

# Introducción a la combinatoria enumerativa

## Días de Combinatoria 2017

Carolina Benedetti Velásquez<sup>1</sup> y Natalia Saavedra<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de los Andes, Colombia

<sup>2</sup>Universidad del Cauca, Colombia

**RESUMEN.** En este artículo daremos una introducción a la combinatoria enumerativa. Introduciremos una variedad de objetos combinatorios y desarrollaremos herramientas para resolver conteos a su alrededor. Estas herramientas incluyen funciones generadoras ordinarias, fórmulas recursivas y fórmulas cerradas. Al final de cada sección incluiremos ejercicios alusivos a lo recién aprendido. Finalizamos con una breve introducción a coloraciones en grafos. Este manuscrito corresponde a una adaptación de las notas de clase del minicurso en Combinatoria Enumerativa durante el evento Días de Combinatoria 2017, dictado por la primer autora.

**Palabras clave:** Función generadora, objetos combinatorios, números de Catalan, coloración de grafos.

**ABSTRACT.** In this article we give an introduction to enumerative combinatorics. We will present a variety of combinatorial objects and we will develop tools that will help us to solve counting problems about these objects. These tools include ordinary generating functions, recursive formulas and closed formulas. At the end of each section we include exercises concerning the material presented. We finalize with a brief introduction to graph coloring. This manuscript is an adaptation of a set of class notes corresponding to a minicourse taught by the first author during the summer school Dias de Combinatoria 2017.

**Key words:** Generating function, Combinatorial objects, Catalan numbers, Graph coloring.

*2010 AMS Mathematics Subject Classification. 05AXX, 05C30.*

## Índice

<b>1. Funciones generadoras</b>	<b>118</b>
1.1. Combinatoria y series de potencia . . . . .	118
1.2. Ejercicios . . . . .	122
<b>2. Bases de conteo</b>	<b>123</b>
2.1. Principios básicos de conteo . . . . .	123
2.2. Multiconjuntos y composiciones débiles . . . . .	126
2.3. Particiones de conjunto . . . . .	130
2.4. Particiones de un entero . . . . .	131
2.5. La travesía de las doce casas . . . . .	132
2.6. Ejercicios . . . . .	133
<b>3. Contando de más</b>	<b>134</b>
3.1. Principio de Inclusión-Exclusión . . . . .	135
3.2. Desarreglos . . . . .	136
3.3. Principio del palomar . . . . .	137
3.4. Ejercicios . . . . .	138
<b>4. Números de Catalan</b>	<b>138</b>
4.1. Caminos de Dyck . . . . .	141
4.2. Ejercicios . . . . .	142
<b>5. El polinomio cromático</b>	<b>143</b>
5.1. Grafos y coloraciones . . . . .	143
5.2. Ejercicios . . . . .	146
<b>6. Agradecimientos</b>	<b>147</b>

### 1. Funciones generadoras

#### 1.1. Combinatoria y series de potencia

Usualmente, en combinatoria enumerativa nos enfrentamos con preguntas respecto a la cardinalidad de una familia de objetos. Un ejemplo concreto es el siguiente. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos una *composición* del entero  $n$  como una sucesión finita de enteros

positivos  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  tal que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ . La *longitud* de  $\alpha$  es  $r$  y las *partes* de  $\alpha$  son los  $\alpha_i$ . Una pregunta natural en este contexto es, ¿cuántas composiciones de  $n$  hay?. Ciertamente, podríamos comenzar a calcular el número de composiciones para valores específicos de  $n$  y tratar de ver una forma general de hacer este conteo. Pero, ¿qué técnicas podemos usar para poder determinar el número de elementos en una familia? En esta sección comenzaremos ilustrando una herramienta bastante útil en combinatoria, la cual ayuda a realizar conteos de forma compacta, a través de series de potencias.

Sea  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$  una sucesión infinita de números complejos y sea  $x$  una variable formal. La *función generadora ordinaria* de la sucesión  $\mathbf{a}$  se define como

$$A(x) := \sum_{k \geq 0} a_k x^k.$$

Esto es,  $A(x)$  es la serie de potencias en la variable  $x$  tal que el coeficiente de  $x^k$  es  $a_k$ . Por ejemplo, la sucesión  $(1, 1, 1, \dots)$  tiene como función generadora a

$$A(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Denotemos por  $\mathbb{C}[[x]]$  al conjunto de series de potencias  $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \mid a_i \in \mathbb{C}\}$ . El conjunto  $\mathbb{C}[[x]]$  tiene estructura de anillo conmutativo con las siguientes operaciones. Sean  $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ :

$$\text{(suma)} \quad A(x) + B(x) := \sum_{k \geq 0} (a_k + b_k)x^k.$$

$$\text{(producto)} \quad A(x) \cdot B(x) := \sum_{k \geq 0} c_k x^k \text{ donde } c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0.$$

Nos referiremos al producto  $A(x) \cdot B(x)$  como la *convolución de las series*  $A(x)$  y  $B(x)$ . La unidad de la convolución es (la serie de potencia)  $1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots$ . Diremos que la serie  $A(x)$  es *invertible* si existe  $B(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  tal que  $A(x) \cdot B(x) = 1$ . En este caso denotamos  $B(x) = A(x)^{-1}$  y escribimos  $A(x) = \frac{1}{B(x)}$ . Por ejemplo, usando el producto definido se puede verificar que, dado  $a \in \mathbb{C}$ , la serie  $A(x) = \sum_{k \geq 0} (ax)^k$  tiene inversa (bajo convolución) dada por  $A(x)^{-1} = 1 - ax$ . Así,

$$A(x) = \frac{1}{1 - ax}. \quad (1)$$

En este manuscrito, el término funciones generadoras hace referencia a funciones generadoras ordinarias<sup>1</sup>. En principio no es aparente, pero el uso de funciones generadoras resulta bastante útil en problemas combinatorios.



Volviendo a nuestro ejemplo inicial, nos planteamos el conteo del número de composiciones de un entero positivo  $n$ . Sin embargo, como ocurre en la vida, a veces es más alentador solucionar un pedazo de un problema y es lo que haremos en este ejemplo. Sea  $T_n$  el conjunto de composiciones de  $n$  cuyas partes son 1 o 2 y sea  $t_n = |T_n|$ . Ciertamente,

<sup>1</sup>Existen funciones generadoras exponenciales, pero no nos ocuparemos de ellas aquí. Ver [2, capítulo 7].

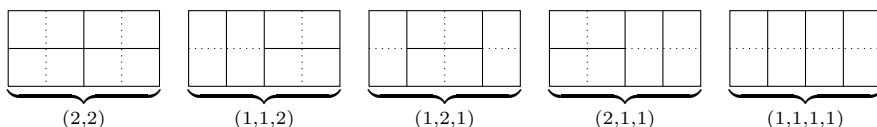
si fijamos un valor de  $n$  podemos armar el conjunto  $T_n$  (con algo de paciencia) y calcular su cardinalidad  $t_n$ . Pero esto no tendría ningún fin si al final del día no podemos dar una respuesta concreta acerca de la cardinalidad de  $T_n$  para  $n$  arbitrario.

**Cuadro 1.** Elementos y cardinalidad de algunos  $T_n$

$n$	$T_n$	$t_n$
0	$\{\emptyset\}$	1
1	$\{(1)\}$	1
2	$\{(2), (1, 1)\}$	2
3	$\{(1, 2), (2, 1), (1, 1, 1)\}$	3
4	$\{(2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$	5

Pensemos en  $T_n$  gráficamente como el conjunto de *teselaciones* de un rectángulo  $2 \times n$ . Es decir,  $T_n$  se puede pensar como el conjunto cuyos elementos describen todas las formas de cubrir un rectángulo  $2 \times n$  usando dominós  y  de manera que éstos no se sobrelapen. Por ejemplo, los elementos de  $T_4$  mostrados en el Cuadro 1 corresponden a las teselaciones de un rectángulo  $2 \times 4$  ilustradas en la Figura 1.

**Figura 1.** Teselaciones de un rectángulo  $2 \times 4$



Notemos que, para  $n \geq 2$ , cualquier  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in T_n$  es tal que  $\alpha_r = 1$  ó  $\alpha_r = 2$ . Luego,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}) \in T_{n-1}$  si  $\alpha_r = 1$ , mientras que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{r-1}) \in T_{n-2}$  si  $\alpha_r = 2$ . Por tanto,  $t_n$  se puede calcular recursivamente para  $n \geq 2$  así:

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}, \quad t_0 = t_1 = 1. \quad (2)$$

La fórmula recursiva dada en (2) es una respuesta a nuestro problema de conteo inicial: es una forma de contar  $t_n$  para  $n$  arbitrario. Sin embargo, al ser de tipo recursiva, requiere que calculemos  $t_i$  para  $i < n$ . ¿Podemos obtener una fórmula para  $t_n$  sin necesidad de tener que calcular primero  $t_1, \dots, t_{n-1}$ ? La respuesta en este caso es sí, y esto comienza a ilustrar el poder de las funciones generadoras. Para tal fin, sea  $T(x) = \sum_{k \geq 0} t_k x^k$  la función generadora de la sucesión  $(t_0, t_1, t_2, \dots)$ . Usando (2) tenemos:

$$\begin{aligned}
T(x) &= t_0 + t_1x + t_2x^2 + t_3x^3 + t_4x^4 + \dots \\
&= t_0 + t_1x + (t_0 + t_1)x^2 + (t_1 + t_2)x^3 + (t_2 + t_3)x^4 + \dots \\
&= t_0 + t_1x + (t_0x^2 + t_1x^3 + t_2x^4 + \dots) + (t_1x^2 + t_2x^3 + t_3x^4 + \dots) \\
&= t_0 + t_1x + x^2 \cdot (t_0 + t_1x + t_2x^2 + \dots) + x \cdot (t_1x + t_2x^2 + \dots) \\
&= t_0 + x^2 \cdot (t_0 + t_1x + t_2x^2 + \dots) + x \cdot (t_1 + t_1x + t_2x^2 + \dots) \\
&= 1 + x^2 \cdot T(x) + x \cdot T(x).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$T(x)(1 - x - x^2) = 1.$$

