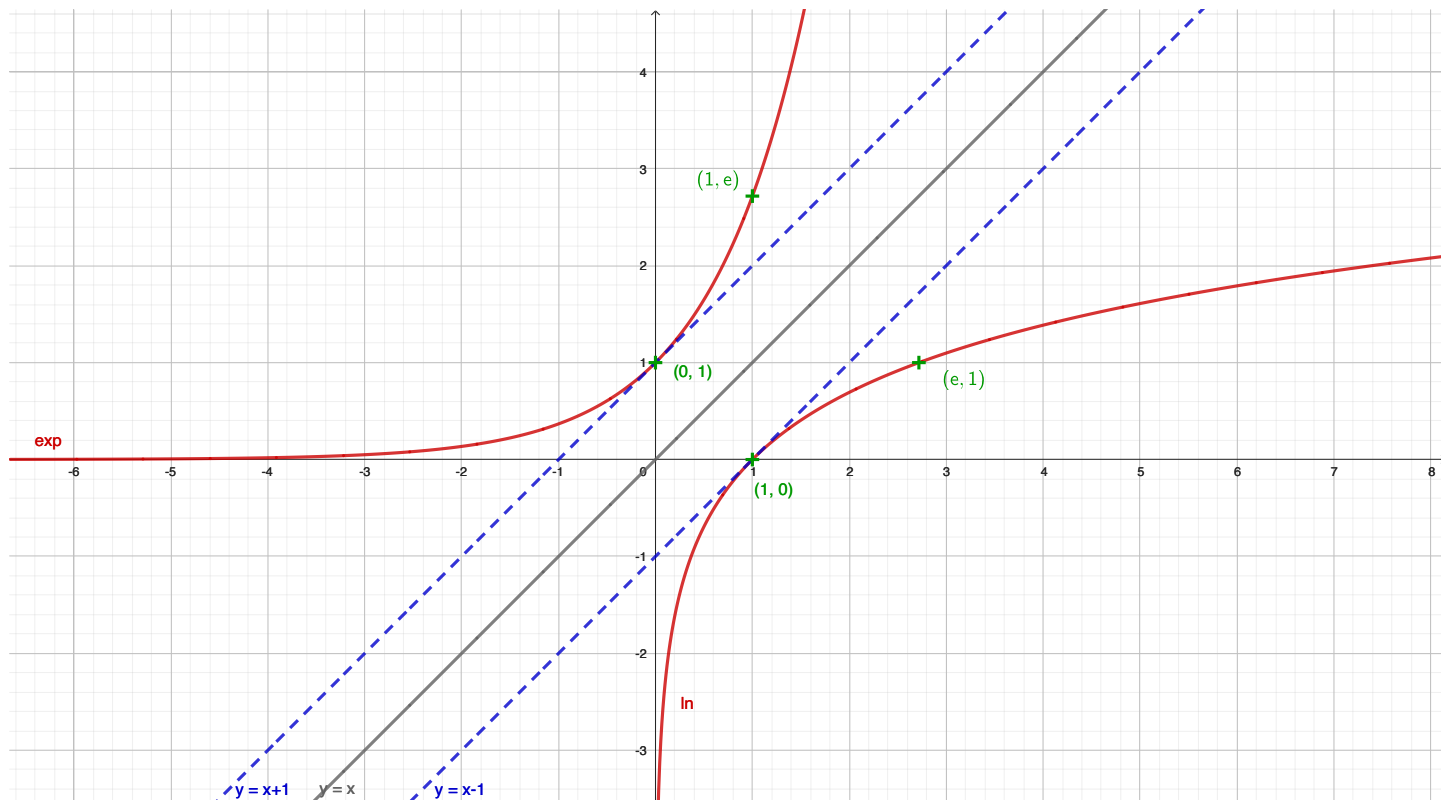


FICHE exp ET log



LA FONCTION LOGARITHME

- Il existe une unique primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ qui s'annule en 1. On appelle logarithme népérien cette fonction, et on la note $\ln$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

- Par conséquent, $\ln$ est dérivable et sa dérivée est la fonction inverse $\forall x \in]0, +\infty[, \ln'(x) = \frac{1}{x}$. et $\ln(1) = 0$.
- Graphes : la fonction est continue, strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.
- $\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \forall q \in \mathbb{Q}, \quad \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b); \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a; \quad \ln(a^q) = q \ln(a)$.
- Croissance comparé. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^n(x) = 0$$

- Dérivée en 1 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
- Dérivée composée. Si $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I et que pour tout $x \in I, u(x) > 0$, alors $v : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et $v' = \frac{u'}{u}$.

