

Changements de bases

1 CHANGEMENT DE BASE

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On a défini la matrice d'une application linéaire $u : E \rightarrow F$, en fixant une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F . On peut se demander comment passer de ces bases à de nouvelles : Comment obtenir la matrice de u dans deux nouvelles bases $\mathcal{B}'_E$ et $\mathcal{B}'_F$ de E et F respectivement, à partir de la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$? C'est la question du **changement de base**. Pour cela on va utiliser une matrice de passage $P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}$ (ou P_E quand il n'y a pas d'ambiguïté) qui permet de passer des matrices lignes des vecteurs écrits dans la base $\mathcal{B}_E$ vers les matrices lignes des vecteurs écrits dans la base $\mathcal{B}'_E$. Autrement dit $P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}$ est défini par

$$P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E} := \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E) .$$

Donc pour tout $x \in E$, on a

$$P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E} \cdot \text{Mat}(x, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(x, \mathcal{B}'_E) .$$

Le diagramme suivant résume la situation :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \begin{array}{c} (E, \mathcal{B}_E) \\ P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E} \downarrow \text{Id}_E \\ (E, \mathcal{B}'_E) \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)} \\ \xrightarrow{\text{Mat}(u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F)} \end{array} & \begin{array}{c} (F, \mathcal{B}_F) \\ P_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F} \downarrow \text{Id}_F \\ (F, \mathcal{B}'_F) \end{array} \end{array} \quad (1)$$

Par définition et en utilisant le diagramme :

Proposition 1

On a, en reprenant les notations ci dessus :

$$\textcircled{1} \quad P_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}_E} = P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}^{-1} \quad (2)$$

$$\textcircled{2} \quad P_{\mathcal{B}'_E \rightarrow \mathcal{B}''_E} P_{\mathcal{B}''_E \rightarrow \mathcal{B}_E} = P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E} \quad (3)$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Mat}(u, \mathcal{B}'_E, \mathcal{B}'_F) = P_{\mathcal{B}_F \rightarrow \mathcal{B}'_F} \cdot \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \cdot P_{\mathcal{B}_E \rightarrow \mathcal{B}'_E}^{-1} \quad (4)$$

Corollaire 1.1

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$. Soient $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ et $A' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}')$. Alors

$$A' = P A P^{-1} .$$

Exemple 1

Reprenons l'application linéaire

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x - y + z, x - 2y - z) . \end{aligned}$$

On fixe $\mathcal{B}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ et $\mathcal{B}_2 = \{f_1, f_2\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. La matrice de u est donnée par

$$U := \begin{pmatrix} u(1, 0, 0) & u(0, 1, 0) & u(0, 0, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Essayons de trouver la matrice de u dans les bases

$$\mathcal{B}'_3 = \{e'_1 := (1, 1, 2); e'_2 := (1, -1, 0); e'_3 := (1, 1, -1)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_2 = \{f'_1 := (3, -3); f'_2 := (3, 3)\}.$$

Alors la matrice de passage

$$P_{\mathcal{B}'_3 \rightarrow \mathcal{B}_3} := \text{Mat}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}'_3, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a juste écrit les vecteurs de la nouvelle base en colonnes. En effet, on doit avoir, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a

$$P_{\mathcal{B}'_3 \rightarrow \mathcal{B}_3} \cdot \text{Mat}(x, \mathcal{B}'_3) = \text{Mat}(x, \mathcal{B}_3).$$

Si on a bien

$$\text{Mat}(e'_1, \mathcal{B}'_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}'_3 \rightarrow \mathcal{B}_3} \cdot \text{Mat}(e'_1, \mathcal{B}'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

De la même manière,

$$P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

En faisant le calcul, on trouve

$$P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2}^{-1} = P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_2} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On aurait pu trouver $P_{\mathcal{B}'_2 \rightarrow \mathcal{B}_2}^{-1}$ en écrivant les vecteurs f_1 et f_2 en fonction des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'_2$. D'après la formule (3) dans la proposition 1, on a :

$$\begin{aligned} \text{Mat}(u, \mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_2) &= P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_2} \cdot \text{Mat}(u, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2) \cdot P_{\mathcal{B}_3 \rightarrow \mathcal{B}'_3}^{-1} \\ &= P_{\mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}'_2} \cdot U \cdot P_{\mathcal{B}'_3 \rightarrow \mathcal{B}_3} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut vérifier à la main que ce résultat est juste, en calculant $u(e'_1)$, $u(e'_2)$ et $u(e'_3)$.