Luego, nuestra función generadora  $T(x)$  se puede escribir en forma compacta, o *cerrada*, como

$$T(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}. \quad (3)$$

Conociendo cómo luce la función generadora de la sucesión que nos interesa, ¿cómo podemos usar esta fórmula para obtener una expresión para los  $t_n$ ? En este caso, podemos usar fracciones parciales y reescribir la fórmula obtenida en (3) en la forma

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{A}{1 - ax} + \frac{B}{1 - bx}$$

donde  $A, B, a, b \in \mathbb{C}$ . Por tanto obtenemos:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \frac{1/\sqrt{5}}{1 - \underbrace{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}_a x} - \frac{1/\sqrt{5}}{1 - \underbrace{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)}_b x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1}{1 - ax} - \frac{1}{1 - bx} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{n \geq 0} (a^n - b^n) x^n \right).
\end{aligned}$$

Luego,

$$T(x) = \sum_{n \geq 0} \left( \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} \right) x^n = \sum_{n \geq 0} t_n x^n$$

Esto implica que el número de teselaciones con dominós de un rectángulo  $2 \times n$  es:

$$t_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}. \quad (4)$$

Esta tercera respuesta<sup>2</sup> a nuestro problema de conteo es bastante concreta. ¡Nos da una fórmula exacta a cualquier  $t_n$ !. Resumiendo, comenzamos con un problema de combinatoria enumerativa: contar la cardinalidad  $t_n$  de un conjunto finito  $T_n$ . Para ello, consideramos la sucesión  $\mathbf{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$  de los números que nos interesa hallar. Nuestra primera respuesta (2) nos ayuda a calcular los  $t_n$  en forma recursiva; la segunda (3) nos dió una fórmula cerrada para la función generadora de la sucesión  $\mathbf{t}$ ; la tercera (4) provee una fórmula exacta para cada elemento de dicha sucesión.

**Observación 1.** *Los lectores que conozcan los números de Fibonacci  $F_n$ , se darán cuenta de la relación  $t_n = F_{n+1}$ .*

El objetivo de los siguientes ejercicios es acercar más a los lectores a la manipulación de funciones generadoras en el ámbito combinatorio.

## 1.2. Ejercicios

- Determine la correspondencia entre cada sucesión, su serie de potencias y la función generadora:

$$\begin{array}{llll} (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots) & \rightsquigarrow & 1 - x + x^2 - x^3 + \dots & \rightsquigarrow & \frac{1}{1+x} \\ (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) & \rightsquigarrow & ? & \rightsquigarrow & \frac{1}{1-x^2} \\ (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 1, 1, 1, \dots) & \rightsquigarrow & ? & \rightsquigarrow & ? \\ (\underbrace{1, \dots, 1}_k, 0, 0, 0, 0, \dots) & \rightsquigarrow & ? & \rightsquigarrow & ? \end{array}$$

- Quiero llevar una canasta de frutas para mi abuela, pero ella tiene unas restricciones:
  - Debe haber un número par de manzanas
  - Debe tener al menos un coco
  - A lo más puede haber un banano.

¿De cuántas formas puedo armarle una canasta con  $n$  frutas?

- Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Formule un problema combinatorio cuya función generadora sea.

$$(x + x^2 + \dots + x^6)^k.$$

<sup>2</sup>¿Quién hubiera pensado que un número natural como  $t_n$  tuviera una expresión tan poco "natural"?

## 2. Bases de conteo

En la sección anterior usamos intrínsecamente principios básicos en combinatoria, los cuales estableceremos formalmente ahora. Por ejemplo, al establecer la relación de recurrencia en (2), intrínsecamente dividimos el conjunto  $T_n$  en dos partes de tamaños  $t_{n-1}$  y  $t_{n-2}$ , respectivamente. El principio detrás de este hecho sencillo se conoce como *Principio de la suma*, el cual establecemos a continuación, junto con otra herramienta muy poderosa conocida como *Principio del producto*.

### 2.1. Principios básicos de conteo

(PS) Principio de la suma:

Si hay  $p$  formas de realizar la tarea  $A$  y  $q$  formas de realizar la tarea  $B$ , entonces, hay  $p + q$  formas de realizar  $A$  ó  $B$ .

(PP) Principio del Producto.

Si hay  $p$  formas de realizar  $A$  y  $q$  formas de realizar  $B$  (independiente del resultado de  $A$ ), entonces hay  $p \cdot q$  formas de realizar  $A$ , y luego  $B$ .

**Ejemplo 1.** Sea  $S$  un conjunto con  $n$  elementos y sea  $a_n$  el número de formas de ordenar los elementos de  $S$ . Cada uno de estos órdenes se conoce como una permutación del conjunto  $S$ . Por ejemplo, las 6 permutaciones o distintos órdenes del conjunto  $\{1, 2, 3\}$  son 123, 132, 213, 231, 312 y 321. Ahora, una permutación  $\sigma$  del conjunto  $S$  se obtiene realizando las siguientes escogencias en orden consecutivo:

- El primer elemento de  $\sigma$  en  $n$  formas.
- El segundo elemento de  $\sigma$  en  $(n - 1)$  formas, pues no se puede elegir el anterior.
- El tercer elemento de  $\sigma$  en  $(n - 2)$  formas, pues no se pueden elegir los dos anteriores.
- ⋮
- El penúltimo elemento de  $\sigma$  en 2 formas, pues no se pueden elegir los  $n - 2$  anteriores.
- El ultimo elemento de  $\sigma$  en 1 forma, pues es el único que queda.

Usando (PP) obtenemos que el número de permutaciones de  $S$  es

$$a_n = n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1.$$

El número  $a_n$  que acabamos de calcular se denota por  $n!$  y se lee  $n$  factorial. Nótese que  $a_n$  no depende de quién es  $S$ , sólo de su cardinalidad. Esto es,  $n!$  es el número de permutaciones que se pueden hacer de un conjunto arbitrario de tamaño  $n$ .

En lo que sigue, denotaremos por  $[n]$  al conjunto  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ . La notación que usamos para permutaciones en este manuscrito es la que se conoce como *notación de una línea*. Por ejemplo, 2413 es una de las 24 permutaciones de  $[4]$  en esta notación. Invitamos a los lectores a escribir todas las  $4!$  permutaciones del conjunto  $[4]$ . Queremos recalcar la distinción que hay entre un conjunto y una permutación. Un conjunto es una

colección *no ordenada* de elementos, esto es, el conjunto  $\{2, 1, 3\}$  es igual que el conjunto  $\{3, 1, 2\}$ . Por el contrario, una permutación es una colección *ordenada* de elementos. Por ejemplo, la permutación 213 es distinta de 312.

Realicemos un par de conteos más. Dado un conjunto  $S$  con  $n$  elementos, denotemos por  $2^S$  y  $\binom{S}{k}$  los siguientes conjuntos:

$$(a) \quad 2^S = \{A : A \subseteq S\}.$$

$$(b) \quad \binom{S}{k} = \{A : A \subseteq S, |A| = k\}.$$

Por ejemplo, si  $S = \{1, 2, 3\}$  tenemos que  $\binom{S}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$  y  $2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ . Como buenos combinatorios, la pregunta que nos hacemos ahora es ¿cuál es la cardinalidad del conjunto  $2^S$  y aquella del conjunto  $\binom{S}{k}$ ? Denotando  $\binom{n}{k} := \left| \binom{S}{k} \right|$  tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.** *Sea  $S$  un conjunto de tamaño  $n$ . Entonces*

$$(a) \quad |2^S| = 2^n.$$

$$(b) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

*Prueba:* Comencemos por probar (a). Supongamos que  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ , entonces cada subconjunto  $A$  de  $S$  puede pensarse como una sucesión  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  de forma que  $\epsilon_i = 0$  si  $a_i \notin A$ , ó,  $\epsilon_i = 1$  si  $a_i \in A$ . Esto es, cada sucesión de 0's y 1's de tamaño  $n$  nos da lugar a un único subconjunto de  $S$  y viceversa. Por ejemplo, el subconjunto vacío de  $S$  corresponde a la sucesión  $(0, 0, \dots, 0)$  y el conjunto  $S$  mismo corresponde a  $(1, 1, \dots, 1)$ . Luego, calcular  $|2^S|$  es lo mismo que calcular el número de sucesiones de 0's y 1's de tamaño  $n$ . Usando (PP) obtenemos que el número de dichas sucesiones es  $2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^n$  pues hay dos opciones para escoger cada  $\epsilon_i$  de forma independiente. Esto concluye la prueba de la parte (a).

Para la parte (b), probaremos que  $k! \binom{n}{k} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$ . El lado izquierdo de esta igualdad se puede pensar de la siguiente forma:  $\binom{n}{k}$  cuenta el número de formas de escoger un subconjunto  $A$  de tamaño  $k$  de un conjunto de  $n$  elementos, y el término  $k!$  es el número de formas de ordenar  $A$ . Esto es,  $k! \binom{n}{k}$  cuenta el número de formas de escoger  $k$  elementos de un conjunto de tamaño  $n$ , de forma ordenada. Es decir, el número de permutaciones de tamaño  $k$  de un conjunto de tamaño  $n$ . Este mismo conteo lo podemos realizar de otra manera eligiendo:

- el primero de los  $k$  elementos en  $n$  formas,
- el segundo de los  $k$  elementos en  $n-1$  formas,
- ⋮
- el  $k$ -ésimo elemento en  $n-(k-1)$  formas.



Usando (PP) vemos así que el número de formas de armar una lista de tamaño  $k$  usando elementos de un conjunto de cardinalidad  $n$  es  $n(n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ . Hemos realizado el mismo conteo de dos formas, y así  $k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ .  $\square$

El número  $\binom{n}{k}$  es muy importante en combinatoria. Se lee *n combinado k* o simplemente *n escoja k*. Este número se conoce como *coeficiente binomial*. Más explícitamente tenemos que para  $n, k \in \mathbb{N}$ ,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5)$$

Probablemente los lectores ya han visto el número  $\binom{n}{k}$  antes. En gran parte de la literatura  $\binom{n}{k}$  se da por definición como en (5). Nosotras, en cambio, definimos  $\binom{n}{k}$  como la cardinalidad de un conjunto y dedujimos la expresión en (5).

