Fundamentos de Geometria Plana

P. F. Machado

Fundamentos de Geometria Plana

Belo Horizonte
CAED-UFMG
2012

COLEÇÃO EAD – MATEMÁTICA
Coordenador: **Dan Avritzer**
LIVRO: **Fundamentos de Geometria Plana**
Autor: **P. F. Machado**
Revisão: **Jussara Maria Frizzera**
Projeto Gráfico: **Laboratório de Arte e Tecnologia para Educação/EBA/UFMG**
Formatação: **Sérgio Luz**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Luciana de Oliveira M. Cunha, CRB-6/2725)

M149f Machado, P. F.
Fundamentos de geometria plana / P. F. Machado. – Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2012.
151 p. : il. color. ; 27 cm.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-64724-16-7

1. Geometria plana. 2. Geometria euclidiana. 3. Ensino a distância. I. Universidade Federal de Minas Gerais. II. Título.

CDD 516.22
CDU 514.112

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Caras e caros alunas e alunos, este é um livro para ajudá-los a estudar os fundamentos da geometria plana euclidiana. Vocês já tiveram contato com vários aspectos da geometria por toda a sua vida escolar, e neste curso de Licenciatura em Matemática, modalidade a distância, oferecido pela Universidade Federal de Minas Gerais, passaram pela disciplina Resolução de Problemas Geométricos – RPG, onde trabalharam os conceitos de geometria plana na forma de resolução de problemas no livro da Professora Marília Costa de Faria [4] .

No curso de Resolução de Problemas Geométricos (RPG) vocês devem ter percebido, no entanto, que para resolver os problemas foi preciso aprofundar vários conhecimentos, e inclusive demonstrar várias afirmações, enunciadas como teoremas. Então uma pergunta pode ter surgido: por onde começamos a demonstrar teoremas? Explico melhor: para demonstrar teoremas (e também resolver problemas!) é preciso começar em algum lugar, usar algum conhecimento anterior. Mas, que coisa, que conhecimento anterior é este? Vejamos um exemplo. Na aula 3 de [4] estudou-se o conceito de congruência, em particular de congruência de triângulos. Foram apresentados três casos de congruência de triângulos: LAL, ALA e LLL. Numa leitura atenta vocês podem observar que o caso LAL foi assumido como verdadeiro, e dele os outros casos foram deduzidos, mas não foi apresentada nenhuma demonstração daquele caso! Por quê? É esta pergunta, e outras, que responderemos nesta disciplina, ou seja, apresentaremos os princípios fundamentais (daí o nome da disciplina) da geometria euclidiana plana que estão por trás de toda a forma de argumentação à qual vocês foram expostos em [4].

Quando se estuda geometria, a ilustração através de figuras bem elaboradas é essencial para auxiliar na compreensão do assunto. Tendo isto em mente esforcei-me para elaborar as figuras da melhor maneira possível. A tarefa, espero que bem cumprida, foi realizada utilizando-se o programa computacional de geometria dinâmica GeoGebra, de uso livre, que pode ser encontrado em [5]. As figuras foram desenhadas no ambiente do programa e convertidas, pelo próprio, em linguagem compatível o sistema LaTeX para edição de textos técnicos, que foi utilizado para escrever este livro.

Agora, vamos por a “mão na massa”!

NOTA DO EDITOR

A Universidade Federal de Minas Gerais atua em diversos projetos de Educação a Distância, que incluem atividades de ensino, pesquisa e extensão. Dentre elas, destacam-se as ações vinculadas ao Centro de Apoio à Educação a Distância (CAED), que iniciou suas atividades em 2003, credenciando a UFMG junto ao Ministério da Educação para a oferta de cursos a distância.

O CAED-UFMG (Centro de Apoio à Educação a Distância da Universidade Federal de Minas Gerais), Unidade Administrativa da Pró-Reitoria de Graduação, tem por objetivo administrar, coordenar e assessorar o desenvolvimento de cursos de graduação, de pós-graduação e de extensão na modalidade a distância, desenvolver estudos e pesquisas sobre educação a distância, promover a articulação da UFMG com os polos de apoio presencial, como também, produzir e editar livros acadêmicos e/ou didáticos, impressos e digitais, bem como a produção de outros materiais pedagógicos sobre EAD.

Em 2007, diante do objetivo de formação inicial de professores em serviço, foi criado o Programa Pró-Licenciatura com a criação dos cursos de graduação a distância e, em 2008, com a necessidade de expansão da educação superior pública foi criado pelo Ministério da Educação, o Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB. A UFMG integrou-se a esses programas visando apoiar a formação de professores em Minas Gerais, além de desenvolver um ensino superior de qualidade em municípios brasileiros desprovidos de instituições de ensino superior.

Atualmente, a UFMG oferece - através do Pró-licenciatura e da UAB - cinco cursos de graduação, quatro cursos de pós-graduação lato sensu, sete cursos de aperfeiçoamento e um de atualização.

Como um passo importante e decisivo o CAED-UFMG decidiu, neste ano de 2011, criar a Editora CAED-UFMG como forma de potencializar a produção do material didático a ser disponibilizado para os cursos em funcionamento.

Nesse sentido, publicamos mais esse livro da coleção Educação a Distância, série Matemática. Agradecemos aos autores e à equipe de produção pela competência e dedicação que garantiram, com certeza, o nível de excelência desta obra apresentada à comunidade acadêmica.

Fernando Selmar Rocha Fidalgo
Editor

1

O plano, retas e segmentos

AULA 1: O PLANO, RETAS E SEGMENTOS

OBJETIVOS: Introduzir os elementos primitivos da geometria plana e os primeiros axiomas, chamados de axiomas de incidência, de métrica e de ordem.

1.1 Introdução

Caro aluno, se você parar e pensar um pouco, perceberá que "sabe" muitas coisas sobre geometria. Por exemplo, você sabe como determinar as áreas de várias figuras, conhece o famoso *Teorema de Pitágoras* para triângulos retângulos e sabe como utilizá-lo em várias situações, sabe como comparar figuras e dizer se são semelhantes ou não, etc. Você também está habituado com vários "fatos" considerados óbvios como, por exemplo, as seguintes afirmações abaixo:

(a) duas retas distintas não podem se cruzar em mais de um ponto;

(b) dois pontos distintos determinam uma reta;

(c) a menor distância entre dois pontos é uma reta (ou um segmento de reta);

(d) a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° (180 *graus*, unidade de medida de ângulos que todos conhecem, certo?);

(e) por um ponto não pertencente a uma reta passa uma única reta paralela a esta reta.

Por trás destas, e de outras simples afirmações, há muito mais do que se pensa. Veja, nas afirmações acima usamos algumas palavras como *reta*, *ponto*, *pertencente*, que para nós têm um certo significado intuitivo. Porém poderíamos, por exemplo, nos perguntar: *o que é mesmo uma reta*? Será que a resposta para esta pergunta é simples? Muitos dizem que uma reta é uma reta, e pronto! Veremos que não é bem assim... Muitas coisas podem ser uma "reta", desde que cada uma destas coisas satisfaça a certas regras. As mesmas questões podem ser levantadas para os outros termos que demos como exemplo, e ainda para muitos outros termos que não listamos.

Os matemáticos da Grécia antiga já pensavam nestas questões muitos anos antes de Cristo (a.C.), e suas reflexões culminaram numa obra escrita em torno do ano 300 a.C., creditada a um "certo" Euclides, de quem vocês já devem ter ouvido falar. Esta obra, o famoso "Elementos", deu a direção que a matemática segue até hoje, um modelo baseado na seguinte sequência:

$$\textit{axiomas} \rightarrow \textit{definições} \rightarrow \textit{teoremas.}$$

Depois, na era moderna, acrescentamos a esta sequência os elementos primitivos, logo antes de axiomas, como no esquema abaixo:

$$\textit{elementos primitivos} \;\rightarrow\; \textit{axiomas} \;\rightarrow\; \textit{definições} \;\rightarrow\; \textit{teoremas.} \tag{1.1}$$

Fundamentos de Geometria Plana.indd 11 25/09/2012 20:56:38

Mas o que são estas coisas? Fica difícil falar disso sem exemplos, mas também fica difícil dar exemplos sem que seja, de certa forma, destruída a aura de abstração e pureza por trás desta história. Como sempre, o meio termo é uma boa saída. Para evitar o problema do formalismo puramente abstrato podemos recorrer aos *modelos*, isto é, a estruturas que consideramos mais "concretas", baseadas em outros elementos supostamente mais compreensíveis. Tentaremos explicar estas ideias de maneira intuitiva, e depois introduzimos um modelo que pode nos ajudar a continuar os estudos.

Os *elementos primitivos* são as coisas que não definimos. Declaramos a sua "existência", e declaramos também que devem obedecer a certas leis, que chamamos de *axiomas* ou *postulados*[1]. Manipulando estes axiomas segundo as regras da lógica matemática, vamos obtendo resultados que chamamos de *teoremas*, *proposições*, *corolários*, *lemas*[2].

Na geometria euclidiana plana, os nossos elementos primitivos são três "coisas", denominadas *ponto*, *reta* e *plano*. Os elementos primitivos *plano* e *reta* serão, para nós, conjuntos[3] de pontos, e as retas serão subconjuntos do plano. O plano é o nosso *conjunto universo*, ou seja, não admitiremos, por hora, nenhum elemento fora do plano, uma vez que estamos tratando de *geometria plana*[4]. Chamamos qualquer subconjunto de pontos do plano genericamente de *figura*. Por exemplo, retas são figuras do plano. Veremos no texto vários exemplos de figuras especiais que todos já devem conhecer: circunferências, ângulos, polígonos, etc. Os *axiomas* são, como já dissemos, as leis que os elementos primitivos, neste caso o plano, as retas e os pontos, devem satisfazer. São, em geral, regras que compreendemos de forma intuitiva, e que ficam claras em desenhos, mas que precisam ser formalmente estabelecidas segundo critérios rigorosos da lógica matemática.

Uma boa pergunta é: como escolher os axiomas adequados? Em verdade podem ser muitas as escolhas da lista de axiomas, mas todas têm que satisfazer três critérios: serem *completas*, *consistentes* e *irredundantes* ou *minimais*. Um sistema de axiomas é *completo* se não deixa nenhum caso possível (de relações entre os elementos primitivos e os objetos ou figuras que queremos formar com eles) de fora; é *consistente* se não há contradição, ou seja, se um axioma não afirma um fato que não dê certo com outro; e é *irredundante* ou *minimal* se não contiver axiomas "demais", isto é, se um fato estabelecido por um deles já não estiver contemplado em outro.

---

[1] Havia uma distinção nos significados das palavras *axioma* e *postulado*, quando utilizadas pelos gregos, distinção que não levamos em consideração nos tempos modernos. Em resumo, postulados eram as noções indemonstráveis de geometria, enquanto que axiomas eram as noções indemonstráveis de caráter geral. Neste texto estamos usando a palavra *axioma* no sentido em que os gregos utilizavam o termo *postulado*.

[2] Em geral usamos o título *teorema* para um resultado que consideramos muito importante e fundamental, e o título *proposição* para um resultado que é "quase" um teorema, mas nem tanto... O título *lema* é usado normalmente para o que chamamos de "resultado técnico", ou seja, alguma afirmação acessória, que poderia aparecer sem destaque no corpo de uma demonstração mas que, por si só, tem utilidade em outras demonstrações. O título *corolário* é reservado a resultados que são consequências diretas, ou quase diretas, de outros teoremas ou proposições. Neste texto evitaremos utilizar os termos *proposição* e *lema*, pois muitas vezes é artificial a escolha destes títulos em contraposição ao título *teorema*.

[3] Admitiremos que nossos leitores estão acostumados com a linguagem básica da teoria de conjuntos.

[4] Quando vocês estudarem a *geometria espacial* serão introduzidos a mais um elemento primitivo, o *espaço* que, como aqui, será um conjunto de pontos do qual os planos (vários) serão subconjuntos.

Uma boa maneira de trabalhar com este assunto é ter em mente um modelo a ser "copiado", e um dos modelos mais simples que podemos usar é o que chamamos de *geometria analítica*, assunto com o qual os leitores já devem estar habituados. Neste modelo o *plano* é plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, os *pontos* são os pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e as *retas* são as retas analíticas, ou seja, os conjuntos $r \subset \mathbb{R}^2$ da forma

$$r = \begin{array}{l} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tais que } ax + by + c = 0, \quad \text{onde} \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \\ \text{com } a \text{ ou } b \text{ não nulos}\}. \end{array}$$

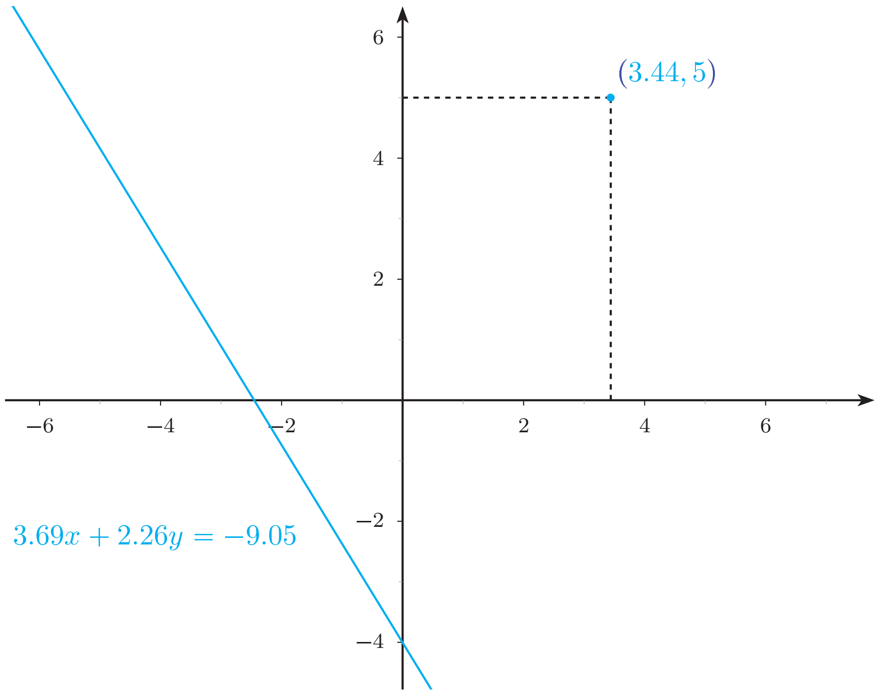


Figura 1.1 – Retas e pontos no plano cartesiano

O nosso sistema de axiomas será construído, de certa forma, pensando neste modelo que citamos, ou seja, será elaborado de forma que o mundo abstrato seja o mais parecido possível com o plano cartesiano. Mas prestem atenção: quem veio primeiro foi a geometria euclidiana *sintética*[5], e não a analítica (que começou a ser elaborada no século XVI).

Nas próximas seções apresentaremos os primeiros axiomas de nosso modelo de geometria sintética.

1.2 Axiomas: grupo I, axiomas de incidência

Tradicionalmente dividimos a lista de axiomas em grupos, de acordo com as propriedades que descrevem. O primeiro grupo é formado pelos axiomas de *incidência*, ou seja, que descrevem como é que os elementos ponto, reta e plano se associam.

O primeiro axioma de incidência já deve ser bem conhecido de muitos dentre os leitores, e diz que "por dois pontos passa uma única reta". Na linguagem destas notas fica:

[5]Chamamos de *sintética* qualquer teoria matemática construída seguindo o esquema (1.1).

Axioma I.1. Se A e B são dois pontos distintos do plano, então existe uma e uma única reta l tal que A e B pertencem a l.

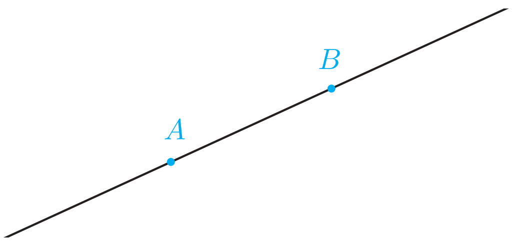


Figura 1.2 - Reta passando por dois pontos

Vocês devem perceber pelo enunciado deste axioma que estamos adotando uma certa notação (e uma certa linguagem!). Cabe aqui chamar a atenção para isto antes de continuarmos. Seguindo a tradição, denotaremos por letras latinas maiúsculas (A, B, etc.) os pontos do plano, e por letras latinas minúsculas (l, m, etc.) as retas. Como já dissemos, o plano e as retas são conjuntos de pontos, donde a utilização dos símbolos da teoria de conjuntos. Mas nosso estudo é sobre geometria, e convém utilizar também uma linguagem geométrica. Assim, se um ponto A pertence a uma reta l (linguagem da teoria de conjuntos), diremos também que a reta l *passa* pelo ponto A ou que A é um ponto da reta l (linguagem geométrica). Nesta linguagem o axioma I.1 se reescreve:

Axioma I.1. (**bis**) Por dois pontos distintos do plano passa uma e somente uma reta.

Como agora sabemos que dois pontos determinam uma reta, é bom fixarmos uma notação para descrever este fato.

Definição 1.1. A reta determinada por dois pontos A e B será denotada por $\overleftrightarrow{AB}$.

Agora reflita no significado do axioma I.1: apenas traduz o que gostaríamos que fosse uma das relações reta-ponto desejadas (pense no modelo da geometria analítica). Ora, mas temos que garantir a existência de pontos! Então precisamos de outros axiomas para o serviço:

Axioma I.2. Toda reta do plano possui pelo menos dois pontos distintos.

Axioma I.3. O plano contém pelo menos três pontos distintos que não pertencem a uma mesma reta.

No axioma I.3 falamos em pontos que não estão numa mesma reta. É conveniente adotar uma nomenclatura adequada para descrever esta situação:

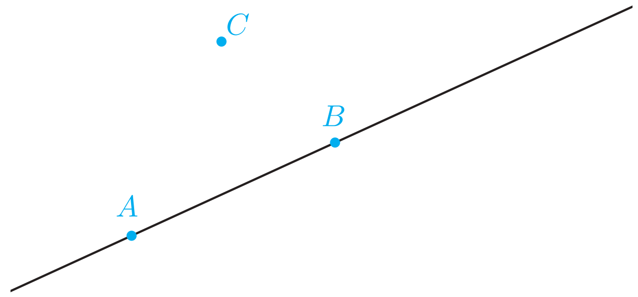


Figura 1.3 - Axioma I.3

Definição 1.2. Dizemos que um conjunto de pontos é *colinear* se todos os pontos estão contidos em uma mesma reta. Também dizemos que os pontos são *colineares* ou estão *alinhados*. No caso contrário, isto é, quando nem todos os pontos estão contidos em uma reta, dizemos que o conjunto é *não colinear*, ou que os pontos são *não colineares*, ou que não estão alinhados.

Voltando ao axioma I.3, podemos reescrevê-lo, em uma linguagem mais geométrica:

> **Axioma I.3.** (**bis**) No plano existem pelo menos três pontos que não estão alinhados.

Agora podemos mostrar nosso primeiro teorema.

Teorema 1.3. *Duas retas distintas do plano possuem no máximo um ponto em comum.*

DEMONSTRAÇÃO. Sejam l e r duas retas do plano. Suponha que existam dois pontos A e B distintos que pertençam simultaneamente a ambas as retas. Então pelo axioma I.1 temos que $l = \overleftrightarrow{AB}$ e $r = \overleftrightarrow{AB}$. Assim $l = r$! Concluímos que se as retas são distintas, não podem ter dois pontos (distintos) em comum. Portanto, por exclusão, ou se encontram em um ponto, ou não têm pontos em comum[6]. □

Na demonstração acima concluímos que duas retas na verdade eram uma só. Neste caso estamos pensando na *igualdade* dos conjuntos de pontos r e l, que denotamos por $r = l$. Na linguagem geométrica dizemos que, nestas condições, as retas r e l são *coincidentes*. No caso contrário, isto é, se $r \neq s$ (como conjuntos) dizemos que r e s são *distintas* ou *não coincidentes*. Se as retas possuem apenas um ponto em comum dizemos que são *concorrentes*.

Trataremos quaisquer outros objetos do plano da mesma forma. Por exemplo, se dois pontos A e B são iguais como elementos do plano, relação denotada por $A = B$, então são coincidentes, em nossa linguagem geométrica; caso contrário são distintos ou não coincidentes. Para evitar repetições desnecessárias das expressões *distinto*, *não coincidente*, etc., sempre suporemos que os pontos, retas e outros objetos descritos nas proposições deste texto serão distintos, e apenas chamaremos atenção no caso em acharmos importante enfatizar ou quando o contexto não deixar claro.

[6] O símbolo "□" que aparece no final desta linha sempre indicará o final de uma demonstração.

Vamos agora provar nosso segundo teorema.

Teorema 1.4. *Dada uma reta sempre existem pontos que não lhe pertencem.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelo axioma I.2 sabemos que l possui pelo menos dois pontos, que chamaremos de A e B. Pelo axioma I.3 vemos que existe pelo menos um terceiro ponto C que não pertence a $\overleftrightarrow{AB}$. Mas como $\overleftrightarrow{AB} = l$ pelo axioma I.1, então C não pertence a l. $\square$

A construção de geometrias através de axiomas permite fazer muitas coisas curiosas. Por exemplo, que tipo de "coisas" podemos ter satisfazendo as regras dadas pelos axiomas I.1, I.2 e I.3? Já comentamos que estas regras são satisfeitas na geometria analítica plana, uma vez definidos o que são pontos e retas neste modelo. Vejam nos exemplos a seguir outros modelos curiosos de geometria.

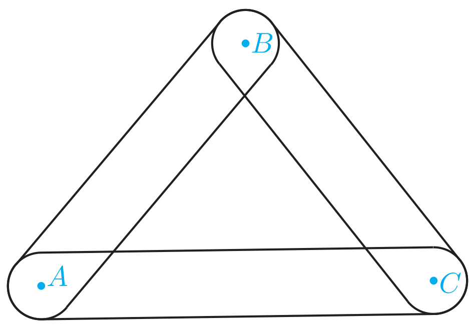


Figura 1.4 - Exemplo 1.1

Exemplo 1.1. Um modelo de geometria *finita*: tome um conjunto qualquer $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ de três elementos e chame-o de *plano*. Chame os elementos de $\mathcal{P}$ de *pontos*, e defina as *retas* de $\mathcal{P}$ como sendo os conjuntos $r_1 = \{A, B\}$, $r_2 = \{A, C\}$ e $r_3 = \{B, C\}$. Observe que estes objetos que ganharam os nomes de *plano*, *reta* e *ponto*, representados na figura 1.4, satisfazem os axiomas I.1, I.2 e I.3. De fato:

(i) os pontos A e B só determinam a reta r_1, os pontos A e C só determinam a reta r_2, e os pontos B e C só determinam a reta r_3; logo o axioma I.1 é satisfeito.

(ii) Pela definição que demos é claro que as retas r_1, r_2 e r_3 possuem pelo menos dois pontos – elas possuem, na verdade, *exatamente* dois pontos – donde o axioma I.2 está satisfeito.

(iii) Finalmente o plano, que é o conjunto $\{A, B, C\}$ possui três pontos não alinhados, pois $A \notin r_3$, $B \notin r_2$ e $C \notin r_1$, donde o axioma I.3 também está satisfeito.

Em particular estes objetos satisfazem automaticamente os teoremas 1.3 e 1.4.

Este é um *modelo* de geometria com três pontos e três retas, e o representamos na figura 1.4. Estes tipos de geometria, chamados de *geometrias finitas* porque possuem um número finito de elementos, são usados com frequência para testar conjuntos de axiomas, como fizemos aqui.[7] $\triangleleft$

[7] O símbolo $\triangleleft$ que aparece ao final desta linha será sempre utilizado neste livro para indicar o fim de um exemplo.

Problema 1.1. Considere um conjunto $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$ de quatro elementos. Chamemos $\mathcal{P}$ de "plano", os elementos de $\mathcal{P}$ de *pontos*, e os conjuntos $r_1 = \{A, B, C\}$, $r_2 = \{A, B, D\}$, $r_3 = \{A, C, D\}$ e $r_4 = \{B, C, D\}$ de *retas*. Verifique quais axiomas do grupo I são satisfeitos, e quais não são, por estes objetos. Desenhe um diagrama que represente esta "geometria".

Problema 1.2. Faça o mesmo que foi solicitado no problema anterior para o *plano* $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E\}$ e *retas* $r_1 = \{A, B, C\}$ e $r_2 = \{D, B, E\}$.

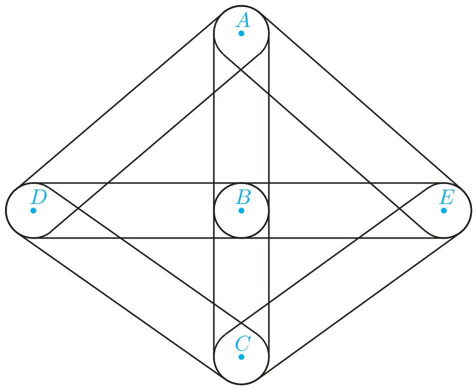


Figura 1.5 - Exemplo 1.2

Exemplo 1.2. No problema 1.2 você deve ter percebido que a geometria apresentada não obedece ao axioma I.1. Acrescente à geometria as *retas* $r_3 = \{A, D\}$, $r_4 = \{A, E\}$, $r_5 = \{C, D\}$ e $r_6 = \{C, E\}$. Com este novo grupo de elementos é fácil verificar que os axiomas do grupo I são satisfeitos por esta geometria. $\triangleleft$

1.3 Axiomas: grupo II, parte 1: métrica e ordem na reta

Tratemos agora do conceito de *distância*. Esta ideia é bastante intuitiva para nós: medir segmentos e medir distância entre pontos... Mas, o que são segmentos? O que é distância? Não temos como "definir" estas coisas, pois elas não "existem" ainda: precisamos novamente de alguns axiomas! No plano cartesiano temos como medir distância de pontos (você se lembra como é?), e esta distância satisfaz a algumas propriedades. Vamos então admitir que esta operação também é possível em nossa geometria:

Axioma II.1. Para cada par de pontos A, B do plano existe um único número real associado, denotado por AB, satisfazendo as propriedades:

(a) $AB \geqslant 0$;

(b) $AB = 0$ se e somente se $A = B$;

(c) $AB = BA$.

Neste axioma estamos declarando que existe uma *função* que associa a cada par de pontos do plano um valor real positivo. Este número é o que chamamos de “distância” entre dois pontos.

Definição 1.5. A *distância* entre dois pontos A e B do plano é o número AB postulado no axioma II.1.

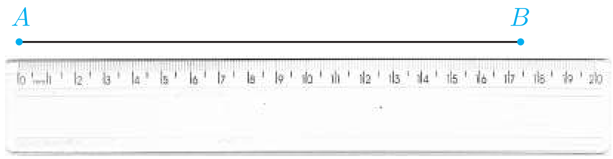


Figura 1.6 - Distância entre dois pontos

O conceito de distância entre dois pontos nos permitirá estabelecer o conceito de *ordem* na reta, ou seja, estabelecer a posição relativa de três pontos alinhados. Em outras palavras, queremos ser capazes de determinar se um ponto está ou não entre outros dois de maneira rigorosa, como ilustrado na figura 1.7a..

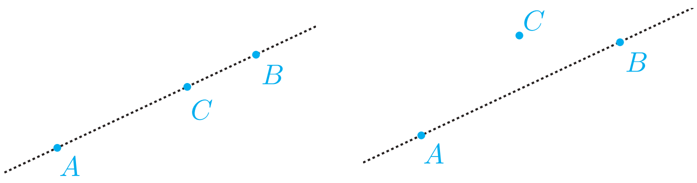
Começamos com uma definição.

Definição 1.6. Dados dois pontos A e B diremos que um ponto C *está entre* A e B se:

(a) $C \in \overleftrightarrow{AB}$;

(b) $AB = AC + BC$.

Esta relação será denotada por $A - C - B$.



(a) C entre A e B (b) C não está entre A e B

Figura 1.7

Observe que esta definição “copia” nossa ideia intuitiva de “estar entre”: para ir de A para B “andando” sobre a reta é preciso passar por C, cobrindo ambas as distâncias AC e BC. Isto ainda não é suficiente para garantir a ordem na reta, mas já nos dá algumas propriedades interessantes:

Proposição 1.7. *Sejam A, B e C três pontos alinhados. Temos que*

(i) se C está entre A e B então C está entre B e A (em nossa notação, se $A - C - B$ então $B - C - A$);

(ii) no máximo um deles está entre os outros dois, ou seja, só uma das três possibilidades seguintes é possível: ou $A - B - C$ ou $A - C - B$ ou $B - A - C$.

Demonstração. A propriedade (i) é consequência direta da definição 1.6 e do axioma II.1 (c), pois
$$AB = AC + BC \Longleftrightarrow BA = BC + CA.$$

Para provar a propriedade (ii) precisamos verificar que cada uma das possibilidades exclui as outras. Por exemplo, suponhamos que $A - B - C$, ou seja, que[8]

$$AC = AB + BC. \tag{$*$}$$

Se também fosse verdade que $A - C - B$, teríamos

$$AB = AC + CB. \tag{$**$}$$

Subtraindo (**) de (*) obtemos:

$$AC - AB = AB - AC,$$

donde $AC = AB$. Substituindo esta relação em (*) concluímos que $BC = 0$, um absurdo, já que estamos supondo $B \neq C$.

De forma análoga podemos verificar que não pode ser $B - A - C$. Deixaremos como exercício a prova deste fato. □

Problema 1.3. Faça o que foi pedido no final da proposição 1.7 acima: prove que o ponto A não pode estar entre B e C.

Mas, caros leitores, atenção! Nem a definição 1.6, nem a proposição 1.7 garantem que três pontos alinhados estão "ordenados", isto é, que um deles está entre os outros dois. Precisamos postular este fato, para torná-lo "verdadeiro" em nossa geometria. Nosso próximo axioma, que trata disto, é o seguinte:

> **Axioma II.2.** Se A, B e C são três pontos alinhados, então um deles está entre os outros dois.

Juntando este axioma com a proposição 1.7 obtemos a proposição seguinte.

Proposição 1.8. *Dados três pontos alinhados um, e apenas um deles, está entre os outros dois.*

Demonstração. Dados três pontos alinhados A, B e C, pelo axioma II.2 temos que pelo menos um deles está entre os outros dois. Digamos, para fixar ideias, que B esteja entre A e C, ou seja, $A - B - C$. Pela proposição 1.7 (ii) temos que esta é a única ordem possível, ou seja, que não pode ser $A - C - B$ nem $B - A - C$. □

A proposição 1.8 nos garante que podemos ordenar três pontos numa reta, mas e se são mais? Bem, podemos mostrar que qualquer conjunto finito de pontos na reta pode ser bem ordenado. Por exemplo, se tivermos quatro pontos A, B, C e D tais que $A - C - B$, $A - C - D$ e $C - B - D$ então os pontos estão ordenados como na figura **??** apresentada mais adiante. Nesta situação costumamos denotar a posição relativa dos pontos por $A - C - B - D$.

[8] Lembrem-se que AB, AC, BC, etc. são *números reais*! Portanto podemos usar aqui todas as propriedades das operações aritméticas que já conhecemos!

Exemplo 1.3. Suponha que A, B e C sejam três pontos alinhados com $AB = 10$, $AC = 15$ e $BC = 5$. Destes valores deduzimos que

$$AB + BC = 10 + 5 = 15 = AC,$$

donde, pela proposição 1.8, B está entre A e C. $\triangleleft$

Exemplo 1.4. Sejam A, B, C e D quatro pontos alinhados tais que $AB = 8$, $AC = 5$, $BC = 3$ e $BD = 4$. Vamos determinar quais são os possíveis valores para AD e CD, e quais são as posições relativas destes pontos na reta. A única forma que temos para analisar isto é trabalhando com três pontos por vez. Começamos com o terno A, B e C. Como

$$AC + CB = 5 + 3 = 8 = AB$$

então temos que $A - C - B$.

Vejamos agora o terno A, B e D. Temos três possibilidades: $A - B - D$, $A - D - B$ e $B - A - D$. No primeiro caso obtemos

$$AD = AB + BD = 8 + 4 = 12,$$

que não traz nenhuma contradição. No segundo caso,

$$8 = AB = AD + DB = AD + 4 \Rightarrow AD = 4,$$

que também não leva a contradições. Finalmente, no terceiro caso temos

$$4 = BD = BA + AD = 8 + AD \Rightarrow AD = -4,$$

que contradiz o axioma II.1 (a). Logo os possíveis valores para AD são $AD = 12$, se $A - B - D$; e $AD = 4$, se $A - D - B$.

Para o terno B, C e D procedemos à seguinte análise: se $B - C - D$ então

$$4 = BD = BC + CD = 3 + CD \Rightarrow CD = 1,$$

que é possível. Se $C - B - D$ então

$$CD = CB + BD = 3 + 4 = 7,$$

que também é possível. Finalmente, se $C - D - B$ então

$$3 = CB = CD + DB = CD + 4 \Rightarrow CD = -1,$$

que não é possível.

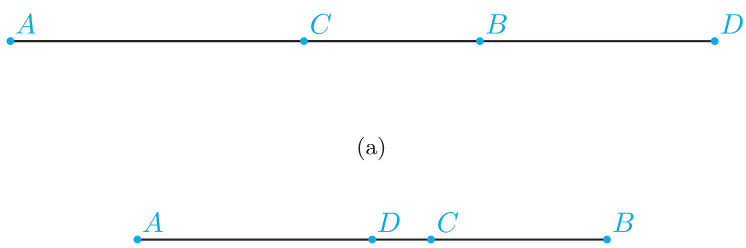
Assim os possíveis valores para CD são $CD = 7$ se $C - B - D$, e $CD = 1$ se $B - C - D$.

Juntando todas as peças do quebra-cabeças temos as seguintes possibilidades:

(a) $AD = 12$ e $CD = 7$, com $A - C - B - D$ (figura 1.8a), e

(b) $AD = 4$ e $CD = 1$, com $A - D - C - B$ (figura 1.8b).

$\triangleleft$



(a)

(b)

Figura 1.8

Problema 1.4. Sejam A, B, C e D quatro pontos alinhados. Sabendo que $AB = 5$, $AD = 8$, $BC = 5$, $BD = 3$ e $CD = 2$, encontre AC. Desenhe um diagrama representando estes pontos na reta.

Agora que temos o conceito de ordem entre pontos alinhados, podemos definir os nossos próximos objetos geométricos: segmentos e semirretas. Começamos com segmentos.

Definição 1.9. O conjunto dos pontos que estão entre dois pontos A e B, incluindo estes, é um *segmento* (da reta $\overleftrightarrow{AB}$), e será denotado por $\overline{AB}$, ou seja,

$$\overline{AB} = \{\text{pontos } C \text{ tais que } A - C - B\} \cup \{A, B\}.$$

Os pontos A e B são os *extremos* de $\overline{AB}$, e qualquer outro ponto do intervalo distinto de seus extremos é um *ponto interior* de $\overline{AB}$. Analogamente, todo ponto do plano que não pertence a $\overline{AB}$ é um ponto *exterior* ao segmento. O *comprimento* ou *medida* do segmento $\overline{AB}$ é a distância entre os seus extremos, ou seja, é o número AB.

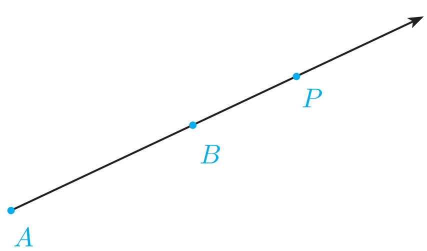


Figura 1.9 - Semireta com origem em *A*

Nosso próximo alvo são as semirretas. Intuitivamente "vemos" que um ponto de uma reta a separa em duas "partes" de tal forma que para ir de uma parte à outra, sem sair da reta, é preciso passar pelo ponto que as separou. Para estabelecer o conceito rigorosamente começamos com uma definição.

Definição 1.10. Dados dois pontos A e B de uma reta l, o subconjunto $\overrightarrow{AB}$ de l definido por

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{\text{pontos } P \in l \text{ tais que } A - B - P\}$$

é uma *semirreta* de l com *origem* em A. Dizemos também que l é a *reta suporte* de $\overrightarrow{AB}$.

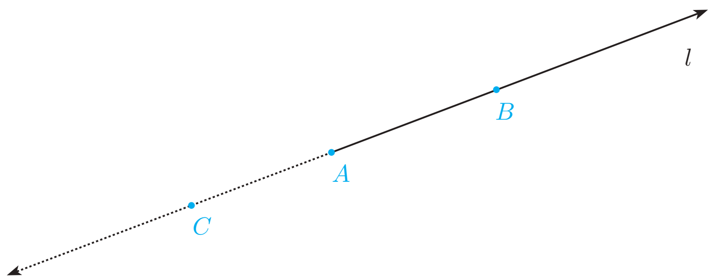


Figura 1.10 - Axioma II.3

Definimos uma semirreta como uma figura determinada por dois pontos de uma reta. O axioma I.2 nos diz que toda reta possui pelo menos dois pontos, donde deduzimos que em toda reta podemos determinar pelo menos uma semirreta. Mas, como já comentamos, gostaríamos que um ponto separasse uma reta em duas semirretas! Como fazer isto? Veja a figura 1.10: podemos garantir que a reta l contém os pontos A e B, determinando a semirreta $\overrightarrow{AB}$, mas gostaríamos de garantir a existência de uma semirreta do outro "lado". Para isto precisamos de um ponto $C \in l$ com A entre C e B. Então, vamos a mais um axioma!

Axioma II.3. Dados dois pontos A e B em uma reta l, existe um ponto C de l tal que A está entre C e B, ou seja, tal que $C - A - B$.

Com este axioma tornamos a figura 1.10 "válida", e agora temos duas semirretas em l determinadas pelo ponto A: as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Falta garantir que as duas semirretas tenham as propriedades que desejamos: que sejam as únicas determinadas por um ponto e que realmente separem a reta em dois conjuntos. Estas propriedades também precisam ser axiomatizadas.

Axioma II.4. As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ determinadas pelos pontos A, B e C de uma reta l, com $C - A - B$, satisfazem as seguintes propriedades:

(a) $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC} = l$;

(b) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{AC} = \{A\}$;

(c) dois pontos $P, Q \in l$ diferentes de A pertencem a uma mesma semirreta se e só se A não pertence ao segmento $\overline{PQ}$ (ou, em outras palavras, se A não está entre P e Q);

(d) dois pontos $P, Q \in l$ diferentes de A pertencem a semirretas diferentes se e só se A pertence ao segmento $\overline{PQ}$ (ou, em outras palavras, se A está entre P e Q).

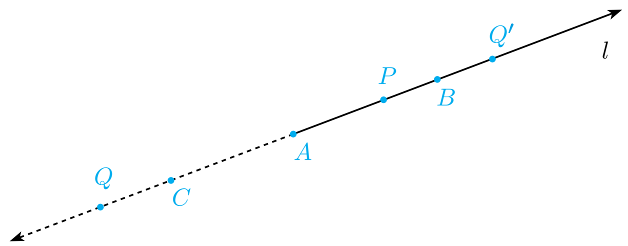


Figura 1.11 - Axioma II.4

Definição 1.11. Se os pontos A, B e C de uma reta l são tais que $C - A - B$, então dizemos que as semirretas $\overrightarrow{l}_1 = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{l}_2 = \overrightarrow{AC}$ são semirretas *opostas*. Se $P \in \overrightarrow{l}_1$ e $Q \in \overrightarrow{l}_2$ então dizemos que P e Q são *separados* por A, ou que A *separa* estes pontos.

Na figura 1.11 representamos as situações descritas no axioma II.4. Observe que os pontos P e Q' pertencem a uma mesma semirreta com origem em A, e que P e Q pertencem a semirretas opostas, assim como Q e Q'.

Problema 1.5. Seja A um ponto pertencente a uma reta l, e sejam B e C pontos em lados opostos de l em relação a A. Se P está do mesmo lado que B, então o que podemos dizer de P em relação a C?

Para finalizar este estudo da ordem na reta só precisamos tratar de mais um assunto. Com o axioma II.1 e a definição 1.9 garantimos a possibilidade de medir segmentos. Mas e o contrário? Isto é, para cada número real positivo será que existe um segmento com esta medida? Na geometria analítica isto é verdade, ou seja, sempre podemos marcar pontos no plano $\mathbb{R}^2$ com a distância desejada entre eles. Gostaríamos que isto fosse possível também neste nosso modelo de geometria sintética. Para isto vamos estabelecer mais um axioma:

> **Axioma II.5.** Em qualquer semirreta $\overrightarrow{AB}$ e para todo número real positivo c existe um ponto $C \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AC = c$.

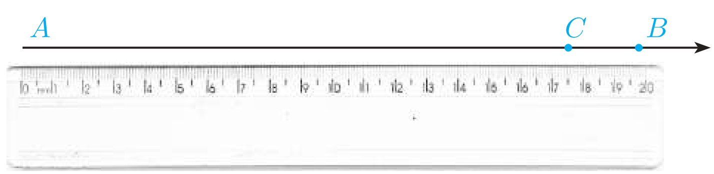


Figura 1.12 - Ponto *C* dista 17,5 de *A*

Agora, com este axioma, podemos sempre marcar pontos no plano com a distância que quisermos entre eles, e assim podemos estabelecer muitas propriedades da geometria que, em geral, consideramos óbvias. Por exemplo, podemos mostrar que todo segmento contém pontos interiores e exteriores (o que não foi garantido ainda!) e que as retas são infinitas (coisa que também não tínhamos até agora!). Veja as proposições a seguir.