Question auxiliaire :

Comment a-t-on fait pour trouver les bases $\mathcal{B}'_3$ et $\mathcal{B}'_2$ pour que la matrice de U soit si simple ?

Exemple 2

Dans $\mathbb{K}_3[X]$, on note $\mathcal{B}_0$ la base canonique. On pose aussi

$$\mathcal{B} = ((X-1)^3, (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2, (X+1)^3)$$

une autre base de $\mathbb{K}_3[X]$. Déterminons la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.

Tout d'abord, commençons par sa compagne $P := P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0}$, plus facile, qui s'obtient en écrivant en colonne les coordonnées des éléments de $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}_3[X]$, ce qui donne

$$P := \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $P^2 = 8I_4$ donc $P^{-1} = \frac{1}{8}P$. Donc la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$ est la matrice $P_{\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}} = \frac{1}{8}P$.

Définition 1 : Matrices semblables

Deux matrices carrées A et B sont dites **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

La conséquence directe de notre travail sur les changements de bases nous montre que deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Ces matrices ont la bonne propriété d'avoir un invariant très simple : la **trace**.

Définition 2 : La trace d'une matrice

Soit A une matrice carrée de taille n . La **trace** de la matrice A , notée $\text{Tr}(A)$ est la somme de ses coefficients diagonaux. Autrement dit,

$$\text{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Tr est alors une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3

Pour A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation

$$X = \text{Tr}(X)A + B \quad (5)$$

Prenons X une matrice solution alors $\text{Tr}(X) = \text{Tr}(X)\text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$, par linéarité, et donc $\text{Tr}(X)(1 - \text{Tr}(A)) = \text{Tr}(B)$

Cas $\text{Tr}A \neq 1$. On obtient $\text{Tr}(X) = \frac{\text{Tr}(B)}{1 - \text{Tr}(A)}$, puis $X = \frac{\text{Tr}(B)}{1 - \text{Tr}(A)}A + B$.
Inversement, cette matrice est bien solution.

Cas $\text{Tr}A = 1$. Si $\text{Tr}B \neq 0$, l'équation $\text{Tr}(X)(1 - \text{Tr}(A)) = \text{Tr}(B)$ est incompatible, il n'y a pas de solution.
Si $\text{Tr}B = 0$, la solution X est de la forme $\lambda A + B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et inversement de telles matrices sont solutions.

Proposition 2

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

Preuve. On rappelle que

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Donc

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{ki} \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{ki} = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n b_{ki} \cdot a_{ik} \right] = \text{Tr}(BA).$$

□

Corollaire 2.1

Deux matrices sont semblables alors elles ont la même trace.

Preuve. La preuve est directe:

A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables,

$\iff$ Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, tel que $A = PBP^{-1}$, $\square$

Donc Il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, tel que $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(PBP^{-1}) = \text{Tr}(PP^{-1}B) = \text{Tr}(B)$.

Exemple 4

À votre avis, Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = I_n$?

Premier reflexe, on regarde la trace ! Si elles existent, on aurait

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad \text{et donc} \quad \text{Tr}(AB - BA) = 0 \neq \text{Tr}(I_n).$$

Donc, de telles matrices n'existent pas.

2 RETOUR SUR LE RANG D'UNE MATRICE

Rappel :

On a déjà vu deux notions qui s'appelle déjà le *rang* :

- ① Soit $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E . Le rang de $\mathcal{F}$, noté $\text{rg}(\mathcal{F})$ est défini par :

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}.$$

C'est aussi le cardinal d'une sous-famille libre maximale L de $\mathcal{F}$.

- ② Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Le rang de u est la dimension de l'image de u . La relation avec la première notion vient du fait que, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E , alors $\text{Im}(u) = \text{Vect}\{u(e_1), \dots, u(e_p)\}$, et donc

$$\text{rg}(u) = \text{rg}(\{u(e_1), \dots, u(e_p)\})$$

Définition 3

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On note $A_1, \dots, A_p \in M_{m,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de A . Le rang de A , noté par $\text{rg}A$, est le rang de la famille formée par les colonnes de A .