**Observación 2.** *En la prueba de la Proposición 1 contamos la cardinalidad de  $2^S$  de forma indirecta. Esto es, intrínsecamente definimos una biyección entre  $2^S$ , y el conjunto de sucesiones  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  con  $\epsilon_i = 0, 1$ . Ya que dichas sucesiones se cuentan de forma fácil, esto nos lleva a un cálculo del conjunto inicial que queremos contar. Esto es algo muy usual en combinatoria: en lugar de contar el conjunto original, recurrimos a otro más fácil de contar y establecemos una biyección entre ambos conjuntos. Una prueba de una identidad combinatoria hechas a través de biyecciones se conocen como prueba combinatoria de la identidad en cuestión.*

Ahora, para  $n$  fijo consideremos la función generadora  $B_n(x)$  de la sucesión finita  $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots)$ . Esto es,

$$B_n(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k.$$

Deseamos una fórmula cerrada para  $B(x)$ . Usando la biyección establecida en la prueba de la parte (a) en la Proposición 1 nos podemos dar cuenta de que cada sucesión  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ , proveniente de los diferentes subconjuntos de  $S$ , corresponde al monomio  $x^{\epsilon_1} \cdots x^{\epsilon_n}$  en el producto  $(1+x)(1+x) \cdots (1+x)$ . Por ejemplo, en la expansión del producto  $(1+x)^3$  el subconjunto  $\{1, 3\}$  del conjunto  $[3]$  corresponde a la sucesión  $(1, 0, 1)$  y contribuye al monomio  $x^1 x^0 x^1$ . En general, en la expansión de  $(1+x)^n$ , del  $i$ -ésimo factor  $1+x$  extraemos sólo uno de los términos ( $x^0$  ó  $x^1$ ) dependiendo de si el elemento  $a_i$  no pertenece ó sí pertenece al subconjunto dado por la sucesión  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ . Así,  $B_n(x) = (1+x)^n$  y obtenemos el siguiente resultado conocido como *el Teorema del Binomio*.

**Teorema 1.** *Sea  $n$  un entero no negativo. Entonces*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k. \quad (6)$$

**Observación 3.** *El Teorema 1 tiene una generalización conocida como Teorema del Binomio de Newton el cual establece que para  $r \in \mathbb{R}$*

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k, \quad (7)$$

en donde  $\binom{r}{k} := \frac{r(r-1) \cdots (r-k+1)}{k!}$ .

Hemos ofrecido una prueba combinatoria del Teorema 1 a través de la interpretación combinatoria de los coeficientes de dicha expansión. En el lado algebraico, tenemos una igualdad de series de potencias. Si manipulamos la expresión en (7), tomando  $n = -1$  y sustituyendo  $x$  por  $-x$ , obtenemos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-1}{k} x^k.$$

Pero, ¿podemos interpretar combinatoriamente los coeficientes  $(-1)^k \binom{-1}{k}$ ? Esta pregunta la abordamos a continuación desde un punto de vista más general.

Por tanto, el anterior párrafo establece la pregunta de si existe o no un significado combinatorio para el coeficiente  $\binom{-1}{k}$ , de la misma forma que  $\binom{3}{2}$ , por ejemplo, tiene significado combinatorio. Esto es,  $\binom{3}{2}$  se puede pensar como el número de subconjuntos de cardinalidad 2 de un conjunto de tamaño 3.

## 2.2. Multiconjuntos y composiciones débiles

Recordemos de la Sección 1.1 que dada una sucesión  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  de enteros positivos, decimos que  $\alpha$  es una composición de tamaño  $r$  (o una  $r$ -composición) de un entero positivo  $n$  si  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ .

**Definición 1.** *Una  $r$ -composición débil de  $n$  es una sucesión  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  de tamaño  $r$  tal que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$ , con  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$  y  $\alpha_i \geq 0$  para todo  $i \in [r]$ .*

**Proposición 2.** *El número de  $k$ -composiciones de  $n$  es  $\binom{n-1}{k-1}$ . Por otro lado, el número de  $k$ -composiciones débiles de  $n$  es  $\binom{n+k-1}{k-1}$ .*

Como un ejemplo, una 4-composición de 8 es la sucesión  $(3, 1, 2, 2)$ . Podemos pensar ésta composición como obtenida de la siguiente forma de escribir 8 tras borrar 3 de los 7 signos  $+$ . Esto es:

$$8 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \quad \rightsquigarrow \quad \overbrace{1+1+1}^3 \quad \overbrace{1}^1 \quad \overbrace{1+1}^2 \quad \overbrace{1+1}^2.$$

Con esto en mente, pasemos a la prueba.

*Prueba:* Las  $k$ -composiciones de  $n$  están en biyección con las formas de  $k - 1$  signos  $+$  de la igualdad  $n = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1$ . Entonces contar  $k$ -composiciones se reduce al problema de contar el número de formas que podemos borrar  $k - 1$  signos  $+$  de dicha expresión. Para esto, de los  $n - 1$  posibles signos  $+$  que hay en  $n = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1$  debemos escoger los  $k - 1$  que queremos borrar. Así, hay  $\binom{n-1}{k-1}$  formas de hacerlo, las cuales corresponden al total de  $k$ -composiciones de  $n$ .

Ahora, si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  es una  $k$ -composición débil de  $n$  entonces  $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  y por tanto  $n + k = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 1) + \dots + (\alpha_k + 1)$ . Haciendo  $\beta_i := \alpha_i + 1$  para cada  $i$  tenemos que la sucesión  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$  es una  $k$ -composición de  $n + k$ . Es decir, tenemos una biyección de una  $k$ -composición débil de  $n$  en una  $k$ -composición de  $n + k$ , y éstas últimas ya las sabemos contar. Lo importante es que esta correspondencia entre  $k$ -composiciones débiles de  $n$  y  $k$ -composiciones de  $n + k$  sea biyectiva lo cual es cierto (y dejamos que los lectores lo comprueben). Así, el número de  $k$ -composiciones débiles de  $n$  es el mismo que el número de  $k$ -composiciones de  $n + k$  y este es  $\binom{n+k-1}{k-1}$ .  $\square$

En este punto, es normal sentirse saturados con tantas definiciones y conceptos nuevos. Por eso invitamos a los lectores a que realicen sus propios ejemplos de cada concepto nuevo que aprendan. En combinatoria, y en matemáticas en general, resulta bastante útil calcular los primeros valores de sucesiones que se aprenden, así, la asimilación es más sólida. Sigamos calentando motores, contando ahora *multiconjuntos*.

**Definición 2.** Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Un  $k$ -multiconjunto de  $[n]$  es un conjunto de tamaño  $k$  cuyos elementos pertenecen a  $[n]$  y en el cual se admiten repeticiones.

**Ejemplo 2.** El conjunto  $S = \{1, 1, 1, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 6\}$  es un 10-multiconjunto del conjunto  $[7]$ .

Codificaremos los multiconjuntos de una forma más conveniente para su conteo. Por ejemplo,  $S = \{1, 1, 1, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 6\}$  lo codificaremos usando  $i^{j_i}$  si el elemento  $i$  de  $[n]$  aparece  $j_i$  veces en  $S$ . Así, escribiremos  $S = \{1^3, 2^0, 3^1, 4^0, 5^2, 6^4, 7^0\}$ . De esta forma asociamos al multiconjunto  $S$  la 7-composición débil  $(3, 0, 1, 0, 2, 4, 0)$  de 10. Nótese que, felizmente, este proceso es reversible: toda 7-composición débil  $(b_1, \dots, b_{10})$  de 10 nos da lugar a un 10-multiconjunto del conjunto  $[7]$  en el que el elemento  $i$  aparece repetido  $b_i$  veces. Aunque suena un poco a trabalenguas, la buena noticia es que ya sabemos contar composiciones débiles de una longitud fija. Estas observaciones las resumimos en el siguiente resultado. Denotemos por  $\binom{n}{k}$  al número de  $k$ -multiconjuntos de  $[n]$ . A este número lo llamaremos  *$n$  multiescoja  $k$* .

**Proposición 3.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . El número  $\binom{n}{k}$  de  $k$ -multiconjuntos de  $[n]$  está dado por

$$\binom{n}{k} = \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k}.$$

*Prueba:* (esbozo) Los  $k$ -multiconjuntos de  $[n]$  están en biyección con las  $n$ -composiciones débiles de  $k$ . De éstas hay  $\binom{k+n-1}{n-1}$ . La igualdad de la derecha se sigue, ya que  $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ .  $\square$

Ahora, para  $n$  fijo veamos qué podemos decir de la función generadora de la sucesión  $(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots)$ . Para formar un multiconjunto de  $[n]$  decidimos cuántas veces incluimos el número  $i$  en el multiconjunto. El número de veces que  $i$  se puede incluir es mayor o igual a cero. Así, dicha elección viene codificada en la serie  $x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$ , donde el término  $x^r$  indica que  $i$  se repite  $r$ -veces en el multiconjunto a formar. De esta forma, tenemos  $n$  factores (uno por cada elemento de  $[n]$ ) cada uno de los cuales despliega la posible elección de dicho elemento para un multiconjunto. Por ejemplo, el 3-multiconjunto  $\{1^2, 3\}$  del conjunto  $[4]$  contribuye en la expansión de  $(1 + x + x^2 + \dots)^4$  a través del monomio  $x^2 x^0 x^1 x^0$ . Así,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k &= \overbrace{(x^0 + x^1 + x^2 + \dots) \cdots (x^0 + x^1 + x^2 + \dots)}^{n \text{ factores}} \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^n \\ &= \left( \frac{1}{1-x} \right)^n = (1-x)^{-n} \\ &= \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-n}{k} x^k. \end{aligned}$$

La tercera igualdad en esta cadena de identidades se deduce de la Ecuación (1) mientras que la última igualdad se sigue de (7). De esta forma llegamos a una igualdad maravillosa entre los coeficientes de estas dos series de potencias:

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k} \Leftrightarrow (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{-n}{k}.$$

Esta igualdad nos dice, por un lado, que el coeficiente binomial  $\binom{n}{k}$  tiene sentido combinatorio incluso cuando  $n < 0$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . ¡¿Quién lo hubiera esperado?!

