

# Introducción a las Finanzas Cuantitativas

José Manuel Corcuera



# Índice

<b>1</b>	<b>Valoración de derivados</b>	<b>3</b>
1.1	Modelos a tiempo discreto . . . . .	4
1.1.1	Estrategias de inversión . . . . .	5
1.1.2	Estrategias admisibles y arbitraje . . . . .	7
1.2	Martingalas y oportunidades de arbitraje . . . . .	9
1.3	Mercados completos y valoración de opciones . . . . .	14
1.3.1	Valoración y replicación en mercados completos . . . . .	15
1.4	Introducción a las opciones americanas . . . . .	21
1.4.1	El problema de la parada óptima y las opciones americanas	22
1.4.2	Aplicación a opciones americanas . . . . .	27
1.5	Modelos a tiempo continuo . . . . .	30
1.5.1	Martingalas a tiempo continuo . . . . .	36
1.5.2	Construcción de la integral estocástica. . . . .	37
1.5.3	Cálculo de Itô . . . . .	45
1.5.4	Teorema de Girsanov . . . . .	48
1.5.5	El modelo de Black-Scholes . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Optimización de carteras</b>	<b>63</b>
2.1	Programación dinámica . . . . .	66
2.2	Método de martingala . . . . .	68
2.2.1	Optimización de carteras en el modelo de Cox-Ross-Rubinstein (CRR). . . . .	72
2.3	Consumo óptimo . . . . .	74
2.3.1	Método de programación dinámica en el problema de con- sumo óptimo . . . . .	76
2.3.2	Método de martingala en el problema de consumo óptimo	79
2.3.3	Utilidad máxima para el consumo y la riqueza terminal .	83
2.4	Optimización en el modelo de Black-Scholes . . . . .	85
2.4.1	Método de programación dinámica. Ecuación de HJB. . .	86
2.4.2	Método de martingala . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Modelos de tipo de interés</b>	<b>93</b>
3.1	Modelización . . . . .	93
3.1.1	La curva de tipos . . . . .	93

3.1.2	Curva de tipos para un futuro incierto . . . . .	95
3.1.3	Tipos de interés . . . . .	95
3.2	Opciones sobre bonos . . . . .	100
3.3	Modelos basados en los tipos instantáneos . . . . .	102
3.3.1	Inversión de la curva de tipos . . . . .	105
3.3.2	Estructuras de tipos afines. . . . .	105
3.3.3	El modelo de Vasicek . . . . .	106
3.3.4	El modelo de Ho-Lee . . . . .	107
3.4	Modelos basados en los tipos a plazo . . . . .	108
3.4.1	La ecuación de Musiela . . . . .	110
3.4.2	Bonos con cupones y swaps . . . . .	111
3.4.3	"The foward measure" . . . . .	113
3.5	Forwards and Futures . . . . .	117
3.6	Miscelanea . . . . .	119
3.6.1	Black-Scholes en el caso multidimensional . . . . .	119

*ÍNDICE*

J.M. Corcuera



# Capítulo 1

## Valoración de derivados

Supongamos que el precio de unas acciones viene dado en el instante  $t$  por  $S_t$ . Nos proponemos estudiar el llamado mercado de opciones o derivados.

**Definición 1.0.1** *Una opción es un contrato que da el derecho (pero no la obligación) a comprar (CALL) o vender (PUT) acciones a un precio  $K$  (strike o precio de ejercicio) en el instante  $T$  (madurez del contrato).*

El beneficio (o payoff) del contrato será:

$$(S_T - K)_+$$

en el caso del CALL ò

$$(K - S_T)_+$$

en le caso del PUT.

Problema 1: ¿Cuánto debe pagar el comprador de la opción? (prima). Es el llamado problema de valoración.

Problema2: El que vende el contrato, cómo debe generar la cantidad  $(S_T - K)_+$  (en el caso del CALL) a partir de la prima. Es el llamado problema de recubrimiento del riesgo ("hedging").

Suposición: vamos a suponer que en el mercado no se puede hacer beneficio sin riesgo ("está libre de oportunidades de arbitraje"). También vamos a suponer que la tasa de interés (continuo) es  $r$ . Es decir un euro se convierte en  $e^{rT}$  euros pasado el tiempo  $T$ .

Entonces, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.0.1** *(relación de paridad PUT -CALL) si el mercado está libre de oportunidades de arbitraje y  $C_t$  es la prima o precio de un CALL con strike  $K$  y madurez  $T$  en el instante  $t$  y  $P_t$  la del put con el mismo strike y madurez, tenemos que*

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}, \text{ para todo } 0 \leq t \leq T$$

**Demostración.** Veamos que si no hay arbitraje. Supongamos por ejemplo que

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

En el instante  $t$  compramos una acción, un PUT y vendemos un CALL. Obtenemos

$$C_t - P_t - S_t$$

por hacer la operación. Si la cantidad es positiva la invertimos a interés  $r$  hasta el instante  $T$ , si es negativa pedimos prestado al mismo tipo. En el instante  $T$  se pueden dar dos situaciones: 1)  $S_T > K$  el cliente al que le hemos vendido el CALL lo ejerce, entonces le damos la acción por  $K$ , en total tendremos

$$\begin{aligned} & (C_t - P_t - S_t) e^{r(T-t)} + K \\ & = (C_t - P_t - S_t + Ke^{-r(T-t)}) e^{r(T-t)} > 0 \end{aligned}$$

2)  $S_T \leq K$ , ejercemos el PUT y vendemos la acción a  $K$ , tendremos otra vez  $(C_t - P_t - S_t) e^{r(T-t)} + K$  que es una cantidad positiva. Por lo tanto habría arbitraje. ■

## 1.1 Modelos a tiempo discreto

Los valores de los stocks (acciones u otros activos) serán variables aleatorias definidas en un cierto espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Consideraremos una sucesión creciente de  $\sigma$ -álgebras (filtración) :  $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_N \subseteq \mathcal{F}$ .  $\mathcal{F}_n$  representa la información disponible hasta el instante  $n$ . El horizonte  $N$ , corresponderá con la madurez de las opciones. Supondremos que  $\Omega$  es finito,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , que  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  y que  $P(\{\omega\}) > 0$ , para todo  $\omega$ .

El mercado consistirá en  $(d+1)$  activos financieros cuyos precios en el instante  $n$  estarán dados por variables no-negativas  $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$  que son medibles respecto a  $\mathcal{F}_n$  (es decir los precios dependen de "lo" observado hasta ese momento, es decir no hay información privilegiada), en muchos casos supondremos que  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k^1, \dots, S_k^d, 0 \leq k \leq n)$ , con lo que toda la información estará en los precios observados hasta ese momento.

El stock con superíndice cero corresponde a un activo sin riesgo (dinero en una cuenta bancaria) y supondremos que  $S_0^0 = 1$ . Si el beneficio relativo del activo sin riesgo:

$$\frac{S_{n+1}^0 - S_n^0}{S_n^0} = r \geq 0$$

es constante, tendremos

$$S_{n+1}^0 = S_n^0(1+r) = S_0^0(1+r)^{n+1}.$$

El factor  $\beta_n = \frac{1}{S_n^0} = (1+r)^{-n}$  lo llamaremos factor de descuento.



### 1.1.1 Estrategias de inversión

Una estrategia de inversión es un proceso estocástico (una sucesión de variables aleatorias en el caso discreto)  $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  en  $R^{d+1}$ .  $\phi_n^i$  indica el número de acciones del tipo  $i$ -ésimo en la cartera de valores, en el instante  $n$ -ésimo.  $\phi$  es "previsible" es decir:

$$\begin{cases} \phi_0^i & \text{es } \mathcal{F}_0\text{-medible} \\ \phi_n^i & \text{es } \mathcal{F}_{n-1}\text{-medible, para todo } 1 \leq n \leq N. \end{cases}$$

Esto quiere decir que las posiciones de la cartera en el instante  $n$  fueron decididas con la información disponible en  $n-1$ . Es decir en el periodo  $(n-1, n]$  la cantidad de activos del tipo  $i$  es  $\phi_n^i$ . El valor de la cartera en el instante  $n$  es el producto escalar

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=0}^d \phi_n^i S_n^i,$$

su valor descontado es

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n V_n(\phi) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n$$

con

$$\tilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, \dots, \beta_n S_n^d) = (1, \tilde{S}_n^1, \dots, \tilde{S}_n^d)$$

**Definición 1.1.1** Una estrategia de inversión se dirá que es autofinanciada si

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n, 0 \leq n \leq N-1$$

**Observación 1.1.1** La interpretación es que en el instante  $n$  una vez anunciados los nuevos precios  $S_n$  los inversores reajustan su cartera sin añadir ni consumir riqueza: si compramos  $\phi_{n+1} - \phi_n$  activos el coste de la operación será  $(\phi_{n+1} - \phi_n) \cdot S_n$ , y queremos que éste sea cero esto es  $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n, 0 \leq n \leq N-1$ .

**Proposición 1.1.1** Una estrategia de inversión es autofinanciada si y sólo si:

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n), 0 \leq n \leq N-1$$

**Proposición 1.1.2** Las siguientes cosas son equivalentes: (i) La estrategia  $\phi$  es autofinanciada, (ii) Para todo  $1 \leq n \leq N$

$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot (S_j - S_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta S_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^d \phi_j^i \Delta S_j^i$$

(iii) Para todo  $1 \leq n \leq N$

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot (\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}) = \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^d \phi_j^i \Delta \tilde{S}_j^i$$

**Demostración.** (i) equivale a (ii):

$$\begin{aligned} V_n(\phi) &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n (V_j(\phi) - V_{j-1}(\phi)) \\ &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot (S_j - S_{j-1}) \text{ (proposición anterior)} \end{aligned}$$

(i) equivale a (iii): la condición de autofinanciación se puede escribir:

$$\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n, 0 \leq n \leq N-1$$

por tanto

$$\tilde{V}_{n+1}(\phi) - \tilde{V}_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n), 0 \leq n \leq N-1$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(\phi) &= \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^n (\tilde{V}_j(\phi) - \tilde{V}_{j-1}(\phi)) \\ &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot (\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}) \end{aligned}$$

■

Esta proposición nos dice que la estrategia autofinanciada está definida por su valor inicial  $V_0$  y por las posiciones en los activos con riesgo. Más concretamente:

**Proposición 1.1.3** *Para cualquier proceso previsible  $\hat{\phi} = ((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  y cualquier variable  $V_0$   $\mathcal{F}_0$ -medible, existe un único proceso previsible tal que la estrategia  $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  es autofinanciada con valor inicial  $V_0$ .*

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(\phi) &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot (\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}) \\ &= V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot (\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}) \\ &= \phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_n^0 + \sum_{i=1}^d \phi_n^i \tilde{S}_n^i. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\phi_n^0 = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j \cdot (\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1}) - \sum_{i=1}^d \phi_n^i \tilde{S}_{n-1}^i \in \mathcal{F}_{n-1}$$

■

### 1.1.2 Estrategias admisibles y arbitraje

Notemos que no hacemos suposiciones sobre el signo de las cantidades  $\phi_n^i$ . Si  $\phi_n^i < 0$  significa que hemos pedido prestado ese número de acciones y convertido en dinero ("venta en corto") o unidades monetarias que hemos convertido en acciones (préstamo para comprar acciones) y que tenemos que devolver, notemos que cada unidad monetaria del instante 0 vale  $(1+r)^n$  en el instante  $n$ . Supondremos que los préstamos y ventas en corto están permitidos siempre que el valor de nuestra cartera sea en todo momento positivo.

**Definición 1.1.2** Una estrategia  $\phi$  es admisible si es autofinanciada y si  $V_n(\phi) \geq 0$ , para todo  $0 \leq n \leq N$ .

**Definición 1.1.3** Una estrategia de arbitraje es una estrategia admisible con valor inicial cero y valor final distinto de cero.

**Observación 1.1.2** Notemos que si existe arbitraje resultaría que con una inversión inicial cero obtendríamos una riqueza no nula. La mayor parte de los modelos de precios excluyen oportunidades de arbitraje de manera que si queremos tener una riqueza final no nula tendremos que hacer inversión inicial. El propósito siguiente será caracterizar estos modelos con la noción de martingala. Un mercado sin oportunidades de arbitraje se dirá que es viable.

**Ejercicio 1.1.1** Consideremos una cartera con valor inicial  $V_0 = 1000$ , formada por las cantidades siguientes de activos con riesgo:

	Activo 1	Activo 2
$n > 0$	200	100
$n > 1$	150	120
$n > 2$	500	60

Si el precio de los activos es

	Activo 1	Activo 2
$n = 0$	3.4	2.3
$n = 1$	3.5	2.1
$n = 2$	3.7	1.8

encontrar en cada instante las cantidades de activo sin riesgo de la cartera, suponiendo  $r = 0.05$  y que la cartera es autofinanciada.

**Solución 1.1.1** Sabiendo que el valor de la cartera en el tiempo  $t = 0$  es  $V_0 = 1000$ , podemos calcular la composición de la cartera inicial a según las posiciones  $\phi_1 = (200, 100)$ , dejando en la cuenta corriente lo que queda de los 1000 euros iniciales después de comprar los activos 1 y 2. Después calculamos cómo evoluciona el valor de la cartera en función del cambio de precios entre el instante 0 y el 1. Volvemos a reestructurar la cartera en función de las posiciones  $\phi_2 = (150, 120)$ , en la cuenta corriente volvemos a dejar lo que queda del valor de la cartera en  $t=1$  después de comprar los activos 1 y 2 en las cantidades correspondientes. Después calculamos cómo evoluciona el valor de la cartera en función del cambio de precios entre el instante 1 y el 2.

Activo	Nº acciones	Precio $t = 0$	Valor $t = 0$	Precio $t = 1$	Valor $t = 1$
0	90	1	90	1,05	94,5
1	200	3,4	680	3,5	700
2	100	2,3	230	2,1	210
Total			1000		1004,5

Activo	Nº acciones	Precio $t = 1$	Valor $t = 1$	Precio $t = 2$	Valor $t = 2$
0	216,67	1,05	227,5	1,103	238,88
1	150	3,5	525	3,7	555
2	120	2,1	252	1,8	216
Total			1004,5		1009,88

**Ejercicio 1.1.2** Consideremos un mercado financiero con un solo periodo, con tipo de interés  $r$  y con un solo activo con riesgo  $S$ . Supongamos que  $S_0 = 1$  y, para  $n = 1$ ,  $S_1$  puede tomar dos valores diferentes: 2, 1/2. ¿Para que valores de  $r$  el mercado es viable (libre de oportunidades de arbitraje)? ¿Y si  $S_1$  puede tomar también el valor 1?

**Solución 1.1.2** Queremos calcular los valores de  $r$  para los que hay posibilidad de arbitraje. Tomamos una cartera cuyo valor inicial sea  $V_0 = 0$ . Entonces, si invertimos el importe  $q$  en el activo sin riesgo, tenemos que invertir  $-q$  en el activo con riesgo ( $q$  puede ser negativa o positiva). Calculamos el valor de la cartera en los dos posibles estados del momento 2.

$$V_1(\omega_1) = q(r - 1)$$

$$V_1(\omega_2) = q(r + 1/2)$$

Por tanto, si  $r > 1$  hay posibilidad de arbitraje tomando  $q$  positiva (dinero en cuenta corriente y posición corta en el activo con riesgo) y si  $r < -1/2$  tenemos posibilidad de arbitraje con  $q$  positiva (tomando prestado dinero e invirtiendo en el activo con riesgo). La situación no cambia si  $S_1$  puede tomar el valor 1.

**Ejercicio 1.1.3** Supongamos un mercado con dos stocks ( $d = 2$ ) tales que los valores en  $t = 0$  son  $S_0^1 = 9.52$  Eur. y  $S_0^2 = 4.76$  Euros. El dinero está a interés simple del 5% en el período  $[0, 1]$ . Se supone también que en el instante 1,  $S_1^1$  y  $S_1^2$  pueden tomar tres valores, dependiendo de los tres estados del mercado:  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ :  $S_1^1(\omega_1) = 20$  Eur.,  $S_1^1(\omega_2) = 15$  Eur. y  $S_1^1(\omega_3) = 7.5$  Eur, y  $S_1^2(\omega_1) = 6$  Eur,  $S_1^2(\omega_2) = 6$  Eur. y  $S_1^2(\omega_3) = 4$ . ¿Es un mercado viable?

**Solución 1.1.3** Para saber si el mercado es viable tenemos que comprobar si existe posibilidad de arbitraje. Tomamos una cartera cuya inversión inicial sea 0 y vemos si puede tener rendimiento no negativo en todos los estados del momento 1 con alguno de ellos estrictamente positivo. Sean  $q_1$  y  $q_2$  las cantidades invertidas en los activos 1 y 2 respectivamente. Dado que el valor de la inversión inicial es cero, en la cuenta corriente tenemos  $-9.52q_1 - 4.76q_2$ . Calculamos el valor e nuestra cartera en el momento 1 para todos los estados posibles.

$$V_1(\omega_1) = 10.004q_1 + 1.002q_2$$

1.2. MARTINGALAS Y OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE J.M. Corcuera

$$V_1(\omega_2) = 5.004q_1 + 1.002q_2$$

$$V_1(\omega_3) = -2.4964q_1 - 0.998q_2.$$

Es fácil comprobar que hay una región del plano en la que estas expresiones son las tres positivas al mismo tiempo (ver Figura 1), por tanto hay posibilidad de arbitraje.

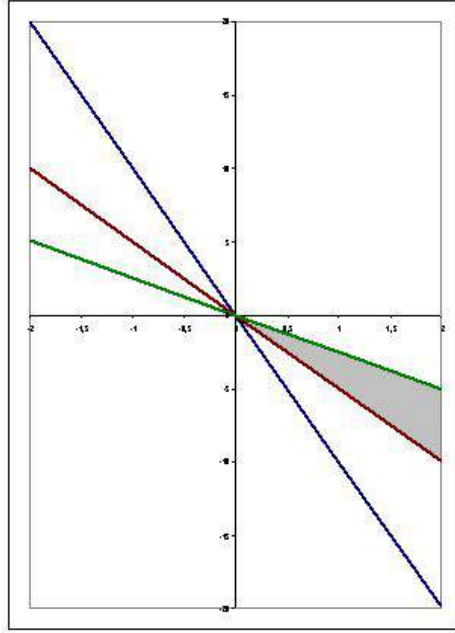


Figura 1

## 1.2 Martingalas y oportunidades de arbitraje

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad finito. Con  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  y  $P(\{\omega\}) > 0$ , para todo  $\omega$ . Consideraremos una filtración  $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ .

**Definición 1.2.1** Diremos que una sucesión de variables aleatorias  $X = (X_n)_{0 \leq n \leq N}$  es adaptada si  $X_n$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible,  $0 \leq n \leq N$ .

**Definición 1.2.2** Una sucesión adaptada  $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ , diremos que es una

$$\begin{aligned} \text{submartingala si} & \quad E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq M_n \\ \text{martingala si} & \quad E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n \\ \text{supermartingala si} & \quad E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq M_n \end{aligned}$$

para todo  $0 \leq n \leq N - 1$

**Observación 1.2.1** Esta definición se extiende al caso multidimensional componente a componente. Si  $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$  es una martingala es fácil ver que  $E(M_{n+j} | \mathcal{F}_n) = M_n, j \geq 0; E(M_n) = E(M_0), n \geq 0$  y que si  $(N_n)$  es otra martingala,  $(aM_n + bN_n)$  es otra martingala. Omitiremos el subíndice.

**Proposición 1.2.1** Sea  $(M_n)$  una martingala y  $(H_n)$  una sucesión previsible, escribamos  $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$ . Entonces la sucesión definida por

$$X_0 = H_0 M_0$$

$$X_n = H_0 M_0 + \sum_{j=1}^n H_j \Delta M_j, n \geq 1 \text{ es una martingala}$$

**Demostración.** Basta ver que para todo  $n \geq 0$

$$E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = E(H_{n+1} \Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = H_{n+1} E(\Delta M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$$

■

**Observación 1.2.2** La transformación anterior se llama transformación de la martingala  $(M_n)$  por  $(H_n)$ . Recordemos que

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$$

con  $(\phi_i)$  previsible. Entonces si  $(\tilde{S}_i)$  es una martingala, resultará que  $(\tilde{V}_n)$  es una martingala y en particular  $E(\tilde{V}_n(\phi)) = E(V_0(\phi)) = V_0(\phi)$ .

**Proposición 1.2.2** Un proceso adaptado  $(M_n)$  es una martingala si y sólo si para cualquier proceso previsible  $(H_n)$  tenemos

$$E\left(\sum_{j=1}^N H_j \Delta M_j\right) = 0 \tag{1.1}$$

**Demostración.** Supongamos que  $(M_n)$  es una martingala entonces por la proposición anterior ya está. Supongamos que se cumple (1.1) entonces podemos tomar  $H_n = 0, 0 \leq n \leq j, H_{j+1} = 1_A$  con  $A \in \mathcal{F}_j, H_n = 0, n > j$ . Entonces

$$E(\mathbf{1}_A(M_{j+1} - M_j)) = 0$$

como esto es cierto para todo  $A$  esto equivale a que  $E(M_{j+1} - M_j | \mathcal{F}_j) = 0$ . Ahora lo hacemos para todo  $j$  y ya está. ■

**Teorema 1.2.1** Un mercado es viable (libre de oportunidades de arbitraje) si y sólo si existe  $P^*$  equivalente a  $P$  tal que los precios descontados de los activos  $((\tilde{S}_n^j), j = 1, \dots, d)$  son  $P^*$ -martingalas.

**Demostración.** Supongamos que existe  $P^*$  y sea una estrategia  $\varphi$  admisible con valor inicial cero, entonces

$$\tilde{V}_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i \cdot \Delta \tilde{S}_i$$

1.2. MARTINGALAS Y OPORTUNIDADES DE ARBITRAJE J.M. Corcuera

es una  $P^*$  martingala y consecuentemente

$$E_{P^*}(\tilde{V}_N) = 0$$

y como  $\tilde{V}_N \geq 0$  resulta que  $\tilde{V}_N = 0$  (ya que  $P^*(\omega) > 0$  para todo  $\omega$ ). Por tanto no hay arbitraje.

Supongamos ahora que no hay arbitraje y sea  $\Gamma$  el conjunto de variables estrictamente positivas definidas en  $\Omega$  (o sea variables no negativas y tales que para algún  $\omega \in \Omega$  valen mayor que cero). Identificaremos cada variable aleatoria  $X$  con el vector de  $\mathbb{R}^{Card(\Omega)}$   $(X(\omega_1), \dots, X(\omega_{Card(\Omega)}))$ . Consideremos el subconjunto,  $S$ , compacto y convexo de las variables de  $\Gamma$  tales que  $\sum X(\omega_i) = 1$ . Sea  $L = \{V_N(\varphi), \varphi \text{ autofinanciada}, V_0(\varphi) = 0\}$  (es claro que  $L$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{Card(\Omega)}$ ). Además (lo veremos luego)  $L \cap S = \emptyset$ . Entonces por el teorema del hiperplano separador existe una aplicación lineal  $A$  tal que  $A(Y) > 0$  para todo  $Y \in S$  y  $A(Y) = 0$  si  $Y \in L$ .  $A(Y) = \sum \lambda_i Y(\omega_i)$ . Entonces todos los  $\lambda_i > 0$  (ya que  $A(Y) > 0$  para todo  $Y \in S$ ) y podemos definir

$$P^*(\omega_i) = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_i}$$

y para todo  $\phi$  previsible

$$E_{P^*} \left( \sum_{i=1}^N \phi_i \cdot \Delta \tilde{S}_i \right) = E_{P^*}(\tilde{V}_N) = \frac{A(\tilde{V}_N)}{\sum \lambda_i} = 0$$

con lo que  $\tilde{S}$  será  $P^*$ -martingala (proposición anterior).

Veamos que  $L \cap \Gamma = \emptyset$  (y por tanto  $L \cap S = \emptyset$ ). Supongamos que no, de manera que existe  $\varphi$  autofinanciada tal que  $V_N(\varphi) \in \Gamma$ . Entonces a partir de  $\varphi$  puedo crear una estrategia de arbitraje: sea

$$n = \sup\{k, V_k(\varphi) \geq 0\}$$

notemos que  $n \leq N - 1$  ya que  $V_N(\varphi) \geq 0$ . Sea  $A = \{V_n(\varphi) < 0\}$ , definamos la estrategia autofinanciada tal que para todo  $i = 1, \dots, d$

$$\theta_j^i = \begin{cases} 0 & j \leq n \\ \mathbf{1}_A \varphi_j^i & j > n \end{cases}$$

entonces para todo  $k > n$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_k(\theta) &= \sum_{j=n+1}^k \mathbf{1}_A \varphi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j = \mathbf{1}_A \left( \sum_{j=1}^k \varphi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j - \sum_{j=1}^n \varphi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j \right) \\ &= \mathbf{1}_A \left( \tilde{V}_k(\varphi) - \tilde{V}_n(\varphi) \right) \end{aligned}$$

de manera que  $\tilde{V}_N(\theta) > 0$  en  $A$ . ■

**Observación 1.2.3** A  $P^*$  se le suele denominar medida de martingala o probabilidad neutral.

**Ejercicio 1.2.1** Consideremos una sucesión  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  de variables aleatorias independientes y con leyes  $N(0, \sigma^2)$ . Definimos la sucesión  $Y_n = \exp(a \sum_{i=1}^n X_i - n\sigma^2)$ ,  $n \geq 1$ , on  $a$  es un parámetro real,  $Y_0 = 1$ . Para qué valores de  $a$  la sucesión  $\{Y_n\}_{n \geq 0}$  es una martingala (supermartingala) (submartingala)?

**Ejercicio 1.2.2** Sea  $\{Y_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con

$$P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

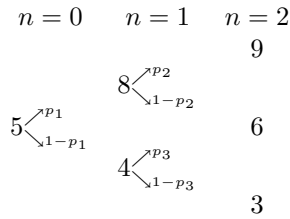
Escribamos  $S_0 = 0$   $i$   $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$  si  $n \geq 1$ . Comprobar si son martingalas las sucesiones siguientes:

$$M_n^{(1)} = \frac{e^{\theta S_n}}{(\cosh \theta)^n}, \quad n \geq 0$$

$$M_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n \text{sign}(S_{k-1})Y_k, \quad n \geq 1, \quad M_0^{(2)} = 0$$

$$M_n^{(3)} = S_n^2 - n$$

**Ejercicio 1.2.3** Consideremos un mercado financiero a tiempo discreto, de dos periodos, con tipos de interés  $r \geq 0$ , y un un solo activo con riesgo,  $S$ . Supongamos una evolución de los precios de  $S$  del tipo siguiente:



a) Encontrar  $p_1$ ,  $p_2$   $i$   $p_3$ , en función de  $r$  para que la lei de probabilidad sea neutral. b) Suponiendo  $r = 0.1$ , calcular el valor inicial de un derivado con vencimiento  $N = 2$  y beneficio (payoff)  $\frac{S_1 + S_2}{2}$ . Encontrar primero la cartera que cubre el riesgo del derivado y ver su valor inicial. Comprobar que este valor coincide con el valor medio, respecte de la probabilidad neutral, del payoff actualizado.

