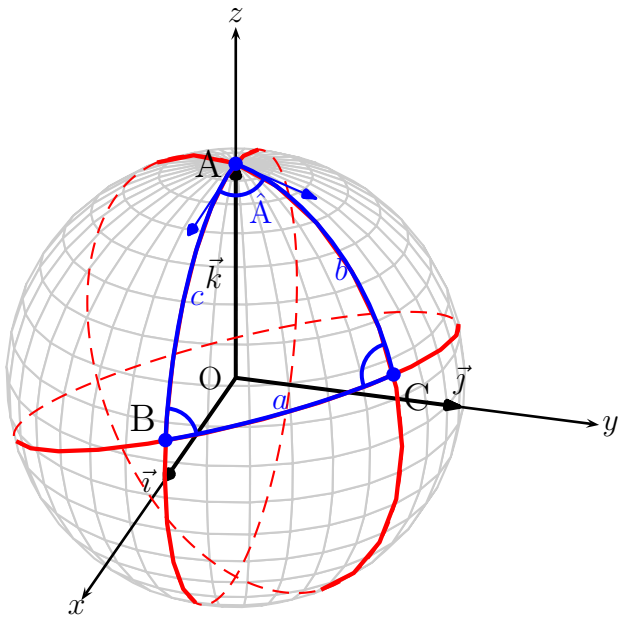
Trigonométrie sphérique.

A consommer sur place :

Exercice 1 :

Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé direct, on considère la sphère de $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 1.
On note A le point de coordonnées $(0, 0, 1)$, B un point de la sphère, différent de A appartenant au plan d'équation $y = 0$ et C un point quelconque de $\mathcal{S}$, n'appartenant pas au plan OAB.
On dessine ainsi sur la sphère un "triangle" appelé *triangle sphérique*.
Les cercles de centre O passant respectivement par B et par C (appelés *grands cercles*) présentent des tangentes en A qui forment un angle $\hat{A}$ appelé *angle sphérique*. On définit de même deux autres angles sphériques $\hat{B}$ et $\hat{C}$.
Les longueurs des arcs $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AC}$ et $\overset{\frown}{AB}$ sont notées respectivement a, b et c.



Le but de cet exercice est de démontrer les relations des cosinus:

$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A} \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \hat{B} \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \hat{C} \end{cases}$$

On supposera dans la suite de l'exercice que ces longueurs sont inférieures à $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Déterminer, en fonction de c, les coordonnées de B.
2. On note C_0 le projeté orthogonal de C sur le plan d'équation $z = 0$.
   (a) Déterminer les coordonnées de C_0.

(b) En déduire que C a pour coordonnées :

$$(\cos\hat{A}\sin b, \sin\hat{A}\sin b,\ cosb)$$

3. En calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}$, montrer que:

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\hat{A} \tag{1}$$

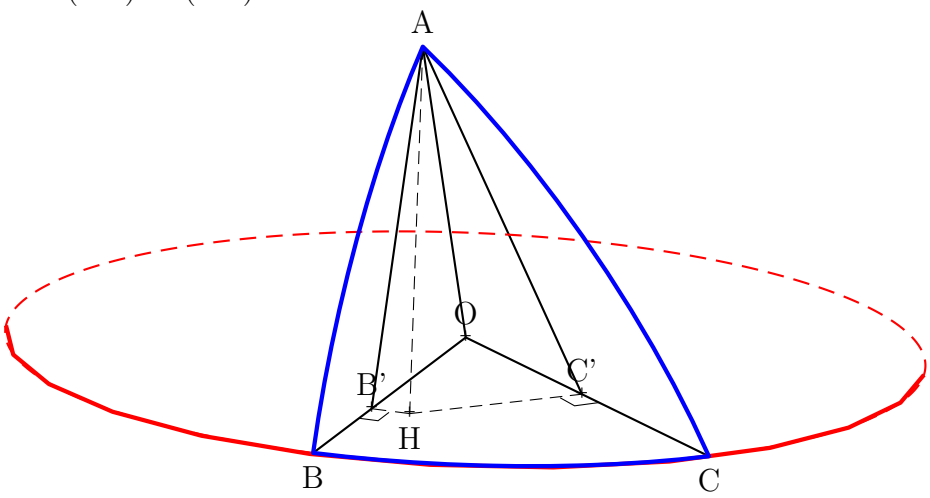
4. Donner des formules analogues à l'équation (3) pour $\cos b$ et $\cos c$.

