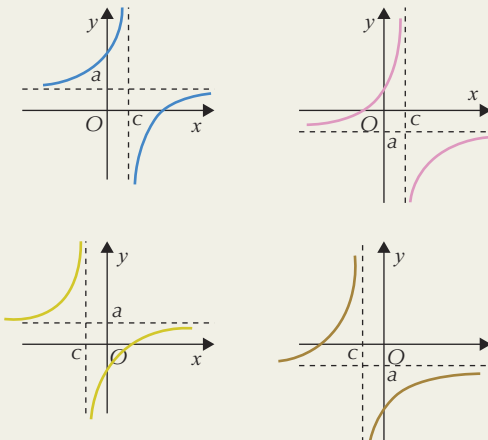
Efetuada a divisão inteira, temos:

Cálculo auxiliar

$$\frac{6x}{2x} = 3$$

$$\begin{array}{r} 6x - 8 \overline{) 2x + 4} \\ -6x - 12 \quad 3 \\ \hline -20 \end{array}$$

No geral, as funções da família $g(x) = a + \frac{b}{x-c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, têm as seguintes propriedades:

$g(x) = a + \frac{b}{x-c}, b > 0$	$g(x) = a + \frac{b}{x-c}, b < 0$
• $D_g = \mathbb{R} \setminus \{c\}$	• $D_g = \mathbb{R} \setminus \{c\}$
• $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{a\}$	• $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{a\}$
• g é contínua	• g é contínua
• g é decrescente em $]-\infty, c[$ e em $]c, +\infty[$	• g é crescente em $]-\infty, c[$ e em $]c, +\infty[$
• Assíntota vertical: $x = c$	• Assíntota vertical: $x = c$
• Assíntota horizontal: $y = a$	• Assíntota horizontal: $y = a$
	

Existem funções racionais definidas por expressões que se podem transformar em expressões do tipo $a + \frac{b}{x-c}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Seja g a função racional definida em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ por $g(x) = \frac{6x-8}{2x+4}$.

Observando a divisão efetuada na margem, vem que $\frac{6x-8}{2x+4} = 3 + \frac{-20}{2x+4}$ e

$$3 + \frac{-20}{2x+4} = 3 + \frac{-20}{2(x+2)} = 3 + \frac{-10}{x+2}, \text{ ou seja, } g(x) = \frac{6x-8}{2x+4} = 3 + \frac{-10}{x+2}.$$

Em geral:

Toda a função racional f definida por $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, com $a, b, d \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ escrita na forma $\frac{a}{c} + \frac{k}{x + \frac{d}{c}}$. Logo:

- a reta de equação $x = -\frac{d}{c}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f ;
- a reta de equação $y = \frac{a}{c}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f .

Consideremos, agora, novamente, o exercício da página 51 e apresentemos um outro processo de resolução.

Exercícios resolvidos

1. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{4\}$, definida por $f(x) = \frac{3x+1}{2x-8}$.

Estuda a função f quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreve as suas equações.

Sugestão de resolução

Efetuada a divisão inteira, temos:

$$\begin{array}{r} 3x+1 \quad | \quad 2x-8 \\ -3x+12 \quad | \quad 3 \\ \hline 13 \quad | \quad 2 \end{array}$$

Cálculo auxiliar

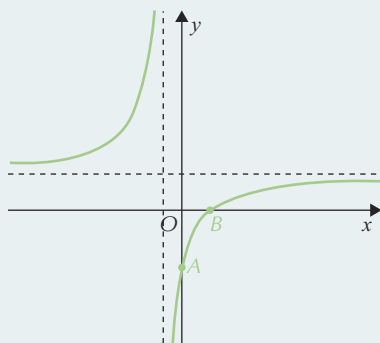
$$\frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{13}{2x-8} \quad \text{e} \quad \frac{3}{2} + \frac{13}{2x-8} = \frac{3}{2} + \frac{13}{2(x-4)} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{13}{2}}{x-4}$$

A reta de equação $x = 4$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f e a reta de equação $y = \frac{3}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$.

2. O gráfico abaixo representa uma função racional f do tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+2}$, $c \neq 0$.



Sabe-se que as retas $y = 2$ e $x = -1$ são assíntotas ao gráfico e que este intersecta o eixo Oy no ponto $A(0, -3)$.

Determina:

- a) os valores de a , b e c ;
- b) as coordenadas do ponto B .

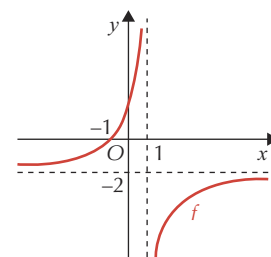
Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

(continua)

53. O gráfico seguinte representa uma função racional f do tipo

$$f(x) = a + \frac{b}{x-c}.$$

Sabe-se que as retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são assíntotas ao gráfico e que este intersecta o eixo Ox no ponto $A(-1, 0)$.



Determina os valores de a , b e c .

PROFESSOR

Solução

53. $a = -2$, $b = -4$ e $c = 1$

Exercícios resolvidos

(continuação)

Sugestão de resolução

$$a) D_f = \{x \in \mathbb{R} : cx + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{c}\right\}$$

Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{c}\right\}$, e a reta de equação $x = -1$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f , vem que $-\frac{2}{c} = -1$, isto é, $c = 2$.

$$\text{Tem-se, então, que } f(x) = \frac{ax + b}{2x + 2}.$$

Efetuando a divisão inteira, temos:

$$\begin{array}{r} ax + b \quad | \quad 2x + 2 \\ -ax - a \quad | \quad \frac{a}{2} \\ \hline b - a \end{array}$$

Cálculo auxiliar

$$\frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}$$

Logo:

$$f(x) = \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2x+2} \quad \text{e} \quad \frac{a}{2} + \frac{b-a}{2x+2} = \frac{a}{2} + \frac{\frac{b-a}{2}}{x+1}$$

A reta de equação $y = \frac{a}{2}$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f quando $x \rightarrow +\infty$ e quando $x \rightarrow -\infty$, logo $\frac{a}{2} = 2$, isto é, $a = 4$.

Uma vez que o ponto $A(0, -3)$ pertence ao gráfico de f , vem que:

$$\begin{aligned} f(0) = -3 &\Leftrightarrow \frac{4 \times 0 + b}{2 \times 0 + 2} = -3 \\ &\Leftrightarrow \frac{b}{2} = -3 \\ &\Leftrightarrow b = -6 \end{aligned}$$

Concluimos que $a = 4$, $b = -6$ e $c = 2$.

b) O ponto B é a interseção do gráfico de f com o eixo Ox . Logo, a abscissa de B é o zero de f .

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4x - 6}{2x + 2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x - 6 = 0 \wedge 2x + 2 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \wedge x \neq -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } B\left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

20 AULA DIGITAL

■ Apresentação

"Assíntotas ao gráfico de uma função"

■ Teste interativo

"Assíntotas ao gráfico de uma função"



APRENDE FAZENDO

Págs. 69, 70, 71, 73, 82 e 83
Exercícios 4, 8, 10, 16, 19, 44, 45 e 47



CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Pág. 58
Exercício 27
Págs. 83 a 87
Teste nº 4

✓ SÍNTESE

1. Funções racionais

Uma **função racional** é uma função real de variável real dada por uma expressão da forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinómios.

Equações fracionárias

Método para resolver uma equação fracionária

1º passo: Reduz a equação fracionária à forma $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$.

2º passo: Escreve $\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0$.

3º passo: Resolve a condição acima.

4º passo: Apresenta o conjunto-solução.

Inequações fracionárias

Método para resolver uma inequação fracionária

1º passo: Reduz a inequação fracionária à forma $\frac{A(x)}{B(x)} \begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix} 0$.

2º passo: Estuda o sinal da fração $\frac{A(x)}{B(x)}$, recorrendo, por exemplo, a um quadro de sinais.

3º passo: Apresenta sob a forma de condição os valores de x que satisfazem a inequação $\frac{A(x)}{B(x)} \begin{matrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{matrix} 0$.

4º passo: Apresenta o conjunto-solução.

2. Limites segundo Heine de funções reais de variável real

Definição de Limite segundo Heine

Dados um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ e um ponto $a \in \mathbb{R}$, a designa-se por **ponto aderente de A** quando existe uma sucessão (x_n) de elementos de A tal que $\lim x_n = a$.

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto $a \in \mathbb{R}$, o número real b designa-se por **limite de $f(x)$ quando x tende para a** , quando a for um ponto aderente do domínio de f , e para toda a sucessão (x_n) de elementos de D_f convergente para a , $\lim f(x_n) = b$.

Notas

1. Representa-se por $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ e diz-se que “ $f(x)$ tende para b quando x tende para a ”.

2. O limite de $f(x)$ quando x tende para a , se existir, é único.

3. A definição de limite e a propriedade presente na nota anterior estende-se ao caso de limites infinitos e ao caso de x tender para $+\infty$ ou $-\infty$.

SÍNTESE

Limites laterais

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto $a \in \mathbb{R}$, representa-se por:

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores **inferiores** a a ou limite de $f(x)$ à **esquerda** de a ;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ o limite de $f(x)$ quando x tende para a por valores **superiores** a a ou limite de $f(x)$ à **direita** de a .

Limites

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto a aderente ao respetivo domínio D_f :

- se $a \notin D_f$ e se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem iguais, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$;
- se $a \in D_f$ e se os limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existirem e forem ambos iguais a $f(a)$, então existe o limite $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e, nesse caso, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Operações com limites

Seja a um ponto finito (ponto aderente ao respetivo domínio) ou infinito:

- $\lim_{x \rightarrow a} k = k$
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

Sejam f e g duas funções tais que se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$, com $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ e a é um ponto finito (ponto aderente do respetivo domínio) ou infinito, então:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l_1 l_2$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l_1}{l_2}$ se $g(x) \neq 0$, para todo o $x \in D_g$ e $l_2 \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow a} (k \times f)(x) = k l_1$, $k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, $r \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}^+$ e $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in D_f$.
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^r = (l_1)^r$, sendo $r \in \mathbb{Q}$ e $f(x) > 0$, para todo o $x \in D_f$.

Todas as propriedades acima enunciadas são suscetíveis de serem alargadas ao caso de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ serem infinitos, exceto se conduzirem a situações do tipo $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ e $0 \times \infty$.

Operações com limites infinitos em notação simbólica

Adição	Multiplicação	Divisão
$+\infty + l = +\infty$, com $l \in \mathbb{R}$. $+\infty + (+\infty) = +\infty$ $-\infty + l = -\infty$, com $l \in \mathbb{R}$. $-\infty + (-\infty) = -\infty$ $(+\infty) + (-\infty)$ Indeterminação	$(+\infty) \times l = +\infty$, com $l \in \mathbb{R}^+$. $(+\infty) \times l = -\infty$, com $l \in \mathbb{R}^-$. $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$ $(-\infty) \times l = -\infty$, com $l \in \mathbb{R}^+$. $(-\infty) \times l = +\infty$, com $l \in \mathbb{R}^-$. $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$ $(+\infty)^r = +\infty$, com $r \in \mathbb{Q}^+$. $(-\infty)^r = +\infty$, se $r \in \mathbb{N}$ é par. $(-\infty)^r = -\infty$, se $r \in \mathbb{N}$ é ímpar. $\infty \times 0$ Indeterminação	$\frac{1}{0^+} = +\infty$ $\frac{1}{0^-} = -\infty$ $\frac{1}{\infty} = 0$ $\frac{0}{\infty} = 0$ $\frac{\infty}{0} = \infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ Indeterminação $\frac{0}{0}$ Indeterminação

Produto de uma função limitada por uma função com limite nulo

Dados $D \subset \mathbb{R}$, as funções $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto a aderente a D , se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e se g é limitada, então $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0$.

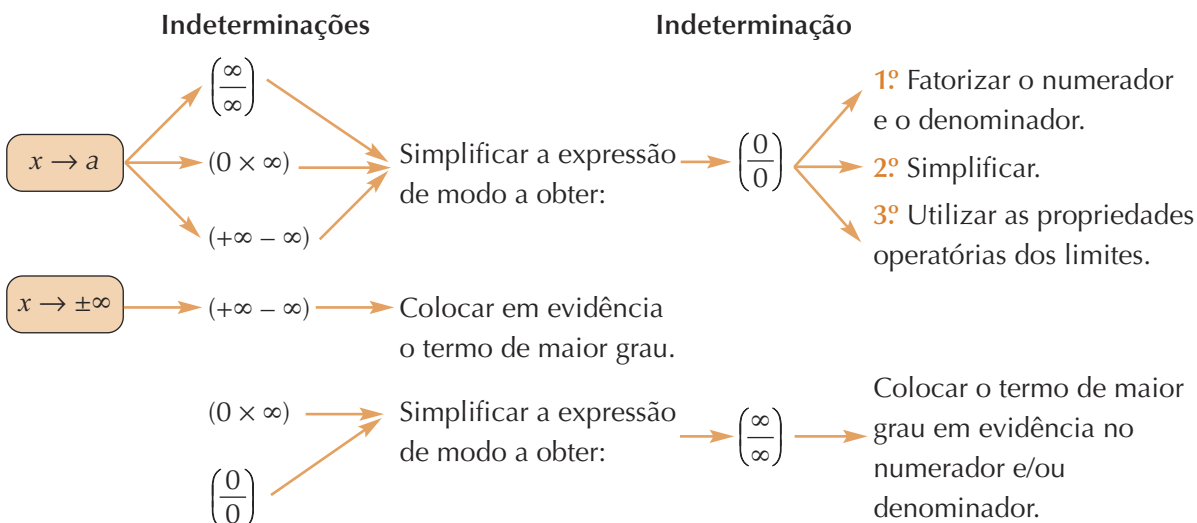
Limite de uma função composta

Sejam f e g duas funções reais de variável real e a um ponto aderente a $D_{g \circ f}$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = c$.

Indeterminações

Envolvendo funções racionais

No cálculo de limites de funções racionais que envolvem indeterminações, debes seguir o esquema seguinte:



✓ SÍNTESE

Envolvendo funções irracionais

As estratégias mais comuns passam por:

- multiplicar numerador/denominador pela expressão conjugada do binômio onde se encontra a expressão irracional;
- multiplicar numerador/denominador pela própria raiz envolvida;
- colocar em evidência um fator de modo a transformar a expressão que se encontra no radicando num produto.

3. Continuidade de funções

Seja f uma função real de variável real e seja a um ponto do respetivo domínio. Diz-se que:

- f é contínua em a quando $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe.
- f é contínua no conjunto $A \subset D_f$ quando f é contínua em todos os pontos de A .
- f é contínua quando f é contínua em todos os pontos de D_f .

Operações com funções contínuas

Sejam f e g duas funções reais de variável real $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$, contínuas num ponto a , então também são contínuas em a as funções:

- $f + g$
- $f - g$
- $f \times g$
- $\frac{f}{g}$, se $g(a) \neq 0$.
- f^n , com $n \in \mathbb{N}$.
- $\sqrt[n]{f}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $f(a) \geq 0$, se n for par.
- $g \circ f$, com $a \in D_{g \circ f}$, f contínua em a e g contínua em $f(a)$.

Exemplos de funções contínuas

- Funções polinomiais
- Funções racionais
- Funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente

4. Assíntotas ao gráfico de uma função

Assíntotas verticais

Dados um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e um ponto $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ designa-se por **assíntota vertical ao gráfico de f** , quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.

Método para determinar assíntotas verticais

1º passo: Determina os pontos a tais que a reta de equação $x = a$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de f :

- $a \in D_f$, mas é um ponto de descontinuidade de f ;
- $a \notin D_f$, mas é um ponto aderente do domínio (por exemplo: $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, $]-\infty, a[$, $]a, +\infty[$, $]a, \dots[$, $]\dots, a[$).

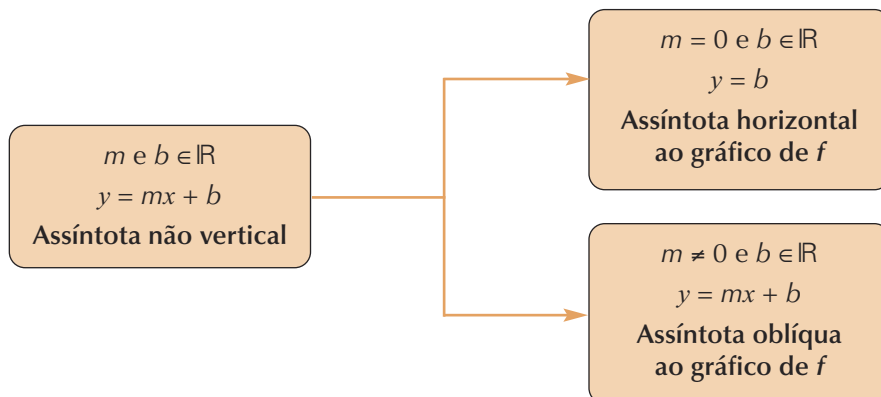
2º passo: Calcula $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e/ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.

3º passo: Se algum dos limites calculados anteriormente é $+\infty$ ou $-\infty$, conclui que a reta de equação $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f .

Assíntotas não verticais

Dada uma função real de variável real f e dado um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$, designa-se por:

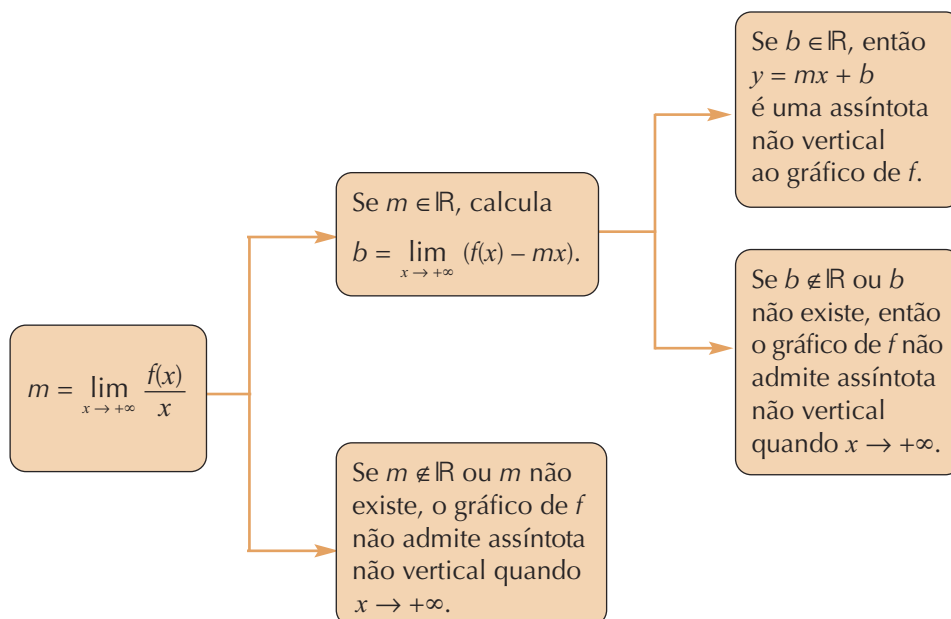
- assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$;
- assíntota ao gráfico de f em $-\infty$ se $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$.



Método para determinar assíntotas não verticais

1º passo: Tem em atenção o domínio da função, isto é, observa se o domínio contém pelo menos um intervalo do tipo $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$, ou seja, se o domínio não é majorado ou não é minorado.

2º passo: Se fizer sentido $x \rightarrow +\infty$, calcula $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

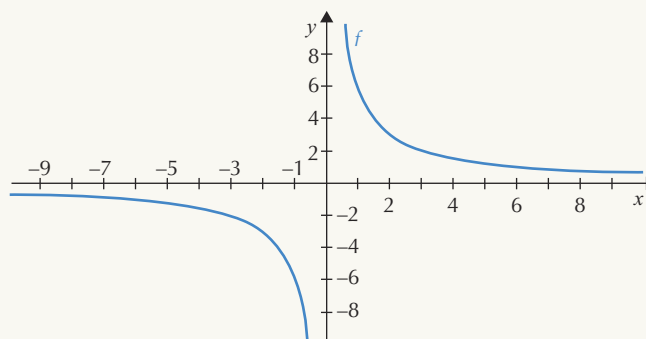


3º passo: Se fizer sentido $x \rightarrow -\infty$, aplica o raciocínio do passo anterior com $x \rightarrow -\infty$.

Aprende Fazendo

Itens de seleção

- 1 Seja f a função representada graficamente na figura.

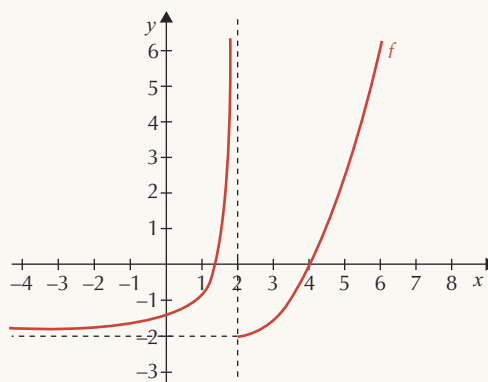


Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (A) f é uma função ímpar.
- (B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- (C) f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$.
- (D) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$.

Solução: Opção (D)

- 2 Na figura está representada graficamente uma função f , de domínio $\mathbb{R}$.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$
- (B) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$
- (C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$
- (D) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2$

Solução: Opção (D)

3 Seja f uma função real de variável real e a um parâmetro real. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, então f é contínua em $x = a$.
 (B) Se f tem limite no ponto de abscissa a , então é contínua nesse ponto.
 (C) Se a não pertence ao domínio de f , então não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
 (D) Se f é contínua em $x = a$, então $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

Solução: Opção (D)

4 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

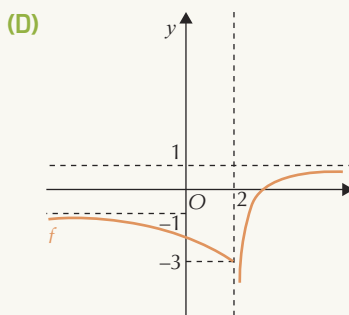
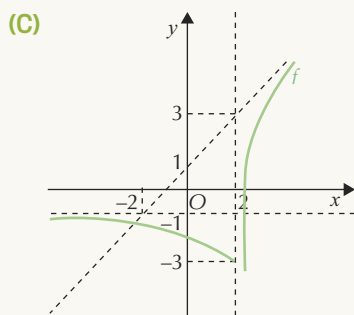
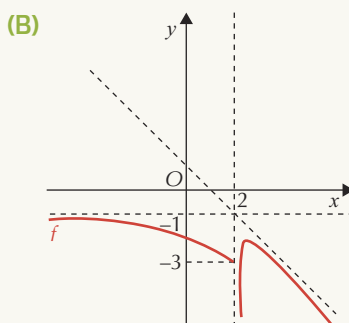
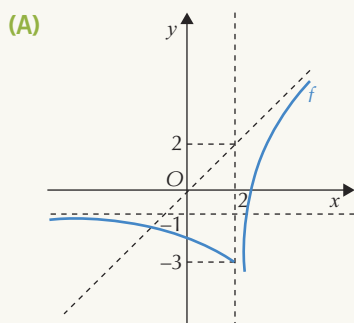
- (A) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $D'_f = \mathbb{R}$ (B) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 (C) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (D) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Solução: Opção (D)

5 Acerca de uma função f , sabe-se que:

- é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 1$.

Qual das seguintes representações gráficas pode ser o gráfico de f ?



Solução: Opção (C)

Aprende Fazendo

Itens de seleção

- 6 Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que f é definida por $f(x) = \sqrt{x^3 + x}$ e que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \times g)(x) = 1$. Qual das expressões seguintes pode definir a função g ?

(A) x (B) $\frac{1}{x^2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (D) $\sqrt{x}$

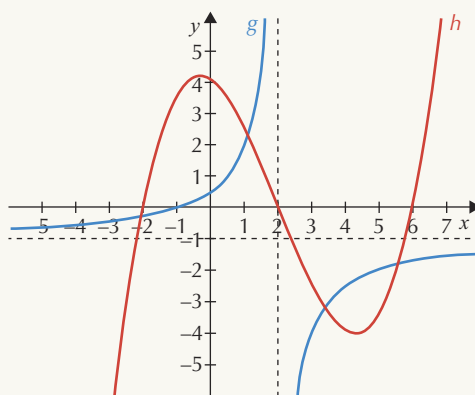
Solução: Opção (C)

- 7 Considera a função f , real de variável real, definida por $f(x) = \frac{x-5}{(5-x)^4}$. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$?

(A) 0 (B) $-\infty$ (C) 4 (D) $+\infty$

Solução: Opção (B)

- 8 Na figura estão representadas graficamente uma função racional g e uma função polinomial h .



O gráfico da função g admite duas assíntotas de equações $x = 2$ e $y = -1$.

- a) Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{g(x)}$?

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

- b) Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{h(x)}$?

(A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

- c) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \times h)(x) = -\infty$ (B) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{g}{h}\right)(x) = +\infty$
 (C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g \times h)(x) = +\infty$ (D) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{g}{h}\right)(x) = 0$

Soluções: a) Opção (B) b) Opção (D) c) Opção (B)

- 9 De uma função real de variável real, sabe-se que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$. Seja g uma função definida por $g(x) = f(x - 3)$. Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -1$

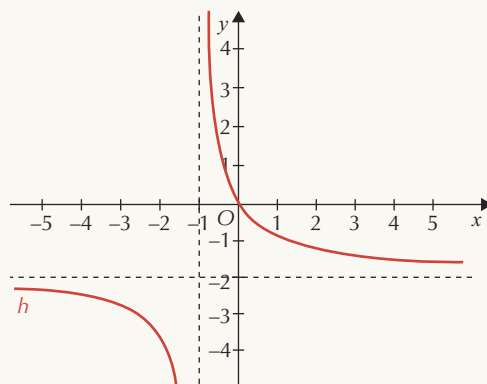
(B) $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -1$

(C) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -1$

(D) $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = -4$

Solução: Opção (B)

- 10 Na figura encontra-se representada graficamente a função h . Tal como a figura sugere, as retas de equações $x = -1$ e $y = -2$ são assíntotas ao gráfico de h .



Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões definidas por $u_n = -n^2 - n$ e $v_n = -\frac{1}{n} - 1$.

Então, pode concluir-se que $\lim h(u_n)$ e $\lim h(v_n)$ são respetivamente iguais a:

(A) -2 e $+\infty$

(B) -1 e $-\infty$

(C) -2 e $-\infty$

(D) -1 e $+\infty$

Solução: Opção (C)

- 11 Para um certo número real positivo k , a função f definida em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ por $f(x) = \begin{cases} \frac{kx}{3} - \frac{k}{2} & \text{se } x < 3 \\ \frac{\sqrt{3x-x}}{x-3} & \text{se } x > 3 \end{cases}$ tem limite no ponto de abscissa 3. Qual é o valor de k ?

(A) -2

(B) -1

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) 1

Solução: Opção (B)

- 12 Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2} \right)$?

(A) $+\infty$

(B) 0

(C) $-\infty$

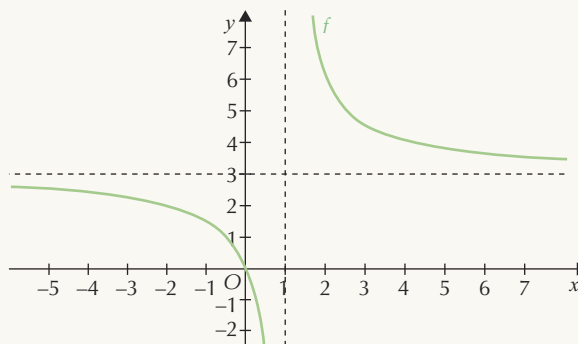
(D) 1

Solução: Opção (A)

Aprende Fazendo

Itens de seleção

- 13 Na figura encontra-se representada graficamente uma função f de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Seja (x_n) uma sucessão. Sabe-se que $\lim f(x_n) = -\infty$.



Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão (x_n) ?

- (A) $1 + \frac{1}{n}$ (B) $\frac{2n-1}{n}$ (C) $\frac{n-1}{n}$ (D) $2 + \frac{1}{n}$

Solução: Opção (C)

- 14 Considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}}{x-x^2} & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ \frac{2x^2+1-3x}{x^2-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \notin \mathbb{R}$
 (B) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$
 (C) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$
 (D) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Solução: Opção (B)

- 15 Seja f uma função real de variável real. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) Se a reta de equação $y = b$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f , então a equação $f(x) = b$ é impossível em $\mathbb{R}$.
 (B) Se o domínio de f é $\mathbb{R}$, então o gráfico de f pode ter assíntotas verticais.
 (C) Se o gráfico de f tem uma assíntota vertical de equação $x = a$, então a não pertence ao domínio de f .
 (D) Se f é uma função racional, então tem pelo menos uma assíntota vertical.

Solução: Opção (B)

- 16 De uma função real de variável real definida por $f(x) = \frac{2x}{a + bx}$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sabe-se que o seu gráfico admite uma assíntota vertical de equação $x = 1$ e uma assíntota horizontal de equação $y = -1$. Quais são os valores de a e b ?

(A) $a = 2$ e $b = -2$

(B) $a = b = -\frac{1}{2}$

(C) $a = b = -2$

(D) $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$

Solução: Opção (A)

- 17 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x + a}$, $a \in \mathbb{R}$. Pode afirmar-se que:

(A) o gráfico de f tem uma assíntota vertical e uma assíntota horizontal.

(B) o gráfico de f só tem uma assíntota horizontal.

(C) o gráfico de f só tem uma assíntota vertical.

(D) o gráfico de f não tem assíntotas verticais nem horizontais.

Solução: Opção (D)

- 18 Considera a função g definida em $\mathbb{R}$ tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -4$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$. Então, pode concluir-se que:

(A) o gráfico de g não tem assíntotas verticais.

(B) o gráfico de g não tem assíntotas horizontais.

(C) o gráfico de g pode ter uma assíntota oblíqua.

(D) o gráfico de g pode ter assíntotas verticais.

Solução: Opção (D)

- 19 Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O domínio de uma função racional não pode ser $\mathbb{R}$.

(B) O contradomínio de qualquer função racional é $\mathbb{R}$.

(C) Uma função racional tem sempre uma assíntota horizontal.

(D) Uma função racional pode não ter assíntotas verticais.

Solução: Opção (D)

- 20 Considera a família de funções definidas por $f(x) = \frac{3x - ax^2}{a + 2x}$, $a \in \mathbb{R}$. Qual é o valor de a para o qual a assíntota oblíqua ao gráfico de f é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares?

(A) -1

(B) -2

(C) 2

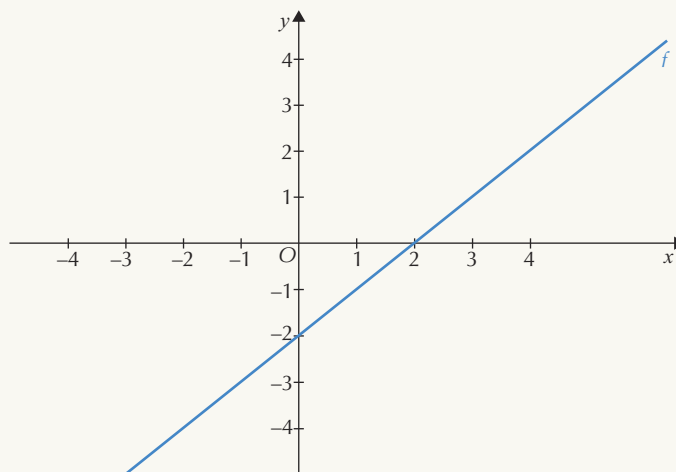
(D) 0

Solução: Opção (B)

Aprende Fazendo

Itens de seleção

- 21 Considera a função afim f representada graficamente na figura.

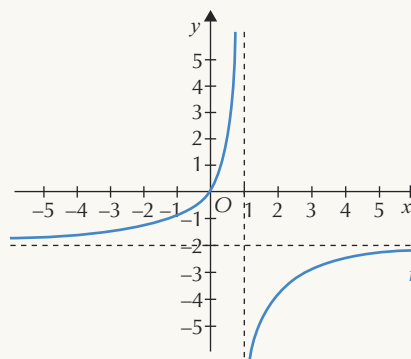


Seja g a função definida por $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{f(x)}$.

- a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
- (A) $g(x) = x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - (B) A função g é negativa no intervalo $]3, +\infty[$.
 - (C) $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
 - (D) A função g é positiva no intervalo $]2, 3[$.
- b) Pode afirmar-se que:
- (A) 2 é um zero de g .
 - (B) a função g tem dois zeros.
 - (C) a função g não tem zeros.
 - (D) a função g tem um único zero.
- c) Relativamente ao gráfico da função g , é correto afirmar-se que:
- (A) admite a reta de equação $x = 2$ como assíntota vertical.
 - (B) tem uma assíntota vertical.
 - (C) tem uma assíntota horizontal.
 - (D) não tem assíntotas horizontais.

Soluções: a) Opção (C) b) Opção (D) c) Opção (D)

- 22 Na figura está representada parte do gráfico de uma função f . As retas de equações $x = 1$ e $y = -2$ são assíntotas ao gráfico de f .



- a) Seja (u_n) uma sucessão de termo geral $u_n = \frac{4n + a}{4n}$, $a \in \mathbb{R}$.

Qual poderá ser o valor de a para o qual $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = +\infty$?

- (A) -2 (B) 0
(C) 1 (D) 2

- b) Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{f(x)}$?

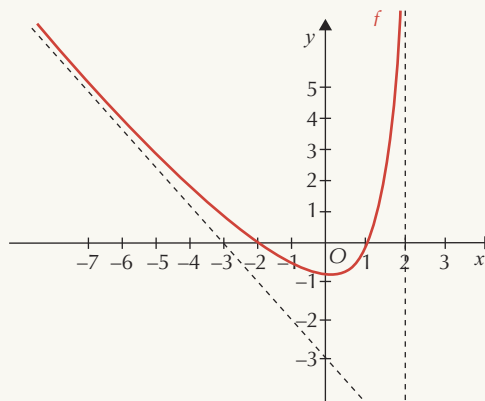
- (A) $-\infty$ (B) 0
(C) $+\infty$ (D) Não existe.

- c) Considera agora a função f^{-1} , inversa da função f . Em relação ao gráfico da função f^{-1} , pode concluir-se que:

- (A) tem uma assíntota oblíqua.
(B) tem duas assíntotas de equações $x = 1$ e $y = -\frac{1}{2}$.
(C) tem duas assíntotas de equações $x = -2$ e $y = 1$.
(D) não tem assíntotas.

Soluções: a) Opção (A) b) Opção (B) c) Opção (C)

- 23 Na figura está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $]-\infty, 2[$ e as assíntotas ao seu gráfico.



- a) Qual das afirmações é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 3] = 0$
(B) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x - 3] = 0$
(C) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x + 3] = 0$
(D) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x + 3] = 0$

- b) Seja g uma função de domínio $]-\infty, 2[$, definida por $g(x) = \frac{x}{f(x)} - 1$. O gráfico de g tem uma assíntota horizontal. Qual das seguintes equações define essa assíntota?

- (A) $y = \frac{2}{3}$ (B) $y = 2$ (C) $y = -\frac{2}{3}$ (D) $y = -2$

Soluções: a) Opção (C) b) Opção (D)

Aprende Fazendo

Itens de seleção

24 Seja f uma função contínua definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sabe-se que:

- f é uma função par;
- f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$;
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

Sejam g e h duas funções definidas por $g(x) = f(x - 1) - 3$ e $h(x) = f(-x)$. Qual das seguintes afirmações é necessariamente falsa?

- (A) O gráfico da função g tem uma assíntota vertical de equação $x = 1$.
- (B) O contradomínio da função g é $]-4, +\infty[$.
- (C) O gráfico da função h tem uma assíntota vertical de equação $x = 0$.
- (D) O contradomínio da função h é $]-\infty, -1[$.

