

Logique et rédaction en mathématiques

En mathématiques, on a donné des symboles pour pouvoir raccourcir et rendre plus lisible les écritures. Vous connaissez déjà les signes $+$, $-$, $\times$,... On a fait la même chose pour les propositions logiques : il y a un vocabulaire et des connecteurs pour rendre la langue des propositions logique uniforme et compréhensible de tous.

1 CONNECTEURS LOGIQUES ET QUANTIFICATEURS

Ce qui suit découle du bon sens. Vous avez déjà utilisé ces mots dans votre scolarité. Le but de ce paragraphe est de fixer le vocabulaire pour être sûr que l'on parle de la même chose.

On appelle *proposition* (ou *assertion*) toute phrase P au sujet de laquelle on peut poser la question :

P est-elle vraie ?

On peut essayer de répondre à cette question. La proposition P est alors dite *vraie* ou *fausse*. On appelle cela sa *valeur de vérité*. Elle ne peut pas être à la fois vraie et fausse. Si deux propositions ont la même valeur de vérité, elles sont dites *équivalentes*. En d'autres termes, pour démontrer une proposition P , vous n'êtes pas obligés de démontrer P elle-même, vous pouvez démontrer n'importe quelle proposition équivalente. Par exemple, démontrer que

Le Théorème de Thalès n'est pas indémontrable

revient à démontrer que :

Le théorème de Thalès est démontrable

Pour faciliter et harmoniser l'écriture des propositions, on aura recours aux *connecteurs logiques* et aux *quantificateurs*. Les premiers servent à relier des propositions pour en exprimer d'autres plus complexes. Les exemples les plus connus sont "et" et "ou". Les quantificateurs servent à harmoniser les notations pour que les propositions mathématiques soient plus courtes et plus faciles à lire pour tous. On remplace alors les quantificateurs usuels "pour tout" et "il existe" par des symboles.

Valeurs de vérité

Il y a des propositions dites *indémontrables*, c'est à dire qui dans notre système d'axiomes de départ, n'admettent pas de démonstrations ou de contradiction. Nous ne nous étendrons pas sur ces propositions, qui n'ont pas d'incidence. Dans la suite du cours, on supposera que toutes les propositions sont vraies ou fausses, jamais les deux en même temps, jamais aucune des deux. Ces deux principes s'appellent le *principe de non-contradiction* et le *principe du tiers exclu*.

Il y a aussi des propositions dont on ne connaît pas leur valeur de vérité, car il n'y a pas de preuve de leur véracité ou de contradiction. C'est par exemple le cas pour la conjecture de l'infinité des nombres premiers jumeaux (séparés de 2 unités, comme 5 et 7). Aucun mathématicien à ce jour n'a trouvé de preuve ou de contradiction de cette proposition.

1.1 CONNECTEURS LOGIQUES

Quand on raisonne en mathématiques, on commence par les hypothèses et on utilise des connecteurs logiques pour arriver à une conclusion, qui peut être un théorème ou l'énoncé d'un exercice. **Vous n'écrirez plus de calculs et de phrases sans liens !**

Définition 1 : Conjonction, disjonction, négation

Soient P_1 et P_2 deux assertions. On définit

- **Conjonction** L'assertion " P_1 et P_2 ", notée aussi $P_1 \wedge P_2$. Elle est vraie si au moins une des deux propositions est vraie, fausse sinon.
- **Disjonction** L'assertion " P_1 ou P_2 ", notée aussi $P_1 \vee P_2$. Elle est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies, fausse sinon
- **Négation** L'assertion "non P_1 ", notée aussi $\neg P_1$. Elle est vraie si P_1 est fausse, et fausse si P_1 est vraie.

Exemple 1

Soit x un réel.

- La négation de « $x \geq 1$ » est « $x < 1$ ».
- La négation de « $x \leq 5$ » est « $x > 5$ ».
- L'assertion « $x^2 - 5 = 0$ » est équivalente à « $(x = \sqrt{5}) \vee (x = -\sqrt{5})$ ».
- L'assertion « $-1 \leq x \leq 1$ » est équivalente à « $(-1 \leq x) \wedge (x \leq 1)$ ».