Exercice 2 :

On va obtenir ici la formule *d'analogie des sinus* :

$$\frac{\sin a}{\sin\hat{A}} = \frac{\sin b}{\sin\hat{B}} = \frac{\sin c}{\sin\hat{C}}$$

On note H le projeté orthogonal de A sur le plan OBC et B′ et C′ les projetés orthogonaux de H respectivement sur (OB) et (OC).



1. Écrire les longueurs AB′ etAC′ en fonction de b et c.
2. (a) Expliquer pourquoi l'angle $\widehat{AB'H}$ est égal à $\hat{B}$
   (b) En déduire AH en fonction de AB' et de $\hat{B}$
3. Écrire de la même manière AH en fonction de AC′ et de $\hat{C}$
4. Déduire des questions précédentes que :

$$\sin c\sin\hat{B} = \sin b\sin\hat{C} \tag{2}$$

5. Donner des formules analogues à l'équation (3), puis en déduire la formule d'analogie des sinus.

A emporter :

Exercice 3 :

ABC désigne un triangle sphérique. On donne à chaque fois quelques dimensions du triangle, déterminer des valeurs approchées à la minute près des dimensions manquantes :

1. $a = 110°13'$, $b = 58°2'$ et $C = 90°$.
2. $a = 105°24'$, $B = 28°36'$ et $C = 90°$.
3. $a = 51°13'$, $c = 79°6'$ et $C = 90°$.
4. $A = 85°24'$, $B = 118°21'$ et $C = 90°$.
5. $A = 67°40'$, $b = 86°45'$ et $c = 108°36'$.
6. $a = 85°35'$, $b = 113°45'$ et $c = 66°28'$.

Exercice 4 :

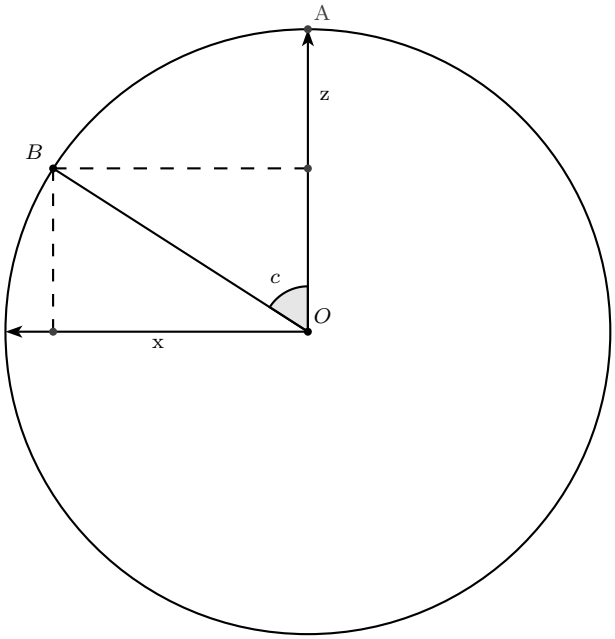
Bordeaux et Belgrade sont situés pratiquement sur le même parallèle (44°55').
La longitude de Bordeaux est $0°31'$ Ouest, celle de Belgrade est $20°30'$ Est.
Calculer la distance entre ces deux villes :

1. en creusant un tunnel permettant d'aller en ligne droite de l'une à l'autre,
2. en se déplaçant le long d'un arc de grand cercle (route orthodromique),
3. en se déplaçant le long du parallèle commun à ces deux villes (route loxodromique).

On prendra $R = 6378$ km pour le rayon terrestre.