Solução: Opção (D)

25 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Seja g a função definida por $g(x) = -f(x + 2) - 1$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A reta de equação $y = 0$ é uma assíntota ao gráfico de g .
- (B) A reta de equação $x = 0$ é uma assíntota ao gráfico de g .
- (C) A reta de equação $y = -2$ é uma assíntota ao gráfico de g .
- (D) A reta de equação $x = 2$ é uma assíntota ao gráfico de g .

Solução: Opção (C)

26 De uma função f de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x + 1] = 0$ e que o seu gráfico admite uma única assíntota vertical. Considera a função g definida por $g(x) = f(|x|)$.

Então, pode-se concluir que o gráfico da função g :

- (A) não tem assíntotas.
- (B) tem no mínimo duas assíntotas.
- (C) tem no máximo duas assíntotas.
- (D) tem no mínimo três assíntotas.

Solução: Opção (B)

Itens de construção

27 Na figura está representada graficamente a função f .

a) Indica o domínio e o contradomínio de f .

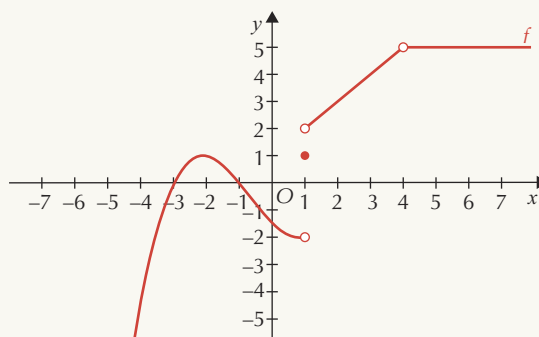
b) Observa o gráfico e indica:

i) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ iv) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

c) O que podes concluir quanto à existência de limite no ponto de abscissa 1? E no ponto de abscissa 4? Justifica.

d) Escreve o termo geral de uma sucessão (x_n) que seja convergente e tal que $f(x_n)$ seja divergente.



Soluções: a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$; $D'_f =]-\infty, 1] \cup]2, 5]$ b) i) 0 ii) 2 iii) $-\infty$ iv) 5 c) Não existe limite no ponto de abscissa 1 e existe limite no ponto de abscissa 4. d) Por exemplo, $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.

28 Seja f a função representada graficamente na figura. Calcula os seguintes limites.

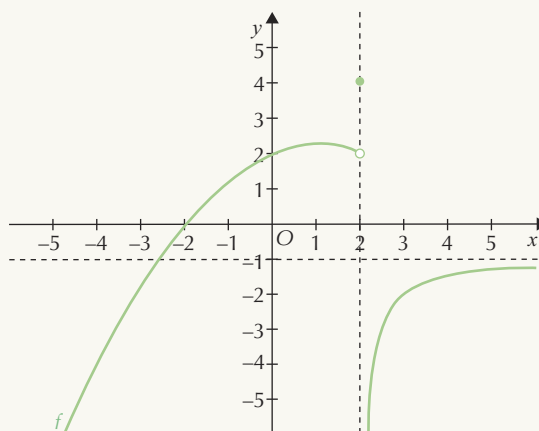
a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]^2$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x)}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$



Soluções: a) 2 b) $+\infty$ c) 0 d) -1 e) $-\infty$

29 Considera a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = \begin{cases} x - x^3 & \text{se } x < 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \\ x^2 + 2x & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

a) Existe $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$?

b) A função h é contínua à esquerda do ponto de abscissa 1?

c) O que podes concluir quanto à continuidade da função h em $x = 1$?

d) Define uma função g de modo que a função $(g + h)(x)$ seja contínua em $x = 0$.

e) Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.

Soluções: a) Não existe limite. b) Sim c) A função h é descontínua em $x = 1$. d) Por exemplo, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ -3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$. e) $+\infty$

Aprende Fazendo

Itens de construção

30 Determina os zeros e estuda o sinal de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - x}$

b) $g(x) = \frac{1 - x^2}{2x^2 + x - 3}$

c) $h(x) = \frac{5}{2x} - \frac{x+4}{2x^2 - x} + \frac{2x+17}{4x-2}$

d) $i(x) = \frac{-3x - x^2}{2 - 2x} \times \frac{x^2 - 1}{x^3 - 9x}$

e) $j(x) = \frac{x-1}{3x^2 - 12} : \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2}$

f) $k(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

Soluções: a) Zeros: $\frac{1}{2}$ e 2; f é positiva em $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]0, \frac{1}{2}[\cup]1, 2[$. b) Zero: -1; g é positiva em $] -\frac{3}{2}, -1[$ e é negativa em $] -\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. c) Zero: -13; h é positiva em $]-\infty, -13[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$ e é negativa em $]-13, 0[$. d) Zero: -1; i é positiva em $]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 3[$. e) Zero: não tem; j é positiva em $]-2, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -2[$. f) Zero: 0; k é positiva em $]0, +\infty[\setminus \{2\}$ e é negativa em $]-\infty, 0[$.

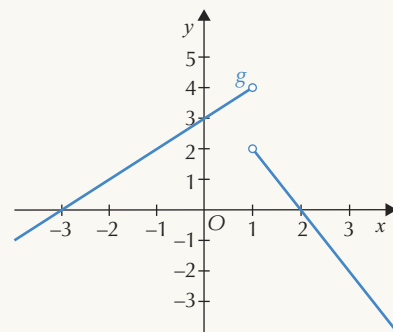
31 Na figura seguinte está parte da representação gráfica de uma função g definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Considera as sucessões (a_n) e (b_n) definidas por $a_n = \frac{n+1}{n}$ e $b_n = \frac{n-1}{n}$.

a) Calcula $\lim g(a_n)$ e $\lim g(b_n)$.

b) Mostra, usando a definição de limite segundo Heine, que não existe $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

c) Define uma sucessão (c_n) tal que $\lim g(c_n) = 0$.



Soluções: a) 2; 4 c) Por exemplo, $c_n = 2 + \frac{1}{n}$.

32 Usando a definição de limite de uma função num ponto segundo Heine, mostra que $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = 3$.

33 Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{3} & \text{se } x < -1 \\ 2 - x & \text{se } x > -1 \end{cases}$ e sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões definidas por $u_n = -1 + \frac{1}{n^2}$ e $v_n = -1 - \frac{1}{n}$.

a) Escreve o termo geral e calcula o limite das sucessões $f(u_n)$ e $f(v_n)$.

b) O que podes concluir acerca de $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$?

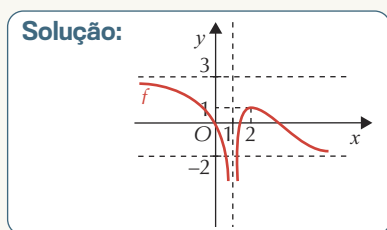
c) Recorrendo à definição de limite segundo Heine, calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Soluções: a) $f(u_n) = 3 - \frac{1}{n^2}$; $f(v_n) = \frac{2n-1}{3n}$; $\lim f(u_n) = 3$, $\lim f(v_n) = \frac{2}{3}$ b) Não existe. c) 2

34 De uma função f , sabe-se que:

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $f(2) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

Faz um esboço de um possível gráfico de f .



35 Sejam f e g duas funções definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 8 - x^3 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{x} - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{se } x < 2 \\ \frac{x+1}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Mostra que as funções f e g não têm limite no ponto de abscissa 2.
 b) Define a função $f + g$.
 c) Mostra que existe $\lim_{x \rightarrow 2} (f + g)(x)$, apesar da conclusão obtida em a).

Solução: b) $(f + g)(x) = \begin{cases} 5 - x^3 + x^2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

36 Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + x^2)$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 5x + 1}{x - 4} \right)^3$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 3x^2 - 1)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 + 3x^2 - 1)$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+x^2} - x)$
 g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{(x-4)^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{16-x^2}$

Soluções: a) $+\infty$ b) 1 c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $\frac{1}{2}$ g) $+\infty$ h) $+\infty$

37 Determina o valor do número real a de forma que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + x}}{x} = 2$.

Solução: 4

 Aprende Fazendo
Itens de construção

38 Mostra que não existem os seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-2)^4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^2 - \frac{x-1}{|1-x|} \right)$

39 Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3-1}{3x-x^3} - \frac{5}{x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^3-6x^2+12x-8}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3-1}{(x-1)^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{x^3-1}{x-x^3} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-4)}}{x-4}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+3)(2x+5)(3x-7)}{2x^3+x^2+1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{4\sqrt{x^4+2}}$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^3-x}{x^2+2} \right)$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$

Soluções: a) $-\frac{1}{4}$ b) -1 c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) 0 f) -1 g) 3 h) $-\frac{1}{4}$ i) -2 j) 0 k) -2

40 Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x - 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 - 3x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 3x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{5x+3}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+5x-1}{2x+1}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+5x-1}{5x^3+x^2-4}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+5}}{\frac{3}{4-x}}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2x+1} \times (x^2 - 7x + 1) \right)$

i) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5}{x^2-1}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{x^2-1}$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{5}{x^2 - 4} - \frac{3}{x - 2} \right)$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x - 5}{1 - x^2}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 6x - 8}{x^2 - 4x + 3}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 4x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x}{x^3 - 4x^2}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x^3}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Soluções: a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $\frac{2}{5}$ e) $-\infty$ f) 0 g) $-\frac{1}{3}$ h) $-\infty$ i) $+\infty$ j) $-\infty$ k) $+\infty$ l) $-\frac{5}{2}$ m) -5 n) 0 o) Não existe. p) $+\infty$ q) Não existe.

41

Para cada valor real de k , $f(x) = \begin{cases} \frac{k^2 - x}{8 - x} & \text{se } x \leq 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{2x + 1} - 3} & \text{se } x > 4 \end{cases}$ define uma função real de domínio $\mathbb{R}$.

a) Estuda a continuidade de f no intervalo $]-\infty, 4[$.

b) Determina o valor de k positivo para o qual a função é contínua em $x = 4$.

Soluções: a) A função é contínua. b) 4

20 AULA DIGITAL

■ Animação

"Resolução do exercício 41"

42

Seja f a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ definida por $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - 1}$.

a) Estuda a continuidade da função f .

b) Define uma função g que seja um prolongamento de f e que seja contínua em $\mathbb{R}$.

Soluções: a) A função é contínua. b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \end{cases}$

43

Determina, caso existam, as assíntotas ao gráfico das funções definidas por cada uma das expressões seguintes.

$$a) f(x) = x + 5 + \frac{x}{9 - x^2}$$

$$b) g(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^2 - 4}$$

$$c) h(x) = x + 1 - \frac{3x}{x - 3}$$

$$d) i(x) = \frac{\sqrt{x + 2}}{2x}$$

$$e) j(x) = \frac{x^2 + 2}{|x|}$$

$$f) k(x) = \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1}$$

Soluções: a) $x = -3$, $x = 3$ e $y = x + 5$ b) $x = -2$ e $y = x - 5$ c) $x = 3$ e $y = x - 2$ d) $x = 0$ e $y = 0$ e) $x = 0$, $y = x$ e $y = -x$ f) $y = 0$

Aprende Fazendo

Itens de construção

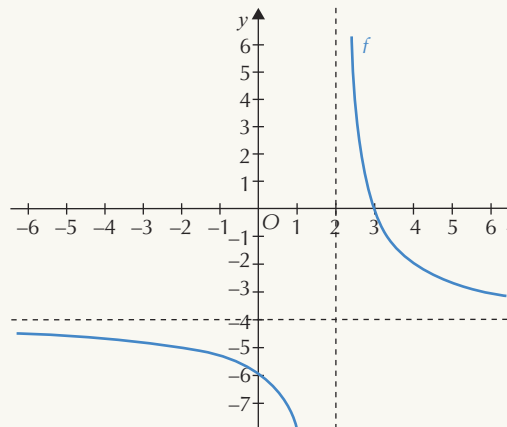
- 44 Seja g uma função real de variável real definida por:

$$g(x) = \frac{3+x}{2-x}$$

- a) Determina o domínio e os zeros de g .
- b) Escreve $g(x)$ na forma $b + \frac{a}{x-c}$, indicando os valores de a , b e c .
- c) Determina as assíntotas ao gráfico de g .
- d) Determina o contradomínio de g .
- e) A função é ímpar? Justifica analiticamente.
- f) Escreve as equações das assíntotas ao gráfico da função h definida por $h(x) = g(x+3) + 1$.

Soluções: a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; -3 b) $g(x) = -1 + \frac{5}{2-x}$; $a = -5$, $b = -1$ e $c = 2$ c) $x = 2$ e $y = -1$ d) $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e) Não
f) $x = -1$ e $y = 0$

- 45 Na figura está representada parte do gráfico de uma função f .



- a) Determina o domínio e o contradomínio de f .
- b) Escreve as equações das assíntotas ao gráfico de f .
- c) Define a função através de uma expressão analítica.
- d) Seja h a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = |f(x) + 2|$. Qual é o contradomínio de h ?

Soluções: a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ b) $x = 2$ e $y = -4$ c) $f(x) = -4 + \frac{4}{x-2}$ d) $D'_h = [0, +\infty[$

- 46 Considera a família de funções definida em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ \frac{1 + ax}{ax - 1} & \text{se } x > 2 \end{cases}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- a) Determina a de modo que exista $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
 b) Para o valor de a encontrado na alínea anterior, define analiticamente um prolongamento, h , de f a $\mathbb{R}$ que seja uma função contínua.
 c) Mostra que o gráfico de qualquer elemento da família tem uma assíntota horizontal de equação $y = 1$.

Soluções: a) 1 b) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \\ \frac{1+x}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

- 47 Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x - x^2}{x + 2}$.

- a) Determina as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.
 b) Resolve a condição $f(x) < 1$, apresentando o resultado sob a forma de intervalos de números reais.
 c) Escreve $f(x)$ na forma $ax + b + \frac{c}{x - d}$, indicando os valores de a, b, c e d .
 d) Indica as equações das assíntotas ao gráfico de f .

Soluções: a) (0, 0) e (1, 0) b) $]-2, +\infty[$ c) $f(x) = -x + 3 - \frac{6}{x+2}$; $a = -1, b = 3, c = -6$ e $d = -2$ d) $x = -2$ e $y = -x + 3$

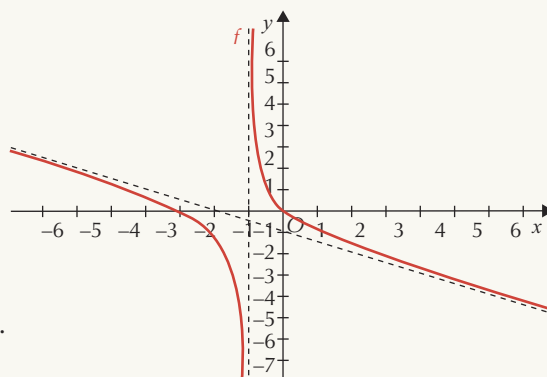
- 48 Na figura está representada graficamente a função f e as duas assíntotas ao seu gráfico.

- a) Calcula o valor dos limites seguintes.

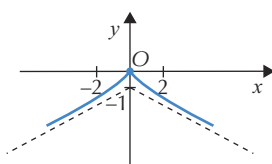
i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} |f(x)|$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right)$

- b) Seja g uma função definida por $g(x) = f(|x|)$.

- i) Esboça o gráfico de g .
 ii) Estuda a continuidade da função g .
 iii) Indica as equações das assíntotas ao gráfico de g .
 iv) Indica o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.



Soluções: a) i) $-\frac{1}{2}$ ii) $+\infty$ iii) -1 b) i)
 $y = \frac{1}{2}x - 1$ iv) $-\infty$



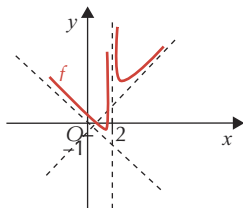
ii) g é contínua em $\mathbb{R}$. iii) $y = -\frac{1}{2}x - 1$ e

Aprende Fazendo

Itens de construção

- 49 Seja f uma função par de domínio $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Esboça um possível gráfico para f , sabendo que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1] = 0$.

Solução:



- 50 O volume V de vendas diárias, em milhares de unidades monetárias, de um determinado artigo, t dias após o início de uma campanha publicitária, pode ser traduzido pela expressão:

$$V(t) = 1 + \frac{1}{t+1} - \frac{6}{(t+1)^2}$$

- Simplifica a expressão que define V .
- Calcula o volume de vendas 30 dias após o início da campanha.
- Determina o número de dias em que o volume de vendas não ultrapassou as 1000 unidades.
- Com o decorrer do tempo, o que acontecerá ao volume de vendas?

Soluções: a) $V(t) = \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2}$ b) 1026 u.m. c) Nos primeiros 4 dias. d) O volume de vendas tende a estabilizar nas 1000 unidades.

- 51 A família de funções f é definida por $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x - a}$, $a \in \mathbb{R}$.

- Designa por g a função da família em que $a = 1$.
 - Estuda a continuidade da função g no seu domínio.
 - Mostra que o gráfico de f admite uma assíntota não vertical e escreve a sua equação.
- Mostra que nenhum elemento da família tem domínio $\mathbb{R}$.
- Para que valores de a o gráfico de f não admite assíntotas verticais?

Soluções: a) i) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. ii) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ c) $a = -2 \vee a = 8$

- 52 Para um certo valor de a , considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{ax^5 + 3x^4 + 8x}{3x^4 + 4}$, $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que existe um valor de b para o qual o gráfico admite uma assíntota oblíqua de equação $y = 2x + b$. Determina os valores de a e b .

Solução: $a = 6$ e $b = 1$

53 Considera a função real de variável real g definida por $g(x) = \frac{x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 2}$.

- a) Determina o domínio de g , sabendo que -1 é zero do denominador.
- b) Comenta a afirmação: "A função g admite três zeros".
- c) Simplifica a expressão que define g .
- d) Determina as equações das assíntotas ao gráfico de g .

Soluções: a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ b) Afirmação falsa. c) $g(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2}$ d) $y = x + 1$

54 Três torneiras podem ser utilizadas para encher um determinado recipiente. Com uma delas consegue-se encher o recipiente em 8 horas, com uma segunda em 4 horas e com a terceira em t horas.

- a) (*) Se as três torneiras funcionarem simultaneamente, prova que a expressão do número de horas h necessárias para que o recipiente fique cheio é dada por $h(t) = \frac{8t}{3t + 8}$, $t > 0$.
- b) Determina t de modo que o tempo necessário ao enchimento do recipiente seja de 1 h e 30 min.

(*) grau de dificuldade elevado

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Solução: b) 3 h 26 min

55 Calcula, caso existam, os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação.

a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{|x - 4|}{x^2 - 16}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{\sqrt{x + 9} - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{3 - |x + 3|}$

Soluções: a) $-\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 1

56 Aplicando uma mudança de variável, calcula os seguintes limites.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x - 8}{\sqrt[3]{x} - 2}$

Soluções: a) 2 b) 12

57 Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2x] = -1$

Mostra que o gráfico da função g definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = \frac{f(x) - 1}{x}$ admite duas assíntotas de equações $x = 0$ e $y = -2$.

UNIDADE 5

Derivadas de funções reais de variável real e aplicações

20 AULA DIGITAL

■ Resolução

PowerPoint: Todos os exercícios de "Derivadas de funções reais de variável real e aplicações"

O cálculo diferencial, no qual se inclui o tema das derivadas, constitui, em conjunto com o cálculo integral, um dos dois principais ramos da análise infinitesimal.

Apesar de o desenvolvimento do cálculo diferencial se ter iniciado na Antiguidade, foram os matemáticos Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) que ficaram conhecidos como os seus fundadores.

Ao pretenderem dar uma definição rigorosa (analítica) da noção de velocidade, Newton e Leibniz introduziram a definição matemática de derivada, que é a noção fundamental do cálculo diferencial.

5.1. Taxa média de variação de uma função e derivada de uma função num ponto

- 54 Seja $d(t) = 3t^2 + t$ a distância, em metros, percorrida em t segundos por um determinado móvel. Calcula a velocidade média do móvel nos intervalos:

- a) $[2, 3]$
b) $[2; 2, 5]$
c) $[2, x]$ (com $x > 2$)

Observa o seguinte exemplo.

Um jogador de ténis dá uma forte raquetada numa bola elevando-a no ar. A altura da bola, em metros, em função do tempo t , em segundos, é descrita pela equação $a(t) = 25t - 5t^2$.

Determinemos a taxa média de variação da altura da bola nos intervalos $[1; 2, 5]$, $[1, 2]$, $[1; 1, 5]$ e $[1; 1, 1]$.

$$\text{t.v.m.}_{[1; 2, 5]} = \frac{a(2,5) - a(1)}{2,5 - 1} = \frac{31,25 - 20}{1,5} = \frac{11,25}{1,5} = 7,5 \text{ m/s}$$

$$\text{t.v.m.}_{[1, 2]} = \frac{a(2) - a(1)}{2 - 1} = \frac{30 - 20}{1} = 10 \text{ m/s}$$

$$\text{t.v.m.}_{[1; 1, 5]} = \frac{a(1,5) - a(1)}{1,5 - 1} = \frac{26,25 - 20}{0,5} = \frac{6,25}{0,5} = 12,5 \text{ m/s}$$

$$\text{t.v.m.}_{[1; 1, 1]} = \frac{a(1,1) - a(1)}{1,1 - 1} = \frac{21,45 - 20}{0,1} = \frac{1,45}{0,1} = 14,5 \text{ m/s}$$

Se quisermos saber a taxa de variação da altura da bola num determinado instante, por exemplo em $t = 1$, podemos calcular valores da taxa média de variação em intervalos do tipo $[1, x]$, com x a tender para 1, isto é, intervalos de amplitude cada vez menores e tendo sempre 1 como um dos extremos.

PROFESSOR

Soluções

54.

- a) 16 m/s
b) 14,5 m/s
c) $3x + 7$

Assim, calcula-se o limite da taxa média de variação $\frac{a(x) - a(1)}{x - 1}$, quando x tende para 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x) - a(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{25x - 5x^2 - 20}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(-5x + 20)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (-5x + 20) = 15\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	-5	25	-20
1		-5	20
	-5	20	0 = R

Logo, $-5x^2 + 25x - 20 = (x - 1)(-5x + 20)$.

A taxa de variação da altura da bola no instante $t = 1$ é 15 m/s.

No exemplo anterior, trabalhamos os conceitos de taxa média de variação de uma função num intervalo e taxa instantânea de variação num ponto. Estes dois conceitos podem ser definidos da seguinte forma:

Definição

Dada uma função real de variável real f e dados dois pontos a e b do respetivo domínio, designa-se por **taxa média de variação de f entre a e b** o quociente $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

A razão incremental $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ representa a taxa média de variação de f no intervalo $[a, b]$.

Na física, quando a variável dependente é a distância percorrida por um determinado objeto e a variável independente é o tempo, a taxa média de variação num intervalo corresponde, em linguagem corrente, à **velocidade média** nesse intervalo.

Definição

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto x_0 do respetivo domínio, designa-se por **taxa instantânea de variação de f no ponto x_0** o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, quando este existe e é finito. Neste caso, designa-se por **derivada de f no ponto x_0** e representa-se por $f'(x_0)$.

A função f diz-se **derivável** ou **diferenciável** no ponto x_0 .

A derivada em x_0 mede a rapidez de variação da variável dependente quando $x = x_0$.

Na física, quando o movimento é linear e a variável dependente é o espaço percorrido e a variável independente é o tempo, a taxa de variação em x_0 corresponde, em linguagem corrente, à **velocidade instantânea** no instante x_0 .

Uma outra expressão para a **derivada de uma função f num ponto x_0** obtém-se da seguinte forma: se ao limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ aplicarmos a mudança de variável $x - x_0 = h$, vem que:

$$x = x_0 + h \text{ e } x \rightarrow x_0 \Rightarrow h \rightarrow 0$$

Logo:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



FRVR11_5.1
FRVR11_5.3
FRVR11_5.4

20 AULA DIGITAL

Simulador

GeoGebra: "Taxa de variação instantânea"

55 Considera a função real de variável real f , definida por $f(x) = 9x$. Prova que a taxa média de variação de f entre a e b é a mesma, quaisquer que sejam os valores de a e de b .

56 Indica, justificando, o valor lógico das seguintes proposições.

(I) Se uma função é crescente em $[a, b]$, então a taxa média de variação nesse intervalo é positiva.

(II) Se a taxa média de variação de uma função num determinado intervalo é positiva, então a função é crescente nesse intervalo.

57 Seja f uma função tal que a sua derivada no ponto -2 é 5.

Calcula o valor de:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{f(-2 + h) - f(-2)}$

PROFESSOR

Soluções

56.

(I) Proposição verdadeira.

(II) Proposição falsa.

57.

a) $-\frac{5}{4}$

b) $\frac{3}{5}$

- 58 Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determina:

- a) $f'(0)$, onde $f(x) = x^2 + 6x$.
 b) $f'(1)$, onde $f(x) = x^3 - x$.
 c) $f'(2)$, onde $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.
 d) $f'(3)$, onde $f(x) = \sqrt{x+1}$.

- 59 Do dia 2 ao dia 20 de setembro, a cotação, em euros, das ações de uma determinada empresa na Bolsa de Valores de Lisboa, foi dada pela função C , definida por $C(t) = -0,005t^3 + 0,225t^2 - 3t + 15$, em que t representa o dia a que se refere a cotação. Calcula:

- a) a taxa média de variação da função C no período indicado e interpreta o resultado obtido no contexto do problema;
 b) a taxa de variação da função C em $t = 15$ e interpreta o resultado obtido no contexto do problema.

PROFESSOR

Soluções

58.

- a) 6
 b) 2
 c) -4
 d) $\frac{1}{4}$

59.

- a) -0,27; a cotação das ações diminui em média 0,27 euros por dia.
 b) 0,375; aos 15 dias do mês de setembro a cotação das ações estava a aumentar à taxa de 0,375 euros por dia.

Exercícios resolvidos

1. Considera $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Calcula $f'(2)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 5 - (2^2 - 3 \times 2 + 5)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 6 - 3h + 5 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+1) = 1 \end{aligned}$$

Outro processo

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 5 - (2^2 - 3 \times 2 + 5)}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 \end{aligned}$$

Nota que poderás usar qualquer um dos limites $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. No entanto, a depender da função a derivar, um dos limites poderá ser mais simples de aplicar.

2. No Ministério da Saúde, calculou-se que, após o aparecimento de uma determinada doença contagiosa, o número de pessoas infetadas vem expresso pela função $P(t) = 33t^2 - t^3$, sendo t o número de dias a partir do primeiro caso registado.
- a) Calcula a taxa média de variação desta função nos primeiros cinco dias e interpreta o resultado obtido no contexto do problema.
- b) Calcula a taxa de variação desta função em $t = 10$ e interpreta o resultado obtido no contexto do problema.

Sugestão de resolução

$$\text{a) t.m.v.}_{[0, 5]} = \frac{P(5) - P(0)}{5 - 0} = \frac{33 \times 5^2 - 5^3 - 0}{5} = 140$$

Isto significa que, nos primeiros cinco dias, o número de pessoas infetadas aumentou, em média, 140 pessoas por dia.

$$\begin{aligned} \text{b) } P'(10) &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{P(x) - P(10)}{x - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{33x^2 - x^3 - (33 \times 10^2 - 10^3)}{x - 10} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{33x^2 - x^3 - 2300}{x - 10} = \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x-10)(-x^2 + 23x + 230)}{x - 10} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} (-x^2 + 23x + 230) = 360 \end{aligned}$$

Isto significa que, 10 dias após o aparecimento do primeiro caso, o número de pessoas infetadas estava a aumentar a uma taxa de 360 pessoas por dia.

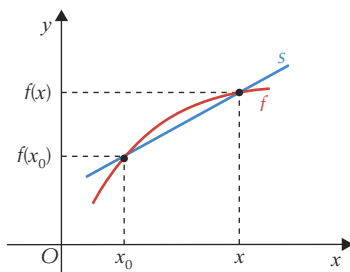
Cálculo auxiliar

	-1	33	0	-2300
10		-10	230	2300
	-1	23	230	0 = R

Logo, $-x^3 + 33x^2 - 2300 = (x-10)(-x^2 + 23x + 230)$.

5.2. Interpretação geométrica da taxa média de variação e da derivada de uma função num ponto

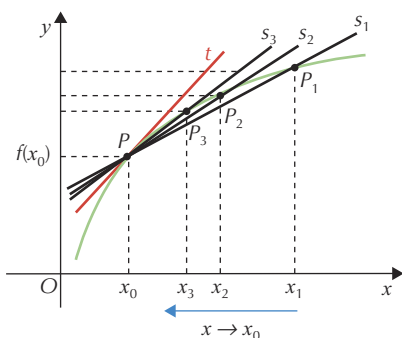
Considera a função f , diferenciável no ponto x_0 , e a reta secante, s , ao gráfico de f que passa nos pontos de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$.



O declive da reta s é $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e, como já viste, este quociente é igual à taxa média de variação da função f em $[x_0, x]$.

Dada uma função real de variável real f e dados dois pontos a e b do respetivo domínio, tem-se que o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é igual à taxa média de variação de f entre a e b .

Consideremos, agora, os pontos $P_1, P_2, P_3, \dots$, pertencentes ao gráfico de f e cujas abcissas estão cada vez mais próximas de x_0 . Para cada ponto P_i , podemos traçar a reta PP_i , secante ao gráfico de f . As sucessivas retas secantes tendem para uma posição limite que é a reta t . Esta reta é, por definição, a tangente ao gráfico da função f no ponto P .



O declive da reta t , tangente ao gráfico de f no ponto P , é o limite dos declives das retas secantes PP_i , ou seja:

$$m_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definição

Dada uma função real de variável real f , diferenciável em $x_0 \in D_f$, e dado um referencial ortonormado, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$ é a reta de declive $f'(x_0)$ que passa por P_0 .



FRVR11_5.2
FRVR11_5.5

20 AULA DIGITAL

Simuladores (GeoGebra):

- “Interpretação geométrica da taxa média de variação”
- “Interpretação geométrica da taxa de variação”

Recorda

Considerando no plano os pontos de coordenadas $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, temos que:

- $\overline{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
- $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

60 Considera a função real de variável real f definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

- Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determina $f'(3)$.
- Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3.
- Escreve uma equação da normal ao gráfico de f no ponto de abcissa 3.

Nota

Chama-se **normal a uma curva** à reta que é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência.

PROFESSOR

Soluções

60.

a) $-\frac{1}{16}$

b) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{7}{16}$

c) $y = 16x - \frac{191}{4}$

- 61 Sabe-se que a bissetriz dos quadrantes ímpares é tangente ao gráfico de uma determinada função f no ponto de abscissa 4.

Então, podemos afirmar

que $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ é:

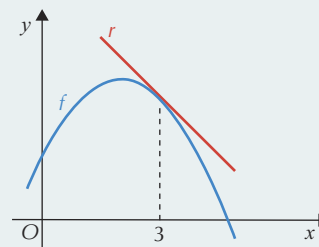
- (A) 0
(B) 1
(C) 4
(D) -1

- 62 Mostra, recorrendo a processos analíticos, que a reta tangente ao gráfico da função f definida por $f(x) = x^3 - 3x + 3$, no ponto de abscissa 1, é uma reta horizontal.

Exercícios resolvidos

1. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico de uma função f diferenciável em 3;
- uma reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3.



O valor de $f'(3)$, derivada da função f no ponto 3, pode ser igual a:

- (A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{f(3)}$ (D) 1

Adaptado de Banco de Itens, GAVE

Sugestão de resolução

Sendo a reta r tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 3, sabes que o declive desta reta é igual ao valor de $f'(3)$. Observamos no gráfico que a reta tem declive negativo, logo, o valor de $f'(3)$ é negativo.

Ficam, assim, excluídas as opções (B), (D) e (C), já que $f'(3) > 0$.

Assim, a resposta correta é a (A).

2. Seja f uma função real de variável real tal que:

$$f(2) = 3 \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5$$

- a) Indica, caso exista, o valor de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
b) Escreve uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.
c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{-x^2 + 5x - 6}$.

Sugestão de resolução

- a) Sabemos que $2 \in D_f$, logo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - f(2)) + f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times (x - 2) \right) + 3 = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) + 3 = 5 \times 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

- b) Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

Sabemos que o declive da reta t é o valor da derivada de f em $x = 2$, isto é,

$$m = f'(2) \text{ e, como } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = 5, \text{ então } m = 5.$$

Assim, a equação reduzida da reta t é $y = 5x + b$.

Como o ponto de coordenadas $(2, f(2)) = (2, 3)$ pertence à reta t , vem que:

$$3 = 5 \times 2 + b \Leftrightarrow 3 = 10 + b \Leftrightarrow -7 = b$$

Concluimos, assim, que $y = 5x - 7$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

PROFESSOR

Solução

61. Opção (B)

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{-x^2 + 5x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)(-x+3)} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{-x+3} \right) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{-x+3} = \\
 &= f'(2) \times \frac{1}{-2+3} = \\
 &= 5 \times 1 = \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

2	-1	5	-6
		-2	6
	-1	3	0 = R

Logo, $-x^2 + 5x - 6 = (x-2)(-x+3)$.

5.3. Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto

Já sabes que, se uma função f indica a distância percorrida por um móvel, que se desloca num percurso linear, em função do tempo, a taxa média de variação de f , no intervalo $[a, b]$, é a velocidade média do móvel entre os instantes a e b e a derivada de f em a é a velocidade do móvel em a . Esta interpretação é uma das aplicações mais importantes destes dois conceitos a contextos da vida real.

Consideremos o seguinte exercício resolvido.

Exercício resolvido

- Um ponto P move-se numa reta de tal forma que, em cada instante t (em segundos), a distância d (em centímetros) à origem O é dada pela expressão $d(t) = t^2 - 19t + 60$.
 - No instante inicial, qual é a distância do ponto P à origem?
 - Determina a velocidade média do ponto P nos três primeiros segundos.
 - Determina a velocidade no instante $t = 4$ e indica a distância à origem nesse instante.

Adaptado de *Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 11.º ano

Sugestão de resolução

a) $d(0) = 0^2 - 19 \times 0 + 60 = 60$

No instante inicial, a distância do ponto P à origem O é 60 centímetros.

b) $t.m.v._{[0, 3]} = \frac{d(3) - d(0)}{3 - 0} = \frac{12 - 60}{3} = -16$

Cálculo auxiliar

$$d(3) = 3^2 - 19 \times 3 + 60 = 12$$

A velocidade média do ponto P nos primeiros três segundos é -16 cm/s.

(continua)

Exercício resolvido

(continuação)

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned}
 \text{c) } d'(4) &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{d(t) - d(4)}{t - 4} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{d(t) - d(4)}{t - 4} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 19t + 60 - 0}{t - 4} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{t^2 - 19t + 60}{t - 4} = \\
 &\left(\frac{0}{0}\right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 4} \frac{(t - 15)(t - 4)}{t - 4} = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 4} (t - 15) = -11
 \end{aligned}$$

A velocidade no instante $t = 4$ é -11 cm/s e, nesse instante, a distância do ponto P à origem O é 0 centímetros.

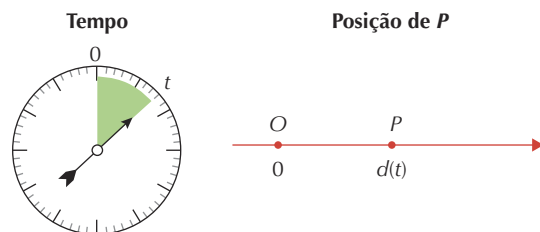
Cálculos auxiliares

$$d(4) = 4^2 - 19 \times 4 + 60 = 0$$

1	-19	60
4	4	-60
1	-15	0 = R

$$\text{Logo, } t^2 - 19t + 60 = (t - 15)(t - 4).$$

A função $d: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida no exercício anterior, chama-se **função posição de um ponto P que se desloca na reta r durante um intervalo de tempo I** , uma vez que a cada instante $t \in I$ faz corresponder a abscissa do ponto de r que representa a posição que P ocupa, t unidades de tempo depois do instante inicial se $t > 0$, ou $|t|$ unidades de tempo antes do instante inicial, se $t < 0$.