⚠ ATTENTION Dans le langage usuel, " ou " oppose parfois les termes qu'il relie. Par exemple, dans l'expression : " Vous êtes plutôt entrée ou dessert ? ", le " ou " est exclusif car il exclut la possibilité qu'on choisisse les deux - en pratique vous pouvez toujours choisir les deux ! En logique, " ou " est toujours inclusif, la proposition " P_1 ou P_2 " est vraie même quand P_1 ET P_2 sont vraies.

Il existe aussi un " ou exclusif ", que l'on peut retrouver en logique mais très peu en mathématiques.

Exemple 2

La véracité d'une proposition complexe qui est donnée par plusieurs connecteurs logiques peut être difficile à donner en fonction des valeurs de vérité des propositions de départ. On utilise souvent un tableau de vérité pour nous faciliter la vie ! Par exemple, si on veut savoir les valeurs de vérité de $\neg P_1 \vee P_2$ en fonction de P_1 et P_2 ,

P_1	V	F	V	F
P_2	V	V	F	F
$\neg P_1$	F	V	F	V
$\neg P_1 \vee P_2$	V	V	F	V

← On alterne les valeurs de vérité.
 ← Si P_1 est vraie, $\neg P_1$ est fausse et inversement.
 ← Si $\neg P_1$ est vraie, alors $\neg P_1 \vee P_2$ est vraie.

Par exemple, Si P_1 est vraie et P_2 est fausse, alors $\neg P_1 \vee P_2$ est fausse.

Exemple 3

Vérifions avec le tableau de vérité que $P \vee (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ ont les mêmes valeurs de vérité.

P	V	V	V	V	F	F	F	F
Q	V	V	F	F	V	V	F	F
R	V	F	V	F	V	F	V	F
$Q \wedge R$	V	F	F	F	V	F	F	F
$P \vee (Q \wedge R)$	V	V	V	V	V	F	F	F
$P \vee Q$	V	V	V	V	V	V	F	F
$P \vee R$	V	V	V	V	V	F	V	F
$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	V	V	V	V	V	F	F	F

Ce qui donne bien les mêmes valeurs de vérité et elles sont donc équivalentes. On peut retenir que

Les assertions $P \wedge (Q \vee R)$ et $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ sont équivalentes.
 Les assertions $P \vee (Q \wedge R)$ et $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ sont équivalentes.

Autrement dit, il y a **distributivité** du *ou* sur le *et* et inversement.

Tiers exclu et non-contradiction

Ces deux principes de logique énoncés dans l'introduction de cette partie peuvent alors s'écrire comme suit. Pour toute proposition P , on a :

- **Principe de non-contradiction** La proposition " P et (non P)" est fausse. Toute proposition de cette forme est appelée une contradiction.
- **Principe du tiers exclu** La proposition " P ou (non P)" est vraie.

Proposition 1 : Règles de calcul sur la négation, la conjonction et la disjonction

Soient P_1 et P_2 deux assertions. On a

- **Double négation** Les propositions " P_1 " et "non (non P_1)" sont équivalentes.
- **Négation d'une conjonction** Les propositions "non (P_1 et P_2)" et "(non P_1) ou (non P_2)" sont équivalentes.
- **Négation d'une disjonction** Les propositions "non (P_1 ou P_2)" et "(non P_1) et (non P_2)" sont équivalentes.

Exemple 4

La négation de

$\overbrace{\text{Je vais prendre une boule de glace à la vanille ou une à la fraise,}}^{P_1 \vee P_2}$

est

$\overbrace{\text{Je ne vais prendre ni une boule de glace à la vanille, ni une à la fraise.}}^{\neg P_1 \wedge \neg P_2}$

Exemple 5

La négation de $(x > 2) \vee (x < -1)$ est $(x \leq 2) \wedge (x \geq -1)$, que l'on réécrit parfois, $-1 \leq x \leq 2$.

Preuve.

La preuve peut se faire en utilisant les tableaux de vérité.