**Ejercicio 1.2.4** Encontrar las probabilidades neutrales en el mercado del problema 1.1.3 suponiendo que sólo está disponible el stock 1.

**Teorema 1.2.2** (Teorema del hiperplano separador) Sea  $L$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$   $y$   $K$  un subconjunto convexo  $y$  compacto de  $\mathbb{R}^n$  tal que no interseca  $L$ . Entonces existe un funcional lineal  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(x) = 0$  para todo  $x \in L$   $y$   $\phi(x) > 0$  para todo  $x \in K$ .



## 1.2. MARTINGALAS Y OPORTUNIDADES DE ARBITRAJEJ.M. Corcuera

La demostración del teorema se basa en el lema siguiente

**Lema 1.2.1** *Sea  $C$  un conjunto convexo y cerrado de  $\mathbb{R}^n$  que no contiene al cero, existe entonces  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\phi(x) > 0$  para todo  $x \in C$*

**Demostración.** *Sea  $B(0, r)$  una bola de radio  $r$  y con centro en el origen, tomemos  $r$  suficientemente grande para que  $B(0, r) \cap C \neq \emptyset$ . La aplicación*

$$B(0, r) \cap C \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$x \mapsto \|x\| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

*es continua y como está definida en un compacto existirá  $z \in B(0, r) \cap C$  tal que  $\|z\| = \inf_{x \in B(0, r) \cap C} \|x\|$  y deberá cumplir que  $\|z\| > 0$  ya que  $C$  no contiene al origen. Sea ahora  $x \in C$ , como  $C$  es convexo  $\lambda x + (1 - \lambda)z \in C$  para todo  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Es obvio que*

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)z\| \geq \|z\| > 0,$$

*entonces*

$$\lambda^2 x \cdot x + 2\lambda(1 - \lambda)x \cdot z + (1 - \lambda)^2 z \cdot z \geq z \cdot z,$$

*equivalentemente*

$$\lambda^2(x \cdot x + z \cdot z) + 2\lambda(1 - \lambda)x \cdot z - 2\lambda z \cdot z \geq 0,$$

*tomemos  $\lambda > 0$ , entonces*

$$\lambda(x \cdot x + z \cdot z) + 2(1 - \lambda)x \cdot z \geq 2z \cdot z$$

*y pasemos al límite cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , tendremos*

$$x \cdot z \geq z \cdot z > 0,$$

*basta entonces tomar  $\phi(x) = x \cdot z$ . ■*

**Demostración.** *(del teorema)  $K - L = \{u \in \mathbb{R}^n, u = k - l, k \in K, l \in L\}$  es convexo y cerrado. En efecto, sea  $0 \leq \lambda \leq 1$  y  $u, \tilde{u} \in K - L$*

$$\begin{aligned} \lambda u + (1 - \lambda)\tilde{u} &= \lambda k + (1 - \lambda)\tilde{k} - (\lambda l + (1 - \lambda)\tilde{l}) \\ &= \bar{k} - \bar{l} \end{aligned}$$

*donde  $\bar{k} \in K$  (por convexidad de  $K$ ) y  $\bar{l} \in L$  (ya que es un espacio vectorial), luego es convexo. Además si tomamos una sucesión  $(u_n) \in K - L$  que converge a  $u$ , tendremos que  $u_n = k_n - l_n$  con  $k_n \in K, l_n \in L$ , esto es  $l_n = k_n - u_n$ . Ahora bien, como  $K$  es compacto, existirá una subsucesión  $k_{n_r}$  que converge a un cierto  $k \in K$ , así  $l_{n_r}$  convergerá a  $k - u$ , pero como  $l_{n_r}$  es una sucesión convergente en un espacio vectorial cerrado ( $\mathbb{R}^d$  lo es para cualquier  $d$ ) tendremos que  $k - u = l \in L$ , de manera que  $u = k - l \in K - L$ . Ahora  $K - L$  no contiene al origen y por la proposición anterior existirá  $\phi$  lineal tal que*

$$\phi(k) - \phi(l) > 0, \text{ para todo } k \in K \text{ y todo } l \in L,$$

ahora bien como  $L$  es un espacio vectorial  $\phi(l)$  debe ser cero, supongamos que por ejemplo  $\phi(l) > 0$ , entonces  $\lambda l \in L$  para  $\lambda > 0$  arbitrariamente grande y tendríamos

$$\phi(k) > \lambda\phi(l),$$

lo cual es imposible si  $\phi(k)$  es finito. Por último como  $\phi(l) = 0$  resultará  $\phi(k) > 0$  para todo  $k \in K$ . ■

### 1.3 Mercados completos y valoración de opciones

Definiremos opción europea (o derivado europeo) a un contrato que tiene una madurez  $N$  y que produce un *payoff*  $h \geq 0$  donde  $h$  es  $\mathcal{F}_N$ -medible. Por ejemplo un *call* es un derivado con *payoff*  $h = (S_N^1 - K)_+$ , un *put*  $h = (K - S_N^1)_+$  o una opción asiática  $h = (\frac{1}{N} \sum_{j=0}^N S_j^1 - K)_+$

**Definición 1.3.1** Un derivado definido por  $h$  se dirá que es replicable si existe una estrategia admisible  $\phi$  tal que  $V_N(\phi) = h$ .

**Proposición 1.3.1** Si  $\phi$  es una estrategia autofinanciada que replica  $h$  y el mercado es viable entonces la estrategia es admisible.

**Demostración.**  $\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{h}$  y como existe  $P^*$  tal que  $E_{P^*}(\tilde{V}_N(\phi)|\mathcal{F}_n) = \tilde{V}_n(\phi)$  entonces  $\tilde{V}_n(\phi) \geq 0$ . ■

**Definición 1.3.2** Un mercado es completo si cualquier derivado es replicable.

**Teorema 1.3.1** Un mercado viable es completo si y sólo si existe una única medida de probabilidad  $P^*$  equivalente a  $P$  bajo la cual los precios descontados son martingalas

**Demostración.** Supongamos que el mercado es viable y completo entonces dado  $h$   $\mathcal{F}_N$ -medible existe  $\phi$  admisible tal que  $V_N(\phi) = h$  esto es:

$$\tilde{V}_N(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j = \frac{h}{S_N^0},$$

entonces supongamos que existen  $P_1$  y  $P_2$  medidas de martingala, entonces

$$E_{P_1}\left(\frac{h}{S_N^0}\right) = V_0(\phi)$$

$$E_{P_2}\left(\frac{h}{S_N^0}\right) = V_0(\phi)$$

y como esto es cierto para todo  $h$   $\mathcal{F}_N$ -medible las dos probabilidades coinciden en  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ .

### 1.3. MERCADOS COMPLETOS Y VALORACIÓN DE OPCIONES J.M. Corcuera

Supongamos que el mercado es viable e incompleto, veamos que entonces se puede construir más de una probabilidad neutral. Sea  $H$  el subconjunto de variables aleatorias de la forma

$$V_0 + \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$$

con  $V_0$   $\mathcal{F}_0$ -medible y  $\phi = ((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  predecible.  $H$  es un subespacio vectorial del espacio vectorial,  $E$ , formado por todas las variables aleatorias. Además es no trivial, ya que al ser el mercado incompleto existirá  $h$  tal que  $\frac{h}{S_0^0} \notin H$ . Sea  $P^*$  una medida de martingala en  $E$ , podemos definir el producto escalar  $\langle X, Y \rangle = E_{P^*}(XY)$ . Sea entonces  $X$  una variable ortogonal a  $H$  y definamos

$$P^{**}(\omega) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right)P^*(\omega)$$

entonces tenemos una probabilidad equivalente a  $P^*$  :

$$P^{**}(\omega) = \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right)P^*(\omega) > 0$$

$$\sum P^{**}(\omega) = \sum P^*(\omega) + \frac{E_{P^*}(X)}{2\|X\|_\infty} = 1$$

ya que  $1 \in H$  y  $X$  es ortogonal a  $H$ . Además por esta ortogonalidad

$$E_{P^{**}}\left(\sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j\right) = E_{P^*}\left(\sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j\right) + \frac{E_{P^*}(X \sum_{j=1}^N \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j)}{2\|X\|_\infty} = 0$$

de modo que  $\tilde{S}$  es una  $P^{**}$ -martingala por la proposición (1.2.2). ■

#### 1.3.1 Valoración y replicación en mercados completos

Supongamos un derivado con payoff  $h \geq 0$  y que el mercado es viable y completo. Sabemos que existirá  $\phi$  admisible tal que  $V_N(\phi) = h$  y si  $P^*$  es la probabilidad neutral resultará que

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$$

es una  $P^*$ -martingala, en particular

$$E_{P^*}\left(\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right) = E_{P^*}(\tilde{V}_N(\phi) \mid \mathcal{F}_n) = \tilde{V}_n(\phi)$$

esto es

$$V_n(\phi) = S_n^0 E_{P^*}\left(\frac{h}{S_N^0} \mid \mathcal{F}_n\right) = E_{P^*}\left(\frac{h}{(1+r)^{N-n}} \mid \mathcal{F}_n\right)$$

por tanto el valor de la cartera que replica  $h$  queda determinado por la fórmula anterior y esto nos dará el precio del derivado en  $n$  que denotaremos  $C_n$ , esto es  $C_n = V_n(\phi)$ . Notemos que si sólo tenemos un stock con riesgo ( $d = 1$ ) entonces

$$\frac{\tilde{C}_n - \tilde{C}_{n-1}}{\Delta \tilde{S}_n} = \phi_n$$

lo que nos permitirá calcular la cartera recubridora si tenemos una expresión de  $C$  en función de  $S$ .

### El modelo binomial de Cox-Ross-Rubinstein (CRR)

Supongamos un modelo con un solo stock con riesgo que evoluciona:

$$S_n(\omega) = S_0(1+b)^{U_n(\omega)}(1+a)^{n-U_n(\omega)}$$

donde

$$U_n(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)$$

y donde las  $\xi_i$  son variables aleatorias con valores 0 ó 1, es decir bernoullis y  $a < r < b$ :

$$\begin{array}{ccccc} n=0 & n=1 & n=2\dots & & \\ & & S_0(1+b)^2 \swarrow \searrow & & \\ S_0 \swarrow & S_0(1+b) \swarrow \searrow & & S_0(1+b)(1+a) \swarrow \searrow & \\ & S_0(1+a) \swarrow \searrow & & & S_0(1+a)^2 \swarrow \searrow \end{array}$$

También podemos escribir

$$S_n = S_{n-1}(1+b)^{\xi_n}(1+a)^{1-\xi_n(\omega)}$$

Entonces

$$\tilde{S}_n = S_0 \left( \frac{1+b}{1+r} \right)^{U_n} \left( \frac{1+a}{1+r} \right)^{n-U_n} = \tilde{S}_{n-1} \left( \frac{1+b}{1+r} \right)^{\xi_n} \left( \frac{1+a}{1+r} \right)^{1-\xi_n}$$

para que  $\tilde{S}_n$  sea martingala respecto de una  $P^*$  necesitamos que

$$E_{P^*}(\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}$$

y si tomamos  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \dots, S_n)$  tendremos que lo anterior equivale a

$$E_{P^*} \left( \left( \frac{1+b}{1+r} \right)^{\xi_n} \left( \frac{1+a}{1+r} \right)^{1-\xi_n} | \mathcal{F}_{n-1} \right) = 1$$

esto es

$$\left( \frac{1+b}{1+r} \right) P^*(\xi_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1}) + \left( \frac{1+a}{1+r} \right) P^*(\xi_n = 0 | \mathcal{F}_{n-1}) = 1$$

### 1.3. MERCADOS COMPLETOS Y VALORACIÓN DE OPCIONES J.M. Corcuera

o lo que es lo mismo

$$P^*(\xi_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{r-a}{b-a},$$

$$P^*(\xi_n = 0 | \mathcal{F}_{n-1}) = 1 - P^*(\xi_n = 1 | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{b-r}{b-a}$$

Notemos que esta probabilidad es determinista y no depende de  $n$ , por tanto *bajo ella* las  $\xi_i, i = 1, \dots, N$  son variables independientes e idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli( $p$ ) con  $p = \frac{r-a}{b-a}$ . Además  $P^*$  es única con lo que el mercado es viable y completo. Así bajo la probabilidad neutral  $P^*$

$$S_N = S_n(1+b)^{\xi_{n+1}+\dots+\xi_N}(1+a)^{N-n-(\xi_{n+1}+\dots+\xi_N)}$$

$$= S_n(1+b)^{W_{n,N}}(1+a)^{N-n-W_{n,N}}$$

con  $W_{n,N} \sim \text{Bin}(N-n, p)$  que es independiente de  $S_n, S_{n-1}, \dots, S_1$ . Como tenemos la probabilidad neutral podemos calcular el precio de un *call* en el instante  $n$

$$C_n = E_{P^*} \left( \frac{(S_N - K)_+}{(1+r)^{N-n}} | \mathcal{F}_n \right)$$

$$= E_{P^*} \left( \frac{(S_n(1+b)^{W_{n,N}}(1+a)^{N-n-W_{n,N}} - K)_+}{(1+r)^{N-n}} | \mathcal{F}_n \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-n} \frac{(S_n(1+b)^k(1+a)^{N-n-k} - K)_+}{(1+r)^{N-n}} \binom{N-n}{k} p^k (1-p)^{N-n-k}$$

$$= S_n \sum_{k=k^*}^{N-n} \binom{N-n}{k} \frac{(p(1+b))^k ((1-p)(1+a))^{N-n-k}}{(1+r)^{N-n}}$$

$$- K(1+r)^{n-N} \sum_{k=k^*}^{N-n} \binom{N-n}{k} p^k (1-p)^{N-n-k}$$

donde

$$k^* = \inf \{k, S_n(1+b)^k(1+a)^{N-n-k} > K\}$$

$$= \inf \left\{ k, k > \frac{\log \frac{K}{S_n} - (N-n) \log(1+a)}{\log\left(\frac{1+b}{1+a}\right)} \right\}$$

Notemos que

$$\frac{p(1+b)}{1+r} + \frac{(1-p)(1+a)}{1+r} = 1$$

de manera que si definimos

$$\bar{p} = \frac{p(1+b)}{1+r}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} C_n &= S_n \sum_{k=k^*}^{N-n} \binom{N-n}{k} \bar{p}^k (1-\bar{p})^{N-n-k} \\ &\quad - K(1+r)^{n-N} \sum_{k=k^*}^{N-n} \binom{N-n}{k} p^k (1-p)^{N-n-k} \\ &= S_n \Pr\{\text{Bin}(N-n, \bar{p}) \geq k^*\} - K(1+r)^{n-N} \Pr\{\text{Bin}(N-n, p) \geq k^*\} \end{aligned}$$

### Cartera recubridora en el modelo CRR

Tenemos que

$$V_n = \phi_n^0(1+r)^n + \phi_n^1 S_n.$$

Fijado  $S_{n-1}$ ,  $S_n$  puede tomar dos valores  $S_n^u = S_{n-1}(1+b)$  ó  $S_n^d = S_{n-1}(1+a)$  y análogamente  $V_n$ . Entonces

$$\phi_n^1 = \frac{V_n^u - V_n^d}{S_{n-1}(b-a)}. \quad (1.2)$$

y

$$\phi_n^0 = \frac{V_n^u - \phi_n^1 S_n^u}{(1+r)^n}$$

En el caso de un CALL, si tomamos  $n = N$  tendremos:

$$\phi_N^1 = \frac{V_N^u - V_N^d}{S_{N-1}(b-a)} = \frac{(S_{N-1}(1+b) - K)_+ - (S_{N-1}(1+a) - K)_+}{S_{N-1}(b-a)}.$$

podemos ahora calcular por la condición de autofinanciación el valor de la cartera en  $N-1$ :

$$V_{N-1} = \phi_{N-1}^0(1+r)^{N-1} + \phi_{N-1}^1 S_{N-1}$$

y de aquí  $\phi_{N-1}^1$  volviendo a utilizar (1.2).

**Ejemplo 1.3.1** *El siguiente es un ejemplo de programa en Mathematica para calcular el valor de un call y un put en un modelo CRR con los datos:  $S_0 = 100$  eur.,  $K = 100$  eur.  $b = 0.2$ ,  $a = -0.2$ ,  $r = 0.02$ ,  $n = 4$  periodos.*

```
Clear[s, call, pu];
s[0] = Table[100, {1}];
a = -0.2; b = 0.2; r = 0.02; n = 4;
p = (r - a)/(b - a);
s[x_] := s[x] = Prepend[(1 + a)*s[x - 1], (1 + b)*s[x - 1][[1]]];
ColumnForm[Table[s[i], {i, 0, n}], Center]
```

### 1.3. MERCADOS COMPLETOS Y VALORACIÓN DE OPCIONES J.M. Corcuera

```

pp[x_] := Max[x, 0]
call[n] = Map[pp, s[n] - 100]; pu[n] = Map[pp, 100 - s[n]];
call[x_] := call[x] =
    Drop[p*call[x + 1]/(1 + r) + (1 - p)*RotateLeft[call[x +
    1], 1]/(1 + r), -1]
ColumnForm[Table[call[i], {i, 0, n}], Center]
pu[x_] := pu[x] = Drop[p*pu[x + 1]/(1 +
r) + (1 - p)*RotateLeft[pu[x + 1], 1]/(1 + r), -1]
ColumnForm[Table[pu[i], {i, 0, n}], Center]

```

**Ejemplo 1.3.2** *Cálculo, utilizando un modelo CRR con 91 periodos con  $a = -b$ , del valor de un call europeo, en el instante inicial, sobre una acción de Telefónica.*

- Madurez: tres 3 meses (91 días=  $n$ ) ( $T = 91/365$ ).
- Precio actual de telefónica 15,54 euros.
- Precio de ejercicio (strike) 15.54 euros.
- Tipo de interés 4.11 % anual.
- Volatilidad anual: 23,20% ( $b^2 = \text{volatilidad}^2 \times T/n$ )

```

Clear[s, c];
n = 91;
so = 15.54;
K = 15.54;
vol = 0.232;
T = 91/365;
r = 0.0411*T/n;
b = vol*Sqrt[T/n];
a = -b;
p = (r - a)/(b - a);
q = 1 - p;
s[0] = Table[so, {1}];
s[x_] := s[x] = Prepend[(1 + a)*s[x - 1], (1 + b)*s[x - 1][[1]]];
pp[x_] := Max[x, 0];
c[n] = Map[pp, s[n] - K];
c[x_] := c[x] = Drop[p*c[x + 1]/(1 + r) +
    q*RotateLeft[c[x + 1], 1]/(1 + r), -1];
c[0][[1]]

```

**Ejercicio 1.3.1** *Consideremos un mercado financiero de dos periodos, con tipo de interés  $r = 0$ , y con un solo activo con riesgo  $S^1$ . Supongamos que  $S_0^1 = 1$  y para  $n = 1, 2$ ,  $S_n^1 = S_{n-1}^1 \xi_n$ , donde las variables  $\xi_1, \xi_2$  son independientes, y toman dos valores diferentes:  $2, \frac{3}{4}$ , con la misma probabilidad. a) ¿Es un*

mercado viable? ¿Es un mercado completo? Encontrar el precio de una opción europea con madurez  $N = 2$  y payoff  $\max_{0 \leq n \leq 2} S_n^1$ . Encontrar también una cartera recubridora de esta opción.

amos ahora que en este mercado tenemos también un segundo activo con riesgo  $S_n^2$  tal que  $S_0^2 = 1$  y para  $n = 1, 2$

$$S_n^2 = S_{n-1}^2 \eta_n,$$

donde las variables  $\eta_n$  toman los tres valores diferentes  $2, 1, \frac{1}{2}$ ,  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son independientes y

$$\begin{aligned} P(\eta_n = 2 | \xi_n = 2) &= 1, \\ P(\eta_n = 1 | \xi_n = \frac{3}{4}) &= \frac{1}{3}, \\ P(\eta_n = \frac{1}{2} | \xi_n = \frac{3}{4}) &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

de manera que el vector  $(\xi_n, \eta_n)$  toma solo los valores  $(2, 2)$ ,  $(\frac{3}{4}, 1)$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$  con probabilidades  $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$ . b) Demostrar que los dos activos  $S_n^1, S_n^2$  forman un mercado viable y completo y calcular la probabilidad neutra. ¿Se puede saber cuál será el precio de la opción europea del apartado a) anterior sin hacer ningún cálculo? ¿Por qué?

**Ejercicio 1.3.2** Demostrar que si  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ,  $X$  absolutamente continua, y  $a_n \rightarrow a \in \bar{R}$ , entonces  $P\{X_n \leq a_n\} \rightarrow P\{X \leq a\}$ .

**Ejercicio 1.3.3** Sea  $\{X_{nj}, j = 1, \dots, k_n, n \geq 1\}$ , donde  $k_n \xrightarrow{n} \infty$ , un sistema triangular de variables aleatorias centradas e independientes, fijado  $n$ , con  $X_{nj} = O(k_n^{-1/2})$ , y tales que  $\sum_{j=1}^{k_n} E(X_{nj}^2) \rightarrow \sigma^2 > 0$ , demostrar que  $S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2)$ .

**Ejercicio 1.3.4** Supongamos ahora una sucesión de modelos binomiales CRR donde el número de periodos depende de  $n$  y tales que

$$\begin{aligned} 1 + r(n) &= e^{\frac{rT}{n}}, \\ 1 + b(n) &= e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}, \\ 1 + a(n) &= e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}, \end{aligned}$$

demostrar que para  $n$  suficientemente grande los mercados son viables. Calcular el precio límite de un call en el instante inicial cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 1.3.5** Considerar el mismo problema que en el caso anterior pero con

$$\begin{aligned} 1 + b(n) &= e^\tau, \\ 1 + a(n) &= e^{\lambda \frac{T}{n}}, \end{aligned}$$

donde  $\tau > 0$  y  $0 < \lambda < r$ .



## 1.4 Introducción a las opciones americanas

Una opción americana se puede ejercer en cualquier momento entre 0 y  $N$ , y definiremos entonces una sucesión positiva  $(Z_n)$  adaptada a  $(\mathcal{F}_n)$  para indicar el beneficio inmediato de ejercer la opción en  $n$ . En el caso de un *call* americano  $Z_n = (S_n - K)_+$  y en el caso de un *put* americano  $Z_n = (K - S_n)_+$ . Para definir el precio,  $U_n$ , en el instante  $n$ , de la opción americana procederemos por inducción hacia atrás. Obviamente  $U_N = Z_N$ . En el instante  $N - 1$ , el poseedor de la opción puede optar entre recibir  $Z_{N-1}$  o la cantidad "equivalente" a  $Z_N$  en el instante  $N - 1$ , que será  $S_{N-1}^0 E_{P^*}(\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1})$  (suponemos que estamos en un mercado viable y completo y  $P^*$  es la probabilidad neutral). Obviamente optará entre el máximo de las dos cantidades anteriores, de manera que es natural definir

$$U_{N-1} = \max(Z_{N-1}, S_{N-1}^0 E_{P^*}(\tilde{Z}_N | \mathcal{F}_{N-1}))$$

y por inducción hacia atrás

$$U_n = \max(Z_n, S_n^0 E_{P^*}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n))$$

ó análogamente

$$\tilde{U}_n = \max(\tilde{Z}_n, E_{P^*}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n)), 0 \leq n \leq N - 1$$

**Proposición 1.4.1** *La sucesión  $(\tilde{U}_n)$  es la más pequeña  $P^*$ -supermartingala que domina la sucesión  $(\tilde{Z}_n)$*

**Demostración.** Evidentemente  $(\tilde{U}_n)$  es adaptada y por construcción

$$E_{P^*}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq \tilde{U}_n.$$

Sea  $(T_n)$  otra supermartingala que domina  $(\tilde{Z}_n)$ , entonces  $T_N \geq \tilde{Z}_N = \tilde{U}_N$ . Supongamos que  $T_{n+1} \geq \tilde{U}_{n+1}$  entonces por la monotonía de la esperanza y puesto que  $(T_n)$  es supermartingala

$$T_n \geq E_{P^*}(T_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq E_{P^*}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

además  $(T_n)$  domina a  $(\tilde{Z}_n)$  por tanto

$$T_n \geq \max(\tilde{Z}_n, E_{P^*}(\tilde{U}_{n+1} | \mathcal{F}_n)) = \tilde{U}_n$$

■

**Observación 1.4.1** *Si ejercemos la opción en el instante  $n$ , recibimos  $Z_n$  y el valor de esto en el instante inicial es*

$$V_0 = E_{P^*}(\tilde{Z}_n | \mathcal{F}_0),$$

*como se puede ejercer en cualquier instante  $\{0, 1, \dots, N\}$  uno se pregunta si*

$$U_0 = \sup_{\nu} E_{P^*}(\tilde{Z}_{\nu} | \mathcal{F}_0),$$

*donde  $\nu$  es un tiempo aleatorio tal que la decisión de parar en  $n$  se toma en base a la información en  $n$ . Esto es  $\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n$ . La respuesta, como veremos más adelante, es afirmativa.*

### 1.4.1 El problema de la parada óptima y las opciones americanas

**Definición 1.4.1** Una variable aleatoria  $\nu$  que toma valores en  $\{0, 1, \dots, N\}$  es un tiempo de paro si

$$\{\nu = n\} \in \mathcal{F}_n, \quad 0 \leq n \leq N$$

**Observación 1.4.2** Equivalentemente  $\nu$  es un tiempo de paro si  $\{\nu \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , definición que se puede extender al caso continuo.

Vamos a introducir el concepto de sucesión "parada" por un tiempo de paro. Sea  $(X_n)$  un proceso adaptado y  $\nu$  un tiempo de paro, entonces definimos

$$X_n^\nu = X_{n \wedge \nu} \text{ para todo } n.$$

Notemos que

$$X_n^\nu(\omega) = \begin{cases} X_n & \text{si } n \leq \nu(\omega) \\ X_{\nu(\omega)} & \text{si } n > \nu(\omega) \end{cases}$$

**Proposición 1.4.2** Sea  $(X_n)$  adaptado, entonces  $(X_n^\nu)$  es adaptado y si  $(X_n)$  es una martingala (sup, super), entonces  $(X_n^\nu)$  es una martingala (sub, super).

$$\begin{aligned} X_n^\nu &= X_{n \wedge \nu} = X_0 + \sum_{j=1}^{n \wedge \nu} (X_j - X_{j-1}) \\ &= X_0 + \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}} (X_j - X_{j-1}), \end{aligned}$$

pero  $\{j \leq \nu\} = \overline{\{\nu \leq j-1\}} \in \mathcal{F}_{j-1}$  con lo que  $\mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}}$  es  $\mathcal{F}_{j-1}$ -medible y la sucesión  $(\phi_j)$  con  $\phi_j = \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}}$  es previsible. Obviamente  $X_n^\nu$  es  $\mathcal{F}_n$ -medible y

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}^\nu - X_n^\nu | \mathcal{F}_n) &= E(\mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu\}} (X_{n+1} - X_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu\}} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \leq 0 \text{ si } (X_n) \text{ es } \begin{array}{l} \text{super} \\ \text{martingala} \\ \text{sub} \end{array} \end{aligned}$$

#### Envoltura de Snell

Sea  $(Y_n)$  un proceso adaptado (a  $(\mathcal{F}_n)$ ), definamos

$$\begin{aligned} X_N &= Y_N \\ X_n &= \max(Y_n, E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)), \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

diremos que  $(X_n)$  es la envoltura de Snell de  $(Y_n)$ .