Sejam p a função posição de um ponto P que se desloca na reta r durante um intervalo de tempo I e t_1 e t_2 dois instantes de I , então a **velocidade média de P no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$** é a taxa média de variação de p entre t_1 e t_2 :

$$\frac{p(t_2) - p(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Para $t \in I$, a **velocidade instantânea de P no instante t** é a derivada de p em t , $p'(t)$, caso exista.

Nota

Se $p(t)$ é medida em centímetros e t é medido em segundos, então a unidade da velocidade é centímetros por segundo. Da mesma forma, se $p(t)$ é medida em quilómetros e t é medido em horas, então a unidade da velocidade é quilómetros por hora, isto é, a unidade da velocidade é a unidade de $p(t)$ por unidade de t .

APRENDE FAZENDO
Págs. 122, 123 e 127
Exercícios 1, 3, 6, 8, 9 e 22

CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES
Págs. 55 e 56
Exercícios 16, 17 e 18

5.4. Diferenciabilidade e continuidade num ponto

A continuidade de uma função num ponto e a existência de derivada da função nesse ponto estão relacionadas entre si. Vejamos como se estabelece esta relação.

Teorema

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto a do respetivo domínio, se f é diferenciável em a , então f é contínua em a .

Demonstração

Suponhamos que f é diferenciável em $x = a$. Pretendemos provar que a função é contínua nesse ponto, ou seja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Tem-se:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a) + f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) + f(a) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \right] + \lim_{x \rightarrow a} f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + f(a) = \\ &= f'(a) \times 0 + f(a) = f(a)\end{aligned}$$

Logo, f é contínua no ponto $x = a$.

Notas

- O recíproco deste teorema não é verdadeiro. Uma função pode ser contínua num ponto e não ser diferenciável nesse ponto.

Exemplo

Seja $f(x) = |x|$.

Sabemos que f é contínua em $x = 0$, pois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$.

Averiguemos se é diferenciável em zero:

$$\bullet f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

Determinemos os limites laterais:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Uma vez que os limites laterais são diferentes, concluímos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ não existe, logo não existe $f'(0)$. Esta função é, assim, contínua num ponto e não é diferenciável nesse ponto.

- Se uma função não é contínua num ponto a , então não é diferenciável em a . Repara que esta nota resulta da implicação contrarrecíproca $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$.



FRVR11_7.4

20 AULA DIGITAL

Simulador

GeoGebra: "Derivabilidade e continuidade"

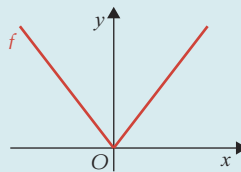
- 63 Considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 5 & \text{se } x \geq 1 \\ 3x + 3 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

a) Aplicando a definição de derivada de uma função num ponto, determina $f'(1)$.

b) Podes concluir, utilizando a alínea anterior, que a função f é contínua no ponto de abscissa 1? Justifica.

- 64 Prova, recorrendo a processos analíticos, que a função g definida por $g(x) = \sqrt{|x|}$ é contínua em 0, mas não admite derivada nesse ponto.



PROFESSOR

Soluções

63.

a) 3

b) Sim, pois f é diferenciável em 1.



20 AULA DIGITAL

■ Simulador

GeoGebra: "Função derivada"

5.5. Função derivada

Consideremos o exercício resolvido anteriormente, em que um ponto P se move numa reta de tal forma que, em cada instante t (em segundos), a distância d (em centímetros) à origem O é dada pela expressão $d(t) = t^2 - 19t + 60$.

Já determinaste a velocidade no instante $t = 4$, isto é, $d'(4)$.

Se pretendêssemos determinar a velocidade no instante $t = t_0$, isto é, $d'(t_0)$, poderíamos fazê-lo aplicando qualquer uma das expressões da derivada de uma função num ponto:

$$d'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{d(t) - d(t_0)}{t - t_0} \quad \text{ou} \quad d'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$$

Vamos utilizar a segunda expressão:

$$\begin{aligned} d'(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(t_0 + h)^2 - 19(t_0 + h) + 60 - (t_0^2 - 19t_0 + 60)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_0^2 + 2t_0h + h^2 - 19t_0 - 19h + 60 - t_0^2 + 19t_0 - 60}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2t_0h + h^2 - 19h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2t_0 + h - 19)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2t_0 + h - 19) = \\ &= 2t_0 - 19 \end{aligned}$$

A expressão $d'(t_0) = 2t_0 - 19$ permite calcular a derivada em qualquer ponto t_0 do domínio.

Repara que, a partir desta expressão, rapidamente calcularíamos a velocidade, por exemplo, em $t = 4$:

$$d'(4) = 2 \times 4 - 19 = -11$$

Fica assim definida uma nova função, d' , a que chamamos função derivada de d .

Definição

Dada uma função real de variável real f , designa-se por **função derivada de f** a função de domínio $D_{f'} = \{x \in D_f : f \text{ é diferenciável em } x\}$ que a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$.

Uma função real de variável real diz-se **diferenciável num conjunto A** quando é diferenciável em todos os pontos de A .

65 Um projétil é lançado de baixo para cima. Admite que a sua altura ao solo, h , em metros, t segundos depois de ser lançado, é dada pela expressão $h(t) = 20t - t^2$.

Determina:

- a) a velocidade inicial do projétil;
- b) a velocidade no momento em que o projétil atinge o solo;
- c) a expressão que dá a velocidade em cada instante t .

PROFESSOR

Soluções

65.

- a) 20 m/s
- b) -20 m/s
- c) $h'(t) = 20 - 2t$

5.6. Regras de derivação

Para determinar a função derivada, será muito útil recorrermos a algumas regras.

Apresentam-se em seguida as regras elementares de derivação, que resultam das propriedades operatórias dos limites.

1. Derivada da função constante

Considera a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto k$$

Seja $x_0 \in D_f$, então a derivada desta função em x_0 é:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k - k}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ou seja, a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua função derivada é:

$$\begin{aligned} f': \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Exemplos

1. $(2)' = 0$
2. $(\pi)' = 0$
3. $(\sqrt{7})' = 0$

2. Derivada da função identidade

Considera a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto x$$

Seja $x_0 \in D_f$, então:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ou seja, a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua função derivada é:

$$\begin{aligned} f': \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 \end{aligned}$$

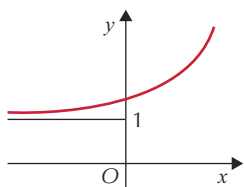


FRVR11_7.5

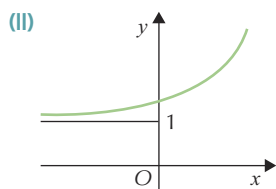
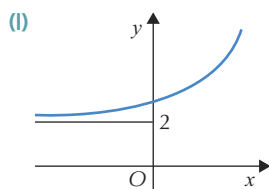
- 66 Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x$ e $g(x) = x + \pi$.
Determina uma expressão da função derivada de:

- a) f
b) g
c) $f + g$

- 67 Na figura está parte da representação gráfica da derivada de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.



Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função derivada da função g , onde $g(x) = f(x) + 1$?



Justifica a tua resposta.

PROFESSOR

Soluções

66.
a) $f'(x) = 1$
b) $g'(x) = 1$
c) $(f + g)'(x) = 2$
67. Figura (II)

3. Derivada da função soma

Sejam f e g duas funções diferenciáveis num conjunto D , a função $(f + g)$ também é diferenciável em D e tem-se $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, $\forall a \in D$.

Demonstração

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) + g(x) - g(a)}{x - a} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\&= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

De um modo geral:

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(a) = f_1'(a) + f_2'(a) + \dots + f_n'(a)$$

Exemplos

1. $(x + 5)' = (x)' + (5)' = 1 + 0 = 1$
2. $(3x)' = (x + x + x)' = (x)' + (x)' + (x)' = 1 + 1 + 1 = 3$

4. Derivada de um produto de uma constante por uma função

Seja f uma função diferenciável num conjunto D , então a função kf também é diferenciável em D e tem-se $(kf)'(a) = kf'(a)$, $\forall a \in D$.

Demonstração

$$\begin{aligned}(k \times f)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(kf)(x) - (kf)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{kf(x) - kf(a)}{x - a} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{k(f(x) - f(a))}{x - a} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \left(k \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \\&= k \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\&= kf'(a)\end{aligned}$$

Exemplos

1. $(5x)' = 5(x)' = 5 \times 1 = 5$
2. $(\sqrt{2}x)' = \sqrt{2}(x)' = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$
3. $\left(\frac{-2x + 10}{3}\right)' = \left[\frac{1}{3}(-2x + 10)\right]' = \frac{1}{3}(-2x + 10)' = \frac{1}{3} \times (-2) = -\frac{2}{3}$

5. Derivada da função produto

Sejam f e g duas funções diferenciáveis num conjunto D , então a função $(f \times g)$ também é diferenciável em D e tem-se $(f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$.

Demonstração

$$\begin{aligned}(f \times g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \times g)(x) - (f \times g)(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =\end{aligned}$$

Subtraindo e adicionando $f(x)g(a)$ ao numerador, vem que:

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] + \lim_{x \rightarrow a} \left[g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \\ &= f(a) \times g'(a) + g(a) \times f'(a)\end{aligned}$$

Exemplos

$$1. (2x \times x)' = (2x)' \times x + 2x \times (x)' = 2 \times x + 2x \times 1 = 2x + 2x = 4x$$

$$2. (x^2)' = (x \times x)' = x' \times x + x \times x' = 1 \times x + x \times 1 = x + x = 2x$$

6. Derivada da função quociente

Sejam f e g duas funções diferenciáveis num conjunto D . Se para todo o número real $a \in D$, $g(a) \neq 0$, então a função $\left(\frac{f}{g}\right)$ também é diferenciável em D . Prova-se que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - g'(a) \times f(a)}{g^2(a)}$$

Exemplos

$$1. \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \times x - 1 \times x'}{x^2} = \frac{0 - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$2. \left(\frac{5x}{x-1}\right)' = \frac{(5x)'(x-1) - (x-1)'(5x)}{(x-1)^2} = \frac{5(x-1) - 5x}{(x-1)^2} = \frac{5x - 5 - 5x}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

$$\begin{aligned}3. \left(\frac{2-4x}{1-3x}\right)' &= \frac{(2-4x)'(1-3x) - (1-3x)'(2-4x)}{(1-3x)^2} = \frac{-4(1-3x) - (-3) \times (2-4x)}{(1-3x)^2} = \\ &= \frac{-4(1-3x) + 3 \times (2-4x)}{(1-3x)^2} = \\ &= \frac{-4 + 12x + 6 - 12x}{(1-3x)^2} = \\ &= \frac{2}{(1-3x)^2}\end{aligned}$$


 FRVR11_7.6
FRVR11_7.7

68. Sejam f e g as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x$ e $g(x) = x + 3\pi$.

- Calcula $(f \times g)'(5)$.
- Determina uma expressão da função derivada de:
 - $f \times g$
 - $\frac{g}{f}$

69. Sejam f e g duas funções tais que $f(2) = 4$, $f'(2) = -2$, $g(2) = -3$ e $g'(2) = 1$. Determina o valor das seguintes expressões.

- $(f + g)'(2)$
- $(5f)'(2)$
- $(f \times g)'(2)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(2)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$
- $\left(\frac{1}{f+g}\right)'(2)$
- $(g \times g)'(2)$
- $\left(\frac{f}{f+g}\right)'(2)$

PROFESSOR

Soluções

68.

- $10 + 3\pi$
- i) $(f \times g)'(x) = 2x + 3\pi$
- ii) $\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = -\frac{3\pi}{x^3}$

69.

- 1
- 10
- 10
- $\frac{1}{8}$
- $\frac{2}{9}$
- 1
- 6
- 2



FRVR11_7.9

7. Derivada das funções de referência definidas por $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}, \sqrt{x}$ e constantes

Já provámos, por definição, que $(x)' = 1$ e $(k)' = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Função derivada de $f(x) = x^2$

Seja $a \in D_f$, então:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a \end{aligned}$$

Ou seja, a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua função derivada é:

$$f': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x$$

- $(x^2)' = 2x$

Função derivada de $g(x) = x^3$

Seja $a \in D_g$, então:

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{0}{0}\right)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = \\ &= 3a^2 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	$-a^3$
a		a	a^2	a^3
	1	a	a^2	$0 = R$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

Ou seja, a função g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua função derivada é:

$$g': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x^2$$

- $(x^3)' = 3x^2$

Função derivada de $h(x) = \frac{1}{x}$

Seja $a \in D_h$, então:

$$\begin{aligned} h'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a - x}{ax}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a - x}{ax(x - a)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{a - x}{(x - a)ax} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(x - a)}{(x - a)ax} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{ax} = -\frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Ou seja, a função g é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e a sua função derivada é:

$$h': \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$$

- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

70. Calcula a abcissa do ponto do gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - x - 2$ tal que a reta tangente ao gráfico nesse ponto tem inclinação 60° .

71. Calcula a inclinação da reta tangente ao gráfico da função dada por $f(x) = x^3 - x^2$ no ponto de abcissa 1.

PROFESSOR

Soluções

70. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

71. 45°



Função derivada de $j(x) = \sqrt{x}$

Seja $a \in D_j$, então:

$$\begin{aligned} j'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{j(x) - j(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{0}{0}\right) (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Ou seja, a função j é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e a sua função derivada é:

$$\begin{aligned} j': \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemplos

$$\begin{aligned} 1. (4x^3 - x^2 + \sqrt{x} + 8)' &= 4 \times (x^3)' - (x^2)' + (\sqrt{x})' + (8)' = \\ &= 4 \times 3x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = \\ &= 12x^2 - 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$2. \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)' = 2 \times (\sqrt{x})' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

8. Derivada de uma potência de expoente natural

Dados um número natural n e uma função f , real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^n$, f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = nx^{n-1}$.

Provemos, por indução, este resultado.

Seja $P(n): (x^n)' = nx^{n-1}$

(i) $P(1)$ é verdadeira

$$\begin{aligned} (x^1)' &= 1 \times x^{1-1} \Leftrightarrow x' = 1 \times x^0 \\ &\Leftrightarrow 1 = 1 \end{aligned}$$

Logo, $P(1)$ é uma proposição verdadeira.

72. Determina a expressão da função derivada de cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões.

a) $f(x) = x^2 + 5x + 3$

b) $g(x) = \frac{1}{2}x^3 - x + 2020$

c) $h(x) = x^3 \times \sqrt{x}$

d) $p(x) = \frac{5}{x}$

e) $q(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x}$

f) $r(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

PROFESSOR

Soluções

72.

a) $2x + 5$

b) $\frac{3}{2}x^2 - 1$

c) $\frac{7x^2\sqrt{x}}{2}$

d) $-\frac{5}{x^2}$

e) $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

f) $\frac{5}{(x+1)^2}$



$$(ii) P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Hipótese de indução: $P(n): (x^n)' = nx^{n-1}$

Tese de indução: $P(n+1): (x^{n+1})' = (n+1)x^n$

$$\begin{aligned} (x^{n+1})' &= (x^n \times x)' = \\ &= (x^n)' \times x + x^n \times x' = \\ &= nx^{n-1} \times x + x^n \times x' \quad (\text{por hipótese de indução}) \\ &= nx^n + x^n \times 1 = \\ &= x^n(n+1) = \\ &= (n+1)x^n \end{aligned}$$

Por (i) e (ii), provámos que $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

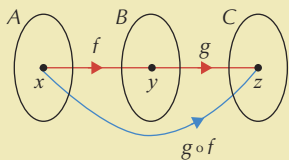
$$1. (x^{2016})' = 2016x^{2015}$$

$$\begin{aligned} 2. \left(4x^6 + \frac{x^5}{2} + \pi x^3\right)' &= (4x^6)' + \left(\frac{x^5}{2}\right)' + (\pi x^3)' = \\ &= 4 \times 6x^5 + \frac{1}{2} \times 5x^4 + \pi \times 3x^2 = \\ &= 24x^5 + \frac{5}{2}x^4 + 3\pi x^2 \end{aligned}$$

Recorda

Dadas duas funções f e g , reais de variável real, em que os domínios são, respetivamente, D_f e $D_{g'}$, chama-se **função composta de g com f** à função $g \circ f$ tal que:

- $D_{g \circ f} = \{x \in D_f: f(x) \in D_g\}$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in D_{g \circ f}$



9. Teorema da derivada da função composta

Com as fórmulas de derivação já estudadas, podemos calcular as derivadas de funções f para as quais $f(x)$ é uma soma finita de produtos ou quocientes de constantes multiplicadas por $\sqrt{x}$ e x^n (n natural).

Contudo, ainda não aprendeste a derivar uma função tal como x^{-2} ou $\sqrt{x^2 + 3x} + 5, \dots$

Vamos, agora, estudar um teorema que nos permitirá derivar funções compostas e que aumentará o número de funções que poderemos derivar sem recorrer, necessariamente, à definição de derivada.

Teorema

Dadas uma função $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciável num ponto $a \in D_f$, e uma função real de variável real $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $D'_f \subset D_g$ e diferenciável em $f(a)$, a função composta $g \circ f$ é diferenciável em a e $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

O teorema enunciado também é conhecido como **regra da cadeia** ou **regra da derivada da função composta**.

Exemplo

Seja h a função definida por $h(x) = x^{-2}$.

Podemos escrever:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ com } f(x) = x^2 \text{ e } g(x) = \frac{1}{x}.$$

Aplicando o teorema acima, obtemos:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Nota que:

- como $g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, então:

$$g'(f(x)) = -\frac{1}{(f(x))^2} = -\frac{1}{(x^2)^2} = -\frac{1}{x^4}$$

- $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

Retomando o cálculo de $h'(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{1}{x^4} \times 2x = \\ &= -\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Isto é:

$$(x^{-2})' = -\frac{2}{x^3}, \text{ que é igual a } (x^{-2})' = -2x^{-2-1}.$$

O teorema da derivada da função composta permite-nos estender a regra de derivação da potência de expoente natural a expoentes inteiros negativos, tendo em atenção o domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

- $(x^n)' = nx^{n-1}$, para $n \in \mathbb{Z}$

10. Derivada da função $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$

Prova-se que, dados um número natural par n (respetivamente n natural ímpar, $n > 1$) e f uma função real de variável real de domínio $\mathbb{R}^+$ (respetivamente $\mathbb{R} \setminus \{0\}$) definida por

$$f(x) = \sqrt[n]{x}, \text{ } f \text{ é diferenciável para todo o } x \in D_f \text{ e } f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Exemplos

$$1. (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\begin{aligned} 2. (4\sqrt[4]{x} + 7x - 2)' &= 4 \times (\sqrt[4]{x})' + (7x)' + (-2)' = \\ &= \frac{4}{4\sqrt[4]{x^3}} + 7 + 0 = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + 7 \end{aligned}$$



FRVR11_7.10
FRVR11_7.11

73 Considera a função f , definida por $f(x) = 3x^2 - 5$, e a função g , da qual se sabe apenas que $g(1) = 4$ e $g'(1) = 2$.
Calcula:

a) $(f \circ g)(1)$

b) $(f \circ g)'(1)$

PROFESSOR**Soluções**

73.

a) 43

b) 48



11. Derivada da função $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Q}$

Dados um número racional α e h uma função real de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x^\alpha$, h é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $h'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Demonstração

Como α é um número racional, então pode ser escrito como $\frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.
Seja $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, com $f(x) = x^n$ e $g(x) = \sqrt[m]{x}$.

Aplicando o teorema da derivada da função composta, obtemos:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Nota que:

- como $g'(x) = (\sqrt[m]{x})' = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}$, então:

$$g'(f(x)) = \frac{1}{m\sqrt[m]{(f(x))^{m-1}}} = \frac{1}{m\sqrt[m]{(x^n)^{m-1}}}$$

- $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$

Retomando o cálculo de $h'(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{m\sqrt[m]{(x^n)^{m-1}}} \times nx^{n-1} = \\ &= \frac{nx^{n-1}}{mx^{\frac{n(m-1)}{m}}} = \\ &= \frac{n}{m} \times \frac{x^{n-1}}{x^{\frac{nm-n}{m}}} = \\ &= \alpha \times \frac{x^{n-1}}{x^{n-\alpha}} = \\ &= \alpha \times x^{n-1-n+\alpha} = \\ &= \alpha \times x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Exemplos

$$1. \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$2. \left(\sqrt[5]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{5}}\right)' = \frac{4}{5} x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5} x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$$

$$3. \left(x^7 + x^{-\frac{1}{4}}\right)' = (x^7)' + \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)' = 7x^6 - \frac{1}{4} x^{-\frac{5}{4}}$$

Utilizando as regras de derivação e as derivadas das funções de referência, sabes agora determinar uma expressão analítica para as derivadas de funções obtidas por aplicação sucessiva de operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e composição a funções de referência.

Repara no seguinte exemplo.



FRVR11_7.13

Exemplo

Determinemos a derivada da função h definida por $h(x) = (x^2 + 4x + 5)^3$.

Podemos escrever $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, com $f(x) = x^2 + 4x + 5$ e $g(x) = x^3$.

Aplicando o teorema da derivada da função composta, obtemos:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

Nota que:

- como $g'(x) = (x^3)' = 3x^2$, então:
 $g'(f(x)) = 3(f(x))^2 = 3(x^2 + 4x + 5)^2$
- $f'(x) = (x^2 + 4x + 5)' = 2x + 4$.

Retomando o cálculo de $h'(x)$:

$$h'(x) = 3(x^2 + 4x + 5)^2 \times (2x + 4)$$

Isto é:

$$((x^2 + 4x + 5)^3)' = \underbrace{3(x^2 + 4x + 5)^2}_{g'(f(x))} \times \underbrace{(2x + 4)}_{f'(x)}$$

que é igual a $(f(x)^3)' = 3 \times f(x)^{3-1} \times f'(x)$.

O teorema da derivada da função composta permite-nos estender a regra de derivação da potência de expoente racional x^n a $(f(x))^n$:

$$((f(x))^n)' = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

Esquematisando / Resumindo

(*) Derivada de funções de referência	Regras de derivação
• $(k)' = 0, k \in \mathbb{R}$ • $(x)' = 1$ • $(x^2)' = 2x$ • $(x^3)' = 3x^2$ • $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ • $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ • $(x^\alpha)' = \alpha \times x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{Q}$	• $(f + g)' = f' + g'$ • $(kf)' = kf'$ • $(fg)' = f'g + fg'$ • $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ • $(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$

Teorema da derivada da função composta: $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$

(*) Deves saber estes resultados de memória.

O principal cuidado que deves ter na utilização das regras de derivação é a correta identificação da regra a aplicar, bem como o momento em que ela deve ser aplicada. Repara no erro típico seguinte.



Erro típico

Um erro típico na determinação da derivada de $\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^2$ é:

$$\left(\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^2\right)' = \left(\frac{(x+1)' \times (3x+2) - (3x+2)' \times (x+1)}{(3x+2)^2}\right)^2$$

Erro!

Para derivar $\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^2$ corretamente, primeiro deves utilizar a regra da potência e, em seguida, a regra do quociente, pois repara que se considerarmos as funções f e g definidas por $g(x) = x^2$ e $f(x) = \frac{x+1}{3x+2}$, então derivar $\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^2$ é o mesmo que derivar a função composta $g \circ f$ e $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$:

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{x+1}{3x+2}\right)^2\right)' &= 2 \times \frac{x+1}{3x+2} \times \left(\frac{x+1}{3x+2}\right)' = 2 \times \frac{x+1}{3x+2} \times \frac{(x+1)' \times (3x+2) - (3x+2)' \times (x+1)}{(3x+2)^2} = \\ &= 2 \times \frac{x+1}{3x+2} \times \frac{(3x+2) - 3 \times (x+1)}{(3x+2)^2} = 2 \times \frac{x+1}{3x+2} \times \frac{3x+2-3x-3}{(3x+2)^2} = \\ &= 2 \times \frac{x+1}{3x+2} \times \frac{-1}{(3x+2)^2} = \frac{-2x-2}{(3x+2)^3} \end{aligned}$$

Enquanto que, para derivar $\frac{(x+1)^2}{3x+2}$, primeiro deves utilizar a regra do quociente e só depois a regra da potência:

$$\begin{aligned} \left(\frac{(x+1)^2}{3x+2}\right)' &= \frac{((x+1)^2)' \times (3x+2) - (3x+2)' \times (x+1)^2}{(3x+2)^2} = \frac{2(x+1) \times (x+1)' \times (3x+2) - 3(x+1)^2}{(3x+2)^2} = \\ &= \frac{(2x+2) \times (3x+2) - 3(x^2+2x+1)}{(3x+2)^2} = \\ &= \frac{6x^2+6x+4x+4-3x^2-6x-3}{(3x+2)^2} = \frac{3x^2+4x+1}{(3x+2)^2} \end{aligned}$$

Exercícios resolvidos

1. Determina a expressão da função derivada de cada uma das funções definidas pelas seguintes expressões.

a) $f(x) = 6x$

c) $h(x) = (2x-3)(3x+4)$

e) $p(x) = \frac{3x+4}{5-7x}$

g) $s(x) = \sqrt{3x+1}$

i) $v(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{3x+4}$

b) $g(x) = (7x-8) - (5x+1)$

d) $j(x) = (5-2x) \times \frac{3}{x}$

f) $r(x) = x^4 - x^2 + 1$

h) $t(x) = 4x \times \sqrt{x}$

j) (*) $w(x) = \frac{2 + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x}}$

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

(*) grau de dificuldade elevado

PROFESSOR

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Sugestão de resolução

$$a) f'(x) = (6x)' = 6x' = 6 \times 1 = 6$$

$$\begin{aligned} b) g'(x) &= ((7x - 8) - (5x + 1))' = (7x - 8)' - (5x + 1)' = \\ &= ((7x)' - (8)') - ((5x)' + (1)') = \\ &= (7 - 0) - (5 + 0) = \\ &= 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

Outro processo

$$g(x) = (7x - 8) - (5x + 1) = 7x - 8 - 5x - 1 = 2x - 9$$

$$\text{Logo, } g'(x) = (2x - 9)' = (2x)' - (9)' = 2 - 0 = 2.$$

$$\begin{aligned} c) h'(x) &= ((2x - 3)(3x + 4))' = (2x - 3)' \times (3x + 4) + (2x - 3) \times (3x + 4)' = \\ &= 2 \times (3x + 4) + (2x - 3) \times 3 = \\ &= 6x + 8 + 6x - 9 = 12x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) j'(x) &= \left((5 - 2x) \times \frac{3}{x} \right)' = (5 - 2x)' \times \frac{3}{x} + (5 - 2x) \times \left(\frac{3}{x} \right)' = \\ &= (0 - 2) \times \frac{3}{x} + (5 - 2x) \times \frac{3' \times x - 3 \times x'}{x^2} = \quad (*) \\ &= (-2) \times \frac{3}{x} + (5 - 2x) \times \frac{0 \times x - 3 \times 1}{x^2} = \\ &= -\frac{6}{x} + (5 - 2x) \times \frac{-3}{x^2} = \\ &= -\frac{6x}{x^2} + \frac{-15 + 6x}{x^2} = \\ &= \frac{-6x - 15 + 6x}{x^2} = \\ &= -\frac{15}{x^2} \end{aligned}$$

(*) Podes optar por observar que $\frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{x}$ e, como $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, sabes de memória fazer $\left(\frac{3}{x}\right)' = \left(3 \times \frac{1}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$.

$$\begin{aligned} e) p'(x) &= \left(\frac{3x + 4}{5 - 7x} \right)' = \frac{(3x + 4)' \times (5 - 7x) - (3x + 4) \times (5 - 7x)'}{(5 - 7x)^2} = \\ &= \frac{3 \times (5 - 7x) - (3x + 4) \times (-7)}{(5 - 7x)^2} = \\ &= \frac{15 - 21x + 21x + 28}{(5 - 7x)^2} = \frac{43}{(5 - 7x)^2} \end{aligned}$$

$$f) r'(x) = (x^4 - x^2 + 1)' = (x^4)' - (x^2)' + (1)' = 4x^3 - 2x + 0 = 4x^3 - 2x$$

$$\begin{aligned} g) s'(x) &= (\sqrt{3x + 1})' = \left((3x + 1)^{\frac{1}{2}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} (3x + 1)^{\frac{1}{2} - 1} \times (3x + 1)' = \\ &= \frac{1}{2} (3x + 1)^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(3x + 1)^{\frac{1}{2}}} \times 3 = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}} \end{aligned}$$

(continua)

74 Recorrendo às regras de derivação, determina uma expressão analítica da derivada de cada uma das seguintes funções.

$$a) a(x) = 4x^3 - \frac{3}{5}x^2 - 2x + 7$$

$$b) b(x) = \pi x^{10} - \frac{1}{e}x^7 - 2x^3 + 9$$

$$c) c(x) = (2x^2 - 3)^4$$

$$d) d(x) = (x^4 - 5x^2)^3 (x^6 - 5x^5)$$

$$e) e(x) = \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) (3 - x^3)$$

$$f) f(x) = \frac{2x - 5}{3x + 1}$$

$$g) g(x) = \left(\frac{2x - 3}{x^2 - 4} \right)^3$$

$$h) h(x) = \sqrt{x^2 + 3}$$

$$i) i(x) = \sqrt[3]{2x^4 - 1}$$

$$j) j(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{3x + 1}}$$

$$k) k(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x + 2}}$$

PROFESSOR

Soluções

74.

$$a) 12x^2 - \frac{6}{5}x - 2$$

$$b) 10\pi x^9 - \frac{7}{e}x^6 - 6x^2$$

$$c) 16x(2x^2 - 3)$$

$$d) 3(x^4 - 5x^2)^2 \times (4x^3 - 10x) \times (x^6 - 5x^5) + (x^4 - 5x^2)^3 \times (6x^5 - 25x^4)$$

$$e) \frac{5}{2}x^4 - 6x^2 - 3x$$

$$f) \frac{17}{(3x + 1)^2}$$

$$g) \frac{3(2x - 3)^2(-2x^2 + 6x - 8)}{(x^2 - 4)^4}$$

$$h) \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

$$i) \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{(2x^4 - 1)^2}}$$

$$j) \sqrt{\frac{3x + 1}{2x - 1}} \times \frac{5}{2(3x + 1)^2}$$

$$k) \frac{-2\sqrt{x + 2} - 1}{2\sqrt{x + 2}(x + \sqrt{x + 2})^2}$$

- 75 (*) Considera as funções f e g , definidas em $\mathbb{R}$, e tais que $f(x) = 3x^2$ e $g(x) = \frac{4}{1+x^2}$.

Determina, de duas formas distintas, utilizando ou não a fórmula de diferenciação da função composta, uma expressão analítica da função derivada de:

a) $g \circ f$

b) $f \circ g$

c) $f \circ f$

(*) grau de dificuldade elevado
Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Exercícios resolvidos

(continuação)

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned} \text{h) } t'(x) &= (4x \times \sqrt{x})' = (4x)' \times \sqrt{x} + 4x \times (\sqrt{x})' = \\ &= 4\sqrt{x} + 4x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= 4\sqrt{x} + \frac{2x}{\sqrt{x}} = \\ &= \frac{4(\sqrt{x})^2 + 2x}{\sqrt{x}} = \\ &= \frac{4x + 2x}{\sqrt{x}} = \\ &= \frac{6x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \\ &= \frac{6x\sqrt{x}}{x} = \\ &= 6\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i) } v'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x+2}}{3x+4} \right)' = \frac{(\sqrt{x+2})' \times (3x+4) - (\sqrt{x+2}) \times (3x+4)'}{(3x+4)^2} = \\ &= \frac{\left((x+2)^{\frac{1}{2}} \right)' \times (3x+4) - (\sqrt{x+2}) \times 3}{(3x+4)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} (x+2)^{-\frac{1}{2}} \times (x+2)' \times (3x+4) - (\sqrt{x+2}) \times 3}{(3x+4)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x+2}} \times 1 \times (3x+4) - 3\sqrt{x+2}}{(3x+4)^2} = \\ &= \frac{\frac{3x+4}{2\sqrt{x+2}} - 3\sqrt{x+2}}{(3x+4)^2} = \\ &= \frac{3x+4 - 3\sqrt{x+2} \times 2\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2} \times (3x+4)^2} = \\ &= \frac{3x+4 - 6(\sqrt{x+2})^2}{2\sqrt{x+2}(3x+4)^2} = \\ &= \frac{3x+4 - 6x - 12}{2\sqrt{x+2}(3x+4)^2} = \\ &= \frac{-3x-8}{2\sqrt{x+2}(3x+4)^2} = \end{aligned}$$

PROFESSOR

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Soluções

75.

a) $-\frac{144x^3}{(9x^4+1)^2}$

b) $-\frac{192x}{(x^2+1)^3}$

c) $108x^3$

Sugestão de resolução

$$\begin{aligned}
 j) \quad w'(x) &= \left(\frac{2 + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x}} \right)' = \frac{(2 + \sqrt{x^2 + 1})' \times \sqrt{x} - (2 + \sqrt{x^2 + 1}) \times (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \\
 &= \frac{\left(0 + \left((x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right)' \right) \times \sqrt{x} - (2 + \sqrt{x^2 + 1}) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)}{x} = \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} (x^2 + 1)' \right) \times \sqrt{x} - (2 + \sqrt{x^2 + 1}) \times \frac{1}{4\sqrt{x^3}}}{\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \times 2x \right) \times \sqrt{x} - \frac{2 + \sqrt{x^2 + 1}}{4\sqrt{x^3}}}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{x^4\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{2 + \sqrt{x^2 + 1}}{4\sqrt{x^3}}}{\sqrt{x}} = \\
 &= \frac{x^4\sqrt{x} \times 4\sqrt{x^3} - (2 + \sqrt{x^2 + 1}) \times \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} \times 4\sqrt{x^3}} = \frac{4x^4\sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^2 + 1} - (\sqrt{x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 + 1} \times 4\sqrt{x^3} \times \sqrt{x}} = \\
 &= \frac{4x \times x - 2\sqrt{x^2 + 1} - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1} \times 4\sqrt{x^3} \times \sqrt{x}} = \frac{4x^2 - 2\sqrt{x^2 + 1} - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1} \times 4\sqrt{x^5}} = \\
 &= \frac{3x^2 - 2\sqrt{x^2 + 1} - 1}{4\sqrt{x^2 + 1} \times \sqrt{x^5}}
 \end{aligned}$$

2. Considera as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = x^2$, $g(a) = 3$ e $g'(a) = 4$. Determina:

- a) $(f \circ g)'(a)$;
 b) $\left(\frac{f}{g} \right)'(a)$, em função de $f(a)$ e de $f'(a)$.

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

Sugestão de resolução

a) $(f \circ g)'(a) = g'(a) \times f'(g(a)) = 4 \times f'(3) =$
 $= 4 \times 6 =$
 $= 24$

Cálculo auxiliar

$f'(x) = (x^2)' = 2x$
 Logo, $f'(3) = 2 \times 3 = 6$.

b) $\left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - g'(a) \times f(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a) \times 3 - 4 \times f(a)}{3^2} = \frac{3f'(a) - 4f(a)}{9}$



Erro típico

Um erro típico na resolução da alínea anterior consiste em fazer $\left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a)}{g'(a)}$, desrespeitando a regra da derivada da função quociente.

76. Considera as funções reais de variável real f e h , definidas por $f(x) = \frac{x+1}{4x}$ e $h(x) = x^2 - 3x$.

- a) Calcula $(f \circ h)(2)$.
 b) Calcula $(f \circ h)'(2)$.
 c) Escreve uma expressão que defina $(f \circ h)'(x)$.