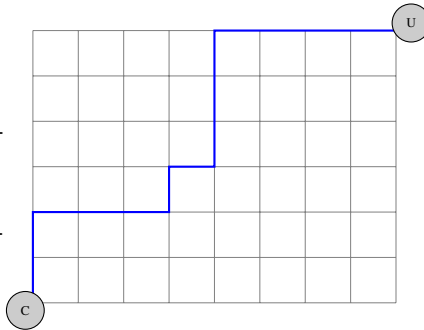
Desenglosemos un poco más esta identidad:

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k+n-1}{k} \\ &= (-1)^k \frac{(k+n-1)(k+n-2) \cdots (n+1)n}{k!} \\ &= \frac{(-k-n+1)(-k-n+2) \cdots (-n-1)(-n)}{k!}. \end{aligned}$$

Esto justifica la forma en que generalizamos la definición de  $\binom{n}{k}$ , en este caso para  $n \in \mathbb{Z}$ .

Prosigamos nuestra travesía en combinatoria enumerativa introduciendo más conteos.

El coeficiente  $\binom{14}{8,6}$  puede interpretarse como el número de formas de distribuir 14 pasos de forma que 6 de ellos son hacia el norte (N) y los 8 restantes hacia el este (E). Así,  $\binom{14}{8,6}$  nos ayuda a contar el número de formas de caminar de la esquina C con coordenadas (0, 0) a la esquina U con coordenadas (8, 6) en la figura, de forma que cada paso tiene longitud 1 y los pasos posibles son N ó E. Tales caminos se denominan *caminos reticulares*. Un ejemplo particular se ilustra en la Figura 2 y corresponde a la secuencia de pasos NNEEEENENNNEEEE.



**Figura 2.** Camino reticular de C a U.

**Definición 3.** Sea  $n$  un entero positivo y sea  $(a_1, \dots, a_m)$  una composición débil de  $n$ . El coeficiente multinomial

$$\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_m}$$

es el número de formas de distribuir, en orden,  $n$  elementos en  $m$  cajas  $1, \dots, m$ , de forma que la caja número  $i$  tiene  $a_i$  elementos, para cada  $i \in [m]$ .

**Ejemplo 3.** Comencemos con el ejemplo usual de coeficientes multinomiales. Hay 14 bolas blancas alineadas, ¿de cuántas maneras podemos colorear cada bola de manera que hayan 8 rojas y 6 azules? Podemos pensar en este problema así. Las 14 bolas son los objetos a distribuir en dos cajas  $C_1$  y  $C_2$ . La caja  $C_1$  debe recibir 8 de las bolas y la  $C_2$  6. Las que caen en  $C_1$  quedan pintadas de rojo, y las 6 restantes quedan pintadas de azul. Como las bolas están ordenadas en una línea recta, importa cuál queda pintada de rojo y cuál de azul. Esto es, las estamos distribuyendo en orden en las 2 cajas, las 14 bolas. Así, existen  $\binom{14}{8,6}$  maneras de colorearlas con los requerimientos dados.

Veamos ahora una forma muy común de entender estos coeficientes multinomiales en términos de caminos en una retícula.

**Ejemplo 4.** Caminos reticulares.

Para calcular  $\binom{14}{8,6}$  vemos que de los 14 pasos basta con escoger 8 que sean E en  $\binom{14}{8}$  formas. Los pasos restantes serán N y se pueden escoger en  $\binom{14-8}{6} = 1$  formas. Así,

$$\binom{14}{8,6} = \binom{14}{8} \binom{14-8}{6} = \frac{14!}{8! \cdot 6!}.$$

Este razonamiento se puede generalizar y da lugar al siguiente resultado cuya prueba dejamos a los lectores. El coeficiente multinomial se puede calcular así:

$$\binom{n}{a_1, \dots, a_m} = \frac{n!}{a_1! \cdots a_m!}. \quad (8)$$

**Ejemplo 5.** ¿Cuántos anagramas hay de la palabra **AGUADEPANELA**? Podemos pensar en este problema como el número de formas de distribuir 12 letras en 8 cajas, una por cada letra diferente en la palabra **AGUADEPANELA**. Una de las cajas debe recibir 4 letras (dando lugar a las 4 A's), otra caja debe recibir 2 letras (dando lugar a las E's) y cada una de las 6 cajas restantes debe recibir una letra. Así el número de permutaciones de **AGUADEPANELA** es

$$\binom{12}{4, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1} = \frac{12!}{4!2!1!1!1!1!1!1!}.$$

Teniendo en mente nuestra definición del coeficiente multinomial analicemos la expansión de

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n.$$

Cada término en esta expansión es de la forma  $x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$  donde  $a_1 + \cdots + a_m = n$  y  $a_i \geq 0$ . El coeficiente de dicho monomio es el número de formas de distribuir  $n$  elementos en  $m$  "cajas" (representadas por las variables) de forma que la caja  $x_i$  contiene  $a_i$  elementos. Así obtenemos el *Teorema del Binomio generalizado*:

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{a_1 + \cdots + a_m = n \\ a_i \geq 0}} \binom{n}{a_1, \dots, a_m} x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}.$$

La presente lección terminará con un sumario de todo lo que hemos aprendido a contar. Nuestro sumario lo llamaremos *la travesía de las doce casas*, aunque no es una traducción literal de su término en inglés *the twelvefold way*. Para tal fin nos adentramos ahora en el mundo de las *particiones*.

### 2.3. Particiones de conjunto

**Definición 4.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Una  $k$ -partición de  $[n]$  es una colección  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  de  $k$  subconjuntos de  $[n]$  tales que:

- (i)  $\bigcup_{i=1}^k A_i = [n]$ .
- (ii)  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para todo  $i, j \in [k]$  tales que  $i \neq j$ .
- (iii)  $A_i \neq \emptyset$  para todo  $i \in [k]$ .

Los conjuntos  $A_i$  se llaman partes de la partición.

Por ejemplo, una partición del conjunto [8] es  $\{\{1, 4, 6, 7\}, \{2\}, \{3, 8\}, \{5\}\}$ . Para simplificar notación escribiremos la misma partición como  $1467|2|38|5$ . Denotemos por  $S(n, k)$  al número de  $k$ -particiones de  $[n]$ . Los números  $S(n, k)$  se conocen como *números de Stirling de tipo 2*. Los números de Stirling de tipo 1 no serán objeto de nuestro estudio pero una referencia para tal fin es [4].

**Ejemplo 6.** *Ilustremos  $S(n, k)$  para el caso  $n = 3$ .*

- Si  $k = 1$  entonces  $S(3, 1) = 1$  proveniente de la 1-partición  $\{\{1, 2, 3\}\} = 123$ .
- Si  $k = 2$  entonces  $S(3, 2) = 3$  proveniente de las 2-particiones  $12|3, 13|2, 23|1$ .
- Si  $k = 3$  entonces  $S(3, 3) = 1$  proveniente de la 3-partición  $1|2|3$ .

Los números de Stirling  $S(n, k)$  satisfacen la siguiente recursión

**Proposición 4.** *Sean  $n \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq k \leq n$ . Entonces*

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k), \quad (9)$$

con condiciones iniciales  $S(0, 0) = 1$ , y para  $n > 0$ ,  $S(n, 0) = 1 = S(0, n)$ .

*Prueba:* El lado izquierdo de (9) cuenta el número de  $k$ -particiones de  $[n]$ . Ahora, toda  $(k - 1)$ -partición  $A_1 | \cdots | A_{k-1}$  de  $[n - 1]$  da lugar a la  $k$ -partición  $A_1 | \cdots | A_{k-1} | A_k$  de  $[n]$  haciendo  $A_k = \{n\}$ . En total hay  $S(n - 1, k - 1)$  dichas particiones. Por otro lado, cada  $k$ -partición  $A_1 | \cdots | A_k$  de  $[n - 1]$  da lugar a  $k$  diferentes  $k$ -particiones de  $[n]$ , una por cada forma de poner el número  $n$  en alguna de las  $k$  partes. Estas cuentan por  $kS(n - 1, k)$ . Como una  $k$ -partición de  $[n]$  es tal que el número  $n$  está o no está solo en su parte, estos dos casos cubren todas las posibles  $k$ -particiones de  $[n]$ . Así, la recurrencia se verifica.  $\square$

El último ingrediente necesario para el final de la travesía son las *particiones de enteros*.

## 2.4. Particiones de un entero

**Definición 5.** *Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Una  $k$ -partición de  $n$  es una colección  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  de longitud  $k$  de enteros positivos tales que  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = n$  y  $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$ . Los  $\lambda_i$  son las partes de la partición. El número de  $k$ -particiones de  $n$  se denota  $p(k, n)$ .*

**Ejemplo 7.** *Las particiones de 4 son  $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1)$  y  $(1, 1, 1, 1)$ .*

**Ejemplo 8.** *¿De cuantas formas puedo dar \$1000 de vueltas usando monedas de \$1, \$2 y \$5?. Esta pregunta se puede traducir como ¿cuántas particiones de 1000 hay cuyas partes sean 1, 2 o 5?. Para formar una partición de 1000 con la restricción dada, tenemos en cuenta que 1 puede aparecer en la partición cuantas veces quiera, o puede no aparecer. Esto lo codificamos en la serie  $x^0 + x^1 + x^{1+1} + x^{1+1+1} + \cdots$ . De forma análoga, las*

posibilidades para 2 se codifican en  $x^0 + x^2 + x^{2+2} + x^{2+2+2} + \dots$ ; y para 5 tenemos la serie  $x^0 + x^5 + x^{5+5} + x^{5+5+5} + \dots$ . Así, el producto

$$P(x) = (1 + x + x^{1+1} + \dots)(1 + x^2 + x^{2+2} + \dots)(1 + x^5 + x^{5+5} + \dots)$$

codifica particiones de cualquier entero usando únicamente 1, 2 o 5 como partes. Por ejemplo el monomio  $x^{1+1}x^0x^5 = x^7$  codifica la partición de 7 dada por (5, 1, 1). Reescribiendo  $P(x)$  tenemos:

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1-x^5} \\ &= \left( \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-2}{k} x^k \right) \left( \sum_{k \geq 0} \binom{-1}{k} x^k \right) \left( \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{-1}{k} x^{5k} \right). \end{aligned}$$

Así, la respuesta a nuestra pregunta inicial se puede obtener extrayendo el coeficiente de  $x^{1000}$  en este producto de series de potencia.