P_1	V	F	V	F
P_2	V	V	F	F
$\neg P_1$	F	V	F	V
$\neg P_2$	F	F	V	V
$P_1 \vee P_2$	V	V	V	F
$P_1 \wedge P_2$	V	F	F	F
$\neg(P_1 \vee P_2)$	F	F	F	V
$\neg(P_1 \wedge P_2)$	F	V	V	V
$\neg P_1 \vee \neg P_2$	F	V	V	V
$\neg P_1 \wedge \neg P_2$	F	F	F	V

Les propositions sont équivalentes si elles ont toujours les mêmes valeurs de vérité. La proposition est donc démontrée. $\square$

Définition 2 : Implication, équivalence

Soient P_1 et P_2 deux assertions. On définit

- **Implication** La proposition $P_1 \implies P_2$, qu'on lit: " P_1 implique P_2 " ou : si P_1 , alors P_2 , est fausse dans le seul cas où p est vraie et q fausse.
- **Équivalence** La proposition $P_1 \iff P_2$, qu'on lit : " P_1 si et seulement si P_2 " ou " P_1 et P_2 sont équivalentes", est vraie si P_1 et P_2 ont la même valeur de vérité, et fausse sinon.

Vocabulaire

- On dit que P_2 est une **condition nécessaire** pour que P_1 soit vraie si, lorsque P_1 est vraie, P_2 l'est aussi nécessairement autrement dit si l'implication : $P_1 \implies P_2$ est vraie.
- On dit que P_1 est une **condition suffisante** pour que P_2 soit vraie s'il suffit que P_1 soit vraie pour que P_2 le soit aussi autrement dit si l'implication : $P_1 \implies P_2$ est vraie.

⚠ ATTENTION Affirmer que l'implication " $P \implies Q$ " est vraie n'implique ni que P est vraie, ni que Q est vraie. On parle bien de la valeur de vérité de l'implication elle-même. Par exemple, il est parfaitement vrai que : "Si Mr Roby est président de la République, alors il est chef des armées". Mais je ne suis pas Président de la République, et donc pas chef des armées. Les deux propositions qui forment l'implications sont donc fausses. En fait, dès que P est fausse, " $P \implies Q$ " est toujours vraie, même si Q n'a rien en commun avec P .

Exemple 6

L'assertion « $(1 = 0) \implies (2 = 4)$ » est vraie puisque « $1 = 2$ » est fausse. On peut même trouver un raisonnement logique qui permet de montrer cette implication.

Exemple 7

Le théorème de Pythagore est une implication vraie, mais il ne dit pas tous les triangles sont rectangles...

⚠ ATTENTION Ne jamais utiliser le symbole $\Rightarrow$ comme abréviation d'un « donc ».

Vocabulaire

Au lieu d'écrire $P \implies Q$, on peut aussi écrire :

- pour que Q soit vraie, il suffit que P le soit,
- pour que P soit vraie, il faut que Q le soit,
- P est une **condition suffisante** pour que Q soit vraie,
- Q est une **condition nécessaire** pour que P soit vraie.

Au lieu d'écrire $P \iff Q$, on peut aussi écrire :

- P est vraie si et seulement si Q l'est,
- pour que Q soit vraie, il faut et il suffit que P le soit,
- P est une **condition nécessaire et suffisante** pour que Q soit vraie.

Définition 3 : Réciproque, contraposée

Soient P_1 et P_2 deux assertions.

- **Réciproque** On appelle réciproque de l'implication $P_1 \implies P_2$, la proposition $P_2 \implies P_1$
- **Contraposée** On appelle contraposée de l'implication $P_1 \implies P_2$, la proposition $\neg P_2 \implies \neg P_1$.

Proposition 2

Soient P_1 et P_2 deux assertions.