**Observación 1.4.3** Notemos que  $(\tilde{U}_n)$ , la sucesión de precios actualizados de las opciones americanas es la envoltura de Snell de la sucesión de payoffs actualizados  $(\tilde{Z}_n)$ .

**Observación 1.4.4** Por una proposición anterior la envoltura de Snell de un proceso adaptado es la menor supermartingala que lo mayora.

**Observación 1.4.5** Fijado  $\omega$  si  $X_n$  es estrictamente mayor que  $Y_n$ ,  $X_n = E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$  con lo que  $X_n$  se comporta hasta ese  $n$  como una martingala, esto indica que si "paramos" adecuadamente  $X_n$  podemos conseguir que sea martingala.

**Proposición 1.4.3** La variable

$$\nu = \inf\{n \geq 0, X_n = Y_n\}$$

es un tiempo de paro y  $(X_n^\nu)$  es una martingala.

**Demostración.**

$$\{\nu = n\} = \{X_0 > Y_0\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} > Y_{n-1}\} \cap \{X_n = Y_n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Además

$$X_n^\nu = X_0 + \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{j \leq \nu\}} (X_j - X_{j-1})$$

manera que

$$X_{n+1}^\nu - X_n^\nu = \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu\}} (X_{n+1} - X_n)$$

y

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}^\nu - X_n^\nu | \mathcal{F}_n) &= \mathbf{1}_{\{n+1 \leq \nu\}} E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \leq n \text{ ya que el indicador es cero} \\ 0 & \text{si } \nu > n \text{ ya que entonces } X_n = E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \end{cases} \end{aligned}$$

■

Escribiremos  $\tau_{n,N}$  para indicar los tiempos de paro a valores en  $\{n, n+1, \dots, N\}$ .

**Corolario 1.4.1**

$$X_0 = E(Y_\nu | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau \in \tau_{0,N}} E(Y_\tau | \mathcal{F}_0)$$

**Demostración.**  $(X_n^\nu)$  es una martingala y por tanto

$$\begin{aligned} X_0 &= E(X_N^\nu | \mathcal{F}_0) = E(X_{N \wedge \nu} | \mathcal{F}_0) \\ &= E(X_\nu | \mathcal{F}_0) = E(Y_\nu | \mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

Por otro lado  $(X_n)$  es supermartingala y por tanto  $(X_n^\tau)$  también lo es para todo  $\tau \in \tau_{0,N}$  de manera que

$$X_0 \geq E(X_N^\tau | \mathcal{F}_0) = E(X_\tau | \mathcal{F}_0) \geq E(Y_\tau | \mathcal{F}_0),$$

por tanto

$$E(X_\nu | \mathcal{F}_0) \geq E(X_\tau | \mathcal{F}_0), \quad \forall \tau \in \tau_{0,N}$$

■

**Observación 1.4.6** Análogamente se podría demostrar que

$$X_n = E(Y_{\nu_n} | \mathcal{F}_n) = \sup_{\tau \in \tau_{n,N}} E(Y_\tau | \mathcal{F}_n),$$

donde

$$\nu_n = \inf\{j \geq n, X_j = Y_j\}$$

**Definición 1.4.2** Un tiempo de paro  $\nu$  se dirá que es óptimo para la sucesión  $(Y_n)$  si

$$E(Y_\nu | \mathcal{F}_0) = \sup_{\tau \in \tau_{0,N}} E(Y_\tau | \mathcal{F}_0).$$

**Observación 1.4.7** El tiempo de paro  $\nu = \inf\{n, X_n = Y_n\}$  (donde  $X$  es la envoltura de Snell de  $Y$ ) es entonces un tiempo de paro óptimo para  $Y$ . Veamos que es el más pequeño de los tiempos de paro óptimos. El siguiente teorema nos da una caracterización de los mismos.

**Teorema 1.4.1**  $\tau$  es un tiempo de paro óptimo si y sólo si

$$\begin{cases} X_\tau = Y_\tau \\ (X_n^\tau) \end{cases} \text{ es una martingala}$$

**Demostración.** Si  $(X_n^\tau)$  es una martingala y  $X_\tau = Y_\tau$

$$\begin{aligned} X_0 &= E(X_N^\tau | \mathcal{F}_0) = E(X_{N \wedge \tau} | \mathcal{F}_0) \\ &= E(X_\tau | \mathcal{F}_0) = E(Y_\tau | \mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

Por otro lado para todo tiempo de paro  $\pi$ ,  $(X_n^\pi)$  es una supermartingala, manera que

$$X_0 \geq E(X_N^\pi | \mathcal{F}_0) = E(X_\pi | \mathcal{F}_0) \geq E(Y_\pi | \mathcal{F}_0).$$

Recíprocamente, sabemos, por el colorario anterior, que  $X_0 = \sup_{\tau \in \tau_{0,N}} E(Y_\tau | \mathcal{F}_0)$ . Entonces si  $\tau$  es óptimo

$$X_0 = E(Y_\tau | \mathcal{F}_0) \leq E(X_\tau | \mathcal{F}_0) \leq X_0,$$

donde la última desigualdad se debe a que  $(X_n^\tau)$  es una supermartingala. Tenemos así que

$$E(X_\tau - Y_\tau | \mathcal{F}_0) = 0$$

y como  $X_\tau - Y_\tau \geq 0$ , resulta que  $X_\tau = Y_\tau$  (casi seguramente, pero nuestro espacio de probabilidad no tiene subconjuntos de probabilidad cero distintos del vacío). Veamos también que  $(X_n^\tau)$  es martingala. Sabemos que es supermartingala, entonces

$$X_0 \geq E(X_n^\tau | \mathcal{F}_0) \geq E(X_N^\tau | \mathcal{F}_0) = E(X_\tau | \mathcal{F}_0) = X_0$$

por lo visto antes. Por tanto, para todo  $n$

$$E(X_n^\tau - E(X_\tau | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_0) = 0,$$

pero por otro lado, ya que  $(X_n^\tau)$  es supermartingala,

$$X_n^\tau \geq E(X_N^\tau | \mathcal{F}_n) = E(X_\tau | \mathcal{F}_n)$$

de manera que  $X_n^\tau = E(X_\tau | \mathcal{F}_n)$ . ■

### Descomposición de supermartingalas

**Proposición 1.4.4** *Cualquier supermartingala  $(X_n)$  tiene una descomposición única:*

$$X_n = M_n - A_n$$

donde  $(M_n)$  es una martingala y  $(A_n)$  es no-decreciente, previsible y nulo en cero.

**Demostración.** Basta escribir

$$X_n = \sum_{j=1}^n (X_j - E(X_j | \mathcal{F}_{j-1})) - \sum_{j=1}^n (X_{j-1} - E(X_j | \mathcal{F}_{j-1})) + X_0$$

e identificar

$$M_n = \sum_{j=1}^n (X_j - E(X_j | \mathcal{F}_{j-1})) + X_0,$$

$$A_n = \sum_{j=1}^n (X_{j-1} - E(X_j | \mathcal{F}_{j-1}))$$

donde definimos  $M_0 = X_0$  y  $A_0 = 0$ . Entonces  $(M_n)$  es una martingala:

$$M_n - M_{n-1} = X_n - E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}), \quad 1 \leq n \leq N$$

de manera que

$$E(M_n - M_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Por último como  $(X_n)$  es supermartingala

$$A_n - A_{n-1} = X_{n-1} - E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq 0, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Veamos la unicidad. Si

$$M_n - A_n = M'_n - A'_n, \quad 0 \leq n \leq N$$

tendremos

$$M_n - M'_n = A_n - A'_n, \quad 0 \leq n \leq N,$$

pero entonces como  $(M_n)$  y  $(M'_n)$  son martingalas y  $(A_n)$  y  $(A'_n)$  previsibles, resulta que

$$\begin{aligned} A_{n-1} - A'_{n-1} &= M_{n-1} - M'_{n-1} = E(M_n - M'_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= E(A_n - A'_n | \mathcal{F}_{n-1}) = A_n - A'_n, \quad 1 \leq n \leq N, \end{aligned}$$

esto es

$$A_N - A'_N = A_{N-1} - A'_{N-1} = \dots = A_0 - A'_0 = 0,$$

ya que por hipótesis  $A_0 = A'_0 = 0$ . ■

Esta descomposición se conoce con el nombre de descomposición de Doob.

**Proposición 1.4.5** *El mayor tiempo de paro óptimo para  $(Y_n)$  está dado por*

$$\nu_{\max} = \begin{cases} N & \text{si } A_N = 0 \\ \inf\{n, A_{n+1} > 0\} & \text{si } A_N > 0 \end{cases},$$

donde  $(X_n)$ , envoltura de Snell de  $(Y_n)$ , tiene la descomposición de Doob  $X_n = M_n - A_n$ .

**Demostración.**  $\{\nu_{\max} = n\} = \{A_1 = 0, A_2 = 0, \dots, A_n = 0, A_{n+1} > 0\} \in \mathcal{F}_n$ ,

$0 \leq n \leq N-1$ ,  $\{\nu_{\max} = N\} = \{A_N = 0\} \in \mathcal{F}_{N-1}$ . Por tanto es un tiempo de paro.

$$X_n^{\nu_{\max}} = X_{n \wedge \nu_{\max}} = M_{n \wedge \nu_{\max}} - A_{n \wedge \nu_{\max}} = M_{n \wedge \nu_{\max}}$$

ya que  $A_{n \wedge \nu_{\max}} = 0$ . De esta manera  $(X_n^{\nu_{\max}})$  es martingala. Por tanto para ver que es óptimo nos falta probar que

$$X_{\nu_{\max}} = Y_{\nu_{\max}}$$

$$\begin{aligned} X_{\nu_{\max}} &= \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{1}_{\{\nu_{\max}=j\}} X_j + \mathbf{1}_{\{\nu_{\max}=N\}} X_N \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{1}_{\{\nu_{\max}=j\}} \max(Y_j, E(X_{j+1} | \mathcal{F}_j)) + \mathbf{1}_{\{\nu_{\max}=N\}} Y_N, \end{aligned}$$

ahora bien en  $\{\nu_{\max} = j\}$ ,  $A_j = 0, A_{j+1} > 0$  de manera que

$$E(X_{j+1} | \mathcal{F}_j) = E(M_{j+1} | \mathcal{F}_j) - A_{j+1} < E(M_{j+1} | \mathcal{F}_j) = M_j = X_j$$

#### 1.4. INTRODUCCIÓN A LAS OPCIONES AMERICANAS J.M. Corcuera

por tanto  $X_j = Y_j$  en  $\{\nu_{\max} = j\}$  y consecuentemente  $X_{\nu_{\max}} = Y_{\nu_{\max}}$ . Veamos por último que es el tiempo de paro óptimo mayor posible. Sea  $\tau \geq \nu_{\max}$  y  $P\{\tau > \nu_{\max}\} > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} E(X_\tau) &= E(M_\tau) - E(A_\tau) = E(M_0) - E(A_\tau) \\ &= X_0 - E(A_\tau) < X_0 \end{aligned}$$

y por tanto  $(X_{\tau \wedge n})$  no puede ser martingala. ■

#### 1.4.2 Aplicación a opciones americanas

**Otra expresión para el precio de opciones americanas** Ya vimos que el precio de una opción americana con payoffs  $(Z_n)$  venia dado por

$$\begin{cases} U_N = Z_N \\ U_n = \max(Z_n, S_n^0 E_{P^*}(U_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \quad \text{si } n \leq N-1. \end{cases}$$

Dicho de otra manera, la sucesión de los precios actualizados  $(\tilde{U}_n)$  es la envoltura de Snell de la sucesión de payoffs actualizados  $(\tilde{Z}_n)$ . Los resultados anteriores nos permiten afirmar entonces que

$$\tilde{U}_n = \sup_{\tau \in \tau_{n,N}} E_{P^*}(\tilde{Z}_\tau | \mathcal{F}_n),$$

o equivalentemente

$$U_n = S_n^0 \sup_{\tau \in \tau_{n,N}} E_{P^*}\left(\frac{Z_\tau}{S_\tau^0} | \mathcal{F}_n\right).$$

#### Recubrimiento ("hedging") en el caso de opciones americanas

Sabemos por los resultados anteriores que podemos descomponer

$$\tilde{U}_n = \tilde{M}_n - \tilde{A}_n$$

donde  $(\tilde{M}_n)$  es una  $P^*$ -martingala y  $(\tilde{A}_n)$  es un proceso creciente y previsible que se anula en  $n = 0$ . Si recibimos  $U_0$  podemos construir una cartera auto-financiada que replique  $M_N$  (la relación entre los procesos con tilde y sin tilde es cómo siempre). En efecto, como el mercado es completo, cualquier *payoff* positivo (asumimos que  $(Z_n) \geq 0$ ), se puede replicar, de manera que existirá  $\phi$  tal que

$$V_N(\phi) = M_N$$

o lo que es lo mismo

$$\tilde{V}_N(\phi) = \tilde{M}_N$$

pero  $(\tilde{V}_n(\phi))$  y  $(\tilde{M}_n)$  son  $P^*$ -martingalas de manera que  $\tilde{V}_n(\phi) = \tilde{M}_n, 0 \leq n \leq N$ . Notemos entonces que

$$U_n = M_n - A_n = V_n(\phi) - A_n$$

y por tanto

$$V_n(\phi) = U_n + A_n \geq U_n.$$

Es decir con el dinero que recibimos podemos "superrecubrir" el valor del derivado.

### Ejercicio óptimo de la opción americana

Supongamos que compramos la opción americana y queremos saber cuándo ejercer la opción. Es decir queremos saber qué tiempo de paro  $\tau$  utilizar. Si  $\tau$  es tal que  $U_{\tau(\omega)}(\omega) > Z_{\tau(\omega)}(\omega)$  no tiene interés ejercer la opción pues su valor  $U_{\tau(\omega)}(\omega)$  es superior a lo que vamos a obtener si la ejercemos:  $Z_{\tau(\omega)}(\omega)$ . Por tanto, buscaremos  $\tau$  tal que  $\tilde{U}_\tau = \tilde{Z}_\tau$ . Por otro lado buscaremos que  $A_n = 0$ , para todo  $1 \leq n \leq \tau$ , (o equivalentemente  $A_\tau = 0$ ) ya que si no, a partir de algún momento sería mejor ejercer la opción y construir la cartera de valores  $\phi$ . De manera que  $V_{\tau \wedge n}(\phi) = U_{\tau \wedge n}$ , pero entonces  $(\tilde{U}_n^\tau)$  es una  $P^*$ -martingala y esto junto con  $\tilde{U}_\tau = \tilde{Z}_\tau$  son las dos condiciones para que  $\tau$  sea un tiempo de paro óptimo para  $(\tilde{Z}_n)$ .

Notemos que desde el punto de vista del vendedor, si el comprador no ejerce la opción en un tiempo de paro óptimo entonces o bien  $U_\tau > Z_\tau$  o  $A_\tau > 0$  en ambos casos, como el vendedor ha invertido la prima en construir una cartera de valores con la estrategia  $\phi$ , tendrá por beneficio

$$V_\tau(\phi) - Z_\tau = U_\tau + A_\tau - Z_\tau > 0.$$

**Ejemplo 1.4.1** *Calculo del precio de una opción americana de venta a tres meses sobre acciones, cuando el precio de ejercicio es de 60 euros, el tipo de interés 10% anual y la volatilidad 45% anual utilizando un modelo CRR con doce periodos. Se analiza también en qué nodos conviene ejercer la opción.*

```

Clear[s, pa, vc, vi];
T = 1/4;n =12;so = 60;K = 60;vol = 0.45;ra = 0.10;
r = ra*T/n;b =vol*Sqrt[T/n];a=-b;
p = (r - a)/(b - a);
q = 1 - p;
pp[x_] := Max[x, 0]
s[0] = Table[so, {1}];
s[x_] := s[x] = Prepend[(1 + a)*s[x - 1], (1 + b)*s[x - 1][[1]]];
ColumnForm[Table[s[i], {i, 0, n}], Center]
pa[n] = Map[pp, K - s[n]];
pa[x_] := pa[x] = K - s[
x] + Map[pp, Drop[p*pa[x + 1]/(1 + r) + q*RotateLeft[pa[x + 1],
1]/(1 + r), -1] - K + s[x]]
ColumnForm[Table[pa[i], {i, 0, n}], Center]
vc[n] = Map[pp, K - s[n]];
vc[x_] := Drop[p*pa[x + 1]/(1 + r) + q*RotateLeft[pa[x +
1], 1]/(1 + r), -1]

```



1.4. INTRODUCCIÓN A LAS OPCIONES AMERICANAS J.M. Corcuera

```
vi[i_] := Table[Map[pp, K - s[i]]
ColumnForm[Table[vc[i] - vi[i], {i, 0, n}], Center]
ColumnForm[Table[pa[i] - vi[i], {i, 0, n}], Center]
```

**Ejercicio 1.4.1** Obtener las siguientes cotas para los precios de los "calls" ( $C$ ) y los "puts" ( $P$ ) de las opciones europeas ( $E$ ) y americanas ( $A$ ):

$$\max(S_n - K, 0) \leq C_n(E) \leq C_n(A);$$

$$\max(0, (1+r)^{-(N-n)}K - S_n) \leq P_n(E) \leq (1+r)^{-(N-n)}K$$

**Ejercicio 1.4.2** Consideremos un mercado viable y completo con  $N$  periodos de negociación. Demostrar que, con las notaciones habituales,

$$\sup_{\tau, \text{ temps d'atur}} E_Q \left( \frac{(S_\tau - K)_+}{(1+r)^\tau} \right) = E_Q \left( \frac{(S_N - K)_+}{(1+r)^N} \right)$$

donde  $Q$  es la probabilidad neutral.

**Ejercicio 1.4.3** Sea  $\{C_n^E\}_{n=0}^N$  el precio de una opción europea con "payoff"  $Z_N$  y sean  $\{Z_n\}_{n=0}^N$  los "payoffs" de una opción americana. Demostrar que si  $C_n^E \geq Z_n, n = 0, 1, \dots, N-1$ , entonces  $\{C_n^A\}_{n=0}^N$  (los precios de la opción americana) coinciden con  $\{C_n^E\}_{n=0}^N$ .

**Ejercicio 1.4.4** Sea  $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, n \geq 1$ , donde las  $\xi_i$  son iid tales que  $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = 1/2$ . Encontrar la descomposición de Doob de  $|X|$ .

## 1.5 Modelos a tiempo continuo

Vamos a considerar modelos a tiempo continuo y aunque las ideas fundamentales son las mismas, los aspectos técnicos son mas delicados.

La razón principal para considerar modelos a tiempo continuo es que no dependemos del incremento de tiempo entre negociación y negociación y que podemos dar fórmulas cerradas. Fue Louis Bachelier en 1900 con su "Théorie de la spéculation" el primero en considerar un movimiento browniano y en derivar fórmulas para los precios de opciones.

Daremos unas cuantas definiciones y resultados para entender los modelos a tiempo continuo. En particular, definiremos el movimiento browniano, que constituye el núcleo del modelo de Black-Scholes. Posteriormente daremos el concepto de martingala a tiempo continuo y el cálculo diferencial asociado, es decir el cálculo de Itô.

**Definición 1.5.1** *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias reales  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

**Observación 1.5.1** *En la práctica, el índice  $t$  indicará el tiempo, y tomaremos siempre sus valores entre 0 y  $T$ .*

**Observación 1.5.2** *Un proceso también puede ser considerado como una aplicación aleatoria: para todo  $\omega \in \Omega$  podemos asociar la aplicación de  $\mathbb{R}_+$  a  $\mathbb{R}$ :  $t \mapsto X_t(\omega)$  llamada "trayectoria" del proceso. Es decir el proceso sería una aplicación de  $\Omega$  en el conjunto de funciones reales. Si las trayectorias son continuas se dice que el proceso es continuo.*

**Observación 1.5.3** *Un proceso estocástico también puede ser visto como una aplicación de  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  en  $\mathbb{R}$ . Supondremos en  $\mathbb{R}_+ \times \Omega$  la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$  y que la aplicación es siempre medible (proceso medible), que es un poco más fuerte que la condición de ser simplemente proceso (aunque si por ejemplo el proceso  $X$  es continuo por algún lado entonces existe una versión,  $Y$ , del mismo (es decir  $P(X_t = Y_t) = 1$ , para todo  $t$ ) es medible).*

**Definición 1.5.2** *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad, una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una familia creciente de sub- $\sigma$ -álgebras de  $\mathcal{F}$ . Diremos que un proceso  $(X_t)$  es adaptado si para todo  $t$ ,  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.*

**Observación 1.5.4** *Trabajaremos con filtraciones que tienen la propiedad*

$$\text{Si } A \in \mathcal{F} \text{ y } P(A) = 0 \text{ entonces } A \in \mathcal{F}_t \text{ para todo } t.$$

*Es decir  $\mathcal{F}_0$  contiene a los conjuntos  $P$ -nulos de  $\mathcal{F}$ . La importancia de esto es que si  $X = Y$  c.s. y  $X$  es  $(\mathcal{F}_t)$ -medible entonces  $Y$  es  $(\mathcal{F}_t)$ -medible. Así si un proceso  $(X_t)$  es adaptado e  $(Y_t)$  es otra versión del mismo entonces  $(Y_t)$  es adaptado.*

**Observación 1.5.5** Podemos construir la filtración generada por un proceso  $(X_t)$  y escribir  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ . En general esta filtración no satisface la condición anterior y substituiremos  $\mathcal{F}_t$  por  $\bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{N}$  donde  $\mathcal{N}$  es la colección de conjuntos de probabilidad cero de  $\mathcal{F}$ . Le llamaremos la filtración natural generada por  $(X_t)$ . Salvo que digamos lo contrario será la que consideraremos.

El movimiento browniano es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo polen en una gota de agua). Recibe su nombre en honor a Robert Brown quien lo describe en 1828.

El movimiento aleatorio de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por las moléculas del fluido sometidas a una agitación térmica.

La descripción matemática del fenómeno fue elaborada por Albert Einstein en 1905. En los años 20 Norbert Wiener dio una caracterización del movimiento browniano como proceso estocástico y también se le conoce como proceso de Wiener. Vamos a considerar el caso unidimensional.

**Definición 1.5.3** Diremos que  $(X_t)_{t \geq 0}$  es un proceso con incrementos independientes si para cualesquiera  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ ,  $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes.

**Definición 1.5.4** Un movimiento browniano es un proceso continuo con incrementos independientes y estacionarios. Esto es:

- $P$ -c.s  $s \mapsto X_s(\omega)$  es continua.
- Si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)$ .
- Si  $s \leq t$ ,  $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0$ .

Se deduce que la ley de  $X_t - X_0$  es gaussiana:

**Teorema 1.5.1** Si  $(X_t)$  es un movimiento browniano entonces

$$X_t - X_0 \sim N(rt, \sigma^2 t)$$

**Proposición 1.5.1** Si  $(X_t)$  es un proceso con incrementos independientes, continuo y  $0 = t_{0n} \leq t_{1n} \leq \dots \leq t_{nn} \leq t$  es una sucesión de particiones de  $[0, t]$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |t_{in} - t_{i-1,n}| = 0$ , entonces para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P\{|X_{t_{in}} - X_{t_{i-1,n}}| > \varepsilon\} = 0.$$

**Demostración.** Tendremos que para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sup_i |X_{t_{in}} - X_{t_{i-1,n}}| > \varepsilon\} = 0,$$

pero

$$\begin{aligned}
P\left\{\sup_i |X_{t_{in}} - X_{t_{i-1,n}}| > \varepsilon\right\} &= 1 - \prod_{i=1}^n P\{|X_{t_{in}} - X_{t_{i-1,n}}| \leq \varepsilon\} \\
&= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P\{|X_{t_{in}} - X_{t_{i-1,n}}| > \varepsilon\}) \\
&\geq 1 - \exp\left\{-\sum_{i=1}^n P\{|X_{t_{in}} - X_{t_{i-1,n}}| > \varepsilon\}\right\} \geq 0
\end{aligned}$$

■

**Proposición 1.5.2** Sea  $\{Y_{kn}, k = 1, \dots, n\}$  variables independientes y tales que  $|Y_{kn}| \leq \varepsilon_n$  con  $\varepsilon_n \downarrow 0$ . Entonces si  $\liminf \text{Var}(\sum_{k=1}^n Y_{kn}) > 0$

$$\frac{\sum_{k=1}^n Y_{kn} - E(\sum_{k=1}^n Y_{kn})}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{k=1}^n Y_{kn})}} \rightarrow N(0, 1)$$

**Demostración.** Escribamos  $X_{kn} = Y_{kn} - E(Y_{kn})$  y  $v_n^2 = \text{Var}(\sum_{k=1}^n Y_{kn})$

$$\begin{aligned}
&\log E\left(\exp\left\{it \frac{1}{v_n} \sum_{k=1}^n X_{kn}\right\}\right) \\
&= \log\left(\prod_{i=1}^n E\left(\exp it \frac{X_{kn}}{v_n}\right)\right) = \sum_{i=1}^n \log\left(E\left(\exp it \frac{X_{kn}}{v_n}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2}t^2 \frac{\sum_{k=1}^n E(X_{kn}^2)}{v_n^2} - \frac{i}{3!}t^3 \frac{\sum_{k=1}^n E(X_{kn}^3)}{v_n^3} + \dots \\
&= -\frac{1}{2}t^2 + O\left(\frac{\varepsilon_n}{v_n}\right),
\end{aligned}$$

ya que

$$\left|\frac{\sum_{k=1}^n E(X_{kn}^3)}{v_n^3}\right| \leq \left|\frac{2\varepsilon_n \sum_{k=1}^n E(X_{kn}^2)}{v_n^3}\right|.$$

■

**Observación 1.5.6** Notemos que si  $\liminf \text{Var}(\sum_{k=1}^n Y_{kn}) = 0$  tendremos que  $\sum_{k=1}^{n_r} Y_{kn} - E(\sum_{k=1}^{n_r} Y_{kn}) \xrightarrow{P} 0$  para cierta subsucesión.