Correction de l'Exercice 1 :

1. On se place dans le plan $y = 0$.



La sphère ayant un rayon de 1, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, noté c est aussi la mesure en radian de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$.

Ainsi, en utilisant les relations trigonométriques dans le triangle rectangle, on trouve

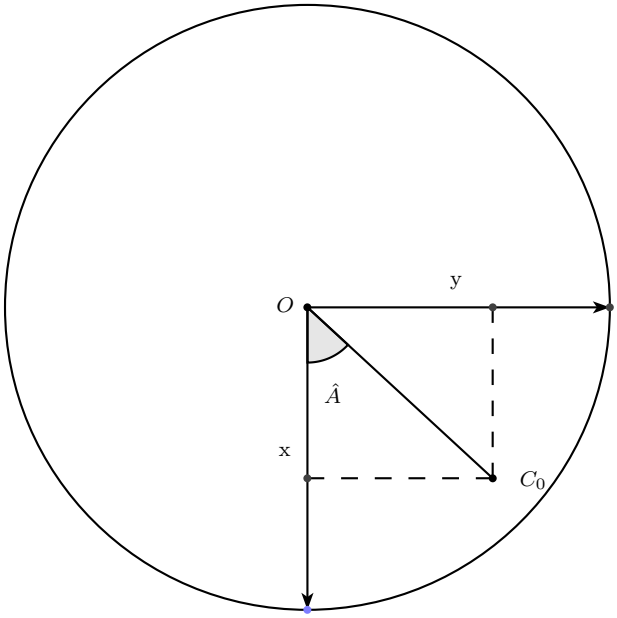
$$x_B = \mathrm{OB}\sin(c) = \sin(c) \text{ et } z_B = \mathrm{OB}\cos(c) = \cos(c)$$

De plus B est dans (xOz) donc

$$y_\mathrm{B} = 0$$

Ainsi les coordonnées de B sont $(\sin(c), 0, \cos(c))$

2. (a) La mesure de l'angle $\hat{A}$ est celle entre les deux plans (AOB) et (AOC).
   Comme le plan (Oxy) coupe ces deux derniers plans orthogonalement, l'angle $\hat{A}$ et $\widehat{\mathrm{xOC_0}}$ ont même mesure.
   En se plaçant dans le plan $(\mathrm{O}, \mathrm{x}, \mathrm{y})$, on peut alors déterminer les coordonnées de $\mathrm{C_0}$.



On obtient

$$x_{C_0} = OC_0 \cos(\hat{A})$$

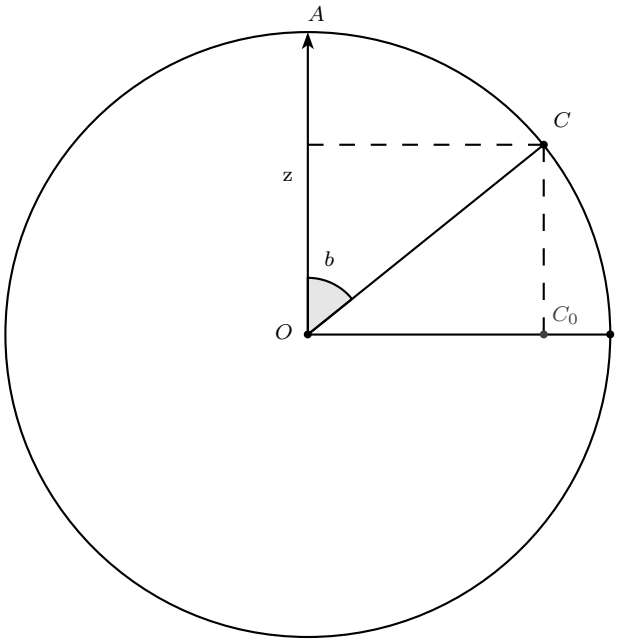
et

$$y_{C_0} = OC_0 \sin(\hat{A})$$

De plus C_0 est dans (xOy) donc

$$z_{C_0} = 0$$

On se place maintenant dans le plan (AOC).