77. Considera a função f , definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, e a função g , da qual se sabe apenas que $g(-1) = 2$ e $g'(-1) = 3$.

Calcula:

- a) $(f + g)'(-1)$
 b) $(f \times g)'(-1)$
 c) $(f \circ g)'(-1)$

PROFESSOR

Soluções

76.

- a) $\frac{1}{8}$
 b) $-\frac{1}{16}$
 c) $\frac{3-2x}{4(x^2-3x)^2}$

77.

- a) $\frac{\sqrt{6+18}}{6}$
 b) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
 c) 2

- 78 Considera as funções f e g definidas por $f(x) = 4x^3$ e $g(x) = \frac{a}{x}$, $a > 0$.

- a) Determina a equação reduzida da reta s , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = -\sqrt{2}$.
- b) A reta r é tangente ao gráfico de f e é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares. Determina uma equação de r .
- c) (*) Determina para que valor de a os gráficos de f e de g se intersejam num ponto do primeiro quadrante, em que as retas tangentes aos gráficos são perpendiculares.

(*) grau de dificuldade elevado
Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

APRENDE FAZENDO

Págs. 122, 123, 124, 127, 128 e 129
Exercícios 2, 4, 5, 10, 11, 20, 23, 24 e 26

CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Págs. 56 e 57
Exercícios 19, 20, 21, 22 e 23

PROFESSOR

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Soluções

78.

a) $y = 24x + 16\sqrt{2}$

b) $y = x - \frac{\sqrt{3}}{9}$ ou $y = x + \frac{\sqrt{3}}{9}$

c) $\frac{1}{12}$

Exercícios resolvidos

3. Considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$$

- a) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.
- b) Determina os pontos do gráfico de f em que a reta tangente é paralela ao eixo Ox .

Sugestão de resolução

- a) Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Sabemos que o declive da reta t é o valor da derivada de f em 1, isto é, $m = f'(1)$.

Como:

$$f'(x) = (2x^3 - 5x^2 + 1)' = 6x^2 - 10x$$

vem que:

$$f'(1) = 6 \times 1^2 - 10 \times 1 = -4$$

ou seja, a equação reduzida da reta t é:

$$y = -4x + b$$

Como $f(1) = 2 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 1 = -2$ e o ponto de coordenadas $(1, f(1)) = (1, -2)$ pertence à reta t , vem que:

$$-2 = -4 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 2$$

Concluimos, assim, que $y = -4x + 2$ é a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

- b) Atendendo a que se pretende determinar os pontos do gráfico de f em que a reta tangente é paralela ao eixo Ox , isto é, os pontos onde a reta tangente tem declive nulo, temos de resolver a equação $f'(x) = 0$.

Sabemos da alínea anterior que $f'(x) = 6x^2 - 10x$.

Assim:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 10x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(3x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \vee 3x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{3}$$

As abscissas dos pontos do gráfico de f em que a reta tangente é paralela ao eixo Ox são 0 e $\frac{5}{3}$.

Como:

$$f(0) = 2 \times 0^3 - 5 \times 0^2 + 1 = 1$$

e:

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 5 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 1 = -\frac{98}{27}$$

vem que as coordenadas dos pontos pretendidos são $(0, 1)$ e $\left(\frac{5}{3}, -\frac{98}{27}\right)$.

5.7. Sinal da derivada, sentido de variação e extremos



FRVR11_7.3

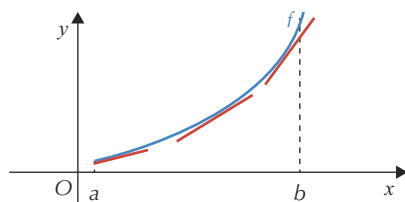
20 AULA DIGITAL

■ Simuladores (GeoGebra):

- “Relação entre a monotonia de f e o sinal da sua derivada”
- “Primeira derivada”

Vejam como se relaciona o sentido de variação de uma função com o sinal da sua derivada.

Já sabes que a derivada de uma função num ponto x_0 , quando existe, é o declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto.



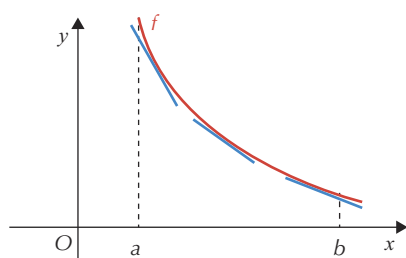
Por observação da figura:

- a função é crescente no intervalo $]a, b[$;
- em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$ a derivada é positiva (já que a tangente ao gráfico em cada um desses pontos tem declive positivo).

Estas noções adquiridas intuitivamente conduzem-nos à seguinte propriedade:

Teorema

Seja f uma função real de variável real, diferenciável num conjunto A e crescente em sentido lato nesse conjunto, então, para todo $x \in A$, $f'(x) \geq 0$.



Por observação da figura:

- a função é decrescente no intervalo $]a, b[$;
- em qualquer ponto do intervalo $]a, b[$ a derivada é negativa (já que a tangente ao gráfico em cada um desses pontos tem declive negativo).

Estas noções adquiridas intuitivamente conduzem-nos à seguinte propriedade:

Teorema

Seja f uma função real de variável real, diferenciável num conjunto A e decrescente em sentido lato nesse conjunto, então, para todo $x \in A$, $f'(x) \leq 0$.

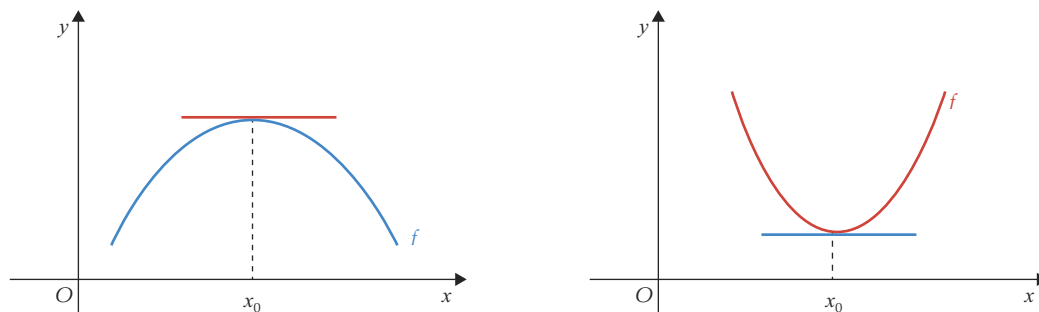


FRVR11_8.1

20 AULA DIGITAL

■ Simulador

GeoGebra: "Relação entre os extremos de f e os zeros da sua derivada"



Da observação das figuras acima, concluímos que:

- a função tem um extremo relativo (máximo ou mínimo) em x_0 ;
- em x_0 a derivada é nula (já que a tangente ao gráfico neste ponto tem declive zero).

Estas noções adquiridas intuitivamente conduzem-nos à seguinte propriedade:

Teorema

Seja f uma função real de variável real, com domínio contendo um intervalo $I =]a, b[$, ($a < b$) e diferenciável em $x_0 \in I$, se f atinge um extremo local em x_0 , então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

Seja f uma função real de variável real, com domínio contendo um intervalo $I =]a, b[$, ($a < b$) e diferenciável em $x_0 \in I$.

Provemos que se f tem um máximo local no ponto x_0 , então $f'(x_0) = 0$.

Se f tem um máximo local em x_0 , então existe uma vizinhança de x_0 contida em I tal que $f(x_0) \geq f(x)$, para qualquer x dessa vizinhança. Portanto, $f(x) - f(x_0) \leq 0$.

Assim:

- para $x < x_0$, tem-se $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, pelo que $\lim_{x \rightarrow (x_0)^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$;
- para $x > x_0$, tem-se $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, pelo que $\lim_{x \rightarrow (x_0)^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

A função f é, por hipótese, diferenciável em x_0 , pelo que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ tem que existir.

Logo:

$$\lim_{x \rightarrow (x_0)^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow (x_0)^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

isto é:

$$f'(x_0) = 0$$

A prova de que se f tem um mínimo local no ponto x_0 , então $f'(x_0) = 0$ é idêntica.

Recorda

- $f(x_0)$ é um **máximo relativo (ou local)** de f se existir uma vizinhança r de x_0 tal que $\forall x \in V_r(x_0) \cap D_f$, $f(x_0) \geq f(x)$.
- $f(x_0)$ é um **mínimo relativo (ou local)** de f se existir uma vizinhança r de x_0 tal que $\forall x \in V_r(x_0) \cap D_f$, $f(x_0) \leq f(x)$.

Nota

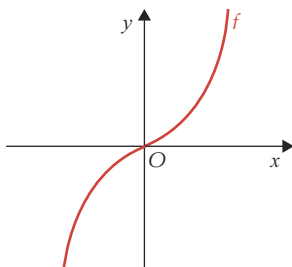
O teorema anterior afirma que, se f tem um extremo local num ponto, então a derivada nesse ponto é nula. No entanto, o recíproco não é verdadeiro, ou seja, uma função com derivada nula num ponto pode não ter extremo nesse ponto.



FRVR11_8.2

Exemplo

Considera a função f definida por $f(x) = x^3$.



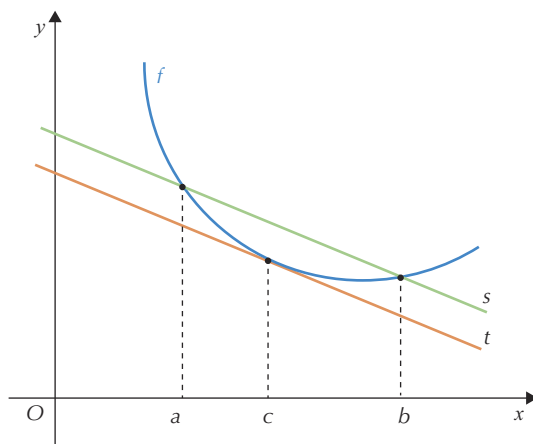
Já sabes que $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$ e f não admite extremo em 0.

Vejamos agora um teorema, que não iremos demonstrar, mas que é muito útil.

Teorema de Lagrange

Dada uma função real de variável real f , contínua em $[a, b]$, ($a < b$) e diferenciável em $]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



$$m_s = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$m_t = f'(c)$$

$$t \parallel s$$

79 Considera a função real de variável real f definida por $f(x) = x^2 + 3x$ e o intervalo $[0, 4]$.

a) Determina $c \in]0, 4[$ a que se refere o Teorema de Lagrange.

b) Escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f em c .

PROFESSOR

Soluções

79.

 a) $c = 2$

 b) $y = 7x - 4$

Interpretação geométrica

Nas condições enunciadas, o teorema de Lagrange afirma, assim, que existe pelo menos um ponto do gráfico no qual a tangente é paralela à secante s .

Exercício resolvido

Considera a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = x^3 - x$$

- a) Determina o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos A e B de abcissas, respetivamente, -2 e 1 .
- b) Verifica a existência de pelo menos um ponto C do gráfico de f , com abcissa compreendida entre -2 e 1 , em que a reta tangente tem declive igual ao da reta AB , determinando a abcissa de C .

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Sugestão de resolução

- a) Sejam A e B os pontos de abcissas, respetivamente, -2 e 1 .

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - (-2) = \\ &= -8 + 2 = \\ &= -6 \end{aligned}$$

Logo, $A(-2, -6)$.

$$f(1) = 1^3 - 1 = 0$$

Logo, $B(1, 0)$.

Seja m_s o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos A e B .

Então:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)} = \\ &= \frac{0 - (-6)}{3} = \\ &= 2 \end{aligned}$$

- b) Dado que f é contínua em $[-2, 1]$ e é diferenciável em $] -2, 1[$, então, pelo teorema de Lagrange, existe $c \in] -2, 1[$ tal que $f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}$, isto é, $f'(c) = 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$f'(x) = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Seja C o ponto de abcissa 1 .

Assim, a reta tangente ao gráfico de f no ponto C é paralela à reta AB .


 FRVR11_8.3
 FRVR11_8.4
 FRVR11_8.5

O teorema de Lagrange permite provar as seguintes propriedades:

*

Propriedade

Seja f uma função real de variável real, contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$:

- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente no intervalo I ;
- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$, então f é estritamente decrescente no intervalo I ;
- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$, então f é crescente em sentido lato no intervalo I ;
- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$, então f é decrescente em sentido lato no intervalo I ;
- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$, então f é constante no intervalo I .

Recorda

- f é (estritamente) **crescente em A** se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.
- f é (estritamente) **decrescente em A** se para quaisquer dois elementos x_1 e x_2 de A , se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

Demonstração

Seja f uma função real de variável real, contínua num dado intervalo I , de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$.

Justifiquemos que, se $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente no intervalo I .

Sejam x_1, x_2 dois elementos quaisquer de $]a, b[$ tais que $x_1 < x_2$. Pelo teorema de Lagrange, existe $c \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Como $f'(c) > 0$, vem que $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$.

Dado que $x_2 - x_1 > 0$, concluímos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, isto é, $f(x_2) > f(x_1)$, ou seja, f é estritamente crescente em $]a, b[$. Como f é contínua em I , então f é estritamente crescente em I .

De forma análoga, poderíamos justificar as restantes propriedades acima.

Nota

O intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b pode ser qualquer um dos seguintes intervalos: $]a, b[,]a, b], [a, b[$ ou $[a, b]$.

80 Indica, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações.

- a) Se $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} < 0$, então f é decrescente em $]1, 4[$.
- b) Se $f'(a) = 0$, então f tem um extremo em $x = a$.
- c) Se f tem um extremo relativo em $x = a$, então $f'(a) = 0$.
- d) Se f tem um extremo relativo num ponto interior a do seu domínio e é diferenciável nesse mesmo ponto, então $f'(x_0) = 0$.

Esquematizando / Resumindo

Para estudar o sentido de variação e a existência de extremos relativos de uma função diferenciável f , deves seguir os seguintes passos:

- 1º passo: Determina o domínio da função f .
- 2º passo: Determina a expressão da função derivada f' .
- 3º passo: Determina os zeros da derivada, ou seja, resolve a equação $f'(x) = 0$.
- 4º passo: Estuda o sinal de f' .
- 5º passo: Constrói um quadro, no qual se estabelece a relação entre o sinal e os zeros da derivada com a monotonia e os extremos relativos da função:

x	Divide o domínio da função em intervalos através dos zeros da derivada.
Sinal de f'	Preenche com o sinal da derivada.
Variação de f	Preenche com o sentido de variação da função e extremos relativos.

- 6º passo: Indica os intervalos de monotonia da função e os extremos relativos, caso existam.

PROFESSOR

Soluções

80.

- a) Afirmação falsa.
 b) Afirmação falsa.
 c) Afirmação falsa.
 d) Afirmação verdadeira.

- 81 Estuda as seguintes funções quanto aos intervalos de monotonia e extremos relativos.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

b) $g(x) = \frac{x+4}{x-1}$

c) $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$

Exercícios resolvidos

1. Determina os intervalos de monotonia de cada uma das seguintes funções e identifica os extremos relativos e absolutos, caso existam.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 1$, em $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = \frac{2x}{x+5}$, em $\mathbb{R}_0^+$.

Adaptado de *Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 11.º ano

Sugestão de resolução

a) • $D_f = \mathbb{R}$

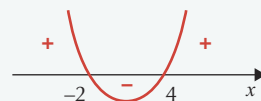
- Determina $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 3x^2 - 24x + 1)' = \\ &= 3x^2 - 6x - 24 = \\ &= x^2 - 2x - 8 \end{aligned}$$

- Determina os zeros de f' :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times (-8)}}{2 \times 1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2+6}{2} \vee x = \frac{2-6}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2 \end{aligned}$$

- Estuda o sinal de f' e a variação de f :



x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
Sinal de f'	+	0	-	0	+
Variação de f		29 Máx.		-79 Mín.	

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 24 \times (-2) + 1 = 29$$

$$f(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 1 = -79$$

f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[4, +\infty[$.

f é estritamente decrescente em $[-2, 4]$.

29 é um máximo relativo em -2 .

-79 é um mínimo relativo em 4 .

PROFESSOR

Soluções

81.

a) f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[3, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 3]$; 12 é um máximo relativo em -1 ; -20 é um mínimo relativo em 3 .

b) g é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$; não tem extremos.

c) h é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[-1, 1]$; $-\frac{1}{2}$ é um mínimo relativo em -1 ; $\frac{1}{2}$ é um máximo relativo em 1 .

Sugestão de resolução

b) • $D_g = \mathbb{R}_0^+$

- Determina
- $g'(x)$
- :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{2x}{x+5} \right)' = \frac{(2x)' \times (x+5) - (2x) \times (x+5)'}{(x+5)^2} = \frac{2 \times (x+5) - 2x \times 1}{(x+5)^2} = \\ &= \frac{2x + 10 - 2x}{(x+5)^2} = \\ &= \frac{10}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

- Determina os zeros de
- g'
- :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{10}{(x+5)^2} = 0, \text{ que é uma equação impossível em } \mathbb{R}.$$

- Estuda o sinal de
- g'
- e variação de
- g
- :

x	0	$+\infty$
Sinal de g'	+	+
Variação de g	0 Mín.	

$$g(0) = \frac{2 \times 0}{0 + 5} = 0$$

g é estritamente crescente em $\mathbb{R}_0^+$.

0 é um mínimo relativo (absoluto) em 0.

2. Um projétil foi lançado verticalmente e a respetiva altura a (medida em metros da altura do projétil acima do solo) é dada, em função de t (medida em segundos do tempo decorrido após o instante inicial $t = 0$), por $a(t) = -4,9t^2 + 39,2t + 1,6$.

- a) Qual é a altura do projétil no instante em que foi lançado?
 b) Determina a velocidade média nos dois primeiros segundos.
 c) Determina a velocidade no instante $t = 3$.
 d) Qual é a altura máxima atingida pelo projétil?

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Sugestão de resolução

a) $a(0) = -4,9 \times 0^2 + 39,2 \times 0 + 1,6 = 1,6$

No instante em que foi lançado, a altura do projétil é 1,6 metros.

b) $v.m.[0, 2] = \frac{a(2) - a(0)}{2 - 0} = \frac{60,4 - 1,6}{2} = 29,4$

Cálculo auxiliar

$$a(2) = -4,9 \times 2^2 + 39,2 \times 2 + 1,6 = 60,4$$

A velocidade média nos dois primeiros segundos é 29,4 m/s

(continua)

- 82 Determina os intervalos de monotonia das seguintes funções e identifica os extremos relativos e absolutos, caso existam.

a) $f(x) = 4x^2 - 16x + 3$, em $\mathbb{R}$.

b) $h(x) = 2x + \frac{4}{x}$, em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, em $\mathbb{R}$.

d) $r(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$, em $\mathbb{R}$.

Adaptado de *Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 11.º ano

APRENDE FAZENDO

Págs. 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130 e 131
 Exercícios 7, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33 e 34

CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Págs. 57, 58 e 59
 Exercícios 24, 25, 26, 29, 30, 31, 32, 33 e 34

PROFESSOR

Soluções

82.

- a) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2]$ e é estritamente crescente em $[2, +\infty[$; -13 é um mínimo absoluto em 2.
 b) h é estritamente crescente em $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e em $[\sqrt{2}, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-\sqrt{2}, 0[$ e em $]0, \sqrt{2}]$; $4\sqrt{2}$ é um mínimo relativo em $\sqrt{2}$; $-4\sqrt{2}$ é um máximo relativo em $-\sqrt{2}$.
 c) p é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$; 2 é o mínimo absoluto em 0.
 d) r é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; 4 é o mínimo absoluto em 0.

- 83 Um balão de S. João foi lançado de uma varanda, mantendo-se no ar durante 50 minutos. A distância do balão ao solo, em metros, minutos após o seu lançamento é dada por:

$$d(t) = -0,02t^3 + t^2 + 7$$

- a) Determina a velocidade média relativamente ao solo do balão nos primeiros 20 minutos.
- b) Determina $d'(5)$ e interpreta o valor obtido no contexto do problema.
- c) Determina analiticamente a altura máxima atingida pelo balão e indica o instante em que tal aconteceu. Apresenta os resultados arredondados às unidades.

- 84 Se $C(q)$ representa o custo para fabricar q unidades de um determinado produto, a razão $\frac{C(q)}{q}$ é designada de custo médio desse mesmo produto. Seja $C(q) = 2q^2 - 15q + 3200$. Para que valor de q o custo médio é mínimo?

PROFESSOR

Soluções

83.

- a) 12 m/min
- b) 8,5; a velocidade instantânea relativamente ao solo do balão aos 5 minutos era de aproximadamente 8,5 m/min.
- c) 377 metros aos 33 minutos.

84. Para $q = 40$ unidades.

Exercícios resolvidos

(continuação)

Sugestão de resolução

- c) A velocidade no instante $t = 3$ é o valor de $a'(3)$:

$$a'(t) = -4,9 \times 2t + 39,2 = -9,8t + 39,2$$

$$a'(3) = -9,8 \times 3 + 39,2 = 9,8$$

A velocidade do projétil no instante $t = 3$ é 9,8 m/s.

- d) A altura máxima do projétil é o máximo da função a .

- Determina $a'(t)$:

$$a'(t) = -4,9 \times 2t + 39,2 = -9,8t + 39,2$$

$$D_{a'} = \mathbb{R}_0^+$$

- Determina os zeros de a' :

Em $\mathbb{R}_0^+$:

$$a'(t) = 0 \Leftrightarrow -9,8t + 39,2 = 0 \Leftrightarrow t = 4$$

- Estuda o sinal de a' e variação de a :

x	0		4	$+\infty$
Sinal de a'	+	+	0	-
Variação de a	1,6		80 Máx.	

$$a(0) = 1,6$$

$$a(4) = -4,9 \times 4^2 + 39,2 \times 4 + 1,6 = 80$$

80 é um máximo relativo (absoluto) em $x = 4$.

A altura máxima atingida pelo projétil é 80 metros.

3. De todos os retângulos de perímetro 40 cm, determina as dimensões do que tem área máxima.

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Sugestão de resolução

Seja x o comprimento do retângulo e y a sua largura.

Como o perímetro é 40, então $2x + 2y = 40$ e, assim, $y = 20 - x$.

Como se pretende as dimensões do retângulo com área máxima, determinemos uma expressão da área em função de x :

$$A(x) = x \times y$$

Logo:

$$A(x) = x \times (20 - x) = 20x - x^2$$

Sugestão de resolução

Para maximizar $A(x)$, vamos determinar $A'(x)$:

$$A'(x) = (20x - x^2)' = 20 - 2x$$

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 10$$

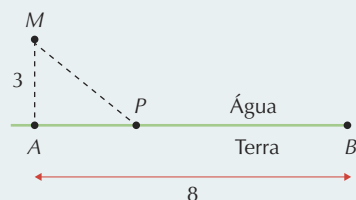
No contexto do problema, temos que $D_A =]0, 20[$.

x	0		10		20
Sinal de A'	n.d.	+	0	-	n.d.
Variação de A	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

$x = 10$ é o comprimento do retângulo de área máxima e a sua largura é $y = 20 - 10 = 10$ cm.

O retângulo de área máxima é, então, um quadrado de lado 10 cm.

4. O Filipe encontra-se num barco a remos no ponto M , a 3 quilómetros da costa. O ponto A é o ponto da costa mais próximo de M . Para chegar ao ponto B da costa, situado a 8 quilómetros do ponto A , o Filipe rema até ao ponto P e depois caminha de P até B . Se o Filipe rema a 3 km/h e caminha a 6 km/h, determina onde deve estar o ponto P para que o tempo total da viagem seja o menor possível.



Sugestão de resolução

O objetivo deste problema é minimizar o tempo gasto no percurso total de M a B .

Começamos por designar por x a distância de A a P e escrever todas as outras distâncias em função de x :

$$\overline{AP} = x$$

Sabemos que $(\overline{MP})^2 = 3^2 + (\overline{AP})^2$, logo $\overline{MP} = \sqrt{9 + x^2}$ (considerando o triângulo retângulo $[MAP]$).

$$\overline{PB} = 8 - \overline{AP} = 8 - x.$$

Se dividirmos o espaço percorrido pela velocidade, determinamos o tempo gasto, ou seja, o tempo gasto de M a P é $\frac{\sqrt{9 + x^2}}{3}$ e o tempo gasto de P a B é $\frac{8 - x}{6}$.

(continua)

20 AULA DIGITAL

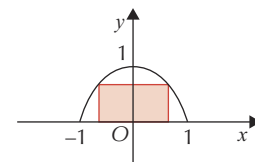
Animação

"Resolução do exercício 85"

85. Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, a partir de um pedaço de cartolina de 6 cm por 6 cm, cortando quadrados nos cantos e dobrando os lados para cima. Seja x o lado dos quadrados recortados.

- a) Escreve uma expressão para o volume da caixa, em função de x . Define um intervalo para os possíveis valores de x .
- b) Determina o valor de x que maximiza o volume da caixa e calcula o volume máximo.

86. Determina a maior área possível de um retângulo inscrito no gráfico da função $y = 1 - x^2$, para $-1 \leq x \leq 1$, com a base no eixo Ox e dois vértices superiores sobre o gráfico.



87. Pretende-se construir um recipiente cilíndrico, com a capacidade de 12 litros, gastando a menor quantidade possível de um determinado material. Considerando desprezável a espessura do material, determina qual deverá ser a medida do raio da base do recipiente?

Adaptado de Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

PROFESSOR

Soluções

85.

a) $V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$;

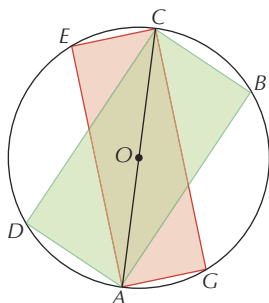
$x \in]0, 3[$

b) $x = 1$; 16 cm^3

86. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

87. $3\sqrt{\frac{6}{\pi}} \text{ dm}$

- 88 (*) Considera os retângulos que se podem inscrever numa circunferência com diâmetro $\overline{AC} = 10$. Determina qual desses retângulos tem área máxima.



(*) grau de dificuldade elevado
Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11º ano

20 AULA DIGITAL

■ Apresentação

“Derivadas de funções reais de variável real e aplicações”

■ Teste interativo

“Derivadas de funções reais de variável real e aplicações”

APRENDE FAZENDO

Págs. 131 e 132

Exercícios 35, 36, 37, 38, 39 e 40

CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Págs. 88 a 93

Teste nº 5

PROFESSOR

(*) Os graus de dificuldade elevados correspondem a desempenhos que não serão exigíveis à totalidade dos alunos.

Solução

88. Quadrado de lado $5\sqrt{2}$.

Exercícios resolvidos

(continuação)

Sugestão de resolução

Somando estes tempos, obtemos o tempo necessário para viajar de M a B em função de x :

$$f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{8-x}{6}, \text{ com } 0 \leq x \leq 8$$

Para minimizar $f(x)$, vamos determinar $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} (\sqrt{9+x^2})' + \frac{1}{6} (8-x)' = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (9+x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2x) - \frac{1}{6} = \\ &= \frac{2x}{6\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{6} = \\ &= \frac{x}{3\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{6} = \\ &= \frac{6x - 3\sqrt{9+x^2}}{18\sqrt{9+x^2}} \end{aligned}$$

Em $[0, 8]$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x - 3\sqrt{9+x^2}}{18\sqrt{9+x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3\sqrt{9+x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x = 3\sqrt{9+x^2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \sqrt{9+x^2}$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 = (\sqrt{9+x^2})^2 \text{ (pois } 2x \text{ e } \sqrt{9+x^2} \text{ são expressões não negativas)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 9 + x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \quad (\text{pois } x \in [0, 8])$$

x	0		$\sqrt{3}$		8
$6x - 3\sqrt{9+x^2}$	–	–	0	+	+
$18\sqrt{9+x^2}$	+	+	+	+	+
Sinal de f'	–	–	0	+	+
Variação de f	$f(0)$ Máx.	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$ Mín.	$\nearrow$	$f(8)$ Máx.

Assim, o tempo de viagem é minimizado quando o ponto P está a $\sqrt{3}$ km do ponto A .

✓ SÍNTESE

5. Derivadas de funções reais de variável real

Taxa média de variação de f entre a e b

Dada uma função real de variável real f e dados dois pontos a e b do respetivo domínio, designa-se por **taxa média de variação de f entre a e b** o quociente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Taxa instantânea de f no ponto x_0 (derivada de f no ponto x_0)

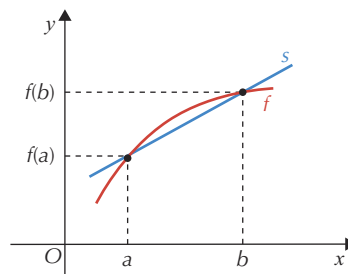
Dada uma função real de variável real f e dado um ponto x_0 do respetivo domínio, designa-se por **taxa instantânea de variação de f no ponto x_0** o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, quando este existe e é finito.

Neste caso, designa-se por **derivada de f no ponto x_0** e representa-se por $f'(x_0)$.

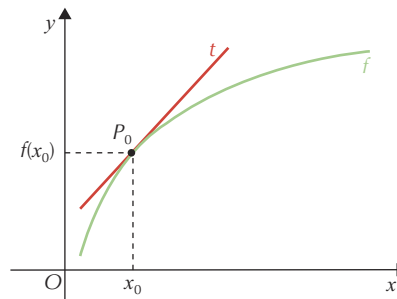
A função f diz-se **derivável** ou **diferenciável** no ponto x_0 .

Interpretação geométrica da taxa média de variação e da derivada de uma função num ponto

Dada uma função real de variável real f e dados dois pontos a e b do respetivo domínio, tem-se que o declive da reta secante ao gráfico de f nos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ é igual à taxa média de variação de f entre a e b .



Dada uma função real de variável real f , diferenciável em $x_0 \in D_f$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P_0(x_0, f(x_0))$ é a reta de declive $f'(x_0)$ que passa por P_0 .



Aplicação da noção de derivada à cinemática do ponto

Se uma função f indica a distância percorrida por um móvel, que se desloca num percurso linear, em função do tempo, a taxa média de variação de f , no intervalo $[a, b]$, é a **velocidade média do móvel entre os instantes a e b** e a derivada de f em a é a **velocidade do móvel em a** .

✓ SÍNTESE

Diferenciabilidade e continuidade num ponto

Dada uma função real de variável real f e dado um ponto a do respetivo domínio, se f é diferenciável em a , então f é contínua em a .

Notas

1. Uma função pode ser contínua num ponto e não ser diferenciável nesse ponto.
2. Se uma função não é contínua num ponto a , então não é diferenciável em a .

Função derivada

Dada uma função real de variável real f , designa-se por **função derivada de f** a função de domínio $D_{f'} = \{x \in D_f: f \text{ é diferenciável em } x\}$ que a cada $x \in D_{f'}$ faz corresponder $f'(x)$.

Uma função real de variável real diz-se **diferenciável num conjunto A** quando é diferenciável em todos os pontos de A .

Regras de derivação

Derivada de funções de referência	Regras de derivação
• $(k)' = 0, k \in \mathbb{R}$ • $(x)' = 1$ • $(x^2)' = 2x$ • $(x^3)' = 3x^2$ • $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ • $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ • $(x^\alpha)' = \alpha \times x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{Q}$	• $(f + g)' = f' + g'$ • $(kf)' = kf'$ • $(fg)' = f'g + fg'$ • $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ • $(f^\alpha)' = \alpha f^{\alpha-1} f'$
Teorema da derivada da função composta: $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$	

Sinal da derivada, sentido de variação e extremos

Sendo f uma função real de variável real, diferenciável num conjunto A :

- se f é crescente em sentido lato nesse conjunto, então, para todo o $x \in A$, $f'(x) \geq 0$;
- se f é decrescente em sentido lato nesse conjunto, então, para todo o $x \in A$, $f'(x) \leq 0$.

Seja f uma função real de variável real, com domínio contendo um intervalo $I =]a, b[$, ($a < b$) e diferenciável em $x_0 \in I$:

- se f atinge um extremo local em x_0 , então $f'(x_0) = 0$.

Teorema de Lagrange

Dada uma função real de variável real f , contínua em $[a, b]$, ($a < b$) e diferenciável em $]a, b[$, então existe $c \in]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Seja f uma função real de variável real, contínua num dado intervalo I de extremo esquerdo a e extremo direito b , diferenciável em $]a, b[$:

- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente no intervalo I ;
- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) < 0$, então f é estritamente decrescente no intervalo I ;
- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$, então f é crescente em sentido lato no intervalo I ;
- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$, então f é decrescente em sentido lato no intervalo I ;
- se $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$, então f é constante no intervalo I .

Método para estudar o sentido de variação e a existência de extremos relativos de uma função diferenciável f :

- 1º passo: Determina o domínio da função f .
- 2º passo: Determina a expressão da função derivada f' .
- 3º passo: Determina os zeros da derivada, ou seja, resolve a equação $f'(x) = 0$.
- 4º passo: Estuda o sinal de f' .
- 5º passo: Constrói um quadro, no qual se estabelece a relação entre o sinal e os zeros da derivada com a monotonia e os extremos relativos da função:

x	Divide o domínio da função em intervalos através dos zeros da derivada.
Sinal de f'	Preenche com o sinal da derivada.
Variação de f	Preenche com o sentido de variação da função e extremos relativos.

- 6º passo: Indica os intervalos de monotonia da função e os extremos relativos, caso existam.

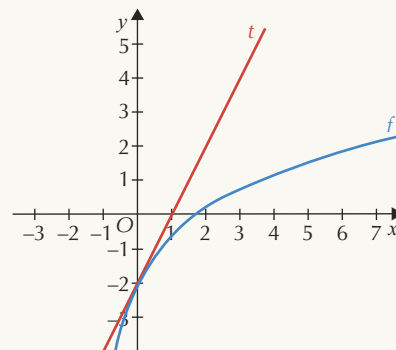
Aprende Fazendo

Itens de seleção

- 1 Na figura seguinte estão representadas parte do gráfico da função f e a reta t , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0. O valor de $f'(0)$ é:

(A) $-\frac{1}{2}$ (B) -2
(C) 2 (D) $\frac{1}{2}$

Solução: Opção (C)



- 2 Considera as seguintes afirmações:

- (I) Uma função contínua num determinado ponto é diferenciável nesse ponto.
(II) Uma função não contínua num determinado ponto não é diferenciável nesse ponto.

Acerca destas afirmações, pode concluir-se que:

- (A) ambas são verdadeiras.
(B) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
(C) apenas a afirmação (II) é verdadeira.
(D) ambas são falsas.

Solução: Opção (C)

- 3 Lançou-se uma bola de baixo para cima. A altura S , em metros, a que a bola se encontrava do solo, t segundos após ter sido lançada, é dada pela expressão $S(t) = -6t^2 + 24t$.

- a) A velocidade média, nos primeiros três segundos após o lançamento da bola, é:

(A) 4 m/s (B) 6 m/s (C) 9 m/s (D) 18 m/s

- b) A velocidade da bola ao fim de um segundo é:

(A) 0 m/s (B) 6 m/s (C) 12 m/s (D) 24 m/s

Soluções: a) Opção (B) b) Opção (C)

- 4 Para um certo valor de $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considera a função f definida por $f(x) = kx^3 - 2kx^2$. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1 é perpendicular à reta de equação $y = 2x - 1$. Qual é o valor de k ?

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

Solução: Opção (C)

- 5 Seja f a função de domínio $\mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = 3x + 3 + \frac{2}{x}$. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de f num determinado ponto A é paralela à reta de equação $x - y = 1$. Qual é a abscissa do ponto A ?