**Demostración.** (Teorema) Dada la partición  $0 = t_{0n} \leq t_{1n} \leq \dots \leq t_{nn} \leq t$  definamos

$$Y_{nk} = (X_{t_{kn}} - X_{t_{k-1,n}}) \mathbf{1}_{\{|X_{t_{kn}} - X_{t_{k-1,n}}| \leq \varepsilon_n\}},$$

entonces, por la primera proposición, después de una pequeña modificación (aquí  $\varepsilon$  depende de  $n$ ),

$$P(X_t - X_0 \neq \sum_{k=1}^n Y_{nk}) \leq \sum_{k=1}^n P(|X_{t_{kn}} - X_{t_{k-1,n}}| > \varepsilon_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por tanto  $\sum_{k=1}^n Y_{nk} \xrightarrow{P} X_t - X_0$ . Por otro lado, por la segunda proposición, si  $\liminf \text{Var}(\sum_{k=1}^n Y_{kn}) > 0$ ,

$$\frac{\sum_{k=1}^n Y_{kn} - E(\sum_{k=1}^n Y_{kn})}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{k=1}^n Y_{kn})}} \rightarrow N(0, 1)$$

con lo que  $X_t - X_0$  tiene una ley normal (o es una constante). Resultará que la ley de cualquier incremento es normal. Entonces si tomamos como definición de  $r, \sigma^2$  que  $X_1 - X_0 \sim N(r, \sigma^2)$ , de la independencia, homogeneidad y continuidad resultará que  $X_t - X_0 \sim N(rt, \sigma^2 t)$  :

$$X_1 - X_0 = \sum_{i=1}^p (X_{i/p} - X_{(i-1)/p})$$

entonces  $X_{1/p} - X_0 \sim N(r/p, \sigma^2/p)$ . Análogamente  $X_{q/p} - X_0 \sim N(qr/p, q\sigma^2/p)$ . Ahora podemos aproximar cualquier valor de  $t$  por racionales y aplicar la continuidad de  $X$ . ■

**Definición 1.5.5** *Un movimiento browniano es estándar si  $X_0 = 0$  P c.s.  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ . A partir de ahora siempre lo supondremos estándar.*

En un modelo a tiempo discreto, con un stock con riesgo  $S$ , el valor descontado de una una cartera autofinanciada  $\phi$  venía dado por

$$\tilde{V}_n = V_0 + \sum_{j=1}^n \phi_j \Delta \tilde{S}_j,$$

en un modelo a tiempo continuo  $V_0 + \int_0^t \phi_s d\tilde{S}_s$ , vendrá a describir lo mismo. Veremos que estas integrales estarán bien definidas siempre que tengamos una definición de

$$\int_0^t \phi_s dW_s$$

donde  $(W_s)$  es un movimiento browniano. En principio podemos pensar en una definición  $\omega$  a  $\omega$  (trayectorial) pero aunque  $W_s(\omega)$  es continua en  $s$ , no es una función de variación acotada y por tanto no le podemos asociar una medida para definir una integral de Lebesgue-Stieltjes.

**Proposición 1.5.3** *Las trayectorias del movimiento Browniano no tienen variación acotada con probabilidad uno.*

**Demostración.** Dada la partición  $0 = t_{0n} \leq t_{1n} \leq \dots \leq t_{nn} \leq t$  de  $[0, t]$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |t_{in} - t_{i-1,n}| = 0$ , tendremos:

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^n (W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})^2 \xrightarrow{L^2} t.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} E((\Delta_n - t)^2) &= E(\Delta_n^2 - 2t\Delta_n + t^2) \\ &= E(\Delta_n^2) - 2t^2 + t^2, \end{aligned}$$

ahora bien

$$\begin{aligned} E(\Delta_n^2) &= E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})^2 (W_{t_{jn}} - W_{t_{j-1,n}})^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^n E((W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})^4) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} E((W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})^2 (W_{t_{jn}} - W_{t_{j-1,n}})^2) \\ &= 3 \sum_{i=1}^n (t_{in} - t_{i-1,n})^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} (t_{in} - t_{i-1,n})(t_{jn} - t_{j-1,n}) \\ &= t^2 + 2 \sum_{i=1}^n (t_{in} - t_{i-1,n})^2 \end{aligned}$$

de manera que

$$E((\Delta_n - t)^2) = 2 \sum_{i=1}^n (t_{in} - t_{i-1,n})^2 \leq 2t \sup |t_{in} - t_{i-1,n}| \rightarrow 0.$$

Then

$$P\{|\Delta_n - t| > \varepsilon\} \leq \frac{2t \sup |t_{in} - t_{i-1,n}|}{\varepsilon^2},$$

entonces si la sucesión de particiones es tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} \sup |t_{in} - t_{i-1,n}| < \infty$ , aplicando Borel-Cantelli, tendremos que  $\Delta_n \xrightarrow{c.s.} t$ . Por último

$$\sum_{i=1}^n |W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}}| \geq \frac{\sum_{i=1}^n |W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}}|^2}{\sup_i |W_{t_{i,n}} - W_{t_{i-1,n}}|} = \frac{\Delta_n}{\sup_i |W_{t_{i,n}} - W_{t_{i-1,n}}|} \xrightarrow{c.s.} \frac{t}{0}.$$

■

**Proposición 1.5.4** Si  $(X_t)$  es un movimiento browniano y  $0 < t_1 < \dots < t_n$ , entonces  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  es un vector gaussiano.

**Demostración.**  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  se obtiene como una transformación lineal de  $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$  que es un vector gaussiano de normales independientes. ■

**Proposición 1.5.5** Si  $(X_t)$  es un movimiento Browniano entonces  $Cov(X_t, X_s) = s \wedge t$ .

**Demostración.**  $Var(X_t - X_s) = Var(X_t) + Var(X_s) - 2Cov(X_t, X_s)$ . Esto es  $t - s = t + s - 2Cov(X_t, X_s)$ . ■

**Definición 1.5.6** Un proceso continuo  $(X_t)$  es un  $(\mathcal{F}_t)$ -movimiento browniano si

- $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.
- $X_t - X_s$  es independiente de  $\mathcal{F}_s$ ,  $s \leq t$ .
- $X_t - X_s \sim X_{t-s} - X_0$

**Ejemplo 1.5.1** Sea  $(X_t)$  un movimiento Browniano (standard). Sea  $T > 0$ , definamos  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, T-t \leq s \leq T)$ ,  $0 \leq t < T$  entonces

$$Y_t = X_{T-t} - X_T + \int_{T-t}^T \frac{X_s}{s} ds, \quad 0 \leq t < T$$

define un  $(\mathcal{F}_t)$ -movimiento Browniano (standard).

**Demostración.** Es obvio que  $Y$  es  $(\mathcal{F}_t)$ -medible, continuo, gaussiano y que  $Y_0 = 0$ . Tiene incrementos homogéneos, de hecho, sea  $0 \leq u < v < T$

$$Y_v - Y_u = X_{T-v} - X_{T-u} + \int_{T-v}^{T-u} \frac{X_s}{s} ds,$$

entonces  $E(Y_v - Y_u) = 0$  y

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_v - Y_u) &= v - u + 2 \int_{T-v}^{T-u} \frac{E((X_{T-v} - X_{T-u}) X_s)}{s} ds \\ &\quad + 2 \int_{T-v}^{T-u} \left( \int_{T-v}^r \frac{E(X_s X_r)}{sr} ds \right) dr \\ &= v - u + 2 \int_{T-v}^{T-u} \frac{T-v-s}{s} ds \\ &\quad + 2 \int_{T-v}^{T-u} \int_{T-v}^r \frac{1}{r} ds dr \\ &= v - u + 2 \int_{T-v}^{T-u} \frac{T-v-s}{s} ds \\ &\quad + 2 \int_{T-v}^{T-u} \frac{r - (T-v)}{r} dr \\ &= v - u. \end{aligned}$$

Finalmente,  $Y_v - Y_u$  es independiente de  $\mathcal{F}_u$ . Como las variables son gaussianas, basta ver que  $E(Y_v - Y_u | \mathcal{F}_u) = 0$ , pero

$$E(Y_v - Y_u | \mathcal{F}_u) = E(Y_v - Y_u | X_{T-u}) = 0,$$

since

$$\begin{aligned} E((Y_v - Y_u) X_{T-u}) &= T - v - (T - u) + \int_{T-v}^{T-u} \frac{E(X_{T-u} X_s)}{s} du \\ &= u - v + v - u = 0. \end{aligned}$$

■

### 1.5.1 Martingalas a tiempo continuo

**Definición 1.5.7** Sea  $(M_t)$  una familia de variables aleatorias adaptada a  $(\mathcal{F}_t)$  y con momentos de primer orden, entonces es:

- Una martingala si  $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ , para todo  $s \leq t$
- Una submartingala si  $E(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s$ , para todo  $s \leq t$
- Una supermartingala si  $E(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s$ , para todo  $s \leq t$ .

En la definición anterior las igualdades y desigualdades se entienden *casi seguramente*.

**Proposición 1.5.6** Si  $(X_t)$  es un  $(\mathcal{F}_t)$ -movimiento browniano entonces:

- $(X_t)$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala.
- $(X_t^2 - t)$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala.
- $(\exp(\sigma X_t - \frac{\sigma^2}{2}t))$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala.

**Demostración.**

$$\begin{aligned} E(X_t|\mathcal{F}_s) &= E(X_t - X_s + X_s|\mathcal{F}_s) \\ &= E(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) + X_s \\ &= E(X_t - X_s) + X_s = X_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_t^2 - t|\mathcal{F}_s) &= E((X_t - X_s + X_s)^2|\mathcal{F}_s) - t \\ &= E((X_t - X_s)^2 + X_s^2 + 2(X_t - X_s)|\mathcal{F}_s) - t \\ &= t - s + X_s^2 - t \\ &= X_s^2 - s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\exp(\sigma X_t - \frac{\sigma^2}{2}t)|\mathcal{F}_s) &= \exp(\sigma X_s - \frac{\sigma^2}{2}t)E(\exp(\sigma(X_t - X_s))|\mathcal{F}_s) \\ &= \exp(\sigma X_s - \frac{\sigma^2}{2}t)E(\exp(\sigma(X_t - X_s))) \\ &= \exp(\sigma X_s - \frac{\sigma^2}{2}t) \exp(\frac{\sigma^2}{2}(t - s)) \text{ (ya que } X_t - X_s \sim N(0, t - s)) \\ &= \exp(\sigma X_s - \frac{\sigma^2}{2}s) \end{aligned}$$

■



**Ejercicio 1.5.1** Comprobar si los siguientes procesos estocásticos, definidos a partir de un movimiento browniano  $B$ , son martingalas, respecto de  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$ ,

$$X_t = t^2 B_t - 2 \int_0^t s B_s ds$$

$$X_t = e^{t/2} \cos B_t$$

$$X_t = e^{t/2} \sin B_t$$

$$X_t = (B_t + t) \exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$$

$$X_t = B_t^1 B_t^2.$$

En este último caso  $B_t^1$  y  $B_t^2$  representan dos brownianos independientes y  $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s^1, B_s^2, 0 \leq s \leq t)$ .

**Ejercicio 1.5.2** Sea  $(X_t)$  un movimiento browniano (estándar) demostrar que

$$X_t - \int_0^t \frac{X_T - X_s}{T - s} ds, \quad 0 \leq t < T$$

define un  $(\mathcal{F}_t)$ -movimiento browniano entre 0 y  $T$  con  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t, X_T)$ .

## 1.5.2 Construcción de la integral estocástica.

Sea  $(W_t)$  un movimiento browniano estándar, y  $(\tau_n)$  una sucesión de particiones:  $0 = t_{0n} \leq t_{1n} \leq \dots \leq t_{nn} = t$ , con  $d_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |t_{in} - t_{i-1,n}| = 0$ , tal que para todo  $0 \leq s \leq t$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{t_{i,n} \in \tau_n \\ t_{i,n} \leq s}} |W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}}|^2 \stackrel{\text{c.s.}}{=} s. \quad (1.3)$$

Sea  $f$  una función de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}$ . Entonces, fijado  $\omega$ ,

$$f(W_{t_{in}}) - f(W_{t_{i-1,n}}) = f'(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}}) + \frac{1}{2} f''(W_{\tilde{t}_{i-1,n}})(W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})^2,$$

donde  $\tilde{t}_{i-1,n} \in (t_{i-1,n}, t_{in})$ . Como  $f''$  es uniformemente continua en el compacto  $(W_s(\omega))_{0 \leq s \leq t}$  tendremos que

$$\sum_{i=1}^n |f''(W_{\tilde{t}_{i-1,n}}) - f''(W_{t_{i-1,n}})| (W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})^2 \leq \varepsilon_n \sum_{i=1}^n (W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

Para cada  $n$ ,  $\mu_n(A)(\omega) := \sum_{i=1}^n |W_{t_{in}}(\omega) - W_{t_{i-1,n}}(\omega)|^2 \mathbf{1}_A(t_{i-1,n})$  define una medida en  $[0, t]$  que converge, por (1.3), a la medida de Lebesgue en  $[0, t]$ . De

manera que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f''(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})^2 &= \int_0^t f''(W_s) \mu_n(ds) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t f''(W_s) ds. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(W_t) - f(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum (f(W_{t_{in}}) - f(W_{t_{i-1,n}})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f'(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds. \end{aligned}$$

De esta manera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum f'(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}})$$

está bien definido ya que coincide con  $f(W_t) - f(0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds$  y podemos definir entonces

$$\int_0^t f'(W_s) dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f'(W_{t_{i-1,n}})(W_{t_{in}} - W_{t_{i-1,n}}).$$

El problema es que estamos sujetos a las sucesiones de particiones para las que (1.3) es válido. No obstante si conseguimos que las sumas de Riemann, que definen nuestra "integral estocástica" converjan en otro modo (en probabilidad o en  $L^2$ ) independientemente de las particiones que elijamos, el límite será en cualquier caso el mismo debido a la unicidad del límite casi seguro. De esta manera queda establecido que

$$\int_0^t f'(W_s) dW_s = f(W_t) - f(0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds$$

lo que altera *el teorema fundamental del cálculo*.

### Ejemplo 1.5.2

$$\begin{aligned} \int_0^t W_s dW_s &= \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t, \\ \int_0^t \exp\{W_s\} dW_s &= \exp\{W_t\} - 1 - \frac{1}{2} \int_0^t \exp\{W_s\} ds \end{aligned}$$

Es fácil ver, haciendo el mismo razonamiento, que podemos extender los integrandos a funciones  $f : [0, t] \times R \rightarrow R$  de clase  $C^{1,2}$  de manera que

$$f(t, W_t) = f(0, 0) + \int_0^t f_t(s, W_s) ds + \int_0^t f_x(s, W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, W_s) ds,$$

donde

$$\begin{aligned} f_t(s, x) &= \frac{\partial}{\partial t} f(t, x), & f_x(s, x) &= \frac{\partial}{\partial x} f(t, x), \\ f_{xx}(s, x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, x). \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.3** Si tomamos  $f(t, x) = \exp(ax - \frac{1}{2}a^2t)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \exp(aW_t - \frac{1}{2}a^2t) &= 1 - \frac{a^2}{2} \int_0^t \exp(aW_s - \frac{1}{2}a^2s) ds \\ &\quad + a \int_0^t \exp(aW_s - \frac{1}{2}a^2s) dW_s \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \int_0^t \exp(aW_s - \frac{1}{2}a^2s) ds. \end{aligned}$$

Esto es,

$$\exp(aW_t - \frac{1}{2}a^2t) = 1 + a \int_0^t \exp(aW_s - \frac{1}{2}a^2s) dW_s.$$

**Ejemplo 1.5.4** Supongamos un mercado donde tenemos un stock con riesgo,  $S_t = W_t$ , y una cuenta bancaria con interés simple  $r = 0$ . De manera que dada una estrategia  $\phi_t = (\phi_t^0, \phi_t^1)$  el valor de nuestra cartera, en el instante  $t$ , será

$$V_t = \phi_t^0 + \phi_t^1 W_t,$$

Si la estrategia es autofinanciada tendremos

$$dV_t = \phi_t^1 dW_t$$

Supongamos ahora que  $V_t = V(t, S_t)$ , entonces aplicando el cálculo estocástico anterior

$$dV_t = dV(t, S_t) = V_t(t, W_t)dt + V_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}V_{xx}(t, W_t)dt,$$

de manera que

$$V_t(t, W_t) + \frac{1}{2}V_{xx}(t, W_t) = 0 \quad (1.4)$$

$$V_x(t, W_t) = \phi_t^1 \quad (1.5)$$

y si queremos replicar  $H = F(W_T)$ , habrá que buscar una solución de (1.4) con la condición de contorno  $V(T, W_T) = F(W_T)$ . La ecuación 1.5 nos resolverá el problema de "hedging".

**La integral definida**

Vamos entonces a construir una integral en el sentido de convergencia en  $L^2$ .

**Definición 1.5.8**  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  es un proceso simple si se puede escribir

$$H_t = \sum_{i=1}^n \phi_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t),$$

donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  y  $\phi$  es  $(\mathcal{F}_{t_{i-1}})$ -medible y acotada.

**Definición 1.5.9** Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  es un proceso simple, definimos

$$\int_0^T H_s dW_s = \sum_{i=1}^n \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

**Proposición 1.5.7** Si  $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$  es un proceso simple  $E(\int_0^T H_s dW_s)^2 = \int_0^T E(H_s^2) ds$  (propiedad de isometría)

**Demostración.**

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2 &= E\left(\sum_{i=1}^n \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \sum_{j=1}^n \phi_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}})\right) \\ &= E\left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i} E(\phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \phi_j (W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) | \mathcal{F}_{t_{j-1}})) \\ &= \sum_{i=1}^n E(\phi_i^2 E(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{t_{i-1}})) \\ &= \sum_{i=1}^n E(\phi_i^2) (t_i - t_{i-1}) = E \int_0^T H_s^2 ds = \int_0^T E(H_s^2) ds \end{aligned}$$

■

Vamos a extender la clase de integrandos simples,  $\mathcal{S}$  a la clase  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H} = \{(H_t)_{0 \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)\text{-adaptado}, \int_0^T E(H_s^2) ds < \infty\}.$$

Se puede ver que la clase  $\mathcal{H}$  con el producto escalar  $\langle (H_t), (F_t) \rangle = \int_0^T E(H_s F_s) ds$  es un espacio de Hilbert. Notemos que por la proposición anterior tenemos definida una aplicación lineal  $I : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{M} = \{\text{variables } \mathcal{F}_T\text{-medibles de cuadrado integrable}\}$ ,  $I(H) = \int_0^T H_s dW_s$ . En  $\mathcal{M}$  también podemos definir un producto escalar  $\langle M, L \rangle := E(ML)$ . Tenemos entonces que  $I$  es una isometría.

**Proposición 1.5.8** La clase  $\mathcal{S}$  es densa en  $\mathcal{H}$  (con respecto a la norma  $\|H_t\|^2 := \int_0^T E(H_s^2)ds$ ).

**Definición 1.5.10** Si  $H$  es un proceso de la clase  $\mathcal{H}$ , la integral se define como el límite en  $L^2$

$$\int_0^T H_s dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T H_s^n dW_s, \quad (1.6)$$

donde  $H_s^n$  es una sucesión de procesos simples tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T E(H_s^n - H_s)^2 ds = 0.$$

Que el límite (1.6) existe se debe a que la sucesión de variables  $\int_0^T H_s^n dW_s$  es de Cauchy y  $L^2(\Omega)$  es completo, en efecto debido a la propiedad de isometría

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T H_s^n dW_s - \int_0^T H_s^m dW_s\right)^2 &= \int_0^T E(H_s^n - H_s^m)^2 ds \\ &\leq 2 \int_0^T E(H_s^n - H_s)^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^T E(H_s^m - H_s)^2 ds. \end{aligned}$$

Análogamente se puede ver que el límite no depende de la sucesión  $H^n$ . Es fácil ver que para todo  $H$  de la clase  $\mathcal{H}$

- Se cumple la propiedad de isometría,

$$E\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2 = \int_0^T E(H_s^2) ds,$$

- La esperanza de la integral es cero,

$$E\left(\int_0^T H_s dW_s\right) = 0,$$

- La integral es lineal,

$$\int_0^T (aH_s + bF_s) dW_s = a \int_0^T H_s dW_s + b \int_0^T F_s dW_s$$

### La integral indefinida

Si  $H$  es de la clase  $\mathcal{H}$  también lo es  $H\mathbf{1}_{[0,t]}$  y podemos definir

$$\int_0^t H_s dW_s := \int_0^T H_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s) dW_s,$$

tenemos así el proceso

$$\left\{ I(H)_t := \int_0^t H_s dW_s, 0 \leq t \leq T \right\}$$

**Proposición 1.5.9**  $I(H)$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala.

**Demostración.** El resultado es inmediato si  $H$  es simple: es obvio que  $\int_0^t H_s dW_s$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible y tiene esperanza, es suficiente entonces ver que  $\forall t > s$

$$E\left(\int_0^t H_u dW_u \middle| \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s H_u dW_u.$$

Podemos suponer que  $s$  y  $t$  son algunos de los puntos de la partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Así basta ver que  $(M_n) := \left(\int_0^{t_n} H_u dW_u\right)$  es una  $(\mathcal{G}_n)$ -martingala con  $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$ . Pero  $(M_n)$  es la  $(\mathcal{G}_n)$ -martingala  $(W_{t_n})$  transformada por el proceso  $(\mathcal{G}_n)$ -previsible  $(\phi_n)$  por tanto es una martingala.

Si  $H$  no es simple la integral es un límite en  $L^2$  de martingalas, pero esto conserva la propiedad de martingala. ■

**Observación 1.5.7** Se puede ver, utilizando la desigualdad de Doob para martingalas continuas:

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} M_t^2\right) \leq 4E(M_T^2)$$

que existe una versión de  $I(H)$  que es continua.

**Observación 1.5.8** Denotaremos  $\forall t > s$ ,  $\int_s^t H_u dW_u := \int_0^t H_u dW_u - \int_0^s H_u dW_u$ .

Para hacer una ulterior extensión de los integrandos son convenientes los siguiente resultados

**Proposición 1.5.10** Sea  $A$   $\mathcal{F}_t$ -medible, entonces para todo  $H \in \mathcal{H}$

$$\int_0^T \mathbf{1}_A H_s \mathbf{1}_{\{s > t\}} dW_s = \mathbf{1}_A \int_t^T H_s dW_s$$

**Demostración.** Si  $H^n$  es una sucesión que se aproxima a  $H$  resulta que  $\mathbf{1}_A H^n \mathbf{1}_{\{s > t\}}$  se aproximará a  $\mathbf{1}_A H \mathbf{1}_{\{s > t\}}$  y como el resultado es cierto para procesos simples ya está. ■

**Definición 1.5.11** Un tiempo de paro relativo a una filtración  $(\mathcal{F}_t)$  es una variable aleatoria

$$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$$

tal que para todo  $t \geq 0$ ,  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**Proposición 1.5.11** Sea  $\tau$  un  $(\mathcal{F}_t)$ - tiempo de paro entonces

$$\int_0^{\tau \wedge T} H_s dW_s = \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s$$

**Demostración.** Si  $\tau$  es de la forma  $\tau = \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{1}_{A_i}$  donde  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$  y  $A_i$   $\mathcal{F}_{t_i}$ -medibles y disjuntos, entonces es inmediato:

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathbf{1}_{\{s > \tau\}} H_s dW_s &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{s > t_i\}} \mathbf{1}_{A_i} H_s dW_s = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i} \int_{t_i \wedge T}^T H_s dW_s \\ &= \int_{\tau \wedge T}^T H_s dW_s, \end{aligned}$$

Por último  $\int_0^{\tau \wedge T} H_s dW_s = \int_0^T H_s dW_s - \int_{\tau \wedge T}^T H_s dW_s$ . En general, basta aproximar  $\tau$  por  $\tau_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{(k+1)T}{2^n} \mathbf{1}_{\{\frac{kT}{2^n} \leq \tau < \frac{(k+1)T}{2^n}\}}$  y ver que  $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s \xrightarrow{L^2} \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s$ :

$$E \left( \left| \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s - \int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau\}} H_s dW_s \right|^2 \right) = E \left( \int_0^T \mathbf{1}_{\{\tau < s \leq \tau_n\}} H_s^2 ds \right),$$

y si aplicamos convergencia dominada ya está. Por último tomamos una subsecuencia de  $\int_0^T \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s$  que converja casi seguramente. ■

### Extensión de la integral

Vamos a hacer una ulterior extensión de los integrandos, consideremos la clase

$$\tilde{\mathcal{H}} = \{(H_t)_{0 \leq t \leq T}, (\mathcal{F}_t)\text{-adaptado}, \int_0^T H_s^2 ds < \infty \text{ P-c.s.}\}.$$

Dado  $H \in \tilde{\mathcal{H}}$  sea  $\tau_n = \inf\{t \leq T, \int_0^t (H_s)^2 ds \geq n\}$  ( $+\infty$  si el conjunto anterior es vacío). Que  $\int_0^t (H_s)^2 ds$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible se deduce de que es límite casi seguro de variables  $\mathcal{F}_t$ -medibles, de aquí  $\tau_n$  es un tiempo de paro. Sea  $A_n = \{\int_0^T (H_s)^2 ds < n\}$  y definamos Podemos entonces definir:

$$\tilde{J}(H)_t^n := \left( \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s \right) \mathbf{1}_{A_n}, \text{ para todo } n \geq 1$$

Nótese que esto está bien definido de manera que si  $m \geq n$  y  $\omega \in A_n$  entonces

$$\tilde{J}(H)_t^m(\omega) = \tilde{J}(H)_t^n(\omega),$$

en efecto:

$$\tilde{J}(H)_t^m(\omega) = \int_0^{t \wedge \tau_n(\omega)} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_m\}} H_s dW_s,$$

pero

$$\begin{aligned} \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_m\}} H_s dW_s &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_m\}} H_s dW_s \\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s, \end{aligned}$$

de manera que

$$\int_0^{t \wedge \tau_n(\omega)} \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_m\}} H_s dW_s = \tilde{J}(H)_t^n(\omega)$$

Podemos ahora definir

$$\tilde{J}(H)_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s \right) \mathbf{1}_{A_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s.$$

Nótese que si  $H \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \tilde{J}(H)_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_n\}} H_s dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau_n} H_s dW_s \\ &= \int_0^t H_s dW_s = J(H)_t, \end{aligned}$$

por tanto se trata de una "extensión".

**Ejercicio 1.5.3** *Ver que la definición no depende de la sucesión de tiempos de paro "localizadora" de  $(H_s)$  (esto es que  $\tilde{\tau}_n \uparrow \infty$  y que  $(\mathbf{1}_{\{s < \tilde{\tau}_n\}} H_s)$  está en  $\mathcal{H}$ ) entonces el límite es el mismo.*

Se puede ver que la extensión anterior es un límite en probabilidad de integrales de procesos simples  $H^n$  que convergen a  $H$  en el sentido de que

$$P\left(\int_0^t |H_s^n - H_s|^2 ds > \varepsilon\right) \rightarrow 0.$$

Nótese que la nueva integral es un límite casi seguro de un límite en norma cuadrática.