Hemos visto el gran uso que tienen las funciones generadoras en combinatoria enumerativa. A la hora de querer extraer un coeficiente de una serie de potencias como la obtenida en el Ejemplo 8, viene muy útil el uso de software apropiado para tal fin, como Maple, Mathematica, etc. Por otro lado, una herramienta común a la hora de hacer investigación es la enciclopedia en línea de sucesiones enteras (OEIS por sus siglas en inglés). Dicho esto, invitamos a los lectores a entrar en [www.oeis.org](http://www.oeis.org) e ingresar su sucesión de enteros favorita. ¡Verán todo lo que se puede descubrir con cualquier conteo!

## 2.5. La travesía de las doce casas

Cerramos esta lección con la esperada *travesía de las doce casas* en donde damos respuesta a la siguiente pregunta usando las herramientas de conteo aprendidas hasta ahora ¿De cuántas formas se pueden distribuir  $n$  bolas en  $m$  cajas? . La respuesta a esta pregunta depende de si las bolas o las cajas están etiquetadas (E), o no están etiquetadas (N. E). Esto es, (E) corresponde al caso en que las cajas son discernibles y (N.E.) cuando no lo son. También depende de las restricciones que se tengan para el llenado, como muestra el Cuadro 2. Invitamos a los lectores a convencerse de las respuestas dadas allí. Advertimos que no hay una única forma de hacer estos conteos, como hemos visto hasta ahora.

Antes de postular los ejercicios de esta sección invitamos a los lectores a acompañar y complementar lo aprendido en estas notas con los videos y notas que aparecen en [1]. Finalizamos con ejercicios en los que probar identidades en combinatoria es la acción principal. Dar una prueba combinatoria de una igualdad se traduce a interpretar uno de los lados de la igualdad como la cardinalidad de un conjunto, y tratar de ver que el otro lado de la igualdad cuenta el mismo conjunto. ¡Disfruten!



**Cuadro 2.** Doce formas de distribuir  $n$  bolas  $m$  en cajas.

Bolas	Cajas	Cualquier forma	A lo mas 1 por caja	Al menos 1 por caja
E	E	$m^n$	$m(m-1) \cdots (m-n+1)$	$m!S(n, m)$
N.E	E	$\binom{m}{n}$	$\binom{m}{n}$	$\binom{n-1}{m-1}$
E	N.E	$\sum_{k=0}^m S(n, k)$	$\begin{cases} 1 & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$S(n, m)$
N.E	N.E	$\sum_{k=0}^m p(n, k)$	$\begin{cases} 1 & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases}$	$p(n, m)$

**2.6. Ejercicios**

1. Pruebe que:

(a)  $S(n, 2) = \frac{2^n - 2}{2}$ .

(b)  $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ .

2. Construya los primeros 6 pisos de la tabla de los números  $S(n, k)$ :

$n/k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	...
1	0	1	0	0	0	0	0	...
2								...
3								...
4								...
5								...
6								...
⋮								...

3a. Pruebe que si  $m \in \mathbb{N}$  y  $n \in \mathbb{N}$  entonces

$$m^n = \sum_{k=0}^n k! S(n, k) \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^n S(n, k) (m)_k,$$

donde  $(m)_k = m(m-1) \cdots (m-k+1)$ .<sup>3</sup>

3b. Use el ejercicio 3a para concluir que

$$m^4 = \binom{m}{1} + 14 \binom{m}{2} + 36 \binom{m}{3} + 24 \binom{m}{4} + 0 \binom{m}{5} + \cdots \quad (10)$$

4. La ecuación en (10) se puede extender a una identidad entre polinomios en  $\mathbb{R}[x]$ :

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) x(x-1) \cdots (x-k+1).$$

<sup>3</sup>El número  $(m)_k$  se denomina *factorial caído*.

Expresar el *cambio de base* entre los polinomios  $x(x-1)\cdots(x-n+1)$  y  $x^n$  para  $n = 1, 2, 3$ . Es decir, escriba cada uno de los polinomios  $x, x(x-1), x(x-1)(x-2)$  en términos de los polinomios  $x, x^2, x^3$ .

5. Formule un problema combinatorio cuya función generadora sea

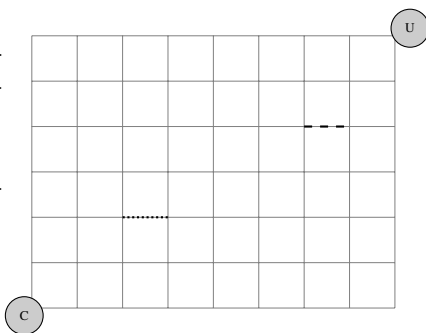
$$(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \cdots).$$

¿Qué interpretación tiene el coeficiente de  $x^5$ ?

6. Caminos reticulares.

(a) ¿Cuántos caminos reticulares hay de la casa C ubicada en la esquina  $(0, 0)$  a la universidad U ubicada en la esquina  $(8, 6)$  si debo pasar por la calle - - - ?

(b) ¿Cuántos caminos hay si debo evitar la calle . . . ?



7. Dé una prueba combinatoria de las siguientes identidades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n},$$

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} \quad \text{Identidad de Vandermonde,}$$

$$3^n = 2^0 \binom{n}{0} + 2^1 \binom{n}{1} + \cdots + 2^{n-1} \binom{n}{n-1} + 2^n \binom{n}{n}.$$

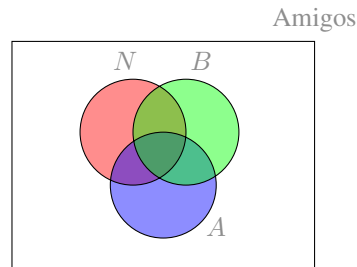
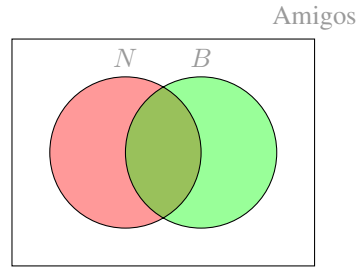
### 3. Contando de más

En esta lección aprenderemos un método de conteo clave en combinatoria, conocido como *Inclusión-Exclusión* (IE).

Supongamos que de un grupo de amigos queremos determinar el número  $X$  de ellos que no les gusta la natilla o los buñuelos. Este sencillo problema se puede resolver calculando el total  $S$  de amigos y luego sustrayendo los que no les gusta la natilla  $|N|$  y los que no le gustan los buñuelos  $|B|$ , teniendo en cuenta que podemos estar sustrayendo de más. Es decir, el conteo correcto en nuestra situación es

$$X = S - |N| - |B| + |N \cap B|.$$

¿Qué pasaría si hubiera más restricciones a nuestro conteo? Por ejemplo, si quisiéramos excluir de nuestro conteo a los que no les gusta el aguardiente?



### 3.1. Principio de Inclusión-Exclusión

Sea  $S$  un conjunto finito y sean  $P_1, \dots, P_n$  un conjunto de propiedades. Denotemos por  $A_i$  el conjunto  $A_i = \{x \in S : x \text{ posee la propiedad } P_i\}$ , para  $i \in [n]$ . El número  $X$  de elementos de  $S$  que no posee ninguna de las  $n$  propiedades  $P_1, \dots, P_n$  está dado por  $|A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c|$ , donde  $A_i^c$  denota el complemento en  $S$  del conjunto  $A_i$ .

**Teorema 2.** Con la notación anterior tenemos que

$$X = |S| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|, \quad (11)$$

donde los índices de  $i, j, k \in [n]$ .

*Prueba:* Para probar esta identidad mostraremos que todo elemento  $x$  de  $S$  tiene la misma contribución al lado izquierdo y al lado derecho de (11). Hay dos casos por considerar:

1. Si  $x$  no satisface ninguna de las  $m$  propiedades entonces  $x \in A_1^c \cap \dots \cap A_m^c$ . Luego, la contribución de  $x$  en el lado izquierdo de (11) es 1. En el lado derecho su contribución es de

$$1 - 0 + 0 - 0 + \dots + (-1)^m 0 = 1.$$

2. Si  $x$  satisface  $k$  de las  $m$  propiedades para algún  $k \geq 1$  entonces  $x \notin A_1^c \cap \dots \cap A_m^c$  y por tanto su contribución al lado izquierdo de (11) es 0. Para calcular su contribución al lado derecho, tenemos en cuenta que  $x$  pertenece a  $k$  de los conjuntos  $A_1, \dots, A_m$ .

Por tanto su contribución, por ejemplo, a la suma  $\sum_{i < j} |A_i \cap A_j|$  es  $\binom{k}{2}$  pues hay  $\binom{k}{2}$  pares de subconjuntos de los  $k$  a los que  $x$  pertenece. Así, su contribución total es

$$\begin{aligned} & 1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = (1-1)^k = 0 \end{aligned}$$

en donde la penúltima igualdad se deduce del Teorema 1. De esta forma probamos la identidad en (11).  $\square$

Ilustraremos el principio IE con un conteo muy bonito y popular en combinatoria usando permutaciones.

### 3.2. Desarreglos

Recordemos que una permutación  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$  de  $[n]$  es un rearreglo de los elementos de  $[n]$ . Podemos pensar en  $\sigma$  como una biyección  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$  tal que  $\sigma(i) = \sigma_i$ . Por ejemplo, la permutación  $\tau = 4132$  de  $[4]$  es la biyección  $\tau : [4] \rightarrow [4]$  tal que  $\tau(1) = 4$ ,  $\tau(2) = 1$ ,  $\tau(3) = 3$  y  $\tau(4) = 2$ . Diremos que  $i$  es un *punto fijo* de una permutación  $\sigma$  si  $\sigma(i) = i$ . Por ejemplo, 3 es un punto fijo de la permutación  $\tau$ .