- ① **Autre forme de l'implication** La proposition $P_1 \implies P_2$ est équivalente avec $\neg P_1 \vee P_2$,
- ② **Négation de l'implication** Les propositions $\neg(P_1 \implies P_2)$ et $P_1 \wedge \neg P_2$ sont équivalentes.
- ③ **Lien entre implication et contraposée** Toute implication est équivalente à sa contraposée. En d'autres termes, les propositions : $P_1 \implies P_2$ et $\neg P_2 \implies \neg P_1$ sont équivalentes.
- ④ **Lien entre implication et équivalence** Toute équivalence est une double implication.

CNS

En vertu du dernier point, au lieu de dire que p et q sont équivalentes, on dit souvent que q est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que p soit vraie.

Preuve. On va utiliser les tableaux de vérité.

P_1	V	F	V	F
P_2	V	V	F	F
$\neg P_1$	F	V	F	V
$P_2 \vee \neg P_1$	V	V	F	V
$P_1 \implies P_2$	V	V	F	V
$P_2 \implies P_1$	V	F	V	V
$P_1 \iff P_2$	V	F	F	V
$(P_1 \implies P_2) \wedge (P_2 \implies P_1)$	V	F	F	V

Les lignes 4 et 5 prouvent ①. Les règles de la Proposition 1 appliquées à ① prouvent ②. On applique ① à $\neg P_2$ et $\neg P_1$ pour démontrer ③. Enfin les deux dernières lignes prouvent ④. $\square$

2 QUANTIFICATEURS ET RÉDACTION

Le langage courant (français) est facilement ambigu : la phrase

Tous les magasins sont fermés un jour dans la semaine,

qui est grammaticalement irréprochable, signifie-t-elle

- ① *Tous les magasins sont fermés le même jour, ou*
- ② *Tous les magasins ont chacun un jour de fermeture hebdomadaire ?*

Les sens de chacune de ces deux phrases sont complètement différent.

Les mathématiques, qui ont la prétention de pouvoir affirmer avec certitude que telle propriété est vraie, que telle autre est fausse, ne peuvent s'accommoder d'un tel risque de flou, même s'il doit être artistique. C'est la raison de la nécessité d'un langage précis spécifique aux mathématiques.

Il y a des **quantificateurs** qui permettent de *quantifier* les variables présentes dans les propriétés. **A partir de maintenant on n'utilisera plus jamais une variable x non définie ou non quantifiée !**

2.1 QUANTIFICATEURS

On rappelle qu'un *ensemble* en mathématiques est une collection ou un groupement d'objets distincts. Il peut être vu "une multitude qui peut être comprise comme une totalité" (Georg Cantor) ou comme une sorte de sac virtuel entourant ses éléments. Vous connaissez déjà les ensembles des nombres réels, naturels mais aussi l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 4 : Quantificateur universel $\forall$, quantificateur existentiel $\exists$

Soit P une propriété.

- **Quantificateur universel** La proposition "**Pour tout** x , P " ou " $\forall x, P$ " est vraie si tout objet mathématique a la propriété P , et fausse sinon, c'est-à-dire si au moins un objet n'a pas la propriété P .
En pratique, on a des propositions de la forme "Pour tout $x \in E$, $P(x)$ " où E est un ensemble donné. Une telle proposition n'est qu'un résumé pour " $\forall x, (x \in E \implies P(x))$ " et signifie donc que tout élément de E a la propriété P .
- **Quantificateur existentiel** La proposition "Il existe x , tel que P " ou " $\exists x, P$ " est vraie si au moins un objet mathématique a la propriété P , et fausse sinon, c'est-à-dire si aucun objet n'a la propriété P . En pratique, on a des propositions de la forme, il existe $x \in E$, $P(x)$ où E est un ensemble. Une telle proposition n'est qu'un résumé pour " $\exists x, (x \in E \text{ et } P(x))$ " et signifie donc qu'au moins un élément de E a la propriété P .

Exemple 8

Il est vrai que : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \neq -1$ car le carré d'un réel est toujours positif.

Il est vrai également que : Il existe $x \in \mathbb{C}$, $x^2 = -1$ car par exemple $i^2 = -1$.

Les deux phrases de l'introduction de ce paragraphe se réécrivent

- ① Il existe un jour tel que, pour tous les magasins, ceux-ci sont fermés.
- ② Pour tous les magasins, il existe un jour tel que, ceux-ci sont fermés.