La propiedad de martingala se pierde entonces. En general tenemos que si  $(\tau_m)$  es una sucesión localizadora

$$\begin{aligned} \tilde{J}(H)_{t \wedge \tau_m} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge \tau_m} \mathbf{1}_{\{s \leq \tilde{\tau}_n\}} H_s dW_s \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tilde{\tau}_n \wedge \tau_m\}} H_s dW_s \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_m\}} H_s dW_s \\ &= \int_0^t \mathbf{1}_{\{s \leq \tau_m\}} H_s dW_s \end{aligned}$$

de manera que  $\tilde{J}(H)_{t \wedge \tau_m}$  es una martingala. Entonces se dice que  $\tilde{J}(H)$  es una *martingala local* (cuando se para por  $\tau_m$  es martingala, en  $t$ , y  $\tau_m \uparrow \infty$ ).



### 1.5.3 Cálculo de Itô

Vamos a desarrollar un cálculo basado en la integral anterior. Ya hemos visto que este cálculo es distinto del ordinario. Nuestro teorema fundamental será ahora

$$\int_0^t f'(W_s) dW_s = f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds$$

para  $f \in C^2$ , o en forma diferencial

$$df(W_t) = f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} f''(W_t) dt \quad (1.7)$$

Vamos a tratar de extender este y otros resultados.

**Definición 1.5.12** Un proceso  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  diremos que es proceso de Itô si se puede escribir

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

donde

- $X_0$  es  $\mathcal{F}_0$ -medible.
- $(K_s)$  y  $(H_s)$  son  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptados.
- $\int_0^T (|K_s| + |H_s|^2) ds < \infty$  P-c.s..

**Proposición 1.5.12** Si  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala continua tal que  $M_t = \int_0^t K_s ds < \infty$  P-c.s. entonces

$$M_t = 0, \forall t \leq T$$

**Ejercicio 1.5.4** Sea  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  es una  $(\mathcal{F}_t)$ -martingala continua tal que  $M_t = \int_0^t K_s ds$  con  $(K_s)$  adaptado y tal que  $\int_0^t |K_s| ds \leq C < \infty$  P-c.s, probar que si tomamos  $t_i^n = T \frac{i}{n}, 0 \leq i \leq n$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\sum_{i=1}^n (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2\right) = 0$$

y simultaneamente

$$E\left(\sum_{i=1}^n (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2\right) = E(M_T^2 - M_0^2)$$

y que por tanto P-c.s  $\forall t \leq T, M_t = 0$ .

**Corolario 1.5.1** Todo proceso de Itô tiene una expresión única.

**Teorema 1.5.2** Sea  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  un proceso de Ito y  $f(t, x) \in C^{1,2}$  entonces:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X_s) ds + \int_0^t f_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s,$$

donde

$$\begin{aligned} \int_0^t f_x(s, X_s) dX_s &= \int_0^t f_x(s, X_s) K_s ds + \int_0^t f_x(s, X_s) H_s dW_s \\ \langle X, X \rangle_s &= \int_0^s H_s^2 ds. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.5** Supongamos que queremos encontrar una solución  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  para la ecuación

$$S_t = x_0 + \int_0^t S_s (\mu ds + \sigma dW_s)$$

o en forma diferencial

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x_0.$$

Por el teorema anterior.

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t = d(\log S_t) + \frac{1}{2S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt,$$

esto es

$$d(\log S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t$$

de manera que

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}$$

**Proposición 1.5.13** (Fórmula de integración por partes) Sean  $X_t$  e  $Y_t$  dos procesos de Itô,  $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$  e  $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$ . Entonces

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

donde

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s ds.$$

**Demostración.** Por la formula de Itô

$$(X_t + Y_t)^2 = (X_0 + Y_0)^2 + 2 \int_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \frac{1}{2} \int_0^t 2(H_s + H'_s)^2 ds$$

y

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2H_s^2 ds,$$

$$Y_t^2 = Y_0^2 + 2 \int_0^t Y_s dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2H_s'^2 ds$$

con lo que restando a la primera igualdad la suma de estas dos obtenemos:

$$2X_t Y_t = 2X_0 Y_0 + 2 \int_0^t X_s dY_s + 2 \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t 2H_s H_s' ds.$$

■

Consideremos la ecuación diferencial

$$dX_t = -cX_t dt + \sigma dW_t, X_0 = x$$

entonces si aplicamos la formula anterior a

$$X_t e^{ct}$$

tendremos

$$d(X_t e^{ct}) = e^{ct} dX_t + cX_t e^{ct} dt$$

y por tanto

$$e^{-ct} d(X_t e^{ct}) = \sigma dW_t$$

de manera que

$$X_t = x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dW_s,$$

una nueva integración por partes nos conduce a

$$X_t = x e^{-ct} + \sigma e^{-ct} (e^{ct} W_t - \int_0^t c e^{cs} W_s ds),$$

con lo que se trata de un proceso Gaussiano con esperanza  $x e^{-ct}$  y varianza

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \sigma^2 e^{-2ct} \int_0^t e^{2cs} ds \\ &= \sigma^2 \frac{1 - e^{-2ct}}{2c}. \end{aligned}$$

### 1.5.4 Teorema de Girsanov

**Lema 1.5.1** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad dotado de una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ ,  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . Sea  $Z_T > 0$  tal que  $E(Z_T) = 1$  y  $Z_t := E(Z_T | \mathcal{F}_t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Entonces si definimos  $\tilde{P}(A) := E(\mathbf{1}_A Z_T)$ ,  $\forall A \in \mathcal{F}$  e  $Y$  es una variable  $\mathcal{F}_t$ -medible, tal que  $\tilde{E}(|Y|) < \infty$  entonces, para todo  $s \leq t$ ,

$$\tilde{E}(Y | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{Z_s} E(Y Z_t | \mathcal{F}_s). \quad (1.8)$$

**Demostración.** Sea  $A \in \mathcal{F}_s$  entonces

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\mathbf{1}_A Y) &= E(\mathbf{1}_A Y Z_T) = E(\mathbf{1}_A E(Y Z_t | \mathcal{F}_s)) \\ &= \tilde{E}(\mathbf{1}_A \frac{1}{Z_s} E(Y Z_t | \mathcal{F}_s)). \end{aligned}$$

■

**Teorema 1.5.3** (Girsanov) Consideremos un espacio de probabilidad como antes y  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  un proceso adaptado tal que  $\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty$  c.s. donde

$$Z_t := \exp\left\{\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right\},$$

es una martingala y  $W$  es un  $(\mathcal{F}_t)$ -movimiento browniano estándar. Entonces bajo la probabilidad  $\tilde{P}(\cdot) := E(\mathbf{1} \cdot Z_T)$ ,  $X_t = W_t - \int_0^t \theta_s ds$ ,  $0 \leq t \leq T$ , es un  $(\mathcal{F}_t)$ -movimiento browniano estándar.

**Demostración.**  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  es adaptado y continuo, veamos que los incrementos son independientes y homogéneos.

$$\begin{aligned} &\tilde{E}(\exp\{iu(X_t - X_s)\} | \mathcal{F}_s) \\ &= \frac{1}{Z_s} E(\exp\{iu(X_t - X_s)\} Z_t | \mathcal{F}_s) \\ &= E(\exp\left\{\int_s^t (iu + \theta_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_s^t (2iu\theta_s + \theta_s^2) ds\right\} | \mathcal{F}_s) \end{aligned}$$

Ahora bien, si escribimos

$$N_t := \exp\{iuX_t\}$$

y aplicamos la formula de Itô a

$$Z_t N_t = \exp\left\{\int_0^t (iu + \theta_s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (2iu\theta_s + \theta_s^2) ds\right\}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} &Z_t N_t \\ &= 1 + \int_0^t Z_s N_s \left( (iu + \theta_s) dW_s - \frac{1}{2} (2iu\theta_s + \theta_s^2) ds \right) + \frac{1}{2} \int_0^t Z_s N_s (iu + \theta_s)^2 ds \\ &= 1 + \int_0^t Z_s N_s (iu + \theta_s) dW_s - \frac{u^2}{2} \int_0^t Z_s N_s ds. \end{aligned}$$

Por tanto (localizando con  $\tau_n = \inf\{t \leq T, \int_0^t |(Z_s N_s(iu + \theta_s))|^2 ds \geq n\}$ )

$$E(Z_{t \wedge \tau_n} N_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s) = Z_{s \wedge \tau_n} N_{s \wedge \tau_n} - \frac{u^2}{2} E \left( \int_{s \wedge \tau_n}^{t \wedge \tau_n} Z_v N_v dv \middle| \mathcal{F}_s \right).$$

Esto es

$$\tilde{E}(N_{t \wedge \tau_n} | \mathcal{F}_s) = N_{s \wedge \tau_n} - \frac{u^2}{2} \tilde{E} \left( \int_{s \wedge \tau_n}^{t \wedge \tau_n} N_v dv \middle| \mathcal{F}_s \right),$$

pasando ahora al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y aplicando convergencia dominada y Fubini obtenemos

$$\tilde{E}\left(\frac{N_t}{N_s} | \mathcal{F}_s\right) = 1 - \frac{u^2}{2} \int_s^t \tilde{E}\left(\frac{N_v}{N_s} | \mathcal{F}_s\right) dv.$$

Esto nos da una ecuación para  $g_s(t) := \tilde{E}\left(\frac{N_t}{N_s} | \mathcal{F}_s\right)(\omega)$ , tal que

$$\begin{aligned} g'_s(t) &= -\frac{u^2}{2} g_s(t) \\ g_s(s) &= 1 \end{aligned}$$

De manera que

$$g_s(t) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}(t-s)\right\}$$

esto es

$$\tilde{E}(\exp\{iu(X_t - X_s)\} | \mathcal{F}_s) = \exp\left\{-\frac{u^2}{2}(t-s)\right\}$$

con lo que los incrementos son independientes homogéneos y con ley  $N(0, t-s)$ .

■

### 1.5.5 El modelo de Black-Scholes

El modelo de Samuelson, más conocido por modelo de Black-Scholes, consiste en un mercado con dos activos. Un activo sin riesgo,  $S^0$ , (o cuenta bancaria) que evoluciona como:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad t \geq 0$$

donde  $r$  es una constante no negativa, esto es

$$S_t^0 = e^{rt}, \quad t \geq 0$$

y un activo con riesgo  $S$  que evoluciona como

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \quad t \geq 0$$

donde  $(B_t)$  es un movimiento browniano. Como hemos visto anteriormente esto implica que

$$S_t = S_0 \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma B_t\right\}.$$

Entonces  $\log(S_t)$  es un movimiento browniano, no necesariamente estándar, y por las propiedades del movimiento Browniano tenemos que  $S_t$  :

- tiene trayectorias continuas
- los incrementos relativos  $\frac{S_t - S_u}{S_u}$  son independientes de  $\sigma(S_s, 0 \leq s \leq u)$  :

$$\frac{S_t - S_u}{S_u} = \frac{S_t}{S_u} - 1$$

y

$$\frac{S_t}{S_u} = \exp\left\{\mu(t-u) - \frac{\sigma^2}{2}(t-u) + \sigma(B_t - B_u)\right\}$$

que es independiente de  $\sigma(B_s, 0 \leq s \leq u) = \sigma(S_s, 0 \leq s \leq u)$ .

- los incrementos relativos son estacionarios:

$$\frac{S_t - S_u}{S_u} \sim \frac{S_{t-u} - S_0}{S_0}.$$

De hecho podríamos formular el modelo en términos de estas tres hipótesis

### Estrategias autofinanciadas

Una estrategia es un proceso  $\phi = (\phi_t)_{0 \leq t \leq T} = ((H_t^0, H_t))_{0 \leq t \leq T}$  a valores en  $\mathbb{R}^2$  adaptado a la filtración natural del movimiento browniano,  $(\mathcal{B}_t)$ , (que coincide con la de  $(S_t)$ ), el valor de la cartera es

$$V_t(\phi) = H_t^0 S_t^0 + H_t S_t.$$

En el caso a tiempo discreto, decíamos que la cartera era autofinanciada si

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}^0 (S_{n+1}^0 - S_n^0) + \phi_{n+1} (S_{n+1} - S_n),$$

la correspondiente versión en el caso discreto será:

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

Para dar un sentido a esta igualdad imponemos la condición:  $\int_0^T (|H_t^0| + H_t^2) ds < \infty$   $P$  c.s., entonces las integrales (diferenciales) están bien definidas:

$$\begin{aligned} \int_0^T H_t^0 dS_t^0 &= \int_0^T H_t^0 r e^{rt} dt \\ \int_0^T H_t dS_t &= \int_0^T H_t S_t \mu dt + \int_0^T \sigma H_t S_t dB_t. \end{aligned}$$

Tenemos entonces la siguiente definición

**Definición 1.5.13** *Una estrategia autofinanciada,  $\phi$ , es una par de procesos adaptados  $(H_t^0)_{0 \leq t \leq T}, (H_t)_{0 \leq t \leq T}$  que satisfacen*

- $\int_0^T (|H_t^0| + H_t^2) ds < \infty$   $P$  c.s.

$$\bullet H_t^0 S_t^0 + H_t S_t = H_0^0 S_0^0 + H_{0t} S_0 + \int_0^t H_s^0 r e^{rs} ds + \int_0^t H_s dS_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Indiquemos  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$ , de manera que la tilde la utilizaremos, como en el caso discreto, para indicar cualquier valor actualizado (o descontado).

**Proposición 1.5.14**  $\phi$  es autofinanciada si y sólo si:

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s$$

**Demostración.** Supongamos que  $\phi$  es autofinanciada, entonces como  $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$ , resultará que

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= -re^{-rt} V_t dt + e^{-rt} dV_t \\ &= -re^{-rt} (H_t^0 S_t^0 + H_t S_t) dt \\ &\quad + e^{-rt} (H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t) \\ &= -re^{-rt} (H_t^0 S_t^0 + H_t S_t) dt \\ &\quad + e^{-rt} (H_t^0 r S_t^0 dt + H_t dS_t) \\ &= -re^{-rt} H_t S_t dt + e^{-rt} H_t dS_t \\ &= H_t (-re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t) \\ &= H_t d\tilde{S}_t. \end{aligned}$$

Análogamente si

$$d\tilde{V}_t = H_t d\tilde{S}_t$$

tenemos que

$$dV_t = H_t^0 dS_t^0 + H_t dS_t.$$

■

### Valoración y cobertura en el modelo de Black-Scholes

Busquemos una probabilidad bajo la cual los precios actualizados sean martingala. Sabemos que

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= d(e^{-rt} S_t) = -re^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t \\ &= e^{-rt} S_t (-r dt + \mu dt + \sigma dB_t) \\ &= \sigma \tilde{S}_t d\left(-\frac{r-\mu}{\sigma} t + B_t\right) \\ &= \sigma \tilde{S}_t dW_t \end{aligned} \tag{1.9}$$

con

$$W_t = B_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t.$$

Entonces por el teorema de Girsanov con  $\theta_t = \frac{r-\mu}{\sigma}$  resulta que  $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$  es un browniano estándar respecto a la probabilidad  $P^*$

$$dP^* = \exp\left\{\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right\}dP. \quad (1.10)$$

De (1.9) deducimos que

$$\tilde{S}_t = S_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right\}$$

y que  $(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$  es una  $P^*$ -martingala. También tenemos que

$$S_t = S_0 \exp\left\{rt - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right\}.$$

**Definición 1.5.14** Una estrategia  $\phi$  es admisible si es autofinanciada y su valor descontado  $\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t \tilde{S}_t \geq 0, \forall t$ .

**Definición 1.5.15** Diremos que una opción es replicable si su payoff es igual al valor final de una estrategia admisible.

**Proposición 1.5.15** En el modelo de Black-Scholes cualquier opción con payoff (no negativo) de la forma  $h = f(S_T)$ , de cuadrado integrable respecto a  $P^*$ , con  $E_{P^*}(h|\mathcal{F}_t)$  una función  $C^{1,2}$  del tiempo y de  $S_t$ , es replicable, su precio viene dado por  $C(t, S_t) = E_{P^*}(e^{-r(T-t)}h|\mathcal{F}_t)$  y la estrategia que replica  $h$  viene dada por  $(H_t^0, H_t)$  con

$$H_t = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t}$$

$$H_t^0 e^{rt} = C(t, S_t) - H_t S_t$$

**Demostración.** En primer lugar, por la independencia de los incrementos relativos

$$\begin{aligned} E_{P^*}(e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t) &= E_{P^*}(e^{-r(T-t)}f\left(\frac{S_T}{S_t}S_t\right)|\mathcal{F}_t) \\ &= E_{P^*}(e^{-r(T-t)}f\left(\frac{S_T}{S_t}x\right))_{x=S_t} \\ &= C(t, S_t), \end{aligned}$$

de manera que lo que llamaremos precio del derivado en  $t$  depende únicamente de  $S_t$  y  $t$ .

Si aplicamos ahora la formula de Ito a  $\tilde{C}(t, S_t) = e^{-rt}C(t, \tilde{S}_t e^{rt})$ , tendremos

$$\begin{aligned} &\tilde{C}(t, S_t) \\ &= C(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{C}(s, \tilde{S}_s)}{\partial s} ds + \int_0^t \frac{\partial \tilde{C}(s, \tilde{S}_s)}{\partial \tilde{S}_s} d\tilde{S}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \tilde{C}(s, \tilde{S}_s)}{\partial \tilde{S}_s^2} d\langle \tilde{S}, \tilde{S} \rangle_s \end{aligned}$$



y como

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t$$

tendremos

$$\begin{aligned} \tilde{C}(t, S_t) &= C(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s} \sigma \tilde{S}_s dW_s + \int_0^t \left( \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}(t, S_s)}{\partial \tilde{S}_s^2} \sigma^2 \tilde{S}_s^2 \right) ds \end{aligned}$$

ahora bien  $\tilde{C}(t, S_t)$  es una martingala de cuadrado integrable:

$$\tilde{C}(t, S_t) = E_{P^*}(e^{-rT} f(S_T) | \mathcal{F}_t)$$

y por tanto como la descomposición de un proceso de Itô es única tendremos:

$$\begin{aligned} \tilde{C}(t, S_t) &= C(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s} d\tilde{S}_s \\ \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}(t, S_s)}{\partial \tilde{S}_s^2} \sigma^2 \tilde{S}_s^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s} &= e^{-rt} \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial S_s} \frac{\partial S_s}{\partial \tilde{S}_s} \\ &= \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial S_s} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{C}(s, S_s)}{\partial \tilde{S}_s^2} &= \frac{\partial^2 C(s, S_s)}{\partial S_s^2} \frac{\partial S_s}{\partial \tilde{S}_s} \\ &= e^{rt} \frac{\partial^2 C(s, S_s)}{\partial S_s^2}, \end{aligned}$$

podemos escribir

$$\tilde{C}(t, S_t) = C(0, S_0) + \int_0^t \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial S_s} d\tilde{S}_s \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial C(s, S_s)}{\partial s} + r S_s \frac{\partial C(s, S_s)}{\partial S_s} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 C(t, S_s)}{\partial S_s^2} = r C(s, S_s). \quad (1.12)$$

De (1.11) tenemos una estrategia autofinanciada cuyo valor final es  $f(S_T)$  y tal que  $(H_t^0, H_t)$  vienen dados por

$$H_t = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t}$$

y

$$e^{rt} H_t^0 = C(t, S_t) - \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} S_t.$$

■

**Precio y cobertura de una opción de compra. Formula de Black-Scholes.**

Si tomamos  $h = (S_T - K)_+$ , tenemos

$$C(t, S_t) = S_t \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-) \quad (\text{fórmula de Black-Scholes})$$

con  $\Phi(x)$  la función de distribución de una normal estándar y donde

$$d_{\pm} = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

En efecto

$$\begin{aligned} C(t, S_t) &= E_{P^*}(e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)} E_{P^*}(S_T \mathbf{1}_{\{S_T > K\}} | \mathcal{F}_t) - K e^{-r(T-t)} E_{P^*}(\mathbf{1}_{\{S_T > K\}} | \mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)} S_t E_{P^*}\left(\frac{S_T}{S_t} \mathbf{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{S_t}\right\}}\right)_{x=S_t} - K e^{-r(T-t)} E_{P^*}(\mathbf{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{S_t}\right\}})_{x=S_t}, \end{aligned}$$

ahora bien

$$\begin{aligned} \frac{S_T}{S_t} &= \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right\} \\ &\stackrel{\text{Ley}}{=} \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}\right\} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} E_{P^*}(\mathbf{1}_{\left\{\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{S_t}\right\}}) &= P^*\left(\frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{S_t}\right) \\ &= P^*\left(\log \frac{S_T}{S_t} > \log \frac{K}{S_t}\right) \\ &= P^*\left(\frac{W_{T-t}}{\sqrt{(T-t)}} > \frac{\log \frac{K}{S_t} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\log \frac{S_t}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \\ &= \Phi(d_-) \quad (\text{después de substituir } x \text{ por } S_t) \end{aligned}$$

Por otra parte, si escribimos  $Y$  para indicar una variable normal estándar

$$\begin{aligned}
& e^{-r(T-t)} E_{P^*} \left( \frac{S_T}{S_t} \mathbf{1}_{\left\{ \frac{S_T}{S_t} > \frac{K}{x} \right\}} \right) \\
&= e^{-r(T-t)} E_{P^*} \left( \exp \left\{ \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) + \sigma W_{T-t} \right\} \mathbf{1}_{\left\{ \sigma W_{T-t} > \log \frac{K}{x} - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right\}} \right) \\
&= E_{P^*} \left( \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) + \sigma W_{T-t} \right\} \mathbf{1}_{\left\{ \sigma W_{T-t} > \log \frac{K}{x} - \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t) \right\}} \right) \\
&= E_{P^*} \left( \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) - \sigma \sqrt{(T-t)} Y \right\} \mathbf{1}_{\left\{ Y < \frac{\log \frac{K}{x} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}} \right\}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\frac{\log \frac{K}{x} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sigma^2 (T-t) - \sigma \sqrt{(T-t)} y - \frac{1}{2} y^2 \right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\frac{\log \frac{K}{x} + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\sigma \sqrt{(T-t)} + y)^2 \right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\frac{\log \frac{K}{x} + \left( r + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} u^2 \right\} du \\
&= \Phi(d_+) \quad (\text{después de substituir } x \text{ por } S_t)
\end{aligned}$$

De aquí

$$\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} = \Phi(d_+) := \Delta.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} &= \Phi(d_+) + S_t \frac{\partial \Phi(d_+)}{\partial S_t} - K e^{-r(T-t)} \frac{\partial \Phi(d_-)}{\partial S_t} \\
&= \Phi(d_+) + S_t \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{d_+^2}{2}} \frac{\partial d_+}{\partial S_t} \\
&\quad - K e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-\frac{d_-^2}{2}} \frac{\partial d_-}{\partial S_t}.
\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\frac{\partial d_{\pm}}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}},$$

por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S_t} &= \Phi(d_+) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{\partial d_+}{\partial S_t} \left( S_t e^{-\frac{d_+^2}{2}} - K e^{-r(T-t)} e^{-\frac{d_-^2}{2}} \right) \\
&= \Phi(d_+) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \frac{\partial d_+}{\partial S_t} S_t e^{-\frac{d_+^2}{2}} \left( 1 - \frac{K}{S_t} e^{-r(T-t)} e^{\frac{d_+^2}{2} - \frac{d_-^2}{2}} \right),
\end{aligned}$$

por último

$$d_+ = d_- + \sigma \sqrt{(T-t)}$$

de manera que

$$\begin{aligned} d_+^2 - d_-^2 &= (d_- + \sigma\sqrt{(T-t)})^2 - d_-^2 \\ &= 2d_- \sigma\sqrt{(T-t)} + \sigma^2(T-t) \\ &= 2 \log \frac{S_t}{K} + 2r(T-t) \end{aligned}$$

y por tanto

$$1 - \frac{K}{S_t} e^{-r(T-t)} e^{\frac{d_+^2}{2} - \frac{d_-^2}{2}} = 0.$$

### Análisis de la sensibilidad. Los griegos.

Sea  $C(t, S_t)$  la función de precio de una cartera basada en un sólo activo con riesgo ( $S_t$ ) (y bonos). Por razones prácticas es a menudo de vital importancia tener una idea de la sensibilidad de  $C$  con respecto a cambios en el valor de  $S_t$  (para medir el riesgo de nuestra cartera) y con respecto a cambios en los parámetros del modelo (para medir los efectos de una mala especificación del modelo). La notación estándar es:

- $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_t}$
- $\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}$
- $\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$
- $\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$
- $\mathcal{V} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$

Todas estas medidas de sensibilidad son conocidas como "los griegos". Incluye como vemos  $\mathcal{V}$  que se pronuncia "vega". Una cartera que no es sensible a pequeños cambios en alguno de los parámetros se dice que es "neutral": delta neutral, gamma neutral, ..

**Proposición 1.5.16** *En el modelo de Black-Scholes la cartera que replica un call con strike  $K$  y tiempo de madurez  $T$  tiene los siguientes griegos:*

- $\Delta = \Phi(d_+) > 0$
- $\Gamma = \frac{\phi(d_+)}{S_t \sigma \sqrt{(T-t)}} > 0$  (donde  $\phi$  es la densidad de una normal estándar)
- $\rho = K(T-t)e^{-r(T-t)}\Phi(d_+) > 0$
- $\Theta = -\frac{S_t \sigma}{2\sqrt{(T-t)}}\phi(d_+) - Kre^{-r(T-t)}\Phi(d_-) < 0$
- $\mathcal{V} = S_t \phi(d_+) \sqrt{(T-t)} > 0$

**Ejercicio 1.5.5** *Demostrar que  $\Theta = -\frac{S_t \sigma}{2\sqrt{(T-t)}}\phi(d_+) - Kre^{-r(T-t)}\Phi(d_-)$ .*

**Observación 1.5.9** *Nótese que la ecuación (1.12), puede escribir*

$$\Theta + rS_s \Delta + \frac{1}{2} \sigma^2 S_s^2 \Gamma = rC(s, S_s).$$

**Opciones exóticas**

No todas las opciones tienen un payoff  $h = f(S_T)$ . Así por ejemplo tenemos las opciones asiáticas con payoff

$$h = \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+$$

las opciones lookback,

$$(\text{"lookback call"}) h = S_T - S_*, \text{ donde } S_* = \min_{0 \leq t \leq T} S_t$$

$$(\text{"lookback put"}) h = S^* - S_T, \text{ donde } S^* = \max_{0 \leq t \leq T} S_t,$$

o las opciones con barrera

$$(\text{"down-and-out-call"}) h = (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{S_* \geq K\}}$$

$$(\text{"down-and-in-call"}) h = (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\{S_* \leq K\}}.$$

Para todas ellas necesitamos un teorema más general de replicación en el modelo de Black-Scholes.

