

Équation d'Euler

Dans tout le problème, si $a, b \in \mathbb{R}$, on note $(E_{a,b})$ l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$t^2 y''(t) + aty'(t) + by(t) = 0 \quad (E_{a,b})$$

L'objectif est de résoudre cette équation (appelée équation d'Euler) sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie I - Un exemple

Dans cette partie, on se place sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$, et on note (E) l'équation $(E_{-1,-3})$:

$$t^2 y''(t) - ty'(t) - 3y(t) = 0 \quad (E)$$

d'inconnue $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

- ① Montrer qu'il existe exactement deux réels r (que l'on précisera) tels que $t \mapsto t^r$ soit solution de (E) sur I . Dans la suite de l'énoncé, on notera $r_1 < r_2$ ces deux réels.
- ② Soit $y: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable, et soit $W: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto t^{r_2} y'(t) - r_2 t^{r_2-1} y(t)$$
 - Ⓐ Montrer que y est solution de (E) si et seulement si W est solution de l'équation différentielle (E_W) : $z'(t) - \frac{z(t)}{t} = 0$, de fonction inconnue z .
 - Ⓑ Résoudre (E_W) et en déduire que y est solution de (E) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $y'(t) - \frac{3}{t} y(t) = \frac{\lambda}{t^2}$.
 - Ⓒ En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est $\{t \mapsto \lambda t^{r_1} + \mu t^{r_2} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Partie II - Wronskien

Dans cette partie, on considère m et n deux fonctions continues à valeurs réelles sur un intervalle I , et on note (E_0) l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2, à coefficients non constants :

$$\forall t \in I, \quad y''(t) + m(t)y'(t) + n(t)y(t) = 0 \quad (E_0)$$

que l'on peut réécrire de façon fonctionnelle :

$$y'' + my' + ny = 0 \quad (E_0)$$

On suppose dans la suite qu'il existe une solution de (E_0) qui ne s'annule pas sur I , et on se fixe f une telle solution. Si $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, on appelle *wronskien* de f et g , et on note W_g la fonction

$$W_g = fg' - f'g.$$

- ① Montrer qu'une fonction $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable est solution de (E_0) si et seulement si W_g est solution de l'équation $y' + my = 0$.
- ② Exprimer, pour toute fonction g dérivable sur I , la dérivée de $\frac{g}{f}$ à l'aide de W_g et de f .
- ③ À l'aide des questions précédentes, expliquer en quelques phrases une méthode pour déterminer, à partir de la connaissance des fonctions m et f , toutes les solutions de (E_0) .
- ④ Plus précisément, montrer qu'il existe une fonction f_1 , non proportionnelle à f (c'est-à-dire telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f_1 \neq \lambda f$) telle que l'ensemble des solutions de (E_0) soit égal à $\{\lambda f + \mu f_1 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.
On expliquera clairement une méthode pour calculer une telle fonction f_1 .
- ⑤ Application : montrer que $\frac{1}{\sinh}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation : $y''(t) + \frac{2\cosh(t)}{\sinh(t)} y'(t) + y(t) = 0$.
En déduire l'ensemble des solutions de cette équation sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ⑥ Montrer que si f_2 est une solution de (E_0) non proportionnelle à f , alors l'ensemble des solutions de (E_0) est aussi $\{\lambda f + \mu f_2 \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

Partie III - Résolution de l'équation d'Euler

Dans cette partie, a et b sont deux réels. On note P le polynôme $X^2 + (a-1)X + b$.

- ① Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \mapsto t^r$ est solution de $(E_{a,b})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si r est une racine de P .

Dans la suite, on note Δ le discriminant de P .

- ② Premier cas : $\Delta > 0$. On suppose que P possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . En utilisant la partie II, déterminer l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ③ Deuxième cas : $\Delta = 0$. On suppose dans cette question que P possède une racine double r . Montrer qu'on a alors $a + 2r = 0$, puis déterminer l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ④ Troisième cas : $\Delta < 0$. On suppose à présent que P possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$.
- ⑤ a) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $t^\lambda = e^{\lambda \ln(t)}$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $y_\lambda : t \mapsto t^\lambda$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer y'_λ et y''_λ .
- ⑥ b) En admettant que les résultats de la partie II restent valables pour des fonctions à valeurs complexes (aucune difficulté puisque les calculs sont rigoureusement les mêmes), déterminer l'ensemble des solutions de $(E_{a,b})$ à valeurs complexes, puis réelles.