(A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

Solução: Opção (C)

- 6 Seja g uma função real de variável real. Sabe-se que a reta de equação $y = -3x + 2$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -2 . Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - 2}{h} = -3$

(B) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) - 8}{x - 2} = -3$

(C) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + 2}{x + 2} = -3$

(D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-2+h) - 8}{h} = -3$

Solução: Opção (D)

- 7 Seja f uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + (a-1)x - 2$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Qual é o valor de a para o qual f tem um extremo relativo em $x = -1$?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

Solução: Opção (A)

- 8 De uma função h , definida em $\mathbb{R}$, sabe-se que é par e que a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abscissa 3 tem declive igual a 2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $h(3) = 2$ (B) $h'(-3) = 2$ (C) $h'(-3) = -2$ (D) $h'(3) = -2$

Solução: Opção (C)

- 9 Seja g uma função real de variável real. A reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 tem inclinação 120° . Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x^2 - x}$?

(A) $-\sqrt{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

Solução: Opção (A)

Aprende Fazendo

Itens de seleção

- 10 A reta de equação $y = 3x + 1$ é tangente ao gráfico de uma dada função f , no ponto de abscissa -1 . Qual das expressões seguintes pode definir a função f ?

(A) $x^3 - x$

(B) $x + x^2$

(C) $x^3 + x$

(D) $x - x^2$

Solução: Opção (D)

- 11 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - x & \text{se } x \leq 1 \\ 2x + b & \text{se } x > 1 \end{cases}, a, b \in \mathbb{R}$$

Quais são os valores de a e de b para os quais a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$?

(A) $a = 1$ e $b = 2$

(B) $a = -2$ e $b = 1$

(C) $a = 1$ e $b = -2$

(D) $a = -2$ e $b = -1$

Solução: Opção (C)

- 12 Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ representada graficamente na figura.

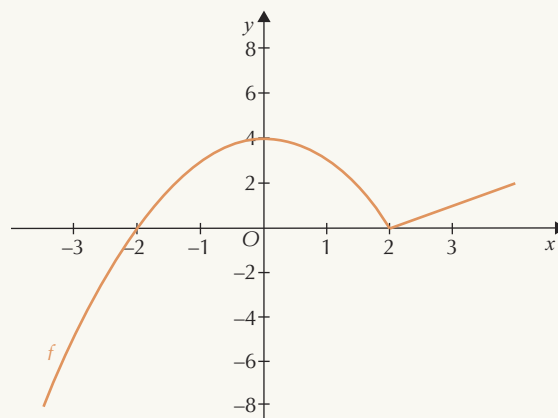
Relativamente a $f'(2)$, podemos afirmar que:

(A) é positiva.

(B) é negativa.

(C) é nula.

(D) não existe.



Solução: Opção (D)

- 13 Na figura seguinte encontra-se representada graficamente a função g .

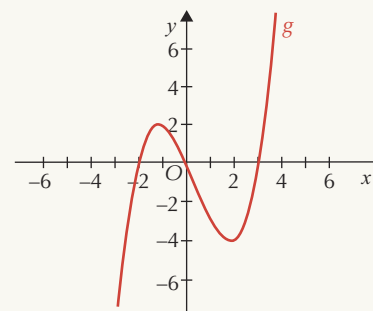
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $g'(-2) \times g'(1) = 0$

(B) $\frac{g'(-2)}{g'(3)} > 0$

(C) $\frac{g'(1)}{g'(-2)} > 0$

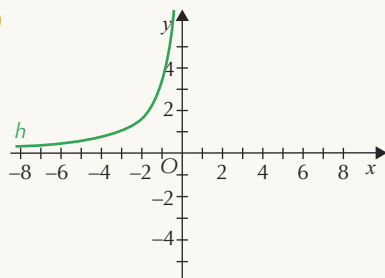
(D) $g'(-3) \times g'(2) < 0$



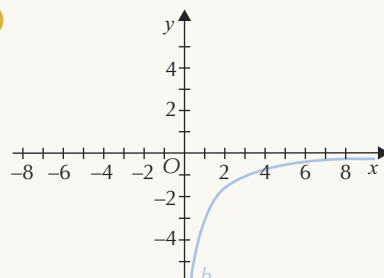
Solução: Opção (B)

- 14 De uma função h , sabe-se que $h(x) \times h'(x) < 0, \forall x \in D_h$. Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função h ?

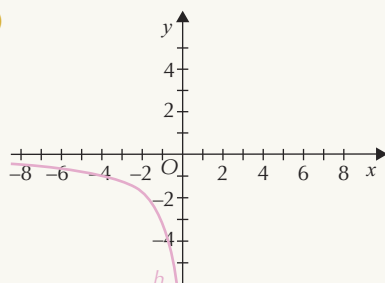
(A)



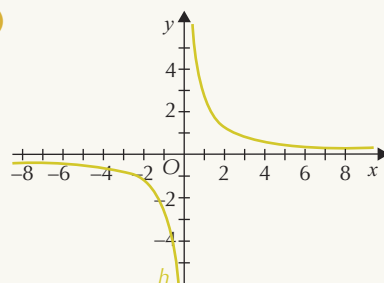
(B)



(C)



(D)

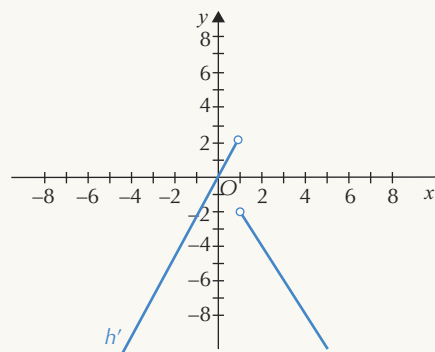


Solução: Opção (B)

- 15 No referencial da figura está representada a função h' , derivada de uma função h , de domínio $\mathbb{R}$. Qual das seguintes afirmações é falsa?

- (A) h pode ser contínua em $x = 1$.
- (B) $h(-2) > h(-1)$
- (C) $h(2) < h(3)$
- (D) 0 é um mínimo relativo de h .

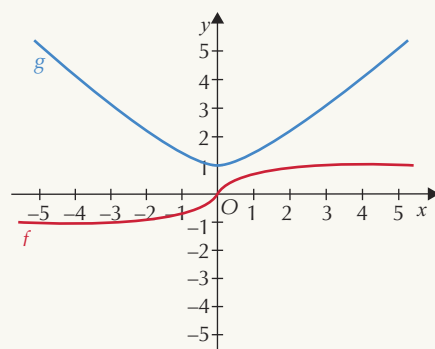
Solução: Opção (C)



- 16 Na figura estão parte das representações gráficas das funções, de domínio $\mathbb{R}$, f e g . Pode concluir-se que:

- (A) g pode ser a função derivada da função f .
- (B) a função f tem um extremo relativo.
- (C) g tem um mínimo relativo igual a 0.
- (D) f pode ser a função derivada da função g .

Solução: Opção (D)

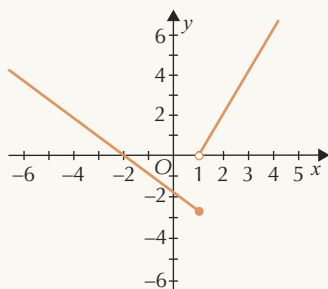


Aprende Fazendo

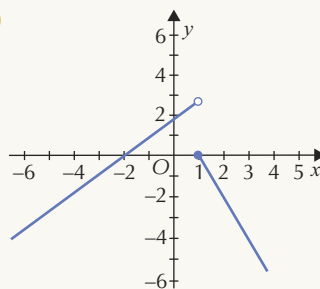
Itens de seleção

- 17 No referencial da figura está representada graficamente a função f . Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função f' , derivada de f ?

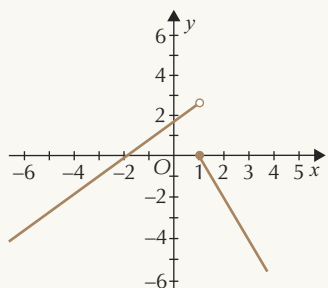
(A)



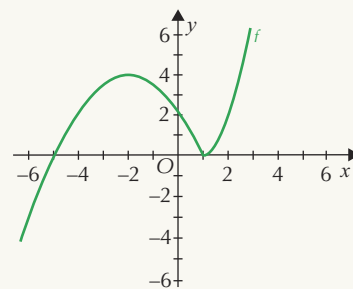
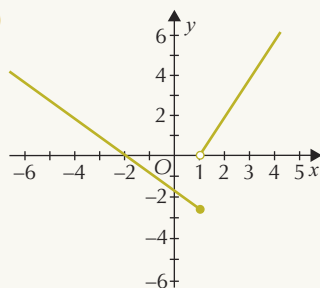
(B)



(C)

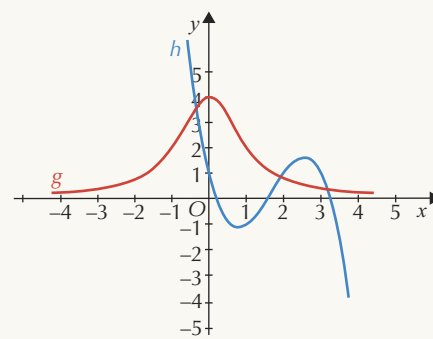


(D)



Solução: Opção (D)

- 18 No referencial da figura estão representadas duas funções contínuas, g e h , de domínio $\mathbb{R}$. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 0 é horizontal e que a reta tangente ao gráfico de h no mesmo ponto é paralela à reta de equação $y = -4x - 4$. Seja f a função definida por $f(x) = g(x) \times h(x)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $f'(0) = -16$ (B) $f'(0) = 0$ (C) $f'(0) = 4$ (D) $f'(0) = 16$ 

Solução: Opção (A)

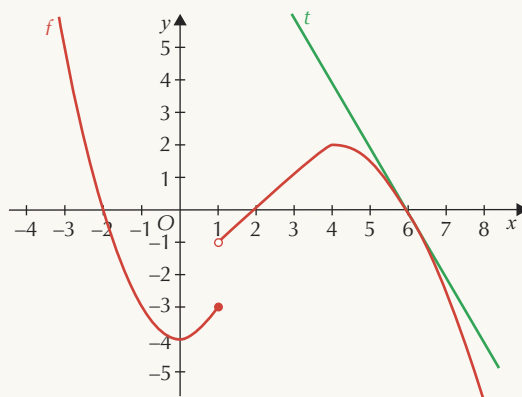
- 19 Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Se n for ímpar, pode concluir-se que:

(A) f é crescente em $\mathbb{R}$.(B) f tem um mínimo relativo.(C) f tem um máximo relativo.(D) f é decrescente em $\mathbb{R}$.

Solução: Opção (A)

Itens de construção

- 20 Na figura estão representadas parte do gráfico de uma função f , de domínio $\mathbb{R}$, e a reta t , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 6.



- A função f é contínua em $\mathbb{R}$? Justifica.
- Indica as abscissas dos pontos onde a função f não é diferenciável.
- Calcula a taxa média de variação de f no intervalo $[-2, 1]$.
- Sabe-se que a reta t interseja o eixo das ordenadas no ponto de ordenada 12. Escreve a equação reduzida de t .
- Qual é o valor de $f'(6)$?

Soluções: a) Não é contínua. b) 1 e 4 c) -1 d) $y = -2x + 12$ e) -2

- 21 Um objeto foi lançado de baixo para cima e a distância, d , em metros, do objeto ao solo, t segundos depois do início do lançamento, é dada pela expressão $d(t) = -4,9t^2 + 20t$.

- Qual é a velocidade inicial?
- Determina a velocidade com que o objeto atingiu o solo.
- Qual é a altura máxima atingida pelo objeto?

Soluções: a) 20 m/s b) -20 m/s c) 20,4 m

- 22 Seja f a função de domínio $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ definida por $f(x) = \sqrt{3 - 2x}$.

- Mostra, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, que $f'(1) = -1$.
- Determina a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

Solução: b) 135°

Aprende Fazendo

Itens de construção

- 23** Seja f uma função quadrática. Sabe-se que 1 é um zero de f e que a reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(-1, 2)$ tem declive igual a -3 .

- a) Indica, justificando, o valor de $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
 b) Determina a expressão analítica da função.

Soluções: a) 2 b) $f(x) = x^2 - x$

- 24** Indica a expressão da derivada da função f , definida por:

a) $f(x) = (1 - x)^3(3 - x^2)$

b) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \frac{2x^3 - 12x + 1}{1 + x^2}$

d) $f(x) = \frac{4}{x^2} + \sqrt{2x - x^2}$

e) $f(x) = \left(\frac{x+1}{2+3x}\right)^4$

f) $f(x) = \sqrt[4]{1+x^4}$

Soluções: a) $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 16x - 9$ b) $f'(x) = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$ c) $f'(x) = \frac{2x^4 + 18x^2 - 2x - 12}{(1+x^2)^2}$ d) $f'(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$
 e) $f'(x) = \frac{-4(x+1)^3}{(2+3x)^5}$ f) $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$

- 25** Considera a função h , definida em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, por:

$$h(x) = \left(-\frac{1}{x-1}\right)^2$$

- a) Mostra que $h'(x) = -\frac{2}{(x-1)^3}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 b) Determina o declive da reta secante ao gráfico de h nos pontos A e B de abcissas, respetivamente, -1 e 0 .
 c) Verifica a existência de pelo menos um ponto C do gráfico de h , com abcissa compreendida entre -1 e 0 , em que a reta tangente é paralela à reta AB .
 Calcula, com aproximação às centésimas, as coordenadas de C .

Soluções: b) $\frac{3}{4}$ c) $(-0,39; 0,52)$

20 AULA DIGITAL

■ **Animação**
 “Resolução do exercício 25”

- 26 Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7}$ e seja g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Sabe-se que $g(1) = g'(1) = -2$.

a) A função g é contínua em $x = 1$? Justifica.

b) Calcula:

i) $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$

ii) $(f \circ g)'(1)$

Soluções: a) Sim b) i) $\frac{11}{12}$ ii) $\frac{8}{3\sqrt[3]{121}}$

- 27 Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = \frac{3x^2 + 3}{x^2}$.

a) Determina a expressão analítica da função derivada de f .

b) Mostra que a função f é uma função par e f' é uma função ímpar.

c) Existem dois pontos no gráfico de g com ordenada 6. Averigua se as retas tangentes ao gráfico nesses pontos são paralelas.

d) Usando métodos exclusivamente analíticos, indica os intervalos de monotonia e os extremos relativos de f , caso existam.

Soluções: a) $f'(x) = -\frac{6}{x^3}$ c) Não são paralelas. d) f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$; f não tem extremos relativos.

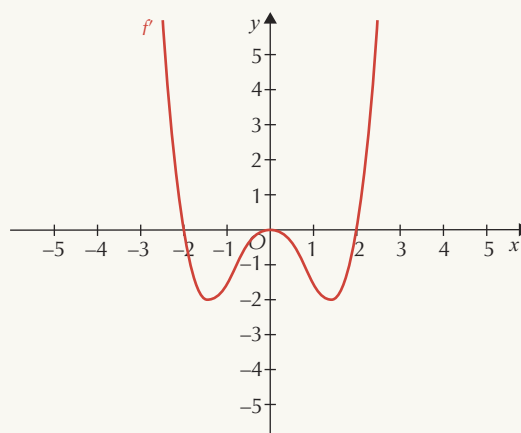
- 28 Na figura está representada graficamente a função derivada, f' , de uma função f polinomial. Tal como a figura sugere, $-2, 0$ e 2 são zeros de f' .

a) Qual é o valor de $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$?

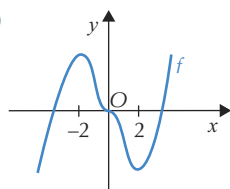
b) Indica, justificando, o valor lógico da proposição: "a função f tem três extremos relativos".

c) Indica os intervalos de monotonia e as abcissas dos extremos de f .

d) Apresenta um gráfico de f compatível com o de f' .



Soluções: a) 0 b) Proposição falsa. c) f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-2, 2]$; maximizante: -2 , minimizante: 2 d)



Aprende Fazendo

Itens de construção

- 29 Seja f uma função real de variável real definida por $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$.
- Sabendo que a função não está definida no ponto de abscissa 1, mostra que $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ e indica o domínio de f .
 - Resolve a condição $f'(x) \times f(x) \geq 0$
 - Indica as equações das assíntotas ao gráfico de f .

Soluções: a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$ b) $]-\infty, -2[\cup [0, 2[$ c) $x = -2, x = 2$ e $y = 0$

- 30 Considera a função real de variável real definida por $g(x) = \frac{mx^2}{x^2 + 1}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Mostra que, seja qual for o valor de m , a função tem sempre um extremo relativo.
 - Considera $m = -1$.
 - Estuda a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos.
 - Determina as equações das assíntotas ao gráfico de g .
 - Recorrendo ao estudo feito nas duas alíneas anteriores, indica, justificando, qual o contradomínio da função g .

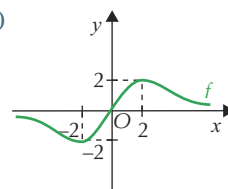
Soluções: b) i) g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; máximo relativo em $x = 0$.
ii) $y = -1$ iii) $]-1, 0]$

- 31 Acerca de uma função f , real de variável real, sabe-se que:

- $D_f = \mathbb{R}$;
- f é ímpar;
- $f(-2) = -2$ e $f(0) = 0$;
- $f'(2) = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$;
- $f'(x) < 0$ se $x \in]-\infty, -2[$ e $f'(x) > 0$ se $x \in]-2, 0[$.

- A função f é contínua em $\mathbb{R}$? Justifica a tua resposta.
- Indica, caso existam, os extremos relativos de f .
- Esboça um possível gráfico da função.

Soluções: a) Sim b) Mínimo relativo em $x = -2$ e máximo relativo em $x = 2$. c)



32 Seja g a função real de variável real definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

- a) Mostra que g é contínua mas não é diferenciável no ponto de abscissa 0.
 b) Estuda a função quanto à monotonia e existência de extremos.

Soluções: b) g é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $]0, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 0]$; g tem um máximo relativo em -1 e um mínimo relativo em 0 .

33 Considera a função real de variável real definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = |x^3|$.

- a) Determina os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados.
 b) Redefine a função, sem usar o símbolo de valor absoluto.
 c) Mostra que f é contínua em todo o seu domínio.
 d) A função é diferenciável em $\mathbb{R}$? Justifica a tua resposta.
 e) Estuda a função quanto à monotonia e existência de extremos.

Soluções: a) $(0, 0)$ b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ d) Sim e) f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$; minimizante: 0

34 Seja f uma função real de variável real, contínua no intervalo $[a, b]$. Sabe-se que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1$.

- a) Indica, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações.
 i) A função f é necessariamente crescente no intervalo $[a, b]$.
 ii) $f(a) > f(b)$
 b) O que podes concluir acerca da monotonia da função f no intervalo $[a, b]$? Justifica a tua resposta.

Soluções: a) i) Afirmação falsa. ii) Afirmação falsa. b) Nada se pode concluir.

35 Uma empresa pretende construir depósitos com a forma de um prisma, com base quadrada, sem tampa e com capacidade de 2 m^3 .

- a) Mostra que a área total de um depósito, em m^2 , em função da aresta da base, x , pode ser dada por $A(x) = \frac{8}{x} + x^2$.
 b) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, determina a medida da aresta da base do depósito de forma a que a área total seja mínima.

Solução: b) $x = \sqrt[3]{4}$

Aprende Fazendo

Itens de construção

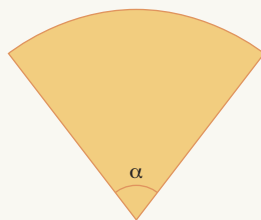
- 36 Uma fábrica produz, mensalmente, x unidades de um certo produto. O custo total de produção, em unidades monetárias, é dado, em função de x , por:

$$C(x) = 0,48x + 1500 + \frac{120\,000}{x}, \quad 0 \leq x \leq 6000$$

- a) Determina o custo total de produção de 100 unidades desse produto.
 b) Calcula a taxa média de variação no custo total de produção, quando o número de unidades produzidas aumenta de 1000 para 2000.
 c) Quantas unidades deve a fábrica produzir mensalmente, de modo a que o custo total seja mínimo?

Soluções: a) 2748 unidades monetárias. b) 0,42 c) 500 unidades.

- 37 Numa folha de cartolina desenhou-se um setor circular com 60 cm de perímetro.



Qual deve ser a medida do raio, de forma a que a área do setor circular seja máxima?

Solução: 15 cm

- 38 Uma fábrica de embalagens pretende construir uma embalagem em forma de cone. A geratriz do cone tem de medir 25 cm.
 Qual deve ser a medida do raio da base do cone de modo a que a embalagem tenha capacidade máxima?

Solução: $25\sqrt{\frac{2}{3}}$

- 39 Considera a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
 Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determina as coordenadas do ponto do gráfico de f cuja distância ao ponto de coordenadas (1, 0) é mínima.

Solução: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

- 40 Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f(-1) = -1$ e $f'(-1) = 1$. Seja g uma função definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por $g(x) = x \times f\left(\frac{1}{x}\right)$. Calcula $g'(-1)$.

Solução: 0

Desafio – Dobragem minimalista

Retomando o desafio apresentado no início deste tema, apresenta-se a seguir uma possível resolução.

Considera a figura abaixo, que ilustra a folha, onde x representa o comprimento do segmento BC , que se pretende determinar; y representa o comprimento do segmento AC ; z o comprimento da dobra AB , que se quer minimizar; w o comprimento do segmento DE .

Usando o resultado conhecido pelo nome de Teorema de Pitágoras, vê-se que:

$$x^2 = w^2 + (21 - x)^2$$

Daqui resulta que:

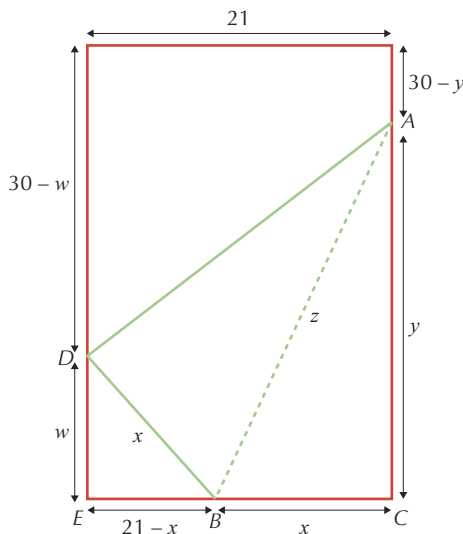
$$w^2 = 21(2x - 21)$$

Somando as áreas das regiões em que o retângulo está dividido na figura – três triângulos e um trapézio – e reparando que os triângulos ABC e ABD são iguais (porquê?), obtém-se:

$$21 \times 30 = \frac{w(21 - x)}{2} + xy + \frac{21(60 - y - w)}{2}$$

Resolvendo em ordem a y , conclui-se que:

$$y = \frac{wx}{2x - 21}$$



Usando mais uma vez o teorema dito de Pitágoras (que de facto era já conhecido muito antes de Pitágoras ter nascido) e o que já foi visto, tem-se que:

$$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{w^2 x^2}{(2x - 21)^2} = x^2 + \frac{21(2x - 21)x^2}{(2x - 21)^2} = x^2 + \frac{21x^2}{2x - 21} = \frac{2x^3}{2x - 21} = \frac{x^3}{x - \frac{21}{2}}$$

Agora, uma vez que a função $h(t) = t^2$ é crescente, para encontrar o valor mínimo que z assume,

basta determinar o valor mínimo de z^2 . Faça-se $f(x) = \frac{x^3}{x - \frac{21}{2}}$.

Do enunciado do problema resulta que x deve pertencer ao intervalo $I = \left[\frac{30(10 - \sqrt{51})}{7}, 21 \right]$ (porquê?), sendo que $\frac{30(10 - \sqrt{51})}{7} \approx 12,251$.

Como $f'(x) = \frac{3x^2 \left(x - \frac{21}{2} \right) - x^3}{\left(x - \frac{21}{2} \right)^2} = \frac{x^2 \left(2x - 3 \frac{21}{2} \right)}{\left(x - \frac{21}{2} \right)^2}$, vê-se que $f(x)$ tem um único possível extremo local

em I , nomeadamente em $x_0 = \frac{3}{4} \times 21$. Analisando o sinal de $f'(x)$ no intervalo I , é fácil ver que x_0

é um mínimo local. Como $f\left(\frac{30(10 - \sqrt{51})}{7}\right) \approx 1050$, $f(21) = 882$ e $f\left(\frac{3}{4} \times 21\right) = 744,1875$, resulta que

o valor procurado é, de facto, x_0 . Ou seja, a resposta à pergunta feita é que se deve dobrar a folha a partir de um ponto que fica exactamente a 15,75 centímetros do vértice C .

Repara que esse ponto é o ponto médio entre o vértice E e o ponto médio de EC .

Desafio - O tesouro d'A Estatística

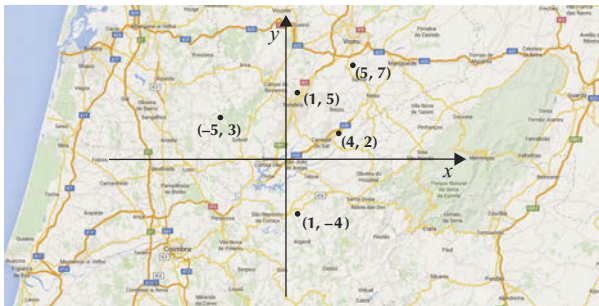
No decurso da investigação da endinheirada D. Isabela Isaura Inocência e Silva (traficante de obras de arte roubadas), a famosa inspetora Lupa Ventura encontrou, lado a lado, o criptograma (texto cifrado em que as palavras foram separadas por forma a não dar indicação do seu comprimento, tendo sido removidos os sinais de pontuação e os acentos) e o mapa seguintes:

20 AULA DIGITAL

Video

"O Tesouro d'A Estatística."

CPAVR	CPRFY	ZRCOC	POAUG	PFGVR
ZYCNZ	EATRC	OAFDA	CJRFF	PYCAN
GUEAQ	RFNAZ	NYFRZ	AROCT	CRFOF
PGDNC	ECJFO	FGUCR	UCXFU	DAECD
ZXCOA	TRFEZ	PCUFN	YFNAT	ANYAO
AUCTC	EGBCC	VEZPP	CFZLG	CDCYR
FPFHG	FQZEC	NCRFY	COFUZ	NZUAP
HGCOR	COAPO	CPFHG	FNEZC	OFTAN
YAPEG	BCPEA	AROFN	COCPF	PYCAF
WTDZE	ZYCUF	NYFFP	ERZYC	PZZZP



Conhecendo bem D. Isabela – que tinha alguma formação em estatística, da qual se gabava amiúde, e de onde provinha a sua alcunha de “A Estatística” –, a sagaz inspetora, que conhecia bem as técnicas básicas de criptanálise, rapidamente reconheceu que o criptograma resultava da aplicação de uma cifra de substituição simples, em que cada letra do alfabeto é trocada por uma outra, numa permutação predeterminada. Sabendo que, em média, as oito letras mais frequentes na língua portuguesa são AEOSIRDN, por ordem decrescente, não foi difícil à astuta inspetora Ventura decodificar o texto. Entre outras coisas incriminatórias, ficou a saber que algumas das peças mais valiosas, roubadas pelos cúmplices d'A Estatística, se encontravam num local que ficava, como se lia no texto cifrado, “no ponto do mapa cuja abcissa é igual a três e que fica na reta de mínimos quadrados da sequência de pontos cujas coordenadas estão explicitamente escritas.”

Consegues localizar no mapa as coordenadas do ponto onde se encontram as peças roubadas e decifrar o criptograma na sua totalidade?



TEMA V

Estatística

1. Introdução
2. Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação

UNIDADE 1

Introdução

Ao longo do teu percurso escolar, tens vindo a trabalhar com diversos conceitos no âmbito da estatística:

- aprendeste a classificar variáveis e a escolher formas adequadas de apresentar os dados de que dispões;
- familiarizaste-te com gráficos, tabelas, medidas de localização e medidas de dispersão;
- percebeste como se pode utilizar um conjunto de dados para descrever uma situação e de que forma a estatística pode auxiliar na tomada de decisão.

Os conceitos abordados em anos anteriores permitem-nos descrever uma única variável, de forma isolada. No entanto, de uma mesma amostra podemos registar diferentes variáveis.

Além de sermos capazes de descrever uma variável, muitas vezes é relevante estudar de que forma duas ou mais variáveis podem estar associadas, no sentido de melhor compreendermos e prevermos o seu comportamento.

Nota

Segundo a Organização Mundial de Saúde, considera-se que há excesso de massa quando o IMC é igual ou superior a 25, e que há obesidade quando o IMC é igual ou superior a 30.

in www.portaldasaude.pt

Por exemplo, para diagnosticar a obesidade de um indivíduo adulto, os técnicos de saúde utilizam o Índice de Massa Corporal (IMC), que se determina dividindo a massa (em quilogramas) pela altura (em metros), elevada ao quadrado.

$$\text{IMC} = \frac{\text{Massa}}{\text{Altura}^2}$$

Nem sempre é possível estabelecer associações entre diferentes variáveis, mesmo em situações nas quais ela, de facto, existe. Por outro lado, em situações da vida real, dada a complexidade das variáveis que interessa estudar, para se poder prever o valor de uma variável de forma fiável, é muitas vezes necessário ter informação sobre diversas outras variáveis.

O programa de Matemática A do 11.º ano contempla apenas o estudo da associação entre variáveis quantitativas. Não obstante, note-se que é possível levar a cabo um estudo sobre a associação entre variáveis qualitativas. Estes são muitos frequentes no âmbito das ciências sociais e humanas.

UNIDADE 2

Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação

2.1. Amostras bivariadas

Quando consideramos uma amostra de dimensão n , podemos estudar diversas características de cada uma das n unidades estatísticas.

Cada uma dessas características é considerada uma **variável estatística**.

Exemplo

Considera que se registaram a massa x e a altura y de uma amostra A , constituída por 20 alunos de uma escola.

Obtemos, deste modo, duas amostras $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$, de dimensão 20, das variáveis em questão.

Todos os conceitos abordados nos anos anteriores podem ser utilizados para descrever cada uma das amostras de forma isolada. No entanto, se pretendermos estudar estas variáveis conjuntamente, devemos considerar a amostra constituída pelos pares ordenados dos valores das variáveis x e y para cada um dos elementos da amostra A .

No exemplo anterior, cada aluno contribui com um par ordenado, constituído pela sua massa e pela sua altura.

Definição

Dados uma amostra A , de dimensão $n \in \mathbb{N}$, de uma população cujos elementos estão numerados de 1 a n , e duas variáveis estatísticas x e y dessa população, a sequência $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ designa-se por **amostra bivariada das variáveis x e y** e representa-se por $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Esta amostra tem também **dimensão n** .

Nota

De modo a simplificar a linguagem, podemos designar esta amostra por **amostra de dados bivariados**.

Uma amostra bivariada das variáveis x e y pode ser representada graficamente pelos pontos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ num referencial ortogonal do plano.



EST11_1.4

20 AULA DIGITAL**Resolução**

PowerPoint: Todos os exercícios de "Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação"



EST11_1.5
EST11_1.6
EST11_1.7

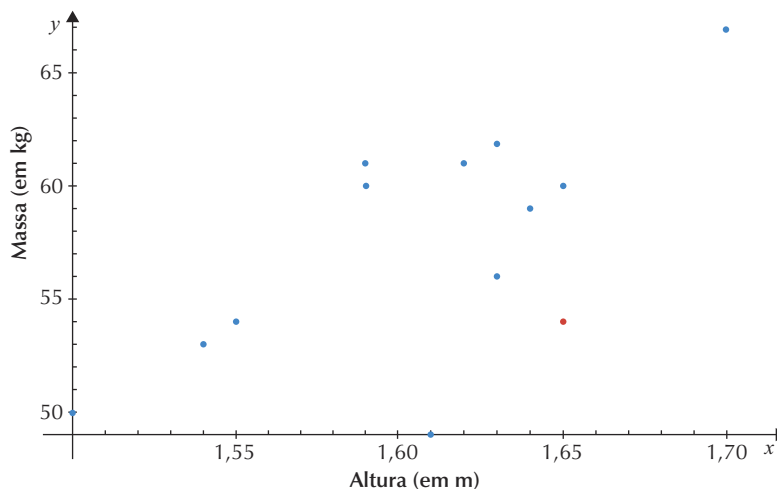
20 AULA DIGITAL

■ Simulador

GeoGebra: "Diagrama de dispersão e centro de gravidade"

Exemplo

A amostra bivariada $((1,5; 50), (1,55; 54), (1,65; 60), (1,63; 62), (1,59; 61), (1,64; 59), (1,54; 53), (1,61; 49), (1,7; 67), (1,59; 60), (1,62; 61), (1,63; 56), (1,65; 54))$ das variáveis altura (em m) e massa (em kg) dos 13 rapazes da turma da Maria pode ser representada graficamente por:



Nota

Quando dois elementos de uma amostra têm os mesmos valores das variáveis x e y , eles são representados pelo mesmo ponto no diagrama de dispersão.

A esta representação gráfica, para dados bivariados, chamamos **diagrama de dispersão** ou **nuvem de pontos**.

Por exemplo, o par ordenado $(1,65; 54)$ é representado pelo ponto que se encontra a vermelho.

Em casos concretos da vida real, tem sentido definir uma das variáveis como sendo a variável independente e a outra como sendo a variável dependente. Esta escolha não tem por base qualquer conceito estatístico e deve ser feita tendo em conta o conhecimento empírico da situação em causa. Existem também situações nas quais nenhuma das variáveis depende da outra e a escolha da variável dependente e da variável independente está relacionada com o objetivo do estudo. Por exemplo, em situações em que é mais fácil, ou mais barato, medir uma variável x do que uma variável y e em que é possível determinar o valor de y em função do valor de x .

Quando um técnico de saúde determina o Índice de Massa Corporal de um paciente, naturalmente considera que a variável independente é a altura e a variável dependente é a massa. Ora, uma vez que um indivíduo não pode controlar a sua altura, é a sua massa que vai determinar se este índice se encontra dentro do intervalo que se considera adequado.

Definição

Dada uma amostra de dados bivariados, a variável considerada independente é designada por **variável explicativa** e a variável considerada dependente é designada por **variável resposta**.

Exercício resolvido

Em cada uma das seguintes situações, indica a variável explicativa e a variável resposta.

- a) Uma cadeia de supermercados levou a cabo um estudo no qual foram registados os valores dos rendimentos familiares mensais dos seus clientes e os gastos mensais destes com a alimentação.
- b) Num clube de atletismo, registaram-se os tempos que os atletas demoraram a concluir uma maratona e o respetivo número de horas semanais de treino.
- c) Para estudar a poluição de um rio, um cientista mediu ao longo do ano a concentração de um determinado componente biológico e registou a precipitação pluviométrica da semana anterior à medição dessa concentração.
- d) Para estudar o crescimento de uma girafa ao longo da sua vida foi registada a altura e a idade de uma amostra de 200 girafas.
- e) Após a correção de um teste de Matemática, a professora perguntou aos seus alunos quantos tinham estudado para a sua disciplina na semana anterior ao teste, e relacionou estes valores com as classificações obtidas pelos alunos.

Sugestão de resolução

- a) Este estudo pode permitir prever os gastos mensais das famílias com produtos alimentares, consoante o rendimento de cada família. A variável explicativa é “rendimento familiar” e a variável resposta é “gastos mensais com alimentação”.
- b) Neste estudo pretende-se prever de que forma o número de horas de treino semanal influencia o tempo necessário para concluir uma maratona. A variável explicativa é “número de horas de treino semanal” e a variável resposta é “tempo para concluir a maratona”.
- c) Nesta situação tem sentido considerar que a quantidade de precipitação influencia a concentração de um componente biológico num rio. A variável explicativa é “quantidade de precipitação pluviométrica” e a variável resposta é “concentração do componente biológico”.
- d) Neste estudo pretende-se prever o tamanho de uma girafa em função da sua idade. A variável explicativa é “idade da girafa” e a variável resposta é “tamanho da girafa”.
- e) Nesta situação espera-se que o número de horas de estudo tenha influência na classificação obtida. Assim, a variável explicativa é “número de horas de estudo” e a variável resposta é “classificação obtida”.