**Teorema 1.5.4** *En el modelo de Black-Scholes cualquier opción con payoff  $h \geq 0$  y  $\mathcal{F}_T$ -medible que sea de cuadrado integrable bajo  $P^*$  es replicable y su valor viene dado por*

$$C_t = E_{P^*}(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t)$$

**Demostración.** Bajo  $P^*$

$$M_t := E_{P^*}(e^{-rT} h | \mathcal{F}_t), 0 \leq t \leq T$$

es una martingala de cuadrado integrable, entonces por el teorema de representación de martingalas brownianas existe un (único) proceso adaptado  $(Y_t)$  tal que

$$M_t = M_0 + \int_0^t Y_s dW_s$$

con

$$E_{P^*} \left( \int_0^T Y_s^2 ds \right) < \infty,$$

entonces podemos definir  $H_t$  con

$$H_t = \frac{Y_t}{\sigma \tilde{S}_t}$$

y tendremos

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s$$

esto es

$$\tilde{C}_t = C_0 + \int_0^t H_s d\tilde{S}_s,$$

con lo que la estrategia  $(H_t^0, H_t)$  con  $H_t^0 = C_t - H_t S_t$  es autofinanciada y replica  $h$ . Para ver que es admisible basta tener en cuenta que como  $h \geq 0$ ,  $C_t \geq 0$ . ■

**Ejemplo 1.5.6** (*Opciones asiáticas*) Consideremos una opción asiática con payoff

$$h = \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+,$$

por el teorema anterior  $C_t = E_{P^*}(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t)$ . Definamos

$$\varphi(t, x) = E_{P^*}\left(\left(\frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x\right)_+\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)} E_{P^*} \left( \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-r(T-t)} E_{P^*} \left( \left( \frac{1}{T} \int_t^T S_u du - \left( K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \right) \right)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-r(T-t)} S_t E_{P^*} \left( \left( \frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - \frac{K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du}{S_t} \right)_+ \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= e^{-r(T-t)} S_t \varphi(t, Z_t) \end{aligned}$$

donde  $Z_t = \frac{K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du}{S_t}$ . Es fácil ver que

$$dZ_t = \left( (\sigma^2 - r)Z_t - \frac{1}{T} \right) dt - \sigma Z_t dW_t.$$

En efecto, aplicando la fórmula de integración por partes y la fórmula de Itô:

$$\begin{aligned} dZ_t &= d\left(\frac{K}{S_t}\right) - \frac{1}{T S_t} d\left(\int_0^t S_u du\right) - d\left(\frac{1}{S_t}\right) \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \\ &= -\frac{K}{S_t^2} dS_t + \frac{K}{S_t^3} d\langle S_t \rangle - \frac{S_t}{T S_t} dt + \frac{1}{T} \frac{\int_0^t S_u du}{S_t^2} dS_t - \frac{1}{T} \frac{\int_0^t S_u du}{S_t^3} d\langle S_t \rangle, \end{aligned}$$

ahora bien como  $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$ , resulta que

$$\begin{aligned} dZ_t &= \left( -\frac{K}{S_t} r + \frac{K}{S_t} \sigma^2 + r \frac{\frac{1}{T} \int_0^t S_u du}{S_t} - \frac{\frac{1}{T} \int_0^t S_u du}{S_t} \sigma^2 - \frac{1}{T} \right) dt \\ &\quad + \left( -\frac{K}{S_t} \sigma + \frac{\frac{1}{T} \int_0^t S_u du}{S_t} \sigma \right) dW_t \\ &= \left( (\sigma^2 - r) Z_t - \frac{1}{T} \right) dt - \sigma Z_t dW_t. \end{aligned}$$

Then, we know that  $\tilde{C}_t = e^{-r(T-t)} \tilde{S}_t \varphi(t, Z_t)$ ,  $t \leq T$  is a martingale. Then if we assume that  $\varphi(t, x) \in C^{1,2}$  tendremos

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} dZ_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z_t^2} \sigma^2 Z_t^2 dt \\ &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \left( (\sigma^2 - r) Z_t - \frac{1}{T} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z_t^2} \sigma^2 Z_t^2 \right) dt \\ &\quad - \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \sigma Z_t dW_t, \end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned} d\tilde{C}_t &= r e^{-r(T-t)} \tilde{S}_t \varphi dt + e^{-r(T-t)} \varphi d\tilde{S}_t + e^{-r(T-t)} \tilde{S}_t d\varphi \\ &\quad + e^{-r(T-t)} d\langle \tilde{S}, \varphi \rangle_t \\ &= r e^{-r(T-t)} \tilde{S}_t \varphi dt + e^{-r(T-t)} \varphi d\tilde{S}_t + e^{-r(T-t)} \tilde{S}_t d\varphi \\ &\quad - e^{-r(T-t)} \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \sigma^2 \tilde{S}_t Z_t dt \\ &= e^{-r(T-t)} \left( \varphi - Z_t \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \right) d\tilde{S}_t \\ &\quad + r e^{-r(T-t)} \tilde{S}_t \varphi dt - e^{-r(T-t)} \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \sigma^2 \tilde{S}_t Z_t dt \\ &\quad + e^{-r(T-t)} \tilde{S}_t \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \left( (\sigma^2 - r) Z_t - \frac{1}{T} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z_t^2} \sigma^2 Z_t^2 \right) dt, \end{aligned}$$

igualando la parte que es martingala tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} d\tilde{C}_t &= e^{-r(T-t)} \left( \varphi - Z_t \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \right) d\tilde{S}_t \\ r\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \left( r Z_t + \frac{1}{T} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z_t^2} \sigma^2 Z_t^2 &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto la estrategia recubridora viene dada por  $(H_t^0, H_t)$  con  $H_t^0 = C_t - H_t S_t$  y

$$H_t = e^{-r(T-t)} \left( \varphi - Z_t \frac{\partial \varphi}{\partial Z_t} \right),$$

donde  $\varphi$  es solución de la ecuación en derivadas parciales

$$r\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \left( rx + \frac{1}{T} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \sigma^2 x^2 = 0 \quad (1.13)$$

con la condición de contorno  $\varphi(T, x) = x_-$  (parte negativa de  $x$ ). Esta ecuación se resuelve numéricamente.

**Ejercicio 1.5.6** Demostrar que el precio de una opción asiática con strike flotante (payoff =  $\left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - S_T \right)_+$ ) viene dado en el instante inicial por

$$C = e^{-rT} S_0 \varphi(0, 0)$$

donde  $\varphi$  es solución de la ecuación (1.13) con la condición de contorno  $\varphi(T, x) = (1+x)_-$

**Lema 1.5.2** Consideremos funciones escalonadas de la forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$$

con  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  y  $0 \leq t_0 < t_1 \dots < t_n \leq T$  y denotemos por  $\mathcal{J}$  dicho conjunto de funciones. Sea  $\mathcal{E}_T^f = \exp\{\int_0^T f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T f^2(s) ds\}$ ,  $f \in \mathcal{J}$ . Si  $Y \in L^2(\mathcal{F}_T, P)$  es ortogonal a  $\mathcal{E}_T^f$ ,  $f \in \mathcal{J}$  entonces es nula.

**Demostración.** Sea  $Y \geq 0$  de  $L^2(\mathcal{F}_T, P)$  ortogonal a  $\mathcal{E}_T^f$  sea  $\mathcal{G}_n := \sigma(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ , tendremos que

$$E(\exp\{\sum_{i=1}^n \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\} Y) = 0,$$

y

$$E(\exp\{\sum_{i=1}^n \lambda_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\} E(Y | \mathcal{G}_n)) = 0.$$

Sea  $X$  la aplicación

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega \mapsto X(\omega) = (B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega) - B_{t_1}(\omega), \dots, B_{t_n}(\omega) - B_{t_{n-1}}(\omega))$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\} E(Y | \mathcal{G}_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) dP^X(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

de manera que la transformada de Laplace de  $E(Y | \mathcal{G}_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) dP^X$  es cero y por tanto  $E(Y | \mathcal{G}_n)(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es idénticamente nula  $P^X$  c.s., y de aquí  $E(Y | \mathcal{G}_n)$  lo es  $P$  c.s., finalmente como esto es cierto para toda  $\mathcal{G}_n$  del tipo anterior resultará que  $Y$  es cero  $P$  c.s.. Por último si  $Y$  es cualquiera podemos descomponer  $Y = Y_+ - Y_-$  y llegaríamos a la conclusión de que  $Y_+ = Y_-$   $P$  c.s. por la unicidad de la transformada de Laplace de una medida. ■



**Proposición 1.5.17** *Para toda variable  $F \in L^2(\mathcal{F}_T, P)$  existe un proceso adaptado  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ , con  $E(\int_0^T Y_t^2 dt) < \infty$ , tal que*

$$F = E(F) + \int_0^T Y_t dB_t$$

**Demostración.** Supongamos que  $F - E(F)$  es ortogonal a  $\int_0^T Y_t dB_t$  cualquiera que sea  $(Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ , con  $E(\int_0^T Y_t^2 dt) < \infty$ , entonces si demostramos que  $F - E(F) = 0$   $P$  c.s. entonces ya está, ya que el espacio de Hilbert de variables centradas de  $L^2(\mathcal{F}_T, P)$  coincidirá con el espacio de Hilbert de variables  $\int_0^T Y_t dB_t$  con  $E(\int_0^T Y_t^2 dt) < \infty$ . Escribamos  $Z = F - E(F)$ , tenemos

$$E((F - E(F)) \int_0^T Y_t dB_t) = 0,$$

tomemos  $Y_t = \mathcal{E}_t^f f(t)$ , con las  $\mathcal{E}_t^f$  definidas anteriormente, tendremos

$$E((F - E(F)) \int_0^T \mathcal{E}_t^f f(t) dB_t) = 0$$

y también

$$E((F - E(F))(1 + \int_0^T \mathcal{E}_t^f f(t) dB_t)) = 0$$

ahora bien, por la fórmula de Itô

$$\mathcal{E}_T^f = 1 + \int_0^T \mathcal{E}_t^f f(t) dB_t,$$

de manera que

$$E((F - E(F))\mathcal{E}_T^f) = 0$$

y por el lema anterior  $F - E(F) = 0$   $P$  c.s. ■

**Teorema 1.5.5** *Toda martingala  $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$  de cuadrado integrable se puede escribir*

$$M_t = M_0 + \int_0^t Y_s dB_s, 0 \leq t \leq T$$

donde  $Y_s$  es un proceso adaptado con  $E(\int_0^T Y_t^2 dt) < \infty$ .

**Demostración.** Podemos escribir

$$M_t = E(M_T | \mathcal{F}_t)$$

y por lo anterior

$$M_T = E(M_T) + \int_0^T Y_s dB_s$$

entonces basta tomar esperanzas condicionadas. ■



## Capítulo 2

# Optimización de carteras

Consideraremos de nuevo un mercado a tiempo discreto definido en un cierto espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  finito:  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M\}$ ,  $P(\{\omega_i\}) > 0$ , para todo  $i$ .  $\mathcal{F}$  será partes de  $\Omega$ , y consideraremos una filtración  $(\mathcal{F}_n)$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ . El horizonte  $N$ , corresponderá al instante final de inversión.

El mercado consistirá en  $(d + 1)$  activos financieros cuyos precios en el instante  $n$  estarán dados por variables no-negativas  $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$  que son medibles respecto a  $\mathcal{F}_n$ .

El stock con superíndice cero corresponde a un activo sin riesgo (dinero en una cuenta bancaria con tasa de interés  $r$ ), supondremos que  $S_0^0 = 1$ .

$$S_{n+1}^0 = S_n^0(1 + r) = (1 + r)^{n+1}.$$

Una estrategia de inversión será una cartera admisible  $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  en  $\mathbb{R}^{d+1}$ .  $\phi_n^i$  indica el número de acciones del tipo  $i$ -ésimo en la cartera de valores, en el instante  $n$ -ésimo, denotaremos por  $\mathcal{A}$  el conjunto de carteras autofinanciadas.

Fijaremos una *función de utilidad*  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  que supondremos diferenciable, cóncava y estrictamente creciente. Ejemplos de funciones de utilidad son:

$$\begin{cases} u(x) = \log x \\ u(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma} & \gamma < 1, \gamma \neq 0 \\ u(x) = 1 - e^{-x} \end{cases}$$

Queremos resolver el siguiente problema de optimización:

$$\max\{E(u(V_N(\phi))), \phi \in \mathcal{A}, V_0(\phi) = x\}, \quad (2.1)$$

donde  $V_i(\phi)$  representa el valor de la cartera en el instante  $i$ -ésimo.

**Proposición 2.0.18** *Si existe una solución al problema anterior entonces el mercado es viable.*

**Demostración.** Sea  $\phi$  una solución de nuestro problema y  $\psi$  un arbitraje, consideremos la cartera  $\theta = \phi + \psi$ . Por definición de arbitraje

$$V_0(\theta) = V_0(\phi) + V_0(\psi) = V_0(\phi) = x$$

y

$$V_N(\theta) = V_N(\phi) + V_N(\psi) \geq V_N(\phi)$$

con algún  $\omega_i$  tal que

$$V_N(\theta)(\omega_i) = V_N(\phi)(\omega_i) + V_N(\psi)(\omega_i) > V_N(\phi)(\omega_i),$$

con lo que  $\phi$  no sería una solución. ■

**Proposición 2.0.19** *Supongamos que  $\phi$  es una solución de nuestro problema de optimización (2.1), entonces*

$$P^*(\omega) = \frac{u'(V_N(\phi))(\omega)}{E(u'(V_N(\phi)))} P(\omega)$$

es una probabilidad neutral.

**Demostración.** Como  $u$  es estrictamente creciente  $P^*$  y  $P$  son equivalentes. Consideremos las estrategias autofinanciadas definidas por  $((\hat{\phi}_n^1, \hat{\phi}_n^2, \dots, \hat{\phi}_n^d))(y)_{0 \leq n \leq N}$  que coinciden con  $((\phi_n^1, \phi_n^2, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  salvo que en el periodo  $(n-1, n]$  en el activo con riesgo  $i$ -ésimo

$$\hat{\phi}_n^i(y) = \phi_n^i + y\alpha$$

donde  $y \in \mathbb{R}$  y  $\alpha$  es  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible, la función

$$g(y) = E(u(V_N(\hat{\phi}(y))))$$

tiene un máximo en  $y = 0$ , donde

$$V_N(\phi) = (1+r)^N \left( x + \sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta \tilde{S}_n \right).$$

De manera que

$$0 = g'(0) = E(u'(V_N(\phi)) \Delta \tilde{S}_n^i \alpha),$$

y como esto es cierto para toda variable  $\alpha$ ,  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible, resulta entonces que

$$E(u'(V_N(\phi)) \Delta \tilde{S}_n^i | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

Por otro lado sabemos, (por la "formula de Bayes" (1.8)), que

$$E_{P^*}(\Delta \tilde{S}_n^i | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{E(u'(V_N(\phi)) | \mathcal{F}_{n-1})} E(\Delta \tilde{S}_n^i u'(V_N(\phi)) | \mathcal{F}_{n-1}),$$

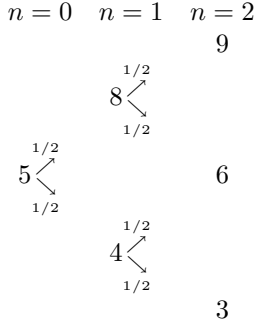
y por tanto

$$E_{P^*}(\Delta \tilde{S}_n^i | \mathcal{F}_{n-1}) = 0.$$

■

Podemos intentar resolver el problema como un problema de optimización en varias variables. Veamos el siguiente ejemplo

**Ejemplo 2.0.7** Consideremos un mercado con dos instantes de negociación, donde  $r = 0$ , y un sólo stock con riesgo que evoluciona:



consideremos la utilidad exponencial  $u(x) = 1 - e^{-x}$ , el objetivo es maximizar

$$(E(1 - e^{-(x+\phi_1\Delta S_1+\phi_2(S_1)\Delta S_2)})$$

que depende de tres variables  $\phi_1, \phi_{28} := \phi_2(8), \phi_{24} := \phi_2(4)$ . Entonces, como

$$\Delta S_1 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

y

$$\Delta S_2 = \begin{cases} (si S_1 = 8) \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \\ ( si S_1 = 4) \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \end{cases},$$

resultará

$$\begin{aligned}
 & E(1 - e^{-(x+\phi_1\Delta S_1+\phi_2(S_1)\Delta S_2)}) \\
 &= 1 - \frac{1}{4} \{ e^{-x-3\phi_1-\phi_{28}} + e^{-x-3\phi_1+2\phi_{28}} \\
 &+ e^{-x+\phi_1-2\phi_{24}} + e^{-x+\phi_1+\phi_{24}} \}.
 \end{aligned}$$

Busquemos los puntos críticos. Si derivamos con respecto a  $\phi_{24}$  e igualamos a cero obtenemos

$$-2e^{-2\phi_{24}} + e^{\phi_{24}} = 0$$

con lo que

$$\phi_{24} = \frac{1}{3} \log 2,$$

la derivada segunda es

$$-\frac{1}{4}e^{-x+\phi_1} (4e^{-2\phi_{24}} + e^{\phi_{24}}) < 0$$

con lo que corresponde a un máximo. Análogamente, si derivamos con respecto a  $\phi_{28}$ , obtenemos

$$\phi_{28} = -\frac{1}{3} \log 2,$$

substituyendo estas expresiones en la función objetivo obtenemos

$$\phi_1 = \frac{1}{4} \log 3$$

**Observación 2.0.10** Notemos que si en este mercado tratamos de maximizar la riqueza, la función objetivo sería

$$E(x + \phi_1 \Delta S_1 + \phi_2(S_1) \Delta S_2) = x + \phi_1 - \frac{1}{4} \phi_{28} + \frac{1}{4} \phi_{24},$$

la "solución" sería  $\phi_1 = \infty, \phi_{28} = -\infty, \phi_{24} = \infty!!$ . Notemos también, por la proposición anterior, que si  $u(x) = x$  y tenemos una solución al problema de optimización, entonces  $P^* = P$  y esto en general no ocurrirá.

Resulta obvio que el procedimiento de optimización utilizado se complica exponencialmente con el número de pasos. Vamos a considerar dos métodos para resolver el problema. En el ejemplo anterior hemos simplificado el problema llevando a cabo una "maximización iterativa", basándonos en el hecho evidente de que:

$$\max_{\phi_1, \phi_{28}, \phi_{24}} F(\phi_1, \phi_{28}, \phi_{24}) = \max_{\phi_1} (\max_{\phi_{28}} (\max_{\phi_{24}} F(\phi_1, \phi_{28}, \phi_{24}))),$$

esta es la idea que subyace en el "método de de programación dinámica".

## 2.1 Programación dinámica

Definamos para  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

$$U_n(y) = \max\{E(u(V_N(\phi)) | \mathcal{F}_n), \phi \in \mathcal{A}_n^y\}$$

donde  $\mathcal{A}_n^y$  son las carteras autofinanciadas construidas a partir del instante  $n$  y cuyo valor en  $n$  es  $y$ . Definimos  $U_N(y) = u(y)$ . Se le suele llamar "proceso valor óptimo". Notemos que puesto que el valor de toda cartera autofinanciada depende de su valor inicial y de  $((\phi_n^1, \phi_n^2, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$ , sucesión previsible:

$$V_N(\phi) = (1+r)^N \left( \frac{y}{(1+r)^n} + \sum_{j=n+1}^N \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j \right)$$

tendremos que

$$U_n(y) = \max\{E(u(V_N(\phi)) | \mathcal{F}_n), ((\phi_j^1, \phi_j^2, \dots, \phi_j^d))_{n+1 \leq j \leq N} \text{ previsible}, V_n = y\}$$

**Proposición 2.1.1** ("Ecuación funcional de programación dinámica")

$$\begin{aligned} U_n(y) &= \max_{\phi \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible}} \{E(U_{n+1}(V_{n+1}(\phi)) | \mathcal{F}_n), V_n = y\} \\ &= \max_{\phi \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible}} E(U_{n+1}((1+r)^{n+1}(\frac{y}{(1+r)^n} + \phi \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1})) | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

**Demostración.** Por definición,  $U_N(y) = u(y)$ , y por tanto

$$\begin{aligned} U_{N-1}(y) &= \max\{E(u(V_N(\phi)) | \mathcal{F}_{N-1}), ((\phi_j^1, \phi_j^2, \dots, \phi_j^d))_{j=N} \text{ previsible}, V_{N-1} = y\} \\ &= \max\{E(U_N(V_N(\phi)) | \mathcal{F}_{N-1}), ((\phi_j^1, \phi_j^2, \dots, \phi_j^d))_{j=N} \text{ previsible}, V_{N-1} = y\}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} U_n(y) &= \max_{\substack{\phi \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible,} \\ (\varphi_j) \text{ previsible}}} E(u((1+r)^N(\frac{y}{(1+r)^n} + \phi \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} + \sum_{j=n+2}^N \varphi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j)) | \mathcal{F}_n) \\ &= \max_{\phi \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible,}} \left( \max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} E(u((1+r)^N(\frac{y}{(1+r)^n} + \phi \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} + \sum_{j=n+2}^N \varphi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j)) | \mathcal{F}_n) \right) \\ &= \max_{\phi \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible,}} \left( \max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} E(E(u((1+r)^N(\frac{y}{(1+r)^n} + \phi \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} + \sum_{j=n+2}^N \varphi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j)) | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \right) \\ &= \max_{\phi \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible,}} \left( E(\max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} E(u((1+r)^N(\frac{y}{(1+r)^n} + \phi \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} + \sum_{j=n+2}^N \varphi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j)) | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \right) \\ &= \max_{\phi \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible,}} E(U_{n+1}((1+r)^{n+1}(\frac{y}{(1+r)^n} + \phi \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1})) | \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

En la cuarta igualdad utilizamos el hecho de que si  $Z$  es una variable aleatoria que depende de  $(\varphi_j)$

$$\max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} E(Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n) = E(\max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n),$$

en efecto, para toda  $(\varphi_j)$  previsible

$$E(\max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n) \geq E(Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n)$$

de manera que

$$E(\max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n) \geq \max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} E(Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n).$$

Sea  $(\psi_j)$  previsible para la cual

$$E(\max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n) = E(Z((\psi_j)) | \mathcal{F}_n),$$

obviamente

$$E(\max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n) = E(Z((\psi_j)) | \mathcal{F}_n) \leq \max_{(\varphi_j) \text{ previsible}} E(Z((\varphi_j)) | \mathcal{F}_n)$$

■

El método consiste entonces en utilizar esta propiedad para resolver el problema de manera recursiva, calculando  $U_{N-1}$ , de aquí  $U_{N-2}$ , etc. Una ventaja del método es que obtenemos de golpe una solución para todos los posibles valores de la riqueza inicial  $y$ .

**Ejemplo 2.1.1** Consideremos el ejemplo anterior,

$$U_1(y) = \max_{\phi_{28}} E(1 - e^{-(y+\phi_{28}\Delta S_2)} | S_1 = 8), \text{ si } S_1 = 8$$

$$U_1(y) = \max_{\phi_{24}} E(1 - e^{-(y+\phi_{24}\Delta S_2)} | S_1 = 4), \text{ si } S_1 = 4.$$

Como

$$\begin{aligned} & E\left(1 - e^{-(y+\phi_{28}\Delta S_2)} | S_1 = 8\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(e^{-(y+\phi_{28})} + e^{-(y-2\phi_{28})}\right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & E\left(1 - e^{-(y+\phi_{24}\Delta S_2)} | S_1 = 4\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(e^{-(y-\phi_{24})} + e^{-(y+2\phi_{24})}\right) \end{aligned}$$

con lo que el máximo se obtiene para

$$\phi_{28} = -\frac{1}{3} \log 2, \phi_{24} = \frac{1}{3} \log 2.$$

Entonces, independientemente del valor de  $S_1$ ,

$$U_1(y) = 1 - \frac{3}{2} 2^{2/3} e^{-y}.$$

Ahora

$$\begin{aligned} U_0(y) &= \max_{\phi_1} E\left(1 - \frac{3}{2} 2^{2/3} e^{-(y+\phi_1\Delta S_1)}\right) \\ &= \max_{\phi_1} \left(1 - \frac{3}{4} 2^{2/3} e^{-y} (e^{-3\phi_1} + e^{\phi_1})\right) \end{aligned}$$

de donde el valor máximo se alcanza para

$$\phi_1 = \frac{1}{4} \log 3$$

## 2.2 Método de martingala

Para poder aplicar el método se requiere que el mercado sea completo. Dada una riqueza inicial  $x$ , denotemos  $V_x$  el conjunto de variables aleatorias que se pueden replicar con una riqueza inicial  $x$ . El método consiste en descomponer el problema en dos pasos:



1. Encontramos primero la riqueza óptima,  $\hat{Y}$ , esto es

$$E(u(\hat{Y})) = \max_{Y \in V_x} E(u(Y)).$$

2. Buscamos la cartera autofinanciada  $\phi$  que replique  $\hat{Y}$ .

Como el mercado es completo  $Y \in V_x$  equivale a

$$E_{P^*} \left( \frac{Y}{(1+r)^N} \right) = x,$$

por tanto

$$\max_{Y \in V_x} E(u(Y)) = \max_Y \{u(Y), E_{P^*} \left( \frac{Y}{(1+r)^N} \right) = x\}.$$

Se trata por tanto de un máximo con restricciones y podemos aplicar el método de multiplicadores de lagrange para resolverlo. El lagrangiano de nuestro problema será:

$$F(Y, \lambda) := E(u(Y)) - \lambda \left( E_{P^*} \left( \frac{Y}{(1+r)^N} \right) - x \right).$$

Ahora bien

$$F(Y, \lambda) = E \left( u(Y) - \lambda \left( \frac{YL}{(1+r)^N} - x \right) \right)$$

donde  $L = \frac{dP^*}{dP}$ . Podemos ahora tratar de maximizar  $u(Y) - \lambda \left( \frac{YL}{(1+r)^N} - x \right)$  lo que nos conduce a las condiciones de extremo

$$\begin{aligned} u'(Y) &= \frac{\lambda L}{(1+r)^N} \\ x &= E \left( \frac{YL}{(1+r)^N} \right) \end{aligned}$$

esto es, denotando  $I$  la función inversa de  $u'$ ,

$$\begin{aligned} Y &= I \left( \frac{\lambda L}{(1+r)^N} \right) \\ x &= E \left( \frac{I \left( \frac{\lambda L}{(1+r)^N} \right) L}{(1+r)^N} \right). \end{aligned}$$

La segunda ecuación permite eliminar  $\lambda$  y obtener  $Y$  de la primera ecuación substituyendo el valor de  $\lambda$  encontrado. Así obtenemos la riqueza óptima (después de comprobar que se trata de un máximo) y después se buscaría la cartera que replica dicha riqueza óptima y que sabemos que existe ya que el mercado es completo.