Vous remarquer donc que l'ordre des quantificateurs a une importance cruciale dans le sens de la proposition !

Symboles

Dans vos copies, il est préférable d'écrire les quantificateurs en toute lettre, sauf dans le cas où vous n'avez pas trop de place (dans la définition d'un ensemble par exemple) ou plus beaucoup de temps.

Il est donc mal vu (voir interdit) d'écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } x \mapsto e^{nx} \text{ est croissante sur } \mathbb{R},$$

et on y préférera

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } x \mapsto e^{nx} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.$$

Les symboles suivants sont parfois utilisés dans les cas cités ci-dessus :

- On peut abrégé le fait que x soit un élément d'un ensemble E ou appartient à E par " $x \in E$ ".
- le "tel que" est parfois abrégé par " $|$ ", par " $:$ " ou par "t.q. ".
- On peut demander l'existence d'un *unique* élément. Le symbole qui correspond est " $\exists!$ ".
- L'utilisation d'accolades pour définir un ensemble.
Par exemple, $[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$.

Proposition 3 : Négation des quantificateurs

Soit E un ensemble et P une proposition.

- **Négation d'un $\forall$** : Les propositions " $\neg(\forall x \in E, P(x))$ " et " $\exists x \in E, \neg P(x)$ " sont équivalentes.
- **Négation d'un $\exists$** : Les propositions " $\neg(\exists x \in E, P(x))$ " et " $\forall x \in E, \neg P(x)$ " sont équivalentes.

Exemple 9

La négation de la proposition $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x-1| < \alpha \implies |\sqrt{x}-1| < \varepsilon)$
est $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (|x-1| < \alpha \wedge |\sqrt{x}-1| \geq \varepsilon)$.

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ Négation
 $\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (|x-1| < \alpha \wedge |\sqrt{x}-1| \geq \varepsilon)$

Permutation de mêmes quantificateurs entre eux

On peut toujours permuter les quantificateurs universels " $\forall$ " ENTRE EUX, et les quantificateurs existentiels " $\exists$ " ENTRE EUX.

Les propositions " $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_-, x \geq y$ " et " $\forall y \in \mathbb{R}_-, \forall x \in \mathbb{R}_+, x \geq y$ " sont équivalentes.

Les propositions " $\exists x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}_-, x \geq y$ " et " $\exists y \in \mathbb{R}_-, \exists x \in \mathbb{R}_+, x \geq y$ " sont équivalentes.

Par contre, l'un avec l'autre, cela fonctionne moins bien...

⚠ ATTENTION La permutation d'un " $\forall$ " et d'un " $\exists$ " n'est pas automatique en revanche.

- Vrai : $\left\{ \begin{array}{l} \text{" Dans toute cerise, il y a un noyau."} \\ \forall c \text{ cerise, } \exists n \text{ noyau, } n \text{ est dans } c. \end{array} \right.$

- Faux : $\left\{ \begin{array}{l} \text{"Il existe un noyau qui se trouve dans toutes les cerises."} \\ \exists n, \forall c, n \text{ est dans } c. \end{array} \right.$

Donc quand une proposition " $\forall\exists$ " est vraie, la proposition " $\exists\forall$ " correspondante PEUT être fausse. N'apprenez pas ce résultat par coeur, vous le retrouverez rapidement au feeling dans chaque cas particulier.

- Vrai : $\left\{ \begin{array}{l} \text{" Il existe une planète dont tous les Terriens sont originaires."} \\ \exists p \text{ planète, } \forall t \text{ Terrien, } t \text{ est originaire de } p. \end{array} \right.$

Plus généralement, quand une proposition " $\exists\forall$ " est vraie, la proposition " $\forall\exists$ " l'est aussi.