- 1 Em cada uma das seguintes situações, indica a variável explicativa e a variável resposta.

- a) Para estudar a associação entre a percentagem de massa muscular de um indivíduo e a sua idade, uma nutricionista selecionou 15 homens, com idades entre os 30 e os 60 anos, e registou, para cada um deles, ambas as variáveis.
- b) Para avaliar a forma como um material metálico reage aos efeitos climáticos, foram registados os comprimentos de uma barra desse material em diferentes temperaturas ambientais.

PROFESSOR

Soluções

- 1.
- a) Variável explicativa: “idade”.
Variável resposta: “percentagem de massa muscular”.
 - b) Variável explicativa: “temperatura ambiental”.
Variável resposta: “comprimento da barra”.

2.2. Reta de mínimos quadrados e coeficiente de correlação

Um dos objetivos da metodologia estatística, que se apresenta de seguida, é estabelecer associações matemáticas entre a variável dependente e a variável independente, no sentido de prever o valor da variável resposta a partir do valor da variável explicativa.

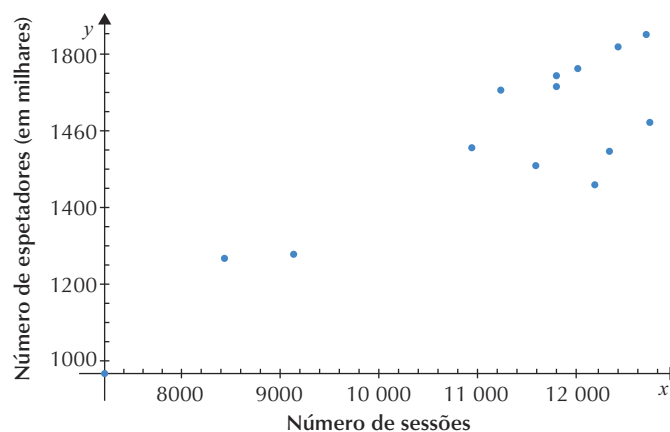
Considera a tabela seguinte, onde se registaram o número de sessões de teatro realizadas no período de 2001 a 2014, inclusive, e o respetivo número de espetadores (em milhares).

Ano	Número de sessões	Número de espetadores (em milhares)	Ano	Número de sessões	Número de espetadores (em milhares)
2001	7203	970	2008	12 703	1850
2002	8422	1267	2009	12 427	1816
2003	9138	1281	2010	12 723	1620
2004	11 233	1706	2011	12 174	1460
2005	11 804	1746	2012	11 599	1509
2006	10 939	1556	2013	12 332	1553
2007	12 012	1762	2014	11 796	1720

Fonte: PORDATA

Para tentar prever o número de pessoas que assiste a espetáculos de teatro durante um ano, em função do número de sessões realizadas durante esse ano, considere-se o número de sessões como a variável explicativa e o número de espetadores como a variável resposta.

A figura mostra o diagrama de dispersão dos dados.



Observa-se que a valores baixos do número de sessões correspondem, em geral, valores baixos do número de espetadores, e a valores altos do número de sessões correspondem, em geral, valores altos do número de espetadores.

Intuitivamente, parece que o conhecimento sobre o número de sessões poderá ser utilizado na previsão do número de espetadores.

Nota

O modelo é simples se houver apenas uma variável explicativa e é múltiplo se houver mais do que uma variável explicativa. O programa de Matemática A do 11º ano apenas contempla o estudo do modelo linear simples.

Para efetuar formalmente esta previsão, necessitamos de um modelo, isto é, de uma descrição de um tipo de associação particular entre as variáveis. Note-se que um modelo permite descrever a realidade apenas aproximadamente e não exatamente.

Suponhamos que pretendemos prever qual será o número de espetadores para um determinado ano em que serão realizadas 12 000 sessões de teatro. Podemos considerar um modelo linear.

Considera os seguintes exemplos:

Modelo	Gráfico	Equação
A		$y = 0,13x + 129$
B		$y = 0,1x + 400$
C		$y = -0,1x + 2700$

Com o modelo A, a previsão do número de espetadores para esse ano é de 1689 milhares, com o modelo B é de 1600 milhares e com o modelo C é de 1500 milhares.

É fácil perceber que o modelo C está muito desajustado, até porque, ao contrário do que constatamos anteriormente, faz corresponder os maiores valores do número de sessões aos menores valores do número de espetadores. No entanto, é mais difícil decidir se o modelo A descreve melhor a associação entre as variáveis do que o modelo B.

Em seguida, vamos explorar uma das técnicas que permite essa tomada de decisão.

Definição

Fixado um referencial ortogonal do plano e considerada uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o valor de $y_i - ax_i - b$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ designa-se por **desvio vertical do ponto $P_i(x_i, y_i)$ em relação à reta t** e representa-se por e_i .

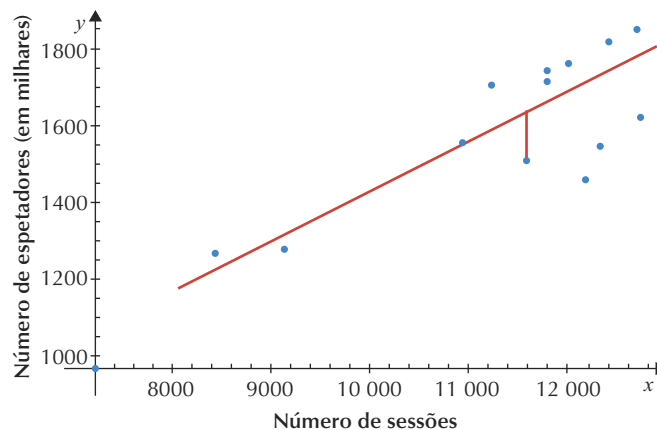
No modelo A, anteriormente referido, a reta t tem equação $y = 0,13x + 129$.

O desvio vertical do ponto $P_3(9138, 1281)$, referente ao ano 2003, em relação à reta t , é igual a $e_3 = 1281 - 0,13 \times 9138 - 129 = -35,94$.

Repara que, com este modelo, o número de espetadores para um ano em que sejam realizadas 9138 sessões é $0,13 \times 9138 + 129 = 1316,94$ e $e_3 = 1281 - 1316,94$.

Assim, o desvio vertical de P_3 em relação à reta t é precisamente a diferença entre o valor empírico do número de espetadores e o valor previsto pelo modelo.

O módulo deste valor corresponde ao comprimento do segmento de reta $[P_{12} A]$, onde A é a interseção da reta vertical que passa por P_{12} e a reta t .



Seja qual for a reta considerada, verifica-se a seguinte propriedade:

Propriedade

Fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano e uma reta t de equação $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, as condições $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$ são equivalentes,

sendo $e_i = y_i - (ax_i + b)$, $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ e $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$.

Demonstração

Nas condições da proposição, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) &= 0 \quad (\text{pela definição de } e_i) \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i - nb &= 0 \quad (\text{pelas propriedades dos somatórios}) \\ \Leftrightarrow n\bar{y} - na\bar{x} - nb &= 0 \quad (\text{pelas propriedades da média}) \\ \Leftrightarrow nb &= n\bar{y} - na\bar{x} \\ \Leftrightarrow b &= \bar{y} - a\bar{x}, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

Num bom modelo espera-se que a diferença entre os valores previstos pelo modelo e os valores observados na amostra seja pequena.

Assim, para analisar dois modelos lineares, podemos comparar a soma dos quadrados dos desvios e verificar a qual deles corresponde a menor soma.

A seguinte propriedade mostra que existe uma reta cuja soma dos quadrados dos desvios é mínima.

Propriedade

Fixado um referencial ortogonal num plano e dados um número natural n , uma sequência $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos desse plano, não pertencentes a uma mesma reta vertical, e uma reta t de equação $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b = \bar{y} - a\bar{x}$, a função definida por $f(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2$ atinge um valor mínimo absoluto no ponto $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$. Esta reta designa-se por **reta de mínimos quadrados**.

Demonstração

Nas condições da proposição, a função f pode ser definida por:

$$f(a) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - (\bar{y} - a\bar{x}))^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} + a(\bar{x} - x_i))^2$$

Usando as regras de derivação e efetuando algumas simplificações, a função derivada pode ser expressa por:

$$f'(a) = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\bar{x} - x_i) + 2a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Vamos determinar os zeros da derivada:

$$\begin{aligned} f'(a) = 0 &\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(\bar{x} - x_i) + 2a \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} - n\bar{x}\bar{y} + n\bar{x}\bar{y}}{SS_x} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x} \end{aligned}$$

Uma vez que a derivada é uma função linear, e o coeficiente do termo do primeiro grau é negativo, $-\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$, sabemos que a função f é decrescente para valores inferiores ao zero da derivada e crescente para valores superiores a esse zero. Podemos então concluir

que a função f tem um mínimo absoluto no ponto $a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{SS_x}$.



EST11_1.3

- 2 Considera os pontos $A(1; 2,1)$, $B(2; 2,5)$, $C(3; 4,1)$ e $D(4; 4,8)$ e a reta r de equação $y = 1,2x + 0,3$.

- a) Determina o desvio vertical de cada um dos pontos em relação à reta r .
b) Determina a soma dos desvios.

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Nota

1. Na propriedade ao lado, a condição $b = \bar{y} - a\bar{x}$ podia ter sido substituída pela condição $\sum_{i=1}^n e_i = 0$, uma vez que estas são equivalentes.

2. Se considerarmos uma reta t de tal forma que a soma dos desvios verticais relativamente a t , de uma amostra (x_i, y_i) bivariada de dados quantitativos, é zero, o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence a essa reta. Nesta situação está, por exemplo, a reta dos mínimos quadrados.

Recorda

$$SS_x = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- 3 Considera uma sequência $(P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n))$ de pontos de um plano munido de um referencial ortogonal e uma reta t de equação $y = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$.
Mostra que, se $\sum_{i=1}^n e_i = 0$, então o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta t .

PROFESSOR

Soluções

2.

- a) $(0,6; -0,2; 0,2; -0,3)$
b) $0,3$



EST11_1.8

- 4 Considera a amostra bivariada $(x, y) = ((600, 533), (700, 568), (900, 695), (1000, 746), (1200, 869), (1500, 1038), (2000, 1282), (2500, 1501), (3000, 1769))$, referente aos valores do ordenado bruto, x , e líquido, y , arredondado às unidades do euro, de um trabalhador do setor privado, no ano de 2015. Considera como variável explicativa o valor do ordenado bruto e como variável resposta o valor do ordenado líquido.
- Determina as médias dos ordenados brutos e dos ordenados líquidos, arredondadas às unidades do euro.
 - Com o auxílio de uma calculadora gráfica, representa a nuvem de pontos e a reta t de equação $y = 0,55x + 230$.
 - Determina o desvio vertical de cada um dos pontos relativamente à reta t .
 - Calcula a soma dos desvios determinados na alínea anterior e verifica se é nula.
 - Com base na alínea anterior, indica, justificando, se podemos afirmar que a reta t é a reta dos mínimos quadrados desta amostra.

PROFESSOR

Soluções

- 4.
- $\bar{x} = 1489$ e $\bar{y} = 1000$
 -
 - A sequência dos desvios é $(-27, -47, -30, -34, -21, -17, -48, -104, -111)$.
 - A soma dos desvios é -439 .
 - A reta t não pode ser a reta dos mínimos quadrados.

Exercício resolvido

1. Na tabela abaixo estão registados dados relativos à idade (em meses) e à altura (em centímetros) de 12 pessoas de uma comunidade.

Idade	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Altura	74,5	76,3	77	78	78,1	79,3	79,8	80,2	80,5	81	82	84

Considera a variável idade como explicativa e a variável altura como resposta. Utiliza uma calculadora gráfica para responder às seguintes questões (utiliza aproximações às centésimas).

- Determina a média das idades e a média das alturas destas pessoas.
- Representa num referencial cartesiano a nuvem de pontos $P_i(x_i, y_i)$ e a reta t cuja equação, com aproximação dos coeficientes às centésimas, é dada por $y = 0,71x + 62,54$.
- Verifica que o ponto $Q(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta t , utilizando aproximações às centésimas.
- Determina o desvio vertical e_i de cada um dos pontos P_i em relação à reta t .
- Calcula a soma de todos os desvios calculados na alínea anterior e verifica que é nula.
- Determina o valor da expressão $\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x}$ e verifica que é igual ao declive da reta t , com aproximação às centésimas.

Adaptado de *Caderno de Apoio às Metas Curriculares*, 11.º ano

Sugestão de resolução

Consideremos x a variável idade e y a variável altura.

Casio fx-CG 10/20

No menu principal seleciona o ícone **Statistics**:



Preenche **List 1**, com os valores da variável idade, e **List 2** com os valores da variável altura:

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	18	74.5		
2	19	76.3		
3	20	77		
4	21	78		
				74.5

Sugestão de resolução

- a) Seleciona a opção **CALC** (F2) e, de seguida, na opção **SET** (F6), verifica que **1Var XList** se encontra preenchida com **List1** e que **1Var Freq** se encontra preenchida com **1** para o cálculo de $\bar{x}$:

1Var XList :List1	1Var Freq :1
2Var XList :List1	2Var YList :List2
2Var Freq :1	

LIST

1-Variable	$\bar{x}$ =23.5
	Σx =282
	Σx^2 =6770
	σx =3.45205252
	sx =3.60555127
	n =12

Sai da opção **SET** (EXIT) e escolhe a opção **1VAR** (F1).

Repete o procedimento, garantindo que **1Var XList** se encontra preenchida com **List2** e que **1Var Freq** se encontra preenchida com **1** para o cálculo de $\bar{y}$.

1Var XList :List2	1Var Freq :1
2Var XList :List1	2Var YList :List2
2Var Freq :1	

LIST

1-Variable	$\bar{x}$ =79.225
	Σx =950.7
	Σx^2 =75394.37
	σx =2.50270686
	sx =2.61399207
	n =12

Podemos, assim, concluir que $\bar{x} = 23,5$ e $\bar{y} \approx 79,23$.

- b) Seleciona a opção **GRAPH** (F1):

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	18	74.5		
2	19	76.3		
3	20	77		
4	21	78		

74.5

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3 SELECT SET

De seguida, na opção **SET** (F6), verifica que no **Graph Type** está seleccionada a opção **Scatter**, no **XList** a **List1**, no **YList** a **List2** e no **Frequency** o **1**:

StatGraph1	Graph Type :Scatter
	XList :List1
	YList :List2
	Frequency :1
	Mark Type : ☐
	Color Link :Off

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3

Sai da opção **SET** (EXIT) e escolhe a opção **SEL** (F4). Confirma que no **StatGraph1** está seleccionada a opção **DrawOn**.

StatGraph1 :DrawOn	StatGraph2 :DrawOff
StatGraph3 :DrawOff	

On Off DRAW

(continua)

Texas TI-84 Plus C

Pressiona a tecla **STAT**:

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP
EDIT CALC TESTS
1:Edit...
2:SortA(
3:SortD(
4:ClrList
5:SetUpEditor

Preenche **L1**, com os valores da variável idade, e **L2** com os valores da variável altura:

L1	L2	L3	L4	L5	2
18	74.5				
19	76.3				
20	77				
21	78				
22	78.1				
23	79.3				
24	79.8				
25	80.2				
26	80.5				
27	81				
28	82				

L2(L1)=74.5

- a) Pressiona a tecla **STAT** e selecciona a opção **CALC**, **1-Var Stats**:

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP
EDIT CALC TESTS
1:1-Var Stats
2:2-Var Stats
3:Med-Med
4:LinReg(ax+b)
5:QuadReg
6:CubicReg
7:QuartReg
8:LinReg(a+bx)
9:LnReg

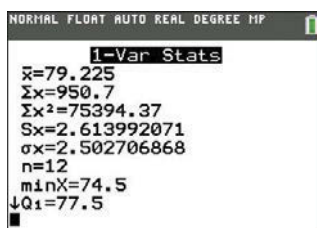
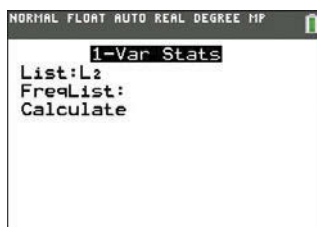
Preenche de acordo com a imagem abaixo:

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP
1-Var Stats
List:L1
FreqList:
Calculate

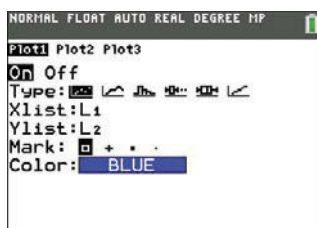
Pressiona **ENTER**:

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP
1-Var Stats
$\bar{x}$ =23.5
Σx =282
Σx^2 =6770
Sx =3.605551275
σx =3.45205253
n =12
$\min X$ =18
$\downarrow Q1$ =20.5

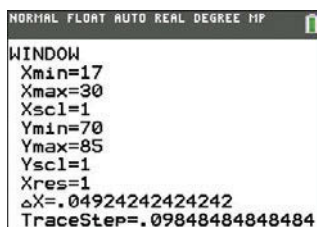
Repete o procedimento para L2:



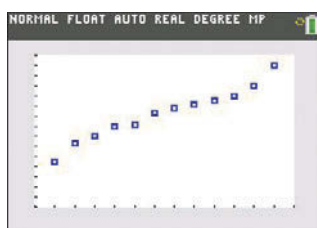
b) Para se obter a nuvem de pontos, pressiona **STAT PLOT**, seleciona **1:Plot1** e procede como explicado na imagem abaixo:



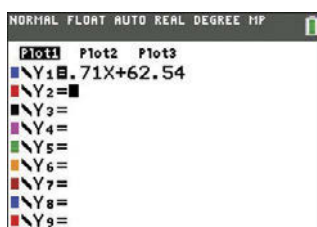
Escolhe uma janela de visualização adequada:



Pressiona a tecla **GRAPH**:



No editor de funções $y =$ escreve a expressão analítica pretendida:

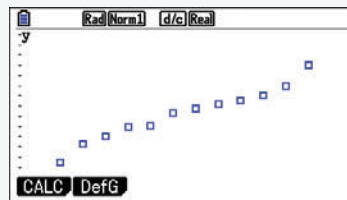


Exercício resolvido

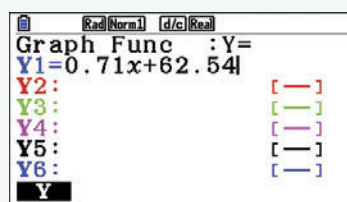
(continuação)

Sugestão de resolução

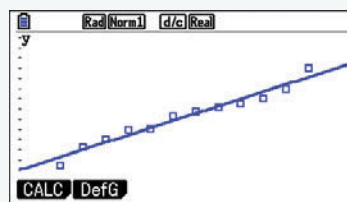
Sai da opção **SEL (EXIT)** e escolhe a opção **GRAPH1**. Esta é a nuvem de pontos.



Para incluir também a reta pretendida, deves seleccionar a opção **DefG (F2)** e introduzir a sua equação:



Por fim, seleciona a opção **Draw (F6)** e obténs a representação gráfica da nuvem de pontos e da reta t :



c) Para provar que o ponto Q pertence à reta t , basta verificar que:

$$0,71 \times 23,5 + 62,54 = 79,225 \approx 79,23$$

d) Move o cursor para a célula **List3** e carrega no botão **OPTN**:

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	18	74.6		
2	19	76.3		
3	20	77		
4	21	78		

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3 SELECT SET

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	18	74.5		
2	19	76.3		
3	20	77		
4	21	78		

Selecione a opção **LIST(F1)** e escreva **List 2-(0.71*List1+62.54)** para obter uma coluna com os desvios verticais de cada um dos pontos. Obténs assim a sequência: (-0,82; 0,27; 0,26; 0,55; -0,06; 0,43; 0,22; -0,09; -0,5; -0,71; -0,42; 0,87).

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	18	74.5	-0.82	
2	19	76.3	0.27	
3	20	77	0.26	
4	21	78	0.55	

-0.82

List List Math Dim Fill(Seq

Sugestão de resolução

- e) Seleciona a opção **CALC(F2)** e verifica na opção **SET(F6)** que tens **1Var XList:** List 3 e **1Var Freq:** 1:

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	18	74.5	-0.82	
2	19	76.3	0.27	
3	20	77	0.28	
4	21	78	0.55	
			-0.82	

1Var XList	:List3
1Var Freq	:1
2Var XList	:List1
2Var YList	:List2
2Var Freq	:1

Sai da opção **SET (EXIT)** e escolhe a opção **1VAR (F1)**. Como podemos verificar pela imagem, a soma dos desvios é nula.

1-Variable	
$\bar{x}$	=0
Σx	=0
Σx^2	=3.0478
σx	=0.50396759
sx	=0.52637698
n	=12

- f) Neste caso específico, temos que:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{22\,443 - 12 \times 23,5 \times 79,225}{143} \approx 0,71$$

Texas Ti-nspire

No ecrã inicial cria uma página com a aplicação “Listas” e “Folha de Cálculo”:

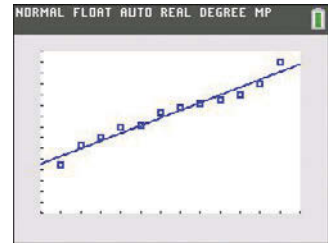


Preenche as colunas **A** e **B**, com os valores da variável idade e com os valores da variável altura, respetivamente.

	A	B	C	D
1	18	74.5		
2	19	76.3		
3	20	77		
4	21	78		
5	22	78.1		

(continua)

Pressiona a tecla **GRAPH**:



- d) Pressiona a tecla **STAT** e escolhe a opção **EDIT** e, com o cursor na coluna **L3**, digita List 2-(0.71*List1+62.54):

L1	L2	L3	L4	L5	
18	74.5				
19	76.3				
20	77				
21	78				
22	78.1				
23	79.3				
24	79.8				
25	80.2				
26	80.5				
27	81				
28	82				

Pressiona **ENTER**:

L1	L2	L3	L4	L5	
18	74.5	-0.82			
19	76.3	.27			
20	77	.26			
21	78	.55			
22	78.1	-.06			
23	79.3	.43			
24	79.8	.22			
25	80.2	-.09			
26	80.5	-.5			
27	81	-.71			
28	82	-.42			

- e) Pressiona a tecla **STAT**, seleciona a opção **CALC**, **1-Var Stats** e preenche de acordo com a imagem abaixo:

1-Var Stats	
List:	L3
FreqList:	
Calculate	

Pressiona **ENTER**:

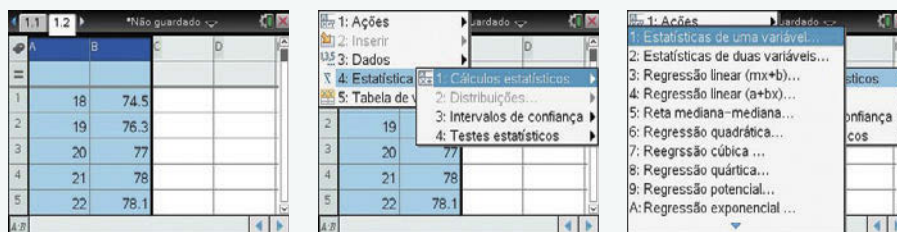
1-Var Stats	
$\bar{x}$	=0
Σx	=0
Σx^2	=3.0478
Sx	=.5263769821
σx	=.5039675916
n	=12
$\min X$	=-.82
$Q1$	=-.46

Exercício resolvido

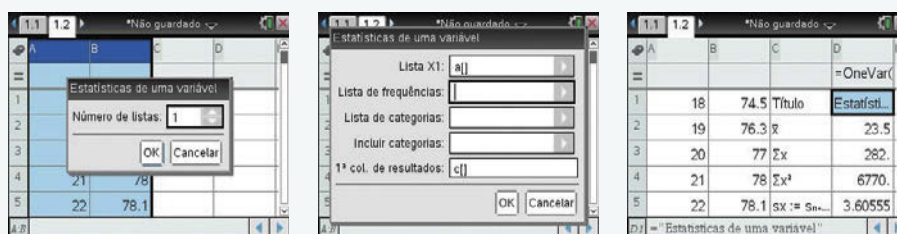
(continuação)

Sugestão de resolução

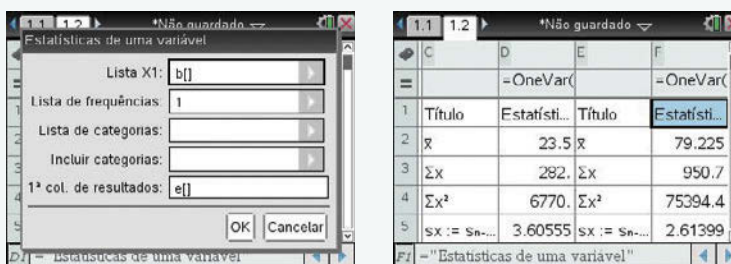
- a) Seleciona as colunas anteriores, pressiona a tecla **MENU** e escolhe as opções 4: Estatística, 1: Cálculos estatísticos, 1: Estatísticas de uma variável:



Preenche o “Número de listas” com 1 e pressiona OK. Preenche Lista X1:a[] e 1ª coluna de resultados:c[]:



Repete o procedimento para os valores da coluna B:



Podemos assim concluir que $\bar{x} = 23,5$ e $\bar{y} \approx 79,23$

- b) No cabeçalho da coluna A escreve x_i e no cabeçalho da coluna B escreve y_i :

A	B	C	D
x_i	y_i		
1	18	74.5	Título
2	19	76.3	$\bar{x}$
3	20	77	Σx
4	21	78	Σx^2
5	22	78.1	$s_x := s_{n-1}$

APRENDE FAZENDO

Págs. 163, 167, 168 e 170
Exercícios 14, 22, 25 e 31

CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

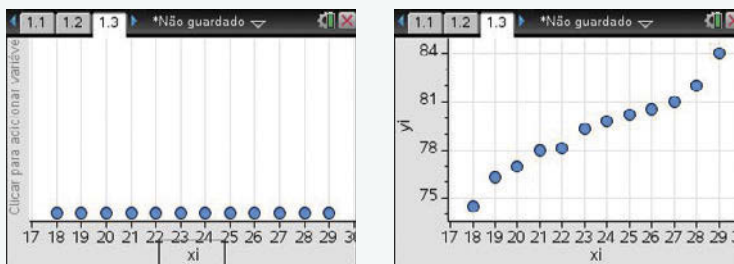
Págs. 63 e 64
Exercícios 1, 3, 4 e 7

Sugestão de resolução

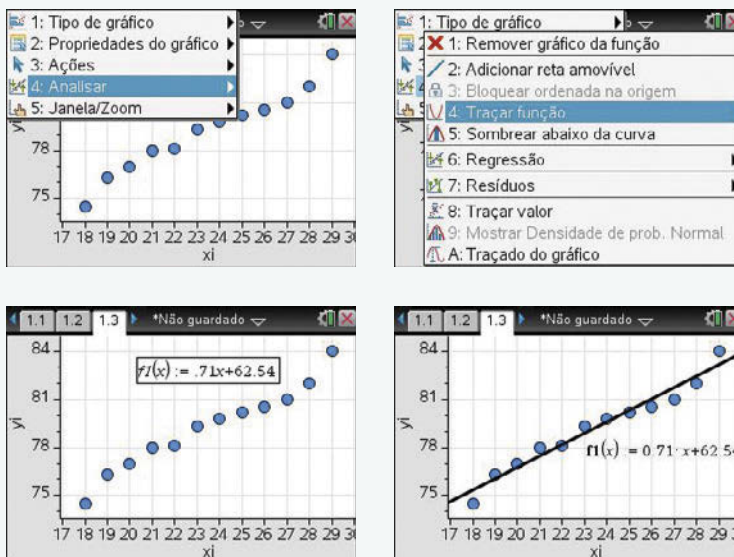
Insere uma página nova: **CTRL+page** e escolhe a **opção 5: Adicionar dados e Estatística**, pressiona **ENTER** e aparece uma “nuvem de pontos”:



Desloca o cursor para o eixo horizontal, clica para adicionar variável e escolhe **xi**. Desloca o cursor para o eixo vertical, clica para adicionar variável e escolhe **yi**. A nuvem de pontos é alterada ficando de acordo com os dados do problema:



Clica em **MENU** e seleciona as opções **4: Analisar** e **4: Traçar função**. Digita a expressão pretendida e aparece o gráfico da reta:



- c) Para provar que o ponto **Q** pertence à reta **t**, basta verificar que:
- $$0,71 \times 23,5 + 62,54 = 79,225 \approx 79,23$$

(continua)

Exercício resolvido

(continuação)

Sugestão de resolução

- d) Regressa à página onde estão as colunas x_i e y_i e na 2.ª linha da coluna G digita $y_i - (0.71 \cdot x_i + 62.54)$ e pressiona ENTER:

	Título	Estatísti...	
1			0.82
2	$\bar{x}$	79.225	0.27
3	Σx	950.7	0.26
4	Σx^2	75394.4	0.55
5	$s_x := s_n \dots$	2.61399	-0.06

Obtém assim a sequência:

(-0,82; 0,27; 0,26; 0,55; -0,06; 0,43; 0,22; -0,09; -0,5; -0,71; -0,42; 0,87)

- e) Seleciona a coluna G e pressiona a tecla MENU. Seleciona as opções 4: Estatística, 1: Cálculos estatísticos, 1: Estatísticas de uma variável. Preenche o “Número de listas” com 1 e pressiona OK:

Como podemos verificar pela imagem, a soma dos desvios é nula.

- f) Neste caso específico, temos que:

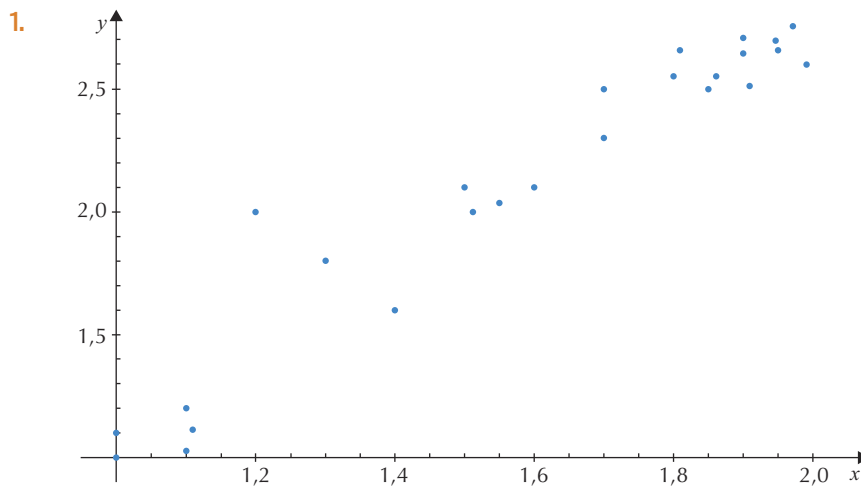
$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} = \frac{22\,443 - 12 \times 23,5 \times 79,225}{143} \approx 0,71$$

Já vimos que, nas situações em que o modelo linear se ajusta aos dados, ou seja, quando faz sentido prever o valor da variável resposta em função do valor da variável explicativa, através de um modelo linear, a reta dos mínimos quadrados é aquela cuja distância entre os valores previstos e os valores observados é menor.

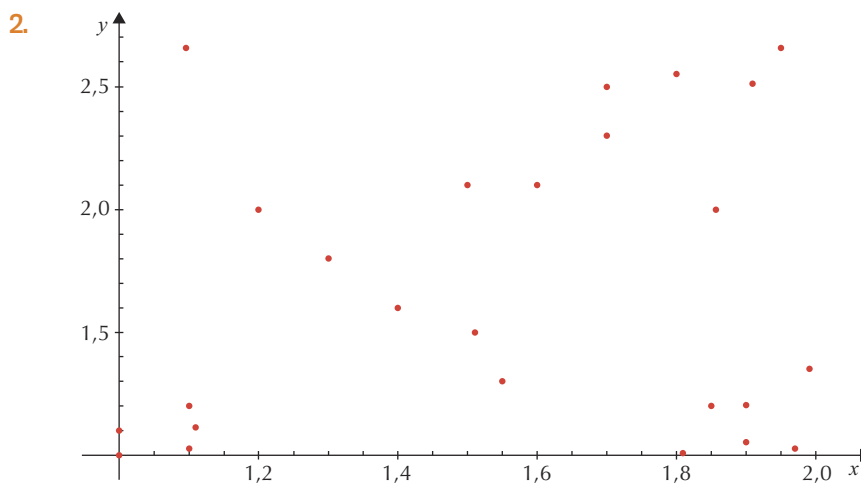
Existem, no entanto, situações em que o modelo linear não é o mais adequado e, por isso, não tem sentido utilizar a reta dos mínimos quadrados para fazer qualquer previsão.

Exemplos

Considera os seguintes diagramas de dispersão.



Nesta situação, os pontos estão dispostos de uma forma aproximadamente linear, ou seja, em torno de uma reta.



Neste caso, não parece existir qualquer associação linear entre as variáveis, uma vez que os pontos não se encontram dispostos de uma forma linear.

Nestas situações, não devemos utilizar a reta dos mínimos quadrados para prever a variável resposta em função da variável explicativa.

 **APRENDE FAZENDO**
 Págs. 160, 162, 163, 168,
 169 e 170
 Exercícios 3, 4, 8, 12, 13,
 24, 29 e 32



Contextualização histórica

**Karl Pearson (1857-1936)**

Foi um matemático inglês, nascido em 1857.

Teve contributos muito significativos em diversos campos da ciência, nomeadamente na biométrica e na meteorologia. Em 1911 fundou o primeiro departamento de estatística numa universidade. Foi ele que desenvolveu o coeficiente de correlação linear que permite medir a correlação linear entre duas variáveis quantitativas.

Recorda

$$\bullet s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$$

$$\bullet s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$$

- 5 De uma amostra bivariada (x, y) , sabemos que $S_x = 2$, $S_y = 5$ e que a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = 2,3x - 5$. Determina o coeficiente de correlação linear correspondente.

PROFESSOR

Solução

5. 0,92

O diagrama de dispersão permite-nos ter uma ideia intuitiva sobre a possível existência de associação linear entre as variáveis. O coeficiente de correlação linear, que se apresenta de seguida, permite avaliar a intensidade dessa associação.

Definição

Dados um número natural n e uma amostra bivariada $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$ de dados quantitativos, designa-se por **coeficiente de correlação linear**, e representa-se por r , o quociente :

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$$

Repara que nas situações em que as variáveis x e y têm uma associação linear positiva, ou seja, que aos maiores valores de x correspondem, em geral, os maiores valores de y , espera-se que este coeficiente seja positivo.

De facto, nestas situações, espera-se que para valores de x superiores a $\bar{x}$ correspondam valores de y superiores a $\bar{y}$ e que para valores de x inferiores a $\bar{x}$ correspondam valores de y inferiores a $\bar{y}$, fazendo com que a generalidade dos termos do somatório $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ sejam **positivos**.

De forma análoga, nas situações em que as variáveis x e y têm uma associação linear negativa, ou seja, que aos maiores valores de x correspondem, em geral, os menores valores de y , espera-se que este coeficiente seja **negativo**.

Quando não existe uma associação linear entre as variáveis, espera-se que este coeficiente seja próximo de **zero**.

Este coeficiente pode também ser obtido a partir do declive da reta dos mínimos quadrados e das somas dos quadrados dos desvios de ambas as variáveis, de acordo com a seguinte propriedade.

Propriedade

Dados um número natural n e uma amostra de dados bivariados quantitativos (x, y) , com coeficiente de correlação linear r e cuja reta dos mínimos quadrados tem equação

$$y = ax + b, \text{ tem-se que } r = a \sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}.$$

Repara que, uma vez que $\sqrt{\frac{SS_x}{SS_y}}$ é um valor positivo, o sinal de r é sempre igual ao sinal de a , ou seja, o coeficiente de correlação linear tem sempre o mesmo sinal do declive da reta dos mínimos quadrados.