**Ejemplo 2.2.1** Si consideramos la utilidad logarítmica  $u(x) = \log x$ , tenemos  $u'(x) = \frac{1}{x}$  con lo que  $I(y) = \frac{1}{y}$

$$Y = \frac{(1+r)^N}{\lambda L},$$

la condición sobre  $\lambda$  nos da  $\lambda = \frac{1}{x}$  con lo que la riqueza óptima correspondiente a una riqueza inicial  $x$  viene dada por

$$Y = \frac{x(1+r)^N}{L}$$

**Ejemplo 2.2.2** Si  $u(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}$ , tenemos  $u'(x) = x^{\gamma-1}$  e  $I(y) = y^{\frac{1}{\gamma-1}}$  por tanto

$$Y = \left( \frac{\lambda L}{(1+r)^N} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

la condición sobre  $\lambda$  da

$$x = E \left( \frac{\left( \frac{\lambda L}{(1+r)^N} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} L}{(1+r)^N} \right)$$

de manera que

$$\lambda^{\frac{1}{\gamma-1}} = x \left( E((L(1+r)^{-N})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}) \right)^{-1}$$

con lo que

$$Y = \frac{x(L(1+r)^{-N})^{\frac{1}{\gamma-1}}}{E((L(1+r)^{-N})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}})}$$

**Ejemplo 2.2.3** Si  $u(x) = 1 - e^{-x}$ ,  $u'(x) = e^{-x}$ ,  $I(y) = -\log y$ . Por tanto

$$Y = \log \frac{(1+r)^N}{\lambda L}.$$

La condición sobre  $\lambda$  nos da

$$x = E \left( \frac{\log \frac{(1+r)^N}{\lambda L}}{(1+r)^N} L \right),$$

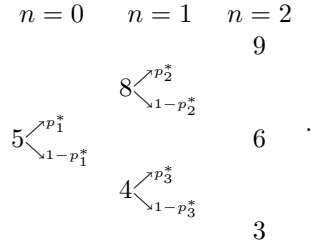
por tanto

$$\log \frac{(1+r)^N}{\lambda} = x(1+r)^N + E(L \log L)$$

con lo que

$$Y = x(1+r)^N - \log L + E(L \log L)$$

**Ejemplo 2.2.4** Si continuamos con el ejemplo anterior, ya vimos en el ejercicio (1.2.3), que el mercado era completo ya que tenemos una única probabilidad neutral,  $P^*$  tal que  $p_1^* = 1/4, p_2^* = 2/3$  y  $p_3^* = 1/3$ , en el esquema de evolución:



Escribamos  $\omega_1$  la trayectoria "589",  $\omega_2$  la trayectoria "586",  $\omega_3$  la trayectoria "546" y  $\omega_4$  la trayectoria "543". Entonces

$$\begin{aligned}
 L(\omega_1) &= \frac{P^*(\omega_1)}{P(\omega_1)} = \frac{2}{3}, L(\omega_2) = \frac{P^*(\omega_2)}{P(\omega_2)} = \frac{1}{3} \\
 L(\omega_3) &= \frac{P^*(\omega_3)}{P(\omega_3)} = 1, L(\omega_4) = \frac{P^*(\omega_4)}{P(\omega_4)} = 2.
 \end{aligned}$$

Por otro lado  $u(x) = 1 - e^{-x}$  e  $I(x) = -\log x$  con lo que la riqueza óptima viene dada por

$$Y = -\log(\lambda L) = -\log \lambda - \log L \text{ con } E_{P^*}(Y) = x$$

de manera que

$$Y = x - \log L - E(L \log L)$$

esto es

$$\begin{aligned}
 Y(\omega_1) &= x - \log \frac{2}{3} - E(L \log L) \\
 Y(\omega_2) &= x - \log \frac{1}{3} - E(L \log L) \\
 Y(\omega_3) &= x - E(L \log L) \\
 Y(\omega_4) &= x - \log 2 - E(L \log L)
 \end{aligned}$$

ahora tenemos que hallar la cartera que replica esta riqueza ("payoff"). Entonces, utilizando la misma notación que antes

$$\begin{aligned}
 \phi_{28}^0 + \phi_{28} S_2(\omega_1) &= Y(\omega_1) \\
 \phi_{28}^0 + \phi_{28} S_2(\omega_2) &= Y(\omega_2)
 \end{aligned}$$

con lo que

$$\phi_{28} = \frac{Y(\omega_1) - Y(\omega_2)}{S_2(\omega_1) - S_2(\omega_2)} = -\frac{1}{3} \log 2,$$

análogamente

$$\phi_{24} = \frac{Y(\omega_3) - Y(\omega_4)}{S_2(\omega_3) - S_2(\omega_4)} = \frac{1}{3} \log 2.$$

Ahora, la cartera en  $n = 1$  vale

$$\begin{aligned} V_1(\omega_1) &= V_1(\omega_2) = Y(\omega_1) - \phi_{28}(S_2(\omega_1) - S_1(\omega_1)) \\ &= x - \log \frac{2}{3} - E_{P^*}(L) + \frac{1}{3} \log 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1(\omega_3) &= V_1(\omega_4) = Y(\omega_3) - \phi_{28}(S_2(\omega_3) - S_1(\omega_3)) \\ &= x - E_{P^*}(L) - \frac{2}{3} \log 2, \end{aligned}$$

finalmente

$$\phi_1 = \frac{V_1(\omega_1) - V_1(\omega_3)}{S_1(\omega_1) - S_2(\omega_3)} = \frac{1}{4} \log 3$$

**Observación 2.2.1** El método de martingala también se puede derivar de la proposición (2.0.19). Supongamos que el modelo es completo y sea  $P^*$  la probabilidad neutral, entonces tenemos

$$\frac{P^*(\omega)}{P(\omega)} = \frac{u'(V_N(\phi))(\omega)}{E(u'(V_N(\phi)))},$$

donde  $V_N(\phi)$  es la riqueza terminal óptima correspondiente a la estrategia óptima  $\phi$ . Por tanto

$$V_N(\phi) = I(E(u'(V_N(\phi))) \frac{P^*(\omega)}{P(\omega)})$$

con  $E(u'(V_N(\phi)))$  tal que

$$E_{P^*} \left( \frac{V_N(\phi)}{(1+r)^N} \right) = x.$$

### 2.2.1 Optimización de carteras en el modelo de Cox-Ross-Rubinstein (CRR).

Consideremos la utilidad logarítmica en el modelo CRR siguiente:

$$\begin{array}{ccc} n = 0 & n = 1 & n = 2, \dots \\ & & x(1+b) \begin{array}{l} \nearrow^p \\ \searrow_{1-p} \end{array} \\ & x(1+b) \begin{array}{l} \nearrow^p \\ \searrow_{1-p} \end{array} & x(1+b)(1+a) \begin{array}{l} \nearrow^p \\ \searrow_{1-p} \end{array} \\ x \begin{array}{l} \nearrow^p \\ \searrow_{1-p} \end{array} & x(1+a) \begin{array}{l} \nearrow^p \\ \searrow_{1-p} \end{array} & x(1+a)^2 \begin{array}{l} \nearrow^p \\ \searrow_{1-p} \end{array} \end{array} .$$

Sabemos que la probabilidad neutral corresponde a tomar en cada paso una probabilidad  $p^*$ , en lugar de  $p$ , dada por

$$p^* = \frac{r - a}{b - a},$$

de esta manera

$$L(\omega) = \frac{P^*(\omega)}{P(\omega)} = \left(\frac{p^*}{p}\right)^{U_N(\omega)} \left(\frac{1-p^*}{1-p}\right)^{N-U_N(\omega)},$$

donde  $U_N$  representa el número total de subidas en la trayectoria hasta el instante  $N$ . Entonces la riqueza óptima vendrá dada por

$$Y = \frac{x(1+r)^N}{L} = x(1+r)^N \left(\frac{p}{p^*}\right)^{U_N} \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{N-U_N}$$

Ahora queremos encontrar la cartera autofinanciada cuyo valor final  $V_N = Y$ . Tenemos que (con la notación habitual)

$$\phi_N^1 = \frac{V_N^u - V_N^d}{S_{N-1}(b-a)}$$

y con lo que

$$\begin{aligned} \phi_N^1 S_{N-1} &= \frac{V_N^u - V_N^d}{b-a} \\ &= \frac{x(1+r)^N}{b-a} \left(\frac{p}{p^*}\right)^{U_{N-1}} \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{N-1-U_{N-1}} \left(\frac{p}{p^*} - \frac{1-p}{1-p^*}\right) \\ &= \frac{x(1+r)^N}{b-a} \left(\frac{p}{p^*}\right)^{U_{N-1}} \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{N-1-U_{N-1}} \frac{p-p^*}{p^*(1-p^*)} \end{aligned}$$

Por otro la cartera que replica  $Y$  en  $N-1$  vale

$$\begin{aligned} V_{N-1} &= E_{P^*} \left( \frac{Y}{1+r} \mid \mathcal{F}_{N-1} \right) \\ &= x(1+r)^{N-1} \left(\frac{p}{p^*}\right)^{U_{N-1}} \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{N-1-U_{N-1}} \left(\frac{p}{p^*} p^* + \frac{1-p}{1-p^*} (1-p^*)\right) \\ &= x(1+r)^{N-1} \left(\frac{p}{p^*}\right)^{U_{N-1}} \left(\frac{1-p}{1-p^*}\right)^{N-1-U_{N-1}}, \end{aligned}$$

de manera que

$$\frac{\phi_N^1 S_{N-1}}{V_{N-1}} = \frac{(1+r)(p-p^*)}{p^*(1-p^*)(b-a)}.$$

Esta cantidad corresponde a la fracción de riqueza invertida en el activo con riesgo y que como se ve no depende de  $N$ , un argumento de inducción permite demostrar que

$$\frac{\phi_N^1 S_{N-1}}{V_{N-1}} = \frac{\phi_{N-1}^1 S_{N-2}}{V_{N-2}} = \dots = \frac{\phi_1^1 S_0}{x}.$$

### 2.3 Consumo óptimo

Un proceso de consumo lo definiremos como un proceso adaptado no negativo  $C = (C_i)_{0 \leq i \leq N}$ . Un plan de consumo-inversión consistirá en un par  $(C, \phi)$  donde  $C$  es un proceso de consumo y  $\phi$  una estrategia de inversión autofinanciada. Supondremos una función de utilidad  $u$  que medirá la utilidad del consumo. A partir de una riqueza inicial  $\nu$ , un plan de consumo-inversión se dirá que es autofinanciado si no se añade o extrae dinero de la cartera, excepto lo que se consume. Como siempre escribiremos

$$V_n = \phi_n \cdot S_n = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 + \dots + \phi_n^d S_n^d,$$

entonces si la estrategia es autofinanciada

$$\phi_n \cdot S_n = C_n + \phi_{n+1} \cdot S_n,$$

esto es

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n \\ &= \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_{n+1} \cdot S_n - C_n \\ &= \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} - S_n) - C_n \\ &= \phi_{n+1} \cdot \Delta S_{n+1} - C_n, \end{aligned}$$

y por tanto

$$V_N = \nu + \sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta S_n - \sum_{n=0}^{N-1} C_n$$

análogamente, con la notación habitual para los valores actualizados, tenemos que

$$\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \tilde{C}_n + \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n,$$

y

$$\tilde{V}_{n+1} - \tilde{V}_n = \phi_{n+1} \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} - \tilde{C}_n.$$

Finalmente

$$\tilde{V}_N = \nu + \sum_{n=1}^N \phi_n \cdot \Delta \tilde{S}_n - \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{C}_n.$$

Diremos que una estrategia de consumo consumo-inversión  $(C, \phi)$  es admisible, escribiremos  $(C, \phi) \in \mathcal{A}$ , si es autofinanciada y  $C_N \leq V_N$ . El problema de consumo óptimo es resolver:

$$\max_{\substack{(C, \phi) \in \mathcal{A} \\ V_0 = \nu}} E\left(\sum_{n=0}^N \alpha^n u(C_n)\right)$$

donde  $0 < \alpha \leq 1$  (permite controlar la dependencia de la función de utilidad con respecto al tiempo).

**Proposición 2.3.1** Si  $(C_n)_{0 \leq n \leq N}$  es un proceso de consumo óptimo entonces la probabilidad

$$P^*(\omega) = \frac{u'(C_N)}{E(u'(C_N))} P^*(\omega)$$

es una probabilidad neutral

**Demostración.** Notemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{(C, \phi) \in \mathcal{A} \\ V_0 = \nu}} E\left(\sum_{n=0}^N \alpha^n u(C_n)\right) \\ &= \max_{\phi \in \mathcal{A}} E\left(u(\nu - \phi_1 S_0) + \sum_{n=1}^{N-1} \alpha^n u((1+r)^n (\phi_n - \phi_{n+1}) \cdot \tilde{S}_n)\right. \\ & \quad \left. + \alpha^N u((1+r)^N \phi_N \cdot \tilde{S}_N)\right) \\ &:= \max_{\phi \in \mathcal{A}} F(\phi) \end{aligned}$$

Entonces siguiendo la misma línea argumental que en la proposición (2.0.19), si consideramos las estrategias admisibles definidas por  $((\hat{\phi}_n^0, \hat{\phi}_n^1, \dots, \hat{\phi}_n^d))(y)_{0 \leq n \leq N}$  que coinciden con  $((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0 \leq n \leq N}$  salvo que en el periodo  $(n-1, n]$  en el activo con riesgo  $i$ -ésimo

$$\hat{\phi}_n^i(y) = \phi_n^i + y\theta$$

donde  $y \in \mathbb{R}$  y  $\theta$  es  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible, la función

$$g(y) = F(\hat{\phi}(y))$$

tiene un máximo en  $y = 0$ . Si derivamos en  $y = 0$  obtenemos

$$E(\theta(\alpha^n(1+r)^n u'(C_n) \tilde{S}_n^i - \alpha^{n-1}(1+r)^{n-1} u'(C_{n-1}) \tilde{S}_{n-1}^i)) = 0,$$

como esto ocurre para cualquier  $\theta$ ,  $\mathcal{F}_{n-1}$ -medible, resultará que

$$E(\alpha^n(1+r)^n u'(C_n) \tilde{S}_n^i | \mathcal{F}_{n-1}) = \alpha^{n-1}(1+r)^{n-1} u'(C_{n-1}) \tilde{S}_{n-1}^i,$$

con lo que  $(\alpha^n u'(C_n) \tilde{S}_n^i)_{0 \leq n \leq N}$  es una martingala, en particular si tomamos  $i = 0$  resultará que  $(\alpha^n u'(C_n) (1+r)^n)$  es una martingala. Si aplicamos ahora

la formula de Bayes (1.8)

$$\begin{aligned}
E_{P^*}(\tilde{S}_n^i | \mathcal{F}_{n-1}) &= \frac{E(\tilde{S}_n^i E(u'(C_N) | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1})}{E(u'(C_N) | \mathcal{F}_{n-1})} \\
&= \frac{E(\tilde{S}_n^i E(\alpha^N (1+r)^N u'(C_N) | \mathcal{F}_n) | \mathcal{F}_{n-1})}{E(\alpha^N (1+r)^N u'(C_N) | \mathcal{F}_{n-1})} \\
&= \frac{E(\tilde{S}_n^i \alpha^n (1+r)^n u'(C_n) | \mathcal{F}_{n-1})}{\alpha^{n-1} (1+r)^{n-1} u'(C_{n-1})} \\
&= \frac{E(S_n^i \alpha^n u'(C_n) | \mathcal{F}_{n-1})}{\alpha^{n-1} (1+r)^{n-1} u'(C_{n-1})} \\
&= \frac{S_{n-1}^i \alpha^{n-1} u'(C_{n-1})}{\alpha^{n-1} (1+r)^{n-1} u'(C_{n-1})} \\
&= \tilde{S}_{n-1}^i
\end{aligned}$$

■

Vamos a resolver el problema de optimización por los métodos habituales.

### 2.3.1 Método de programación dinámica en el problema de consumo óptimo

Definamos

$$\begin{aligned}
&U_n(y) \\
&= \max \left\{ E \left( \sum_{j=n}^N \alpha^{j-n} u(C_j) | \mathcal{F}_n \right), C_n \geq 0 \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible}, (C_j, \phi_j)_{n+1 \leq j \leq N} \in \mathcal{A}, V_n = y \right\}
\end{aligned}$$

para  $n = 0, 1, \dots, N$ . Notemos que para  $U_N(y) = u(y)$ , ya que a mayor consumo mayor utilidad.

**Proposición 2.3.2** Para  $n = 0, 1, \dots, N - 1$

$$U_n(y) = \max_{C_n, \phi} (u(C_n) + \alpha E(U_{n+1}((1+r)^{n+1} (\frac{y}{(1+r)^n} + \phi \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} - \tilde{C}_n)) | \mathcal{F}_n))$$



**Demostración.** Suponemos  $(C_j, \phi_j)_{n+1 \leq j \leq N} \in \mathcal{A}$  y que  $C_n \geq 0$   $\mathcal{F}_n$ -medible,

$$\begin{aligned}
U_n(y) &= \max_{\substack{(C_j, \phi_j)_{n+1 \leq j \leq N} \\ C_n, V_n = y}} E\left(\sum_{j=n}^N \alpha^{j-n} u(C_j) \mid \mathcal{F}_n\right) \\
&= \max_{\substack{(C_j, \phi_j)_{n+1 \leq j \leq N} \\ C_n, V_n = y}} E(u(C_n) + \alpha \sum_{j=n+1}^N \alpha^{j-n-1} u(C_j) \mid \mathcal{F}_n) \\
&= \max_{\substack{C_n, \phi_{n+1} \\ V_n = y}} \left( \max_{\substack{(C_j, \phi_j)_{n+2 \leq j \leq N} \\ C_{n+1}}} E(u(C_n) + \alpha \sum_{j=n+1}^N \alpha^{j-n-1} u(C_j) \mid \mathcal{F}_n) \right) \\
&= \max_{\substack{C_n, \phi_{n+1} \\ V_0 = y}} \left( u(C_n) + \alpha \max_{\substack{(C_j, \phi_j)_{n+1 \leq j \leq N} \\ C_{n+1}}} E\left(\sum_{j=n+1}^N \alpha^{j-n-1} u(C_j) \mid \mathcal{F}_n\right) \right) \\
&= \max_{\substack{C_n, \phi_{n+1} \\ V_n = y}} \left( u(C_n) + \alpha \max_{\substack{(C_j, \phi_j)_{n+2 \leq j \leq N} \\ C_{n+1}}} E\left(E\left(\sum_{j=n+1}^N \alpha^{j-n-1} u(C_j) \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \right) \\
&= \max_{\substack{C_n, \phi_{n+1} \\ V_n = y}} \left( u(C_n) + \alpha E\left(\max_{\substack{C_{n+1}, (C_j, \phi_j)_{n+2 \leq j \leq N} \\ \tilde{V}_{n+1} = \frac{y}{(1+r)^n} + \phi_{n+1} \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} - \tilde{C}_n}} \left(E\left(\sum_{j=n+1}^N \alpha^{j-n-1} u(C_j) \mid \mathcal{F}_{n+1}\right)\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \right) \\
&= \max_{\substack{C_n, \phi_{n+1} \\ V_n = y}} \left( u(C_n) + \alpha E\left(U_{n+1}\left((1+r)^{n+1} \left(\frac{y}{(1+r)^n} + \phi_{n+1} \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} - \tilde{C}_n\right)\right) \mid \mathcal{F}_n\right) \right)
\end{aligned}$$

■

**Ejemplo 2.3.1** Continuando con el ejemplo anterior y la utilidad logarítmica tendremos

$$\begin{aligned}
U_1(y) (S_1 = 8) &= \max_{c_{18}, \phi_{28}} (\log(c_{18}) + \alpha E(U_2(y + \phi_{28} \Delta S_2 - c_{18}) \mid S_1 = 8)) \\
&= \max_{c_{18}, \phi_{28}} (\log(c_{18}) + \alpha E(\log(y + \phi_{28} \Delta S_2 - c_{18}) \mid S_1 = 8)) \\
&= \max_{c_{18}, \phi_{28}} (\log(c_{18}) + \frac{\alpha}{2} \log(y + \phi_{28} - c_{18}) + \frac{\alpha}{2} \log(y - 2\phi_{28} - c_{18})),
\end{aligned}$$

las condiciones de extremo nos llevan a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_{18}} - \frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{y + \phi_{28} - c_{18}} + \frac{1}{y - 2\phi_{28} - c_{18}} \right) &= 0 \\
\frac{1}{y + \phi_{28} - c_{18}} - \frac{2}{y - 2\phi_{28} - c_{18}} &= 0
\end{aligned}$$

de lo que resulta

$$\phi_{28} = \frac{-\alpha y}{4(1+\alpha)}, c_{18} = \frac{y}{1+\alpha}. \quad (2.2)$$

Por tanto

$$U_1(y) (S_1 = 8) = (1+\alpha) \log y - \log(1+\alpha) + \alpha \log \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)} - \frac{\alpha}{2} \log 2,$$

análogamente obtendríamos

$$\phi_{24} = \frac{\alpha y}{4(1+\alpha)}, c_{14} = \frac{y}{1+\alpha}$$

y por tanto

$$U_1(y) (S_1 = 4) = (1+\alpha) \log y - \log(1+\alpha) + \alpha \log \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)} - \frac{\alpha}{2} \log 2,$$

de manera que en este caso no depende del valor de  $S_1$ . Usando otra vez la ecuación de programación dinámica, tenemos:

$$\begin{aligned} U_0(y) &= \max_{c, \phi_1} (\log(c) + \alpha E(U_1(y + \phi_1 \Delta S_1 - c))) \\ &= \max_{c, \phi_1} (\log(c) + \frac{\alpha(1+\alpha)}{2} \log(y + 3\phi_1 - c) \\ &\quad + \frac{\alpha(1+\alpha)}{2} \log(y - \phi_1 - c) - K) \end{aligned}$$

con  $K = \log(1+\alpha) - \alpha \log \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)} + \frac{\alpha}{2} \log 2$ , de donde resulta

$$c = \frac{y}{1+\alpha+\alpha^2}, \phi_1 = \frac{\alpha(1+\alpha)y}{3(1+\alpha+\alpha^2)}.$$

Notemos que para calcular  $\phi_{28}$ ,  $\phi_{24}$  y los consumos óptimos en el instante 1,  $c_{18}$ ,  $c_{14}$ , en términos de la riqueza inicial  $y$ , tenemos primero que calcular la riqueza en 1, si  $S_1 = 8$ :

$$\begin{aligned} V_{18} &:= y + 3\phi_1 - c = y + \frac{\alpha(1+\alpha)y}{1+\alpha+\alpha^2} - \frac{y}{1+\alpha+\alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha(1+\alpha)y}{1+\alpha+\alpha^2} \end{aligned}$$

y substituir en (2.2), con lo que

$$\phi_{28} = -\frac{\alpha^2 y}{2(1+\alpha+\alpha^2)}, c_{18} = \frac{2\alpha y}{1+\alpha+\alpha^2}.$$

Si  $S_1 = 4$ , tendríamos la riqueza en 1:

$$\begin{aligned} y - \phi_1 - c &= y - \frac{\alpha(1+\alpha)y}{3(1+\alpha+\alpha^2)} - \frac{y}{1+\alpha+\alpha^2} \\ &= \frac{2\alpha(1+\alpha)y}{3(1+\alpha+\alpha^2)}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\phi_{24} = \frac{\alpha^2 y}{6(1 + \alpha + \alpha^2)}, c_{14} = \frac{2\alpha y}{3(1 + \alpha + \alpha^2)}.$$

Por último el consumo óptimo en el instante final vendrá dado por la riqueza en ese instante, de manera que si, por ejemplo  $S_2 = 9$ , el consumo óptimo valdrá

$$\begin{aligned} & V_{18} + \phi_{28} - c_{18} \\ &= \frac{2\alpha(1 + \alpha)y}{1 + \alpha + \alpha^2} - \frac{\alpha^2 y}{2(1 + \alpha + \alpha^2)} - \frac{2\alpha y}{1 + \alpha + \alpha^2} \\ &= \frac{3\alpha^2 y}{2(1 + \alpha + \alpha^2)}. \end{aligned}$$

Sin embargo estas expresiones no son interesantes en la práctica, con la expresiones (2.2) ya tenemos suficiente.

**Observación 2.3.1** *El problema de optimización se complica extraordinariamente si consideramos funciones de utilidad que no verifiquen  $u'(0) = \infty$  ya que entonces no queda garantizado que en la solución óptima se cumpla que el consumo es un proceso positivo.*

### 2.3.2 Método de martingala en el problema de consumo óptimo

En este caso para poder aplicar el método necesitamos que el modelo sea completo.