Proposição 1.12. *Seja $\overline{AB}$ um segmento. Então existem pontos interiores e exteriores a $\overline{AB}$.*

Demonstração. Primeiro vamos provar que existem pontos no interior de $\overline{AB}$. Tome $P \in \overrightarrow{AB}$ tal que $AP = \frac{1}{2}AB$. Então P está entre A e B. De fato, como P e B estão ambos na semirreta $\overrightarrow{AB}$ sabemos, pelo axioma II.4, que A não pode estar entre P e B. Mas, pela proposição 1.8 temos que ou B está entre A e P ou P está entre A e B. A primeira possibilidade, isto é, $A - B - P$ nos dá

$$AB + BP = AP = \frac{1}{2}AB,$$

donde $BP = -\frac{1}{2}AB$, o que é impossível já que BP é necessariamente um número positivo.

Logo só nos resta a segunda possibilidade, ou seja, $A - P - B$, e com isto provamos que $P \in \overline{AB}$.

Para provar que existem pontos exteriores a $\overline{AB}$, tome $Q \in \overrightarrow{AB}$ com $AQ = 2AB$. A prova de que Q é exterior a $\overline{AB}$ é inteiramente análoga à que foi feita acima. Como Q está na semirreta $\overrightarrow{AB}$, então A não pode estar entre Q e B, donde temos duas possibilidades: $A - B - Q$ e $A - Q - B$. Testemos esta segunda possibilidade:

$$AB = AQ + QB = 2AB + QB \Rightarrow QB = AB - 2AB = -AB,$$

o que não é possível, pois QB deve ser um número positivo. Logo Q não está entre A e B, donde Q é exterior a $\overline{AB}$, como queríamos verificar. $\square$

Problema 1.6. Na demonstração acima não precisamos escolher P e Q tais que $AP = \frac{1}{2}AB$ e $AQ = 2AB$. Refaça as contas supondo que $AP < AB$ e $AQ > AB$. Desenhe um diagrama que represente as duas situações.

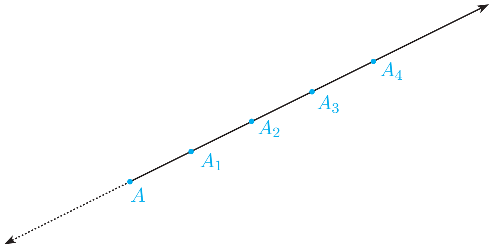


Figura 1.13 - Proposição 1.13

Proposição 1.13. *Toda reta do plano possui um número infinito de pontos.*

Demonstração. Tome uma reta qualquer l e um ponto qualquer $A \in l$. Escolha uma semirreta $\overrightarrow{l_1}$ qualquer de l com origem em A. Em $\overrightarrow{l_1}$ tome pontos A_1, A_2, $A_3, \ldots,$ $A_n, \ldots,$ tais que para todo n natural tenhamos $AA_n = n$. Não é difícil de verificar que, nestas condições, A_1 está entre A e A_2, A_2 está entre A_1 e A_3, e assim por diante, como mostrado na figura 1.13, mas não daremos os detalhes aqui. □

1.4 Axiomas: grupo II, parte 2: ordem no plano

Estabelecemos ordem na reta. E no plano, como fica? Queremos fazer algo análogo ao que foi feito com as retas: separar o plano em "semiplanos", ou seja, gostaríamos de garantir que uma reta sempre separa o plano em dois lados, como nossa intuição nos ensina. Esta propriedade também não pode ser demonstrada, precisa ser axiomatizada. O axioma abaixo é o análogo ao axioma II.4 para planos.

Axioma II.6. Toda reta l determina exatamente dois subconjuntos $\mathcal{P}_l$ e $\widetilde{\mathcal{P}}_l$ do plano, denominados *semiplanos* em relação a l, satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) todos os pontos do plano estão contidos em $\mathcal{P}_l \cup \widetilde{\mathcal{P}}_l$;

(b) $\mathcal{P}_l \cap \widetilde{\mathcal{P}}_l = l$;

(c) dois pontos A e B não pertencentes a l estão num mesmo semiplano em relação a l se e somente se $\overline{AB} \cap l = \varnothing$;

(d) dois pontos A e B não pertencentes a l estão em semiplanos distintos se e somente se $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$.

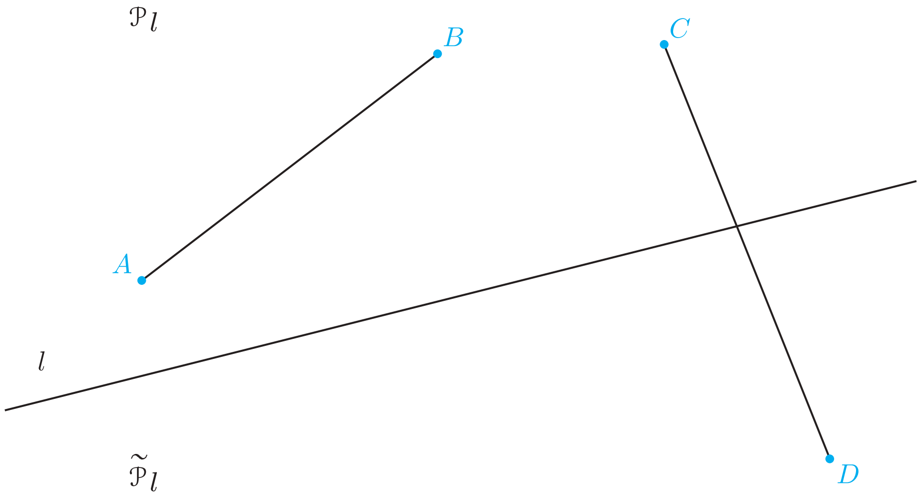


Figura 1.14 - Semiplanos

Definição 1.14. Dizemos que os os dois semiplanos determinados por uma reta l são semiplanos *opostos* em relação a l, e a reta l é a *fronteira* ou *origem* destes semiplano.

O conjunto formado pelos pontos de um semiplano que não estão contidos em l é um *lado* do plano em relação a l. Os lados do plano correspondentes aos semiplanos opostos são chamados de lados *opostos* em relação a l.

Dizemos também que a reta *separa* o plano em dois lados. Se os pontos A e B pertencem a lados opostos do plano em relação à reta, dizemos que estes estão *separados* pela mesma.

Na figura 1.14 representamos uma reta que separa o plano em dois semiplanos. Os pontos A e B pertencem a um mesmo lado do plano, e os pontos C e D a lados opostos, ambos em relação a l.

Agora uma pergunta: os lados do plano determinados por uma reta são conjuntos não vazios? Os pontos do plano não poderiam estar todos concentrados numa reta? Vejam, a resposta à segunda pergunta já foi dada pelo teorema 1.4: no plano sempre existem pontos que não está contidos numa dada reta. E a resposta da primeira pergunta, como deveria ser, é sim.

Proposição 1.15. *Os lados do plano em relação a uma reta são não vazios.*

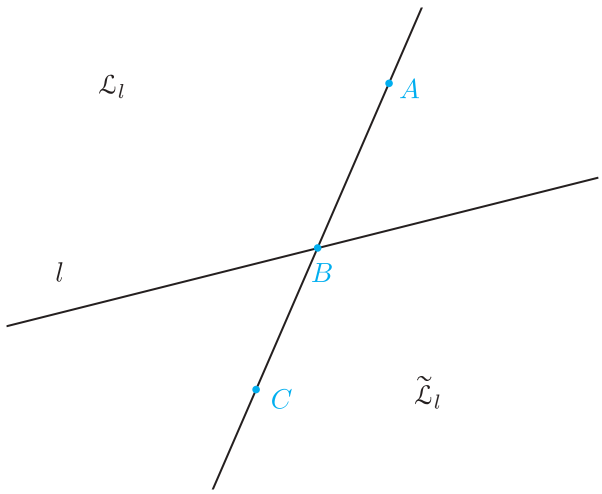


Figura 1.15

Demonstração. Seja l uma reta do plano, e sejam $\mathcal{L}_l$ e $\widetilde{\mathcal{L}}_l$ os lados opostos do plano em relação a l. Sabemos que existe um ponto $A \notin l$ (teorema 1.4). Pelo axioma II.6 (a) este ponto pertence a um dos lados. Suponhamos que $A \in \mathcal{L}_l$. Seja $B \in l$ um ponto qualquer. Então, pelo axioma II.3, existe um ponto $B \in \overleftrightarrow{AC}$ tal que $A - B - C$, ou seja, $\overline{AC} \cap l = \{B\}$ donde, pelo axioma II.6 (d), conclui-se que C e A são pontos do plano separados por l, ou seja, $C \in \widetilde{\mathcal{L}}_l$ (veja figura 1.15).

Logo provamos que os lados do plano em relação a uma reta são conjuntos não vazios.

$\square$

Problema 1.7. Seja l uma reta do plano. Sejam A, B, C e D quatro pontos do plano que não pertencem a l. Suponha que A e B estejam do mesmo lado e que C e D estejam em lados opostos, sempre em relação a l. Se B e D estão em lados opostos, o que se pode dizer sobre os outros pontos? Desenhe um diagrama que represente as situações aqui descritas.

1.5 Exercícios

1.1. Responda às seguintes perguntas de revisão:

(a) Quais são os elementos primitivos da geometria plana? O que você entendeu sobre estes objetos?

(b) O que são axiomas?

(c) O que significa um ponto de uma reta separar outros dois pontos da reta?

(d) O que significa uma reta separar dois pontos do plano?

1.2. Considere o conjunto $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$. Como nos exemplos dados no texto, chame $\mathcal{P}$ de *plano*, e os elementos de $\mathcal{P}$ de *pontos*. Defina subconjuntos de $\mathcal{P}$ como retas de forma a satisfazer os axiomas I.1, I.2 e I.3. Faça isto de duas maneiras diferentes.

1.3. Sejam G, H e K pontos de uma reta. Quais afirmações abaixo podem ser verdadeiras?

(a) K está entre G e H, e H está entre G e K.

(b) H está entre K e G, e H está entre G e K.

(c) G está entre H e K, e K está entre G e H.

(d) K está entre H e G, e G está entre K e H.

(e) G está entre K e H, e G está entre H e K.

1.4. Diga se é verdadeiro ou falso, e justifique sua resposta:

(a) $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{BA}$.

(b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

(c) $\overline{AB} = \overline{BA}$.

(d) $\overrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{DC} = \overline{CD}$.

(e) $\overleftrightarrow{CD} \cap \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC}$.

1.5. Seja l uma reta. Sejam A, B, C e D pontos de l tais que $AB = 5$, $AC = 7$, $CD = 4$ e $AD = 11$. Diga quais afirmações abaixo são verdadeiras e quais são falsas:

(a) Os pontos A, B, C e D podem ser colocados na seguinte ordem:

$$B - A - C - D.$$

(b) Os pontos A, B, C e D podem ser colocados na seguinte ordem:

$$A - B - C - D.$$

(c) É possível colocar os pontos A, B, C e D numa ordem tal que $BC = 2$.

(d) É possível colocar os pontos A, B, C e D numa ordem tal que $BC = 5$.

(e) Se $BC = 12$ então A está entre B e C.

(f) Se $BD = 6$ então C não está entre B e D.

1.6. Volte na figura 1.11 e responda:

(a) Quais pontos são separados por P e quais são separados por Q?

(b) Os pontos P e Q' estão do mesmo lado da reta em relação a quais pontos da figura?

1.7. (DESAFIO!) Neste exercício vamos verificar com alguns exemplos que a geometria analítica plana satisfaz os axiomas apresentados nesta aula. Primeiro estabelecemos quem são nossos personagens: o plano $\mathcal{P}$ é o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, os pontos são os pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e as retas são as retas cartesianas, ou seja, os conjuntos do tipo

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tais que} \quad ax + by = c\}$$

onde a ou b são não nulos.

(a) Axioma I.1: Tome dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$ e encontre a equação da reta determinada por eles. Existe outra reta cartesiana determinada pelos mesmos pontos?

(b) Axioma I.2: Tome uma reta cartesiana $ax + by = c$ qualquer e verifique que possui dois pontos.

(c) Axioma I.3: Tome uma reta cartesiana $r : ax + by = c$ qualquer e dê as coordenadas de algum ponto que não pertença a r.

(d) Axioma II.1: Mostre que se $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ então a distância definida por

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

satisfaz as propriedades do axioma II.1

(e) Axioma II.2: Façamos um exemplo particular. Tome a reta

$$r : 3x + 2y = 1.$$

Verifique que $A = (1, -1)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (2, -5/2)$ são pontos de r. Calcule AB, AC e BC e verifique que $B - A - C$. Desenhe a reta e os pontos no plano. Este cálculo pode ser generalizado facilmente para retas quaisquer.

(f) Axioma II.3: Tome a reta r e os pontos A e B do item anterior e encontre um ponto D tal que $B - A - D$. Este cálculo também pode ser facilmente generalizado.

(g) Axioma II.4: Ainda usando a reta r e os pontos A, B e C do item (e), mostre que os conjuntos

$$\overrightarrow{r_1} = \left\{\left(x, \frac{1-3x}{2}\right) \quad \text{com} \quad x \geqslant 1\right\}$$

e

$$\overrightarrow{r_2} = \left\{\left(x, \frac{1-3x}{2}\right) \quad \text{com} \quad x \leqslant 1\right\}$$

são semirretas de r com origem em A. Determine qual delas corresponde a $\overrightarrow{AB}$ e qual corresponde a $\overrightarrow{AC}$.

(h) Axioma II.5: Considere as semirretas $\overrightarrow{r_1}$ e $\overrightarrow{r_2}$ do item anterior. Seja $d > 0$ um número real. Verifique que os pontos $A = (1, -1)$, $C = (x_1, y_1)$ e $D = (x_2, y_2)$, onde

$$x_1 = 1 + \frac{d\sqrt{13}}{13} \text{ e } x_2 = 1 - \frac{d\sqrt{13}}{13}$$

são tais que $AC = AD = d$ e $D - A - C$.

(i) Axioma II.6: Mais uma vez usando a reta r dos itens anteriores, encontre pontos P e Q do plano cartesiano que são separados por r. (Sugestão: Não precisa fazer conta! Basta fazer um desenho!)

2 Ângulos e congruências de segmentos e ângulos

AULA 2: ÂNGULOS E CONGRUÊNCIAS DE SEGMENTOS E ÂNGULOS

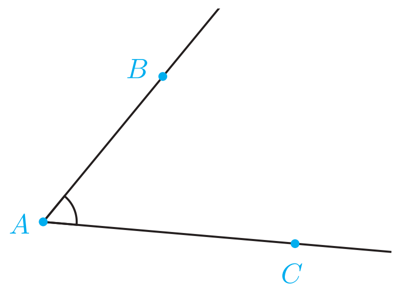
OBJETIVOS: Introduzir os axiomas relativos a medidas de ângulos e o conceito de congruência de ângulos e segmentos. Ao final apresenta-se a definição de triângulos e algumas de suas propriedades básicas.

2.1 Introdução

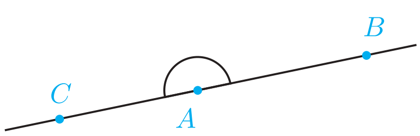
Nesta aula apresentaremos um novo ente geométrico: o ângulo. Em seguida introduziremos o conceito de congruência, aplicado a ângulos e segmentos, e estudaremos algumas consequências deste novo conceito. Aproveitamos o final da aula para introduzir o conceito de *triângulo*.

A partir de agora faremos muitas referências ao livro da Professora Marília Costa de Faria (referência [4]), que vocês utilizaram na disciplina *Resolução de Problemas Geométricos*. Portanto tenham sempre à mão este livro.

2.2 Axiomas: grupo III, medida de ângulos



(a) Ângulo não trivial



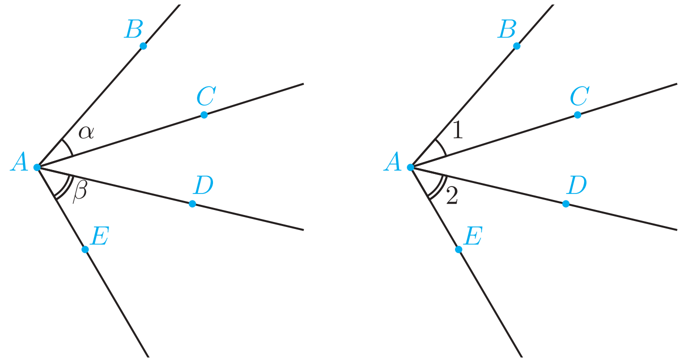
(b) Ângulo raso

Figura 2.1

Na aula anterior estudamos comprimentos e ordem no plano. Outro objeto do plano de que todos devem se lembrar muito bem são os *ângulos*. Começamos com as definições.

Definição 2.1. Um par de semirretas com mesma origem é um *ângulo*. As semirretas que formam um ângulo são os seus *lados*, e a origem das mesmas é o *vértice* do ângulo. Se as semirretas são denotadas por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ denotamos o ângulo correspondente por $\measuredangle BAC$. Se as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são coincidentes então dizemos que $\measuredangle BAC$ é um *ângulo nulo*; e se são semirretas opostas de uma mesma reta, então o denominamos *ângulo raso*. Diremos que um ângulo é *não trivial* se não for nem raso nem nulo.

Observação 2.1. Para evitar ficar repetindo muitas palavras, sempre que designarmos um ângulo sem mais especificações, estaremos nos referindo a um ângulo não trivial.



(a) (b)

Figura 2.2

Observação 2.2. Uma observação importante em relação à notação para indicar um ângulo: frequentemente indicaremos um ângulo por seu vértice, quando não houver dúvidas. Por exemplo, na figura 2.1 escrevemos $\measuredangle A = \measuredangle BAC$, mas na figura 2.2 os ângulos representados compartilham o mesmo vértice. Nestes casos, usamos outros artifícios, como usar letras gregas (figura **??**) ou enumerar os ângulos (figura **??**). No primeiro caso escrevemos $\measuredangle\alpha = \measuredangle BAC$ e $\measuredangle\beta = \measuredangle DAE$; e no segundo caso, $\measuredangle 1 = \measuredangle BAC$ e $\measuredangle 2 = \measuredangle DAE$.

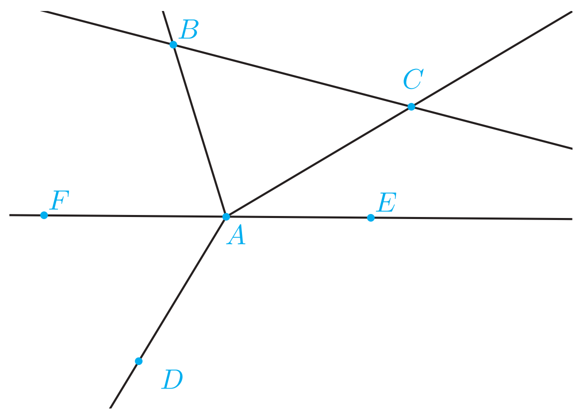


Figura 2.3

Problema 2.1. Identifique todos os ângulos presentes na figura 2.3. Quais destes ângulos podem ser representados por seu vértice sem perigo de confusão? (Atenção: os pontos A, E e F são colineares!)

Note que definimos ângulos como pares de semirretas. É muito comum em textos didáticos definir ângulo como uma região do plano, cuja imagem lembra uma espécie de cunha. Para nós esta figura terá outro nome.

Definição 2.2. A *região angular* determinada por um ângulo (não trivial) $\measuredangle A = \measuredangle BAC$ é o subconjunto do plano

$$R_{\measuredangle A} = \mathcal{P}_l \cap \mathcal{P}_r,$$

onde $l = \overleftrightarrow{AB}$, $r = \overleftrightarrow{AC}$, $\mathcal{P}_l$ é o semiplano relativo a l que contém o ponto C, e $\mathcal{P}_r$ é o semiplano relativo a r que contém o ponto B.

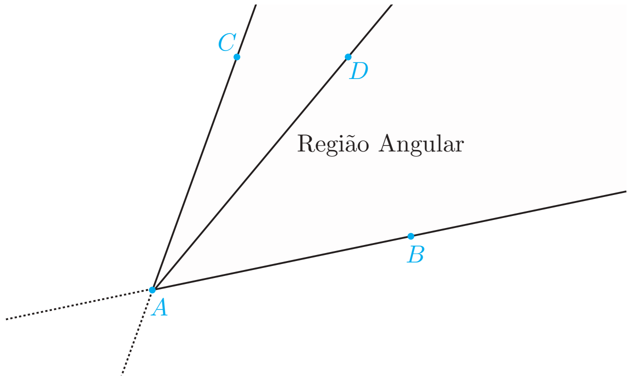
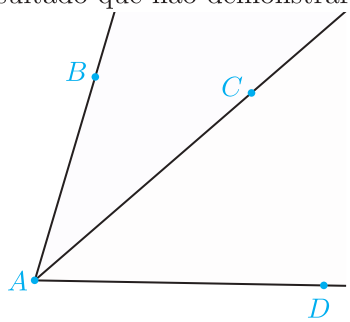


Figura 2.4

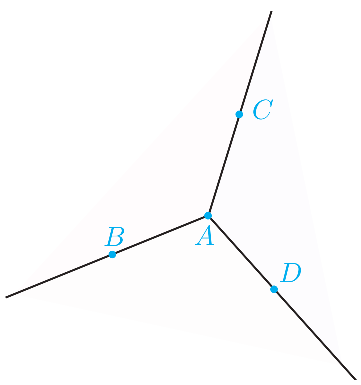
Os pontos pertencentes a $R_{\measuredangle A}$ que não pertencem aos lados de $\measuredangle A$ são denominados *pontos interiores* a $\measuredangle A$, e os pontos que não pertencem a $R_{\measuredangle A}$ e nem aos lados de $\measuredangle A$ são denominados *pontos exteriores* a $\measuredangle A$.

Se D é um ponto interior a $\measuredangle A$ dizemos que $\overrightarrow{AD}$ *divide* ou *separa* o ângulo $\measuredangle A$.

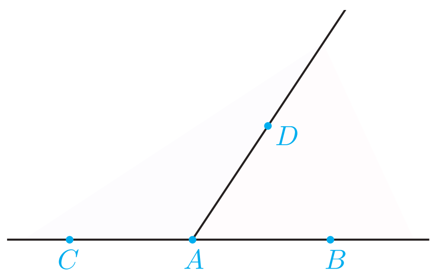
Observação 2.3. Podemos mostrar que uma região angular é sempre não vazia, como representado na figura 2.4, resultado que não demonstraremos neste texto.



(a) Dois ângulos adjacentes



(b) Três ângulos adjacentes



(c) Ângulos suplementares

Figura 2.5 - Ângulos adjacentes e suplementares

Definição 2.3. Dois ângulos são *adjacentes* se possuírem um lado em comum (e consequentemente o mesmo vértice) e interiores disjuntos.

Na figura 2.5a os ângulos $\measuredangle BAC$ e $\measuredangle CAD$ são adjacentes, e na figura 2.5b apresentamos três ângulos adjacentes entre si dois a dois.

Um caso especial de ângulos adjacentes, representado na figura **??**, será definido a seguir.

Definição 2.4. Se $\measuredangle BAC$ for um ângulo raso (isto é, se B e C estão em semirretas opostas de $\overleftrightarrow{BC}$ com origem em A) e D for um ponto pertencente a um dos lados do plano em relação a $\overleftrightarrow{BC}$, então dizemos que os ângulos $\measuredangle BAD$ e $\measuredangle DAC$ são *suplementares* e que a semirreta $\overrightarrow{AD}$ *separa* o semiplano a que D pertence.

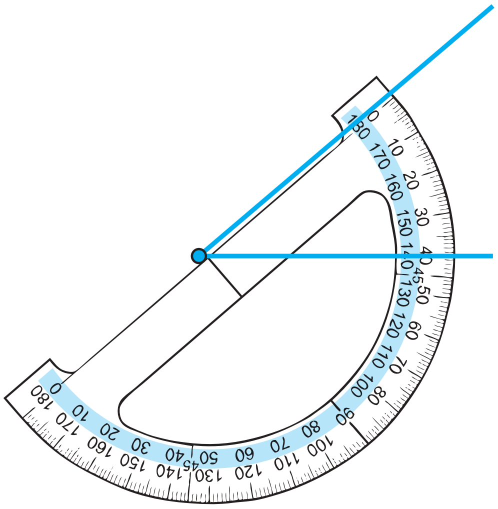


Figura 2.6 - Medidas de ângulos

Estudaremos agora o conceito de medida de ângulos. Todos os leitores estão acostumados à ideia de medir ângulos com um transferidor, como ilustrado na figura 2.6, utilizando a unidade *grau*. Na nossa construção da geometria utilizando o método axiomático precisamos afirmar que esta operação é possível, assim como fizemos com distância entre pontos e medidas de segmentos. Observem, no entanto, que quanto axiomatizamos a possibilidade de medir a distância entre dois pontos, não estabelecemos nenhuma unidade, ou seja, para nós a distância entre dois pontos é um número real "puro" (um número que não tem associado a ele uma unidade). Faremos o mesmo com a medida de ângulos: não utilizaremos medidas.

O axioma de medidas de ângulos é o seguinte:

Axioma III.1. Para cada ângulo $\measuredangle BAC$ do plano existe um número real associado, denotado por $m(\measuredangle BAC)$, satisfazendo as propriedades:

(a) $0 \leqslant m(\measuredangle BAC) \leqslant 180$;

(b) $m(\measuredangle BAC) = 0$ se e somente se $\measuredangle BAC$ for um ângulo nulo;

(c) $m(\measuredangle BAC) = 180$ se e somente se $\measuredangle BAC$ for um ângulo raso;

(d) $m(\measuredangle BAC) = m(\measuredangle CAB)$.

Definição 2.5. O número $m(\measuredangle BAC)$ postulado no axioma III.1 é a *medida* do ângulo $\measuredangle BAC$.

Mais uma observação: no axioma III.1 escolhemos medir um ângulo com números entre entre 0 e 180, mas poderíamos ter escolhido qualquer outro intervalo como, por exemplo, entre 0 e π. Esta escolha não foi aleatória, pois estamos pensando, de fato, na unidade *grau* para medir ângulos. E se escolhêssemos o intervalo entre 0 e π, estaríamos pensando em qual unidade?[1]

Problema 2.2. São três as unidades de medida de ângulos mais utilizadas: o *grau*, o *radiano* e o *grado*. Faça uma pesquisa sobre elas e escreva as fórmulas de conversão entre elas, ou seja, se temos um ângulo em graus, qual a sua medida em radianos e em grados, e assim por diante.

Precisamos também garantir que a medida de um ângulo satisfaz as propriedades inerentes ao conceito de "estar entre" análogo ao estabelecido para pontos na reta.

Axioma III.2. (a) Se $\measuredangle BAC$ é um ângulo não trivial e D é um ponto em seu interior, então

$$m(\measuredangle BAC) = m(\measuredangle BAD) + m(\measuredangle DAC).$$

(b) Se $\measuredangle BAC$ é um ângulo raso e D está em um dos lados do plano determinado por $\overleftrightarrow{BC}$ então

$$m(\measuredangle BAD) + m(\measuredangle DAC) = 180.$$

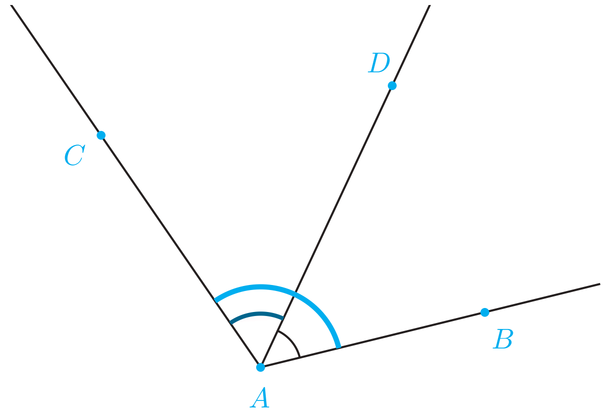


Figura 2.7 - Axioma III.2

Uma vez estabelecido o conceito de medida de ângulos, podemos estender a definição de ângulos suplementares para englobar ângulos não adjacentes. Esta extensão da definição nos será útil futuramente por questões práticas.

Definição 2.6. Além da situação descrita na definição 2.4, diremos também que dois ângulos $\measuredangle\alpha$ e $\measuredangle\beta$ são *suplementares* se

$$m(\measuredangle\alpha) + m(\measuredangle\beta) = 180.$$

[1] A resposta é... *radianos*!

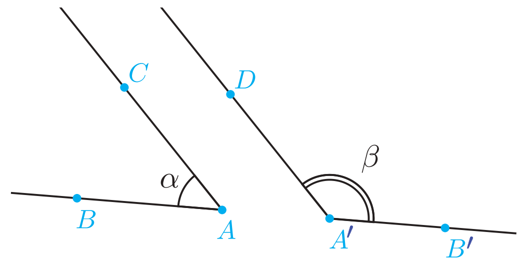


Figura 2.8

Se dois ângulos são suplementares, dizemos que um é o *suplemento* do outro. Na figura 2.8 representamos dois ângulo suplementares que não são adjacentes, e $\measuredangle\alpha$ é um suplemento de $\measuredangle\beta$, assim como $\measuredangle\beta$ é um suplemento de $\measuredangle\alpha$.

O próximo axioma é o análogo para ângulo do axioma II.5.

> **Axioma III.3.** Para toda semirreta $\overrightarrow{AB}$, todo número real a tal que $0 < a < 180$, e cada semiplano $\mathcal{P}$ determinado por $\overleftrightarrow{AB}$, existe uma única semirreta $\overrightarrow{AD} \subset \mathcal{P}$ tal que
> $$m(\measuredangle BAD) = a.$$

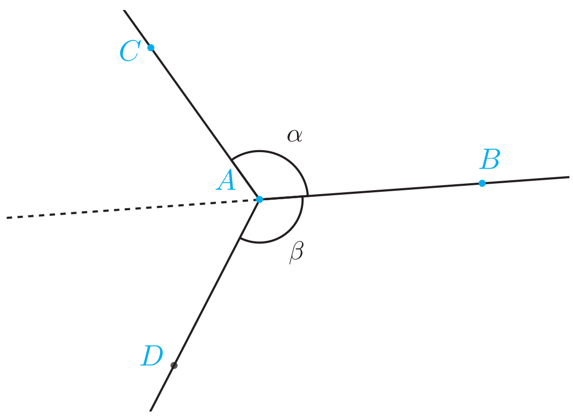


Figura 2.9

Este axioma quer dizer o seguinte: tome uma semirreta qualquer, por exemplo a semirreta $\overrightarrow{AB}$; tome um número a tal que $0 < a < 180$; e por fim escolha um semiplano com origem em $\overleftrightarrow{AB}$. Então neste semiplano escolhido existe um ponto C tal que $m(\measuredangle BAC) = a$. Ainda mais: no semiplano oposto ao escolhido existe também um outro ponto D com $m(\measuredangle BAD) = a$. E estes dois pontos são os únicos com esta propriedade! Na figura 2.9 representamos a situação estabelecida pelo axioma III.3, onde os ângulos $\measuredangle\alpha$ e $\measuredangle\beta$ têm a mesma medida, e são os únicos com esta propriedade e o lado $\overrightarrow{AB}$ em comum.

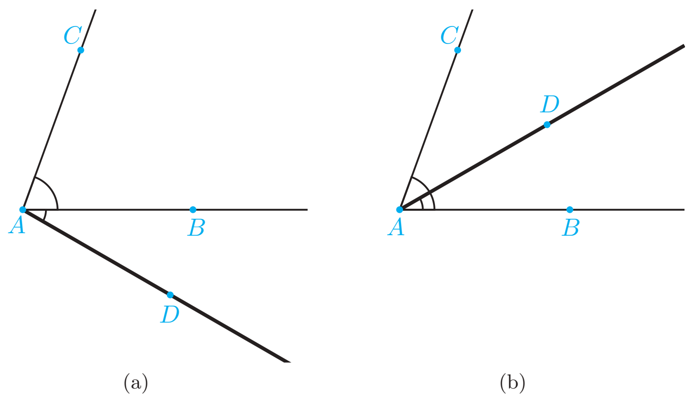


Figura 2.10

Exemplo 2.1. Os axiomas do grupo III que acabamos de estudar permitem "ordenar" ângulos assim como fizemos com segmentos. Por exemplo, se $m(\measuredangle BAC) = 70$ e $m(\measuredangle BAD) = 30$, então, dependendo da posição do ponto D em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos as possibilidades ilustradas na figura 2.10. Na figura 2.10a temos que B é interior a $\measuredangle DAC$, e na figura 2.10b temos que D é interior a $\measuredangle BAC$. Note que neste segundo caso $m(\measuredangle BAC) > m(\measuredangle BAD)$.

Este fato é geral, ou seja, podemos provar que se C e D estão do mesmo lado do plano em relação a uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $m(\measuredangle BAC) > m(\measuredangle BAD)$, então D está no interior de $\measuredangle BAC$. $\triangleleft$

Problema 2.3. Considere os seguintes ângulos com as medidas dadas:

$$m(\measuredangle BAC) = 110 \text{ e } m(\measuredangle BAD) = 120.$$

Calcule a medida de $\measuredangle CAD$ quando D está do mesmo lado que C e quando D e C estão em lados opostos, sempre em relação a $\overleftrightarrow{AB}$. Desenhe cada uma dessas situações.

2.3 Congruência de segmentos

Introduziremos agora o conceito de *congruência* aplicado a segmentos de reta. Compare a discussão desta seção com a discussão apresentada no livro de *Resolução de Problemas Geométricos*, na página 39. Observe que usaremos aqui uma notação diferente da adotada naquele texto.

A ideia intuitiva por trás deste conceito é a de *superposição*: imagine que você tenha duas figuras diferentes (isto é, que não são formadas pelos mesmos pontos) e que possa "recortar" uma delas e tentar encaixar sobre a outra, como num jogo de quebra-cabeças. Se houver uma forma de encaixe que não deixe sobrar nem faltar pontos, então as figuras são "congruentes". Se as figuras são segmentos definimos como a seguir

Definição 2.7. Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dizemos que eles são *congruentes* se seus comprimentos são iguais, isto é, se $AB = CD$. A relação de congruência será denotada pelo símbolo "$\equiv$", ou seja,

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD}.$$

A diferença entre segmentos *iguais* e segmentos *congruentes* é que no primeiro caso os dois segmentos são iguais como conjuntos de pontos (ou seja, são na verdade o mesmo objeto), e no segundo caso não precisam ser o mesmo conjunto, apenas compartilham da propriedade de terem a mesma medida.

Congruência de segmentos é um exemplo de *relação de equivalência*, isto é, satisfaz as seguintes propriedades para três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$:

(a) $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (propriedade *simétrica*);

(b) se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$ (propriedade *reflexiva*);

(c) Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$ então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ (propriedade *transitiva*).

Problema 2.4. Verifique que as propriedades acima são verdadeiras a partir da definição de congruência.

Na proposição 1.12 mostramos que existe um ponto $P \in \overline{AB}$ tal que $AP = \frac{1}{2}AB$. Este ponto P, que fica na "metade" do segmento $\overline{AB}$, é um objeto importante na geometria, e por isto merece um nome especial.

Definição 2.8. Dado um segmento $\overline{AB}$, dizemos que um ponto $M \in \overleftrightarrow{AB}$ é *ponto médio* de $\overline{AB}$ se $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Proposição 2.9. *Todo segmento possui um único ponto médio, que pertence a seu interior.*

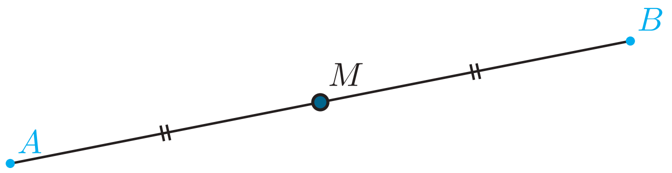


Figura 2.11 - Ponto médio de $\overline{AB}$

Demonstração. Já mostramos na proposição 1.12 que no interior de um segmento $\overline{AB}$ existe um ponto médio M (releia a conta que foi feita lá!). Falta verificar que este é único. Para isto tomaremos M' um (eventualmente outro) ponto médio de $\overline{AB}$ e provaremos que, na verdade, $M' = M$.

Então seja M' um ponto médio de $\overline{AB}$. Provaremos primeiro que M' está no interior de $\overline{AB}$. De fato, se $M' \notin \overline{AB}$ então, pelo axioma II.2, temos duas possibilidades:

(1) $M' - A - B$ e

(2) $A - B - M'$.

Se a primeira possibilidade fosse verdadeira teríamos que

$$M'A + AB = M'B.$$

Como $M'A = M'B$, concluímos que $AB = 0$, o que não pode ser verdade. Logo a primeira possibilidade listada não pode acontecer, e nos resta testar a segunda. Mas, fazendo uma conta análoga à que fizemos acima, também chegamos à conclusão que $AB = 0$. Assim só pode ser $M' \in \overline{AB}$, como queríamos provar. Em particular provamos que M' está na semirreta $\overrightarrow{AB}$.

Agora provaremos que $M = M'$. Para isto suporemos que $M \neq M'$. Novamente pelo axioma II.2 temos duas possibilidades:

(1) $A - M - M'$ e

(2) $A - M' - M$.

Se a primeira possibilidade fosse verdadeira teríamos

$$AM + MM' = AM' = AM \Rightarrow MM' = 0,$$

o que não é possível. De forma análoga provamos que a segunda possibilidade não pode acontecer. Logo M e M' não podem ser distintos, donde o ponto médio de um segmento é único. □

Exemplo 2.2. A proposição 2.9 é um caso particular de uma situação mais geral: podemos sempre dividir um segmento em tantas partes iguais quanto queiramos. Por exemplo, se queremos dividir $\overline{AB}$ em três partes, basta tomarmos $M_1, M_2 \in \overrightarrow{AB}$ tais que $AM_1 = \dfrac{1}{3}$ e $AM_2 = \dfrac{2}{3}$. A demonstração deste fato é análoga à que fizemos na proposição 2.9, mas não a faremos aqui. ◁

Problema 2.5. Desenhe um segmento $\overline{AB}$ e marque os pontos M_1 e M_2 como descrito no exemplo acima.

2.4 Congrência de ângulos

Agora vamos tratar de congruência de ângulos.

Definição 2.10. Dizemos que dois ângulos $\measuredangle BAC$ e $\measuredangle EDF$ são *congruentes* se suas medidas são iguais, isto é, se $m(\measuredangle BAC) = m(\measuredangle EDF)$.

Denotaremos estas relações de congruência com o símbolo "$\equiv$", ou seja,

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \text{ e } \measuredangle BAC \equiv \measuredangle EDF,$$

respectivamente.

Problema 2.6. Assim com a relação de congruência de segmentos, a relação de congruência de ângulos também é uma relação de equivalência. Prove este fato.

Podemos dividir um ângulo "ao meio" da mesma forma que dividimos ao meio um segmento.

Definição 2.11. Dado um ângulo[2] $\measuredangle BAC$ dizemos que uma semirreta $\overrightarrow{AD}$ é uma *bissetriz* de $\measuredangle BAC$ se

(a) o ponto D pertence ao interior de $\measuredangle BAC$

(b) $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle DAC$.

A reta $\overleftrightarrow{AD}$ será chamada de *reta bissetriz* de $\measuredangle BAC$.

Teorema 2.12. *Todo ângulo possui uma única bissetriz.*

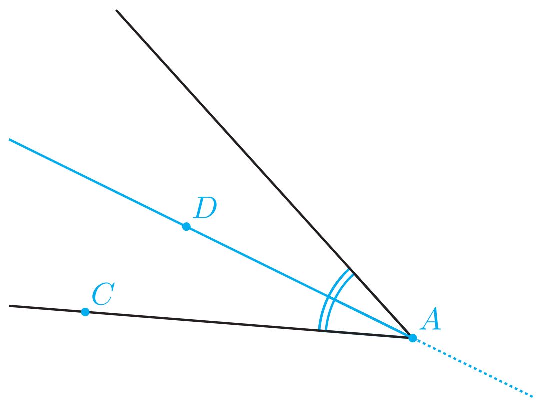


Figura 2.12 - Bissetriz de $\measuredangle BAC$

DEMONSTRAÇÃO. De fato, sejam $\measuredangle BAC$ um ângulo e $m(\measuredangle BAC) = a$. Pelo axioma III.3 existe um único ponto D do mesmo lado de B em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$ tal que

$$m(\measuredangle CAD) = \frac{a}{2}.$$

Para mostrar que $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $\measuredangle BAC$ só falta provar que D está no interior de $\measuredangle BAC$ como ilustrado na figura 2.12 porém não daremos esta demonstração aqui. $\square$

Problema 2.7. Assim como no caso de segmentos, também podemos dividir um ângulo qualquer em tantas partes quanto desejarmos. Desenhe um ângulo e divida-o em 3 e 5 partes.

E o que seriam bissetrizes de ângulos rasos? Temos aqui um ângulo muito especial.

Definição 2.13. Um ângulo que é congruente com o seu suplementar é um *ângulo reto* (veja figura 2.13).

Da definição de ângulo reto podemos deduzir a sua medida. Se $\measuredangle BAD$ e $\measuredangle CAD$ são ângulos suplementares então

$$m(\measuredangle BAD) + m(\measuredangle CAD) = 180.$$

[2] É bom lembrar que a palavra *ângulo* sempre significará para nós *ângulo não trivial*. Os outros tipos de ângulos serão designados pela nomenclatura completa.