2.2 RÉDACTION

Bien sûr, il est important de savoir comment faire un exercice. Mais il est tout aussi important de savoir l'expliquer de manière précise à l'examineur. C'est plus simple à l'oral car il y a un dialogue. À l'écrit, on ne peut pas réexpliquer des passages moins clairs. Il faut donc pouvoir proposer une explication parfaite, tout de suite. Ce n'est pas automatique, et cela s'apprend, comme le reste, en faisant et en suivant les explications en cours.

Vous allez vous familiariser avec le vocabulaire qui vous aidera à connecter votre raisonnement. Je vous donne quelques rédactions à titre d'exemple.

Montrer une implication

Comment montrer $P \implies Q$, où P et Q sont des propositions ? On peut

- supposer P et par implication, démontrer Q .
*"Supposons P . Alors on a P_1 .
Donc on a P_2 .
Et finalement cela implique Q . Donc $P \implies Q$."*
- démontrer la contraposée $\neg Q \implies \neg P$, de la même façon.
- On peut le démontrer par l'absurde (voir plus bas).

Exemple 10

Soit n un entier. Montrons que si n^2 est pair, alors n l'est aussi.

- **Directment**, si n^2 est pair, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n^2 = 2k$.
Donc 2 divise n^2 . Décomposons n en facteurs irréductibles $n = 2^\alpha q$, où q est ppriétaire avec 2. Donc $n^2 = 2^{2\alpha} q^2 = 2k$. Donc k doit avoir un facteur 2 et $\alpha > 1$, ce qui prouve le résultat.
- **Par contraposée**, montrons que $(n \text{ impair}) \implies (n^2 \text{ impair})$.
Supposons n impair et montrons que n^2 l'est aussi. Puisque n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.
On a alors

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1.$$

donc n^2 est impair. D'où le résultat.

- **Par l'absurde**, supposons que n^2 est pair et n impair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n = 2k + 1$, et donc

$$n^2 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1,$$

ce qui est absurde. D'où le résultat.

On remarque qu'ici, le raisonnement par l'absurde n'apporte pas grand chose, parce qu'on n'utilise que l'hypothèse " n^2 est pair" à la fin.

Montrez une équivalence

Pour montrez l'équivalence entre deux propositions P et Q, on peut

- démontrer par équivalence en partant de P (ou de Q !). Cela revient à la première méthode de démonstration d'une implication, mais en utilisant les équivalences. Attention, vérifiez bien que l'équivalence est vérifiée à chaque étape ! Par exemple : Pour deux nombres réels a et b , $a < b \not\iff a^2 < b^2$
- démontrer la double implication. On fait 2 fois le travail, mais souvent, ce n'est pas possible autrement.

Utiliser le raisonnement par l'absurde

"Quand on ne sait pas quoi faire, on essaie de démontrer par l'absurde !"

C'était la phrase d'un de mes professeurs de mathématiques. L'idée derrière vient du fait que l'on a une hypothèse supplémentaire quand on démontre par l'absurde : L'hypothèse contraire de la conclusion. Ainsi, quand on ne sait pas utiliser l'hypothèse de départ, cela peut aider de la combiner avec une hypothèse supplémentaire. Pour rédiger :

Montrons que $P \implies Q$. Démontrons le par l'absurde. Supposons P et $\neg Q$.

... 'Raisonnement par implication' ...

Donc on arrive à une contradiction. Donc $P \implies Q$.

Exemple 11

Montrons que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe alors deux entiers p et q , avec q non nul, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que p et q ne sont pas tous les deux pairs. En élevant au carré l'égalité précédente, on obtient

$$2q^2 = p^2$$

Par suite, l'entier p^2 est pair et il en est donc de même de p , d'après l'exemple précédent. On peut ainsi trouver un entier k tel que $p = 2k$. En remplaçant dans l'égalité $2q^2 = p^2$, on obtient $2q^2 = 4k^2$ et donc

$$q^2 = 2k^2$$

ce qui prouve que q^2 est pair. On en déduit que q est pair, ce qui contredit le fait que p et q ne sont pas tous les deux pairs. L'hypothèse de départ est donc fausse, ce qui montre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Utiliser le raisonnement par récurrence

On note P_n une propriété qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. Pour démontrer que **toutes** les propriétés P_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$, sont vraies, à partir d'un premier entier n_0 , donc pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$, on démontre tout d'abord que la première de ces propriétés P_{n_0} est vraie : C'est l'**Initialisation**. Ensuite on démontre que cette véracité se propage "de proche en proche": si pour un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$ quelconque P_n est vraie, alors la propriété suivante P_{n+1} est aussi vraie. On appelle cette étape l'**Hérédité**.