Exercício resolvido

Mostra que, se considerarmos uma amostra de dados bivariados quantitativos (x_i, y_i) tal que a sequência de pontos $(P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n))$ se encontra sobre uma mesma reta de equação $y = mx + b$, com $m \in \mathbb{R}^+$, então $r = 1$.

Sugestão de resolução

Se todos os pontos $P_1, P_2, \dots, P_n$ se encontram sobre a reta de equação $y = mx + b$, então $y_i = mx_i + b$, para todo o $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Pelas propriedades da média e da soma dos desvios, obtemos $\bar{y} = m\bar{x} + b$ e $SS_y = m^2 SS_x$.

Desta forma:

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(mx_i + b - (m\bar{x} + b))}{\sqrt{SS_x(m^2 SS_x)}} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(mx_i - m\bar{x})}{m\sqrt{SS_x^2}} \quad (\text{pois } m > 0) \\ &= \frac{m}{m} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{SS_x} = \\ &= 1, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

Foi possível verificar com este exercício que, quando a associação linear é total, ou seja, quando todos os pontos se encontram sobre uma mesma reta e esta tem declive positivo, então o coeficiente de correlação linear tem o valor 1.

Analogamente, prova-se que se existir uma associação linear total e o declive da reta for negativo, então o coeficiente de correlação linear tem o valor -1 .

Em todas as outras situações temos um coeficiente de correlação no intervalo $]-1, 1[$.

Além disso, a associação linear é tão mais forte quanto o valor do coeficiente de correlação linear estiver mais próximo de 1 (**correlação positiva**) ou mais próximo de -1 (**correlação negativa**), ou seja, quanto $|r|$ estiver mais próximo de 1.



EST11_1.9

20 AULA DIGITAL

■ Simulador

GeoGebra: "Variação da correlação e do coeficiente de correlação em função dos dados. Outliers"

- 6 Mostra que, se considerarmos uma amostra de dados bivariados quantitativos (x_i, y_i) tal que a sequência de pontos $(P_1(x_1, y_1), \dots, P_n(x_n, y_n))$ se encontra sobre uma mesma reta de equação $y = mx + b$, com $m \in \mathbb{R}^-$, então $r = -1$.



APRENDE FAZENDO

Págs. 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169 e 170
Exercícios 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 26, 27, 28, 30 e 33



CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

Págs. 63, 64 e 65
Exercícios 2, 5, 6, 8 e 9

- 7 Nos gráficos estão representadas três nuvens de pontos. Faz corresponder a cada gráfico um dos coeficientes de correlação indicados $r_1 = -0,25$, $r_2 = 0,76$ e $r_3 = -0,84$. Justifica.

Gráfico A

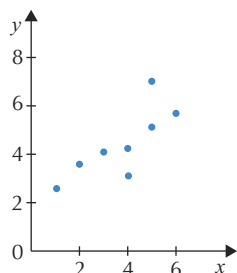


Gráfico B

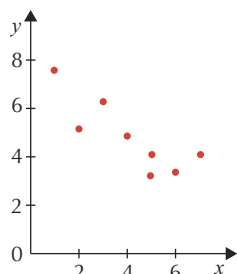
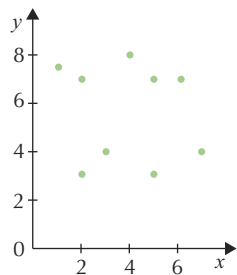


Gráfico C



Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Exercício resolvido

Considera as seguintes nuvens de pontos de amostras bivariadas (x, y) .

Gráfico A

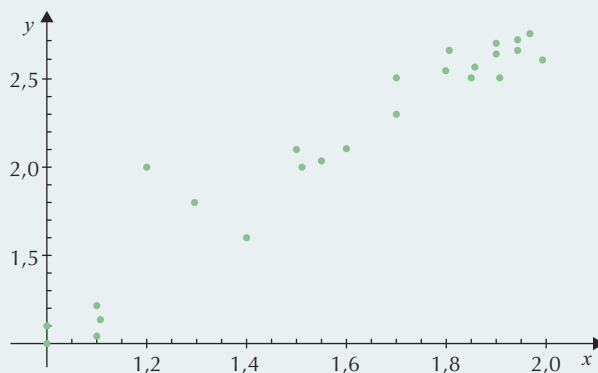


Gráfico B

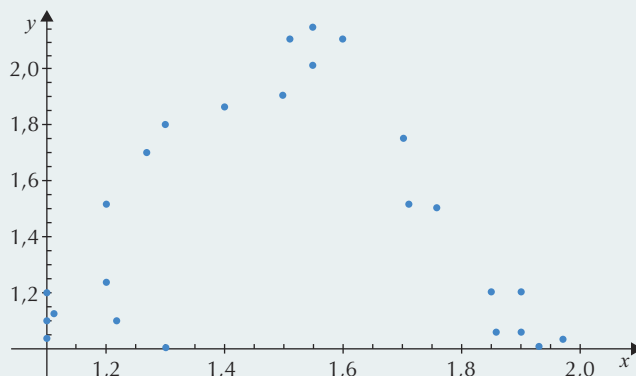
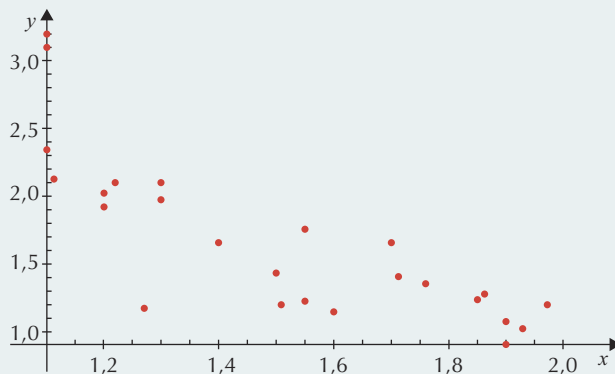


Gráfico C



- a) Faz corresponder a cada gráfico um dos coeficientes de correlação linear indicados $r_1 = 0,96$, $r_2 = -0,81$ e $r_3 = -0,02$.
- b) Indica qual dos gráficos representa a associação linear mais forte.
- c) Considera a amostra bivariada que deu origem ao gráfico A:

$(x, y) = \{(1; 1), (1; 1,1), (1,1; 1,2), (1,1; 1,03), (1,11; 1,12), (1,2; 2), (1,3; 1,8), (1,4; 1,6), (1,5; 2,1), (1,51; 2), (1,55; 2,03), (1,6; 2,1), (1,7; 2,5), (1,8; 2,55), (1,81; 2,65), (1,7; 2,3), (1,9; 2,7), (1,95; 2,65), (1,85; 2,5), (1,86; 2,55), (1,91; 2,51), (1,95; 2,66), (1,97; 2,75), (1,99; 2,6), (1,9; 2,64)\}$

Utilizando uma calculadora gráfica, responde às seguintes questões.

PROFESSOR

Solução

7. r_1 – gráfico (C)
 r_2 – gráfico (A)
 r_3 – gráfico (B)

- i) Calcula o seu coeficiente de correlação linear e verifica que, na primeira alínea, fizeste a correspondência correta.
- ii) Determina a equação da reta dos mínimos quadrados (com os coeficientes arredondados às centésimas) e indica, justificando, se esta descreve de forma adequada a associação entre as duas variáveis.
- iii) Utiliza a reta obtida na alínea anterior para determinar o valor de y previsto para $x = 1,5$.
- d) Indica, justificando, o valor lógico da seguinte proposição: “Quando o coeficiente de correlação linear é próximo de zero, podemos afirmar que não existe associação entre as variáveis”.

Sugestão de resolução

- a) Da observação das nuvens de pontos, podemos referir que no gráfico A as variáveis aparentam ter uma associação linear positiva, no gráfico C as variáveis aparentam ter uma associação linear negativa e no gráfico B não existem indícios de qualquer associação linear. Assim, dos coeficientes de correlação apresentados, somos levados a afirmar que r_1 corresponde ao gráfico A, r_2 corresponde ao gráfico C e r_3 corresponde ao gráfico B.
- b) Uma vez que o coeficiente de correlação linear cujo valor absoluto se aproxima mais de 1 é r_1 , e este está associado ao gráfico A, podemos afirmar que este é o gráfico com a associação linear mais forte.
- c) Preenche os valores das variáveis x e y nas List 1 e List2, respetivamente.

i) Casio fx-CG 10/20

Seleciona a opção **CALC** (F2):

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB				
1	1	1		
2	1	1.1		
3	1.1	1.2		
4	1.1	1.03		

Na opção **SET** (F6), verifica que no **2Var XList** está selecionada a **List1**, no **2Var YList** a opção **List 2** e no **Var Freq** a opção 1:

1Var XList	:List1
1Var Freq	:1
2Var XList	:List1
2Var YList	:List2
2Var Freq	:1

(continua)

- 8 Numa zona agrícola com um determinado declive foi realizado um estudo da influência da taxa do fluxo das águas (em litros por segundo) na erosão dos solos através da quantidade de massa de solo transportado (em quilogramas). Foram feitas cinco medições, das quais resultaram os dados da tabela seguinte.

Taxa de fluxo	0,31	0,85	1,26	2,47	3,75
Solo erodido	0,82	1,95	2,18	3,01	6,07

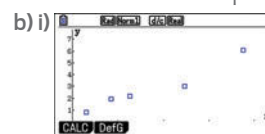
- a) Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?
- b) Utiliza uma calculadora gráfica para resolver as seguintes questões.
 - i) Considerando a taxa de fluxo como variável explicativa e o solo erodido como variável resposta, representa a nuvem de pontos num referencial ortogonal.
 - ii) Determina a média dos valores de cada uma das amostras representadas.
 - iii) Determina o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos.

PROFESSOR

Solução

8. a) Variável explicativa: “taxa de fluxo das águas”.

Variável resposta: “quantidade de massa de solo transportado”.



ii) $\bar{x} = 1,728$ e $\bar{y} = 2,806$

iii)

LinearReg(ax+b)
a = 1.38904509
b = 0.40573008
r = 0.98698349
r² = 0.93505708
MSe = 0.34125598
y = ax + b

a = 1,39 (2 c.d.)

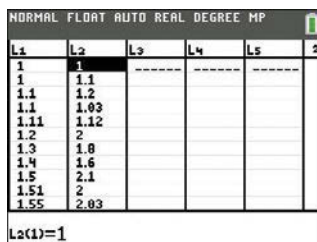
Texas TI-84 Plus C
Pressiona as teclas 2ND e 0
para aceder a CATALOG
e selecciona a opção
DiagnosticOn:



Pressiona a tecla STAT:



Preenche as listas L1 e L2 com os valores da variáveis x e y , respetivamente:

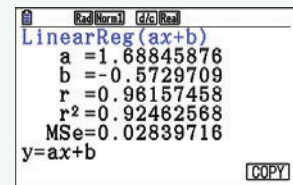
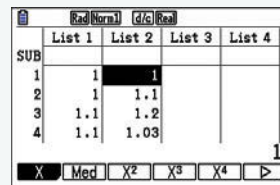
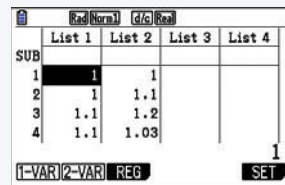


Exercício resolvido

(continuação)

Sugestão de resolução

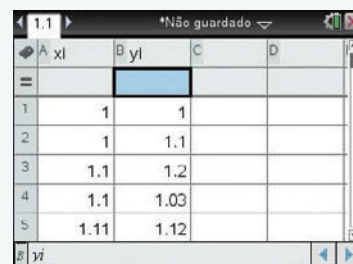
Sai da opção SEL (EXIT) e escolhe a opção REG (F3) seguida da opção X (F1):



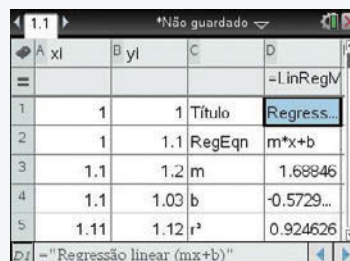
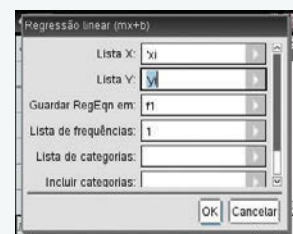
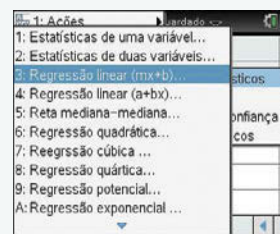
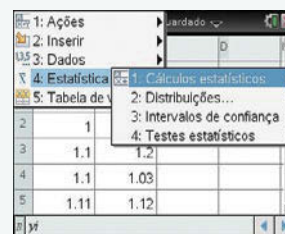
Como se pode observar, o valor indicado do coeficiente de correlação linear é de aproximadamente $r = 0,96$, o que confirma o valor escolhido na primeira alínea.

Texas Ti-nspire

Preenche as listas L1 e L2 com os valores da variáveis x e y , respetivamente, e designa as colunas A e B por x_i e y_i , respetivamente:



Pressiona a tecla MENU e selecciona as opções 4: Estatística, 1: Cálculos estatísticos, 3: Regressão linear ($mx + b$). Preenche Lista X: x_i , Lista Y: y_i e pressiona ENTER:



Como se pode observar, o valor indicado do coeficiente de correlação linear é de aproximadamente $r = 0,96$, o que confirma o valor escolhido na primeira alínea.

Sugestão de resolução

- ii) O procedimento para se obter a equação da reta dos mínimos quadrados é igual ao que se utilizou na alínea anterior.

Como podemos ver no último ecrã obtido, a equação da reta dos mínimos quadrados, com os coeficientes arredondados às centésimas, é:

$$y = 1,7x - 0,57$$

Esta reta descreve de forma adequada a associação entre as duas variáveis, uma vez que a nuvem de pontos se encontra dispersa de uma forma aproximadamente linear e o coeficiente de correlação linear está muito próximo de 1.

- iii) Para $x = 1,5$, temos:

$$y = 1,7 \times 1,5 - 0,57 = 1,98$$

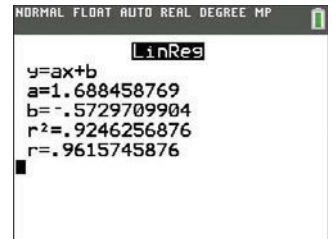
- d) A proposição é falsa.

O coeficiente de correlação linear pode ser utilizado apenas para medir a associação linear entre duas variáveis. É possível ter um coeficiente de correlação próximo de zero e existir uma associação muito forte, não linear, entre as variáveis.

Pressiona a tecla **STAT** e seleciona a opção **CALC**, 4: **LinReg(ax + b)**:



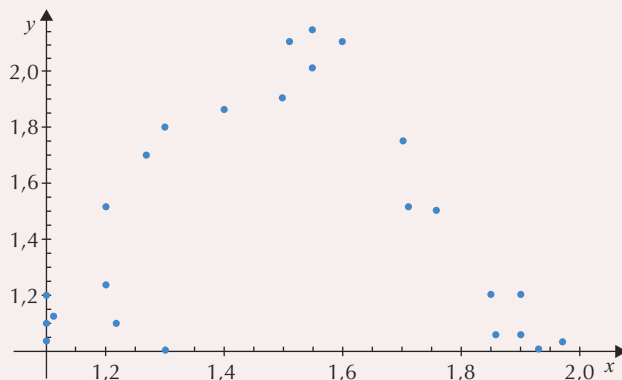
Pressiona **ENTER**:



Erro típico

Um erro comum é considerar que, quando o coeficiente de correlação é próximo de zero, não existe qualquer associação entre as variáveis x e y . No entanto, isto nem sempre acontece.

Repara que o gráfico B do exercício anterior sugere que existe uma associação forte entre as variáveis, uma vez que os pontos estão dispostos aproximadamente ao longo de uma curva e, no entanto, o coeficiente de correlação linear correspondente, $r = -0,02$, é muito próximo de zero.



Quando o coeficiente de correlação linear é próximo de zero podemos concluir que não existe associação linear entre as variáveis, mas nada podemos afirmar sobre quaisquer outros tipos de associação.

20 AULA DIGITAL

■ Apresentação

"Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação"

■ Teste interativo

"Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação"

CADERNO DE EXERCÍCIOS E TESTES

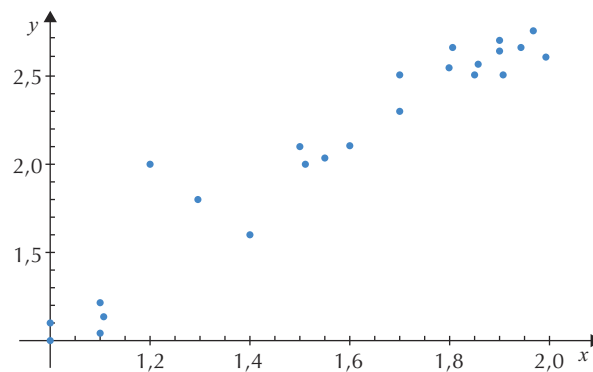
Págs. 94 a 99
Teste nº 6

Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação

Amostra bivariada e nuvem de pontos

Quando se pretende estudar a associação entre duas variáveis x e y , deve-se utilizar uma amostra bivariada $(x, y) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n))$.

Esta amostra pode representar-se graficamente por uma nuvem de pontos (**diagrama de dispersão**), onde cada elemento (x_i, y_i) da amostra é representado pelo ponto $P_i(x_i, y_i)$ do plano ortogonal.



Variável explicativa e variável resposta

Em casos concretos da vida real tem sentido definir uma das variáveis como sendo a variável independente (**variável explicativa**) e a outra como sendo a variável dependente (**variável resposta**).

Esta escolha não tem por base qualquer conceito estatístico e deve ser feita tendo em conta o conhecimento empírico da situação em causa.

Coeficiente de correlação linear

O **coeficiente de correlação linear** das variáveis x e y é dado por:

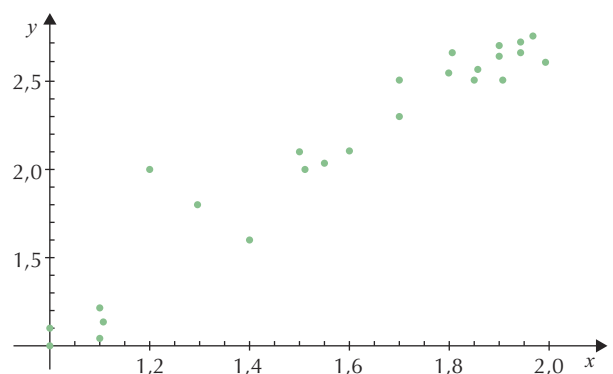
$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}}$$

Este coeficiente toma valores no intervalo $[-1, 1]$.

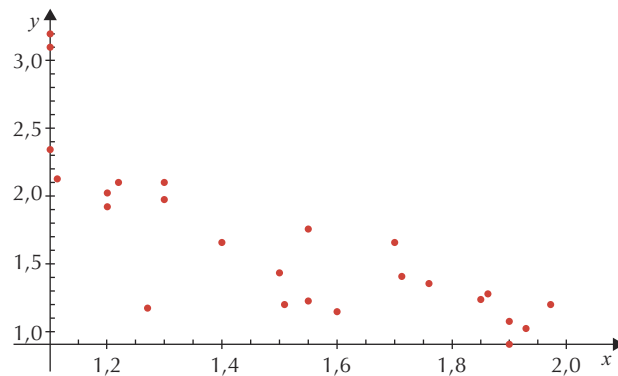
Coeficiente de correlação linear

Através do gráfico de dispersão

- Se os pontos se encontram dispersos de forma aproximadamente linear, de modo que aos maiores valores de x correspondem os maiores valores de y , então o gráfico sugere que existe uma **associação linear positiva** entre as variáveis.



- Se os pontos se encontram dispersos de forma aproximadamente linear, de modo que aos maiores valores de x correspondem os menores valores de y , então o gráfico sugere que existe uma **associação linear negativa** entre as variáveis.



Através do coeficiente de correlação linear

- um coeficiente de correlação linear com um valor próximo de 1 indica que as variáveis têm uma **associação linear positiva**;
- um coeficiente de correlação linear com um valor próximo de -1 indica que as variáveis têm uma **associação linear negativa**;
- um coeficiente de correlação linear com um valor próximo de 0 indica que **não existe associação linear** entre as variáveis.

Reta de mínimos quadrados

Apenas se deve utilizar a reta dos mínimos quadrados quando as variáveis têm uma associação linear.

A equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é dada por $y = ax + b$, onde:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{SS_x} \quad \text{e} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}$$

A reta dos mínimos quadrados é aquela cujo valor da soma dos quadrados dos desvios verticais, $\sum_{i=1}^n e_i^2$, é mínimo.

O ponto $(\bar{x}, \bar{y})$ pertence à reta dos mínimos quadrados.

A soma dos desvios verticais dos pontos em relação à reta dos mínimos quadrados é nula, isto é, $\sum_{i=1}^n e_i = 0$.

Aprende Fazendo

Itens de seleção

- 1 De uma amostra bivariada de dados $(x, y) = ((20, 30), (34, 40), (36, 50), (40, 56))$, podemos afirmar que o seu coeficiente de correlação é aproximadamente:

(A) $r \approx 0,94$

(B) $r \approx 1,2$

(C) $r \approx -0,4$

(D) $r \approx 0,79$

Solução: Opção (A)

- 2 O coeficiente de correlação linear entre duas variáveis com uma associação linear negativa forte pode ter valor:

(A) $r \approx 0,95$

(B) $r \approx -2$

(C) $r \approx -0,89$

(D) $r \approx -0,01$

Solução: Opção (C)

- 3 Consideremos a amostra bivariada de dados $(x, y) = ((21; 12,1), (22; 11,5), (23; 8,7), (24; 7,5), (25; 8,2))$ e a reta t de equação $y = ax + b$.

Para que a reta t seja a reta dos mínimos quadrados, o par ordenado (a, b) , com a e b arredondados às centésimas, é:

(A) $(a, b) = (-1,15; 2,54)$

(B) $(a, b) = (11,25; 9,61)$

(C) $(a, b) = (-1,18; 36,74)$

(D) $(a, b) = (23,45; 9,64)$

Solução: Opção (C)

- 4 Considera a amostra de dados bivariados (x, y) , em que x representa as “despesas em atividades de inovação e desenvolvimento”, em milhares de milhões de euros, e y o “número de patentes concedidas”. Supondo que as variáveis têm uma associação linear forte e que a reta dos mínimos quadrados tem equação $y = 0,35x + 307$, o número previsto de patentes num ano em que se gastam 15 mil milhões de euros é:

(A) 15 000 000

(B) 307

(C) 5 250 307

(D) 312

Solução: Opção (D)

- 5 Considera as seguintes nuvens de pontos.

Gráfico A

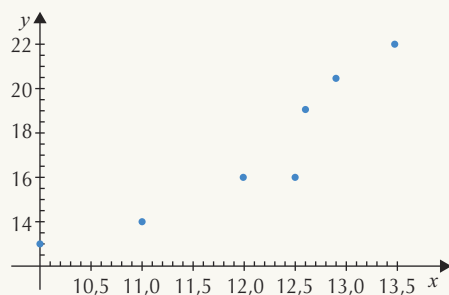


Gráfico B

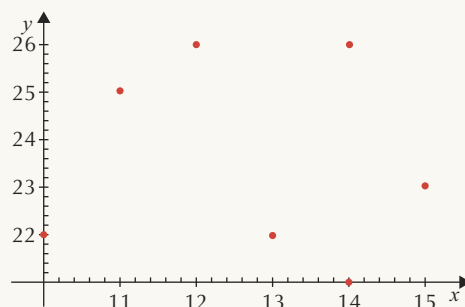
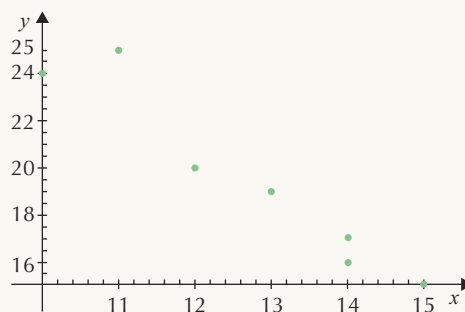


Gráfico C



Os coeficientes de correlação linear $r_1 = -0,96$, $r_2 = 0,94$ e $r_3 = -0,08$ correspondem:

- (A) aos gráficos C, A e B, respetivamente.
 (B) aos gráficos A, C e B, respetivamente.
 (C) aos gráficos C, B e A, respetivamente.
 (D) aos gráficos B, A e C, respetivamente.

Solução: Opção (A)

- 6 Qual dos valores seguintes pode corresponder ao coeficiente de correlação linear de uma amostra bivariada com associação linear negativa forte?

- (A) $r \approx 0,95$ (B) $r \approx -1,3$ (C) $r \approx -0,9$ (D) $r \approx -0,01$

Solução: Opção (C)

Aprende Fazendo

Itens de seleção

- 7 Consideremos a amostra bivariada de dados $(x_i, y_i) = ((12, 25), (13, 28), (16, 29), (18, 32), (15, 25), (10, 20))$ e a reta t de equação $y = ax + b$. Qual é o par ordenado (a, b) para o qual a soma dos desvios verticais dos pontos $P_i(x_i, y_i)$, com $1 \leq i \leq 6$, em relação à reta t não é nula?

(A) $(a, b) = (1; 12,5)$

(B) $(a, b) = (1,3; 9,2)$

(C) $(a, b) = (1,1; 11,1)$

(D) $(a, b) = (1,5; 5,5)$

Solução: Opção (B)

- 8 De uma amostra bivariada de dados (x_i, y_i) , sabemos que:

- $\bar{x} = 3$
- $\bar{y} = -2$
- a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = ax + 10$.

O valor do declive desta reta é:

(A) $a = -4$

(B) $a = 5$

(C) $a = -\frac{3}{2}$

(D) Não é possível determinar o seu valor.

Solução: Opção (A)

- 9 Considera as seguintes afirmações.

- (I) Quando o declive da reta dos mínimos quadrados é próximo de 1, as variáveis têm uma associação linear positiva forte.
- (II) Quando duas variáveis têm uma associação linear positiva, o declive da reta dos mínimos quadrados também é positivo.
- (III) Não existe qualquer relação entre o declive da reta dos mínimos quadrados e o coeficiente de correlação linear.

Qual das seguintes opções é verdadeira?

(A) Apenas a afirmação (III) é falsa.

(B) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(C) Tanto a afirmação (I) como a afirmação (II) são falsas.

(D) Tanto a afirmação (II) como a afirmação (III) são falsas.

Solução: Opção (B)

10 De uma amostra bivariada de dados (x, y) , de dimensão 6, sabemos que:

- $S_x = 3$
- $SS_y = 30$
- o coeficiente de correlação linear é $r = 0,85$.

O valor aproximado às décimas do declive da reta dos mínimos quadrados é:

- (A) 0,9 (B) 1 (C) 1,1 (D) 0,7

Solução: Opção (D)

11 De uma amostra bivariada de dados (x, y) , de dimensão 30, sabemos que:

- $\bar{x} = 100$
- $\bar{y} = 150$
- a soma dos desvios verticais dos pontos $P_i(x_i, y_i)$, com $1 \leq i \leq 30$, em relação a uma reta t é nula.

Qual das seguintes opções é necessariamente verdadeira?

- (A) As variáveis x e y estão linearmente associadas.
 (B) Aos maiores valores de x correspondem os menores valores de y .
 (C) A reta t é a reta dos mínimos quadrados desta amostra.
 (D) O ponto $P(100, 150)$ pertence à reta t .

Solução: Opção (D)

12 Considera a amostra bivariada de dados $(x, y) = ((1, 25), (2, 21), (3, 19), (4, 18), (5, y_4))$. A reta dos mínimos quadrados desta amostra é $y = -2,1x + 26,1$. Podemos afirmar que:

- (A) $y_4 = 17$ (B) $y_4 = 16$ (C) $y_4 = 15$ (D) $y_4 = 14$

Solução: Opção (B)

13 De uma amostra bivariada de dados (x, y) , sabemos que:

- $\bar{x} = 10$
- $\bar{y} = 15$
- o desvio vertical do ponto $P(5; 12,5)$ relativamente à reta dos mínimos quadrados é 0,5.

Podemos, então, afirmar que a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados tem a expressão:

- (A) $y = \frac{2}{3}x + 12$ (B) $y = \frac{3}{2}x + 15$ (C) $y = \frac{3}{5}x + 9$ (D) $y = \frac{3}{5}x + 12,5$

Solução: Opção (C)

14 De uma amostra bivariada de dados (x, y) , de dimensão 15, sabemos que o desvio vertical dos pontos $P_1(2, 5)$ e $P_7(6, 1)$, relativamente à reta t , é 0,5 e $-0,1$, respetivamente.

O desvio vertical do ponto $P_{15}(4, 2)$ relativamente à reta t é:

- (A) $e_{15} = -0,8$ (B) $e_{15} = 0,8$ (C) $e_{15} = -0,2$ (D) $e_{15} = 0,2$

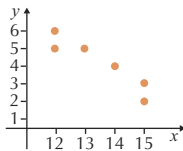
Solução: Opção (A)

Aprende Fazendo

Itens de construção

- 15 Considera a amostra bivariada de dados $(x, y) = ((12, 5), (12, 6), (13, 5), (14, 4), (15, 3), (15, 2))$. Representa graficamente esta amostra através de uma nuvem de pontos e indica, justificando, se esta sugere a existência de uma associação linear entre as variáveis.

Solução:



Esta nuvem de pontos sugere que existe uma associação linear entre as variáveis.

- 16 Considera os seguintes gráficos.

Gráfico A

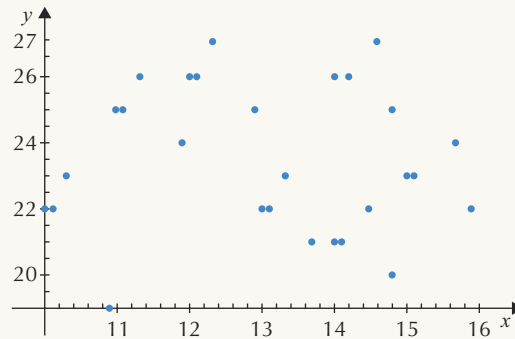


Gráfico B

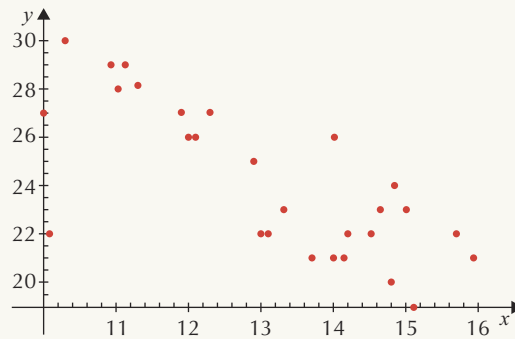
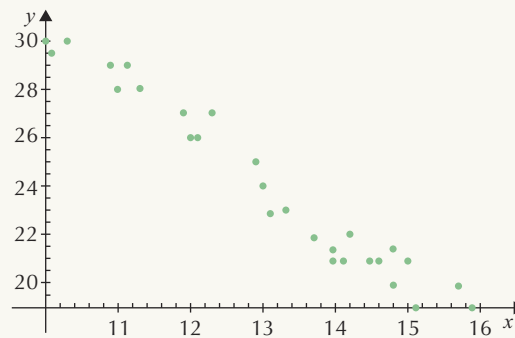


Gráfico C



Indica justificando, a que nuvem de pontos corresponde cada um dos coeficientes de correlação $r_1 = -0,05$, $r_2 = -0,98$ e $r_3 = -0,75$.

Solução: r_1 corresponde ao gráfico A, r_2 corresponde ao gráfico C e r_3 corresponde ao gráfico B.

- 17 A dosagem aconselhada de um determinado medicamento depende da massa da criança doente, de acordo com a seguinte tabela.

Massa (kg)	3	4	5	8	10	15
Quantidade de medicamento (ml)	0,5	0,6	0,8	1,2	1,5	2,3

Considera x a variável “massa” e y a variável “quantidade de medicamento”.

- Indica qual das variáveis deve ser considerada explicativa e qual deve ser considerada resposta.
- Calcula o coeficiente de correlação linear, apresentando o resultado arredondado às milésimas, e indica se as variáveis têm algum tipo de associação linear.
- Determina a equação reduzida da reta de regressão linear, arredondando os coeficientes às centésimas.
- A partir da reta obtida na alínea anterior, determina o valor aproximado da quantidade de medicamento que uma criança com 12 kg deve tomar.

Soluções: a) Variável explicativa: “massa”; variável resposta: “quantidade de medicamento”.
b) $r \approx 0,999$, as variáveis têm uma associação linear positiva. c) $y = 0,15x + 0,02$ d) 1,82 ml

20 AULA DIGITAL

■ Animação
“Resolução do exercício 17”

- 18 Numa amostra de seis carros de uma determinada marca, foram registados o número de km (milhares) e o valor de venda (milhares de euros). Os dados obtidos encontram-se registados na seguinte tabela.

Valor da venda (milhares de euros)	12,5	13,9	17,5	12,5	29,9	12,2
Número de quilómetros (milhares)	248	273	145	210	142	270

- Indica qual deve ser considerada variável explicativa (x) e qual deve ser considerada variável resposta (y).
- Calcula o coeficiente de correlação linear, apresentando o resultado arredondado às centésimas, e indica se as variáveis têm algum tipo de associação linear.
- Determina a equação reduzida da reta de regressão linear, arredondando os coeficientes às centésimas.
- Tendo em conta a reta obtida na alínea anterior, determina o valor aproximado de venda de um carro com 250 000 km.

Soluções: a) Variável explicativa: “número de km”; variável resposta: “valor da venda”. b) $r \approx -0,75$; as variáveis têm uma associação linear negativa. c) $y = -0,09x + 35,15$ d) $\approx 12,65$ milhares de euros.

Aprende Fazendo

Itens de construção

- 19 Dada uma amostra bivariada de dados (x, y) , indica o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.
- a) Quando o coeficiente de correlação entre duas variáveis é nulo, temos a indicação de que não existe qualquer associação entre essas variáveis.
 - b) Um valor do coeficiente de correlação próximo de -1 indica uma associação linear fraca entre as variáveis.
 - c) É impossível que o coeficiente de correlação seja $r = -0,95$ e a reta dos mínimos quadrados seja definida pela equação $y = 25x + 2$.

Soluções: a) Proposição falsa. b) Proposição falsa. c) Proposição verdadeira.

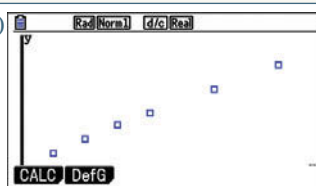
- 20 Na tabela seguinte estão representados os valores, aproximados às unidades de euro, do ordenado bruto e do ordenado líquido de uma amostra de funcionários públicos, em 2015.

Ordenado bruto (em €)	505	1000	1500	2000	3000	4000
Ordenado líquido (em €)	442	732	1016	1253	1726	2218

Utiliza uma folha de cálculo ou uma calculadora gráfica para responder às seguintes questões. Considera a variável x : “valor do ordenado bruto” e a variável y : “valor do ordenado líquido”.

- a) Representa os dados num referencial ortogonal e diz se é razoável considerar que as variáveis estão linearmente associadas.
- b) Determina a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos, arredondando os coeficientes às décimas.
- c) A partir da reta obtida na alínea anterior, determina o valor do ordenado líquido de um funcionário com um ordenado bruto de 750 euros.
- d) Sabendo que o valor do ordenado líquido de um funcionário com um ordenado bruto de 750 euros era de 589 euros, determina a diferença entre o valor real e o valor estimado pela reta obtida na alínea b).