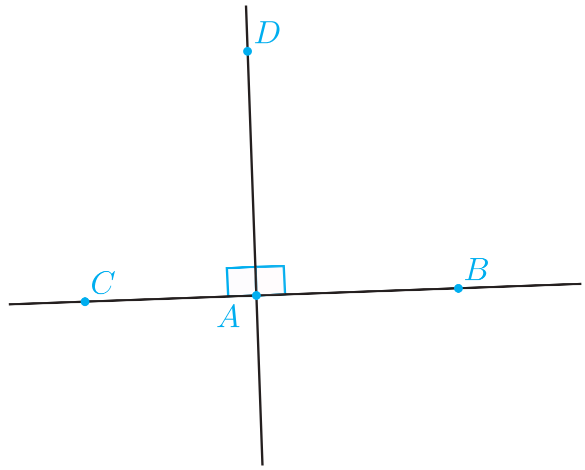


Figura 2.13 - Ângulos retos

Se estes ângulos são retos temos ainda que $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle CAD$, donde

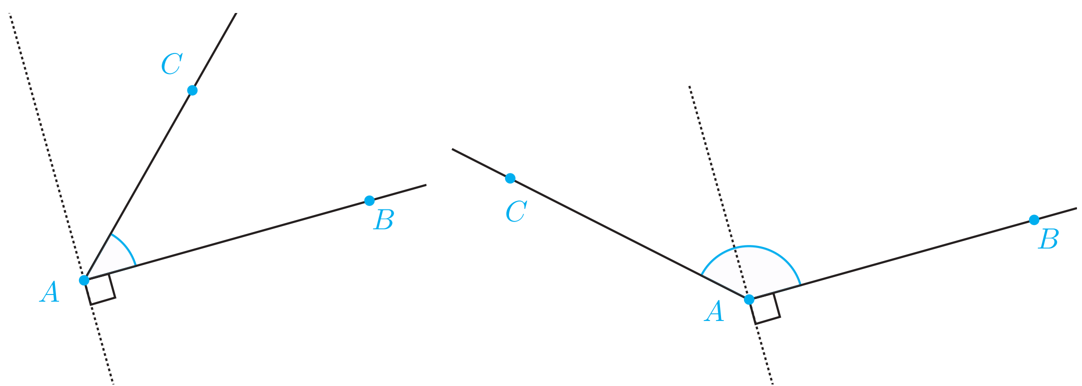
$$m(\measuredangle BAD) = m(\measuredangle CAD)$$

e portanto $m(\measuredangle BAD) = 90$.

Quanto à existência de ângulos retos, isto segue diretamente do axioma III.3. Com estas observações provamos o seguinte teorema:

Teorema 2.14. *Existem ângulos retos, e a medida de um ângulo reto é 90.*

Ângulos retos tradicionalmente funcionam como um padrão, uma unidade de medida de ângulos, assim ângulos recebem nomes especiais quando comparados com ângulos retos, como estabelecemos na definição a seguir.



(a) Ângulo agudo (b) Ângulo obtuso

Figura 2.14

Definição 2.15. Um ângulo cuja medida é menor do que 90 é chamado *ângulo agudo*; e um ângulo cuja medida é maior do que 90 é chamado de *ângulo obtuso* (veja a figura 2.14).

Vamos agora estudar os ângulos determinados por pares de retas. Observe que um par de retas concorrentes determina quatro ângulos no plano (veja a figura 2.15).

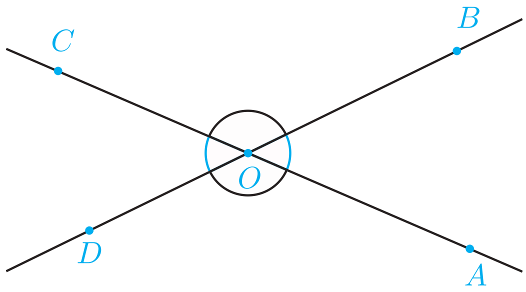


Figura 2.15 - Ângulos opostos pelo vértice

Não é difícil de perceber que os ângulos $\measuredangle AOB$ e $\measuredangle COD$ são congruentes. De fato,

$$m(\measuredangle AOB) + m(\measuredangle BOC) = 180 = m(\measuredangle BOC) + m(\measuredangle COD)$$

donde $m(\measuredangle AOB) = m(\measuredangle COD)$. Analogamente os ângulos $\measuredangle BOC$ e $\measuredangle AOD$ também são congruentes.

Estes pares de ângulos congruentes recebem um nome especial.

Definição 2.16. Os ângulos de mesmo vértice e cujos lados são semirretas opostas com mesmas retas-suporte são denominados ângulos *opostos pelo vértice*, abreviado por ângulos O.P.V.

Na figura 2.15 os ângulos $\measuredangle AOB$ e $\measuredangle COD$ são O.P.V., assim como os seus suplementares $\measuredangle BOC$ e $\measuredangle AOD$.

E, como já vimos acima, temos o seguinte resultado:

Proposição 2.17. *Dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.*

Problema 2.8. Marque na figura 2.15 as seguintes identificações:

(1) $\measuredangle BOA = \measuredangle\alpha$;

(2) $\measuredangle BOC = \measuredangle\beta$;

(3) $\measuredangle COD = \measuredangle\gamma$;

(4) $\measuredangle AOD = \measuredangle\delta$.

Responda às seguintes questões:

(a) Supondo que $m(\measuredangle\alpha) = 52$, calcule a medida de β?

(b) E se supormos que $m(\measuredangle\gamma) = 110$, quais a medidas dos outros ângulos?

2.5 Triângulos

Terminaremos esta aula definindo uma das figuras fundamentais da geometria que, de certa forma, "une" segmentos e ângulos: os *triângulos*.

Definição 2.18. Um *triângulo* é a figura formada pela união de três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ onde A, B e C são pontos não colineares. O triângulo determinado pelos pontos A, B e C será denotado por $\triangle ABC$, ou seja,

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}.$$

Os pontos A, B e C são os *vértices* de $\triangle ABC$, e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são seus *lados* ou suas *arestas*. Os ângulos correspondentes aos vértices de um triângulo serão designados pelas letras correspondentes, ou seja:

$$\measuredangle A = \measuredangle BAC, \;\; \measuredangle B = \measuredangle ABC \;\text{ e }\; \measuredangle C = \measuredangle ACB.$$

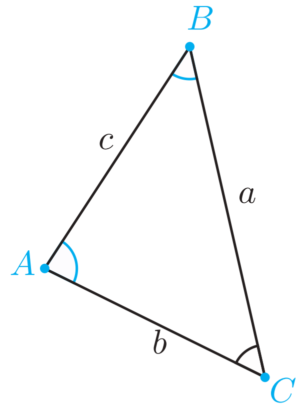


Figura 2.16 - Um triângulo

Problema 2.9. Triângulos são um caso particular do conjunto das figuras planas conhecidas como *polígonos*. Revise o que você já aprendeu sobre polígonos e escreva uma lista dos mais conhecidos, com seus nomes usuais.

Também é um costume tradicional indicar a medida de cada lado de um triângulo por letras latinas minúsculas correspondentes à letra do vértice que não lhe pertence. Por exemplo, na figura 2.16 escrevemos $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$.

O plano é dividido por um triângulo em duas regiões, o seu *interior* e o seu *exterior*, como nossa intuição visual percebe. A definição formal é a seguinte:

Definição 2.19. Em um triângulo $\triangle ABC$ os pontos pertencentes à interseção das regiões interiores de seus ângulos é chamado de *ponto interior* ao triângulo. Simbolicamente,

$$\operatorname{int}(\triangle ABC) = R_{\measuredangle A} \cap R_{\measuredangle B} \cap R_{\measuredangle C}.$$

Os pontos que não pertencem ao interior do triângulo e nem a seus lados são chamados de *pontos exteriores*.

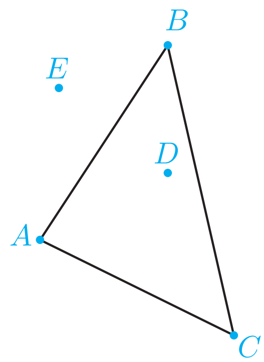


Figura 2.17

Na figura 2.17 D é um ponto interior e E um ponto exterior em relação a $\triangle ABC$.

Problema 2.10. Neste problema chamaremos a interseção de dois ou mais semiplanos de *região plana*. Por exemplo, o interior do triângulo é uma região plana determinada pela interseção de três semiplanos. Identifique na figura 2.18 quantas e quais são as regiões determinadas pela interseção de três semiplanos. E quantas e quais são as regiões determinadas pela interseção de dois semiplanos?

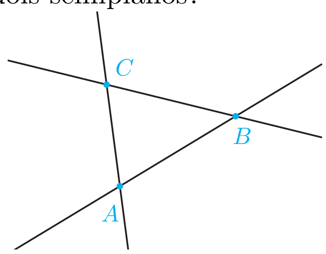


Figura 2.18

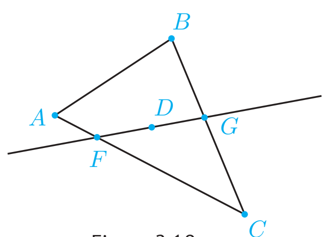


Figura 2.19

Uma propriedade importante em triângulos é a seguinte:

Teorema 2.20. *Sejam D um ponto interior a um triângulo $\triangle ABC$ e r uma reta que passe por D. Se r não passa pelos vértices do triângulo então intercepta dois de seus lados.*

Na figura 2.19 representamos a situação descrita no teorema acima. Este teorema é consequência (na verdade é equivalente!) ao axioma II.6, que trata da separação do plano por uma reta, e sua demonstração, embora esteja sendo omitida não é particularmente difícil.

2.6 Exercícios

2.1. Responda às seguintes questões de revisão:

(a) Quais são os grupos de axiomas da geometria plana que foram estudados até agora? O que cada um destes grupos estabeleceu como propriedades?

(b) Escreva com suas palavras o que você entendeu por *congruência*.

(c) Se dois segmentos são iguais, eles são congruentes? E se dois segmentos são congruentes, eles precisam ser iguais?

(d) Se dois ângulos são congruentes, suas regiões interiores precisam ser iguais?

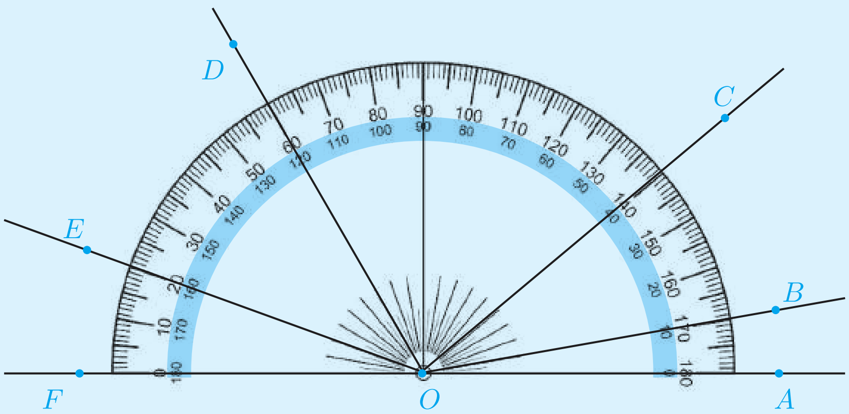


Figura 2.20 - Exercício 2.2

2.2. Utilizando a figura 2.20, onde representamos um transferidor sobreposto a alguns ângulos, calcule as seguintes medidas, se possível:

(a) $m(\measuredangle AOC)$

(b) $m(\measuredangle BOE)$

(c) $m(\measuredangle FOC)$

(d) $m(\measuredangle COB) + m(\measuredangle DOE)$

(e) $m(\measuredangle BOE) - m(\measuredangle BOA)$

(f) $m(\measuredangle FOE) - m(\measuredangle AOC)$

2.3. Use a figura 2.21a para completar as afirmações abaixo:

(a) $m(\measuredangle CAB) + m(\measuredangle DAC) = m(\measuredangle ???)$

(b) $m(\measuredangle EAD) + m(\measuredangle DAC) = m(\measuredangle ???)$

(c) $m(\measuredangle EAD) + m(\measuredangle DAB) = m(\measuredangle ???)$

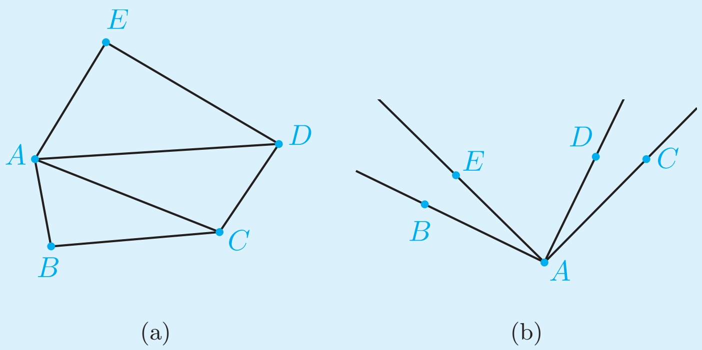


Figura 2.21 - Exercício 2.3 e 2.7

(d) $m(\measuredangle EAC) - m(\measuredangle DAC) = m(\measuredangle ???)$

2.4. Se a medida de um ângulo $\measuredangle\alpha$ é três vezes maior que a de seu suplemento, qual é a medida de $\measuredangle\alpha$?

2.5. Se $m(\measuredangle BAD) = 65$ e $m(\measuredangle CAD) = 32$, quanto vale $m(\measuredangle CAB)$? (Atenção: este exercício pode ter mais de uma resposta!)

2.6. Se $\measuredangle ABC$ e $\measuredangle DEH$ são congruentes e suplementares, quais as medidas dos ângulos?

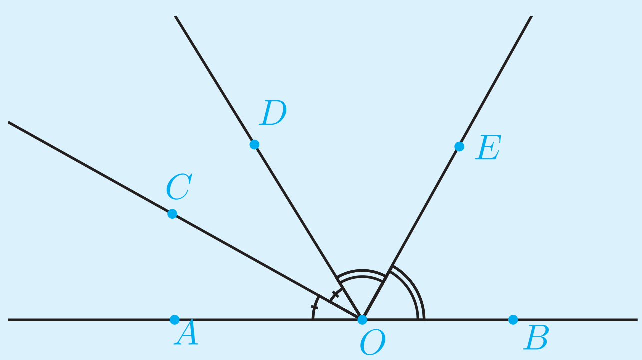


Figura 2.22 - Exercício 2.8

2.7. Na figura 2.21b se $\measuredangle CAE$ e $\measuredangle BAD$ são retos prove que

$$\measuredangle CAD \equiv \measuredangle BAE.$$

2.8. Na figura 2.22 $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas e $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OE}$ são bissetrizes dos ângulos $\measuredangle AOD$ e $\measuredangle BOD$, respectivamente. Calcule $m(\measuredangle COE)$.

3 *Congruência de triângulos e consequências*

AULA 3: CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E CONSEQUÊNCIAS

OBJETIVOS: Introduzir o conceito e os critérios de congruência de triângulos, e as principais consequências. Ao final apresenta-se o "Teorema do Ângulo Externo", um dos principais teoremas da geometria plana.

3.1 Introdução

Na aula anterior apresentamos os conceitos de congruência de segmentos e ângulos, e terminamos com a definição de triângulos. Agora precisamos aprender como comparar triângulos, isto é, precisamos estudar o conceito de *congruência de triângulos*, com o qual vocês já tiveram contato no curso de *Resolução de Problemas Geométricos*.

Nesta aula retomaremos este assunto "mais ou menos" de onde ele parou naquele curso, e utilizaremos constantemente como referência o livro [4] da Professora Marília Costa de Faria. Sugerimos que, antes de estudar as próximas seções desta aula, releiam a aula 3 daquele livro.

3.2 Axiomas: grupo IV, congrência de triângulos

A ideia intuitiva de congruência de triângulos é a de "sobreposição", isto é, gostaríamos de dizer que dois triângulos são congruentes se pudermos mover um deles e sobrepor ao outro de maneira perfeita. Em [4] na página 38 encontramos a seguinte definição de triângulos congruentes, que copiamos aqui:

Definição 3.1. Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são *congruentes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Se a correspondência biunívoca que caracteriza a relação de congruência for tal que

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle D,\ \ \measuredangle B \equiv \measuredangle E,\ \ \measuredangle C \equiv \measuredangle F \ \text{ e} \tag{3.1}$$

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE},\ \ \overline{AC} \equiv \overline{DF},\ \ \overline{BC} \equiv \overline{EF}. \tag{3.2}$$

então denotamos esta congruência por

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF,$$

onde a ordem em que as letras aparece indica a sequência de elementos congruentes. Observe que em [4] a relação de congruência é denotada pelo sinal de "=", que reservamos neste texto para indicar a *coincidência* das figuras, ou seja, a igualdade das mesmas como conjuntos de pontos.

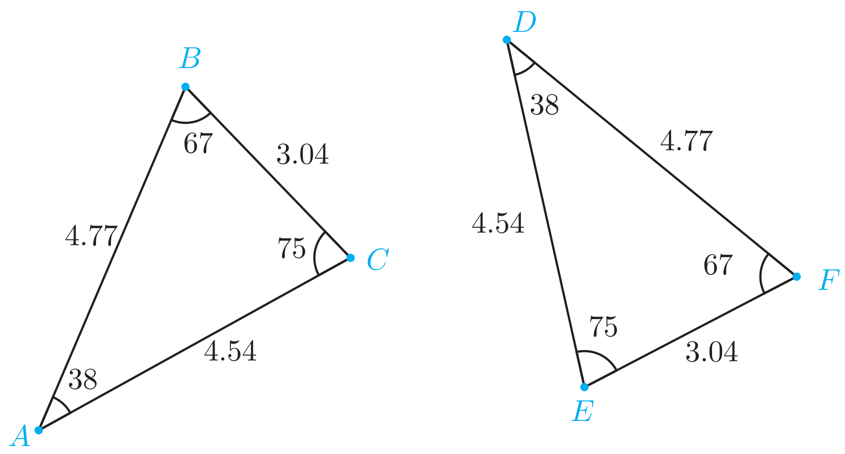


Figura 3.1

Exemplo 3.1. Vamos clarear a definição de congruência com este exemplo. Observe a figura 3.1, onde deixamos indicadas as medidas dos lados e ângulos dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$. Neste exemplo temos que $\measuredangle A \equiv \measuredangle D$, $\measuredangle B \equiv \measuredangle F$ e $\measuredangle C \equiv \measuredangle E$; e que $\overline{AB} \equiv \overline{DF}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DE}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$. Assim estes triângulos são congruentes com a relação entre os vértices indicada por

$$\triangle ABC \equiv \triangle DFE.$$

$\triangleleft$

Problema 3.1. Na aula anterior vimos que as relações de congruência entre segmentos e entre ângulos são relações de equivalência. Verifique se a relação de congruência de triângulos também possui esta característica.

Problema 3.2. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DFE$ dois triângulos tais que $m(\measuredangle A) = 100$, $m(\measuredangle B) = 50$, $m(\measuredangle C) = 30$ e $m(\measuredangle E) = 30$, $m(\measuredangle F) = 50$, $m(\measuredangle D) = 100$. Se estes triângulos são congruentes entre si, qual a única correspondência possível?

Exemplo 3.2. A correspondência entre os vértices de dois triângulos que estabele uma congruência não precisa ser única. Por exemplo, se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes com

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle B \equiv \measuredangle E \equiv \measuredangle F$$

e $\measuredangle C \equiv \measuredangle D$, então podemos escrever, por exemplo,

$$\triangle ABC \equiv \triangle EFD \quad \text{ou} \quad \triangle ABC \equiv \triangle FED.$$

$\triangleleft$

A pergunta que precisamos responder agora é: como "testar" se dois triângulos são congruentes? Em outros termos, quantos e quais elementos de dois triângulos precisamos comparar para decidir se os mesmos são congruentes? Em [4] esta resposta já foi apresentada: três elementos, mas não quaisquer! Lá naquele livro vocês tiveram contatos com três "casos" de congruência de triângulos, que iremos revisar após o exemplo apresentado a seguir.

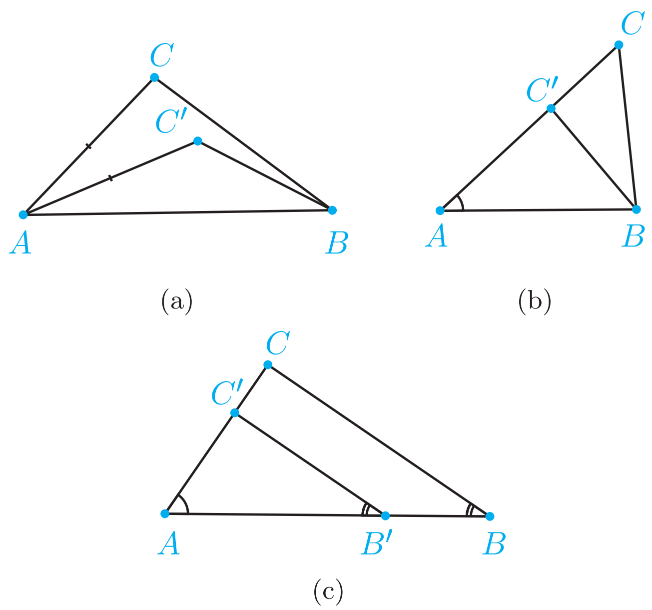


Figura 3.2

Exemplo 3.3. Poderíamos pensar em comparar dois elementos para testar a congruência de triângulos: dois pares de lados, um par de lados e um par de ângulos, ou dois pares de ângulos. Mas isto não é suficiente, como podemos ver nos triângulos da figura 3.2. Na figura 3.2a mostramos dois triângulos com dois lados congruentes (marcados com um pequeno traço); na figura 3.2b mostramos dois triângulos com um lado (lado $\overline{AB}$) e um ângulo (ângulo $\measuredangle A$) comuns; e na figura 3.2c mostramos dois triângulos com dois ângulos congruentes (um comum e os outros dois marcados com traços duplos). $\lhd$

Em [4], como já lembramos acima, foram apresentados três "casos" de congruência de triângulos: os casos "lado-ângulo-lado" (LAL), "ângulo-lado-ângulo" (ALA), e "lado-lado-lado" (LLL). Se vocês leram com atenção aquele texto, devem ter percebido que os casos ALA e LLL foram demonstrados supondo-se o caso LAL verdadeiro (vejam em particular a página 41 de [4]). De fato, não há como garantir um teste adequado de congruência de triângulos sem axiomatizar um dos casos citados, e a nossa escolha, como em [4], recai no caso LAL:

Axioma IV. (Caso LAL de congruência de triângulos) Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ forem tais que

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE}, \ \overline{AC} \equiv \overline{DF} \text{ e } \measuredangle BAC \equiv \measuredangle EDF$$

então

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

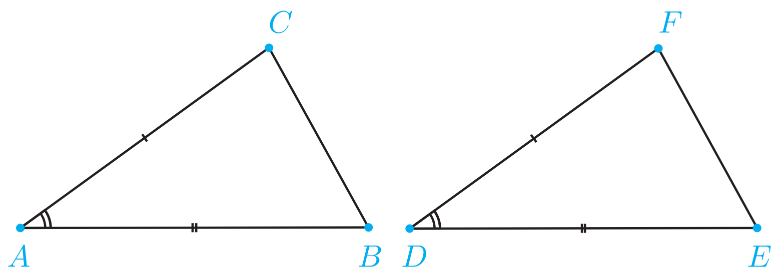


Figura 3.3 - Caso LAL de congruência de triângulos

Exemplificaremos a utilização deste axioma na caracterização de uma classe muito especial de triângulos. Começamos com uma definição.

Definição 3.2. Dizemos que um triângulo é *isósceles* se o mesmo possuir dois lados congruentes. Se $\triangle ABC$ é isósceles com $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, então dizemos que $\overline{BC}$ é a *base* do triângulo (relativa aos lados congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$) e que os ângulos $\measuredangle B$ e $\measuredangle C$ são os *ângulos da base*.

Observamos que a identificação de um lado de um triângulo isósceles como *base* é relacionada a quais são os lados congruentes, ou seja, se afirmamos que um certo lado é a base, então estamos afirmando que os outros dois lados são congruentes[1].

O resultado a seguir é demonstrado em [4], na página 40. Aqui daremos uma outra demonstração, aproveitando para introduzir uma terminologia muito utilizada em geometria.

Proposição 3.3. *Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.*

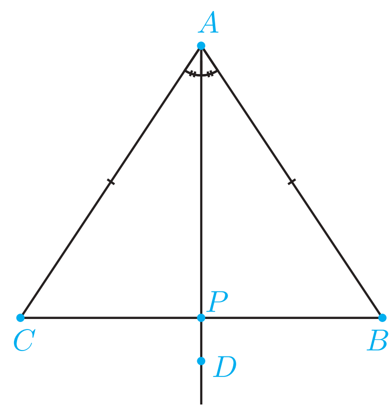


Figura 3.4

[1]Lembramos ainda que um triângulo pode ter os três lados congruentes, caso em que é denominado triângulo *equilátero*. Neste caso qualquer dos lados pode ser tomado como base.

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles com base $\overline{BC}$. Queremos provar que $\measuredangle B \equiv \measuredangle C$, e para isto utilizaremos o critério LAL de congruência de triângulos estabelecido no axioma IV.1. Começamos "construindo" triângulos congruentes que nos levem à conclusão desejada. Seja $\overrightarrow{AD}$ a bissetriz do ângulo $\measuredangle BAC$. Como, por definição de bissetriz, a reta $\overleftrightarrow{AD}$ separa os pontos B e C então, pelo axioma de separação do plano (axioma II.6), temos que que $\overrightarrow{AD}$ encontra $\overline{BC}$ em um ponto P (veja figura 3.4). Agora observemos que nos triângulos $\triangle BAP$ e $\triangle CAP$ temos as seguintes relações:

$$\left.\begin{array}{rcll} \overline{BA} & \equiv & \overline{CA} & \text{Lados congruentes, } \textit{por hipótese}; \\ \measuredangle BAP & \equiv & \measuredangle CAP & \text{Ângulos congruentes, } \textit{por construção}; \\ \overline{AP} & \equiv & \overline{AP} & \text{Lado comum aos triângulos.} \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Assim, pelo caso LAL verificamos que $\triangle BAP \equiv \triangle CAP$, donde deduzimos que os outros pares de elementos correspondentes dos triângulos são congruentes, a saber:

$$\overline{BP} \equiv \overline{CP},\ \measuredangle APB \equiv \measuredangle APC \text{ e } \measuredangle ABP \equiv \measuredangle ACP.$$

Em particular concluímos que $\measuredangle B \equiv \measuredangle C$, da terceira congruência acima. □

Observe as frases "por hipótese" e "por construção" que apareceram durante a demonstração (em itálico). Esta é uma terminologia comumente utilizada em geometria. Afirmamos que um certo fato pode ser utilizado na argumentação "por hipótese" se ele já foi assumido como verdadeiro de antemão. Na demonstração começamos com a hipótese que o triângulo $\triangle ABC$ era isósceles, e indicamos, de acordo com a definição, quais os lados congruentes, que aparecem na lista (3.2).

Usamos a expressão "por construção" quando o elemento da argumentação em questão é obtido a partir de elementos previamente assumidos através de fatos já demonstrados. No caso da demonstração acima "construímos" dois ângulos congruentes (indicados na segunda linha de (3.2)) a partir da bissetriz de $\measuredangle BAC$, a qual sabemos que existe, e que corta o lado $\overline{BC}$.

Reparem ainda que listamos os elementos congruentes dos dois triângulos na lista (3.2) seguindo a ordem dos vértices nas quais os triângulos foram apresentados. Este procedimento facilita a leitura e a comparação dos mesmos.

De agora em diante aplicaremos esta terminologia em nossas argumentações, e algumas outras que o leitor poderá facilmente deduzir seu significado no contexto, por serem análogas a estas que acabamos de apresentar.

Problema 3.3. Neste problema utilizaremos as notações da proposição 3.3, representadas na figura 3.4.

(a) Prove que P é ponto médio de $\overline{BC}$.

(b) Prove que $\measuredangle APB$ é reto.

3.3 Os critérios ALA e LLL de congruência de triângulos

Como já comentamos, dois outros critérios de congruência de triângulos enunciados são em [4]. Vamos reapresentá-los aqui em uma linguagem um pouquinho diferente.

Teorema 3.4 (Caso ALA de congruência de triângulos)**.** *Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ forem tais que*

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle D,\ \overline{AB} \equiv \overline{DE} \text{ e } \measuredangle B \equiv \measuredangle E,$$

então

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

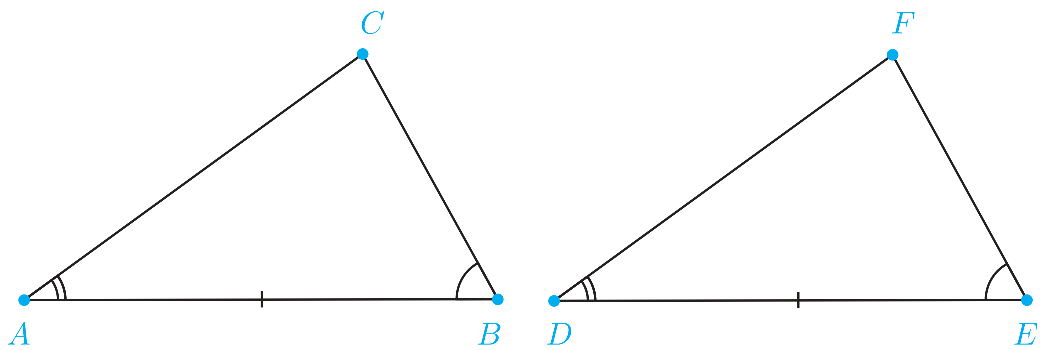


Figura 3.5 - Caso ALA de congruência de triângulos

Problema 3.4. Reescreva a demonstração do critério ALA apresentado em [4], à página 42, usando a notação do enunciado do teorema 3.4 acima.

Para ilustrar a aplicação do critério ALA de congruência de triângulos, mostraremos que a recíproca da proposição 3.3 é verdadeira, ou seja, que vale o seguinte teorema:

Teorema 3.5. *Um triângulo é isósceles se e somente se possui dois ângulos congruentes.*

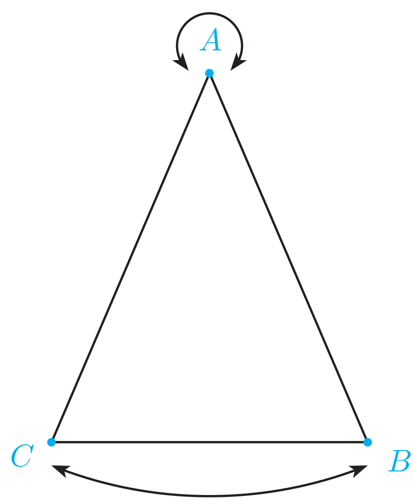


Figura 3.6 - Teorema 3.5

Demonstração. Na proposição 3.3 provamos a implicação

$$\triangle \text{ isósceles } \Rightarrow \text{ ângulos da base congruentes}$$

A recíproca desta afirmação é

$$\triangle \text{ com dois ângulos congruentes} \Rightarrow \triangle \text{ isósceles}$$

Esta afirmação foi deixada como atividade a ser resolvida em [4] (atividade 3.5, na página 43). Vamos dar a "resposta" aqui...

Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\measuredangle B \equiv \measuredangle C$. Aplicaremos um argumento análogo ao apresentado em [4], na página 41, para demonstrar que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes (proposição 3.1 naquele texto, e proposição 3.3 no presente livro). Este engenhoso argumento foi provavelmente elaborado por um matemático grego do século IV, conhecido como Papus de Alexandria, e a ideia é comparar o triângulo com ele mesmo, escolhendo uma correspondência adequada para estabelecer a congruência. Em outras palavras, observe que $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ pelo critério ALA, pois:

$$\left.\begin{array}{rcll} \measuredangle ABC & \equiv & \measuredangle ACB & \text{Ângulos congruentes, por hipótese;} \\ \overline{BC} & \equiv & \overline{CB} & \text{Lado comum} \\ \measuredangle ACB & \equiv & \measuredangle ABC & \text{Ângulos congruentes, por hipótese.} \end{array}\right\} \text{(ALA)}$$

Desta congruência de triângulos obtemos, em particular, que $\overline{AB}$ (no triângulo $\triangle ABC$) é congruente a $\overline{AC}$ (no triângulo $\triangle ACB$), como queríamos, ou seja, $\triangle ABC$ é isósceles com base $\overline{BC}$. □

Finalmente reapresentamos o caso LLL de congruência de triângulos:

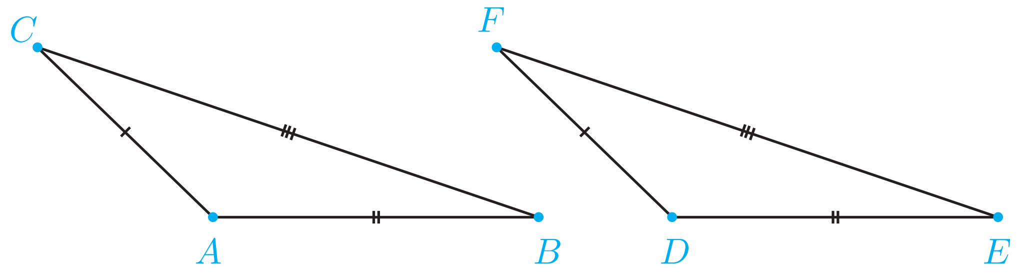


Figura 3.7 - Caso LLL de congruência de triângulos

Teorema 3.6 (Caso LLL de congruência de triângulos). *Se dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ forem tais que*

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE}, \quad \overline{AC} \equiv \overline{DF} \quad e \quad \overline{BC} \equiv \overline{EF},$$

então

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

Problema 3.5. Reescreva a demonstração do critério LLL apresentado em [4], à página 43, usando a notação do enunciado do teorema 3.6 acima.

Problema 3.6. Refaça a demonstração da proposição 3.3 utilizando o critério LLL e o argumento apresentado na demonstração do teorema 3.5, o que compara o triângulo com ele mesmo.

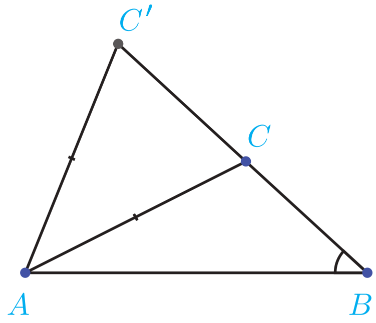


Figura 3.8

Como observado em [4], não é qualquer combinação de três das seis congruências entre elementos de dois triângulos previstas na definição 3.1 que permite concluir que os dois triângulos são congruentes. Como exemplo, veja a situação ilustrada na figura 3.8. Os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABC'$ evidentemente não são congruentes, mas

$$\left.\begin{array}{rcll} \overline{AB} & \equiv & \overline{AB} & \text{Lado comum;} \\ \overline{AC} & \equiv & \overline{AC'} & \text{Lados congruentes por construção;} \\ \measuredangle ABC & \equiv & \measuredangle ABC' & \text{Ângulo comum.} \end{array}\right\}\text{(LLA)}$$

Ou seja, o "caso" LLA não é um caso de congruência (veja a atividade 3.7 de [4], na página 45).

3.4 O Teorema de Ângulo Externo

Fecharemos esta aula revisitando o *Teorema do Ângulo Externo* com o qual vocês já tiveram contato na aula 4 de [4], página 50. Este teorema é um dos teoremas fundamentais da geometria, do qual são derivados resultados importantíssimos, como as propriedades de perpendicularismo e as desigualdades triangulares (que veremos na próxima aula).

Primeiro vamos relembrar o que é um "ângulo externo" a um triângulo (veja na página 50 de [4]).

Definição 3.7. Cada ângulo suplementar e adjacente a um ângulo de um triângulo é chamado de *ângulo externo* a este triângulo[2].

Observe que pela definição todo triângulo possui três pares de ângulos externos correspondentes a cada um dos vértices, que são sempre opostos pelo vértice e, portanto, congruentes. Na figura 3.9 representamos os ângulos $\measuredangle ACD$ e $\measuredangle ECD$ externos a $\triangle ABC$ no vértice C.

Vamos ao teorema, que apresentamos aqui com o mesmo enunciado visto em [4].

[2] Para distinguir melhor os ângulos externos de um triângulo de seus ângulos (veja a definição 2.18) chamaremos estes de *ângulos internos* (do triângulo)

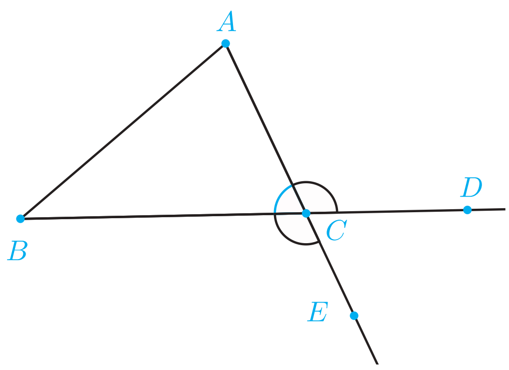


Figura 3.9 - Ângulos externos

Teorema 3.8 (Teorema do ângulo externo). *Em um triângulo a medida de qualquer ângulo externo é maior que a medida de cada um dos ângulos internos a ele e não adjacentes.*

Exemplo 3.4. Na figura 3.9 podemos perceber visualmente que os ângulos externos ao triângulo no vértice C são maiores que os ângulos $\measuredangle B$ e $\measuredangle A$. Use um transferidor para conferir. ◁

Problema 3.7. Releia a demonstração do Teorema do Ângulo Externo apresentada em [4].

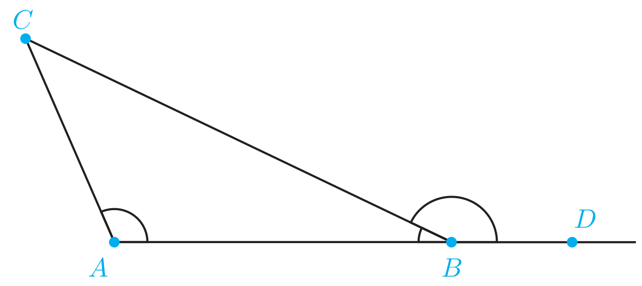


Figura 3.10

Problema 3.8. Prove a seguinte consequência do Teorema do Ângulo Externo: *em um triângulo $\triangle ABC$ qualquer pelo menos dois ângulos são agudos*[3]. Siga os seguintes passos:

(a) Observe que se os três ângulos do triângulo já forem agudos, nada há que demonstrar.

(b) Suponha que um dos ângulos do triângulo não é agudo, por exemplo, $m(\measuredangle A) \geqslant 90$, como representado na figura 3.10.

(c) Aplique o Teorema do Ângulo Externo ao ângulo externo em $\measuredangle B$ indicado na figura 3.10 e use o fato de que $\measuredangle CBD$ e $\measuredangle CBA$ são suplementares para concluir que $\measuredangle B$ é agudo.

(d) Como podemos provar que $\measuredangle C$ também é agudo?

[3] Veja a atividade 4.3 de [4], à página 52.

3.5 Exercícios

3.1. Responda às seguintes perguntas de revisão:

(a) Escreva com suas palavras o que você entende por congruência de figuras planas.

(b) Quantos e quais são os casos de congruência de triângulos que foram apresentados? Qual deles foi adotado como axioma no nosso sistema?

(c) O que é um ângulo externo a um triângulo?

(d) O que é um triângulo isósceles? E um triângulo equilátero?

3.2. Assim como definimos triângulo isósceles e equilátero, existem outras classificações de triângulo. Faça uma pesquisa e responda:

(a) Qual o nome que se dá usualmente a um triângulo que tem seus três lados distintos.

(b) Qual o nome tradicional de um triângulo que tem os três ângulos agudos?

(c) E um triângulo que possui um ângulo obtuso, que nome costuma receber?

(d) Existe mais algum triângulo "famoso"?

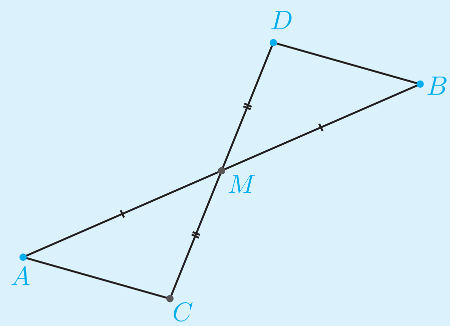


Figura 3.11 - Exercício 3.3

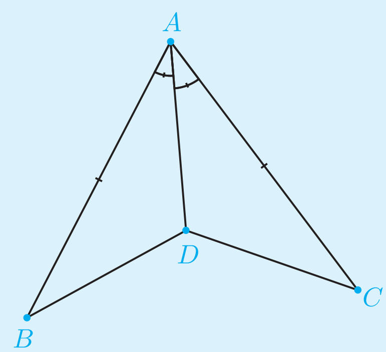


Figura 3.12 - Exercício 3.4

3.3. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos que se bissectam em um ponto M (em outras palavras, M é o ponto médio dos segmentos), como representado na figura 3.11. Prove que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ são congruentes.

3.4. Na figura 3.12 temos que $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ e que $\measuredangle BAD \equiv \measuredangle DAC$. Prove que $\overline{BD} \equiv \overline{DC}$.