Le principe de récurrence permet alors de conclure, à partir de ces deux étapes, que **toutes** les propriétés P_n , pour **tous** les entiers $n \geq n_0$, sont vraies, dès le premier n_0 , jusqu'à l'infini.

On peut l'écrire de cette manière: Soit $P_{n_0}, P_{n_0+1}, \dots, P_n, \dots$ une suite de propriétés telles que

- P_{n_0} est vraie, et
- pour tout entier naturel $n \geq n_0$, si P_n est vrai, alors P_{n+1} est aussi vraie.

Alors, pour tout $n \geq n_0$, P_n est vraie.

Le point clé du principe de récurrence est la **dénombrabilité**: on numérote les propriétés P_n avec les **entiers naturels**, pour lesquels on a la propriété d'existence du plus petit élément.

Preuve. La preuve de ce principe repose sur le fait que

Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide possède un plus petit élément.

Raisonnons par l'absurde : Supposons que P_n soit fausse pour un certain entier $n \geq n_0$. On note alors

$$F = \{k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, \dots, n_0 - 1\} \mid P_k \text{ est fausse} \} ,$$

qui est donc un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

Comme tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ non vide possède un plus petit élément, F admet donc un plus petit élément, que l'on note m . Par définition de F , $m \geq n_0$. De plus, $m \neq n_0$ car P_{n_0} est vraie. Par conséquent, $P_{m-1} \notin F$, donc P_{m-1} est vraie. Or, on sait que, comme P_{m-1} est vraie avec $m-1 \geq n_0$, donc la propriété suivante P_m doit aussi être vraie ce qui est contradictoire. $\square$

Exemple 12

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1} .$

Raisonnons par récurrence sur $n \geq 2$. Pour $n = 2$, $1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} > \frac{6}{5} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2 + 1} .$

Supposons la propriété établie au rang $n \geq 2$, fixé. On a alors

$$1 + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \underset{HR}{\geq} \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} .$$

Or

$$\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2n+3} = \frac{n^2 + 2n}{(2n+1)(n+1)^2(2n+3)} \geq 0 ,$$

d'où l'hérédité de la propriété.

Utiliser le raisonnement par analyse et synthèse

Le raisonnement par analyse-synthèse permet de démontrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant des propriétés données. Par exemple : *Trouver toutes les fonctions injectives $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout x dans $\mathbb{R}$,*

$$f(f(x)) = f(x) .$$

Il se décompose en deux parties :

- **l'analyse** : On suppose que l'objet existe et on essaie de trouver des conditions nécessaires que doit vérifier cet objet. Ce faisant, on prouve que si l'objet existe, alors il est nécessairement égal à un certain objet $\mathcal{O}$ (ceci assure l'unicité). Par exemple, pour le problème ci-dessus :
Soit f une solution qui vérifie l'équation ci-dessus. Nous cherchons ici uniquement des fonctions injectives. Rappelons que si f est injective et que pour u, v dans $\mathbb{R}$ on a $f(u) = f(v)$, alors nécessairement $u = v$. Pour ce problème, étant donné x dans $\mathbb{R}$, on a $f(f(x)) = f(x)$ et donc, comme f est injective, nécessairement $f(x) = x$.
- **la synthèse** : On considère l'objet $\mathcal{O}$ identifié dans la partie analyse, et on vérifie qu'il a bien les propriétés voulues (ceci assure l'existence).
On conclut le problème en vérifiant que la fonction identité est bien une solution du problème. En effet, c'est une fonction injective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et on a bien $x = x$.

Exemple 13

Déterminons les réels x tels que $1 + x \geq 0$ et $1 - x^2 = \sqrt{1+x}$.