Proposition 3

- ① Le rang d'une famille de vecteurs est le rang de la matrice constituée des coordonnées de ces vecteurs en colonnes, données dans n'importe quelle base.
- ② Le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quelles bases.

Preuve. ① C'est juste la définition du rang que l'on a donnée.

② Le rang d'une application linéaire, est le rang de la famille de vecteurs image d'une base. Si on met les coordonnées de ces vecteurs, dans n'importe quelle base de l'ensemble d'arrivée, en colonne, on obtient la matrice de l'application linéaire. D'après ①, les rangs sont les mêmes. $\square$

Exemple 5

Soit $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + y - t, x + z + 2t, 2x + y - z + t, -x + 2y + z)$, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4$. Alors le rang de f est 4. Montrer le !

Vocabulaire des applications linéaires

On rappelle que l'on peut définir, à partir d'une matrice A à coefficient dans $\mathbb{K}$, l'application linéaire

$$\begin{aligned} f_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX . \end{aligned}$$

De cette manière, on généralise les définitions de noyau et d'image à une matrice par

$$\text{Ker} A := \text{Ker} f_A , \quad \text{Im} A := \text{Im} f_A .$$

Exemple 6

Cherchons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ainsi que des bases de $\text{Im} A$ et $\text{Ker} A$. Étant donné que l'image de A est engendrée par ses vecteurs colonnes, qui sont tous proportionnels au vecteur non nul $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $\text{rg}(A) = 1$, et la famille (e) est une base de $\text{Im} A$.

La matrice A ayant 3 colonnes, le théorème du rang donne $\dim \text{Ker} A = 3 - \text{rg} A$, donc $\dim \text{Ker} A = 2$. En notant C_1, C_2 et C_3 les colonnes de A , on constate que

$$2C_1 - C_2 = 0 \quad \text{et} \quad 5C_1 - C_3 = 0 .$$

On en déduit que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\text{Ker} A$. Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils forment une base de $\text{Ker} A$.

Exemple 7

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ matrices de rang 2 vérifiant $(AB)^2 = AB$. Montrons que $BA = I_2$.

On a $A(BA - I_2)B = 0$. Or puisque A est de rang 2, $\text{Ker} A = \{0\}$ et donc $(BA - I_2)B = 0$.

De plus, puisque B est de rang 2, donc $\text{Im} B = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc $BA - I_2 = 0$.

Corollaire 3.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\text{rg} A = n$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Par définition, $\text{rg} A = \text{rg}\{A_1, \dots, A_n\}$, où $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont les colonnes de A . Comme on a équivalence entre linéaire indépendance des colonnes d'une matrice et inversibilité de cette matrice, A est inversible

$$\begin{aligned} \iff & \text{les colonnes de } A \text{ sont linéairement indépendantes} \quad \square \\ \iff & \text{rg} A = n . \end{aligned}$$

Définition 4 : Matrices équivalentes

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Ces deux matrices A et B sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$B = QAP^{-1} .$$

Proposition 4

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- ① A et B sont équivalentes,
- ② A et B représentent une même application linéaire dans deux bases différentes (dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée),
- ③ $\text{rg} A = \text{rg} B$.
- ④ On passe de A à B par opérations sur les lignes et sur les colonnes.

Montrer qu'une matrice est inversible

Ainsi pour vérifier qu'une matrice est inversible, il suffit de voir que son rang est maximal. C'est plus rapide que d'inverser le système mais cela ne permet pas de calculer l'inverse.

Exemple 8

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non inversible si, et seulement si, elle est équivalente à une matrice nilpotente.

En effet, Toute matrice nilpotente n'est pas inversible, car $A^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.

De plus, si A n'est pas inversible alors $\text{rg} A < n$. Or il est possible de construire une matrice nilpotente de rang égal à $\text{rg} A$. Deux matrices étant équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang, on peut conclure que A est équivalente à une matrice nilpotente.

Preuve. ① $\iff$ ② est une conséquence directe du paragraphe 1 sur les changements de bases.

① $\iff$ ④ a déjà été démontré dans le chapitre **APPLICATIONS LINÉAIRES**.