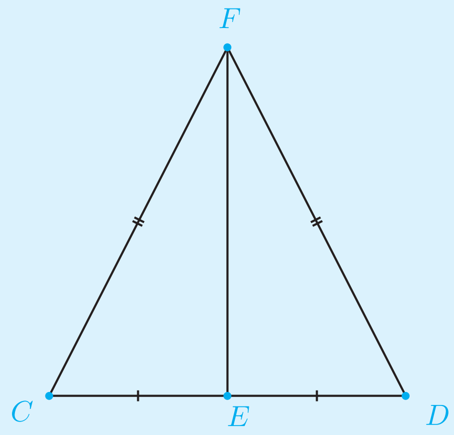


Figura 3.13 - Exercício 3.5

3.5. Na figura 3.13 o triângulo $\triangle CFD$ é isósceles com base $\overline{CD}$, e E é ponto médio de $\overline{CD}$. Prove que

(a) $\triangle CEF \equiv \triangle DEF$;

(b) $\measuredangle CEF$ é reto.

3.6. A recíproca do exercício anterior também é verdadeira, isto é, assuma os seguintes dados (acompanhe na figura 3.13): E é ponto médio de $\overline{CD}$ e $\measuredangle CEF$ é reto, e prove que $\triangle CFD$ é isósceles com base $\overline{CD}$.

3.7. Definimos em uma nota de pé de página um triângulo equilátero: é um triângulos cujos três lados são congruentes entre si. Se $\triangle ABC$ é equilátero, verifique que

$$\triangle ABC \equiv \triangle BCA \equiv \triangle CAB.$$

Usando isto prove que $\measuredangle A \equiv \measuredangle B \equiv \measuredangle C$.

3.8. A recíproca do exercício anterior também é verdadeira, isto é, se um triângulo tem os três ângulos congruentes entre si, então é equilátero. Suponha que $\triangle ABC$ tenha esta propriedade, ou seja,

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle B \equiv \measuredangle C.$$

Prove que os triângulos $\triangle ABC$, $\triangle BCA$ e $\triangle CAB$ são isósceles, e conclua que $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$.

Por que não podemos garantir “de cara” que $\triangle ABC \equiv \triangle BCA$?

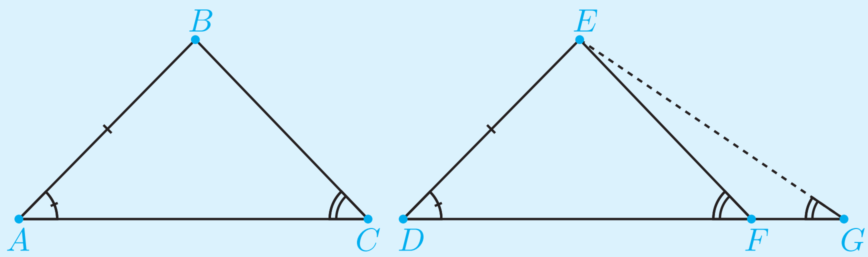


Figura 3.14 - Caso LAA_o de congruência de triângulos

3.9. (DESAFIO!) Existe mais uma caso de congruência além dos que já vimos. É o critério *lado-ângulo-ângulo oposto*, denotado por LAA_o: *se dois triângulos tiverem um par de lados congruentes, um par de ângulos adjacentes a estes lados congruentes, e os ângulos opostos a estes lados congruentes, então são congruentes.*

Para demonstrar este critério considere os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ da figura 3.14. Suponha que

$$\overline{AB} \equiv \overline{DE},\ \measuredangle BAC \equiv \measuredangle EDF \text{ e } \measuredangle BCA \equiv \measuredangle EFD.$$

Tome $G \in \overrightarrow{DF}$ com $\overline{DG} \equiv \overline{AC}$. O objetivo é provar que $\overline{DG} = \overline{DF}$ e aplicar o critério LAL para provar que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

Siga os seguintes passos:

(a) Verifique que $\triangle ABC \equiv \triangle DEG$ pelo critério LAL.

(b) Suponha por absurdo que $G \neq F$. Temos então que ou $D - G - F$ ou $D - F - G$. Se $D - F - G$, como representado na figura 3.14, conclua que $\measuredangle EFD \equiv \measuredangle EGD$. Verifique que esta última congruência contradiz o Teorema do Ângulo Externo, donde não pode ser $D - F - G$.

(c) Prove, usando argumentos análogos aos do item anterior, que também não pode ser $D - G - F$.

(d) Conclua, de (b) e (c), que $F = G$.

(e) Escreva a conclusão da demonstração.

Com o critério de congruência de triângulos apresentado neste exercício temos quatro testes de congruência de triângulos: LAL, ALA, LLL e LAA_o, e podemos verificar que são apenas estes.

4 Perpendicularismo e desigualdades triangulares

AULA 4: PERPENDICULARISMO E DESIGUALDADES TRIANGULARES

OBJETIVOS: Introduzir o conceito de perpendicularismo entre retas no plano, as desigualdades triangulares e apresentar algumas consequências. Ao final apresentamos os triângulos retângulos e algumas de suas propriedades.

4.1 Introdução

Nesta aula apresentaremos algumas consequências muito importantes do Teorema do Ângulo externo (teorema 3.8) que estudamos no final da aula anterior: o conceito e propriedades referentes a perpendicularismo e as desigualdades triangulares.

4.2 Perpendicularismo

A ideia de *perpendicularismo* é bem natural. Pense no seguinte fenômeno físico: a trajetória da queda de uma maçã, como ilustrado na figura 4.1. Próximo à superfície da terra esta trajetória é aproximadamente um segmento de reta que faz um ângulo reto com o chão. A seguir damos a definição formal, dentro de nosso mundo lógico-matemático.

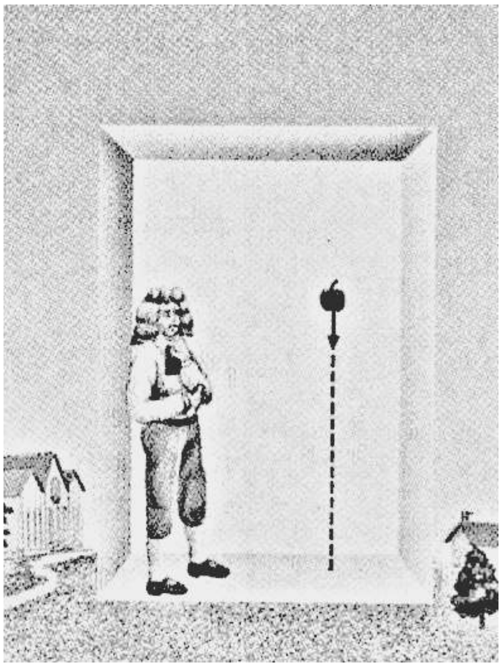


Figura 4.1

Definição 4.1. Dizemos que uma reta r é *perpendicular* a uma reta s se forem concorrentes e um dos ângulos determinado por elas for reto. Esta relação entre as duas retas será denotada por $r \perp s$.

No teorema 2.14 provamos a existência de ângulos retos. Na verdade provamos que por um ponto P qualquer de uma dada reta r passa uma reta s com $r \perp s$. Queremos agora verificar este fato em geral, ou seja, queremos saber se, dados um ponto qualquer A e uma reta qualquer r, existe uma reta s passando por A e perpendicular a r. Respondemos a esta questão com o próximo teorema.

Teorema 4.2. *Dados um ponto A e uma reta r existe uma única reta s perpendicular a r passando por A.*

Demonstração. Começamos com a existência. Precisamos considerar dois casos: $A \in r$ e $A \notin r$. O primeiro caso já foi tratado no teorema 2.14.

Vamos ao segundo caso, um pouco mais complicado. Tomemos qualquer ponto $B \in r$. Se $\overleftrightarrow{AB} \perp r$, então basta tomar $s = \overleftrightarrow{AB}$. Caso contrário, isto é, se $\overleftrightarrow{AB}$ não for perpendicular a r, tomamos um outro ponto $C \in r$ e escolhemos um ponto $D \notin r$ do lado oposto a A em relação a r de forma que $\measuredangle CBA \equiv \measuredangle CBD$ (axioma III.3). Além disso podemos escolher D de forma que $\overline{BD} \equiv \overline{BA}$. Como A e D estão em lados opostos do plano em relação a r, a reta $\overleftrightarrow{AD}$ intercepta r em um ponto P distinto de B[1].

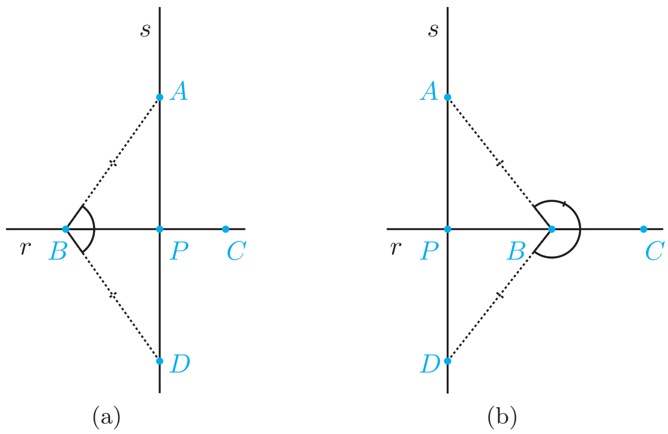


Figura 4.2

Agora observamos que $\measuredangle PBA \equiv \measuredangle PBD$. De fato, se P está na semirreta $\overrightarrow{BC}$, então estes dois ângulos são congruentes a $\measuredangle CBA$ (figura 4.2a); caso contrário $\measuredangle CBA$ e $\measuredangle PBA$ são suplementares, assim como $\measuredangle CBD$ e $\measuredangle PBD$, ou seja,

$$\begin{aligned} m(\measuredangle CBA) + m(\measuredangle PBA) &= 180 = m(\measuredangle CBD) + m(\measuredangle PBD) = \\ &= m(\measuredangle CBA) + m(\measuredangle PBD) \end{aligned}$$

donde $m(\measuredangle PBA) = m(\measuredangle PBD)$ (figura 4.2b).

Assim os triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle DBP$ são congruentes, pois satisfazem as condições do axioma IV.1 (o caso LAL de congruência de triângulos):

$$\left.\begin{array}{rcll} \overline{AB} & \equiv & \overline{DB} & \text{Lados congruentes, } \textit{por construção}; \\ \measuredangle ABE & \equiv & \measuredangle DBP & \text{Ângulos congruentes, } \textit{por construção}; \\ \overline{BP} & \equiv & \overline{BP} & \text{Lado comum.} \end{array}\right\} \text{(LAL)}$$

[1] De fato, se $P = B$, então $\measuredangle APD$ é raso, e portanto os ângulos $\measuredangle APC$ e $\measuredangle DPC$ são suplementares e congruentes, ou seja, são ângulos retos, caso que já foi discutido.

Explicitamente, temos as seguintes congruências além das listadas acima:

$$\overline{AP} \equiv \overline{DP},\ \measuredangle BAP \equiv \measuredangle BDP \text{ e } \measuredangle BPA \equiv \measuredangle BPD.$$

Interessa-nos, em particular, a última destas congruências: os ângulos $\measuredangle BPA$ e $\measuredangle BPD$ são congruentes e suplementares, e portanto retos. Logo podemos tomar $s = \overleftrightarrow{AP}$.

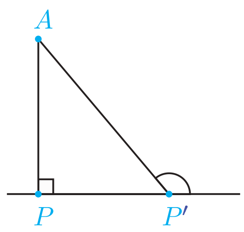


Figura 4.3

Agora provemos a unicidade. No primeiro caso, em que $A \in r$, a unicidade decorre do axioma III.3. No segundo caso, em que $A \notin r$, decorre do teorema do ângulo externo (teorema 3.8). De fato, tracemos por A uma outra reta concorrente com r em um ponto P' distinto de P, formando o triângulo $\triangle APP'$. Como $\measuredangle APP'$ é reto, os ângulos externos a este triângulo no vértice P' são obtusos pelo Teorema do Ângulo Externo, logo $m(\measuredangle AP'P) < 90$, e portanto não pode ser reto (veja figura 4.3). $\square$

Problema 4.1. Por que, na demonstração acima, é possível escolher D tal que $\overline{BD} \equiv \overline{BA}$?

Definição 4.3. Seguindo as notações na demonstração do teorema 4.2, dizemos que o ponto P é o *pé* da perpendicular a r passando por A, podendo ser $A = P$.

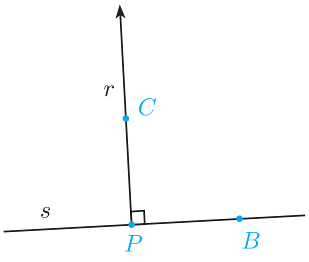


Figura 4.4 - Definição 4.4

Podemos estender a definição de perpendicularismo para segmentos e semirretas. Por exemplo, veja a definição abaixo:

Definição 4.4. Dizemos que uma semirreta $\overrightarrow{r}$ é perpendicular a uma reta s se $\overrightarrow{r}$ e s se encontram em um ponto P e tal que se $B \in s$ e $C \in \overrightarrow{r}$ são pontos diferentes de P então $\measuredangle BPC$ é reto. Denotamos esta situação por $\overrightarrow{r} \perp s$.

Problema 4.2. Escreva definições para as seguintes situações:

(a) Segmento perpendicular a reta.

(b) Segmento perpendicular a segmento.

(c) Segmento perpendicular a semirreta.

(d) Semirreta perpendicular a semirreta.

4.3 As desigualdades triangulares

Em [4] vocês estudaram algumas desigualdades entre elementos de triângulos (vejam na página 53 daquele livro). Vamos revisá-las nesta seção.

O primeiro resultado sobre o assunto demonstrado em [4] foi o seguinte (proposição 4.1, na página 54):

Teorema 4.5. *Se um triângulo não é isósceles, então ao lado de maior medida se opõe o ângulo de maior medida.*

O enunciado acima quer dizer o seguinte: se $\triangle ABC$ é um triângulo que não é isósceles, então um de seus lados tem medida maior que a dos outros. Assim se, por exemplo, $AB > AC$, o teorema nos diz que $m(\measuredangle C) > m(\measuredangle B)$.

Problema 4.3. Leia a demonstração da proposição 4.1 de [4] e a reescreva com as notações e desigualdades que adotamos no parágrafo anterior.

Problema 4.4. Verifique se o seguinte enunciado é verdadeiro: *se* $\triangle ABC$ *é tal que* $AB \geqslant AC$ *então* $m(\measuredangle C) \geqslant m(\measuredangle B)$.

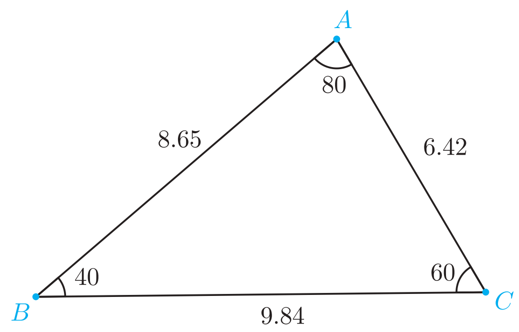


Figura 4.5

Exemplo 4.1. Na figura 4.5 representamos um triângulo onde

$$BC > AB > AC,$$

e o leitor pode ver que

$$m(\measuredangle A) > m(\measuredangle C) > m(\measuredangle B).$$

◁

A recíproca deste teorema também é verdadeira, isto é,

Corolário 4.6. *Se um triângulo não é isósceles, então ao ângulo de maior medida se opõe o lado de maior medida.*

Demonstração. Este corolário foi apresentado em [4] como a proposição 4.2. Sua demonstração é uma aplicação direta do teorema anterior.

Para fixar ideias, tomemos $\triangle ABC$ um triângulo com

$$m(\measuredangle A) > m(\measuredangle B).$$

Queremos provar que $BC > AC$. Suponha que isto seja falso, ou seja, que $BC \leqslant AC$. Então pelo teorema 4.5 temos que $m(\measuredangle A) \leqslant m(\measuredangle B)$, contrariando nossa hipótese. Assim, como o que levou a esta contradição foi supor que $BC \leqslant AC$, então esta suposição é falsa, e portanto $BC > AC$, como queríamos provar. □

Exemplo 4.2. Na figura 4.5 o leitor pode verificar a proposição acima. ◁

Problema 4.5. Verifique se o seguinte enunciado é verdadeiro: *se* $\triangle ABC$ *é tal que* $m(\measuredangle A) \geqslant m(\measuredangle B)$ *então* $BC \geqslant AC$.

Estes resultados que apresentamos sobre medidas de ângulos e de lados de um triângulo nos permitem provar um dos teoremas mais importantes da geometria, conhecido como *Teorema da Desigualdade Triangular*. Vocês já estudaram este teorema em [4], página 56.

Teorema 4.7 (Desigualdade Triangular)**.** *Em todo triângulo a soma dos comprimentos de dois lados é maior que o comprimento do terceiro lado.*

Problema 4.6. Reveja a demonstração do teorema acima em [4].

Problema 4.7. Existe triângulo cujos lados medem 5, 8 e 16? Por quê?

No corolário a seguir estabelecemos propriedades necessárias para a existência de um triângulo $\triangle ABC$ em forma de desigualdades, ou seja, são condições sem as quais um triângulo de lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ não pode existir.

Corolário 4.8. *Em qualquer triângulo* $\triangle ABC$ *valem as seguintes desigualdades:*

(*a*) $|AB - AC| < BC < AB + AC$;

(*b*) $|AB - BC| < AC < AB + BC$;

(*c*) $|AC - BC| < AB < AC + BC$;

Demonstração. A prova destas desigualdades é feita através de simples manipulações algébricas utilizando o teorema 4.7. Por exemplo, para demonstrar (*a*) observamos primeiro que, pelo Teorema da Desigualdade Triangular,

$$BC < AB + AC \tag{4.1}$$
$$AB < BC + AC \tag{4.2}$$
$$AC < BC + AB \tag{4.3}$$

Da segunda e terceira desigualdades acima concluímos que

$$BC > AB - AC \text{ e } BC > AC - AB$$

donde $BC > |AB - AC|$. Juntando esta nova desigualdade com a desigualdade (4.1) obtemos (*a*). As outras desigualdades são demonstradas de maneira análoga, e fica como exercício. □

Em outras palavras, o corolário acima nos diz que a medida de um lado de um triângulo é maior do que a diferença e menor do que a soma dos outros dois. Em particular, se temos três medidas que não respeitam estas relações, então não pode existir um triângulo cujos lados tenham estas medidas.

Problema 4.8. Verifique no triângulo da figura 4.5 as desigualdades do corolário 4.8.

Problema 4.9. Prove as desigualdades (b) e (c) do corolário acima.

4.4 Triângulos retângulos

Vamos apresentar agora um triângulo muito especial.

Definição 4.9. Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado de triângulo *retângulo*.

Se $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A dizemos que $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo *reto em* A.

Os segmentos sobre os lados do ângulo reto de um triângulo retângulo são chamados de *catetos*, e o lado oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa*.

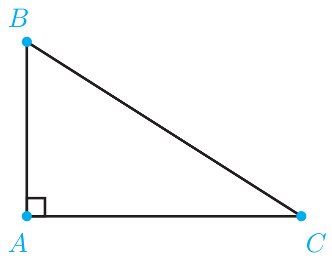


Figura 4.6 - Triângulos retângulos em *A*

Na figura 4.6 representamos um triângulo retângulo em A. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os catetos, e $\overline{BC}$ é a hipotenusa do triângulo. Ainda nesta figura percebemos, visualmente, que a hipotenusa é maior que os dois catetos. Isto é verdade sempre, e é uma consequência do corolário 4.6:

Proposição 4.10. *Em um triângulo retângulo o comprimento da hipotenusa é maior do que o comprimento dos dois catetos.*

Demonstração. Consideremos o triângulo $\triangle ABC$ retângulo em A. Garantimos, pelo problema 3.8, que os ângulos $\measuredangle B$ e $\measuredangle C$ do triângulo são agudos. Em particular, o ângulo $\measuredangle A$ é o ângulo de maior medida do triângulo. Logo, pelo corolário 4.6, temos que $BC > AB$ e $BC > AC$, como queríamos provar. $\square$

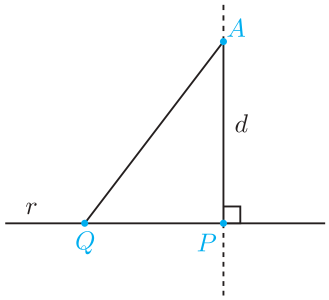


Figura 4.7 - Distância de ponto a reta

Agora podemos dizer o que é a distância de um ponto a uma reta – conceito que vocês já viram no curso de Geometria Analítica.

Observem a figura 4.7. A reta $\overleftrightarrow{AP}$ é perpendicular à reta r, e se Q é um ponto qualquer de r, então $AQ \geqslant AP$ (pela proposição 4.10). Assim o ponto de r cuja distância a A é a menor possível é o ponto P que, na situação ilustrada, é o pé da perpendicular a r passando por A. Então a definição seguinte faz sentido.

Definição 4.11. Definimos a *distância* entre um ponto A e uma reta r como o número $\operatorname{dist}(A, r)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) se $A \in r$ então $\operatorname{dist}(A, r) = 0$;

(b) se $A \notin r$ então $\operatorname{dist}(A, r) = AP$, onde P é o pé da reta perpendicular a r passando por A.

Terminamos esta aula com uma observação sobre algumas nomenclaturas. Nas proposições desta aula usamos diversas vezes expressões do tipo "o lado de maior medida", "o ângulo de maior medida", etc. Ficar repetindo isto é tedioso e desnecessário. Para simplificar podemos definir o seguinte:

Definição 4.12. Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, se $AB < CD$ então diremos que o segmento $\overline{AB}$ é *menor* do que o segmento $\overline{CD}$, denotado por $\overline{AB} < \overline{CD}$. Analogamente, se $m(\measuredangle BAC) < m(\measuredangle DEF)$ então diremos que o ângulo $\measuredangle BAC$ é *menor* do que o ângulo $\measuredangle DEF$, denotando esta relação por $\measuredangle BAC < \measuredangle DEF$.

Problema 4.10. Reescreva os enunciados dos resultados demonstrados nesta aula usando a nomenclatura estabelecida na definição acima.

4.5 Exercícios

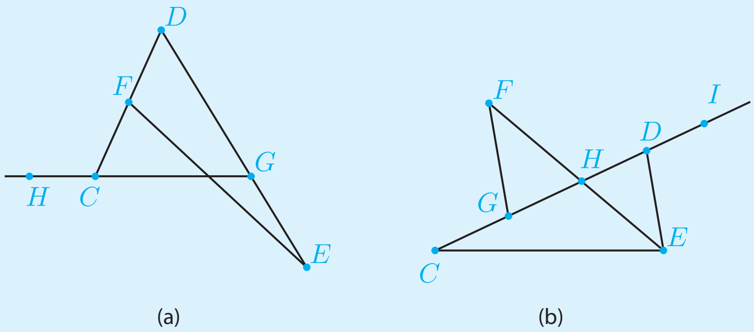


Figura 4.8 - Exercícios 4.1 e 4.2

Para vários dos dois exercícios a seguir você precisará do Teorema do Ângulo Externo, visto na aula anterior. É uma boa hora para relê-lo!

4.1. Na figura 4.8a prove que $\measuredangle DCH > \measuredangle E$.

4.2. Na figura 4.8b $\overrightarrow{EF}$ é bissetriz de $\measuredangle DEC$.

(a) Prove que $\measuredangle FGC > \measuredangle FEC$.

(b) Prove que se $\measuredangle FGH \equiv \measuredangle EDH$ então $\measuredangle EDI > \measuredangle F$.

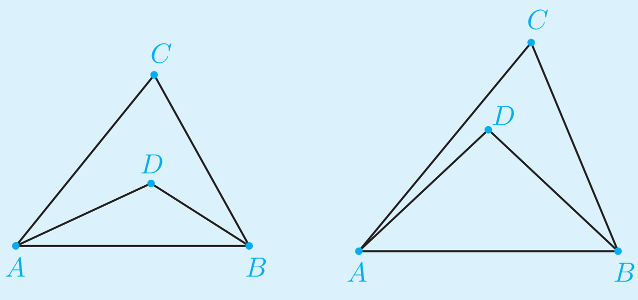


Figura 4.9 - Exercícios 4.3 e 4.4

4.3. Na figura 4.9a tem-se que $\measuredangle DAB < \measuredangle DBA$ e $\measuredangle DAC < \measuredangle DBC$. Prove que $\measuredangle CAB < \measuredangle CBA$.

4.4. Na figura 4.9b tem-se que $\overline{AD} \equiv \overline{BD}$ e $AC > BC$. Prove que $\measuredangle DAC < \measuredangle DBC$

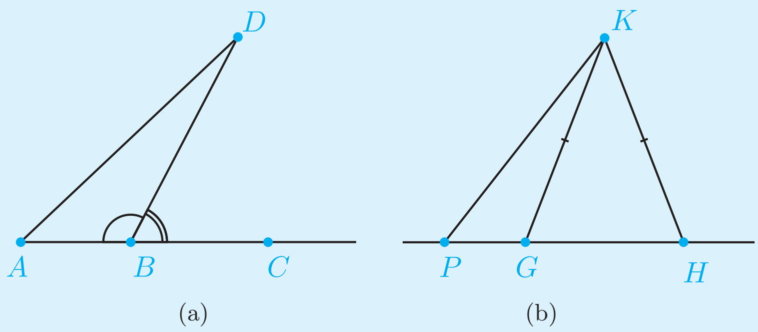


Figura 4.10 - Exercícios 4.5 e 4.6

4.5. Na figura 4.10a tem-se que $\measuredangle ABD > \measuredangle DBC$. Prove que $AD > BD$. (Sugestão: verifique primeiro que $\measuredangle A < \measuredangle DBC$.)

4.6. Na figura 4.10b o triângulo $\triangle KGH$ é isósceles com base $\overline{GH}$. Seja $P \in \overleftrightarrow{GH}$ um ponto tal que $P - G - H$.

(a) Prove que $\measuredangle KGH > \measuredangle KPH$. Conclua que $\measuredangle KPH < \measuredangle KHG$.

(b) Prove que $\overline{PK} > \overline{KH}$.

(c) Se fosse $G - H - P$ como você poderia comparar $\overline{PK}$ com $\overline{KH}$?

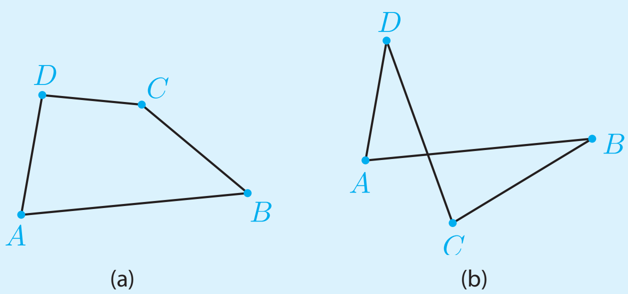


Figura 4.11 - Exercício 4.7

4.7. Na figura 4.11a prove que $AB + BC + CD > AD$. Você pode fazer o mesmo na figura 4.11b?

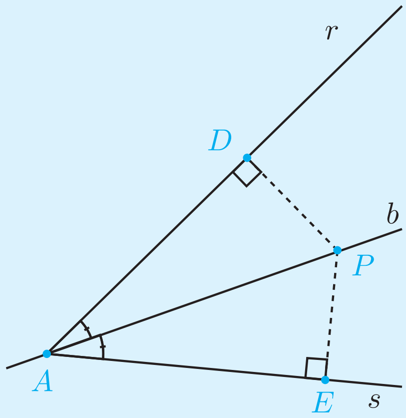


Figura 4.12 - Exercício 4.8

4.8. Provaremos o seguinte resultado: *todo ponto pertencente à bissetriz de um ângulo é equidistante dos lados do ângulo.*

Na figura 4.12 a reta b é a reta-bissetriz do ângulo $\measuredangle A$ de lados r e s, e $P \in b$ é um ponto qualquer da bissetriz de $\measuredangle A$. Temos que

$$\mathrm{dist}(P, s) = PE \quad \text{e} \quad \mathrm{dist}(P, r) = PD.$$

Queremos provar que $PE = PD$. Para isto aplique o critério $\mathrm{LAA_o}$ de congruência de triângulos que foi visto no exercício 3.9 para demonstrar que $\triangle ADP \equiv \triangle AEP$ e conclua o desejado.

5 Paralelismo

AULA 5: PARALELISMO

OBJETIVOS: Introduzir o conceito de paralelismo e apresentar o “axioma das paralelas” (axioma V), peça fundamental da geometria euclidiana. Várias consequências do axioma V são apresentadas.

5.1 Introdução

Nesta aula introduzimos, finalmente, o conceito de *retas paralelas*, que você já viu em [4]. Apresentamos o nosso último axioma fundamental, o famoso *axioma das paralelas* que garante a unicidade retas paralelas em certas condições. Em seguida utilizaremos a teoria de paralelismo em algumas aplicações.

5.2 Existência de retas paralelas

O leitor deve ter percebido que até agora não falamos de retas paralelas, assunto muito importante em geometria. Mas nunca se perde tempo por esperar a hora certa de abordar algum tema... Mostraremos nesta seção, como mais uma aplicação do Teorema do Ângulo Externo, que existem retas paralelas. Mas, primeiro, precisamos de uma definição.

Definição 5.1. Duas retas r e s são *paralelas* se r e s não possuem pontos em comum, ou seja, $r \cap s = \varnothing$ como conjuntos. Denotaremos esta relação por $r \parallel s$.

O teorema que vem a seguir foi apresentado em [4] na página 58, sob uma outra roupagem. Ele nos garante que por um ponto exterior a uma reta passa uma reta paralela a ela. Note que é um teorema de *existência*, nada afirmando em relação a *unicidade*. Voltaremos a este assunto de unicidade de paralelas mais adiante.

Teorema 5.2. *Dados uma reta r e um ponto P fora de r (isto é, $P \notin r$), então existe uma reta s passando por P e paralela a r.*

Demonstração. Seja t a perpendicular a r passando por P e tomemos s perpendicular a t, também passando por P. Vamos mostrar que $s \parallel r$.

De fato, se supormos que r e s não são paralelas, então elas se encontram em um ponto G. Assim, (usando as notações da figura 5.1), vemos que $\measuredangle GPT$ e $\measuredangle GTP$ são ângulos retos, onde T é o ponto comum a t e r. Logo o ângulo $\measuredangle HPT$ (onde H é um ponto de s tal que $H - P - G$) é externo ao triângulo $\triangle GPT$ e também é reto, ou seja,

$$\measuredangle HPT \equiv \measuredangle GTP.$$

Mas esta última afirmativa contradiz o Teorema do Ângulo Externo (teorema 3.8). Consequentemente as retas r e s não podem possuir um ponto em comum, donde devem ser paralelas. $\square$

Problema 5.1. Por que, na demonstração acima, a congruência dos ângulos $\measuredangle HPT$ e $\measuredangle GTP$ contradiz o Teorema do Ângulo Externo?

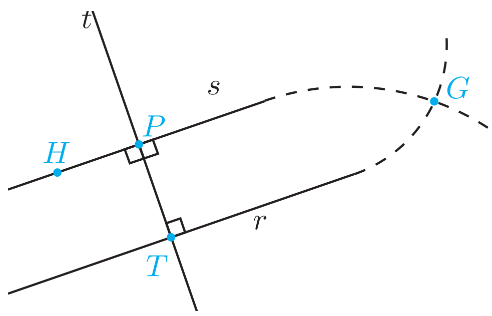


Figura 5.1

Problema 5.2. O enunciado do teorema 5.2 pode ser reescrito de outra forma: *Se duas retas distintas são perpendiculares a uma terceira, então são paralelas entre si.* Demonstre este resultado utilizando o teorema 5.2. (Sugestão: veja como isto foi feito em [4]).

5.3 Condições de paralelismo

O teorema 5.2 é uma aplicação de um critério mais geral de paralelismo, que foi apresentado em [4], na proposição 4.3, página 58. Mas, para continuarmos, vamos rever algumas nomenclaturas.

Definição 5.3. Dizemos que uma reta que corta duas outras em pontos distintos é uma *transversal* a estas duas retas. Em geral, se uma reta corta um conjunto de retas em pontos distintos, esta reta é transversal a este conjunto. Dizemos ainda que as retas do conjunto são transversais à reta que as corta.

Se temos duas retas distintas r e s no plano transversais a uma terceira reta t, então vemos que são formados 8 ângulos, quatro por r e t, e outros quatro por s e t. Certos pares especiais dentre estes ângulos recebem, tradicionalmente, nomes especiais.

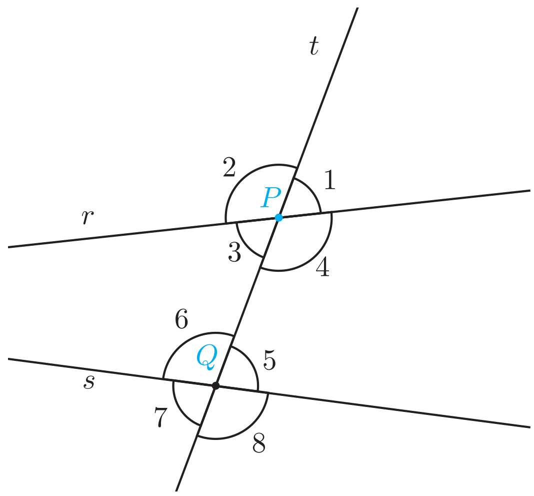


Figura 5.2

Definição 5.4. Nas notações da figura 5.2 dizemos que:

(a) Os pares de ângulos $\measuredangle 4$ e $\measuredangle 6$ são *alternos internos*, assim como os pares de ângulos $\measuredangle 3$ e $\measuredangle 5$.

(b) Os pares de ângulos $\measuredangle 1$ e $\measuredangle 7$ são *alternos externos*, assim como os pares de ângulos $\measuredangle 2$ e $\measuredangle 8$.

(c) Os pares de ângulos $\measuredangle 1$ e $\measuredangle 5$ são *correspondentes*, assim como os pares de ângulos $\measuredangle 4$ e $\measuredangle 8$, $\measuredangle 2$ e $\measuredangle 6$, e $\measuredangle 3$ e $\measuredangle 7$.

(d) Os pares de ângulos $\measuredangle 4$ e $\measuredangle 5$ são *colaterais internos*, assim como os pares de ângulos $\measuredangle 3$ e $\measuredangle 6$.

(e) Os pares de ângulos $\measuredangle 1$ e $\measuredangle 8$ são *colaterais externos*, assim como os pares de ângulos $\measuredangle 2$ e $\measuredangle 7$.

Problema 5.3. Usando a notação da figura 5.2 mostre que se $\measuredangle 4 \equiv \measuredangle 6$ então outros pares de ângulos caracterizados na definição 5.4 são congruentes entre si, isto é, $\measuredangle 5 \equiv \measuredangle 3$, $\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 7$, $\measuredangle 2 \equiv \measuredangle 8$, etc.

Enuncie resultados análogos para os outros pares de ângulos. Por exemplo: *se $\measuredangle 4$ e $\measuredangle 5$ são suplementares então $\measuredangle 3$ e $\measuredangle 6$ também o são e $\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 5$, etc.*

Agora podemos enunciar os nossos critérios de paralelismo. Começamos com o teorema seguinte, que é uma transcrição da proposição 4.3 de [4]:

Teorema 5.5. *Sejam dadas duas retas r e s, interceptadas por uma transversal. Se dois ângulos correspondentes são congruentes, então as retas r e s são paralelas.*

Problema 5.4. Reescreva a demonstração do teorema acima apresentada em [4], na página 57, com as notações da figura 5.3. Por exemplo, suponha que $\measuredangle 1 \equiv \measuredangle 5$ e prove que $r \parallel s$.

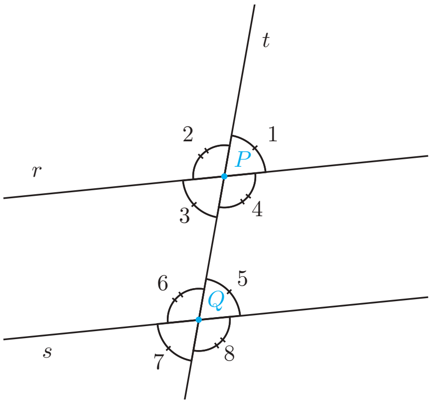


Figura 5.3 - Critérios de paralelismo

Observe que, pelo problema 5.3, se dois ângulos correspondentes são congruentes entre si, então todos os outros pares de ângulos caracterizados na definição 5.4 também o são. Assim podemos enunciar critérios análogos ao estabelecido no teorema 5.5 usando outros pares especiais de ângulos. Veja os dois corolários a seguir.

Corolário 5.6. *Se r e s são duas retas transversais a uma reta t formando dois ângulos alternos internos congruentes, então são paralelas.*

Corolário 5.7. *Se r e s são duas retas transversais a uma reta t formando dois ângulos alternos externos congruentes, então são paralelas.*

Problema 5.5. Demonstre os corolários 5.6 e 5.7.

Um pouco diferente é o critério seguinte:

Corolário 5.8. *Se r e s são duas retas transversais a uma reta t formando dois ângulos colaterais internos suplementares, então são paralelas.*

DEMONSTRAÇÃO. Usando as notações da figura 5.3, suponhamos que os ângulos colaterais internos $\measuredangle 4$ e $\measuredangle 5$ sejam suplementares, ou seja,

$$m(\measuredangle 4) + m(\measuredangle 5) = 180.$$

Como $m(\measuredangle 4) + m(\measuredangle 1) = 180$ deduzimos que $m(\measuredangle 5) = m(\measuredangle 1)$, ou seja, os ângulos correspondentes $\measuredangle 5$ e $\measuredangle 1$ são congruentes donde, pelo teorema 5.5, as retas r e s são paralelas. Procedemos de maneira análoga com os outros pares de ângulos colaterais internos. □

Estas condições que vimos até agora nos dizem que "se algo acontece, então certas retas são paralelas". Bem, agora podemos nos perguntar o seguinte: "se certas retas são paralelas, então o que acontece?" Por exemplo, se duas retas transversais a uma terceira são paralelas, será que seus ângulos correspondentes são congruentes? A resposta a esta última pergunta, e a outras análogas, não é evidente, e nem fácil. Neste ponto é que entra a questão da unicidade de retas paralelas, assunto da próxima seção.

5.4 Axiomas: grupo V, Axioma das paralelas

Como dissemos antes, a unicidade de retas paralelas não é uma coisa óbvia. Já nos *Elementos* de Euclides este problema foi considerado. Euclides estabelece um postulado (o quinto em sua lista) onde se garante a unicidade de uma reta paralela a outra passando por um ponto externo a esta. Este postulado foi alvo de discussões e questionamentos por mais de 2000 anos, desde sua primeira formulação registrada. Muitos matemáticos acreditavam que a afirmação não passava de uma proposição passível de demonstração, a qual não havia sido ainda descoberta. No século XIX, no entanto, dois matemáticos formularam, de forma independente, uma teoria curiosa: se, ao invés de admitir a unicidade, permitir a existência de mais de uma paralela nas mesmas condições, o que aconteceria? Ambos, o russo Nicolai Lobachevsky (1792–1856) e o húngaro János Bolyai (1802-1860), chegaram à conclusão que, em essência, nada de "errado" poderia acontecer: simplesmente estavam diante de uma outra geometria, com vida própria e independente da geometria proposta por Euclides. Esta geometria é conhecida hoje como *Geometria Hiperbólica* (*Plana*)[1], na qual valem todos os axiomas até aqui estabelecidos, exceto o quinto, que enunciamos a seguir:

[1]Estamos tratando neste livro somente de geometria plana, daí nossa ênfase entre parêntesis. Para tratar de geometria no espaço precisamos acrescentar alguns axiomas em nosso sistema.

Axioma V. Dada uma reta, por cada ponto que não lhe pertencente passa, no máximo, uma reta paralela a ela.

A geometria que obtemos baseada num sistema com os cinco grupos de axiomas enunciados é chamada de *Geometria Euclidiana Plana* e dizemos que o objeto que chamamos de plano, quando satisfaz os cinco grupos de axiomas da Geometria Euclidiana Plana, é um *plano euclidiano*[2].

Observação 5.1. Se esquecermos o quinto axioma, isto é, se não o consideramos nem o negamos, obtemos uma geometria que se convencionou chamar de *Geometria Neutra*[3]. Por exemplo, todos os resultados que apresentamos até aqui são resultados da Geometria Neutra, pois não dependem do axioma V.

De agora em diante só trataremos da geometria euclidiana plana, e portanto consideraremos válidos todos os axiomas enunciados até o momento. Mostraremos a seguir algumas propriedades que são bem conhecidas, mas que só valem no plano euclidiano. A primeira é a seguinte (compare com o enunciado do axioma das paralelas apresentado em [4], página 58):

Teorema 5.9. *Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela a ela.*

Demonstração. Observe que, pelo teorema 5.2 garantimos a existência da reta paralela. Logo existe *pelo menos* uma paralela a uma dada reta passando por um ponto fora dela. Agora, como o axioma V diz que existe *no máximo* uma reta paralela a uma reta dada passando por um ponto fora dela, concluímos que a reta paralela existente é única. □

Outra propriedade importante é a transitividade do paralelismo.