Sea  $S_n$  el conjunto de permutaciones del conjunto  $[n]$  y sea  $D(n)$  el conjunto de *desarreglos* del conjunto  $[n]$ . Esto es,

$$D(n) := \{\sigma \in S_n : \sigma \text{ no tiene puntos fijos}\}.$$

Ahora nos formulamos nuestra pregunta favorita: ¿Cuál es la cardinalidad de  $D(n)$ ? Denotando  $d_n := |D(n)|$  vemos que  $D(1) = \emptyset$ ,  $D(2) = \{21\}$ ,  $D(3) = \{231, 312\}$  y por tanto  $d_1 = 0$ ,  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 2$ .

Realicemos nuestro conteo usando el principio IE. Una razón para querer usar IE es que el conjunto  $D_n$  cuya cardinalidad queremos calcular, es un subconjunto de  $S_n$ . La cardinalidad de este último conjunto,  $n!$ , es muy fácil de calcular.

Para usar IE necesitamos un conjunto que contenga al que deseamos contar. En este caso  $S_n \supset D_n$ . Ahora necesitamos un conjunto de propiedades que queremos evitar. Ya que lo que queremos evitar son permutaciones con puntos fijos, usemos esta información para construir los siguientes subconjuntos de  $S_n$ . Para  $i \in [n]$ , sea

$$A_i := \{\sigma \in S_n : \sigma(i) = i\}.$$

Esto es,  $A_i$  consiste de las permutaciones de  $S_n$  que tienen a  $i$  (por lo menos) como punto fijo. De esta forma vemos que

$$D(n) = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c.$$

Para calcular  $d_n = |D(n)|$  usando (11) debemos calcular antes las cardinalidades de los  $A_i$ , al igual que la de sus intersecciones. Una permutación  $\sigma \in A_i$  es tal que  $\sigma(i) = i$  y

los demás  $\sigma(j)$  forman una permutación del conjunto  $\{1, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$  el cual tiene  $n-1$  elementos. Por tanto  $|A_i| = (n-1)!$ . Un razonamiento análogo nos lleva a que toda intersección  $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$  tiene cardinalidad  $(n-k)!$ . Luego,

$$\begin{aligned} d_n &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\ &= n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

Esta bonita respuesta ya nos da solución a nuestro problema inicial. A pesar de que nuestro enfoque en estas notas no incluye análisis asintótico de identidades combinatorias, no podemos dejar pasar por alto el siguiente resultado. Usando la expansión por series de Taylor de  $e^x$  tenemos que

$$e^{-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$$

lo que nos lleva a una forma asintótica de calcular los desarreglos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e}.$$

La siguiente proposición cuya prueba dejamos a los lectores, nos da un par de fórmulas recursivas para calcular  $d_n$ .

**Proposición 5.** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,

- (a)  $d_n = n \cdot d_{n-1} + (-1)^n$ .
- (b)  $d_n = (n-1) \cdot d_{n-1} + (n-1) \cdot d_{n-2}$ .

Terminamos esta sección con un principio de conteo sencillo de establecer y de entender.

### 3.3. Principio del palomar

*Principio del palomar:* Si  $n$  palomas se distribuyen en un palomar consistente de  $n-1$  casillas, entonces hay una casilla con (al menos) dos palomas.

**Ejemplo 9.** Probar que si se seleccionan 51 enteros del conjunto  $[100]$  entonces al menos dos de los enteros elegidos son consecutivos.

Para probar esto usando el principio del palomar necesitamos “palomas” y “casillas”. En este caso pensemos en cada uno de los 51 enteros seleccionado como una paloma y pensemos en 50 casillas etiquetadas  $1-2, 3-4, 5-6, \dots, 99-100$ . Insertamos cada uno de los enteros seleccionados en su casilla correspondiente. De esta forma el principio del palomar garantiza una casilla con al menos dos enteros. Así, el resultado se sigue.

**Ejemplo 10.** Sean  $a_1, a_2, \dots, a_m$  enteros. Pruebe que existen índices  $k$  y  $l$  tales que  $a_{k+1} + \dots + a_l \equiv 0 \pmod{m}$  donde  $0 \leq k < l \leq m$ .

Para solucionar este problema consideremos las  $m$  sumas parciales  $b_i := a_1 + \dots + a_i$  para  $i \in [m]$ . Si alguno de los  $b_i$  es divisible por  $m$  el resultado se sigue. En caso contrario, los posibles residuos  $r$  en la congruencia  $b_i \equiv r \pmod{m}$  son  $1, 2, \dots, m-1$ . Por tanto, tenemos  $m$  enteros  $b_1, \dots, b_m$  y  $m-1$  residuos posibles  $1, 2, \dots, m-1$ . Así, existen  $k, l$  distintos tales que  $b_k \equiv b_l \pmod{m}$ . Asumiendo sin pérdida de generalidad que  $l > k$  tenemos que  $b_l - b_k = a_{k+1} + \dots + a_l$  y ya que  $b_l - b_k \equiv 0 \pmod{m}$ , el resultado se sigue.

### 3.4. Ejercicios

#### 1. Inclusión-Exclusión

(a) Pruebe que la siguiente identidad se satisface:

$$k! \cdot S(n, k) = \binom{k}{k} k^n - \binom{k}{1} (k-1)^n + \binom{k}{2} (k-2)^n - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} (k-k)^n.$$

(b) Seis parejas van a una fiesta y todas bailan cambiando de parejas. ¿De cuántas formas puedan bailar cambiando parejas de manera que a nadie le toca bailar con su pareja real? ¿De cuántas formas si al menos una de las parejas originales quedan bailando?.

(c) Determine el número de enteros positivos  $n$  tales que  $1 \leq n \leq 100$  y  $n$  no es divisible entre 2, 3 o 5.

#### 2. Principio del palomar

(a) Tengo 10 pares de medias en mi cajón. ¿Cuántas medias debo extraer como mínimo (si tengo la luz apagada) para garantizar que extraje un par?

(b) Sea  $G$  un grafo simple<sup>4</sup> con  $n$  vértices. Pruebe que existen dos vértices  $u$  y  $v$  de  $G$  tales que  $u$  tiene el mismo grado de  $v$ . [El grado de un vértice es el número de aristas que emanan de él].

(c) Se dibujan cinco puntos en un cuadrado  $2 \times 2$ . Pruebe que dos de los cinco puntos están a una distancia menor o igual que  $\sqrt{2}$ .

## 4. Números de Catalan

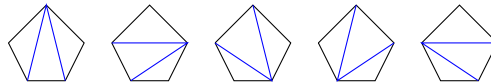
Una de las razones por las cuales decidimos realizar el evento Días de Combinatoria (ver <http://dias2017.combinatoria.co/>) es la versatilidad de la combinatoria en diversas áreas de la matemática. Esta diversidad hace que un conteo realizado desde combinatoria enumerativa tenga relevancia en un problema topológico o algebraico, por ejemplo. Esto es, el objeto que nos interese contar puede tener gran significado en un problema específico en otra área. Luego, una sucesión como  $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$  puede significar una cosa para una topóloga, y otra cosa distinta para una algebrista. Existe una sucesión particular en combinatoria que tiene, hasta el sol de hoy, más de 200 interpretaciones diferentes. Esta sucesión es la sucesión de los *números de Catalan* y es nuestro foco en esta parte del manuscrito. Los números de Catalan son probablemente los que

<sup>4</sup>Ver sección 5 para terminología.

tienen la entrada más larga en la OEIS (ver [3]). De éstas más de 200 maneras de definir los números de Catalan, escogemos triangulaciones de polígonos para definirlos aquí. Una *triangulación* de un  $n$ -ágono es una subdivisión de éste en regiones triangulares insertando diagonales que no se intersecten.

**Ejemplo 11.** Las 5 triangulaciones de un pentágono se muestran en la Figura 3.

**Figura 3.** Triangulaciones de un pentágono.



**Definición 6.** El número de Catalan  $C_n$  es el número de triangulaciones de un  $(n + 2)$ -ágono.

El Ejemplo 11 nos dice que el número de Catalan  $C_3 = 5$ . Los lectores pueden verificar directamente que  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$ . Es un buen ejercicio calcular  $C_4$ . Haciendo  $C_0 = 1$  tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 6.** La sucesión  $C_0, C_1, C_2, C_3, \dots$  satisface, para  $n \geq 1$ , la siguiente recurrencia:

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0. \quad (12)$$

Más aun,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \quad (13)$$

*Prueba:* Comencemos por probar la recurrencia (12). Para tal fin, dado un  $(n + 2)$ -ágono  $P$  escogeremos uno de sus lados y lo llamaremos la *base* de  $P$ . Pensemos en los vértices de  $P$  etiquetados de 1 hasta  $n + 2$  en forma cíclica. Sin pérdida de generalidad asumamos que los vértices  $n + 1$  y  $n + 2$  forman la base.

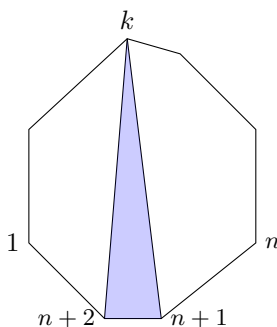
Usando el principio de la suma y ya que  $k$  puede ser 1, ó 2, ó  $\dots$ , ó  $n$  vemos que el total de triangulaciones de  $P$  es  $C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \dots + C_{n-1}C_0$ .

Ahora procedemos a probar (13) usando la recurrencia (12). Sea  $C(x)$  la función generadora de los números de Catalan. Esto es,  $C(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots$ . Usando operaciones en funciones generadoras tenemos que

$$\begin{aligned} [C(x)]^2 &= C_0^2 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \dots \\ &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots \end{aligned}$$

en donde la segunda igualdad se deriva de la recurrencia que acabamos de probar. Manipulando un poco más esta última expresión tenemos que

Para formar una triangulación de  $P$  escogemos un vértice  $k$  para  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  y formamos un triángulo con la base (ver Figura 4). El triángulo así formado divide el  $(n+2)$ -ágono en dos: el lado izquierdo del triángulo azul es un  $(k+1)$ -ágono y el lado derecho es un  $(n-k+2)$ -ágono. El  $(k+1)$ -ágono puede ser triangulado en  $C_{k-1}$  formas y el  $(n-k+2)$ -ágono puede ser triangulado en  $C_{n-k}$  formas. Esto dice que con el vértice  $k$  dado, hay  $C_{k-1}C_{n-k}$  triangulaciones de  $P$ .