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $r \leq \min(m, n)$. On va montrer que

$$\text{rg} A = r \iff A \text{ est équivalente à } J_{m,n,r} = \begin{pmatrix} O_{r,n-r} & I_r \\ O_{m-r,n-r} & O_{m-r,r} \end{pmatrix}.$$

Cela prouvera l'équivalence manquante. On a vu dans le chapitre **MATRICES, PREMIERS PAS**, que les opérations sur les lignes et sur les colonnes étaient réalisables par des matrices inversibles : Les matrices de transvection, de dilatation et de transposition.

Si A est équivalente à $J_{m,n,r}$, alors il existe deux matrices Q et P telles que $A = QJ_{m,n,r}P^{-1}$. Comme $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection et de dilatation (Théorème que nous n'avons pas démontré, car hors programme) alors les matrices Q et P sont le produit de matrices de transvection et de dilatation. Donc la matrice A consiste à des opérations sur les lignes et les colonnes de $J_{m,n,r}$. Elle a donc le même rang r .

Supposons $\text{rg} A = r$. En effectuant l'algorithme de Gauss, on sait que l'on peut réduire tout système (en utilisant la méthode pour calculer son rang) à un système échelonné en ligne. En effectuant des opérations sur les colonnes, on peut se ramener à $J_{m,n,r}$, en éliminant tout ce qui reste sur chaque ligne, mais qui n'est pas un pivot. Donc si le rang de A est r , on peut la ramener à $J_{m,n,r}$ en effectuant des opérations sur les lignes et les colonnes. Comme il existe des matrices de transvection, de dilatation et de transposition pour effectuer ces opérations, que ces matrices sont inversibles et que le produit de matrices inversibles est inversible, il existe bien $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inversibles telles que $QAP^{-1} = J_{m,n,r}$.

□

Super pratique

$$\text{rg} A = r \iff A \text{ est équivalente à } J_{m,n,r} = \begin{pmatrix} O_{r,n-r} & I_r \\ O_{m-r,n-r} & O_{m-r,r} \end{pmatrix}.$$

Exemple 9

Ce résultat est assez classique de perturbations de matrices, pour obtenir une matrice inversible. C'est une application directe du résultat précédent.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose $\text{rg } A + \text{rg } B \geq n$. Alors il existe $U, V \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$UA + BV \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Posons $r = \text{rg } A$ et $s = \text{rg } B$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J'_s = \begin{pmatrix} O_{n-s} & O_{n-s,s} \\ O_{s,n-s} & I_s \end{pmatrix}$$

Il existe donc $P, Q, R, S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $PAQ = J_r$ et $RBS = J'_s$, donc $PAQ + RBS = J_r + J'_s$, qui est une matrice de rang n . On peut réécrire $(R^{-1}P)A + B(SQ^{-1}) = R^{-1}(J_r + J'_s)Q^{-1}$.

Donc, en posant $U = R^{-1}P$ et $V = SQ^{-1}$, on obtient $U, V \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $\text{rg}(UA + BV) = n$, donc cette matrice est inversible.

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg } A = \text{rg } {}^t A$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $r := \text{rg } A$. Alors, d'après la proposition précédente, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ inversibles telles que $A = QJ_{m,n,r}P^{-1}$. Donc ${}^t A = {}^t P^{-1} {}^t J_{m,n,r} {}^t Q$. Par la même preuve que précédemment, comme

$${}^t J_{m,n,r} = \begin{pmatrix} O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \\ I_r & O_{r,n-r} \end{pmatrix}$$

a un rang égal à r , $\text{rg } {}^t A = r$. $\square$

Corollaire 5.1

Finalement $\text{rg } A$ est aussi le rang de la famille formée par les lignes de A . Cela implique que $\text{rg } A$ ne change pas si :

- on permute les lignes,
- on multiplie une ligne par un scalaire non nul,
- on retire une ligne nulle,
- on retire une ligne qui est combinaison linéaire des autres,
- on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.

Les matrices échelonnées

On peut donc se ramener, en multipliant par des matrices inversibles à gauche et à droite, respectivement à des matrices échelonnées en ligne et en colonne. Le rang d'une matrice échelonnée sur les lignes est égal au nombre de lignes non nulles. C'est donc une bonne méthode pour obtenir le rang d'une matrice, et donc d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire.

Si la matrice est inversible, on peut donc, en multipliant par des matrices inversibles à gauche et à droite, se ramener à la matrice identité.