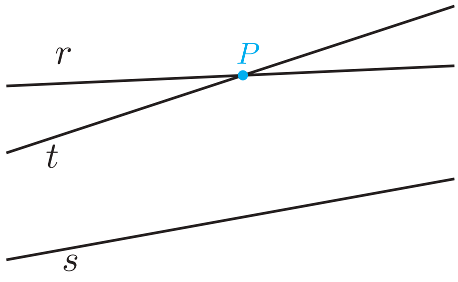


Figura 5.4

Teorema 5.10. *Dadas três retas r, s e t tais que $r \parallel s$ e $s \parallel t$, então $r \parallel t$.*

Demonstração. Vamos supor, por absurdo, que r e t não sejam paralelas. Então r e t possuem um ponto P em comum. Ora, neste caso teríamos duas retas paralelas a s passando por P, o que contraria a unicidade estabelecida no axioma V. Logo r e t não podem ter um ponto em comum e, portanto, são paralelas (veja figura 5.4). □

[2]Analogamente, na geometria hiperbólica dizemos que o plano é um *plano hiperbólico*

[3]Esta geometria neutra também é chamada de *Geometria Absoluta*, mas esta nomenclatura,por não ser muito adequada, está caindo em desuso.

Uma consequência direta deste teorema é o corolário abaixo, cuja demonstração deixamos como exercício.

Corolário 5.11. *Sejam r e s duas retas paralelas entre si. Se uma reta t corta r, então t também corta s.*

Problema 5.6. Demonstre o corolário acima.

As recíprocas do teorema 5.5 e de seus corolários também são verdadeiras, se assumirmos o axioma V. No livro [4] vocês encontram este fato no **Teorema das Paralelas**, na página 59, que transcrevemos aqui:

Teorema 5.12. *Se as retas r e s são paralelas e t é uma transversal a elas, então os ângulos correspondentes (ou os alternos internos) são congruentes.*

Problema 5.7. Estude a demonstração do teorema acima apresentada em [4].

Problema 5.8. Enuncie as recíprocas dos corolários 5.7 e 5.8.

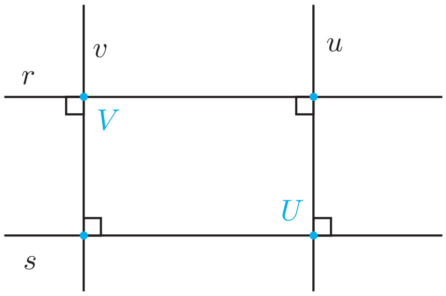


Figura 5.5

Corolário 5.13. *Sejam r e s duas retas paralelas entre si. Sejam u e v outras duas retas tais que $u \perp r$ e $v \perp s$. Então $u \parallel v$.*

Demonstração. Pelo corolário 5.11 temos que u encontra s em algum ponto U, e pelo teorema 5.12 sabemos que $u \perp s$ em U (por quê?). Analogamente, v encontra r em um ponto V e $v \perp r$ neste ponto. Ora, u e v são, portanto, perpendiculares a uma mesma reta (r ou s, podemos escolher! – veja a figura 5.5) donde, pelo teorema 5.5, concluímos que $u \parallel v$ (por quê?). $\square$

Problema 5.9. Responda aos "por quês" da demonstração acima.

Vejamos mais uma consequência do teorema 5.12, que nos será útil na próxima aula.

Corolário 5.14. *Em um ângulo não trivial $\measuredangle BAC$ se $r \perp \overrightarrow{AB}$ e $s \perp \overrightarrow{AC}$ então r e s são concorrentes.*

Demonstração. Acompanhe na figura 5.6. Suponha, por absurdo, que r e s não sejam concorrentes, ou seja, que $r \parallel s$. Então, pelo corolário 5.13 teríamos que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, o que é um absurdo. Logo r e s precisam ser concorrentes, como queríamos demonstrar. $\square$

Uma das propriedades mais conhecidas e importantes da Geometria Euclidiana, consequência do axioma V, é o resultado seguinte, que foi apresentado em [4], página 59:

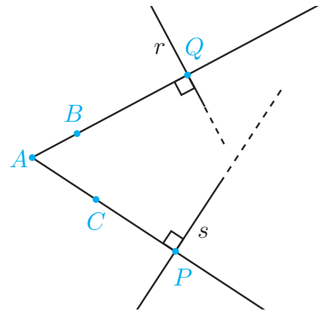


Figura 5.6

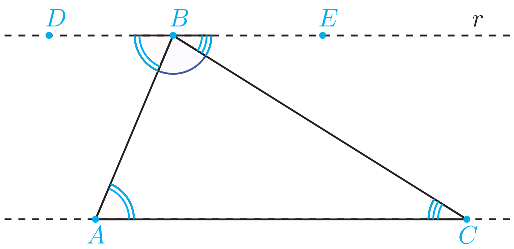


Figura 5.7

Teorema 5.15. *Em um triângulo qualquer a soma das medidas de seus ângulos internos é* 180.

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer. Seja r uma reta passando por B e paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ (veja a figura 5.7). Sejam D e E pontos de r tais que $D - B - E$ e E esteja do mesmo lado do plano que C em relação a $\overleftrightarrow{BA}$. Como $r \parallel \overleftrightarrow{AC}$, pelo teorema 5.12 temos que os ângulos alternos internos $\measuredangle BCA$ e $\measuredangle CBE$ são congruentes, assim como os ângulos $\measuredangle BAC$ e $\measuredangle ABD$, pelo mesmo motivo. Logo

$$m(\measuredangle A) + m(\measuredangle B) + m(\measuredangle C) =$$

$$= m(\measuredangle ABD) + m(\measuredangle ABC) + m(\measuredangle CBE) = 180,$$

como queríamos provar. $\square$

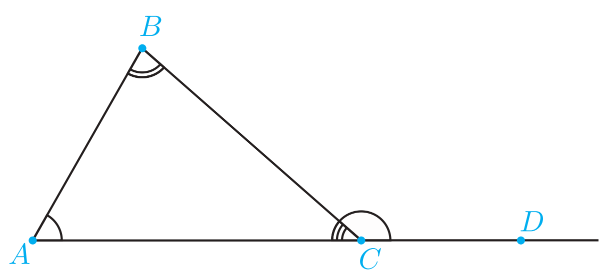


Figura 5.8

Problema 5.10. Se um triângulo retângulo é isósceles, quais as medidas de seus ângulos que não são retos?

Problema 5.11. Prove que a medida de um ângulo externo a um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos que não lhe são adjacentes (veja a figura 5.8).

5.5 Paralelas como lugar geométrico

Nosso próximo passo será caracterizar retas paralelas usando o conceito de distância de ponto a reta. Primeiro mostraremos o teorema abaixo, que nos permitirá definir o conceito de distância entre retas.

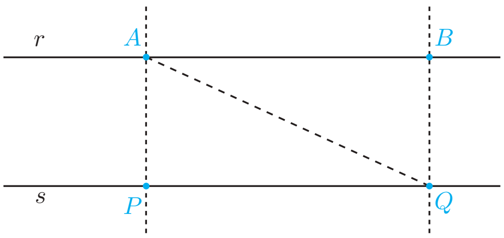


Figura 5.9

Teorema 5.16. *Sejam r e s retas paralelas entre si. Então todos os pontos de r são equidistantes de s, isto é, se A e B são pontos de r,*

$$\operatorname{dist}(A, s) = \operatorname{dist}(B, s).$$

Demonstração. Sejam A e B dois pontos de r Tracemos por A a reta $\overleftrightarrow{AP}$ perpendicular a s em P, e por B a reta $\overleftrightarrow{BQ}$ perpendicular a s em Q (veja a figura 5.9). Queremos provar que $AP = BQ$.

Como $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BQ}$ são perpendiculares a s, então são paralelas entre si (por quê?). Logo

$$\measuredangle PAQ \equiv \measuredangle AQB \quad \text{e} \quad \measuredangle AQP \equiv \measuredangle QAB.$$

Assim $\triangle PAQ \equiv \triangle BQA$ pelo critério ALA (por quê?). Em particular

$$\overline{AP} \equiv \overline{BQ},$$

como queríamos provar. □

Problema 5.12. Responda aos "por quês" da demonstração acima.

Definição 5.17. A *distância* entre duas retas r e s é o número $\operatorname{dist}(r, s)$ definido da seguinte maneira:

(i) $\operatorname{dist}(r, s) = 0$ se r e s são concorrentes;

(ii) $\operatorname{dist}(r, s) = \operatorname{dist}(A, s)$ para algum ponto $A \in r$, se r e s são paralelas.

A recíproca do teorema 5.16 também é verdadeira, no seguinte sentido:

Teorema 5.18. *Sejam r e s duas retas paralelas entre si, e A um ponto do plano do mesmo lado que r em relação a s. Se* $\operatorname{dist}(A, s) = \operatorname{dist}(r, s)$ *então $A \in r$.*

Demonstração. Sejam A, r e s como no enunciado. Tracemos por A a reta $\overleftrightarrow{AP}$ perpendicular a s, com $P \in s$. Então $\overleftrightarrow{AP}$ corta r em algum ponto B (veja figura 5.10). Por hipótese temos que A e B pertencem à mesma semirreta com origem em P (pois estão do mesmo lado do plano) e que $AP = \operatorname{dist}(A, s) = \operatorname{dist}(r, s) = BP$. Logo $A = B$ (por quê?), ou seja, $A \in r$. □

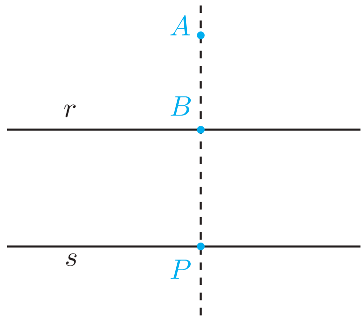


Figura 5.10

O que fizemos com os teoremas 5.16 e 5.18 foi simplesmente descrever uma reta paralela a outra de uma forma diferente, enfatizando uma propriedade geométrica particular – neste caso a distância entre ponto e reta. Em outras palavras, demonstramos que esta propriedade particular caracteriza completamente a paralela a uma reta passando por um ponto. Enfim, provamos o seguinte teorema:

Teorema 5.19. *Sejam r uma reta e $A \notin r$ um ponto. Então o* lugar geométrico *de todos os pontos do plano que estão o mesmo lado que A em relação a r e são equidistantes de r é a reta paralela a r passando por A.*

Problema 5.13. Reveja em [4] o conceito de lugar geométrico, na aula 8 à página 97.

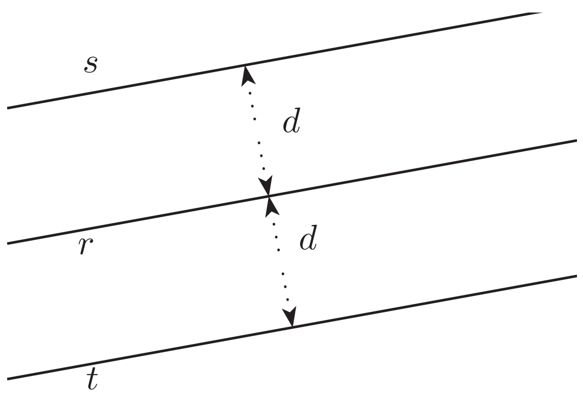


Figura 5.11 - Problema 5.14

Problema 5.14. Sejam r uma reta e d um número real positivo. Prove que o lugar geométrico de todos os pontos X tais que $\operatorname{dist}(X, r) = d$ é a união das duas retas s e t tais que:

(i) $s \parallel r$ e $t \parallel r$;

(ii) $\operatorname{dist}(s, r) = \operatorname{dist}(t, r) = d$

(iii) s e t estão em lados opostos do plano em relação a r.

5.6 Exercícios

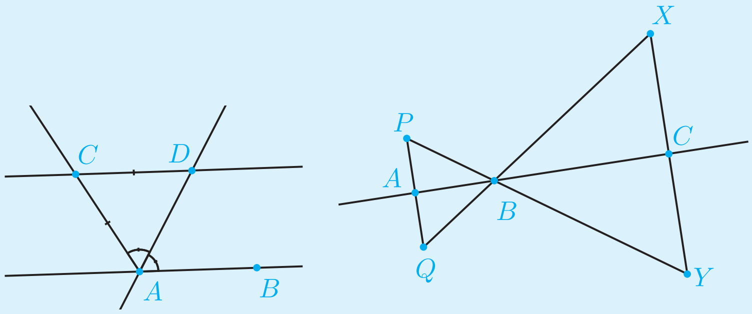
5.1. Neste exercício seguiremos as notações da figura 5.3. Complete as afirmativas abaixo:

(a) Se $r \parallel s$ então $m(\measuredangle 4) + m(\measuredangle 7) = ???$.

(b) Se $m(\measuredangle 5) = 100$ e $m(\measuredangle 3) = ???$ então $r \parallel s$.

(c) Se $m(\measuredangle 5) = 10$ e $m(\measuredangle 4) \neq ???$ então r e s não são paralelas.

(d) Se $r \parallel s$ e $m(\measuredangle 2) = 100$ então $m(\measuredangle 8) = ???$.



(a) (b)

Figura 5.12 - Exercícios 5.2 e 5.3

5.2. Na figura 5.12a tem-se que $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $\measuredangle CAB$ e $\overline{CA} \equiv \overline{CD}$. Prove que $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.

5.3. Na figura 5.12b os pontos A, B e C estão alinhados, $\overline{AP} \equiv \overline{AQ}$, $\overline{BP} \equiv \overline{BQ}$, $\overline{BX} \equiv \overline{BY}$ e $\overline{CX} \equiv \overline{CY}$. Demonstre que $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{XY}$.

5.4. Demonstre que uma reta paralela à base de um triângulo isósceles e que intercepta os outros dois lados do triângulo em pontos distintos determina outro triângulo isósceles.

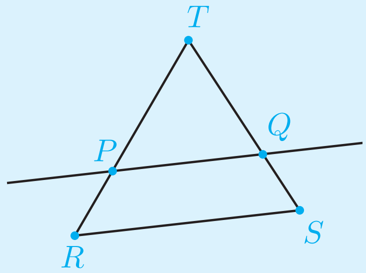


Figura 5.13 - Exercício 5.5

5.5. Na figura 5.13 $\triangle RST$ é isósceles com base $\overline{ST}$ e $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS}$. Prove que $\triangle PQT$ é isósceles.

5.6. Suponha que $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ se interceptam em E, com $A - E - C$ e $D - E - B$. Se $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ prove que E é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$. Faça um desenho da situação.

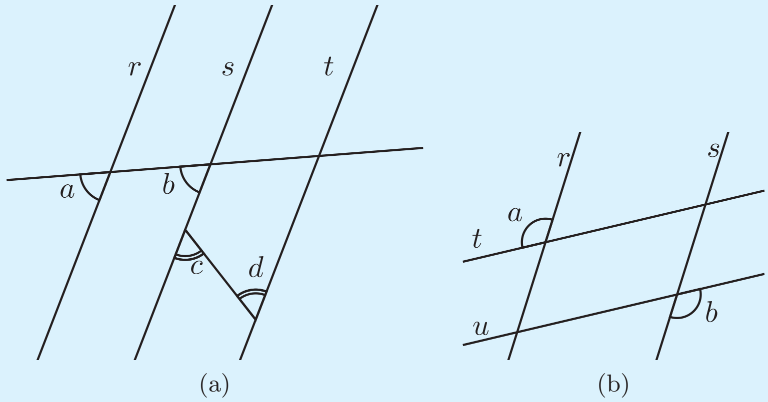


Figura 5.14 - Exercícios 5.7 e 5.8

5.7. Na figura 5.14a $\measuredangle c \equiv \measuredangle d$ e $\measuredangle a \equiv \measuredangle b$. Prove que $r \parallel t$.

5.8. Na figura 5.14b $r \parallel s$ e $t \parallel u$. Prove que $\measuredangle a \equiv \measuredangle b$.

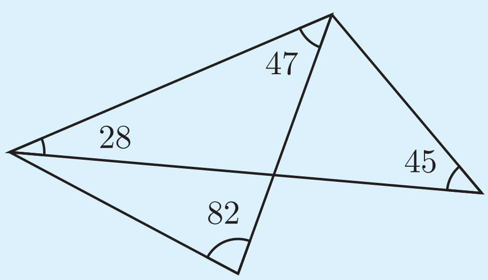


Figura 5.15 - Exercício 5.9

5.9. Na figura 5.15 os números indicam as medidas dos ângulos. Determine as medidas dos outros ângulos.

5.10. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle D \quad \text{e} \quad \measuredangle B \equiv \measuredangle E.$$

Com estes dados conclua se é possível ou não afirmar que:

(a) $\measuredangle C \equiv \measuredangle D$.

(b) $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$.

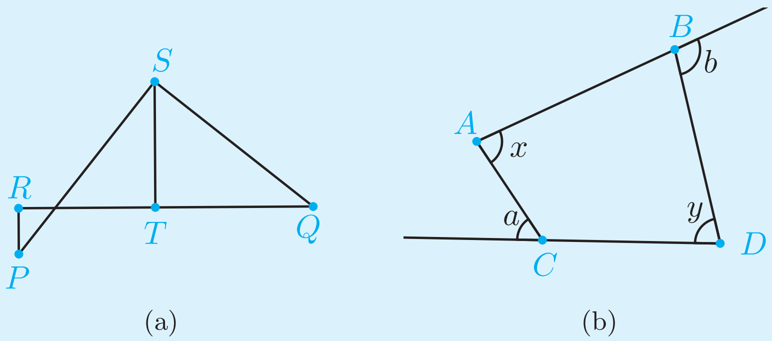


Figura 5.16 - Exercícios 5.11 e 5.12

5.11. Na figura 5.16a temos que $\overline{PR} \perp \overleftrightarrow{RQ}$, $\overline{ST} \perp \overleftrightarrow{RQ}$ e $\overline{SQ} \perp \overline{SP}$. Demonstre que $\measuredangle P \equiv \measuredangle Q$.

5.12. Na figura 5.16b demonstre que

$$m(\measuredangle a) + m(\measuredangle b) = m(\measuredangle x) + m(\measuredangle y).$$

(Sugestão: trace o segmento $\overline{AD}$ e trabalhe com os triângulos que aparecem.)

6

Circunferências e aplicações

AULA 6: CIRCUNFERÊNCIAS E APLICAÇÕES

OBJETIVOS: Introduzir os conceitos de circunferência, de tangência entre retas e circunferências e suas propriedades. Apresenta-se ainda um dos pontos notáveis de triângulos, o *circuncentro*. Ao final discute-se sobre a posição relativa de retas e circunferências no plano.

62.1 Introdução

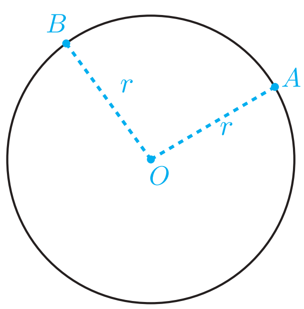
Nesta aula estudaremos conceitos, propriedades e nomenclaturas relativos a circunferências. Como aplicação apresentaremos condições necessárias e suficientes para a existência de triângulos, dadas as medidas de seus lados.

6.2 Definições e Conceitos Básicos

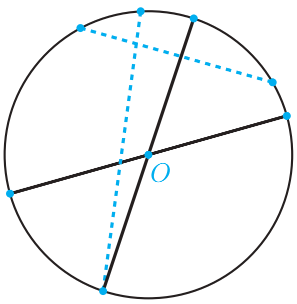
Definição 6.1. Sejam r um número real positivo e O um ponto do plano. O lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à distância r de O é a *circunferência* de *raio* r e *centro* O. Denotaremos esta circunferência por $\mathcal{C}(O, r)$.

Duas ou mais circunferências que possuem o mesmo centro são chamadas de *concêntricas*.

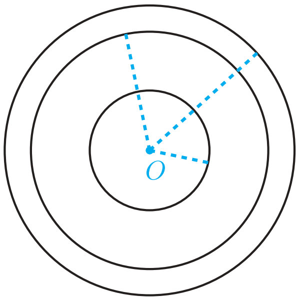
Duas circunferências que possuem o mesmo raio são circunferências *congruentes*.



(a) Raios de uma circunferência



(b) Cordas e diâmetros



(c) Circunferências concêntricas

Figura 6.1

Observação 6.1. Para cada ponto A da circunferência $\mathcal{C}(O,r)$ o comprimento do segmento $\overline{OA}$ é r. Costumamos também chamar este segmento de *raio*, ou seja quaisquer segmentos com um extremo em O e outro num ponto da circunferência é um *raio*. O significado da palavra *raio* utilizado fica esclarecido pelo contexto. Na figura 6.1a representamos dois raios da circunferência.

Definição 6.2. Um segmento cujos extremos são pontos de uma circunferência é uma *corda* desta circunferência. Uma corda que passa pelo centro da circunferência é um *diâmetro* da mesma.

Na figura 6.1b desenhamos algumas cordas de uma circunferência, sendo que as em linha cheia são diâmetros.

Observação 6.2. Se $\mathcal{C}(O,r)$ é uma circunferência de raio r, costuma-se dizer que o seu diâmetro é $2r$, ou seja, usa-se a palavra *diâmetro* para designar não só uma corda que passa pela origem, mas também o seu comprimento, que certamente é $2r$. Este uso é análogo ao uso da palavra *raio* que já foi comentado, e o significado de *diâmetro* ficará claro no contexto.

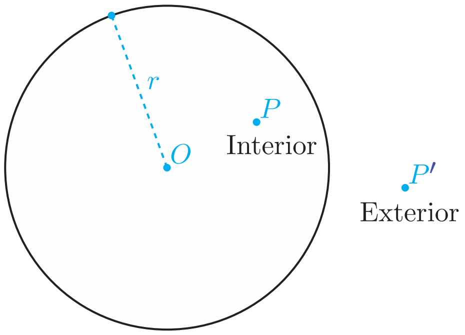


Figura 6.2 - Interior e exterior de uma circunferência

Definição 6.3. Dizemos que um ponto P é *interior* a uma circunferência $\mathcal{C}(O,r)$ se $OP < r$, e dizemos que é *exterior* se $OP > r$. O conjunto de todos os pontos interiores a uma circunferência é chamado de *interior* da circunferência, e reciprocamente, o conjuntos dos pontos exteriores a ela é chamado de *exterior* da circunferência. Se um ponto está no interior de uma circunferência dizemos também que está *dentro* da mesma, e reciprocamente, se o ponto está no exterior da circunferência, dizemos que está *fora* da mesma.

Observação 6.3. Nos textos didáticos é comum usar o termo *círculo* para designar um conjunto do plano formado por uma circunferência e seu interior.

Observe que pela definição o centro de uma circunferência está em seu interior.

Definição 6.4. Uma reta que que corta uma circunferência em mais de um ponto é uma reta *secante* ou simplesmente *secante* à circunferência Neste caso também dizemos que a reta e a circunferência são *secantes* entre si.

Analogamente, duas circunferências (distintas) que se cortam em mais de um ponto são chamadas de *secantes*.

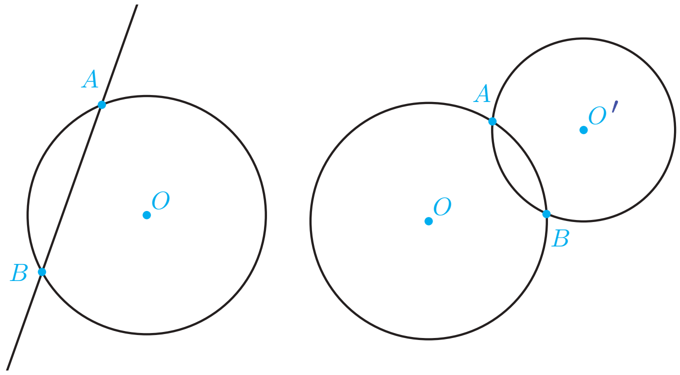
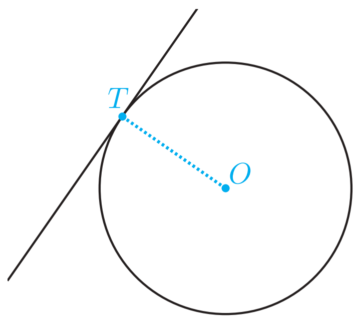
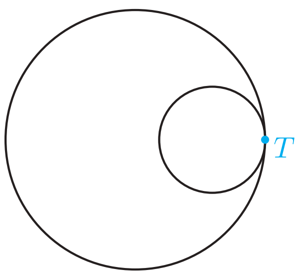


Figura 6.3

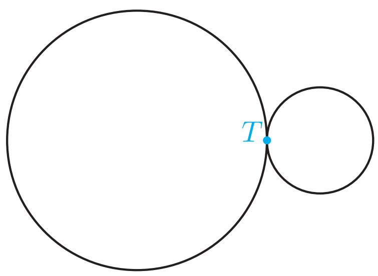
Na figura 6.3 representamos retas e circunferências secantes entre si. Veremos mais adiante que as situações desenhadas são realmente as únicas possibilidades.



(a) Reta tangente a circunferência



(b) Tangência interior



(c) Tangência exterior

Figura 6.4

Definição 6.5. Uma *reta tangente*, ou simplesmente uma *tangente* a uma circunferência é uma reta que possui exatamente um ponto em comum com a circunferência. Este ponto é chamado de *ponto de tangência* ou *ponto de contato*. Dizemos também que a reta e a circunferência são *tangentes* entre si no ponto de contato.

Analogamente, duas circunferências são *tangentes* se possuem exatamente um ponto em comum. O ponto em comum também é chamado de *ponto de tangência* ou de *contato*.

Nas figuras 6.4b e 6.4c representamos duas possibilidades de tangência entre circunferências. Na primeira uma das circunferências está inteiramente contida na região interior da outra, exceto pelo ponto de contato, e neste caso dizemos que são tangentes *interiormente*. Na segunda cada circunferência está inteiramente contida na região exterior à outra, exceto pelo ponto de contato, e dizemos que as circunferências são tangentes *exteriormente*.

6.3 Tangência entre retas e circunferências

As possíveis posições relativas entre retas e circunferências estão ilustradas na figura 6.5: em 6.5a representamos uma reta tangente a uma circunferência; em 6.5b uma reta e uma circunferência que não se encontram; e em 6.5c uma reta e uma circunferência secantes. Nesta seção estudaremos as condições de tangência entre retas e circunferências, e na seção 6.7 veremos que as posições ilustradas em 6.5 são, de fato as únicas possíveis.

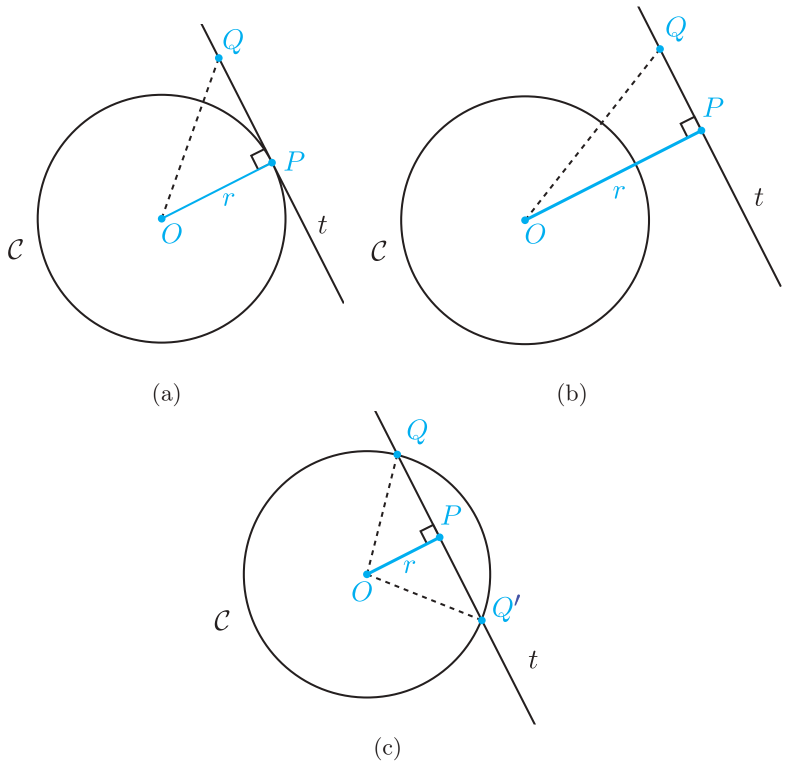


Figura 6.5

Em [4] vocês viram o teorema 7.2, na página 92, que trata das condições em que uma reta é tangente a uma uma circunferência. Apresentamos a seguir uma versão um pouco diferente daquele que teorema.

Teorema 6.6. *Uma reta t e uma circunferência $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ são tangentes entre si se e somente t encontra $\mathcal{C}$ em um ponto P tal que $\overline{OP} \perp t$.*

Demonstração. Se t e $\mathcal{C}$ não possuem pontos em comum, então não são tangentes, pois não há como satisfazer as condições do enunciado.

O caso em que t é tangente a $\mathcal{C}$ foi estudado em [4], como citado acima.

Finalmente, suponhamos que t e $\mathcal{C}$ não sejam tangentes, mas que possuam um ponto Q em comum (acompanhe na figura 6.5c). Queremos provar que $\overline{OQ}$ não é perpendicular a t. Ora, como estamos supondo que t e $\mathcal{C}$ não são tangentes, então deve existir um outro ponto Q' comum a ambas e distinto de Q. Em particular $\triangle OQQ'$ é um triângulo isósceles com base $\overline{QQ'}$ (por quê?). Seja P o ponto médio de $\overline{QQ'}$. Já vimos no exercício 3.5 que, nestas condições, $\overline{OP} \perp t$ (por quê?). Assim o triângulo $\triangle OPQ$ é retângulo em P, e $\overline{OQ}$ não pode ser perpendicular a t pois, como já sabemos, um triângulo não pode ter mais do que um ângulo reto. Com isto terminamos a demonstração. □

Problema 6.1. Todas as questões a seguir se referem à demonstração do teorema acima.

(a) Explique com suas palavras o que você entendeu do primeiro parágrafo da demonstração.

(b) Estude a demonstração do teorema 7.2 apresentado em [4] e complete o argumento do segundo parágrafo da demonstração.

(c) Responda a todos os "por quês" da demonstração.

6.4 Mediatriz de segmentos

Nesta seção trataremos de um lugar geométrico que já foi estudado em [4]: a *mediatriz* de um segmento:

Definição 6.7. A *mediatriz* de um segmento é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de seus extremos.

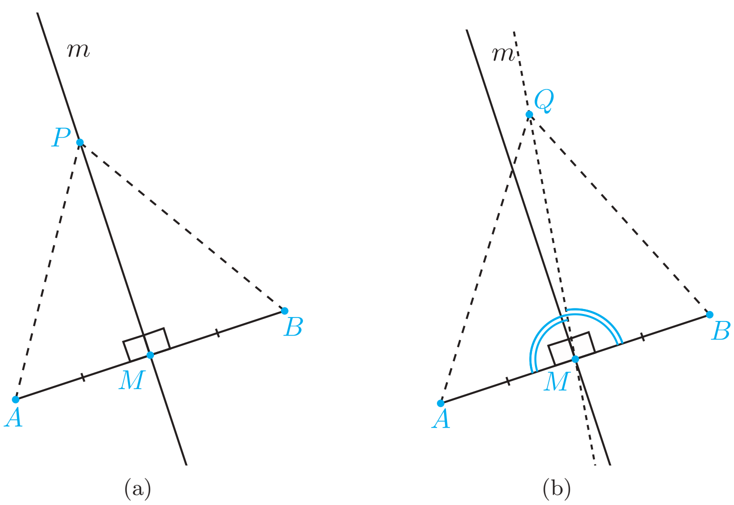


Figura 6.6

Pela definição de mediatriz vemos que o ponto médio do segmento pertence à mesma. Mas, a pergunta é: que outros pontos compõem este lugar geométrico. A resposta, que já foi dada em [4] na página 33, é o teorema a seguir:

Teorema 6.8. *A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é a reta perpendicular ao segmento pelo seu ponto médio.*

Demonstração. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Para provar que a reta perpendicular a $\overline{AB}$ por M, que denotaremos por m, é a mediatriz do segmento, precisamos verificar duas coisas:

(i) Se P é um ponto de m então P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$;

(ii) se Q é um ponto da mediatriz de $\overline{AB}$, então $Q \in m$.

Feito isto provamos que a reta m e a mediatriz de $\overline{AB}$ são o mesmo conjunto. Então vamos lá.

Seja P um ponto de m. Se $P = M$ então é claro que $PA = PB$. Suponhamos que $P \neq M$. Neste caso os triângulos $\triangle PMA$ e $\triangle PMB$ são congruentes pelo caso LAL (veja a figura 6.6a e confira!) donde, em particular, $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$, ou seja, $PA = PB$.

Reciprocamente, suponha que Q seja um ponto do plano com $QA = QB$. Se $Q \in \overline{AB}$, então Q é o ponto médio do segmento e portanto é ponto de m. Se $Q \notin \overline{AB}$, então os triângulos $\triangle QMA$ e $\triangle QMB$ são congruentes pelo critério LLL (novamente veja a figura 6.6b e confira!) donde, em particular, $\measuredangle QMA \equiv \measuredangle QMB$, ou seja, $\overleftrightarrow{QM} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Assim $\overleftrightarrow{QM} = m$, pela unicidade de perpendiculares, e portanto $Q \in m$. □

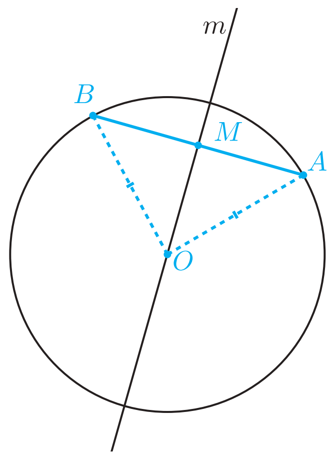


Figura 6.7

Problema 6.2. Complete os detalhes da demonstração acima:

(a) Prove, com as condições enunciadas na demonstração, que $\triangle PMA \equiv \triangle PMB$.

(b) Prove, com as condições enunciadas na demonstração, que $\triangle QMA \equiv \triangle QMB$.

Problema 6.3. Prove que a mediatriz de uma corda de uma circunferência passa pelo seu centro (veja a figura 6.7).

Problema 6.4. Prove que se, em uma circunferência, um raio é perpendicular a uma corda então este raio encontra a corda em seu ponto médio.

6.5 Pontos Notáveis de Triângulos: Circuncentro

Pontos notáveis de triângulos são certos pontos determinados por elementos do triângulo que possuem alguma propriedade especial. Os mais conhecidos são quatro: o *baricentro*, o *circuncentro*, o *ortocentro* e o *incentro*. Nesta seção estudaremos o circuncentro. Para isto vamos definir alguns elementos de triângulos.

Definição 6.9. As mediatrizes dos lados de um triângulo são chamadas de *mediatrizes* do triângulo.

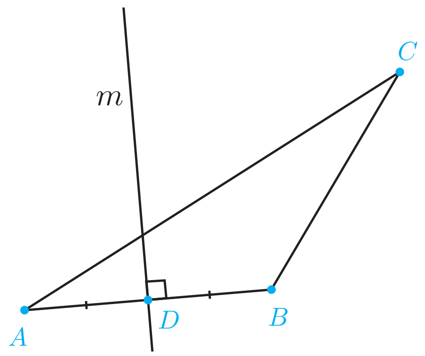


Figura 6.8

Na figura 6.8 representamos a mediatriz de $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{AB}$.

Teorema 6.10. *As mediatrizes dos lados de um triângulo qualquer são concorrentes em um ponto equidistante de seus três vértices. Em particular todo triângulo é inscritível.*

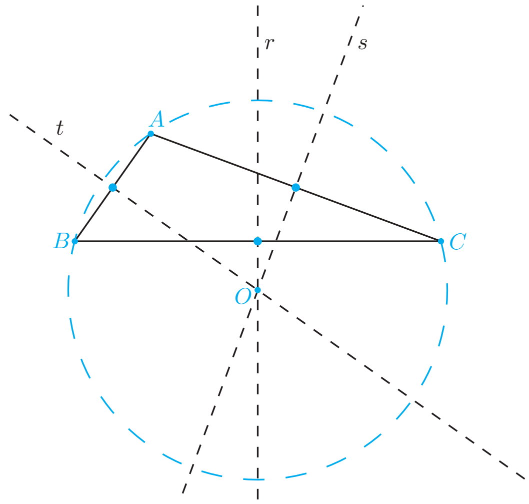


Figura 6.9

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e s, t e u as mediatrizes dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Pelo corolário 5.14 sabemos que s e t se encontram em um ponto O (veja figura 6.9). Nestas condições O é equidistante de A, B e C, pois

(i) $O \in s$ implica em $OB = OC$;

(ii) $O \in t$ implica em $OA = OC$.

Então $OA = OB$ e, por definição, O pertence a u, que é a mediatriz de AB.

Provamos assim que as mediatrizes s, t e u se encontram em um mesmo ponto O. Em particular, por definição, A, B e C pertencem a $\mathcal{C}(O, r)$, onde $r = OA$ e portanto $\triangle ABC$ está contido no interior da circunferência $\mathcal{C}(O, r)$, exceto pelos seus vértices, que pertencem à circunferência. □

Problema 6.5. Justifique com detalhes a passagem da demonstração acima onde se afirma que s e t possuem um ponto em comum.

Definição 6.11. O ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo é chamado de *circuncentro* do triângulo.

Assim o circuncentro de um triângulo é o centro da circunferência que o *circunscreve*, e dizemos que o triângulo é *circunscritível*. Em particular, mostramos no teorema 6.10 que todo triângulo é circunscritível.

Observe que o circuncentro de um triângulo tanto pode ser um ponto exterior (como representado na figura 6.9) ou interior ao triângulo, ou mesmo cair em um de seus lados (veja os problemas a seguir).

Problema 6.6. Desenhe um triângulo cujo circuncentro seja interior a ele.

Problema 6.7. Prove que o circuncentro de um triângulo retângulo é o ponto médio de sua hipotenusa. Em particular, a hipotenusa de um triângulo retângulo é o diâmetro da circunferência que o circunscreve.

6.6 O princípio de continuidade para circunferências

No procedimento apresentado em [4], página 34, para a construção da mediatriz de um segmento utilizou-se o fato que, em certas circunstâncias, duas circunferências se interceptam em dois pontos. Esta propriedade das circunferências não é óbvia e depende fortemente dos axiomas que estudamos até agora, principalmente os do grupo II. Nós a enunciaremos aqui na forma de um teorema sem demonstração, pois as técnicas necessárias para prová-lo estão além do escopo deste livro.

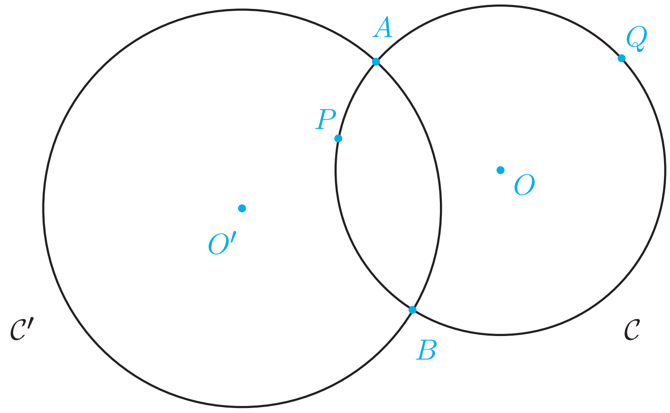


Figura 6.10

Teorema 6.12 (Princípio de continuidade para circunferências)**.** *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ duas circunferências. Se $\mathcal{C}$ possui um ponto interior e um ponto exterior a $\mathcal{C}'$, então $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ possuem exatamente dois pontos em comum, ou seja, são secantes. Reciprocamente, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são secantes, então $\mathcal{C}$ possui pontos interiores e exteriores a $\mathcal{C}'$, o mesmo acontecendo entre $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}$.*

Na figura 6.10 representamos a situação descrita no teorema acima: os pontos P e Q pertencentes a $\mathcal{C}$ são interior e exterior a $\mathcal{C}'$, respectivamente, e as circunferências se encontram nos pontos A e B.

Três resultados que dependem deste teorema nos interessam de imediato. O primeiro é o seguinte:

Teorema 6.13. *Por três pontos não colineares passa uma e somente uma circunferência.*

O enunciado do teorema 6.13 é bem intuitivo. Vimos no teorema 6.10 que por três pontos não colineares passa uma circunferência, e fica difícil "imaginar" que seja possível traçar uma outra, distinta da primeira, passando pelos mesmos três pontos. A demonstração deste fato exige, porém, um trabalho cuidadoso, e não a apresentaremos aqui.

O segundo resultado é análogo a este teorema, só que trata de retas e circunferências, e também não o demonstraremos:

Teorema 6.14. *Se uma reta contém um ponto interior a uma circunferência, então esta reta corta a circunferência em exatamente dois pontos. E reciprocamente, se uma reta encontra uma circunferência em mais de um ponto, então a reta contém pontos interiores e exteriores à circunferência.*

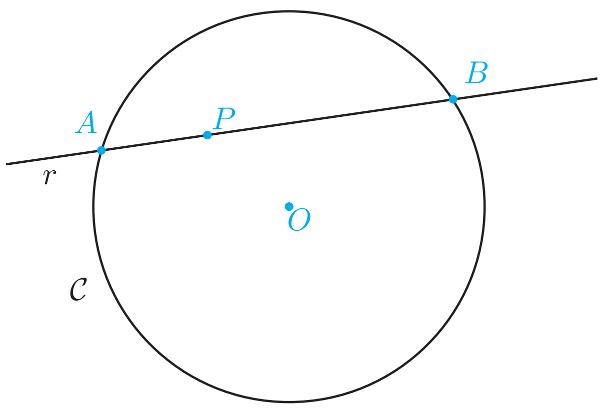


Figura 6.11

Na figura 6.11 representamos uma reta que passa por um ponto P interior a uma circunferência $\mathcal{C}$, e pelo teorema 6.14 temos que r intercepta $\mathcal{C}$ em dois pontos A e B.