**Figura 4.**

$$\begin{aligned}
 x[C(x)]^2 &= C(x) - 1 \\
 \Leftrightarrow 4x^2[C(x)]^2 &= 4xC(x) - 4x \\
 \Leftrightarrow [1 - 2xC(x)]^2 &= 1 - 4x \\
 \Leftrightarrow 1 - 2xC(x) &= (1 - 4x)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Esta última igualdad en realidad asume la escogencia de la raíz positiva de  $\sqrt{[1 - 2xC(x)]^2}$ . Es un ejercicio para los lectores convencerse de esta elección. Ahora, esta última identidad la podemos reescribir como

$$1 - 2xC(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4x)^k. \quad (14)$$

De la igualdad (14) extraemos el coeficiente de  $x^{n+1}$  en la serie de la izquierda y la serie de la derecha, obteniendo

$$\begin{aligned}
 -2C_n &= \binom{1/2}{n+1} (-4)^{n+1} \\
 &= \frac{(1/2)(1/2-1)\cdots(1/2-n)}{(n+1)!} (-1)^{n+1} 4^{n+1} \\
 &= \frac{(-1)}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1)!} 2^{n+1} 2^{n+1} \\
 &= (-1) \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1)n!} \frac{2^{n+1}n!}{n!}.
 \end{aligned}$$

Dado que  $2^n n! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n$ , de esta última igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(n+1)n!} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{n!} \\
 &= \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}
 \end{aligned}$$

concluyendo así la prueba. □

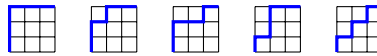


Como lo mencionamos al comienzo de esta sección, existen más de 200 interpretaciones de los números de Catalan. Hasta ahora sólo hemos visto una de ellas. Ahora introduciremos otra de sus muy famosas interpretaciones.

#### 4.1. Caminos de Dyck

El conjunto de caminos reticulares de  $(0, 0)$  a  $(n, n)$  usando pasos unitarios Norte o Este, sin pasar por debajo de la diagonal  $y = x$  se conoce como los *Caminos de Dyck*  $D_n$ . En la Figura 5 ilustramos los caminos de Dyck  $D_3$ .

**Figura 5.** Caminos de Dyck  $D_3$ .



**Proposición 7.** El número de caminos de Dyck  $|D_n|$  coincide con el número de Catalan  $C_n$ .

*Demostración.* (esbozo) Recordemos que una forma de interpretar el coeficiente binomial  $\binom{a}{b}$  es como el conjunto de caminos reticulares con pasos  $N$  o  $E$  de forma que  $b$  de los  $a$  pasos son  $N$  y los  $a - b$  restantes son  $E$  (o viceversa). Así,  $\binom{2n}{n}$  es el número de caminos reticulares de  $(0, 0)$  a  $(n, n)$  usando  $n$  pasos  $N$  y  $n$  pasos  $E$ . Para calcular  $D_n$  queremos extraer los caminos “malos” de todos los caminos contados por  $\binom{2n}{n}$ ; esto es, queremos extraer aquellos que cruzan la diagonal. Mostraremos que el número de caminos malos es  $\binom{2n}{n-1}$  y por tanto

$$|D_n| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Para ver esto, mostraremos una biyección entre el conjunto de caminos malos y los caminos reticulares de  $(0, 0)$  a  $(n+1, n-1)$  usando  $N$  o  $E$ , de los cuales sabemos que hay  $\binom{n+1+n-1}{n-1} = \binom{2n}{n-1}$ . Ilustraremos esta biyección con un ejemplo específico y dejaremos a los lectores la prueba del caso general. Sea  $P = NNNEENEEE.ENNNEEN$  un camino reticular de  $(0, 0)$  a  $(8, 8)$ . En  $P$  hemos puesto un punto para indicar la primera vez que el camino cruza la diagonal<sup>5</sup>. Nótese que en el momento que se cruza la diagonal,  $\#E$ 's = 1 +  $\#N$ 's. Sea  $Q$  el camino obtenido de  $P$  al intercambiar  $E$ 's con  $N$ 's después del punto, y dejando los pasos antes del punto igual. Esto es,  $Q = NNNEENEEE.NEEENNE$ . Vemos que de esta forma  $Q$  es un camino reticular de  $(0, 0)$  a  $(n+1, n-1)$  pues ahora el número total de pasos  $E$  en  $Q$  supera en 1 los pasos  $N$ . Así cada camino malo se vuelve, de forma única, un camino reticular de  $(0, 0)$  a  $(n+1, n-1)$ . Este procedimiento es fácilmente reversible (lo cual dejamos como ejercicio)

<sup>5</sup>Animamos a los lectores a pintar el camino dado en una cuadrícula  $8 \times 8$ .

y nos dice que el número de caminos malos es igual al número de caminos reticulares de  $(0, 0)$  a  $(n + 1, n - 1)$ . Así,

$$|D_n| = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n.$$

□

Una de las ventajas de tener más de una forma de pensar en una sucesión en combinatoria es que dependiendo del problema que tengamos en frente, una interpretación de la sucesión puede ser más ventajosa que otra. En los ejercicios hemos incluido varias de las interpretaciones de los números de Catalan. Aquellos con ganas de más pueden chequear [5].

## 4.2. Ejercicios

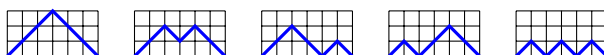
Para los ejercicios 1a y 1b se puede consultar [4, Capítulo 3] para la terminología de posets.

- 1a. *Caminos de Dyck  $D_n$* : Construya una estructura de poset  $\mathcal{D}_3$  en los caminos de Dyck  $D_3$  ilustrados en la Figura 5. ¿Es el poset graduado?
- 1b. Sea  $P_n$  el retículo de raíces de tipo  $A_n$ . Pruebe que  $J(P_2)$  tiene  $C_3$  elementos. ¿Es  $J(P_3) \cong \mathcal{D}_3$ ?

Muestre que cada una de las familias de objetos dadas en los ejercicios 2 al 6 son contadas por los números de Catalan. [Ayuda: si la colección dada satisface la misma recurrencia que los  $C_n$ , el problema está resuelto.]

2. *Caminos de Dyck  $D_n$  -versión 2-* Caminos de  $(0, 0)$  a  $(2n, 0)$  usando pasos  $(1, 1)$  y  $(1, -1)$ , de forma que nunca se pasa debajo del eje  $x$ . Los caminos  $D_3$  se ilustran en la Figura 6.

**Figura 6.** Caminos  $D_3$  versión 2



3. *Paréntesis binarios  $A_n$* : ¿De cuántas formas podemos poner  $n$  pares de paréntesis de forma “válida”? Algo no válido es  $( ) ) ( ) ($  ya que el tercer paréntesis no se puede emparejar con nadie. Por ejemplo, cuando  $n = 3$  las posibilidades válidas son

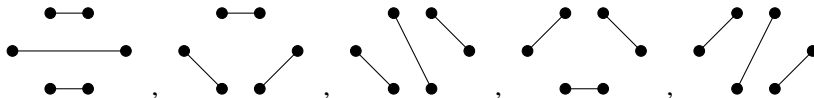
$$()()() , (())() , ()(()) , (())() y ((())) .$$

4. *Árboles planos binarios*  $T_n$ : Un árbol plano binario con  $2n + 1$  vértices es un grafo<sup>6</sup> de forma que hay un vértice especial llamado *raíz* y a medida que se desciende de la raíz “crecen” dos subvértices o ninguno. Los árboles planares binarios  $T_2$  se ilustran en la Figura 7

Figura 7. Árboles en  $T_2$



5. *Emparejamientos no cruzados*  $M_n$ : Un grupo de  $2n$  personas están sentadas en una mesa redonda. ¿ De cuántas formas pueden saludarse sin que sus manos se crucen? Por ejemplo, los emparejamientos  $M_3$  son



6. Sucesiones de longitud  $2n$  formadas por (el mismo número de)  $1$ 's y  $-1$ 's tales que las sumas parciales son no negativas:

Por ejemplo, representando cada  $-1$  con  $-$  tenemos que, cuando  $n = 3$  las posibles sucesiones son

$$111 - - - , 11 - 1 - - , 11 - - 1 - , 1 - 11 - - , 1 - 1 - 1 - .$$

### 5. El polinomio cromático

Terminaremos nuestra breve introducción a la combinatoria enumerativa con una mirada rápida a coloraciones de grafos.

#### 5.1. Grafos y coloraciones

**Definición 7.** Un grafo simple  $G = (V, E)$  es un par donde  $V$  es un conjunto finito y  $E \subseteq \binom{V}{2}$  es una colección cuyos elementos son pares de vértices. El conjunto  $V$  son los vértices de  $G$  y la colección  $E$  son las aristas de  $G$ .

En lo que sigue, la palabra grafo se referirá a grafo simple. Dado un grafo  $G = (V, E)$  y dada una arista  $e = \{u, v\} \in E$ , representaremos  $e$  gráficamente como  $\bullet \xrightarrow{e} \bullet$  omitiendo la etiqueta de los vértices, pues será claro en el contexto y, en realidad, el etiquetado de los vértices nos es irrelevante en lo que queremos alcanzar.

**Ejemplo 12.** Veamos algunas de las familias de grafos más comunes.


- (1) El grafo nulo o grafo discreto  $D_n$  está dado por  $D_n = ([n], \emptyset)$ , esto es,  $D_n$  consiste de  $n$  vértices y ninguna arista. Por ejemplo,  $D_3 = \bullet \bullet \bullet$ .

<sup>6</sup>Ver terminología en la sección 5.

(2) El grafo completo  $K_n$  está dado por  $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$ . Por ejemplo,  $K_3 =$



(3) El grafo camino  $P_n$  está dado por  $P_n = ([n], E)$  donde  $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in [n-1]\}$ . Por ejemplo,  $P_3 = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet$ .