LA FONCTION exp

- la fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall q \in \mathbb{Q}, \quad \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y); \quad \exp(qx) = (\exp(x))^q; \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}; \quad \exp(x) > 0.$
- La fonction exp est continue strictement croissante, tend vers 0 en $-\infty$, et vers $+\infty$ en $+\infty$.
- On note $e = \exp(1)$, alors $\exp(x) = e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Dérivé en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
- Croissances comparées généralisées. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0.$$

- Dérivation composée : si $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , alors $v : x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I et $\forall \rightarrow \mathbb{R}, v'(x) = u'(x) \exp(u(x))$.

LIEN ENTRE LES DEUX

- $\forall x > 0, \exp(\ln(x)) = x$, et $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(e^t) = t$.
- $\ln(e) = 1$.
- $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \ln(a^b) = b \ln a$ donc $a^b = \exp(b \ln(a))$.

EXERCICES DE RAPIDITÉ

Les exercices écrits en gris ne sont pas à faire au premier passage de la feuille. Ils sont un peu plus durs.

EXERCICE 1 ☐☐☐

Simplifier lorsque cela est possible:

$$\begin{aligned} \ln(e^2); \quad & \exp(\ln(2) + \ln(3) - \ln(5)); \quad & \ln(14) - \ln 7; \quad & \ln\left(\frac{5}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{5}\right); \quad & \frac{\ln(1000)}{\ln(100)}; \\ & \ln(10000) + \ln(0.01); \quad & \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2}). \\ & e^{2x} \times e^{1-2x}; \quad & \frac{e^{2x+3}}{e^{x-1}}; \quad & \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

EXERCICE 2 ☐☐☐

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes:

$$\begin{aligned} \ln x = 4; \quad & \ln(x) = -2; \quad & 1 + 3 \ln(x) = \ln(2) + \pi; \quad & \ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6); \\ & \ln(x) + \ln(4-x) = \ln(2x-1) + \ln 3; \\ \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -1; \quad & \ln(x+1) = 1 + \ln(x-1); \quad & 2 \ln(3x) - 1 \geq 0; \ln(2x-1) < \ln(x); \\ & \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right) \geq 1; \quad & \frac{e^x + 3}{e^x + 1} > 2; \\ e^{x^2-2x} < e^{1-x}; \quad & e^{2x} - 3e^x - 10 = 0; \quad & e^x - e^{-x} = 3; \quad & e^{x+1} - e^{2x-3} = 0; \end{aligned}$$

EXERCICE 3 ☐☐☐

Déterminer les limites suivantes:

$$\begin{array}{lll}
\lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x ; & \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x ; & \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2} ; \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) ; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^x) - x. \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 e^{2x} ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^{-x} ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^3} ; \\
& & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{3 + e^x}. \\
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x - 3} ; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{(x^2)}}{x^3} ; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\ln x} ;
\end{array}$$

EXERCICE 4 □ □ □

Donner le domaine de dérivabilité et la dérivée de :

$$\begin{array}{lll}
f(x) = \ln(3x - 1) ; & g(x) = \ln(x^2) ; & h(x) = \ln(\cos(x) + 2) ; \\
i(x) = \ln(2 \cos(x) + 1) ; & j(x) = \ln(2x - x^2) ; & k(x) = \ln(1 + \sqrt{x}) ; \\
l(x) = e^x \ln(x) ; & & \\
f_1(x) = e^{2x^2+1} ; & g_1(x) = (2x + 1)e^{3x^2} ; & h_1(x) = \frac{x \ln(x)}{e^x + 1}
\end{array}$$

EXERCICE 5 □ □ □

Etude et représentation graphique des fonctions suivantes:

- ① $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$
- ② $f(x) = \ln(x) - 3(\ln(x))^2$, avec étude du signe de f .
- ③ $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.
- ④ $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 0$. Interpréter graphiquement.
- ⑤ signe de $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$ et en déduire l'étude de $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$
- ⑥ $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$. résoudre en plus $f(x) = \frac{1}{2}$.
- ⑦ $g(x) = 3x + \frac{2e^x}{e^x + 1}$