O terceiro resultado nos remete ao Teorema da Desigualdade Triangular (teorema 4.7) e a seus corolários. Lá provamos que se um triângulo tem lados de medidas a, b e c então

$$|b - c| < a < b + c. \tag{6.1}$$

Agora, com o teorema 6.12 podemos garantir a recíproca, isto é que se três números reais positivos satisfazem desigualdades do tipo (6.1), então existe um triângulo cujos lados têm estas medidas. Em outras palavras,

Teorema 6.15. *Se três números reais positivos a, b e c são tais que (6.1) está satisfeita então existe um triângulo $\triangle ABC$ com $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$.*

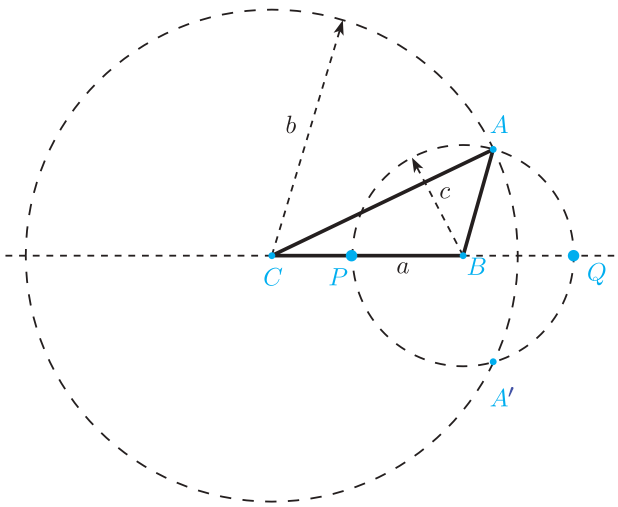


Figura 6.12

Demonstração. Estudaremos o caso em que $b > a > c$, deixando as outras possibilidades como exercício. Nestas condições podemos, em particular, reescrever (6.1) como

$$b - c < a < b + c. \tag{6.2}$$

Vamos construir um triângulo com os dados como representado na figura 6.12. Primeiro tomemos dois pontos B e C tais que $BC = a$. Sejam $\mathcal{C}_c = \mathcal{C}(B, c)$ e $\mathcal{C}_b = \mathcal{C}(C, b)$. Precisamos provar que $\mathcal{C}_b$ e $\mathcal{C}_c$ são secantes, e para isto mostraremos que $\mathcal{C}_c$ possui pontos interiores e exteriores a $\mathcal{C}_b$.

De fato, como $a > c$, existe $P \in \overline{BC}$ tal que $BP = c$. Então $CP = a - c < b$ e, portanto, $P \in \mathcal{C}_c$ é um ponto interior a $\mathcal{C}_b$.

Analogamente, existe $Q \in \overrightarrow{CB}$ com $C - B - Q$ e $BQ = c$. Logo

$$CQ = CB + BQ = a + c > b,$$

donde $Q \in \mathcal{C}_c$ é exterior a $\mathcal{C}_b$.

Com isto verificamos que $\mathcal{C}_b$ e $\mathcal{C}_c$ se encontram em dois pontos A e A' formando dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle A'BC$ com $BC = a$, $BA = BA' = c$ e $CA = CA' = b$, como desejado. □

Problema 6.8. Como você justificaria a construção de triângulos com as condições abaixo?

(a) $b = a > c$;

(b) $b = a = c$.

Exemplo 6.1. Se quisermos construir um triângulo com lados de medidas $a = 3$ e $b = 7$ precisamos saber quais os possíveis valores para a medida c do terceiro lado. Para isto aplicamos o teorema 6.15: sabemos que $|a - b| < c < a + b$, donde c deve ser tal que $4 < c < 10$. ◁

6.7 Posições relativas entre retas e circunferências

Com os resultados da seção precedente podemos discutir sobre como retas e circunferências se posicionam. Não demonstraremos nenhum dos fatos enunciados nesta seção.

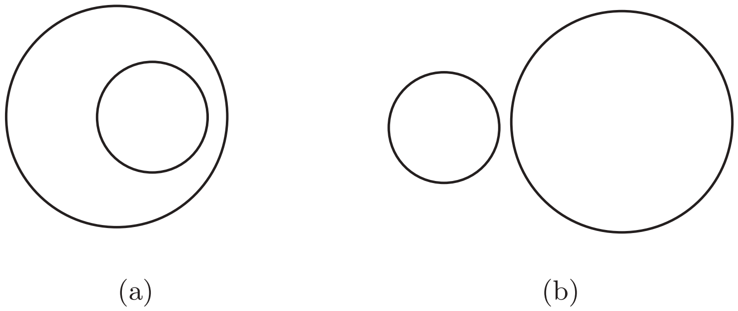


Figura 6.13 - Circunferências que não são secantes

As posições relativas de circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são as seguintes:

(i) $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ não possuem pontos em comum, como representado nas figura 6.13a e 6.13b. No caso representado na figura 6.13a dizemos uma circunferência é *interior* à outra, e no caso representado na figura 6.13b dizemos que as circunferências são *exteriores* uma à outra.

(ii) $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são secantes, como representado nas figuras 6.10 e 6.14.

(iii) $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são tangentes entre si, como representado nas figuras 6.4c, 6.4b e 6.15.

No caso em que as circunferências são tangentes entre si temos propriedades análogas às descritas para retas e circunferências tangentes.

Teorema 6.16. *Duas circunferências são tangentes entre si se e somente se possuem um ponto em comum alinhado com os seus respectivos centros.*

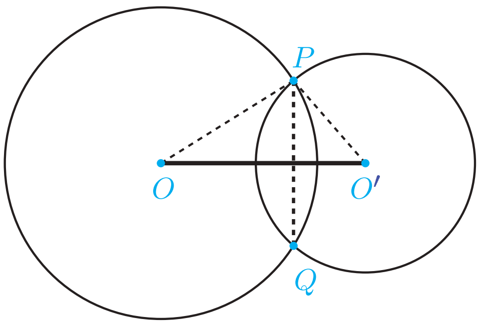
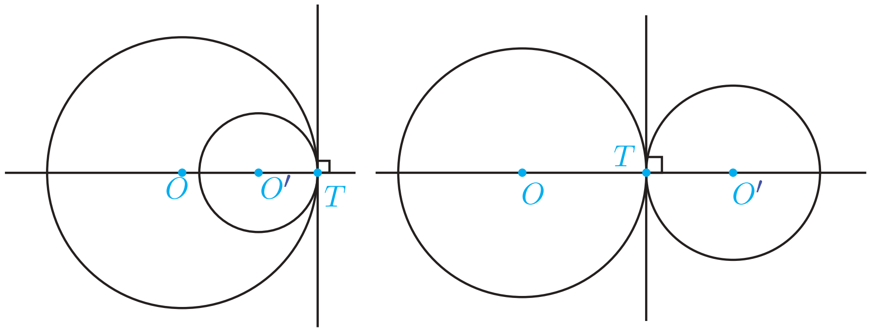


Figura 6.14

Veja na figura 6.14 que se duas circunferências são secantes, então os pontos comuns não estão alinhados com os respectivos centros.



(a) (b)

Figura 6.15

Nas figuras 6.15a e 6.15b representamos os dois possíveis casos de tangência entre circunferências, e em ambos podemos observar que os centros das circunferências estão alinhados com o ponto de tangência.

Além das circunferências tangentes representadas na figura 6.15 também desenhamos as retas tangentes às circunferências nos dois casos, e pode-se observar que as retas tangentes são comuns às duas circunferências. Esta propriedade é mais uma que ajuda a caracterizar a tangência de circunferências.

Para finalizar, voltemos agora à questão das posições relativas entre uma reta e uma circunferência, como prometido na seção 6.3. Os teoremas aqui enunciados garantem que dadas uma reta r e uma circunferência $\mathcal{C}$ as únicas possibilidades são as seguintes:

(i) r e $\mathcal{C}$ têm dois pontos em comum e são secantes;

(ii) r e $\mathcal{C}$ têm nenhum ponto em comum, e neste caso são tangentes neste ponto;

(iii) r e $\mathcal{C}$ não têm nenhum ponto em comum, e portanto todos os pontos de r são exteriores a $\mathcal{C}$.

6.8 Exercícios

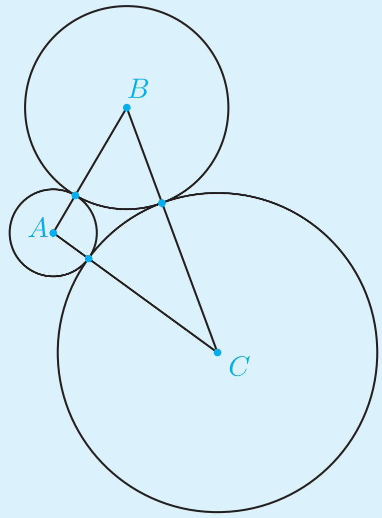


Figura 6.16 - Exercício 6.1

6.1. Na figura 6.16 cada uma das circunferências com centros A, B e C é tangente às outras duas. Se $AB = 10$, $AC = 14$ e $BC = 18$, calcule os raios das circunferências.

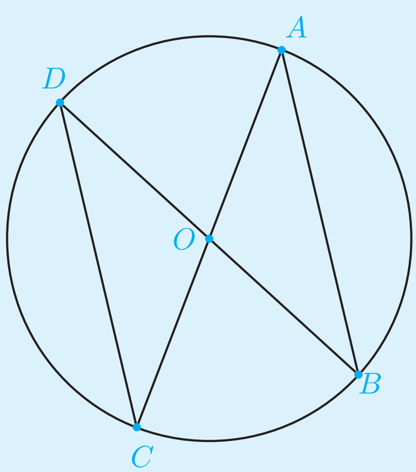


Figura 6.17 - Exercício 6.2

6.2. Na figura 6.17 $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diâmetros da circunferência. Prove que $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$ e que $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$. (Sugestão: Prove que $\triangle AOB \equiv \triangle DOC$.)

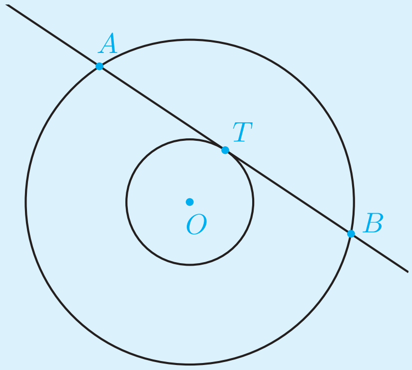


Figura 6.18 - Exercício 6.3

6.3. Demonstre o seguinte: dadas duas circunferências concêntricas, o ponto médio de toda corda da maior que é tangente à menor é o ponto de tangência. (Sugestão: Veja a figura 6.18. Você quer provar que T é o ponto médio de $\overline{AB}$. Trace $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OT}$. Use que $\triangle OAB$ é isósceles e que $\overline{OT} \perp \overline{AB}$. Justifique as afirmações desta sugestão!)

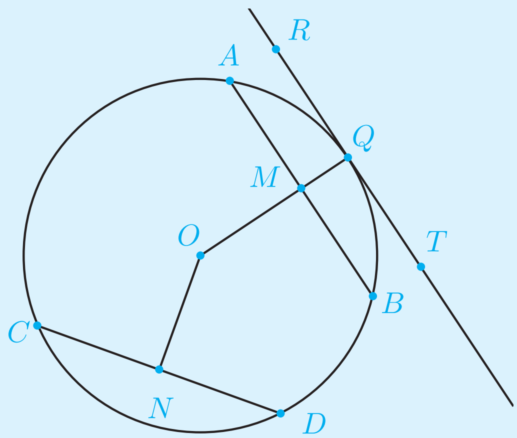


Figura 6.19 - Exercício 6.5

6.5. Prove os seguintes fatos relativos à figura 6.19:

(a) Se $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ então $\overline{CN} \equiv \overline{ND}$.

(b) Se $\overline{ON} \equiv \overline{OM}$, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ e $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ então $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

(c) Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ e $\overline{ON} \perp \overline{CD}$ então $\overline{ON} \equiv \overline{OM}$.

(d) Se $\overleftrightarrow{RT}$ é tangente à circunferência, e $\overline{AB} \perp \overline{OQ}$ então $\overleftrightarrow{RT} \parallel \overline{AB}$.

(Sugestão: use os problemas 6.3 e 6.4.)

7 Quadriláteros e áreas de figuras planas

AULA 7: QUADRILÁTEROS E ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

OBJETIVOS: Introduzir o conceito de quadriláteros e de áreas de figuras planas. Nas primeiras seções são apresentados os quadriláteros notáveis e suas propriedades. Nas seções seguintes são apresentados axiomas relativos a áreas de figuras planas e são calculadas áreas de diversas figuras.

7.1 Introdução

Nosso principal objetivo nesta aula é tratar de um assunto muito importante em geometria: áreas. Não vamos estudar aqui a teoria geral de áreas de figuras planas, mas apresentaremos um tratamento simplificado de áreas de certas figuras planas, denominadas *regiões poligonais*. As regiões poligonais fundamentais sãos os nossos velhos conhecidos triângulos, e veremos a seguir que regiões poligonais em geral não são nada mais do que união de triângulos.

Para termos uma boa coleção de exemplos de regiões poligonais começaremos a aula estudando um pouco de quadriláteros, e em seguida estudaremos o conceito de área com uma abordagem axiomática baseada no texto [3], que muito influenciou o ensino de geometria nas décadas de 60 e 70.

7.2 Quadriláteros em geral

Como vimos, um triângulo é uma figura do plano determinada por três segmentos que estão ligados entre si pelos seus extremos. Podemos facilmente generalizar este conceito. Nesta seção introduziremos as figuras de quatro lados, os *quadriláteros*.

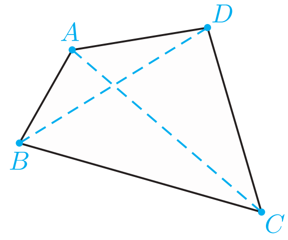
Definição 7.1. Um *quadrilátero* é a figura formada pela união de quatro segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, denominados *lados* ou *arestas*, onde os quatro pontos A, B, C e D, denominados *vértices*, não são colineares três a três. O quadrilátero determinado desta forma será denotado simplesmente por $\square ABCD$, ou seja

$$\square ABCD = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}.$$

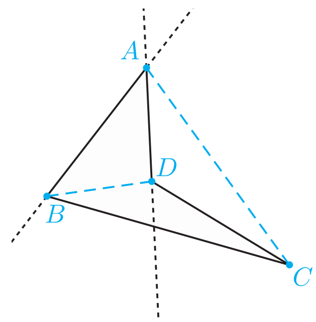
Os ângulos correspondentes aos vértices serão denotados pelas letras correspondentes, ou seja, $\measuredangle A = \measuredangle BAC$, etc.

Dois vértices de um quadrilátero são *consecutivos* se são extremos de um mesmo lado, caso contrário são *não consecutivos* ou *opostos*. Os ângulos que correspondem a vértices consecutivos são chamados de ângulos *consecutivos*, e caso contrário são ângulos *não consecutivos* ou *opostos*. Analogamente dizemos que dois lados de um quadrilátero são *consecutivos* se compartilham de um vértice em comum; caso contrário são chamados de *não consecutivos* ou *opostos*.

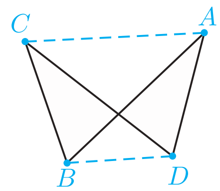
Os segmentos que ligam dois vértices não consecutivos de um quadrilátero são chamados de *diagonais*, e as retas que contêm cada um dos lados são chamadas de *retas-suporte* do respectivo lado.



(a) Quadrilátero convexo



(b) Quadrilátero não convexo



(c) Quadrilátero não convexo cruzado

Figura 7.1

Quanto à forma, dizemos que um quadrilátero é *convexo* se cada par de vértices consecutivos está do mesmo lado do plano em relação à reta-suporte correspondente ao outro par de vértices. Na figura 7.1a representamos um quadrilátero convexo: observe que, por exemplo, os vértices A e B estão do mesmo lado do plano em relação a $\overleftrightarrow{CD}$, e assim por diante. Nas figuras 7.1b e 7.1c representamos quadriláteros não convexos. O quadrilátero mostrado na figura 7.1c é, às vezes, chamado de *cruzado*, uma vez que seus lados se cruzam. Também indicamos na figura 7.1, por linhas pontilhadas, as diagonais de cada tipo de quadrilátero.

Exemplo 7.1. Nos exemplos da figura 7.1 A e D são vértices consecutivos, assim como A e B; e A e C são vértices opostos. Analogamente, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são lados consecutivos, e $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são lados não consecutivos. $\triangleleft$

Problema 7.1. Indique nas figuras 7.1b e 7.1c os pares de vértices consecutivos que não do mesmo lado do plano em relação à reta-suporte do outro par de vértices.

Os ângulos $\sphericalangle A = \sphericalangle BAD$, $\sphericalangle B = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle C = \sphericalangle BCD$ e $\sphericalangle D = \sphericalangle ADC$ de um quadrilátero convexo são chamados de ângulos *internos*, ou simplesmente *ângulos*, do quadrilátero. Podemos definir, como foi feito para triângulos, ângulos *externos* a um quadrilátero convexo, o que deixamos como exercício.

Problema 7.2. Escreva uma definição para ângulos *externos* a um quadrilátero convexo.

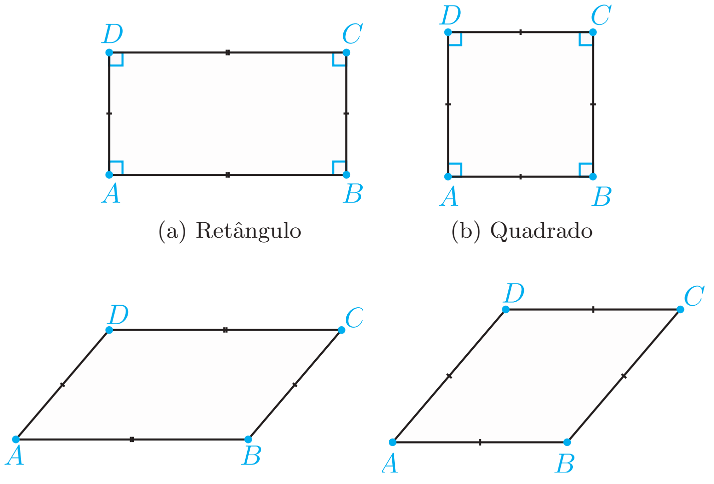
Problema 7.3. Prove que a soma das medidas dos ângulos (internos) de um quadrilátero convexo é 360. (Sugestão: divida o quadrilátero em dois triângulos usando uma das diagonais, como representado na figura 7.1a.)

No se se segue só trataremos de quadriláteros convexos, portanto de agora em diante a palavra *quadrilátero* significará quadrilátero convexo.

7.3 Quadriláteros notáveis

Existem alguns quadriláteros que possuem propriedades especiais, já bem conhecidos dos leitores, que passamos a definir nesta seção, tanto para "refrescar" a memória, como para mostrar algumas de suas propriedades marcantes.

Definição 7.2. Um quadrilátero cujos ângulos são todos retos é um *retângulo*. Se, além disso, os lados são todos congruentes entre si, o quadrilátero é um *quadrado*.



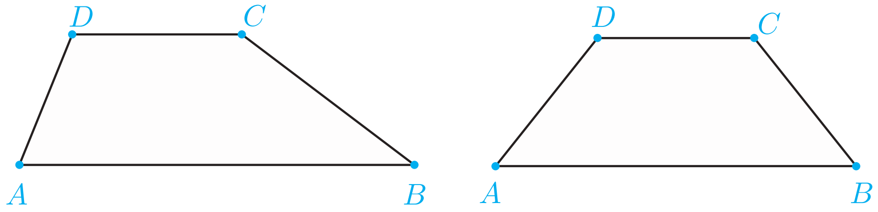
(a) Retângulo (b) Quadrado

(c) Paralelogramo (d) Losango

Figura 7.2

Definição 7.3. Um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos entre si é um *paralelogramo*. Se, além disso, os lados são todos congruentes entre si, e os ângulos não são retos, é um *losango*.

Definição 7.4. Um quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos entre si, e os outros dois lados não são paralelos entre si, é um *trapézio*. Os lados paralelos são chamados de *bases* do trapézio. Se os lados não paralelos forem congruentes entre si o trapézio é chamado de *isósceles*.



(a) Trapézio (b) Trapézio isósceles

Figura 7.3

Observe que todo quadrado é um retângulo, e todo retângulo é um paralelogramo, mas as relações recíprocas não são verdadeiras. Observe também que todo quadrado é um losango, mas nem todo losango é um quadrado.

Finalizamos esta seção com algumas propriedades improntantes de paralelogramos e retângulos.

Teorema 7.5. *Seja* $\square ABCD$ *um quadrilátero. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) *O quadrilátero* $\square ABCD$ *é um paralelogramo.*

(ii) *Os lados opostos de* $\square ABCD$ *são congruentes entre si.*

(iii) *Os ângulos opostos de* $\square ABCD$ *são congruentes entre si.*

(iv) *O quadrilátero* $\square ABCD$ *possui um par de lados opostos paralelos e congruentes entre si.*

(v) *As diagonais de* $\square ABCD$ *cortam-se em seus pontos médios.*

Demonstração. Pela primeira vez neste texto estamos apresentando um teorema com o enunciado “as seguintes afirmativas são equivalentes”. Isto quer dizer que se assumimos uma delas como verdade, então podemos demonstrar que as outras são consequência daquela. Muitas vezes fica mais fácil realizar as demonstrações numa sequência cíclica. No nosso caso, seguiremos o seguinte diagrama:

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (v) \Longrightarrow (i).$$

Começamos com $(i) \Longrightarrow (ii)$. Seja $\square ABCD$ um paralelogramo. Então, por definição,

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad \text{e} \quad \overline{BC} \parallel \overline{AD}.$$

Assim temos que $\measuredangle BAC \equiv \measuredangle DCA$ e $\measuredangle BCA \equiv \measuredangle DAC$, uma vez que são alternos internos a duas paralelas e uma transversal (veja figura 7.4). Logo $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ pelo caso ALA:

$$\left.\begin{array}{rcll} \measuredangle BAC & \equiv & \measuredangle DCA & \text{pois } \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{AC} & \equiv & \overline{AC} & \text{lado comum} \\ \measuredangle BCA & \equiv & \measuredangle DAC & \text{pois } \overline{BC} \parallel \overline{AD} \end{array}\right\} \text{(ALA)}$$

donde $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$, o que prova ($ii$).

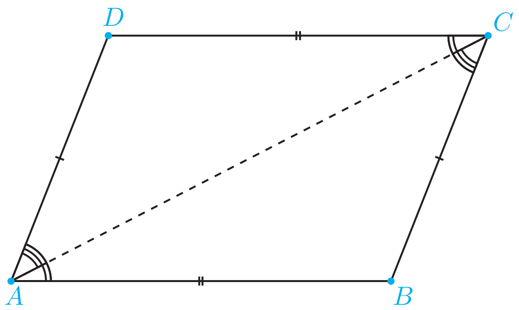


Figura 7.4

Agora provemos $(ii) \Longrightarrow (iii)$. Neste caso supomos que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$. Nestas condições os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle CDA$ são congruentes pelo caso LLL (sua vez de conferir – veja na figura 7.4), donde

$$\begin{aligned} \measuredangle B &\equiv \measuredangle D && (7.1)\\ \measuredangle BCA &\equiv \measuredangle CAD && (7.2)\\ \measuredangle BAC &\equiv \measuredangle ACD && (7.3) \end{aligned}$$

Assim, de (7.2) e (7.3) obtemos que $\measuredangle A \equiv \measuredangle C$ pois

$$\begin{aligned} m(\measuredangle A) &= m(\measuredangle CAD) + m(\measuredangle CAB)\\ &= m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle ACD) = m(\measuredangle C), \end{aligned}$$

com o quê terminamos esta parte.

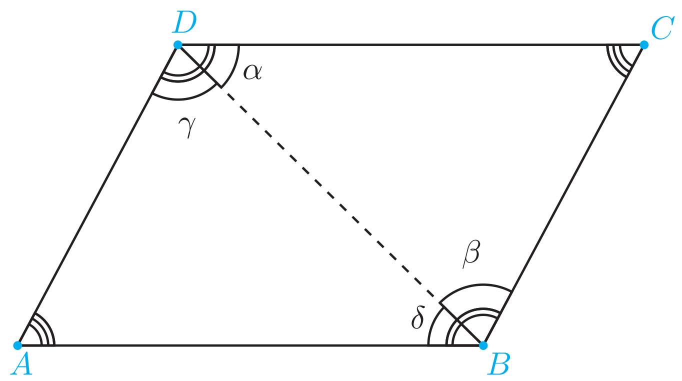


Figura 7.5

Vamos provar $(iii) \Longrightarrow (iv)$. Nossa hipótese é que

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle C \quad \text{e} \quad \measuredangle B \equiv \measuredangle D.$$

Colocando (veja figura 7.5) $\alpha = m(\measuredangle BDC)$, $\beta = m(\measuredangle CBD)$, $\gamma = m(\measuredangle ADB)$ e $\delta = m(\measuredangle ABD)$, obtemos as seguintes relações:

$$\alpha + \gamma = m(\measuredangle D) = m(\measuredangle B) = \beta + \delta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta \tag{7.4}$$

e

$$\alpha + \beta + m(\measuredangle C) = 180 = \gamma + \delta + m(\measuredangle A) \Rightarrow \alpha + \beta = \gamma + \delta \tag{7.5}$$

donde, subtraindo (7.5) de (7.4), fica

$$\gamma - \beta = \beta - \gamma \Rightarrow \gamma = \beta.$$

Logo temos que $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (por quê?). Além disso, como $\measuredangle D \equiv \measuredangle B$, tem-se que $\alpha = \delta$, e portanto que $\triangle ABC \equiv \triangle CDB$ pelo caso ALA (confira!). Em particular $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$, e com isto terminamos esta parte.

Vamos para a implicação $(iv) \Longrightarrow (v)$. Nossa hipótese é que $\square ABCD$ possui um par de lados opostos paralelos e congruentes entre si. Vamos supor que, sem perda de generalidade, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Seja M o ponto de encontro das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ (veja figura 7.6). Então, com nossas hipóteses, os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle CMD$ são congruentes pelo caso ALA, já que

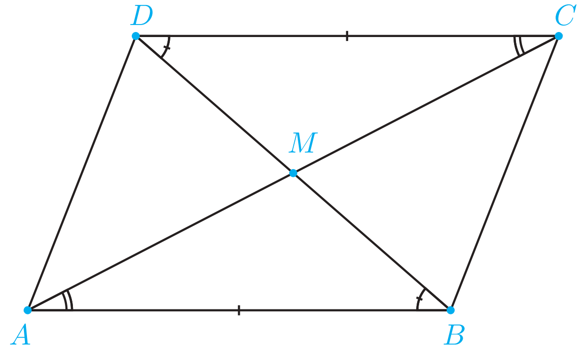


Figura 7.6

$$\left.\begin{array}{rcll} \measuredangle MAB & \equiv & \measuredangle MCD & \text{pois } \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{AB} & \equiv & \overline{CD} & \text{congruentes por hipótese} \\ \measuredangle ABM & \equiv & \measuredangle MDC & \text{pois } \overline{AB} \parallel \overline{CD} \end{array}\right\} \text{(ALA)}$$

Assim $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{MD}$, ou seja, M é ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$ como queríamos verificar.

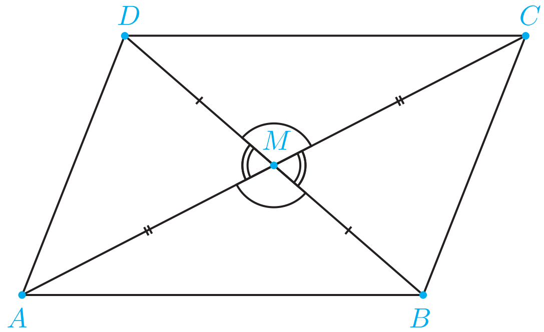


Figura 7.7

Finalmente, provemos que $(v) \Longrightarrow (i)$. Usando a mesma notação do parágrafo anterior, nossa hipótese agora é que M é ponto médio das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do quadrilátero $\square ABCD$, ou seja, que

$$\overline{AM} \equiv \overline{MC} \quad \text{e} \quad \overline{BM} \equiv \overline{MD}.$$

Nestas condições os triângulos $\triangle AMB$ e $\triangle CMD$ são congruentes pelo caso LAL, (veja a figura 7.7 e diga o por quê!). Então $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\measuredangle MAB \equiv \measuredangle MCD$, donde também concluímos que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Analogamente, temos que $\triangle AMD \equiv \triangle CMB$ donde conclui-se que $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (preencha os detalhes!). Logo $\square ABCD$ é um paralelogramo. $\square$

Problema 7.4. Na demonstração acima qual foi o resultado utilizado para garantir a igualdade em (7.5)?

Problema 7.5. Prove que se o quadrilátero $\square ABCD$ é um paralelogramo com um de seus ângulos reto, então $\square ABCD$ é um retângulo.

7.4 Áreas de figuras planas - introdução

Nesta seção vamos introduzir o conceito de área de certas figuras planas. A ideia intuitiva de área vem da ideia de medir a "ocupação" de uma região do plano por um contorno. Por exemplo, um retângulo "ocupa" uma região do plano com seus pontos interiores[1]. Uma forma de medir esta ocupação é dividir os lados do retângulo em partes iguais, formando pequenos quadrados, e contar estes quadrados; o número destes seria a "área" ocupada pelo retângulo. No retângulo $\square ABCD$ da figura 7.8 dividimos o lado $\overline{AB}$ em 7 partes iguais, e o lado $\overline{AD}$ em 4 partes iguais, formando 28 quadrados. Se pensarmos nos quadrados como "unidades de área", poderíamos dizer que o retângulo tem área 28 (com esta unidade).

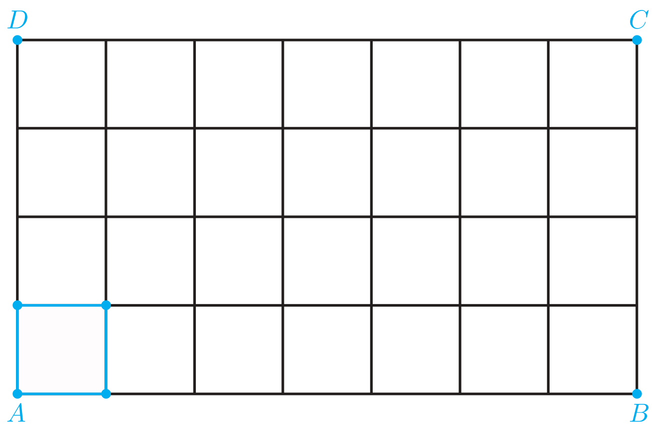


Figura 7.8

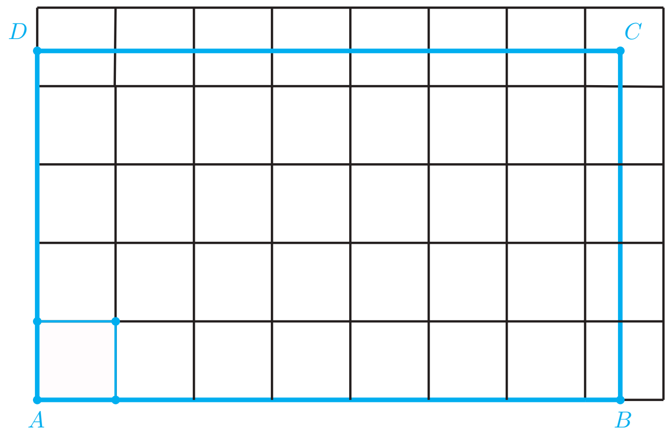


Figura 7.9

[1] Observe que ainda não definimos o que são pontos interiores de um retângulo – contamos no momento com a intuição visual do leitor para o entender o conceito.

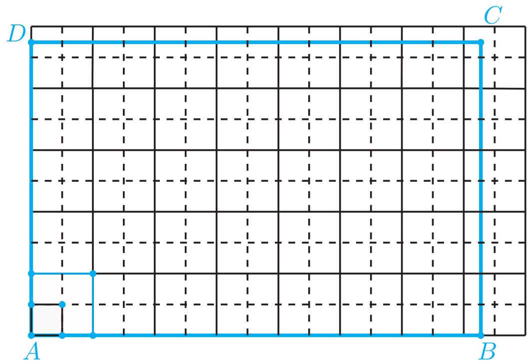


Figura 7.10

Porém esta forma de dividir a figura nem sempre é exata – depende do tamanho do lado do quadrado que escolhemos em relação com o tamanho dos lados do retângulo. Por exemplo, na figura 7.9 escolhemos um tamanho para realizar a divisão que não cobre inteiramente os lados do retângulo – ou fica faltando um pouquinho, ou fica sobrando um pouquinho. Neste caso a área ocupada pelo retângulo deveria ser um número entre 28 e 40, com esta unidade de área escolhida (os quadrados). O que se pode fazer então é diminuir o tamanho dos lados dos quadrados. Na figura 7.10 dividimos cada quadrado em 4 quadradinhos menores, e vemos que a área ocupada pelo retângulo agora seria um número entre 126 e 150, com esta nova unidade de área.

Seria bom relacionar estas duas contas. Vamos assumir que a área dos quadrados da figura 7.9 seja um número Q, e que a área dos quadrados menores da figura 7.10 seja um número q. Podemos assumir ainda que, como os quadrados de área Q foram divididos por 4 quadradinhos de área q, então $Q = 4q$. Se designarmos por $\mathcal{A}$ a área de $\square ABCD$, então temos

$$28Q < \mathcal{A} < 40Q$$

e

$$126q < \mathcal{A} < 150q.$$

Usando a relação $Q = 4q$ obtemos

$$\frac{63}{2}Q < \mathcal{A} < \frac{75}{2}Q.$$

Repetindo este procedimento, isto é, dividindo cada quadradinho de área q em quadradinhos menores ainda, vamos "aproximando" a área de $\square ABCD$ de um múltiplo de Q, que estamos usando como unidade de área. Através de uma passagem ao limite, analogamente ao que é feito em cálculo para definir integrais, chegamos a um número que pode ser chamado de "área" de $\square ABCD$.

O que queremos agora é fundamentar estas ideias intuitivas de maneira rigorosa. Uma forma de fazer isto é, como já insinuamos, utilizar os conceitos de cálculo integral. Há também outras abordagens, mais ou menos complicadas, mas nunca tão simples como gostaríamos, pois este assunto é realmente delicado. Para simplificar a exposição em um texto introdutório como este escolhemos realizar uma abordagem axiomática, e trabalharemos não com áreas de regiões gerais, mas com áreas de regiões particulares que definiremos na próxima seção, chamadas *regiões poligonais*. No entanto o leitor deve ter em mente que os axiomas que enunciaremos nas próximas seções são, na verdade, teoremas que podem ser deduzidos dos axiomas já apresentados.

7.5 Regiões poligonais do plano

Definição 7.6. Uma *região triangular* é a figura plana formada por um triângulo e seus pontos interiores.

Definição 7.7. Uma *região poligonal* é a figura formada pela união de um número finito de regiões triangulares tais que se duas delas se interceptam, então a interseção ou é um ponto ou é um segmento. Um ponto é *interior* a uma região poligonal se pertence ao interior de algum dos triângulos que a compõe.

Problema 7.6. Na seção falamos de ponto interior de um retângulo sem apresentar uma definição formal. Usando a definição acima dê uma definição formal para *ponto interior a um quadrilátero convexo*.

Já vimos vários exemplos de regiões poligonais: triângulos (por definição) e quadriláteros (vistos na seção 7.2) são exemplos de regiões poligonais, como se pode facilmente verificar. Na figura 7.11 damos outros exemplos de regiões poligonais. Note que há várias formas de apresentar uma região poligonal como união de regiões triangulares.

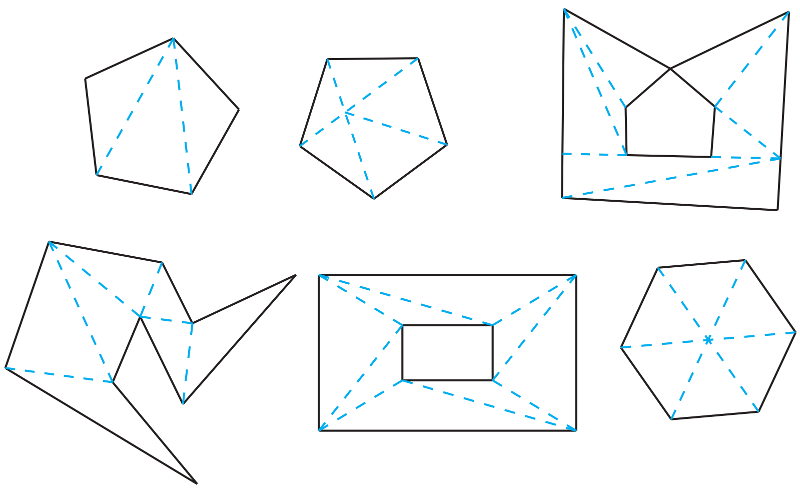


Figura 7.11

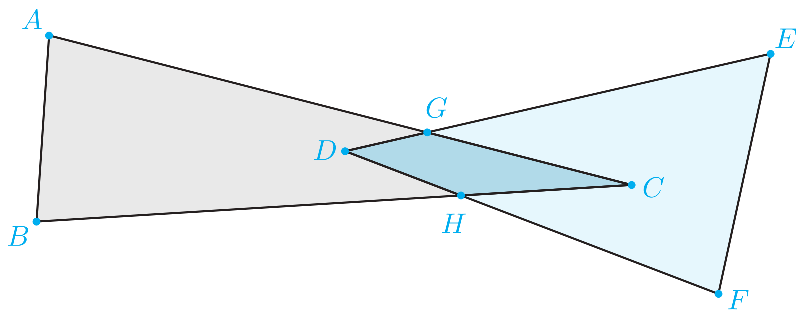


Figura 7.12

Temos ainda uma situação interessante: a região poligonal pode ser dada pela união de regiões triangulares que se sobrepõem parcialmente, isto é, cuja interseção não é formada apenas de um ponto ou um segmento, como apresentado na figura 7.12. Nesta figura as regiões triangulares determinadas pelos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ interceptam-se no quadrilátero $\square DHCG$.

Para mostrar que esta região é, de fato, poligonal, basta dividi-la de maneira diferente como exemplificado na figura 7.13.

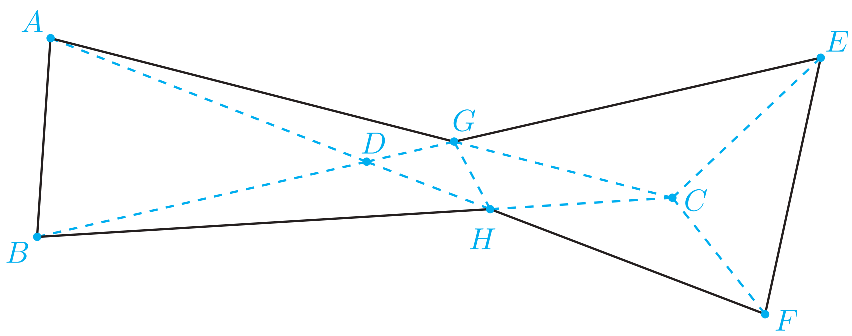


Figura 7.13

O que faremos agora é estabelecer com precisão o conceito de área para estas figuras planas particulares, as regiões poligonais.

7.6 Axiomas: grupo VI, axiomas sobre áreas

Como explicamos na introdução, vamos estabelecer, de forma axiomática, o conceito de área de certas figuras planas, as regiões poligonais[2]. Começamos estabelecendo que "área" de uma região poligonal é um número positivo associado a cada uma destas figuras.

> **Axioma VI.1.** A cada região poligonal $\mathcal{R}$ está associado um único número real positivo, denotado por $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Definição 7.8. O número $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ do axioma VI.1 é a *área* de $\mathcal{R}$.

Gostaríamos de garantir que a área de uma região poligonal não depende de sua posição ou localização no plano, mas apenas de sua forma e dos triângulos que a compõem. Estabeleceremos estas ideias nos axiomas seguintes.

> **Axioma VI.2.** Se dois triângulos são congruentes, as regiões triangulares determinadas por eles têm a mesma área.

> **Axioma VI.3.** Se uma região $\mathcal{R}$ é a união de duas regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ tais que $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ se interceptam em no máximo um número finito de segmentos e pontos, então $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}(\mathcal{R}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{R}_2)$.