La sphère ayant un rayon de 1, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$, noté b est aussi la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOC}$.
On peut alors déterminer OC_0,

$$OC_0 = OC\sin(b) = \sin(b)$$

Ainsi C_0 a pour coordonnées $(\sin(b)\cos(\hat{A}), \sin(b)\sin(\hat{A}), 0)$

(b) Comme C_0 est le projeté de C sur (xOy), C et C_0 ont même abscisse et ordonnée.

On se place maintenant dans le plan (AOC). La sphère ayant un rayon de 1, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$, noté b est aussi la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOC}$.
On trouve alors que

$$z_C = \sin(b)$$

Ainsi les coordonnées de C sont

$$(\cos\hat{A}\sin b, \sin\hat{A}\sin b, \cos b)$$

3. D'une première façon $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = x_B x_C + y_B y_C + z_B z_C = \sin(c)\sin(b)\cos(\hat{A}) + \cos(c)\cos(b)$.
Puis $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = ||\overrightarrow{OB}|| \times ||\overrightarrow{OC}||\cos(\widehat{BOC})$

Mais l'angle $\widehat{BOC}$ a pour mesure en radian la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ donc $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = \cos(a)$
En résumé

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\hat{A}$$

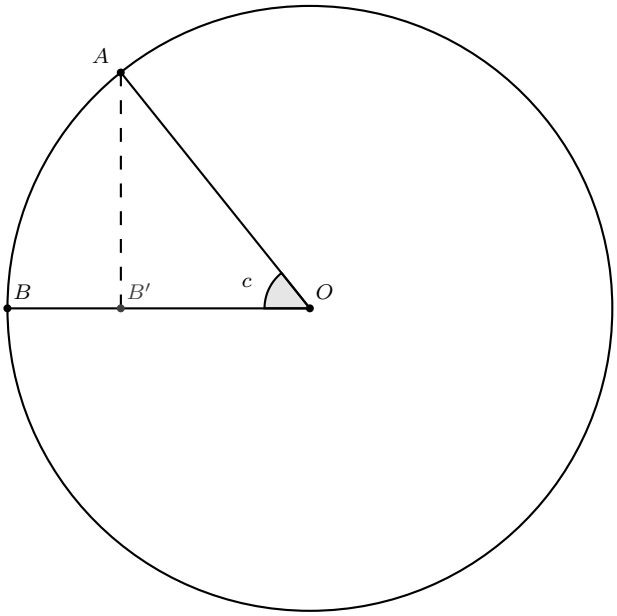
4. Les formules analogues à l'équation (3) sont

$$\begin{cases} \cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos\hat{B} \\ \cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\hat{C} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2 :

1. H est le projeté de A sur (OBC) donc la droite (AH) est perpendiculaire au plan (OBC). Ainsi (AH) est orthogonale à toutes les droites de (OBC) en particulier on a (OB′) $\perp$ (AH)
B' est le projeté de H sur (OB) donc la droite (OB') est perpendiculaire à la droite (B'H).
On vient de voir que (OB')est orthogonale à deux droites secantes du plan (AB'H), elle est donc orthogonale à ce plan. (OB') est donc orthogonale à toutes les droites de (AB'H) en particulier (OB') $\perp$ (AB').

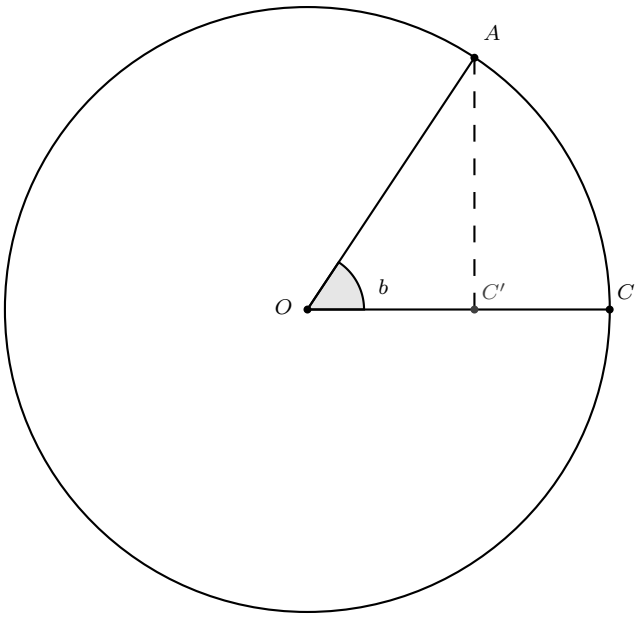
On se place dans le plan (AOB)