Soluções: a)



Esta nuvem de pontos sugere que existe uma associação linear forte entre as variáveis. b) $y = 0,5x + 227,8$ c) 602,8 € d) $-13,8$

- 21 O Sr. Silva aquece a sua casa com gás natural. A quantidade de gás utilizada depende da temperatura exterior e o Sr. Silva pretende fazer um estudo dos gastos durante os nove meses em que se observam menores temperaturas, para poder estabelecer uma previsão para os gastos em função da temperatura exterior. Na tabela seguinte estão registadas as temperaturas médias observadas em cada um dos meses (em graus Celsius) e o respetivo volume de gás despendido pelo Sr. Silva (em metros cúbicos).

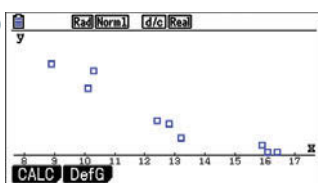
Mês	Out.	Nov.	Dez.	Jan.	Fev.	Mar.	Abr.	Mai.	Jun.
Temperatura	16,1	12,4	10,3	8,9	10,1	12,8	13,2	15,9	16,4
Volume de gás	0,01	0,10	0,24	0,26	0,19	0,09	0,05	0,03	0,01

- a) Qual deve ser a variável explicativa e a variável resposta?
- b) Utiliza uma folha de cálculo ou uma calculadora gráfica para responder às seguintes questões.
- Representa os dados num referencial ortogonal e diz se é razoável a existência de uma associação linear entre estas duas variáveis.
 - Determina a média dos valores de cada uma das amostras representadas. Apresenta os resultados com arredondamento às décimas.
 - Determina o declive da reta dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos. Apresenta o resultado com arredondamento às décimas.
 - Determina a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados, arredondando os coeficientes às milésimas.
 - Utilizando a equação obtida na alínea anterior, determina qual o consumo esperado para um mês em que a temperatura média seja de 7 °C.

Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 11.º ano

Soluções: a) Variável explicativa: “temperatura”; variável resposta: “volume de gás”.

b) i)



A nuvem de pontos parece indicar a existência de uma associação linear negativa entre as variáveis. ii) $\bar{x} = 12,9$ e $\bar{y} = 0,11$ iii) 0 iv) $y = -0,033x + 0,539$ v) $\approx 0,308 \text{ m}^3$

- 22 Dada uma amostra bivariada de dados (x_i, y_i) , de dimensão 4, e sabendo que o desvio vertical dos pontos $P_1(1, 8)$ e $P_2(2, 6)$ relativamente à reta t é $e_1 = 0,5$ e $e_2 = -0,3$, determina:

- a) a equação reduzida da reta t ;
- b) o desvio vertical dos pontos $P_3(3, 5)$ e $P_4(4, 4)$ relativamente à reta t .

Soluções: a) $y = -1,2x + 8,7$ b) $e_3 = -0,1$ e $e_4 = 0,1$

20 AULA DIGITAL

■ Animação

“Resolução do exercício 22”

Aprende Fazendo

Itens de construção

- 23** Na tabela seguinte temos a informação sobre o número de sessões de cinema e o número médio de espetadores por sessão de quatro municípios algarvios no ano de 2014.

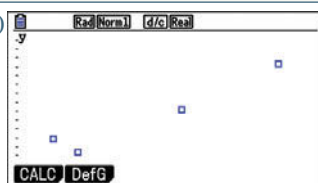
Número de sessões	1787	9339	2610	6095
Número médio de espetadores	9,9	18,3	8,4	13,2

Fonte: Pordata

Utiliza uma folha de cálculo ou uma calculadora gráfica para responder às seguintes questões. Considera a variável x : “número de sessões” e a variável y : “número médio de espetadores”.

- Representa os dados num referencial ortogonal e diz se é razoável considerar que as variáveis estão linearmente associadas.
- Determina a equação reduzida da reta t dos mínimos quadrados que se ajusta a esta nuvem de pontos, arredondando os coeficientes às milésimas.
- A partir da reta obtida na alínea anterior, determina uma estimativa para a média do número de espetadores por sessão num município que teve 3000 sessões durante o ano de 2014.
- Determina o valor dos desvios verticais dos pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 4$, relativamente à reta t , apresentando-os arredondados às centésimas.
- Calcula a soma dos desvios obtidos na alínea anterior e justifica porque é que não é nula.

Soluções: a)



A nuvem de pontos parece indicar a existência de uma associação linear positiva entre as variáveis. **b)** $y = 0,001x + 6,389$ **c)** 9,389 espetadores por sessão. **d)** (1,72; 2,57; -0,60; 0,72) **e)** 4,413

- 24** De uma amostra bivariada de dados (x, y) , sabemos que $\bar{x} = 4$, $\bar{y} = 21$ e a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = ax - 5$.
Determina o declive desta reta.

Solução: $a = 6,5$

- 25** Consideremos a amostra bivariada de dados $(x, y) = ((1; 105), (1,1; 208), (1,6; 209), (1,8; 302), (2; 250))$ e a reta t de equação $y = ax + b$. Determina dois pares ordenados (a, b) de modo a garantir que a soma dos desvios verticais dos pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 5$ em relação à reta t seja nula.

Solução: Por exemplo, (1; 213,3) e (10; 199,8).

- 26 Considera uma amostra bivariada de dados (x, y) , cuja reta dos mínimos quadrados é definida pela equação $y = 3x - 5$. Indica, justificando, qual dos valores $r_1 = -0,5$, $r_2 = 2,1$ e $r_3 = 0,75$ pode corresponder ao coeficiente de correlação linear desta amostra.

Solução: r_3

- 27 De uma amostra bivariada de dados (x, y) , de dimensão 35, sabemos que:

- $S_x^2 = 10$
- $SS_y = 450$
- a equação reduzida da reta dos mínimos quadrados é $y = x + 14$.

Determina o valor do coeficiente de correlação linear, apresentando o resultado arredondado às centésimas.

Solução: O valor $r \approx 0,87$.

20 AULA DIGITAL

■ **Animação**

"Resolução do exercício 27"

- 28 De uma amostra bivariada de dados (x, y) , sabemos que:

- o coeficiente de correlação linear é $r = 0,79$.
- $\bar{x} = 10$
- $\bar{y} = 60$

Considera as retas:

$$t_1: y = x + 50$$

$$t_2: y = -x + 70$$

$$t_3: y = 10x + 30$$

Indica, justificando, qual delas poderá ser a reta dos mínimos quadrados.

Solução: A reta t_1 .

- 29 Considera a amostra bivariada de dados $(x, y) = ((-1, 14), (-2, 14), (-3, 12), (-4, 10), (-5, y_5), (-6, 6))$ e a respetiva reta dos mínimos quadrados $y = 1,8x + 16,8$. Determina o valor de y_5 .

Solução: $y_5 = 7$

- 30 Indica o valor lógico de cada uma das seguintes afirmações, referentes a uma amostra bivariada de dados (x, y) , de dimensão 15, tal que $S_x \neq 0$ e $S_y \neq 0$.

- A reta dos mínimos quadrados é a única reta a que pertence o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$.
- Se x e y têm uma associação linear negativa muito forte, então o coeficiente de correlação linear é inferior a -1 .
- Dada uma qualquer reta t que contém o ponto $(\bar{x}, \bar{y})$, temos que a soma dos desvios verticais dos pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 15$ relativamente à reta t é nula.
- A reta dos mínimos quadrados é sempre uma boa forma de prever o valor de y em função do valor de x .

Soluções: a) Afirmação falsa. b) Afirmação falsa. c) Afirmação verdadeira. d) Afirmação falsa.

Aprende Fazendo

Itens de construção

- 31 Considera a amostra bivariada de dados $(x, y) = ((100; 2,7), (101; 3,4), (112; 3,5), (x_4, y_4))$. Sabe-se que:
- $\bar{x} = 114$;
 - a soma dos desvios verticais dos pontos $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leq i \leq 4$ relativamente à reta t de equação $y = 0,05x + 0,7$ é nula.

Determina o par ordenado (x_4, y_4) .

Solução: $(x_4, y_4) = (143, 16)$

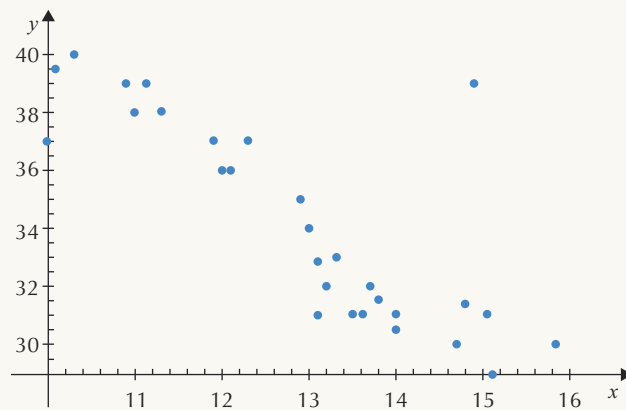
20 AULA DIGITAL

■ **Animação**

"Resolução do exercício 31"

- 32 Considera a amostra bivariada de dados (x, y) , cuja reta t dos mínimos quadrados tem declive a . Mostra que, se $\tilde{z} = kx$, com $k > 0$, então a reta dos mínimos quadrados da amostra bivariada (z, y) tem declive $\frac{a}{k}$.

- 33 Considera a amostra bivariada de dados (x, y) representada pela seguinte nuvem de pontos.



Sabe-se que:

- $S_x = 1,6$;
- $S_y = 3,6$;
- $\bar{x} = 13$;
- $\bar{y} = 34$;
- a ordenada na origem da reta dos mínimos quadrados é $-\frac{45,6}{r}$.

Determina o valor, aproximado às décimas, do coeficiente de correlação linear r .

Solução: $r \approx -0,8$

Desafio – O tesouro d'A Estatística

Retomando o desafio apresentado no início deste tema, apresenta-se a seguir uma possível resolução. Contando o número de ocorrências de cada uma das letras do criptograma, obtêm-se os resultados seguintes:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
22	2	36	6	13	30	12	3	0	2	0	1	0

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	20	2	17	0	7	10	3	1	2	13	19

A pista dada, de que em média as oito letras mais frequentes em português são AEOSIRDN (por ordem decrescente), é fulcral, apesar de, em especial num texto pequeno como o apresentado, esta ordem poder sofrer pequenas alterações. Essa observação fornece um excelente ponto de partida para tentar descobrir o pedaço mais significativo da permutação usada para cifrar a mensagem – a chave secreta. No caso presente, tem-se AEOSIRDN $\rightarrow$ CFAPZRON. Fazendo a substituição recíproca no criptograma, e trocando as letras cuja correspondência se desconhece por um “–”, obtém-se:

ASO – RASRE – IRADASDO – SE – RI – ANI – O – RADOE – O – REES – AON – O – RENOIN – ERIORDA – AREDES – NA – A – EDE – AR – A – E – O – A – I – ADO – RE – ISA – EN – ENO – ON – ODO – A – A – AA – ISSAEI – A – A – RESE – E – I – ANARE – ADE – INI – OS – ADRADOSDASE – EN – IADE – ON – OS – AS – OORDENADASES – AOE – I – I – A – EN – EES – RI – ASIIS.

Reconhecem-se imediatamente bocados de palavras, pelo que se vê que estamos na pista certa (em geral, há que tentar umas poucas alternativas). Não é agora difícil descobrir as letras que faltam. Por exemplo, na penúltima linha é fácil reconhecer a palavra COORDENADAS, pelo que ficamos a saber que a quadragésima segunda letra a contar do fim, que no criptograma é um E, foi a letra que cifrou C. Podemos então substituir todos os E do criptograma por C. Aliás, sabendo agora onde está, no criptograma, o texto correspondente ao que foi transcrito na página 2, é fácil deduzir todas as letras que faltam e recuperar completamente o texto original.

Depois do que aprendeste neste tema, o cálculo das coordenadas do ponto do mapa onde estão escondidas as peças de arte roubadas é relativamente fácil de fazer.

Para determinar a reta dos mínimos quadrados, $y = ax + b$, relativa aos pontos dados,

$$(x, y) = ((-5, 3), (1, -4), (1, 5), (4, 2), (5, 7)),$$

começa-se por ver que $\bar{x} = 1,2$ e $\bar{y} = 2,6$. De seguida, é fácil determinar que $a \approx 0,2204$ e $b \approx 2,3355$.

Como $0,2204 \times 3 + 2,3355 = 2,9967$, resulta que o ponto procurado é, para todos os efeitos práticos, o ponto de coordenadas (3, 3) do referencial sobreposto ao mapa.

TEMA IV

Funções Reais de Variável Real

Unidade 1 - Funções racionais (pág. 6)

- a) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$
 d) $\mathbb{R}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt[3]{5}\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
- a) $x - 3$, em $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
 b) $\frac{3x-9}{2x+4}$, em $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$.
 c) $\frac{x^2-2x+1}{x+1}$, em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
 d) $\frac{1}{x^2+x}$, em $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0\}$.
- a) $\frac{-h}{x^2+hx}$; $\mathbb{R} \setminus \{-h, 0\}$ b) $\frac{x+1}{x^2-9}$; $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$
 c) $\frac{1}{x-3}$; $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 3\}$ d) $\frac{2}{x-3}$; $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
 e) $\frac{2x^2+6x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$
- a) $\frac{1}{x^2-1}$; $\mathbb{R} \setminus \{-5, 0, -1, 1\}$
 b) $\frac{x^2+x-6}{x-1}$; $\mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1\}$
 c) $\frac{x^3-x^2+x-1}{2x}$; $\mathbb{R} \setminus \{-6, 6, -1, 0\}$
- a) $\frac{-x^2-2x}{x-3}$; $\mathbb{R} \setminus \{2, -2, 3, -3\}$
 b) $\frac{5x^2-5}{x^3}$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 c) $\frac{x^2+10x-25}{x^2+25}$; $\mathbb{R} \setminus \{-5, 5\}$
- a) $\left\{1, -\frac{3}{2}\right\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$
 b) $\{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
 c) $\{2\}$; $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{2}, 1\right\}$
 d) $\{-2\}$; $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$
- a) $]-1, 1[\cup]3, +\infty[$ b) $]-\infty, -2[\cup]1, 2[$
 c) $]2, 3[$ d) $]-\infty, \frac{6}{5}[\cup]4, +\infty[$
 e) $]-\infty, -3[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$
- a) Zero de h : -2
 h é positiva em $]-2, 0[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -2[\cup]0, 3[$.
 Zero de j : 0
 j é positiva em $]-\infty, -2[\cup]0, 2[\cup]2, 5[\cup]5, +\infty[$ e é negativa em $]-2, 0[$.
 Zeros de p : -3 e -1
 p é positiva em $]-3, -1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -3[\cup]-1, 1[$.
 Zeros de r : $-2, 0$ e 2
 r é positiva em $]-\sqrt{5}, -2[\cup]0, 2[\cup]\sqrt{5}, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -\sqrt{5}[\cup]-2, 0[\cup]2, \sqrt{5}[$.

Unidade 2 - Limites segundo Heine de funções reais de variável real (pág. 16)

- a) $[-1, 5]$ b) $[0, 4] \cup \left[\sqrt{19}, \frac{9}{2}\right]$
 c) $[-2, 0] \cup \{\sqrt{2}, \pi\}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$
- a) 7 b) 7 c) 7
- a) $D_h =]-\infty, 4]$ b) 0
- a) Opção (C) b) Opção (B)
- a) $-\infty$; $+\infty$ b) Não existe.
- a) $+\infty$ b) -6 c) 0 d) 4 e) $-\infty$ f) 0
- a) 0; $+\infty$ b) 0; $-\infty$
- a) -10 b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) 0 e) 0 f) 10
- 0
- -2
- $+\infty$
- a) $\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) -1
 d) $-\infty$ e) Não existe. f) -3
- a) 0 b) $-\infty$
- a) -6 b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) Não existe.
- a) -8 b) 2 c) $+\infty$ d) 0
- a) $-\infty$ b) $\frac{1}{3}$ c) 1
- a) $+\infty$ b) 0 c) 2 d) $-2\sqrt{2}$
 e) 1 f) $+\infty$ g) 0 h) $3\sqrt{2}$
 i) 0
- a) 1 b) Não existe. c) Não existe.
 d) -9 e) $-\frac{1}{3}$ f) $-\frac{1}{6}$
- a) $+\infty$ b) 0
- a) 0 b) $-\infty$ c) Não existe.

Unidade 3 - Continuidade de funções (pág. 42)

- a) f, g e j
 b) g e j
- $k = -\frac{2}{5}$
- a) f é contínua em $x = 3$.
 b) g não é contínua em $x = -1$.
- a) f é contínua em $x = 1$.
 b) g não é contínua em $x = 0$.
 c) h não é contínua em $x = 2$.
- Por exemplo, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.
- a) f é contínua em $\mathbb{R}$.
 b) g é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Por exemplo, $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{11}{3}x - \frac{25}{3} & \text{se } 2 < x < 5. \\ 10 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$
- $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$

Unidade 4 - Assíntotas ao gráfico de uma função (pág. 48)

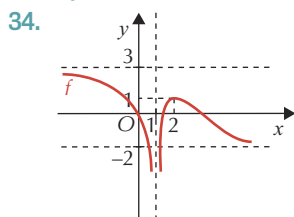
44. Opção (C)
45. a) $x = -3$ b) $x = 1$ e $x = -1$ c) Não tem.
46. Opção (B)
47. Opção (D)
48. a) $x = 2$ e $y = 3$ b) $x = -\frac{1}{2}$ e $y = 0$ c) $x = \frac{1}{2}$ e $y = 2$
49. $x = -4$, $y = 2$ e $y = -2$
50. Opção (C)
51. a) $x = -2$ e $y = 0$ b) $y = 2x$
c) $x = -1$; $x = 1$ e $y = 2$ d) $x = -3$ e $y = 2x - 6$
e) $x = -1$; $y = 3$ e $y = -3$ f) $y = 2x$ e $y = -2x$
g) $x = 5$, $y = x + 5$ e $y = -x - 5$
52. $x = -1$ e $y = 4x + 2$
53. $a = -2$, $b = -4$ e $c = 1$

Aprende fazendo (pág. 68)

1. Opção (D)
2. Opção (D)
3. Opção (D)
4. Opção (D)
5. Opção (C)
6. Opção (C)
7. Opção (B)
8. a) Opção (B) b) Opção (D) c) Opção (B)
9. Opção (B)
10. Opção (C)
11. Opção (B)
12. Opção (A)
13. Opção (C)
14. Opção (B)
15. Opção (B)
16. Opção (A)
17. Opção (D)
18. Opção (D)
19. Opção (D)
20. Opção (B)
21. a) Opção (C) b) Opção (D) c) Opção (D)
22. a) Opção (A) b) Opção (B) c) Opção (C)
23. a) Opção (C) b) Opção (D)
24. Opção (D)
25. Opção (C)
26. Opção (B)
27. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$; $D'_f =]-\infty, 1[\cup]2, 5[$
b) i) 0 ii) 2 iii) $-\infty$ iv) 5
c) Não existe limite no ponto de abscissa 1 e existe limite no ponto de abscissa 4.
d) Por exemplo, $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$.
28. a) 2 b) $+\infty$ c) 0 d) -1 e) $-\infty$
29. a) Não existe limite. b) Sim
c) A função h é descontínua em $x = 1$.
d) Por exemplo, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ -3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$
e) $+\infty$
30. a) Zeros: $\frac{1}{2}$ e 2; f é positiva em $]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]0, \frac{1}{2}[\cup]1, 2[$.
b) Zero: -1; g é positiva em $]-\frac{3}{2}, -1[$ e é negativa em $]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.
c) Zero: -13; h é positiva em $]-\infty, -13[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$ e é negativa em $]-13, 0[$.
d) Zero: -1; i é positiva em $]-\infty, -3[\cup]-3, -1[\cup]3, +\infty[$ e é negativa em $]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, 3[$.
e) Zero: não tem; j é positiva em $]-2, 1[\cup]1, 2[\cup]2, +\infty[$ e é negativa em $]-\infty, -2[$.

f) Zero: 0; k é positiva em $]0, +\infty[\setminus \{2\}$ e é negativa em $]-\infty, 0[$.

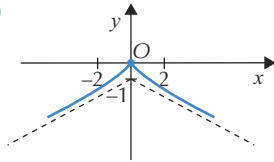
31. a) 2; 4 c) Por exemplo, $c_n = 2 + \frac{1}{n}$.
33. a) $f(u_n) = 3 - \frac{1}{n^2}$; $f(v_n) = \frac{2n-1}{3n}$; $\lim f(u_n) = 3$, $\lim f(v_n) = \frac{2}{3}$
b) Não existe. c) 2



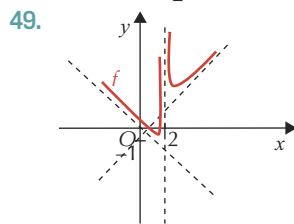
34.
$$(f+g)(x) = \begin{cases} 5 - x^3 + x^2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$
35. b) $(f+g)(x) = \begin{cases} 5 - x^3 + x^2 & \text{se } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$
36. a) $+\infty$ b) 1 c) $+\infty$ d) $-\infty$
e) $+\infty$ f) $\frac{1}{2}$ g) $+\infty$ h) $+\infty$
37. 4
39. a) $-\frac{1}{4}$ b) -1 c) $+\infty$ d) $-\infty$
e) 0 f) -1 g) 3 h) $-\frac{1}{4}$
i) -2 j) 0 k) -2
40. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $\frac{2}{5}$
e) $-\infty$ f) 0 g) $-\frac{1}{3}$ h) $-\infty$
i) $+\infty$ j) $-\infty$ k) $+\infty$ l) $-\frac{5}{2}$
m) -5 n) 0 o) Não existe. p) $+\infty$
q) Não existe.
41. a) A função é contínua. b) 4
42. a) A função é contínua.
b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{se } x = 1 \end{cases}$
43. a) $x = -3$, $x = 3$ e $y = x + 5$ b) $x = -2$ e $y = x - 5$
c) $x = 3$ e $y = x - 2$ d) $x = 0$ e $y = 0$
e) $x = 0$, $y = x$ e $y = -x$ f) $y = 0$
44. a) $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; -3
b) $g(x) = -1 + \frac{5}{2-x}$; $a = -5$, $b = -1$ e $c = 2$
c) $x = 2$ e $y = -1$
d) $D'_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
e) Não
f) $x = -1$ e $y = 0$
45. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$; $D'_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ b) $x = 2$ e $y = -4$
c) $f(x) = -4 + \frac{4}{x-2}$ d) $D'_h = [0, +\infty[$
46. a) 1
b) $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \\ \frac{1+x}{x-1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$

47. a) $(0, 0)$ e $(1, 0)$
 b) $]-2, +\infty[$
 c) $f(x) = -x + 3 - \frac{6}{x+2}$; $a = -1$, $b = 3$, $c = -6$ e $d = -2$
 d) $x = -2$ e $y = -x + 3$

48. a) i) $-\frac{1}{2}$ ii) $+\infty$ iii) -1
 b) i) ii) g é contínua em $\mathbb{R}$.



iii) $y = -\frac{1}{2}x - 1$ e $y = \frac{1}{2}x - 1$ iv) $-\infty$



50. a) $V(t) = \frac{t^2 + 3t - 4}{(t+1)^2}$
 b) 1026 u.m.
 c) Nos primeiros 4 dias.
 d) O volume de vendas tende a estabilizar nas 1000 unidades.
51. a) i) f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. ii) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$
 c) $a = -2 \vee a = 8$
52. $a = 6$ e $b = 1$
53. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ b) Afirmação falsa.
 c) $g(x) = \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 2x + 2}$ d) $y = x + 1$
54. b) 3 h 26 min
55. a) $-\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 1
56. a) 2 b) 12

Unidade 5 - Derivadas de funções reais de variável real e aplicações (pág. 86)

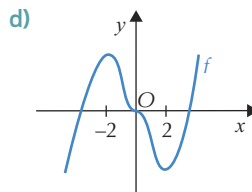
54. a) 16 m/s b) 14,5 m/s c) $3x + 7$
56. (I) Proposição verdadeira.
 (II) Proposição falsa.
57. a) $-\frac{5}{4}$ b) $\frac{3}{5}$
58. a) 6 b) 2 c) -4 d) $\frac{1}{4}$
59. a) $-0,27$; a cotação das ações diminui em média 0,27 euros por dia.
 b) 0,375; aos 15 dias do mês de setembro a cotação das ações estava a aumentar à taxa de 0,375 euros por dia.
60. a) $-\frac{1}{16}$ b) $y = -\frac{1}{16}x + \frac{7}{16}$ c) $y = 16x - \frac{191}{4}$
61. Opção (B)
63. a) 3 b) Sim, pois f é diferenciável em 1.

65. a) 20 m/s b) -20 m/s c) $h'(t) = 20 - 2t$
66. a) $f'(x) = 1$ b) $g'(x) = 1$ c) $(f+g)'(x) = 2$
67. Figura (II)
68. a) $10 + 3\pi$ b) i) $(f \times g)'(x) = 2x + 3\pi$ ii) $\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = -\frac{3\pi}{x^3}$
69. a) -1 b) -10 c) 10 d) $\frac{1}{8}$
 e) $\frac{2}{9}$ f) 1 g) -6 h) 2
70. $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$
71. 45°
72. a) $2x + 5$ b) $\frac{3}{2}x^2 - 1$
 c) $\frac{7x^2\sqrt{x}}{2}$ d) $-\frac{5}{x^2}$
 e) $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ f) $\frac{5}{(x+1)^2}$
73. a) 43 b) 48
74. a) $12x^2 - \frac{6}{5}x - 2$ b) $10\pi x^9 - \frac{7}{e}x^6 - 6x^2$
 c) $16x(2x^2 - 3)$
 d) $3(x^4 - 5x^2)^2 \times (4x^3 - 10x) \times (x^6 - 5x^5) + (x^4 - 5x^2)^3 \times (6x^5 - 25x^4)$
 e) $\frac{5}{2}x^4 - 6x^2 - 3x$ f) $\frac{17}{(3x+1)^2}$
 g) $\frac{3(2x-3)^2(-2x^2+6x-8)}{(x^2-4)^4}$ h) $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$
 i) $\frac{8x^3}{3^3\sqrt{(2x^4-1)^2}}$ j) $\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} \times \frac{5}{2(3x+1)^2}$
 k) $\frac{-2\sqrt{x+2}-1}{2\sqrt{x+2}(x+\sqrt{x+2})^2}$
75. a) $-\frac{144x^3}{(9x^4+1)^2}$ b) $-\frac{192x}{(x^2+1)^3}$ c) $108x^3$
76. a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{1}{16}$ c) $\frac{3-2x}{4(x^2-3x)^2}$
77. a) $\frac{\sqrt{6}+18}{6}$ b) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ c) 2
78. a) $y = 24x + 16\sqrt{2}$ b) $y = x - \frac{\sqrt{3}}{9}$ ou $y = x + \frac{\sqrt{3}}{9}$ c) $\frac{1}{12}$
79. a) $c = 2$ b) $y = 7x - 4$
80. a) Afirmação falsa. b) Afirmação falsa.
 c) Afirmação falsa. d) Afirmação verdadeira.
81. a) f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[3, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 3]$; 12 é um máximo relativo em -1 ; -20 é um mínimo relativo em 3.
 b) g é estritamente decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $[1, +\infty[$; não tem extremos.
 c) h é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é estritamente crescente em $[-1, 1]$; $-\frac{1}{2}$ é um mínimo relativo em -1 ; $\frac{1}{2}$ é um máximo relativo em 1.
82. a) f é estritamente decrescente em $]-\infty, 2]$ e é estritamente crescente em $[2, +\infty[$; -13 é um mínimo absoluto em 2.

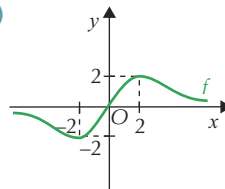
- b) h é estritamente crescente em $]-\infty, -\sqrt{2}]$ e em $[\sqrt{2}, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-\sqrt{2}, 0[$ e em $]0, \sqrt{2}]$; $4\sqrt{2}$ é um mínimo relativo em $\sqrt{2}$; $-4\sqrt{2}$ é um máximo relativo em $-\sqrt{2}$.
- c) p é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$; 2 é o mínimo absoluto em 0.
- d) r é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; 4 é o mínimo absoluto em 0.
83. a) 12 m/min
b) 8,5; a velocidade instantânea relativamente ao solo do balão aos 5 minutos era de aproximadamente 8,5 m/min.
c) 377 metros aos 33 minutos.
84. Para $q = 40$ unidades.
85. a) $V(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x$; $x \in]0, 3[$
b) $x = 1$; 16 cm^3
86. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$
87. $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \text{ dm}$
88. Quadrado de lado $5\sqrt{2}$.

Aprende fazendo (pág. 122)

1. Opção (C)
2. Opção (C)
3. a) Opção (B) b) Opção (C)
4. Opção (C)
5. Opção (C)
6. Opção (D)
7. Opção (A)
8. Opção (C)
9. Opção (A)
10. Opção (D)
11. Opção (C)
12. Opção (D)
13. Opção (B)
14. Opção (B)
15. Opção (C)
16. Opção (D)
17. Opção (D)
18. Opção (A)
19. Opção (A)
20. a) Não é contínua. b) 1 e 4
c) -1 d) $y = -2x + 12$ e) -2
21. a) 20 m/s b) -20 m/s c) 20,4 m
22. b) 135°
23. a) 2 b) $f(x) = x^2 - x$
24. a) $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 16x - 9$
b) $f'(x) = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$ c) $f'(x) = \frac{2x^4 + 18x^2 - 2x - 12}{(1 + x^2)^2}$
d) $f'(x) = -\frac{8}{x^3} + \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$ e) $f'(x) = \frac{-4(x+1)^3}{(2+3x)^5}$
f) $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$
25. b) $\frac{3}{4}$ c) $(-0,39; 0,52)$
26. a) Sim b) i) $\frac{11}{12}$ ii) $\frac{8}{3\sqrt[3]{121}}$
27. a) $f'(x) = -\frac{6}{x^3}$ c) Não são paralelas.
d) f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$ e é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$; f não tem extremos relativos.
28. a) 0 b) Proposição falsa.
c) f é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[2, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-2, 2]$; maximizante: -2, minimizante: 2



29. a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$
b) $]-\infty, -2[\cup]0, 2[$
c) $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$
30. b) i) g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$; máximo relativo em $x = 0$.
ii) $y = -1$
iii) $]-1, 0]$
31. a) Sim
b) Mínimo relativo em $x = -2$ e máximo relativo em $x = 2$.
c)



32. b) g é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e em $]0, +\infty[$ e é estritamente decrescente em $[-1, 0]$; g tem um máximo relativo em -1 e um mínimo relativo em 0.
33. a) $(0, 0)$
b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$
d) Sim
e) f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$; minimizante: 0
34. a) i) Afirmação falsa. ii) Afirmação falsa.
b) Nada se pode concluir.
35. b) $x = \sqrt[3]{4}$
36. a) 2748 unidades monetárias. b) 0,42
c) 500 unidades.
37. 15 cm
38. $25\sqrt{\frac{2}{3}}$
39. $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
40. 0

TEMA V

Estatística

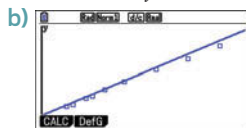
Unidade 2 - Retas de mínimos quadrados, amostras bivariadas e coeficientes de correlação (pág. 137)

1. a) Variável explicativa: "idade".
Variável resposta: "percentagem de massa muscular".
b) Variável explicativa: "temperatura ambiental".
Variável resposta: "comprimento da barra".

2. a) $(0,6; -0,2; 0,2; -0,3)$

b) 0,3

4. a) $\bar{x} = 1489$ e $\bar{y} = 1000$



c) A sequência dos desvios é $(-27, -47, -30, -34, -21, -17, -48, -104, -111)$.

d) A soma dos desvios é -439 .

e) A reta t não pode ser a reta dos mínimos quadrados.

5. 0,92

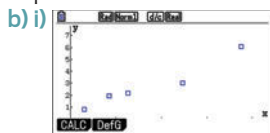
7. r_1 – gráfico (C)

r_2 – gráfico (A)

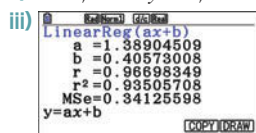
r_3 – gráfico (B)

8. a) Variável explicativa: “taxa de fluxo das águas”.

Variável resposta: “quantidade de massa de solo transportado”.



ii) $\bar{x} = 1,728$ e $\bar{y} = 2,806$



$a = 1,39$ (2 c.d.)

Aprende fazendo (pág. 160)

1. Opção (A)

2. Opção (C)

3. Opção (C)

4. Opção (D)

5. Opção (A)

6. Opção (C)

7. Opção (B)

8. Opção (A)

9. Opção (B)

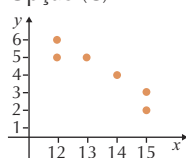
10. Opção (D)

11. Opção (D)

12. Opção (B)

13. Opção (C)

14. Opção (A)



Esta nuvem de pontos sugere que existe uma associação linear entre as variáveis.

16. r_1 corresponde ao gráfico A, r_2 corresponde ao gráfico C e r_3 corresponde ao gráfico B.

17. a) Variável explicativa: “massa”;

Variável resposta: “quantidade de medicamento”.

b) $r \approx 0,999$, as variáveis têm uma associação linear positiva.

c) $y = 0,15x + 0,02$

d) 1,82 ml

18. a) Variável explicativa: “número de km”;

Variável resposta: “valor da venda”.

b) $r \approx -0,75$; as variáveis têm uma associação linear negativa.

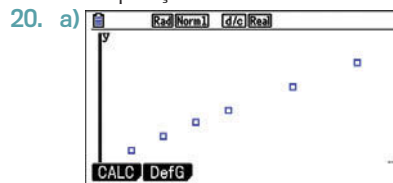
c) $y = -0,09x + 35,15$

d) $\approx 12,65$ milhares de euros.

19. a) Proposição falsa.

b) Proposição falsa.

c) Proposição verdadeira.



Esta nuvem de pontos sugere que existe uma associação linear forte entre as variáveis.

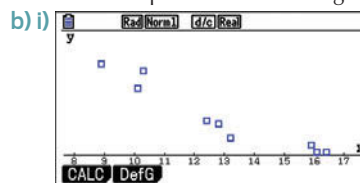
b) $y = 0,5x + 227,8$

c) 602,8 €

d) $-13,8$

21. a) Variável explicativa: “temperatura”;

Variável resposta: “volume de gás”.



A nuvem de pontos parece indicar a existência de uma associação linear negativa entre as variáveis.

ii) $\bar{x} = 12,9$ e $\bar{y} = 0,11$

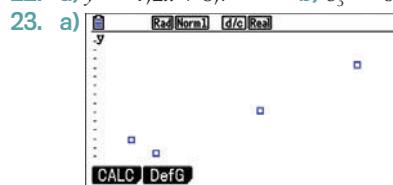
iii) 0

iv) $y = -0,033x + 0,539$

v) $\approx 0,308 \text{ m}^3$

22. a) $y = -1,2x + 8,7$

b) $e_3 = -0,1$ e $e_4 = 0,1$



A nuvem de pontos parece indicar a existência de uma associação linear positiva entre as variáveis.

b) $y = 0,001x + 6,389$

c) 9,389 espectadores por sessão.

d) $(1,72; 2,57; -0,60; 0,72)$

e) 4,413

24. $a = 6,5$

25. Por exemplo, $(1; 213,3)$ e $(10; 199,8)$.

26. r_3

27. O valor $r \approx 0,87$.

28. A reta t_1 .

29. $y_5 = 7$

30. a) Afirmação falsa.

b) Afirmação falsa.

c) Afirmação verdadeira.

d) Afirmação falsa.

31. $(x_4, y_4) = (143, 16)$

33. $r \approx -0,8$