[2] Os axiomas que apresentamos nesta seção foram adaptados de [3]

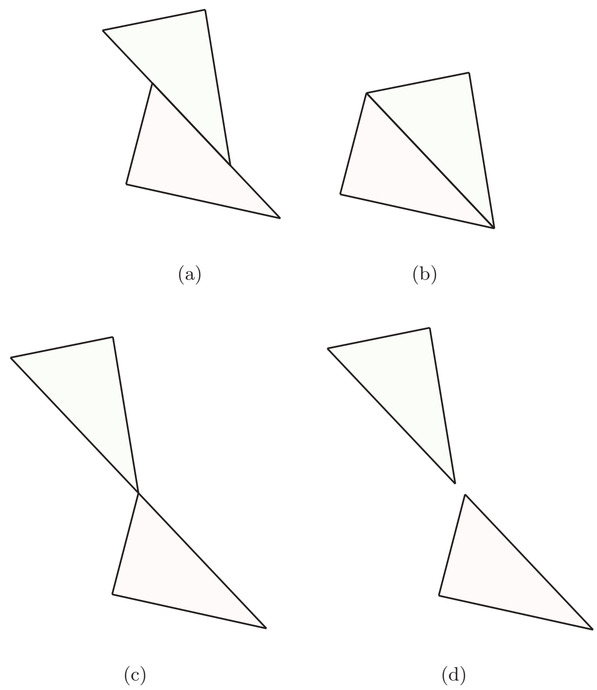


Figura 7.14

Mostramos na figura 7.14 exemplos de regiões poligonais de mesma área, pois os triângulos de mesma cor indicados na figura são congruentes, portanto têm áreas iguais entre si, pelo axioma VI.2, e as interseções destes triângulos em cada exemplo satisfazem as condições do axioma VI.3. Já na figura 7.15 a interseção dos triângulos destacados é um pequeno quadrilátero, portanto não se pode aplicar o axioma VI.3 aos triângulos indicados. No entanto pode-se dividir a região em outros triângulos, analogamente ao que foi feito na figura 7.13.

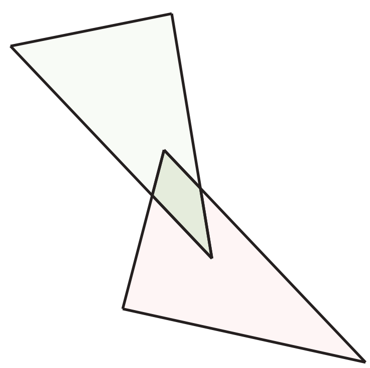


Figura 7.15

Resta agora estabelecer uma forma "prática", digamos, de se calcular áreas de regiões poligonais, ou seja, precisamos de um "gabarito". Seguiremos a ideia apresentada na introdução de se utilizar um quadrado como gabarito. Este é o espírito do axioma seguinte.

Axioma VI.4. A área de um quadrado é o produto do comprimento de seus lados.

Em outras palavras, a área de um quadrado $\square ABCD$ é AB^2 ou, se escrevermos $AB = a$, $\mathcal{A}(\square ABCD) = a^2$.

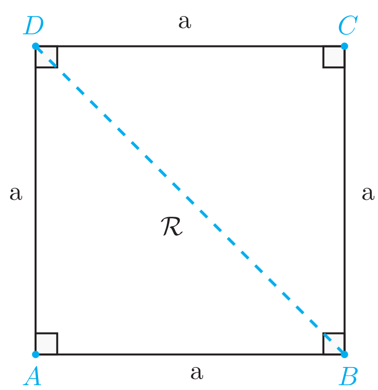


Figura 7.16 - $\mathcal{A}(\mathcal{R}) = a^2$

Convém neste ponto do texto estabelecer uma forma de notação mais prática para o que discutiremos a seguir. Quando indicarmos uma região poligonal através de seu contorno (ou seja, da união dos segmentos que a delimitam), podemos pensar tanto somente no contorno em si, quanto no contorno e em seus pontos interiores. Por exemplo, no caso do quadrado, indicamos a figura formada pela união de seus lados por $\square ABCD$, mas também usaremos esta mesma notação para indicar a região poligonal correspondente – o uso do símbolo ficará claro pelo contexto. No caso particular do quadrado apresentado na figura 7.16 observamos que os pontos interiores da região poligonal $\mathcal{R}$ são os pontos da diagonal $\overline{BD}$, excluídos os extremos B e D, e os pontos interiores aos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$.

Outra notação que utilizaremos é a seguinte: denotaremos os comprimentos de segmentos por letras latinas minúsculas, em geral escolhidas dentre as primeiras (de a a h, em geral). Por exemplo, na figura 7.16 denotamos o comprimento dos lados do quadrado por a. A partir de agora muitas vezes diremos que "o lado do quadrado é a", confundindo o lado como segmento com sua medida. Usaremos esta mesma convenção para todos os segmentos cuja medida for relevante, e a distinção de conceitos, mais uma vez, ficará estabelecida no contexto.

Passemos ao cálculo de áreas de figuras já nossas conhecidas.

7.7 Áreas de retângulos e triângulos retângulos

Começaremos calculando a área de um retângulo.

Teorema 7.9. *A área de um retângulo é o produto das medidas de seus lados não paralelos.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\square ABCD$ um retângulo, Se $a = AB$ e $b = BC$, com $a > b$, então queremos provar que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\square ABCD) = ab.$$

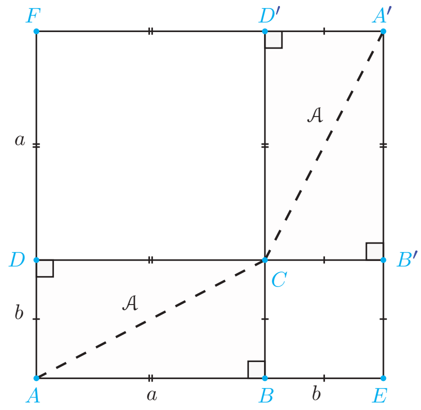


Figura 7.17

Para isto vamos “dar um jeito” de fazer aparecer a única figura que, de fato, sabemos calcular a área: quadrados. Observe a figura 7.17: construímos um quadrado $\square AEA'F$ com lados medindo $a + b$ dividido em

(a) um quadrado menor $\square BEB'C$ de lados com medida b;

(b) um quadrado maior $\square DCD'F$ de lados com medida a;

(c) o retângulo original $\square ABCD$;

(d) um outro retângulo $\square CB'A'D'$ com $CB' = b$ e $B'A' = a$.

A primeira coisa que podemos deduzir da figura é que os triângulos retângulos $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle CB'A'$ e $\triangle A'D'C$ são todos congruentes entre si (por quê?), donde, aplicando os axiomas VI.2 e VI.3 em sequência, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\square ABCD) &\overbrace{=}^{\text{VI.3}} \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle CDA) = \\
&\overbrace{=}^{\text{VI.2}} \mathcal{A}(\triangle A'B'C) + \mathcal{A}(\triangle CD'A') = \\
&\overbrace{=}^{\text{VI.3}} \mathcal{A}(\square A'B'CD'),
\end{aligned}$$

ou seja, os retângulos $\square ABCD$ $\square A'B'CD'$ possuem a mesma área $\mathcal{A}$. Calculemos agora $\mathcal{A}$ em função de a e b. Pelo axioma VI.4 temos que

$$\mathcal{A}(\square AEA'F) = (a+b)^2 \tag{7.6}$$
$$\mathcal{A}(\square BEB'C) = b^2 \tag{7.7}$$
$$\mathcal{A}(\square DCD'F) = a^2; \tag{7.8}$$

e, pelo axioma VI.3, que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\square AEA'F) = \; & \mathcal{A}(\square ABCD) + \mathcal{A}(\square BEB'C) + \\
& + \mathcal{A}(\square A'B'CD') + \mathcal{A}(\square DCD'F)
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Substituindo (7.6), (7.7) e (7.8) em (7.9), obtemos:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= \mathcal{A} + b^2 + \mathcal{A} + a^2 = \\
&= 2\mathcal{A} + a^2 + b^2
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A} &= (a+b)^2 - a^2 - b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = \\ &= 2ab, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{A} = ab,$$

como queríamos. $\square$

Vamos agora calcular a área de um triângulo retângulo.

Corolário 7.10. *A área de um triângulo retângulo é a metade do produto das medidas de seus catetos.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A, e tomemos $AB = c$, $AC = b$. Queremos provar que

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bc.$$

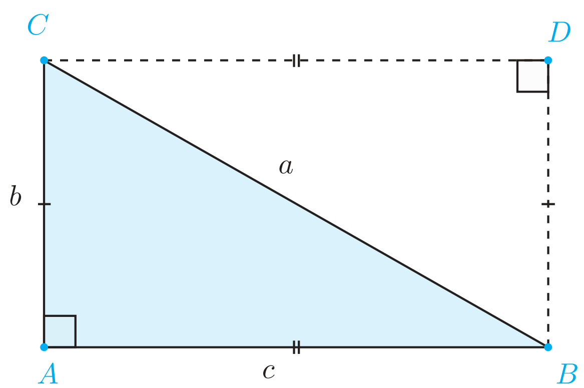


Figura 7.18

Usamos um argumento análogo ao do teorema anterior. Veja a figura 7.18: nela representamos um retângulo $\square ABCD$ obtido "copiando" o triângulo $\triangle ABC$ sobre ele mesmo. Então $AB = c$ e $AC = b$.

Pelo axioma VI.2 temos que

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \mathcal{A}(\triangle DCB) \tag{7.10}$$

e pelo axioma VI.3 que

$$\mathcal{A}(\square ABCD) = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle DCB). \tag{7.11}$$

Além disso, pelo teorema 7.9 sabemos que

$$\mathcal{A}(\square ABCD) = bc. \tag{7.12}$$

Das equações (7.10), (7.11) e (7.12) obtemos:

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\square ABCD) = \frac{1}{2}bc,$$

como desejado. $\square$

7.8 Áreas de paralelogramos e triângulos

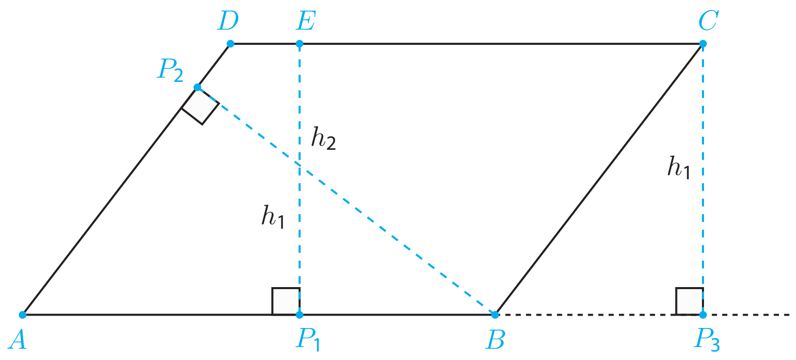


Figura 7.19

Começamos estabelecendo alguma nomenclatura. Em um paralelogramo $\square ABCD$ costumamos designar um de seus lados como uma *base* e então, fixada a base, dizemos que a distância entre a reta-suporte deste lado e a reta-suporte do seu lado oposto é a *altura* (do paralelogramo) *correspondente* ou *relativa a esta base*. Na figura 7.19 traçamos vários segmentos representando alturas de $\square ABCD$. Por exemplo, o segmento $\overline{EP_1}$ representa a altura h_1 relativa à base $\overline{AB}$, e assim por diante. Observamos ainda que o termo *base* pode se referir tanto ao segmento ($\overline{AB}$ em nosso exemplo) quanto o comprimento deste segmento, muitas vezes denotado pela letra b (no nosso exemplo, $b = AB$). No caso particular em que o paralelogramo é um retângulo, escolhido um lado como base o comprimento do outro lado é a altura, como se pode facilmente perceber.

Nosso objetivo agora é calcular a área de um paralelogramo.

Teorema 7.11. *A área de um paralelogramo é o produto de qualquer uma de suas bases pela altura correspondente.*

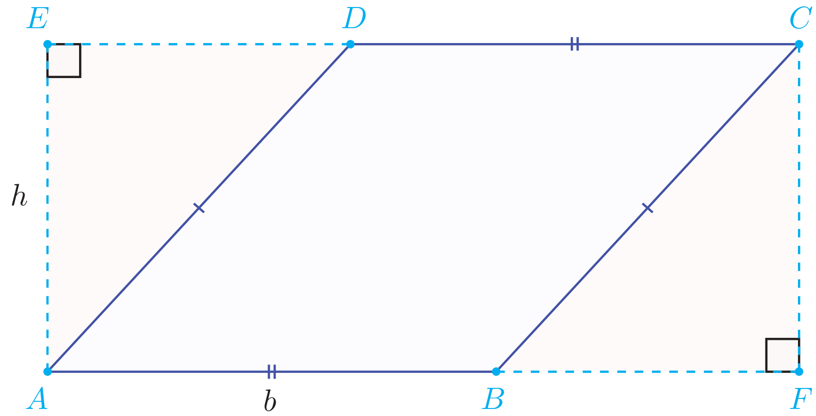


Figura 7.20

Demonstração. Seja $\square ABCD$ o nosso paralelogramo. Tomemos como base $b = AB$, e seja h a altura relativa a esta base (acompanhe na figura 7.20). Queremos provar que

$$\mathcal{A}(ABCD) = bh. \tag{7.13}$$

No caso em que $\square ABCD$ é um retângulo a fórmula um caso particular já demonstrado no teorema 7.9. Vamos então tratar do caso em que $\square ABCD$ não é um retângulo. Nossa tática será análoga à adotada no corolário 7.10: construiremos um retângulo adequado do qual extrairemos a área de $\square ABCD$.

Primeiro observamos que, como $\square ABCD$ não é um retângulo, então seus ângulos não são retos. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\measuredangle A$ seja agudo e $\measuredangle B$ obtuso, como representado na figura 7.20. Sejam F o pé da perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ passando por C, e E o pé da perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$ passando por A. Então $\square AFCE$ é um retângulo e os triângulos $\triangle BFC$ e $\triangle DEA$ são triângulos retângulos congruentes entre si (por quê?).

Assim temos as seguintes relações:

$$\mathcal{A}(\square AFCE) = (AF).(EA) = (b + BF).h \tag{7.14}$$

$$\mathcal{A}(\triangle DEA) = \mathcal{A}(\triangle BFC) = \frac{1}{2}(BF).h. \tag{7.15}$$

Além destas, colocando $\mathcal{A} = \mathcal{A}(ABCD)$, temos a relação

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\square AFCE) &= \mathcal{A} + \mathcal{A}(\triangle BFC) + \mathcal{A}(\triangle DEA) = \\ &= \mathcal{A} + 2.\mathcal{A}(\triangle BFC). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Substituindo (7.14) e (7.15) em (7.16) obtemos

$$\mathcal{A} = (b + BF).h - 2.\frac{1}{2}(BF).h = b.h$$

como queríamos. $\square$

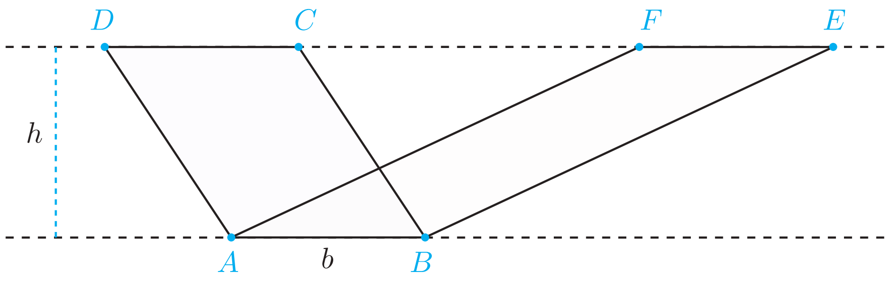
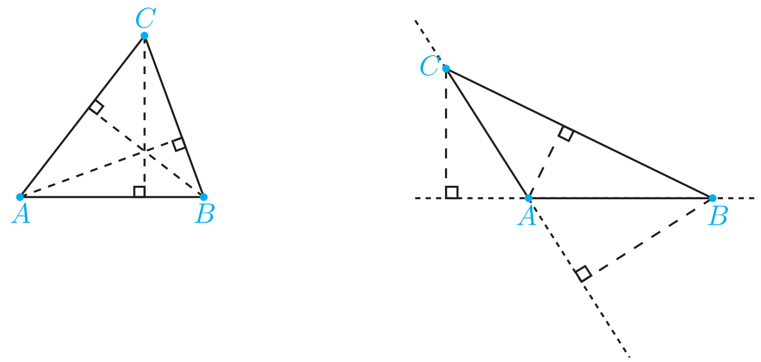


Figura 7.21

Observação 7.1. Uma consequência do teorema acima é o fato de que a área de um paralelogramo depende apenas da base e da altura correspondente, não importando a forma. Por exemplo, os paralelogramos da figura 7.21 possuem a mesma área, pois têm mesma altura e base.

Terminaremos esta seção com o cálculo da área de um triângulo qualquer. Antes vamos, novamente, estabelecer uma nomenclatura conveniente. Analogamente ao que foi feito para paralelogramos também podemos escolher um lado qualquer de um triângulo e chamá-lo de *base* do triângulo. Uma vez escolhida uma base dizemos que a distância entre esta e o vértice oposto é a *altura* (do triângulo) *correspondente* ou *relativa a esta base*. No caso de triângulos também costumamos utilizar o nome *altura* para designar o segmento determinado pelo vértice oposto à base e o pé da perpendicular a esta passando pelo vértice. Então podemos dizer que um triângulo tem três bases e três alturas.



(a) (b)

Figura 7.22

Na figura 7.22a mostramos um triângulo cujas alturas são todas interiores, e na figura 7.22b um triângulo que possui uma altura interior e duas exteriores. Uma altura também pode coincidir com um dos lados, como num triângulo retângulo. Na verdade podemos mostrar o seguinte:

(i) se todos os ângulos de um triângulo são agudos, então todas as alturas são interiores;

(ii) se um dos ângulos é obtuso, então a altura correspondente a este vértice é interior, e as outras duas são exteriores;

(iii) se o triângulo é retângulo, então duas das alturas coincidem com os catetos, e a altura correspondente à hipotenusa é interior.

Voltemos ao nosso assunto. Queremos provar, utilizando os nossos axiomas e o material desenvolvido até agora, a conhecida fórmula "a área de um triângulo é a metade do produto da base pela altura". Mais precisamente, temos o teorema:

Teorema 7.12. *A área de um triângulo é a metade do produto da medida de qualquer um de seus lados escolhido como base pela altura correspondente.*

Demonstração. Nosso "truque" para demonstrar este teorema será o de sempre: tomaremos um triângulo e construiremos uma região poligonal de área conhecida que o contenha de maneira "experta". Veja a figura 7.23: começamos com o triângulo dado $\triangle ABC$ e sobre o lado $\overline{AB}$ construímos outro triângulo $\triangle ADB$ tal que $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ e $\overline{DB} \equiv \overline{AC}$. Então $\square ACBD$ é um paralelogramo (prove isto!).

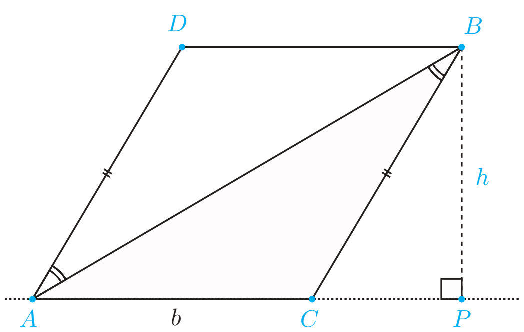


Figura 7.23

No paralelogramo $\square ACBD$ tomemos $\overline{AC}$ como base, cuja altura relativa h está representada pelo segmento $\overline{BP}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$. Em particular, h é a mesma altura do triângulo $\triangle ABC$ em relação a $\overline{AC}$. Observamos também que $\triangle ABC \equiv \triangle BAD$ (por quê?). Assim, colocando $AC = b$, temos que

$$b.h = \mathcal{A}(\square ACBD) = \mathcal{A}(\triangle ABC) + \mathcal{A}(\triangle BAD) = 2\mathcal{A}(\triangle ABC)$$

donde

$$\mathcal{A}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}bh,$$

como queríamos.

Agora, se repetirmos o mesmo argumento com os outros lados de $\triangle ABC$, obtemos fórmulas análogas, todas determinando o mesmo número[3] $\mathcal{A}(\triangle ABC)$, donde conclui-se que a área não depende da escolha da base (e da altura) do triângulo. $\square$

Problema 7.7. Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ dois triângulos tais que:

(1) $AC = 8$ e a altura de $\triangle ABC$ em relação a $\overline{AC}$ mede 3;

(2) $EF = 6$.

Sabendo que $\mathcal{A}(\triangle ABC) = \mathcal{A}(\triangle DEF)$ calcule a medida da altura de $\triangle DEF$ em relação a $\overline{EF}$.

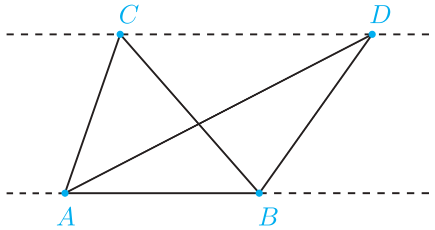


Figura 6.19 - Exercício 6.5

Problema 7.8. Mostre que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ABD$ ilustrados na figura 7.24 possuem a mesma área, levando em consideração que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. (Sugestão: veja a observação 7.1.)

Problema 7.9. Mostre que a área do trapézio $\square ABCD$ ilustrado na figura 7.25 é

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\square ABCD) = \frac{b_1 + b_2}{2}h$$

onde $b_1 = CD$, $b_2 = AB$ e h, a *altura* do trapézio, é a distância entre as retas paralelas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$. (Sugestão: Divida o trapézio em dois triângulos usando uma diagonal e aplique o teorema 7.12)

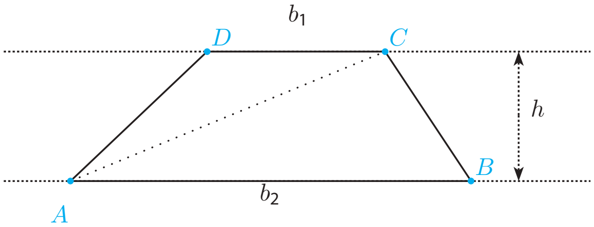


Figura 7.25 - Problema 7.9

[3]Lembrem-se que a área de cada região poligonal é um único número estabelecido pelo axioma VI.1.

7.9 Área de Círculos

Um texto de fundamentos de geometria plana não poderia estar completo sem se falar um pouco sobre área de círculos e comprimento de circunferências. Apresentamos nesta seção uma breve discussão de como se calculam estas duas quantidades.

Nas seções anteriores vimos como calcular a área de regiões poligonais. A circunferência, certamente, não é um polígono, e o círculo não é uma região poligonal. Então, para se calcular sua área precisamos usar um artifício equivalente ao procedimento de integração: cobrimos parcialmente a região do plano delimitada por uma circunferência com regiões poligonais e, através de um processo de limite, levamos estas regiões a "cobrirem" integralmente a região circular correspondente. Há várias formas de se fazer isto. Vamos seguir uma argumentação ilustrada na figura 7.26 de forma intuitiva, sem entrar no rigor necessário:

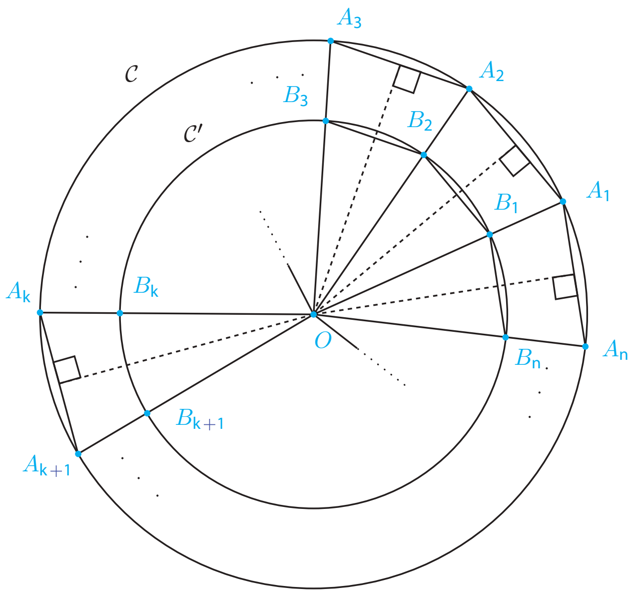


Figura 7.26

(a) Seja $\mathcal{C}$ uma circunferência de raio r e centro O.

(b) Marcamos sobre $\mathcal{C}$ pontos A_1, A_2, A_3, …, A_n, $n \geqslant 3$, formando triângulos $\triangle A_1OA_2$, $\triangle A_2OA_3$, etc. Seja

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}(\triangle A_1OA_2) + \mathcal{A}(\triangle A_2OA_3) + \cdots + \mathcal{A}(\triangle A_{n-1}OA_n)$$

a área do polígono $A_1A_2 \ldots A_n$.

(c) Então, embora não tenhamos estabelecido com rigor com conceito de área para figuras planas em geral, é razoável afirmar que

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) \geqslant \mathcal{A}_n,$$

onde $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ é a área do círculo (que não definimos formalmente – deixamos a compreensão disto para a nossa intuição). Também é razoável afirmar que quando aumentamos o número de vértices do polígono sua área se "aproxima" da área $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ do círculo.

Em linguagem mais matemática:

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A}_n = \mathcal{A}(\mathcal{C}).$$

(d) Precisamos então calcular $\mathcal{A}_n$, e para isto precisamos calcular a área de cada triângulo $\triangle A_kOA_{k+1}$ para $1 \leqslant k < n$. Sejam $l_k = A_kA_{k+1}$ a base do triângulo e h_k sua altura. Então

$$\mathcal{A}(\triangle A_kOA_{k+1}) = \frac{1}{2}l_kh_k.$$

Suponhamos, para simplificar a argumentação, que $A_1A_2\ldots A_n$ seja um polígono regular, isto é, que todos os seus lados tenham o mesmo comprimento l. Então todos os triângulos têm base $l_k = l$ e altura $h_k = h$, donde

$$\mathcal{A}(\triangle A_kOA_{k+1}) = \frac{1}{2}lh$$

e, portanto,

$$\mathcal{A}_n = n\frac{1}{2}lh = \frac{1}{2}(n.l)h.$$

Observamos agora que quando $n \to \infty$ então $h \to r$ (h "tende" a r, o raio da circunferência $\mathcal{C}$) e $n.l \to \mathfrak{C}$, onde $\mathfrak{C}$ indica o comprimento de $\mathcal{C}$. Então, no "limite",

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \frac{1}{2}\mathfrak{C}r. \tag{7.17}$$

Esta é a área de um círculo, em função de seu raio e do comprimento da circunferência correspondente. A próxima etapa que precisamos completar é descobrir quem é $\mathfrak{C}$...

O comprimento de uma circunferência está associado a um dos mais famosos números que conhecemos: o número π. O grande matemático grego Euclides, do qual procuramos humildemente seguir os passos neste texto, não calculou o valor de π – este cálculo foi feito pela primeira vez (no mundo ocidental) por Arquimedes, uns 100 anos mais novo do que Euclides – mas mostrou que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é constante. Esta razão é o que denominamos pela letra grega π[4].

A argumentação de Euclides para provar que esta razão é constante foi mais ou menos assim (em linguagem mais moderna, é claro): ele tomou duas circunferências e as dividiu em n partes, aproximando-as por linhas poligonais, em seguida mostrou que os comprimentos das linhas aproximavam-se dos comprimentos das circunferências quando n tendia para infinito; em seguida relacionou o comprimento das poligonais com os raios das circunferências e encontrou a razão em cada uma, verificando que eram iguais. Vamos exemplificar este argumento utilizando a figura 7.26:

(a) Tomemos as circunferências $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ concêntricas e as dividamos como na figura. Para simplificar, vamos supor que os polígonos sejam regulares.

[4]Esta notação para a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro foi estabelecida pelo matemático galês William Jones (1675-1749), mas popularizada por Leonard Euler (1707-1783), um grande criador de notações. Outras notações estabelecidas por Euler foram, por exemplo, o sinal de somatório Σ, a letra i para representar o número $\sqrt{-1}$, e o símbolo $f(x)$ para designar funções.

(b) Sejam $l = A_1A_2$ e $l' = B_1B_2$ os lados dos dois polígonos ilustrados. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ os comprimentos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, respectivamente. Observe que

$$\mathcal{C} \geqslant n.l \quad \text{e} \quad \mathcal{C}' \geqslant n.l'.$$

Podemos provar que, passando ao limite,

$$\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} n.l \quad \text{e} \quad \mathcal{C}' = \lim_{n\to\infty} n.l'.$$

(c) Os raios de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são $r = OA_1 = OA_k$ e $r' = OB_1 = OB_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Da semelhança dos triângulos $\triangle A_kOA_{k+1}$ e $\triangle B_kOB_{k+1}$ obtemos então

$$\frac{A_kA_{k+1}}{B_kB_{k+1}} = \frac{OA_k}{OB_k} \Rightarrow \frac{l}{l'} = \frac{r}{r'},$$

donde, em particular,

$$\frac{n.l}{n.l'} = \frac{2r}{2r'} = \frac{d}{d'} \Rightarrow \frac{n.l}{d} = \frac{n.l'}{d'},$$

onde indicamos por d e d' os diâmetros de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$, respectivamente.

(d) Passando ao limite, isto é, fazendo n tender a infinito, obtemos

$$\frac{\mathcal{C}}{d} = \frac{\mathcal{C}'}{d'}.$$

Esta razão, independente das circunferências, é o número que, como já dissemos, denominamos por π, ou seja,

$$\pi = \frac{\mathcal{C}}{d}. \tag{7.18}$$

Assim, de (7.18) obtemos a fórmula para calcular o comprimento $\mathcal{C}$ de uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r:

$$\mathcal{C} = 2\pi r.$$

E da relação acima e (7.17) obtemos a fórmula para calcular a área da região delimitada por $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \pi r^2.$$

Uma última observação: o número π é um número muito interessante e misterioso. Ele é um exemplo do que chamamos de *números transcendentes*. Os números transcendentes são números *irracionais* que não são raízes de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um número irracional que é raiz da equação $x^2 - 2 = 0$ e, portanto, não é transcendente. Quando escrevemos $\pi \cong 3,14159265359...$ estamos apresentando uma aproximação do valor de π em termos de sua expansão decimal, no caso com 11 casas exatas.

7.10 Exercícios

7.1. Diga se é verdadeira ou falsa cada afirmação abaixo, e justifique:

(a) Um retângulo é um trapézio.

(b) Um losango é um quadrado.

(c) As diagonais de um losango se cortam ao meio.

(d) Todo quadrado é um losango.

(e) As diagonais de um retângulo são perpendiculares entre si.

(f) Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares entre si então o quadrilátero é um losango.

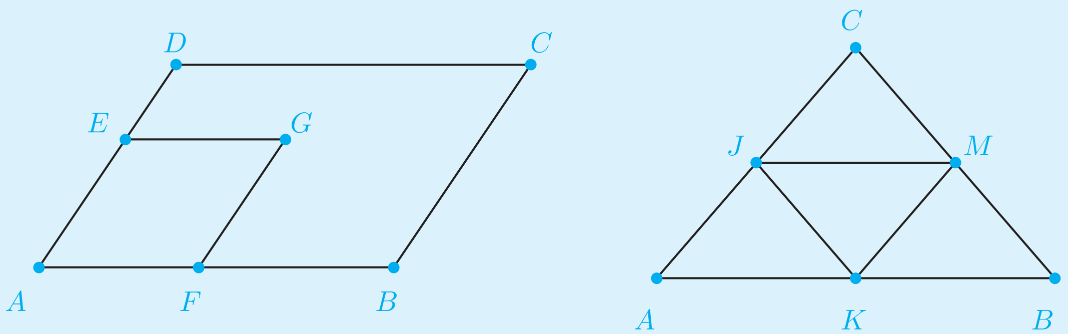
(g) Se as diagonais de um quadrilátero são perpendiculares entre si e se cortam ao meio, então o quadrilátero é um losango.

7.2. Responda aos itens abaixo:

(a) A medida de um ângulo de um paralelogramo é 45. Quais as medidas dos outros ângulos?

(b) Os ângulos consecutivos de um paralelogramo medem $x+30$ e $2x-60$, respectivamente. Determine x.

7.3. Na figura 7.27a $\square ABCD$ e $\square AFGE$ são paralelogramos. Qual a relação entre $\measuredangle D$ e $\measuredangle G$? E entre $\measuredangle G$ e $\measuredangle C$?

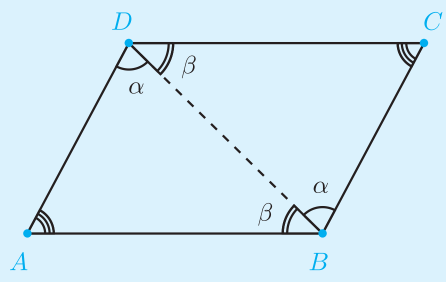


(a) (b)

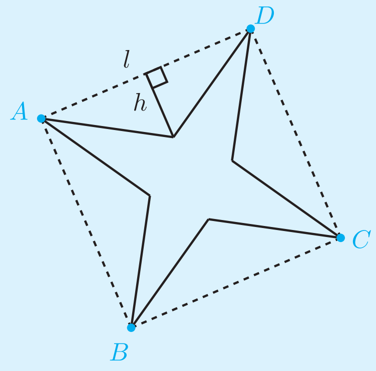
Figura 7.27 - Exercícios 7.3 e 7.4

7.4. Na figura 7.27b os quadriláteros $\square AKMJ$ e $\square BMJK$ são paralelogramos. Demonstre que se $\overline{KJ} \equiv \overline{KM}$ então $\triangle ABC$ é isósceles.

7.5. Prove que se o paralelogramo $\square ABCD$ não for um retângulo então possui um par de ângulos opostos congruentes agudos e um par de ângulos opostos congruentes obtusos (veja a figura 7.28a).



(a)



(b)

Figura 7.28 - Exercícios 7.5 e 7.6

7.6. Na figura 7.28b $\square ABCD$ é um quadrado e os segmentos que formam a estrela são todos congruentes entre si. Se $l = 10$ é a medida do lado do quadrado e $h = 2$ é a altura de um dos triângulos da figura, como ilustrado, encontre a área da estrela.

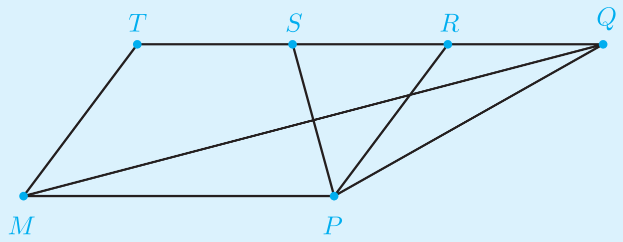


Figura 7.29 - Exercício 7.7

7.7. Na figura 7.29 o quadrilátero $\square MPRT$ é um paralelogramo, e

$$\overline{TS} \equiv \overline{SR} \equiv \overline{RQ}.$$

Calcule as seguintes razões:

(a) $\dfrac{\mathcal{A}(\triangle PRS)}{\mathcal{A}(\triangle PRQ)}$

(b) $\dfrac{\mathcal{A}(\triangle PMQ)}{\mathcal{A}(\triangle PQS)}$

(c) $\dfrac{\mathcal{A}(\triangle PMQ)}{\mathcal{A}(\triangle MPRT)}$

(d) $\dfrac{\mathcal{A}(\triangle PQR)}{\mathcal{A}(\triangle MPST)}$

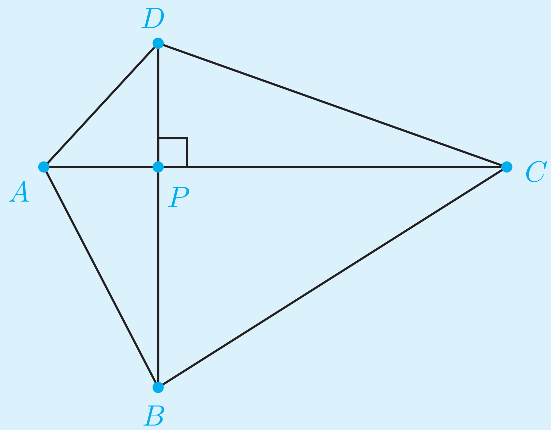


Figura 7.30 - Exercício 7.8

7.8. Considere o quadrilátero $\square ABCD$ representado na figura 7.30, cujas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares entre si. Prove que

$$\mathcal{A}(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AC)(BD).$$

7.9. Seja $\square ABCD$ um losango.

(a) Prove que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de $\square ABCD$ são perpendiculares entre si.

(b) Usando o resultado do exercício anterior calcule a área de $\square ABCD$ quando $AC = 15$ e $BD = 20$.

8

Semelhança, Teorema de Pitágoras e aplicações

AULA 8: SEMELHANÇA, TEOREMA DE PITÁGORAS E APLICAÇÕES

OBJETIVOS: Introduzir o conceito de *semelhança* de triângulos, o teorema fundamental da proporcionalidade – que relaciona semelhança de triângulos com paralelismo –, e o Teorema de Pitágoras. Ao final são apresentados outros pontos notáveis de triângulos: o *baricentro*, o *ortocentro* e o *incentro*.

8.1 Introdução

Nosso objetivo nesta aula é rever o conceito de *semelhança*, apresentado na aula 5 do texto de *Resolução de Problemas Geométricos* e estudar, de um outro ponto de vista, os teoremas de Pitágoras e de Tales, também vistos no texto citado, na aula 6. Terminamos a aula apresentando outros pontos notáveis de triângulos: o *baricentro*, o *ortocentro* e o *incentro* que, juntamente com o *circuncentro* – visto na aula 6 deste livro, completam o conjunto dos quatro principais pontos notáveis de triângulos.

Então, para começar o assunto, a primeira tarefa de vocês é reler as aulas 5 e 6 de [4].

8.2 Semelhança e o teorema fundamental da proporcionalidade

Em [4] vocês tomaram contato com o conceito de semelhança, na aula 5. Este conceito tem íntima ligação com o conceito de proporcionalidade, também visto naquele texto. Vamos ver agora como relacionamos esta história de proporção com o conceito de área, estudado na aula anterior.

Proposição 8.1. *As áreas de dois paralelogramos com uma mesma altura são proporcionais às suas bases relativas à esta altura.*

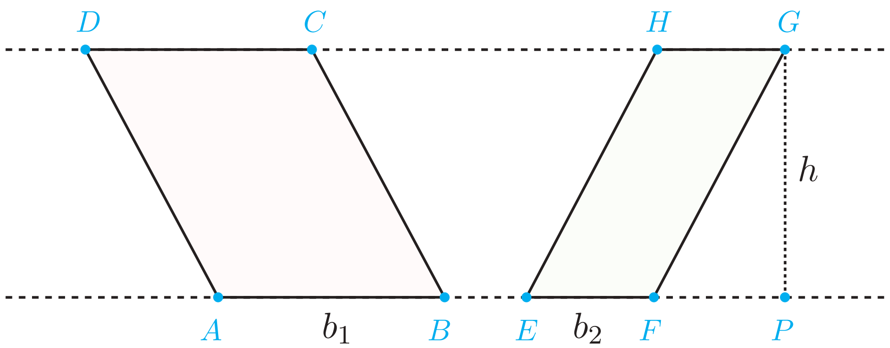


Figura 8.1

Demonstração. Sejam $\square ABCD$ e $\square EFGH$ dois paralelogramos tais que as alturas referente aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ sejam iguais (veja figura 8.1). Seja h a altura comum a ambos paralelogramos, e tomemos $AB = b_1$ e $EF = b_2$. Se designarmos

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(\square ABCD) \text{ e } \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\square EFGH),$$

queremos provar que

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Mas, como se pode perceber, esta relação segue diretamente do cálculo das áreas dos paralelogramos. De fato, temos que

$$\mathcal{A}_1 = b_1 h \text{ e } \mathcal{A}_2 = b_2 h,$$

donde, dividindo uma expressão pela outra, obtemos

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \frac{b_1 h}{b_2 h} = \frac{b_1}{b_2}.$$

$\square$

Problema 8.1. Prove o seguinte resultado: *As áreas de dois triângulos com uma mesma altura são proporcionais às bases relativas a esta altura.* Em outras palavras, considere dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ tais que a altura de ambos em relação aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, respectivamente, seja h. Prove que

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle ABC)}{\mathcal{A}(\triangle DEF)} = \frac{AB}{DE}.$$

Em [4], na página 69, vocês encontram a figura 5.3, semelhante à figura 8.2 apresentada aqui, onde $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$, e a demonstração de que

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}. \tag{8.1}$$

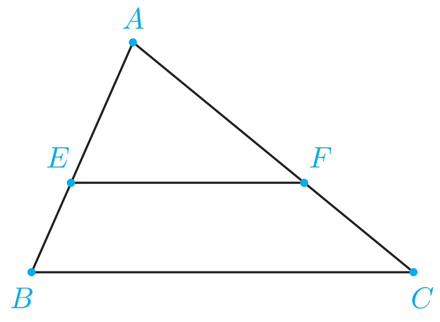


Figura 8.2

A demonstração de (8.1) em [4] utiliza o *Teorema de Tales*. Como vocês viram em [4], a demonstração do Teorema de Tales não é simples, e usa fortemente a propriedade de aproximação de números reais por sequências de números racionais. Daremos abaixo uma outra demonstração para (8.1) utilizando técnicas envolvendo áreas de figuras planas.