on obtient

$$\mathrm{AB}' = OA\sin(\widehat{AOB}) = \sin(c)$$

De la même manière on montre que (OC') est orthogonale à (AC') et si on se place dans le plan (AOC)

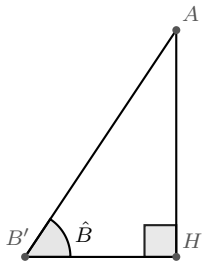


et on obtient

$$\mathrm{AC}' = \mathrm{OA}\sin(\mathrm{b}) = \sin(b)$$

2. (a) La tangente en B au cercle de centre O passant par B et A est perpendiculaire au rayon [OB] dans le plan (OAB), elle est donc parallèle à (AB'). De plus la tangente en B au cercle de centre O passant par B et C est perpendiculaire au rayon [OB] et dans le plan(OBC) donc parallèle à (HB').
   Or $\hat{B}$ est l'angle fait par les deux tangentes citées ci-dessus, on peut en déduire que $\hat{B} = \widehat{AB'H}$.

   (b) On se place dans le triangle AB'H.



$$AH = \mathrm{AB}' \sin(\hat{B}) = \sin(\hat{B}) \sin(c)$$

3. On démontre de manière analogue que

$$AH = \mathrm{AC}' \sin(\hat{C}) = \sin(\hat{C}) \sin(b)$$

4. En utilisant les résultats des deux dernières questions on en déduit que:

$$\sin c \sin \hat{\mathrm{B}} = \sin b \sin \hat{\mathrm{C}} \tag{3}$$

5.

$$\sin a \sin \hat{\mathrm{B}} = \sin b \sin \hat{\mathrm{A}}$$
$$\sin a \sin \hat{\mathrm{C}} = \sin c \sin \hat{\mathrm{A}}$$

On obtient alors facilement

$$\frac{\sin a}{\sin \hat{\mathrm{A}}} = \frac{\sin b}{\sin \hat{\mathrm{B}}} = \frac{\sin c}{\sin \hat{\mathrm{C}}}$$

Correction de l'exercice 3 :

1.

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\hat{C}) = \cos(a)\cos(b)$$

donc $c = \arccos(\cos(a)\cos(b)) \simeq 100°32'$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\cos(b) - \cos(a)\cos(c)}{\sin(a)\sin(c)}$$

donc $\hat{B} = \arccos(\frac{\cos(b) - \cos(a)\cos(c)}{\sin(a)\sin(c)}) \simeq 59°38'$

$$\cos(\hat{A}) = -\cos(\hat{B})\cos(\hat{C}) + \sin(\hat{B})\sin(\hat{C})\cos(a) = \sin(\hat{B})\cos(a)$$

donc $\hat{A} = \arccos(\sin(\hat{B})\cos(a)) \simeq 107°20'$

2.

$$\cos(\hat{A}) = -\cos(\hat{B})\cos(\hat{C}) + \sin(\hat{B})\sin(\hat{C})\cos(a) = \sin(\hat{B})\cos(a)$$

donc $\hat{A} = \arccos(\sin(\hat{B})\cos(a)) = 97°18'$

$$\cos(b) = \frac{\cos(\hat{B}) + \cos(\hat{A})\cos(\hat{C})}{\sin(\hat{A})\sin(\hat{C})} = \frac{\cos(\hat{B})}{\sin(\hat{A})}$$

donc $b \simeq 27°43'$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\hat{C}) = \cos(a)\cos(b)$$

donc $c \simeq 103°36'$

3. $\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\hat{C})$ donc $\cos(b) = \dfrac{\cos(c)}{\cos(a)}$ alors $b = 72°25'$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)}$$

donc $\hat{A} = 52°32'$

$$\cos(\hat{B}) = -\cos(\hat{A})\cos(\hat{C}) + \sin(\hat{A})\sin(\hat{C})\cos(b) = \sin(\hat{A})\cos(b)$$

donc $\hat{B} = 76°8'$

4.