(4) El grafo cíclico  $C_n$  está dado por  $C_n = ([n], E)$  donde  $E = \{\{i, i+1\} \mid i \in [n-1]\} \cup \{n, 1\}$ . Por ejemplo,  $C_3 = K_3$  y  $C_4 =$  .

Si  $\{u, v\} \in E$  decimos que  $u$  y  $v$  son adyacentes (o vecinos).

Los conteos que realizaremos en grafos están asociados a *coloraciones* de sus vértices.

**Definición 8.** Dado un grafo  $G = (V, E)$  definimos una  $k$ -coloración propia de  $G$  como una función  $c : V \rightarrow [k]$  tal que si  $\{u, v\} \in E$  entonces  $c(u) \neq c(v)$ .

El estudio de coloraciones de grafos tiene vastas aplicaciones en el mundo real. Un ejemplo sencillo es el de agendar eventos. Si se quiere organizar el horario de un semestre se quiere hacer de forma que no haya conflicto entre las horas de las clases a tomar. Podemos pensar en las clases a tomar como vértices de un grafo. Las aristas son, entonces, pares de clases cuyo horario conflictúa. Así que una  $k$ -coloración propia de este grafo será una forma de agendar todas las clases en una franja de  $k$ -horas (una clase por hora) de modo que no haya conflicto de horario (ver ejercicio III(c)).

Ahora nos preguntamos, ¿cuántas  $k$ -coloraciones propias de un grafo  $G$  hay?. Claramente, esta cantidad depende del grafo  $G$  y del número  $k$  de colores a nuestra disposición. Así pues denotemos a este número por  $f_G(k)$ .

**Ejemplo 13.** (1). Si  $G = D_n$  entonces  $f_G(k) = k \cdot k \cdots k = k^n$  pues cada vértice se puede colorear de  $k$  formas de manera independiente, ya que  $D_n$  no tiene aristas.

(2). En el otro extremo, si  $G = K_n$  entonces  $f_G(k) = k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)$ . Esto se debe a que todo par de vértices forma una arista. Luego, hay  $k$  formas de colorear el primer vértice,  $k-1$  de colorear un segundo vértice, y así sucesivamente.

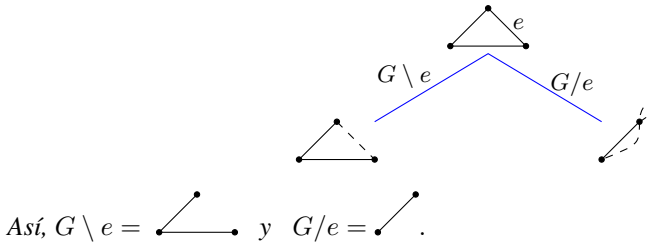
Ahora que tenemos mejor entendimiento de  $f_G(k)$  queremos una forma de calcularlo en general. Para esto, introducimos dos operaciones sobre grafos que nos ayudarán a establecer una fórmula de recurrencia para  $f_G(k)$ .

**Definición 9.** Sea  $G = (V, E)$  y sea  $e = \{u, v\} \in E$  una arista de  $G$ .

(a) *Eliminación de  $e$ .* La eliminación de la arista  $e$  se define como el grafo  $G \setminus e$  obtenido de  $G$  tras borrar  $e$ . Esto es,  $G \setminus e = ([n], E - e)$ .

(b) *Contracción de  $e$ .* La contracción de la arista  $e$  se define como el grafo  $G/e$  obtenido de  $G$  tras identificar los vértices  $u, v$  y borrando todo bucle o arista repetida que pueda producirse. Nótese que el grafo  $G/e$  contiene un vértice menos que  $G$  y su conjunto de aristas también es menor.

**Ejemplo 14.** Veamos estas operaciones aplicadas a  $K_3$  donde hemos dibujado con líneas punteadas las aristas que debemos borrar después de la operación realizada:



La ventaja de contraer o eliminar una arista es que el grafo resultante es menos complejo que el grafo original ya que eliminar y contraer produce un grafo con menos aristas que el grafo  $G$ .

**Proposición 8.** Sea  $G = ([n], E)$  y sea  $e = \{u, v\}$  una arista de  $G$ . El número de  $k$ -coloraciones de  $G$  satisface la recurrencia

$$f_G(k) = f_{G \setminus e}(k) - f_{G/e}(k).$$

Más aun,  $f_G(k)$  es un polinomio en  $k$ .

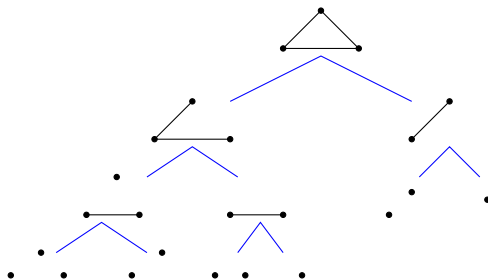
*Prueba:* Probemos que  $f_G(k) + f_{G/e}(k) = f_{G \setminus e}(k)$ . Para ver esto, nótese que toda  $k$ -coloración propia  $c$  de  $G \setminus e$  es tal que  $c(u) = c(v)$  ó  $c(u) \neq c(v)$ . Si  $c(u) \neq c(v)$  entonces la coloración  $c$  es también una  $k$ -coloración propia de  $G$ . Si  $c(u) = c(v)$  entonces  $c$  es una  $k$ -coloración propia de  $G/e$ . Así,  $f_G(k) + f_{G/e}(k) = f_{G \setminus e}(k)$ . Para ver que  $f_G(k)$  es un polinomio procedemos por inducción sobre  $|E|$ . El caso base  $|E| = 0$  nos dice que  $G = D_n$  para algún  $n$  y ya vimos que en este caso  $f_G(k) = k^n$ . Ahora, supongamos que el resultado es cierto para grafos con menos aristas que  $G$ . Usando la recurrencia que acabamos de probar, sabemos que  $f_G(k) = f_{G \setminus e}(k) - f_{G/e}(k)$ . Luego, por hipótesis de inducción, tanto  $f_{G \setminus e}(k)$  como  $f_{G/e}(k)$  son polinomios en  $k$ . Así se sigue que  $f_G(k)$  es un polinomio.  $\square$

El polinomio  $f_G(k)$  se denomina *el polinomio cromático de  $G$* . La idea de la recurrencia de  $f_G(k)$  es usarla en forma iterativa en el grafo  $G$  dado hasta llegar a obtener grafos nulos.

**Ejemplo 15.** Continuando con el Ejemplo 14, aplicando eliminación y contracción a cada uno de los grafos resultantes en cada paso, tenemos la Figura 8. Una vez finalizada la recursión, esto es, una vez obtenemos grafos nulos, calculamos el polinomio cromático del grafo original. Leyendo las hojas del árbol de recursiones de izquierda a derecha obtenemos los polinomios cromáticos  $k^3, k^2, k^2, k, k^2, k$ , en ese orden. Así, teniendo en cuenta los signos de la recursión  $f_G(k) = f_{G \setminus e}(k) - f_{G/e}(k)$  tenemos que para el grafo completo  $G = K^3$


$$f_G(k) = k^3 - k^2 - k^2 + k - k^2 + k = k^3 - 3k^2 + 2k = k(k-1)(k-2),$$

como esperábamos.

**Figura 8.** Recurrencia para calcular  $f_G(k)$ .

El problema de calcular el polinomio cromático de un grafo es, en general, un problema de una complejidad computacional muy alta. Sin embargo, los ejercicios nos mostrarán muchas propiedades lindas de este polinomio, entre otras cosas.

## 5.2. Ejercicios

- Para cada uno de los siguientes grafos calcule su polinomio cromático.
  - El grafo completo  $K_n$ .
  - El grafo cíclico  $C_4$ .
  - El camino  $P_n$ .
  - El grafo .
- Sea  $G = ([n], E)$ . Pruebe las siguientes propiedades de  $f_G(k)$ :
  - El término constante de  $f_G(k)$  siempre es 0.
  - El coeficiente de  $k$  es no nulo si y sólo si  $G$  es conexo.
  - El grado de  $f_G(k)$  es  $n$ , el número de vértices de  $G$ .
  - El coeficiente de  $k^{n-1}$  es  $-m$  donde  $m = \#E$  es el número de aristas de  $G$ .
- Ejercicios adicionales.
  - Un grafo conexo  $G$  con  $n$  vértices es un *árbol* si  $G$  tiene  $n - 1$  aristas. Pruebe que si  $f_G(k) = k(k - 1)^{n-1}$  entonces  $G$  es un árbol.
  - Muestre que el polinomio  $p(k) = k^4 - 4k^3 + 3k^2$  no es el polinomio cromático de ningún grafo.
  - Pruebe que un grafo  $G$  con número cromático  $k$  tiene al menos  $\binom{k}{2}$  aristas.
  - Queremos agendar 9 eventos  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ . Cada evento está en conflicto (en términos de hora) con el evento que lo sigue en la lista, y el evento  $i$  está en conflicto con  $a$ . ¿Cuántas horas debo disponer como mínimo para agendar estos 9 eventos de forma que no haya conflicto?

## 6. Agradecimientos

Queremos agradecer a la/el árbitro por sus invaluable comentarios y sugerencias las cuales han mejorado la narrativa de este manuscrito, el cual esperamos sea de utilidad para muchos. También agradecemos a todos los que participaron de distintas maneras en el evento Días de Combinatoria 2017, sin quienes la creación de estas notas no hubiera sido posible.

## Referencias

- [1] F. Ardila, *Enumerative Combinatorics*, Lecture notes <http://math.sfsu.edu/federico/Clase/EC/ec.html> (2013).
- [2] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, *Concrete mathematics*, Addison-Wesley (1994).
- [3] The Online Encyclopedia of Integer Sequences <https://oeis.org/search?q=catalan&language=english&go=Search>.
- [4] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics I*, 2nd ed., Cambridge University Press (2011).
- [5] R. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press (2015).

Recibido en enero 25 de 2018. Aceptado para publicación en octubre 4 de 2019.

CAROLINA BENEDETTI VELÁSQUEZ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
BOGOTÁ, COLOMBIA  
e-mail: c.benedetti@uniandes.edu.co

NATALIA SAAVEDRA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DEL CAUCA  
POPAYÁN, COLOMBIA  
e-mail: nsaavedra@unicauca.edu.co