Teorema 8.2. *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AC}$ pontos tais que $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ (veja a figura 8.2). Então vale a relação (8.1).*

Demonstração. Dado o triângulo $\triangle ABC$ construamos os paralelogramos $\square ABCD$ e $\square ACBD'$, como representados na figura 8.3. Observe que ambos possuem a mesma base $\overline{BC}$ e mesma altura relativa a esta base (verifique!). Logo

$$\mathcal{A}(\square ABCD) = \mathcal{A}(\square ACBD'). \tag{8.2}$$

Analogamente os paralelogramos $\square EBCG$ e $\square FCBH$ compartilham da mesma base $\overline{BC}$ e mesma altura relativa a esta base, donde

$$\mathcal{A}(\square EBCG) = \mathcal{A}(\square FCBH). \tag{8.3}$$

De (8.2) e (8.3) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\square AEGD) &= \mathcal{A}(\square ABCD) - \mathcal{A}(\square EBCG) = \\ &= \mathcal{A}(\square ACBD') - \mathcal{A}(\square FCBH) = \mathcal{A}(\square AFHD'), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{A}(\square AEGD) = \mathcal{A}(\square AFHD'). \tag{8.4}$$

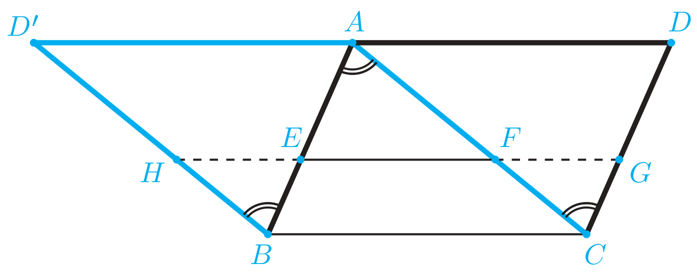


Figura 8.3

Examinemos a situação de outro ponto de vista. Tomando como base de $\square AEGD$ e $\square ABCD$ os lados $\overline{AE}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, e aplicando a proposição 8.1 obtemos

$$\frac{\mathcal{A}(\square ABCD)}{\mathcal{A}(\square AEGD)} = \frac{AB}{AE}. \tag{8.5}$$

Analogamente, tomando como base de $\square AFHD'$ e $\square ACBD'$ os lados $\overline{AF}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, obtemos

$$\frac{\mathcal{A}(\square ACBD')}{\mathcal{A}(\square AFHD')} = \frac{AC}{AF}. \tag{8.6}$$

Logo, usando as igualdades (8.2) e (8.4), deduzimos de (8.5) e (8.6) que

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\mathcal{A}(\square ABCD)}{\mathcal{A}(\square AEGD)} = \frac{\mathcal{A}(\square ACBD')}{\mathcal{A}(\square AFHD')} = \frac{AC}{AF}$$

ou seja,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$$

provando (8.1). $\square$

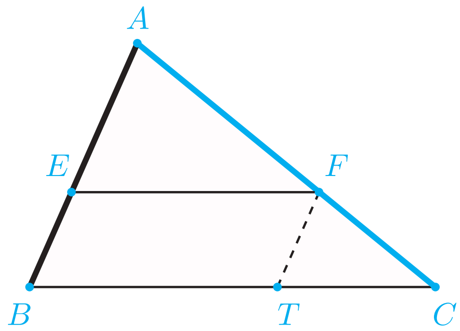


Figura 8.4

Problema 8.2. Podemos também provar que, nas condições do enunciado do teorema acima,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{EF}. \tag{8.7}$$

Siga os seguintes passos:

(a) Trace por F uma reta paralela a $\overline{AB}$, encontrando $\overline{BC}$ em um ponto T (veja a figura 8.4), e mostre, aplicando o teorema 8.2 aos pontos F e T, que

$$\frac{CB}{CT} = \frac{CA}{CF}. \tag{$*$}$$

(b) Mostre que

$$\frac{CB}{TB} = \frac{CA}{FA}. \tag{$**$}$$

(Sugestão: Inverta os lados da igualdade (*) e faça as seguintes substituições: $CT = CB - TB$ e $CF = CA - AF$.)

(c) Verifique que $TB = EF$ e conclua que

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{AF}.$$

Finalmente, usando (8.1), obtenha (8.7).

A recíproca do teorema 8.2 também é verdadeira, ou seja,

Teorema 8.3. *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{AC}$ pontos tais que*

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}. \tag{8.8}$$

Então $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$.

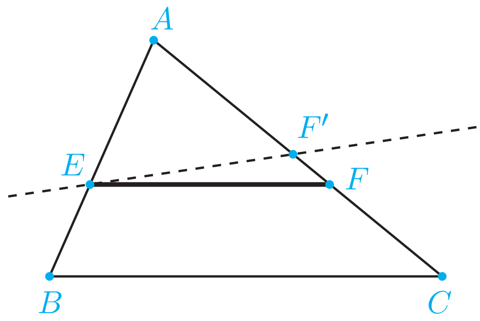


Figura 8.5

Demonstração. A demonstração deste teorema é bem mais simples que a do anterior. Tomemos por E uma reta paralela a $\overline{BC}$ e seja F' a interseção desta reta com $\overline{AB}$. Queremos provar que na verdade $F = F'$ (veja a figura 8.5).

Pelo teorema anterior sabemos que

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF'}$$

donde, usando (8.8), obtemos

$$\frac{AC}{AF} = \frac{AC}{AF'}$$

ou seja, $AF = AF'$. Ora,isto quer dizer que $F = F'$, como queríamos provar. □

8.3 Semelhança de Triângulos

Vamos recordar nesta seção a teoria de semelhança de triângulos que vocês viram em [4], nas aulas 5 e 6. Transcrevemos primeiro a definição 5.2 daquele livro:

Definição 8.4. Dois triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são *semelhantes* se é possível estabelecer uma correspondência entre seus lados e ângulos de modo que:

$$\measuredangle A \equiv \measuredangle D, \ \measuredangle B \equiv \measuredangle E, \ \measuredangle C \equiv \measuredangle F$$

e

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k.$$

A relação de semelhança será denotada por "$\sim$". No caso da definição acima escrevemos

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

A razão entre os lados dos triângulos é chamada de *razão de semelhança* dos triângulos.

Em outras palavras, para verificar se dois triângulos são semelhantes, procura-se uma relação entre seus vértices de forma que os ângulos correspondentes sejam congruentes. Se esta primeira condição falha, os triângulos não são semelhantes. Se dá certo, testa-se se as razões entre os lados opostos aos pares de ângulos congruentes são iguais. Se isto acontece, os triângulos são semelhantes, caso contrário não o são.

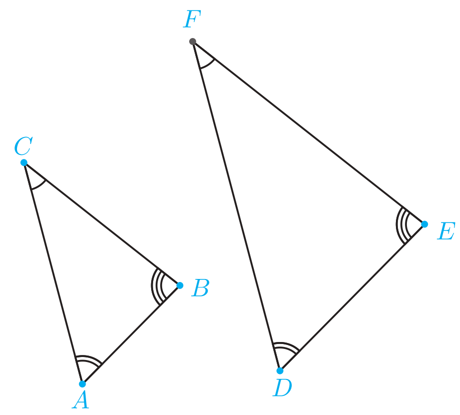


Figura 8.6 - Triângulos semelhantes

Observação 8.1. Observe que dois triângulos congruentes são também semelhantes, pois as medidas de seus lados opostos aos ângulos congruentes são iguais. Neste caso a razão de semelhança é 1.

Problema 8.3. Seguindo as notações do teorema 8.2 e do problema 8.2 da seção anterior, verifique que $\triangle ABC \sim \triangle AEF$.

Na verdade não precisamos verificar integralmente as condições estabelecidas na definição 8.4 para garantir a semelhança de dois triângulos. Existem critérios, análogos aos critérios de congruência de triângulos, como vocês já viram em [4]. Vamos listá-los a seguir.

Teorema 8.5 (Caso AA de semelhança de triângulos)**.** *Dois triângulos que possuem dois pares de ângulos congruentes entre si são semelhantes.*

Representamos na figura 8.7 o teorema 8.5, onde $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, pois $\measuredangle A \equiv \measuredangle D$ e $\measuredangle B \equiv \measuredangle E$.

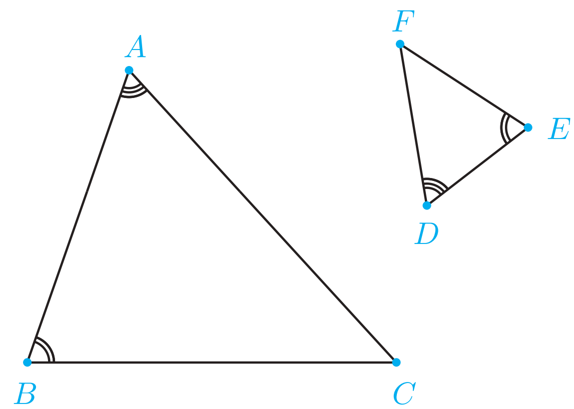


Figura 8.7 - Caso AA de semelhança de triângulos

Problema 8.4. Reveja a demonstração do teorema 8.5 em [4], na página 68.

Teorema 8.6 (Caso LAL de semelhança de triângulos)**.** *Se dois triângulos possuem um par de ângulos congruentes e os lados destes ângulos são proporcionais entre si, então são semelhantes.*

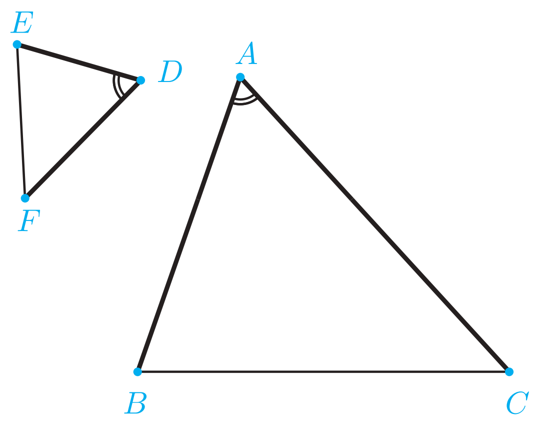


Figura 8.8 - Caso LAL de semelhança de triângulos

Representamos na figura 8.8 o teorema 8.6, onde $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, pois $\measuredangle A \equiv \measuredangle D$ e

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}.$$

Problema 8.5. Reveja a demonstração do teorema 8.6 apresentada em [4] na página 71.

Teorema 8.7 (Caso LLL de semelhança de triângulos)**.** *Se os lados de dois triângulos são proporcionais entre si tomados dois a dois, então os triângulos são semelhantes.*

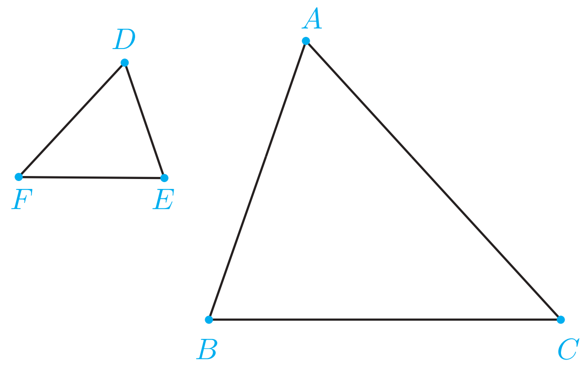


Figura 8.9 - Caso LLL de semelhança de triângulos

Representamos na figura 8.9 o teorema 8.7, onde $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, pois

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$$

Problema 8.6. Reveja a demonstração do teorema 8.7 em [4], na página 72.

8.4 Teorema de Pitágoras

Em [4], página 78, vocês estudaram um dos teoremas mais conhecidos e importantes da história do conhecimento matemático, o famoso *Teorema de Pitágoras*, que enunciamos abaixo.

Teorema 8.8 (Teorema de Pitágoras). *Em todo triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

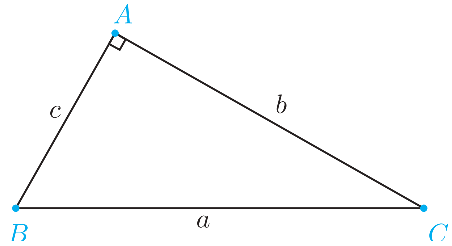


Figura 8.10 - Teorema de Pitágoras

Reescrevemos o enunciado do Teorema de Pitágoras nas notações da figura 8.10: se $\triangle ABC$ é um triângulo retângulo em A então a hipotenusa de $\triangle ABC$ é $\overline{BC}$, e os catetos são $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Colocando $BC = a$, $AB = c$ e $AC = b$, então o teorema afirma que

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Existem inumeráveis demonstrações do Teorema de Pitágoras. Uma das mais comuns, utilizando a teoria de semelhança de triângulos, vocês viram em [4]. Apresentamos a seguir uma outra, usando o conceito de área, provavelmente elaborada na antiga Índia.

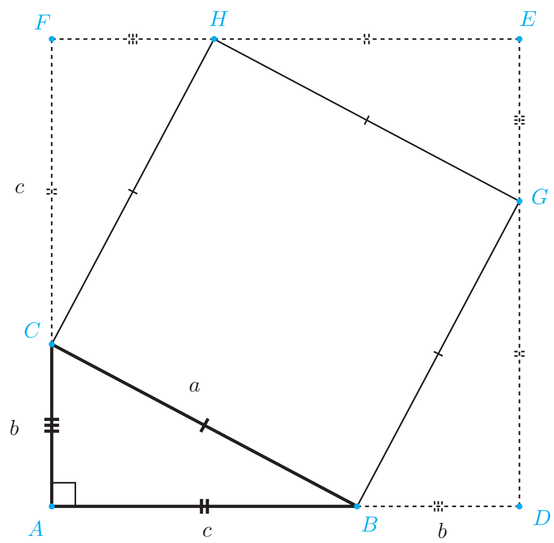


Figura 8.11

Na figura 8.11 construímos sobre a hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo retângulo $\triangle ABC$ um quadrado $\square BCHG$, e sobre cada lado deste quadrado construímos "cópias" de $\triangle ABC$, obtendo um outro quadrado $\square ADEF$. Tomando $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$, então os lados de $\square BCHG$ medem a, e os lados de $\square ADEF$ medem $b + c$.

Das propriedades sobre áreas que aprendemos na aula anterior temos que:

$$\mathcal{A}(\square ABC) = \frac{1}{2}bc \tag{8.9}$$
$$\mathcal{A}(\square ADEF) = (b+c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 \tag{8.10}$$
$$\mathcal{A}(\square BCHG) = a^2 \tag{8.11}$$

Além disso, como

$$\triangle ABC \equiv \triangle DGB \equiv \triangle EHG \equiv \triangle FCH$$

então a área de todos estes triângulos é a mesma.

Então temos que

$$\mathcal{A}(\square ADEF) = \mathcal{A}(\square BCHG) + 4\mathcal{A}(\triangle ABC)$$

donde, substituindo as relações (8.9), (8.10) e (8.11) na expressão acima, obtemos

$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 4.\frac{1}{2}bc = a^2 + 2bc,$$

ou seja,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

como queríamos provar.

A recíproca do Teorema de Pitágoras também é verdadeira, ou seja,

Teorema 8.9. *Se o quadrado da medida de um dos lados de um triângulo for igual à soma dos quadrados das medidas dos dois outros lados então o triângulo é retângulo, com o ângulo reto oposto ao primeiro lado.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo satisfazendo as condições do teorema. Para fixar ideias, suporemos que

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2.$$

Queremos provar que $\triangle ABC$ é reto em A.

Tomemos $\triangle DEF$ um triângulo retângulo em D com $DE = AB$ e $DF = AC$ (por que podemos dizer que existe um tal triângulo?). Do teorema de Pitágoras deduzimos que

$$(EF)^2 = (DE)^2 + (DF)^2 = (AB)^2 + (AC)^2,$$

ou seja,

$$(EF)^2 = (BC)^2.$$

Mas isto quer dizer que $EF = BC$. Assim provamos que todos os lados dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são congruentes entre si donde, pelo caso LLL de congruência, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$. Em particular $\measuredangle A \equiv \measuredangle D$. Portanto $\triangle ABC$ é triângulo retângulo com ângulo reto em A. $\square$

8.5 Pontos Notáveis de Triângulos: Baricentro

Como já comentamos algumas vezes neste texto, existem muitos pontos relacionados a triângulos que satisfazem a propriedades especiais, chamados *pontos notáveis*. Já apresentamos um na aula 6, o *circuncentro*. Para finalizar nosso curso apresentaremos outros três. Começaremos com o *baricentro*. Vamos a uma definição.

Definição 8.10. Em um triângulo os segmentos que ligam um vértice ao ponto médio de seu lado oposto são chamados de *medianas* do triângulo.

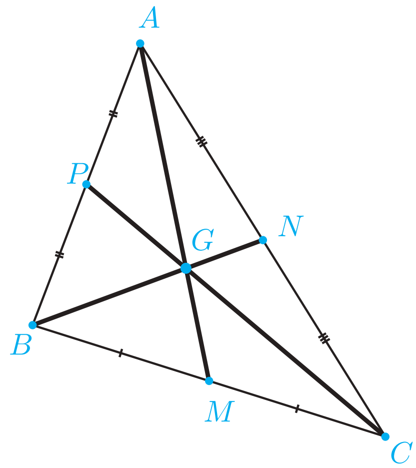


Figura 8.12 - Medianas de um triângulo

Teorema 8.11. *As medianas de um triângulo se encontram em um mesmo ponto cuja distância a cada vértice é dois terços do comprimento da mediana correspondente.*

Demonstração. Se em um triângulo $\triangle ABC$ as medianas são, como apresentado na figura 8.12, os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$, queremos provar que estes três segmentos encontram-se em um ponto G e que

$$AG = \frac{2}{3}AM, \quad BG = \frac{2}{3}BN \text{ e } CG = \frac{2}{3}CP.$$

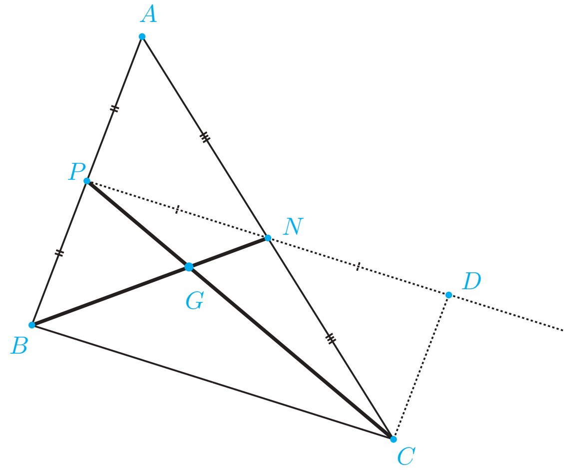


Figura 8.13

Começaremos com duas medianas, por exemplo, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$. Seja G o ponto de encontro destes segmentos[1]. Marquemos em $\overrightarrow{PN}$ um ponto D tal que $P-N-D$ e $\overline{PN} \equiv \overline{ND}$, formando o quadrilátero $\square BCDP$ (veja a figura 8.13).

Observe que $\triangle ANP \equiv \triangle CND$ pelo critério LAL, pois

$$\left.\begin{array}{rcll} \overline{AN} & \equiv & \overline{CN} & \text{pois } N \text{ é ponto médio de } AC; \\ \measuredangle ANP & \equiv & \measuredangle CND & \text{ângulos OPV;} \\ \overline{NP} & \equiv & \overline{ND} & \text{por construção.} \end{array}\right\} (LAL)$$

Em particular $\measuredangle PAN \equiv \measuredangle NCD$ e $\overline{PA} \equiv \overline{CD}$. Logo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e

$$\overline{BP} \equiv \overline{PA} \equiv \overline{CD} \Rightarrow \overline{BP} \equiv \overline{CD},$$

pois P é ponto médio de $\overline{AB}$. Provamos assim que $\square BCDP$ é um paralelogramo e portanto $\overline{PD} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{PD} \equiv \overline{BC}$. Da primeira relação deduzimos que $\measuredangle NPG \equiv \measuredangle GCB$ e $\measuredangle PNG \equiv \measuredangle GBC$, donde

$$\triangle PNG \sim \triangle GBC.$$

Da segunda relação tiramos que

$$PN = \frac{1}{2}BC,$$

ou seja, a razão de semelhança entre $\triangle PNG$ e $\triangle GBC$ é $\frac{1}{2}$, donde

$$\frac{PG}{GC} = \frac{NG}{GB} = \frac{1}{2}$$

e portanto $PG = \frac{1}{2}GC$ e $NG = \frac{1}{2}NB$. Como

$$PC = PG + GC \quad \text{e} \quad NB = NG + GB,$$

obtemos

$$GC = \frac{2}{3}CP \quad \text{e} \quad GB = \frac{2}{3}BN. \tag{8.12}$$

Repetimos agora o mesmo argumento com as medianas $\overline{AM}$ e $\overline{CP}$, por exemplo (veja a figura 8.14), provando que o ponto G' comum a ambas satisfaz as proporções

$$G'C = \frac{2}{3}CP \quad \text{e} \quad G'A = \frac{2}{3}AM. \tag{8.13}$$

Ora, então

$$G'C = \frac{2}{3}CP = GC \Rightarrow G'C = GC,$$

ou seja, G' e G são na verdade o mesmo ponto.

Assim provamos que as três medianas de $\triangle ABC$ se encontram em um mesmo ponto G e que, de (8.12) e (8.13),

$$GC = \frac{2}{3}CP, \; GA = \frac{2}{3}AM \; \text{ e } \; GB = \frac{2}{3}BN,$$

como queríamos. $\square$

[1] O leitor atento poderia perguntar: "como garantimos que o ponto G existe mesmo?" Bem, provar isto envolve uma argumentação cuidadosa utilizando o axioma II.6, que não achamos necessário fazer neste texto. Portanto, fica garantida aqui a existência de G.

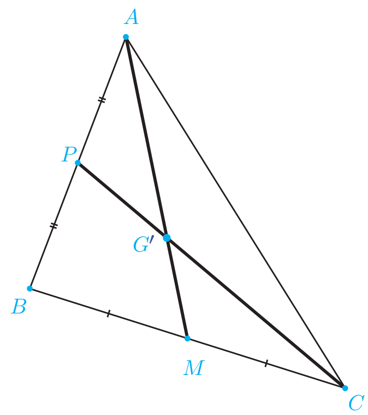


Figura 8.14

Definição 8.12. O ponto de encontro das medianas de um triângulo é chamado de *baricentro* do triângulo.

O baricentro de um triângulo tem um significado físico: é o seu *centro de gravidade*.

8.6 Pontos Notáveis de Triângulos: Ortocentro

Vamos conhecer outro ponto notável de triângulos, que é uma espécie de "irmão" do circuncentro, já nosso conhecido. Primeiro demonstraremos a existência do nosso novo amigo, e depois lhe daremos um nome.

Teorema 8.13. *As retas-suporte das alturas de um triângulo são concorrentes em um ponto.*

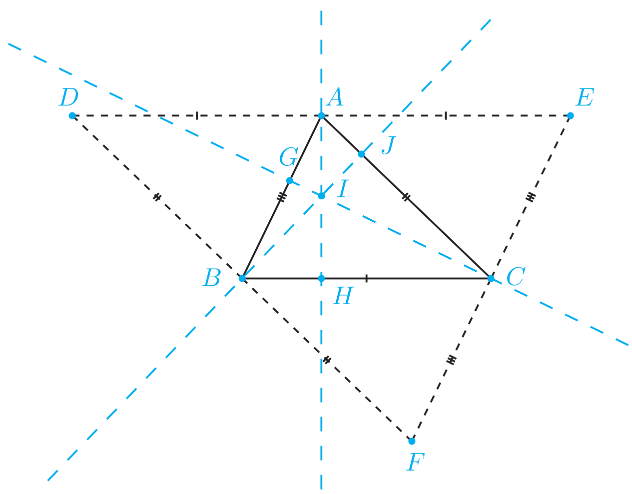


Figura 8.15

Demonstração. Reduziremos esta afirmação ao caso do teorema 6.10 através de uma engenhosa construção auxiliar que o leitor pode acompanhar na figura 8.15. Seja $\triangle ABC$ o nosso triângulo. Tomemos no ponto A a reta paralela a $\overline{BC}$ e marquemos nesta reta os pontos D e E tais que $\overline{DA} \equiv \overline{BC}$ e $\overline{AE} \equiv \overline{BC}$, formando os paralelogramos $\square DACB$ e $\square AECB$. Em particular temos que $\overline{DB} \equiv \overline{AC}$ e $\overline{EC} \equiv \overline{AB}$.

Seja agora F o ponto de encontro das retas $\overleftrightarrow{DB}$ e $\overleftrightarrow{EC}$ (como podemos garantir que estas retas são concorrentes?). Como $\overleftrightarrow{DA} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ então $\measuredangle ADB \equiv \measuredangle CBF$; analogamente temos $\measuredangle DAB \equiv \measuredangle BCF$. Assim concluímos que $\triangle DAB \equiv \triangle BCF$ pelo critério ALA. Logo $\overline{DB} \equiv \overline{BF}$. De maneira completamente análoga verificamos que $\triangle AEC \equiv \triangle BCF$, donde $\overline{EC} \equiv \overline{CF}$.

Juntando estas peças observamos que construímos o triângulo $\triangle DEF$ onde os pontos A, C e B são pontos médios dos lados $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FD}$, respectivamente. Tracemos agora por estes pontos as retas $\overleftrightarrow{AH}$, $\overleftrightarrow{CG}$ e $\overleftrightarrow{BJ}$ perpendiculares respectivamente aos lados listados, onde $H \in \overleftrightarrow{BC}$, $G \in \overleftrightarrow{AB}$ e $J \in \overleftrightarrow{AC}$. Estas retas são as mediatrizes dos lados de $\triangle DEF$ e, portanto, concorrem em um ponto I. Mas estas retas também são as retas-suporte das alturas de $\triangle ABC$ (confira!).

Provamos assim que as retas-suporte das alturas de um triângulo concorrem em um ponto. $\square$

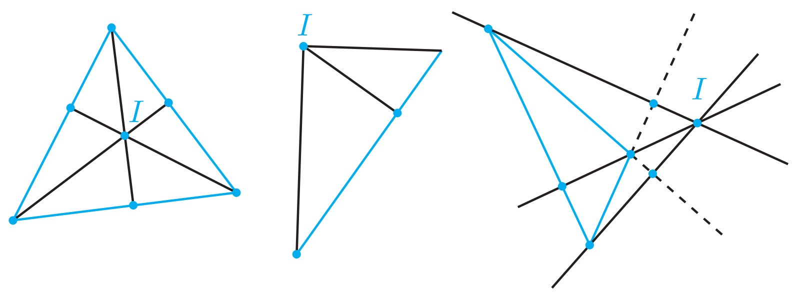


Figura 8.16

Definição 8.14. O ponto de encontro das alturas de um triângulo (ou de suas retas-suporte, se for o caso) é chamado de *ortocentro*.

A mesma observação feita sobre o circuncentro vale aqui: o ortocentro pode estar no interior ou exterior, ou ser um vértice do triângulo. Esta última situação ocorre quando o triângulo for reto – neste caso o ortocentro coincide com o vértice correspondente ao ângulo reto. Veja na figura 8.16 as diversas posições possíveis do ortocentro I.

8.7 Pontos Notáveis de Triângulos: Incentro

Nesta seção estudaremos o análogo do circuncentro para circunferências "dentro" de triângulos, isto é, da mesma forma que provamos na seção 6.5 que os vértices de um triângulo pertencem a uma circunferência, podemos provar que dentro do triângulo vive uma circunferência que é tangente a seus lados.

Definição 8.15. Dizemos que uma circunferência $\mathcal{C}$ está *inscrita* num triângulo $\triangle ABC$ se $\mathcal{C}$ for tangente a cada um dos lados do triângulo (veja figura 8.17).

O exercício então é encontrar um ponto equidistante dos lados do triângulo. Isto está intimamente relacionado com as bissetrizes dos ângulos do triângulo, como mostraremos a seguir.

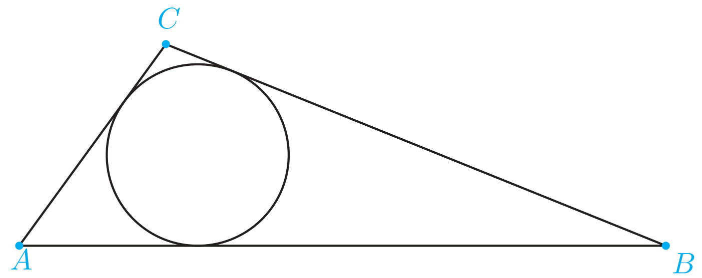


Figura 8.17

Teorema 8.16. *A bissetriz de um ângulo*[2] *é o lugar geométrico dos pontos interiores ao ângulo e equidistantes de seus lados.*

Demonstração. Sejam $\measuredangle BAC$ um ângulo, e $\overrightarrow{AD}$ sua bissetriz. Precisamos provar que:

(i) se $P \in \overrightarrow{AD}$ então P é equidistante de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, e

(ii) se P é um ponto no interior de $\measuredangle BAC$ e equidistante de seus lados, então $P \in \overrightarrow{AD}$.

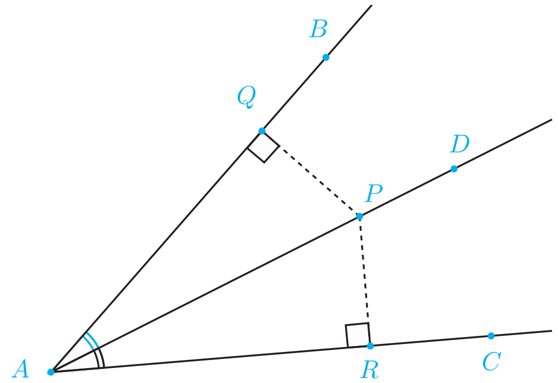


Figura 8.18

Começamos com (i). Seja $P \in \overrightarrow{AD}$. Tomemos $Q \in \overrightarrow{AB}$ e $R \in \overrightarrow{AC}$ pontos tais que $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{AC}$. Precisamos provar que $PR = PQ$ (veja figura 8.18).

Os triângulos $\triangle AQP$ e $\triangle ARP$ são retos em Q e R, respectivamente. Além disso, como $\overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $\measuredangle A$, então

$$\measuredangle QAP \equiv \measuredangle RAP.$$

Assim $\measuredangle APQ \equiv \measuredangle APR$ e portanto $\triangle AQP \equiv \triangle ARP$ pelo critério ALA, já que $\overline{AP}$ é lado comum (confira!). Logo $\overline{PQ} \equiv \overline{PR}$, ou seja, $PQ = PR$, como queríamos provar.

[2]Sempre é bom lembrar que quando usamos a palavra "ângulo" sem nenhum predicado, estamos nos referindo a ângulos não triviais.

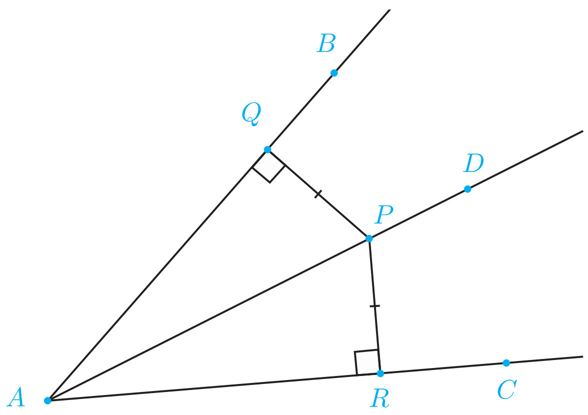


Figura 8.19

Agora vejamos (ii). Seja P um ponto interior a $\measuredangle BAC$ equidistante de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Em outras palavras, se Q e R são os pés das perpendiculares por P a $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, então $PQ = PR$ (veja a figura 8.19).

Como $\measuredangle PQA \equiv \measuredangle PRA$ são ângulos retos e $\overline{PA}$ é lado comum aos triângulos retângulos $\triangle AQP$ e $\triangle ARP$, pelo Teorema de Pitágoras temos que

$$(AQ)^2 + (QP)^2 = (PA)^2 = (PR)^2 + (AR)^2$$

donde $(AQ)^2 = (AR)^2$, ou seja, $\overline{AQ} \equiv \overline{AR}$. Assim temos que

$$\triangle AQP \equiv \triangle ARP$$

pelo critério LLL, donde

$$\measuredangle QAP \equiv \measuredangle RAP.$$

Logo $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD}$ é bissetriz de $\measuredangle BAC$. □

Podemos concluir deste resultado que o centro da circunferência inscrita em um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes de seus ângulos (se existir!).

Teorema 8.17. *As bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo concorrem em um mesmo ponto. Em particular todo triângulo é circunscritível.*

Demonstração. Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ as bissetrizes de $\measuredangle BAC$ e $\measuredangle ABC$, respectivamente. Precisamos verificar, primeiro, que $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BE}$ são concorrentes. Acompanhe os argumentos na figura 8.20.

Observe que os pontos B e C estão em semiplanos opostos em relação a $\overleftrightarrow{AD}$ e portanto, pelo axioma II.6, $\overline{BC}$ encontra $\overleftrightarrow{AD}$ em um ponto P interior ao segmento.

De forma análoga $\overleftrightarrow{BE}$ separa P e A em semiplanos opostos. Então esta reta e o segmento $\overline{AP}$ encontram-se em um ponto I, interior a $\overline{AP}$. Com isto provamos que $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{BE}$ concorrem em um ponto I.

Seja agora $\overrightarrow{CF}$ a bissetriz de $\measuredangle ACB$. Para terminar a demonstração precisamos verificar que $I \in \overrightarrow{CF}$. Porém isto segue do teorema 8.16. De fato, como $I \in \overrightarrow{AD}$, então I é equidistante de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; analogamente, como $I \in \overrightarrow{BE}$, I é equidistante de $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$. Assim I equidista de $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, donde I pertence às três bissetrizes.

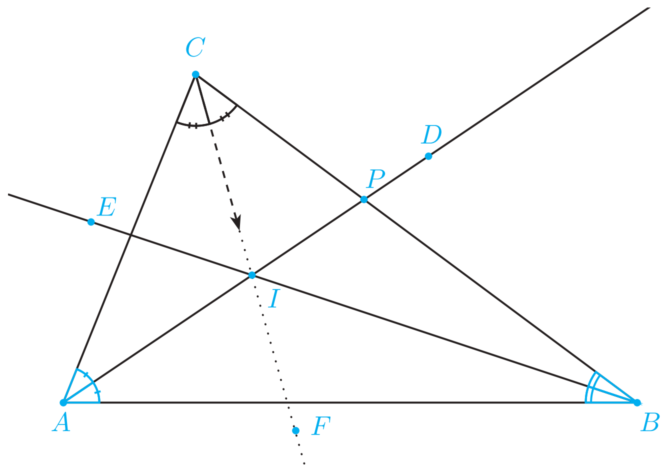


Figura 8.20

Para terminar, seja $G \in \overline{AB}$ um ponto tal que $\overleftrightarrow{IG} \perp \overline{AB}$ e tracemos a circunferência $\mathcal{C} = \mathcal{C}(I, d)$ com $d = IG$, a distância de I aos lados do triângulo (veja a figura 8.21). É claro que $\mathcal{C}$ é tangente a $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto G. Sejam $F \in \overline{CB}$ e $H \in \overline{AC}$ os pés das perpendiculares por I a $\overline{CB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Então $IG = IH = IF$ e portanto $\mathcal{C}$ também é tangente aos outros lados do triângulo nos pontos F e H, Provamos assim que $\mathcal{C}$ está inscrito em $\triangle ABC$. $\square$

Definição 8.18. O ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo é chamado de *incentro* do triângulo.

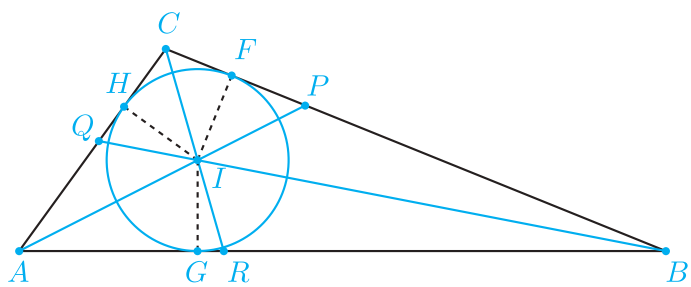


Figura 8.21

O leitor pode observar que, ao contrário do circuncentro e do ortocentro, o incentro é sempre um ponto interior ao triângulo.

8.8 Exercícios

8.1. Prove que a relação de semelhança é uma relação de equivalência, isto é, que se $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e $\triangle DEF \sim \triangle A'B'C'$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

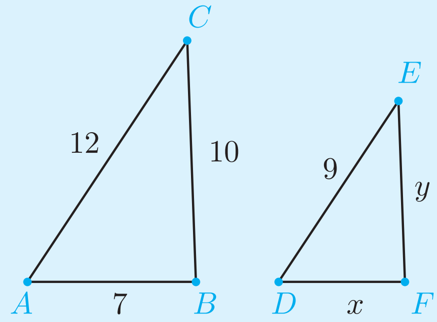


Figura 8.22 - Exercício 8.2

8.2. Na figura 8.22 $\triangle ABC \sim \triangle DFE$ e os comprimentos conhecidos dos lados são dados. Calcule x e y.

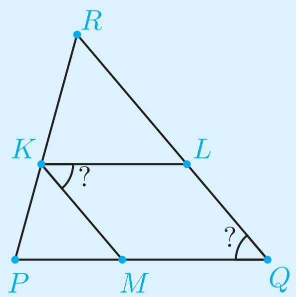


Figura 8.23 - Exercício 8.3

8.3. Na figura 8.23 tem-se que $\triangle PMK \sim \triangle KLR$. Prove que

$$\measuredangle Q \equiv \measuredangle MKL.$$

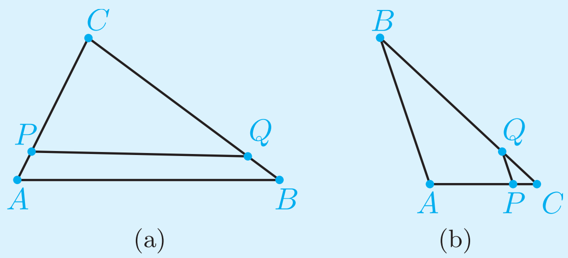


Figura 8.24 - Exercício 8.4

8.4. Em relação à figura 8.24 pergunta-se se $\overline{PQ}$ é ou não paralelo a $\overline{AB}$ nas seguintes situações:

(a) Na figura 8.24a com $AC = 20$, $BC = 30$, $PC = 16$ e $QC = 25$.

(b) Na figura 8.24b com $AC = 9$, $BC = 18$, $AP = 7$ e $CQ = 4$.

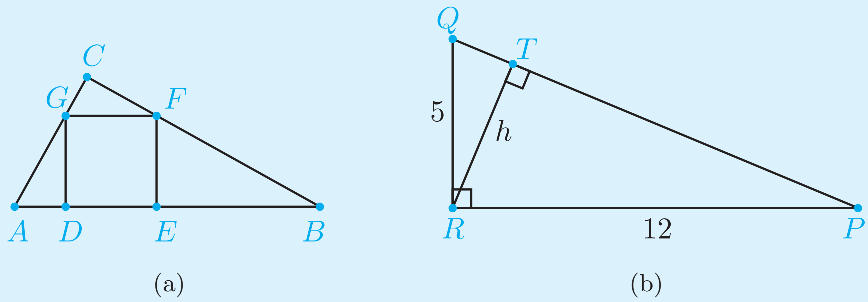


Figura 8.25 - Exercícios 8.5 e 8.6

8.5. Na figura 8.25a $\square DEFG$ é um quadrado e $\measuredangle C$ é reto. Demonstre que

(a) $\triangle ADG \sim \triangle GCF$.

(b) $\triangle ADG \sim \triangle FEB$.

(c) $AD.EB = DG.FE$.

(d) $DE = \sqrt{AD.EB}$.

8.6. Na figura 8.25b $\triangle QRP$ é reto em R e $\overline{RT}$ é a altura do triângulo em relação a sua hipotenusa $\overline{PQ}$. Se $QR = 5$ e $PR = 12$, determine o comprimento h de $\overline{RT}$.

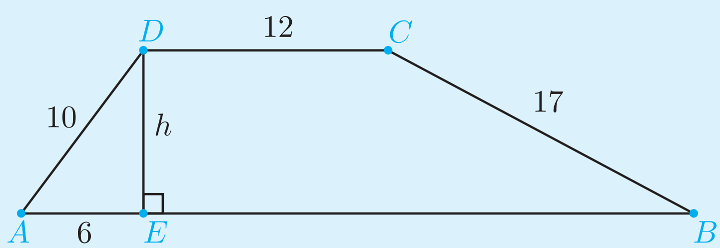


Figura 8.26 - Exercício 8.7

8.7. Na figura 8.26 representamos um trapézio $\square ABCD$. Alguns segmentos têm as medidas indicadas na figura, e $h = ED$ é a medida da altura do trapézio. Com os dados indicados calcule h e a área de $\square ABCD$.

REFERÊNCIAS

[1] J. L. M. Barbosa, *Geometria Euclidiana Plana*, SBM, Rio de Janeiro, 1985.

[2] O. Dolce & J. N. Pompeo, *Fundamentos de Matemática Elementar, vol 9: Geometria Plana*, 6^a ed., Atual Editora, São Paulo, 1990.

[3] F. L. Downs, Jr. & E. E. Moise, *Geometria Moderna*, 2 volumes, Editora Edgar Blucher, São Paulo, 1971.

[4] M .C. de Farias. *Resolução de Problemas Geométricos*, Editora UFMG, Belo Horizonte, 2009.

[5] GeoGebra. *Software gratuito para o ensino e aprendizagem da matemática*, em `http://www.geogebra.org/cms/pt_BR`.

[6] A. V. Pogorelov, *Geometría elemental*, tradução para o espanhol por Carlos Vega, Editora Mir, Moscou, 1974.

[7] M. L. B. de Queiroz & E. Q. F. Rezende, *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*, 2^a ed., Editora da Unicamp, Campinas, 2008.

Composto em caracteres Aller, Arial, Calibri, PT Sans e Times New Roman.
Editorado pelo Centro de Apoio à Educação a Distância da UFMG (CAED-UFMG).
Capa em Supremo, 250g, 4 X 0 cores - Miolo Off Set 120g, 2X2 cores.
2012