$$\cos a = \frac{\cos(\hat{A}) + \cos(\hat{B})\cos(\hat{C})}{\sin(\hat{B})\sin(\hat{C})} = \frac{\cos(\hat{A})}{\sin(\hat{B})}$$

donc $a \simeq 84°46$

$$\cos(b) = \frac{\cos(\hat{B}) + \cos(\hat{A})\cos(\hat{C})}{\sin(\hat{A})\sin(\hat{C})} = \frac{\cos(\hat{B})}{\sin(\hat{A})}$$

donc $b = 118°27'$

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\hat{C}) = \cos(a)\cos(b)$$

donc $c = 92°29'$.

5.

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\hat{A})$$

donc $a \simeq 70°02'$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\cos(b) - \cos(a)\cos(c)}{\sin(a)\sin(c)}$$

donc $\hat{B} \simeq 80°23'$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)}$$

donc $\hat{C} \simeq 111°8'$

6.

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)}$$

donc $\hat{A} \simeq 73°32'$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\cos(b) - \cos(a)\cos(c)}{\sin(a)\sin(c)}$$

donc $\hat{B} \simeq 113°29'$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)}$$

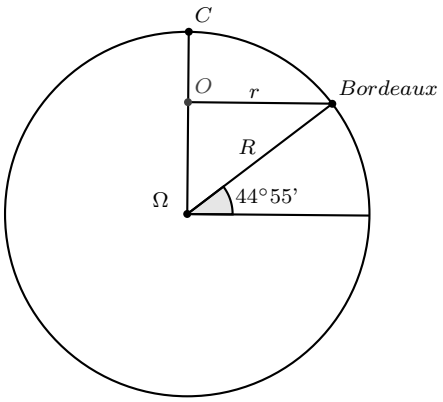
donc $\hat{C} \simeq 61°52$

Correction de l'exercice 3 :

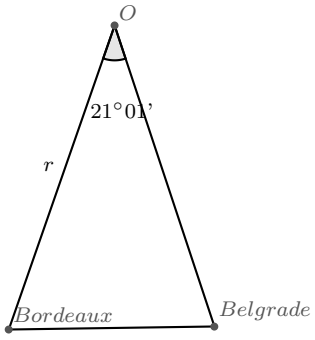
On note O le centre du parallèle commun à Bordeaux et à Belgrade.

$$\widehat{\text{BordeauxOBelgrade}} = 21°01' = 0,3668\text{rad}$$

Le rayon de ce parallèle est $r = R\cos(44°55')$



1. En utilisant la formule d'Al Kashi, la longueur du tunnel serait : $r\sqrt{2(1-\cos(21°01'))} \simeq 1647\text{km}$



2. Sur un grand cercle (route orthodromique) :

   On considère le triangle sphérique ABC avec A à Bordeaux, B à Belgrade et C au pôle nord.

On a $a = b = 90° - 44°55' = 45°05'$. L'écart des longitudes est $\hat{C} = 21°01'$.

On cherche à déterminer l'arc c :

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\hat{C}) = 0,966$$

$$c \simeq 0,259\text{rad}$$

d'où une longueur égale à $R \times 0,259 = 1652\text{km}$

3. Le rayon du parallèle est r calculé dans la question 1). La route parcourue est la longueur parcourue sur le parallèle qui est égale à son rayon multiplié par l'angle en radian qui l'intersecte. On obtient $r \times 0,3668 \simeq 1657\text{km}$.