Analyse. Supposons que x soit un réel vérifiant $1 + x \geq 0$ et $1 - x^2 = \sqrt{1+x}$. Alors, après calculs

$$(1+x)x(x^2 - x - 1) = 0 .$$

$$\text{On en déduit que } x \in \left\{ -1, 0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\} .$$

Synthèse. On vérifie que -1 et 0 et $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont solutions. Attention, si $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $1 - x^2 < 0$ donc x n'est pas solution. Donc, il y a 3 solutions -1 et 0 et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Mais que s'est-il passé ? Pourquoi les solutions ne fonctionnent-elles pas toutes ?

Dans le calcul, pour tout $x \geq -1$, $1 - x^2 = \sqrt{1+x} \implies (1 - x^2) = \sqrt{1+x}$ et il n'y a pas équivalence (Vérifiez !).

On est obligé de remonter (faire la flèche de retour) avec la synthèse.

Utiliser le raisonnement par disjonction de cas

Le raisonnement par disjonction de cas s'utilise quand on veut démontrer une propriété P dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E , et que la justification dépend de la valeur de x . On cherche alors des sous-ensembles de E , où la valeur de x est connue et tels que $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$. On peut alors réparer le raisonnement par cas :

- Cas 1 : $x \in E_1$
- Cas 2 : $x \in E_2$
- $\vdots$
- Cas $n-1$: $x \in E_{n-1}$
- Cas n : $x \in E_n$

On emploie fréquemment ce raisonnement pour résoudre des (in)équations avec des valeurs absolues (le raisonnement dépend du signe de la quantité à l'intérieur de la valeur absolue), démontrer des propriétés en arithmétique (on sépare le raisonnement suivant la parité de certains entiers, leur congruence modulo $n \dots$).

Exemple 14

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|-3x+4| + |x-5| = 10$.

On va enlever les valeurs absolues ! Pour cela, on remarque que $-3x+4 \geq 0 \iff 4 \geq 3x \iff \frac{4}{3} \geq x$ et que $x-5 \geq 0 \iff x \geq 5$.

On dresse alors le tableau suivant

x	$-\infty$	$4/3$	5	$+\infty$
$ -3x+4 $	$-3x+4$	0	$3x-4$	
$ x-5 $		$-x+5$	0	$x-5$
$ -3x+4 + x-5 $	$-4x+9$	$2x+1$	$4x-9$	

On peut alors discuter des cas

- ① Si $x \in]-\infty, 4/3]$, $|-3x+4| + |x-5| = -4x+9$ et donc

$$|-3x+4| + |x-5| = 10 \iff -4x+9 = 10 \iff x = -1/4$$

$-1/4$ est bien élément de $]-\infty, 4/3]$. C'est la seule solution de l'équation dans $]-\infty, 4/3]$.

- ② Si $x \in]4/3, 5]$, $|-3x+4| + |x-5| = 2x+1$ et donc

$$|-3x+4| + |x-5| = 10 \iff 2x+1 = 10 \iff x = 9/2.$$

$9/2$ est bien élément de $]4/3, 5]$. C'est la seule solution dans $]4/3, 5]$.

- ③ Si $x \in]5, +\infty[$, $|-3x+4| + |x-5| = 4x-9$ et donc

$$|-3x+4| + |x-5| = 10 \iff 4x-9 = 10 \iff x = 19/4$$

Attention! $19/4 \notin]5, +\infty[$, ce n'est pas une solution de l'équation.

Finalement, les solutions de $|-3x+4| + |x-5| = 10$ sont $-1/4$ et $9/2$.

Exemple 15

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n(n^2 + 1)}{2} \in \mathbb{N}.$

Faisons une disjonction de cas.

Cas n pair. On peut écrire $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors

$$\frac{n(n^2 + 1)}{2} = p(n^2 + 1) \in \mathbb{N}.$$

Cas n impair. On peut écrire $n = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$ et alors

$$\frac{n(n^2 + 1)}{2} = n(2p^2 + 2p + 1) \in \mathbb{N}.$$