**Definición 2.3.1** *Diremos que un proceso de consumo  $C$  es replicable si existe  $\phi$  autofinanciada (con los consumos  $C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$ ) tal que  $V_N = C_N$ . Se dirá que  $\phi$  replica  $C$ .*

**Proposición 2.3.3** *En un mercado completo todo proceso de consumo  $C$  es replicable.*

**Demostración.** Sea  $(C_i)_{0 \leq i \leq N}$  un proceso de consumo. Una manera de garantizar el proceso de consumo es pedir al banco, en los instantes  $0, 1, 2, \dots, N$ , las cantidades  $C_0, C_1, \dots, C_N$  para consumo y luego restituirlo al final pagando

$$C_0(1 + r)^N + C_1(1 + r)^{N-1} + \dots + C_N$$

para ello habrá que generar este payoff y esto se podrá hacer si tenemos una cantidad inicial  $\nu$  tal que

$$E_{P^*} \left( \frac{C_0(1 + r)^N + C_1(1 + r)^{N-1} + \dots + C_N}{(1 + r)^N} \right) = \nu$$

o equivalentemente

$$E_{P^*}(C_0 + \tilde{C}_1 + \dots + \tilde{C}_N) = \nu.$$

Sea  $(\phi_n^1, \phi_n^2, \dots, \phi_n^d)_{1 \leq n \leq N}$  la estrategia correspondiente. Tendremos

$$E_{P^*}(C_0 + \tilde{C}_1 + \dots + \tilde{C}_N | \mathcal{F}_n) = \nu + \sum_{i=0}^n \phi_i \cdot \Delta \tilde{S}_i$$

y este sería el valor de la cartera autofinanciada si no hubiera consumo. Si a esta cartera se le quitan los consumos descontados hasta  $n$ , tendremos el valor de la cartera autofinanciada con consumo:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n &= E_{P^*}(C_0 + \tilde{C}_1 + \dots + \tilde{C}_N | \mathcal{F}_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{C}_i \\ &= \nu + \sum_{i=0}^n \phi_i \cdot \Delta \tilde{S}_i - \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{C}_i \end{aligned}$$

■

**Observación 2.3.2** *Notemos que justo después de instante  $i$ -ésimo el valor de la cartera disminuye en  $C_i$ . A partir de la estrategia autofinanciada sin consumo que replica  $C_0(1+r)^N + C_1(1+r)^{N-1} + \dots + C_N$ , se puede obtener la estrategia autofinanciada con consumo simplemente quitando de la cuenta bancaria las cantidades  $C_0, C_1, \dots, C_N$  en los instantes correspondientes.*

Tenemos así que el problema de consumo óptimo es equivalente a

$$\max_{(C, \phi) \in \mathcal{A}} \left\{ E\left(\sum_{n=0}^N \alpha^n u(C_n)\right), E_{P^*}\left(\sum_{n=0}^N \tilde{C}_n\right) = \nu \right\},$$

por tanto el lagrangiano correspondiente es

$$E\left(\sum_{n=0}^N \alpha^n u(C_n)\right) - \lambda(E_{P^*}\left(\sum_{n=0}^N \tilde{C}_n\right) - \nu),$$

ahora bien

$$\begin{aligned} E_{P^*}\left(\sum_{n=0}^N \tilde{C}_n\right) &= \sum_{n=0}^N E_{P^*}(\tilde{C}_n) = \sum_{n=0}^N E(\tilde{C}_n L) \\ &= \sum_{n=0}^N E(\tilde{C}_n E(L | \mathcal{F}_n)) = \sum_{n=0}^N E(C_n N_n) \end{aligned}$$

con  $N_n := (1+r)^{-n} E(L | \mathcal{F}_n)$ . Por tanto

$$\begin{aligned} &E\left(\sum_{n=0}^N \alpha^n u(C_n)\right) - \lambda(E_{P^*}\left(\sum_{n=0}^N \tilde{C}_n\right) - \nu) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^N \alpha^n u(C_n)\right) - \lambda\left(\sum_{n=0}^N C_n N_n - \nu\right). \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden nos conducen a

$$\alpha^n u'(C_n) = \lambda N_n, 0 \leq n \leq N$$

$$E\left(\sum_{n=0}^N C_n N_n\right) = \nu$$

con lo que

$$C_n = I\left(\frac{\lambda N_n}{\alpha^n}\right), 0 \leq n \leq N$$

$$\nu = E\left(\sum_{n=0}^N I\left(\frac{\lambda N_n}{\alpha^n}\right) N_n\right)$$

**Ejemplo 2.3.2** Si tomamos  $u(x) = \log(x)$  tenemos  $I(y) = 1/y$ , con lo que

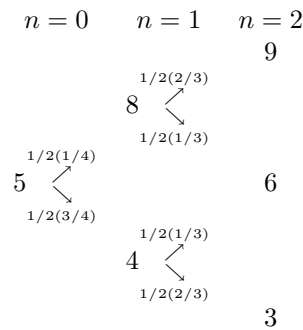
$$C_n = \frac{\alpha^n}{\lambda N_n}, 0 \leq n \leq N$$

$$\nu = E\left(\sum_{n=0}^N \frac{\alpha^n}{\lambda N_n} N_n\right) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^N \alpha^n$$

de manera que

$$C_n = \frac{\alpha^n \nu}{N_n \sum_{n=0}^N \alpha^n}$$

**Ejemplo 2.3.3** Si continuamos con el ejemplo (2.0.7) tenemos



con lo que los valores de  $N_i$  (con  $r = 0$ ) vienen dados por

$$N_i = E(L|\mathcal{F}_i) = E\left(\frac{P^*}{P}|\mathcal{F}_i\right)$$

$$= E\left(\frac{P^*}{P}|\mathcal{F}_i\right),$$

y en nuestro caso

$$\begin{aligned} N_0 &= 1, \\ N_1(S_1 = 8) &= \frac{\frac{1}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{2}} + \frac{\frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{2}} = \frac{1}{2} \\ N_1(S_1 = 4) &= \frac{\frac{3}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{2}} + \frac{\frac{3}{4} \frac{2}{3} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{2}} = \frac{3}{2} \\ N_2 &= L. \end{aligned}$$

Entonces, si usamos la utilidad logarítmica,

$$C_2 = \frac{\alpha^2 \nu}{L(1 + \alpha + \alpha^2)}$$

para hallar la estrategia óptima tenemos ahora que replicar  $C_2$ , esto es hallar por ejemplo  $\phi_{28}^0, \phi_{28}$  tales que

$$\begin{aligned} \phi_{28}^0 + 9\phi_{28} &= \frac{\alpha^2 \nu}{\frac{\frac{1}{2} \frac{2}{2} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{2}} (1 + \alpha + \alpha^2)} = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 \nu}{1 + \alpha + \alpha^2} \\ \phi_{28}^0 + 6\phi_{28} &= \frac{\alpha^2 \nu}{\frac{\frac{1}{4} \frac{1}{3} \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{2}} (1 + \alpha + \alpha^2)} = \frac{3\alpha^2 \nu}{1 + \alpha + \alpha^2} \end{aligned}$$

con lo que

$$\phi_{28} = -\frac{\alpha^2 \nu}{2(1 + \alpha + \alpha^2)},$$

análogamente obtendríamos

$$\phi_{24} = \frac{\alpha^2 \nu}{2(1 + \alpha + \alpha^2)}.$$

El consumo en 1 viene dado por

$$\begin{aligned} c_{18} &= C_1(S_1 = 8) = \frac{\alpha \nu}{N_1(S_1 = 8)(1 + \alpha + \alpha^2)} \\ &= \frac{2\alpha \nu}{1 + \alpha + \alpha^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{14} &= C_1(S_1 = 4) = \frac{\alpha \nu}{N_1(S_1 = 4)(1 + \alpha + \alpha^2)} \\ &= \frac{2\alpha \nu}{3(1 + \alpha + \alpha^2)}, \end{aligned}$$

De esta manera el valor de cartera en 1 vendrá dado por

$$\begin{aligned} V_{18} &= \phi_{28}^0 + 8\phi_{28} + c_{18} = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 \nu}{1 + \alpha + \alpha^2} + \frac{\alpha^2 \nu}{2(1 + \alpha + \alpha^2)} \\ &\quad + \frac{2\alpha \nu}{(1 + \alpha + \alpha^2)} \\ &= \frac{2\alpha(1 + \alpha)\nu}{1 + \alpha + \alpha^2}, \end{aligned}$$

y análogamente

$$V_{14} = \frac{2\alpha(1 + \alpha)\nu}{3(1 + \alpha + \alpha^2)}.$$

Por último habría que replicar  $V_1$  i esto nos conduce a

$$\begin{aligned} \phi^0 + 8\phi &= \frac{2\alpha(1 + \alpha)\nu}{1 + \alpha + \alpha^2} \\ \phi^0 + 4\phi &= \frac{2\alpha(1 + \alpha)\nu}{3(1 + \alpha + \alpha^2)}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\phi = \frac{\alpha(1 + \alpha)\nu}{3(1 + \alpha + \alpha^2)},$$

el consumo en el instante inicial es

$$C_0 = \frac{\nu}{1 + \alpha + \alpha^2}$$

de manera que el valor de la cartera en el instante inicial será

$$\begin{aligned} \phi^0 + 5\phi + C_0 &= \frac{2\alpha(1 + \alpha)\nu}{3(1 + \alpha + \alpha^2)} + \frac{\alpha(1 + \alpha)\nu}{3(1 + \alpha + \alpha^2)} \\ &\quad + \frac{\nu}{1 + \alpha + \alpha^2} \\ &= \nu \end{aligned}$$

como tenía que ocurrir.

### 2.3.3 Utilidad máxima para el consumo y la riqueza terminal

Se trata de maximizar

$$\max_{\substack{(C, \phi) \in \mathcal{A} \\ V_0 = \nu}} E\left(\sum_{n=0}^N \alpha^n u_c(C_n) + \alpha^N u_p(V_N - C_N)\right)$$

donde  $u_c$  y  $u_p$  son funciones de utilidad en principio distintas.

**Método de programación dinámica**

Definimos como siempre el proceso "valor óptimo"

$$U_n(y) = \max \left\{ E \left( \sum_{j=n}^N \alpha^{j-n} u_c(C_j) + \alpha^{N-n} u_p(V_N - C_N) \mid \mathcal{F}_n \right), C_n \geq 0 \text{ } \mathcal{F}_n\text{-medible}, (C_j, \phi_j)_{n+1 \leq j \leq N} \in \mathcal{A}, \right.$$

entonces tendremos que

$$U_n(y) = \max_{C, \phi} (u_c(C) + \alpha E(U_{n+1}((1+r)^{n+1} \frac{y}{(1+r)^n} + \phi \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1} - \tilde{C}_n)) \mid \mathcal{F}_n))$$

para  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , pero ahora  $U_N(y) \neq u_c(y)$ , de hecho

$$U_N(y) = \max_c (u_c(c) + u_p(y - c)).$$

**Método de martingala**

Suponemos que el mercado es completo. Se trata ahora de replicar un proceso de consumo  $C_0, C_1, \dots, C_{N-1}$  y al final disponer de una riqueza  $V_N$ . Esto se puede conseguir replicando el "payoff"

$$C_0(1+r)^N + C_1(1+r)^{N-1} + \dots + C_{N-1}(1+r) + V_N$$

pero para esto se necesitará una riqueza inicial

$$\nu = E_{P^*}(C_0 + \tilde{C}_1 + \dots + \tilde{C}_{N-1} + \tilde{V}_N)$$

por tanto el Lagrangiano correspondiente será

$$E \left( \sum_{n=0}^N \alpha^n u_c(C_n) + \alpha^N u_p(V_N - C_N) - \lambda \left( \sum_{n=0}^{N-1} C_n N_n + V_N N_N - \nu \right) \right),$$

y las condiciones de primer orden

$$\begin{aligned} \alpha^n u'_c(C_n) &= \lambda N_n, 0 \leq n \leq N-1 \\ \alpha^N u'_c(C_N) &= \alpha^N u'_p(V_N - C_N) \\ \alpha^N u'_p(V_N - C_N) &= \lambda N_N \\ \nu &= E \left( \sum_{n=0}^{N-1} C_n N_n + V_N N_N \right). \end{aligned}$$



## 2.4 Optimización en el modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes, consiste en un mercado con dos activos. Un activo sin riesgo,  $S^0$  que evoluciona como:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad t \geq 0$$

donde  $r$  es una constante no negativa, esto es, suponiendo  $S_0^0 = 1$ ,

$$S_t^0 = e^{rt}, \quad t \geq 0$$

y un activo con riesgo  $S$  que evoluciona como

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t) \quad t \geq 0$$

donde  $(B_t)$  es un movimiento browniano, esto es:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\right\}.$$

Si suponemos un proceso de inversión-consumo  $(c, \phi)$  y una riqueza inicial  $x$  tendremos

$$V_t = x + \int_0^t \phi_s^0 dS_s^0 + \int_0^t \phi_s^1 dS_s - \int_0^t c_s ds.$$

En términos de los parámetros del sistema

$$\begin{aligned} dV_t &= \phi_t^0 r e^{rt} dt + \phi_t^1 S_t (\mu dt + \sigma dB_t) - c_t dt \\ &= r(V_t - \phi_t^1 S_t) dt + \phi_t^1 S_t (\mu dt + \sigma dB_t) - c_t dt \\ &= (rV_t - c_t) dt + \phi_t^1 S_t (\mu - r) dt + \phi_t^1 S_t \sigma dB_t \\ &= (rV_t - c_t) dt + \pi_t (\mu - r) dt + \pi_t \sigma dB_t \end{aligned}$$

donde  $\pi_t := \phi_t^1 S_t$  es la *cantidad* invertida en el activo con riesgo.

### Un caso particular

Consideremos el caso en que queremos maximizar la utilidad terminal y que usamos la utilidad logarítmica. En este caso  $c_t = 0, 0 \leq t \leq T$ . En este caso

$$\begin{aligned} dV_t &= rV_t dt + \pi_t (\mu - r) dt + \pi_t \sigma dB_t \\ &= V_t \{(r + \theta_t (\mu - r)) dt + \theta_t \sigma dB_t\} \end{aligned}$$

donde  $\theta_t := \frac{\pi_t}{V_t}$ , es decir la fracción de riqueza invertida en el activo con riesgo.

Supongamos que utilizamos la utilidad logarítmica, de manera que queremos resolver

$$\max_{\theta} E(\log(V_T)).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} d \log(V_t) &= \frac{dV_t}{V_t} - \frac{1}{2} \frac{\theta_t^2 \sigma^2 V_t^2}{V_t^2} dt \\ &= (r + \theta_t(\mu - r) - \frac{1}{2} \theta_t^2 \sigma^2) dt + \theta_t \sigma dB_t, \end{aligned}$$

de manera que

$$E(\log(V_T)) = \log(V_0) + E\left(\int_0^T (r + \theta_s(\mu - r) - \frac{1}{2} \theta_s^2 \sigma^2) ds\right) + E\left(\int_0^T \theta_t \sigma dB_t\right).$$

Entonces si asumimos que  $\int_0^T E(\theta_t^2) dt < \infty$ . Tendremos que

$$E(\log(V_T)) = \log(V_0) + E\left(\int_0^T (r + \theta_s(\mu - r) - \frac{1}{2} \theta_s^2 \sigma^2) ds\right)$$

y obtendremos un máximo si

$$\theta_t = \frac{\mu - r}{\sigma^2}.$$

#### 2.4.1 Método de programación dinámica. Ecuación de HJB.

Vamos a extender la noción de función de utilidad

**Definición 2.4.1** Una función de utilidad  $U : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación  $C^{0,1}$  tal que

1.  $U(t, \cdot)$  es estrictamente creciente y estrictamente cóncava
2. la derivada  $U'(t, c) = (\partial/\partial c)U(t, c)$  es tal que para todo  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} U'(t, c) &= 0 \\ \lim_{c \rightarrow 0^+} U'(t, c) &= \infty \end{aligned}$$

Notemos que  $U'(t, c)$  es estrictamente decreciente en  $c$  de manera que tenemos una función inversa  $I(t, c)$  tal que

$$I(t, U'(t, c)) = c = U'(t, I(t, c))$$

para todo  $c \in (0, \infty)$ .

Querramos resolver

$$\max_{\substack{c, \theta \\ V_0 = x}} E\left(\int_0^T F(t, c_t) dt + G(V_T)\right)$$

#### 2.4. OPTIMIZACIÓN EN EL MODELO DE BLACK-SCHOLESJ.M. Corcuera

donde  $F$  y  $G$  son funciones de utilidad (esta última independiente de  $t$ ) y  $c_t \geq 0$ , para todo  $t \geq 0$ . Definamos el proceso valor óptimo

$$H(t, x) = \max_{\substack{c, \theta \\ V_t = x}} E\left(\int_t^T F(s, c_s) ds + G(V_T) \mid \mathcal{F}_t\right),$$

vamos a considerar únicamente estrategias markovianas  $\theta_t = \theta(t, V_t)$ , donde

$$dV_t = V_t\{(r + \theta_t(\mu - r))dt + \theta_t\sigma dB_t\} - c_t dt.$$

$$\begin{aligned} H(t, x) &= \sup_{\substack{c, \theta \\ V_t = x}} E\left(\int_t^T F(s, c_s) ds + G(V_T)\right) \\ &= \sup_{\substack{c, \theta \\ V_t = x}} E\left(\int_t^{t+h} F(s, c_s) ds + \int_{t+h}^T F(s, c_s) ds + G(V_T) \mid \mathcal{F}_t\right) \\ &= \sup_{\substack{c, \theta \\ V_t = x}} (E\left(\int_t^{t+h} F(s, c_s) ds \mid \mathcal{F}_t\right) + E\left(\int_{t+h}^T F(s, c_s) ds + G(V_T) \mid \mathcal{F}_{t+h}\right) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \sup_{\substack{c, \theta \\ V_t = x}} (E\left(\int_t^{t+h} F(s, c_s) ds \mid \mathcal{F}_t\right) + H(t+h, V_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

Si suponemos que  $H(t, x)$  es  $C^{1,2}$  para poder aplicar la fórmula de Itô tendremos

$$\begin{aligned} H(t+h, V_{t+h}) &= H(t, V_t) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} V_s^2 \theta_s^2 \sigma^2\right) ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \frac{\partial H}{\partial x} dV_s \\ &= H(t, x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} V_s^2 \theta_s^2 \sigma^2\right) ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \frac{\partial H}{\partial x} dV_s \quad (\text{suponemos que } V_t = x) \\ &= H(t, x) + \int_t^{t+h} \left(\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x} (V_s(r + \theta_s(\mu - r)) - c_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} V_s^2 \theta_s^2 \sigma^2\right) ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \frac{\partial H}{\partial x} V_s \theta_s \sigma dB_s. \end{aligned}$$

Asumiendo ahora que  $\int_0^T E\left(\frac{\partial H}{\partial x} V_s \theta_s\right)^2 dt < \infty$ , o bien localizando el proceso, tendremos

$$\begin{aligned} E(H(t+h, V_{t+h}) \mid \mathcal{F}_t) &= H(t, x) \\ &\quad + E\left(\int_t^{t+h} \left(\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x} (V_s(r + \theta_s(\mu - r)) - c_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} V_s^2 \theta_s^2 \sigma^2\right) ds \mid \mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

Tenemos entonces que para todo  $h \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{\substack{c, \theta \\ V_t = x}} E \left( \int_t^{t+h} (F(s, c_s) + \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x} (V_s(r + \theta_s(\mu - r)) - c_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} V_s^2 \theta_s^2 \sigma^2) ds \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E \left( \int_t^{t+h} \left( \frac{\partial H}{\partial s} + \sup_{\substack{c, \theta \\ V_t = x}} (F(s, c_s) + \frac{\partial H}{\partial x} (V_s(r + \theta_s(\mu - r)) - c_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} V_s^2 \theta_s^2 \sigma^2) \right) ds \middle| \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

como esto ocurre para todo  $h \geq 0$ , si el integrando es continuo, dividiendo por  $h$  y tendiendo el límite a cero (asumiendo que podemos intercambiar el límite y la esperanza) tendremos la ecuación para  $H(t, x)$  :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sup_{c_t, \theta_t} (F(t, c_t) + \frac{\partial H}{\partial x} (x(r + \theta_t(\mu - r)) - c_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} x^2 \theta_t^2 \sigma^2) = 0. \text{ (Hamilton-Jacobi-Bellman)}$$

con la condición de contorno  $H(T, x) = G(x)$ .

**Ejemplo 2.4.1** Si consideramos el problema del consumo y riqueza terminal óptimos la ecuación de HJB correspondiente será:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sup_{c, \theta} (F(t, c) + \frac{\partial H}{\partial x} (x(r + \theta(\mu - r)) - c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} x^2 \theta^2 \sigma^2) = 0, \quad (2.3)$$

primero resolvemos el problema de optimización estático

$$\sup_{c, \theta} (F(t, c) + \frac{\partial H}{\partial x} (x(r + \theta(\mu - r)) - c) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} x^2 \theta^2 \sigma^2),$$

que nos da como solución

$$\begin{aligned} F'(t, \hat{c}) &= \frac{\partial H}{\partial x} \iff \hat{c} = I(t, \frac{\partial H}{\partial x}) \\ \hat{\theta} &= - \frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}} \frac{\mu - r}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

Si tomamos como funciones de utilidad  $F(t, x) = e^{-\delta t} \log x$  y  $G(x) = \log x$  resultará

$$\hat{c} = \frac{1}{e^{\delta t} \frac{\partial H}{\partial x}} \quad (2.4)$$

$$\hat{\theta} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{x \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}} \frac{\mu - r}{\sigma^2}. \quad (2.5)$$

En vista de las características del problema podemos intentar una solución de la forma

$$H(t, x) = a(t) \log x + b(t),$$

## 2.4. OPTIMIZACIÓN EN EL MODELO DE BLACK-SCHOLESJ.M. Corcuera

donde, por la condición de contorno,

$$a(T) = 1, b(T) = 0,$$

tendríamos entonces, substituyendo en (2.4,2.5 )

$$\hat{c} = \frac{e^{-\delta t}}{a(t)} x$$

$$\hat{\theta} = \frac{\mu - r}{\sigma^2},$$

asimismo

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \dot{a}(t) \log x + \dot{b}(t)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{a(t)}{x}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{a(t)}{x^2}.$$

Teniendo en cuenta todo esto la ecuación (2.3) queda de la forma

$$0 = \dot{a}(t) \log x + \dot{b}(t) + e^{-\delta t} \log \frac{e^{-\delta t}}{a(t)} x + a(t) \left( r + \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \right) - e^{-\delta t} = 0$$

Esto da condiciones para  $a(t)$  y  $b(t)$ . En particular

$$\dot{a}(t) = -e^{-\delta t}$$

con lo que

$$a(t) = 1 + \frac{e^{-\delta t} - e^{-\delta T}}{\delta}.$$

Por tanto los consumos y estrategias óptimas vienen dados por

$$c_t = \frac{\delta e^{-\delta t}}{\delta + e^{-\delta t} - e^{-\delta T}} V_t$$

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

### 2.4.2 Método de martingala

**Proposición 2.4.1** Sea  $\xi \geq 0$  una variable aleatoria positiva  $\mathcal{F}_T$ -medible. Y sea  $(c_s)_{0 \leq s \leq T}$  un proceso adaptado positivo, esto es un proceso de consumo. Supongamos que

$$E_{P^*} \left( \tilde{\xi} + \int_0^T \tilde{c}_s ds \right) = x$$

y que  $E_{P^*} \left( \tilde{\xi}^2 + \int_0^T \tilde{c}_s^2 ds \right) < \infty$  entonces existe una estrategia admisible, con valor inicial  $x$ , que replica el proceso de consumo de manera que la riqueza final es  $\xi$ .

**Demostración.** Consideremos la variable  $\mathcal{F}_T$ -medible  $\xi + \int_0^T c_s e^{r(T-s)} ds \geq 0$ . Sabemos que al ser de cuadrado integrable existe una estrategia admisible que la replica de manera que su valor actualizado en cada instante es

$$E_{P^*}(\tilde{\xi} + \int_0^T \tilde{c}_s ds | \mathcal{F}_t) = x + \int_0^t \phi_s^1 d\tilde{S}_t,$$

esta estrategia autofinanciada es la que posibilita el consumo  $c_s ds$  en cada instante  $s$ , de manera que al final habría que devolver al banco  $\int_0^T c_s e^{r(T-s)} ds$ . En realidad la estrategia autofinanciada "con consumo" coincide con la anterior en la parte que se invierte en el activo con riesgo, la parte que queda en el banco difiere, de manera que el valor actualizado de la cartera para la estrategia autofinanciada con consumo es:

$$x + \int_0^t \phi_s^1 d\tilde{S}_t - \int_0^t \tilde{c}_s ds = E_{P^*}(\tilde{\xi} + \int_t^T \tilde{c}_s ds | \mathcal{F}_t) \quad (2.6)$$

■

Consideremos entonces el problema

$$\max_{\substack{(c, \phi) \\ V_0 = x}} E\left(\int_0^T F(t, c_t) dt + G(V_T)\right),$$

le corresponderá el lagrangiano

$$\begin{aligned} & E\left(\int_0^T F(t, c_t) dt + G(V_T)\right) - \lambda(E_{P^*}(\tilde{V}_T + \int_0^T \tilde{c}_t dt) - x) \\ &= E\left(\int_0^T F(t, c_t) dt + G(V_T) - \lambda(\tilde{V}_T Z_T + \int_0^T \tilde{c}_t Z_t dt - x)\right) \\ &= E\left(\int_0^T F(t, c_t) dt + G(V_T) - \lambda(V_T N_T + \int_0^T c_t N_t dt - x)\right), \end{aligned}$$

donde  $Z_t = E(\frac{dP^*}{dP} | \mathcal{F}_t)$  y  $N_t = e^{-rt} Z_t, 0 \leq t \leq T$ . Las condiciones de primer orden nos conducen a

$$\begin{aligned} F'(t, c_t) &= \lambda N_t \\ G'(V_T) &= \lambda N_T \\ E(V_T N_T + \int_0^T c_t N_t dt) &= x \end{aligned}$$

Entonces si escribimos  $I_1(t, x)$  la función inversa de  $F'(t, x)$  e  $I_2(x)$  la función inversa de  $G'(x)$ , tenemos

$$\begin{aligned} c_t &= I_1(t, \lambda N_t) \\ V_T &= I_2(\lambda N_T) \end{aligned}$$

$$E(I_2(\lambda N_T) N_T + \int_0^T I_1(t, \lambda N_t) N_t dt) = x.$$

2.4. OPTIMIZACIÓN EN EL MODELO DE BLACK-SCHOLESJ.M. Corcuera

**Ejemplo 2.4.2** Consideremos el ejemplo anterior. En primer lugar

$$c_t = \frac{e^{-\delta t}}{\lambda N_t}$$

$$V_T = \frac{1}{\lambda N_T},$$

con  $\lambda$  tal que

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^T e^{-\delta t} dt = x,$$

esto es

$$\lambda = \frac{\delta + 1 - e^{-\delta T}}{\delta x}.$$

Notemos, a partir de (2.6) que

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t &= E_{P^*}(\tilde{V}_T + \int_t^T \tilde{c}_s ds | \mathcal{F}_t) \\ &= \frac{E(V_T N_T + \int_t^T c_s N_s ds | \mathcal{F}_t)}{Z_t} \\ &= \frac{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_t^T e^{-\delta s} ds}{Z_t} \\ &= \frac{\gamma(t)x}{Z_t}, \end{aligned}$$

esto es

$$V_t = \frac{\gamma(t)x}{N_t}$$

con

$$\gamma(t) = \frac{\delta + e^{-\delta t} - e^{-\delta T}}{1 + \delta - e^{-\delta T}},$$

de esta manera podemos concluir que

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{e^{-\delta t}}{\lambda N_t} = \frac{e^{-\delta t}}{\gamma(t)\lambda x} V_t \\ &= \frac{\delta e^{-\delta t}}{\delta + e^{-\delta t} - e^{-\delta T}} V_t, \end{aligned}$$

tal como habíamos obtenido. Para calcular la estrategia óptima por este método, necesitamos escribir  $V_t$  en términos de  $S_t$  y para ello explicitar el proceso  $(N_t)$ . A partir de (1.10) tenemos que

$$Z_t = E\left(\frac{dP^*}{dP} | \mathcal{F}_t\right) = \exp\left\{\frac{r - \mu}{\sigma} B_t - \frac{1}{2} \left(\frac{r - \mu}{\sigma}\right)^2 t\right\}, 0 \leq t \leq T$$

y como  $S_t = S_0 \exp\{\mu t - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t\}$ , resulta que

$$\begin{aligned} Z_t &= \left( \frac{S_t}{S_0} \exp\{-\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t\} \right)^{\frac{r-\mu}{\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2} \left( \frac{r-\mu}{\sigma} \right)^2 t\} \\ &= \left( \frac{S_t}{S_0} \exp\{-\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t\} \right)^{\frac{r-\mu}{\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2} \left( \frac{r-\mu}{\sigma} \right)^2 t\} \\ &= S_t^{\frac{r-\mu}{\sigma^2}} a e^{bt}, \end{aligned}$$

para ciertas constantes  $a$  y  $b$ . Como

$$\tilde{V}_t = \frac{\gamma(t)x}{Z_t} = \frac{1}{a} \gamma(t) x e^{-bt} S_t^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}}$$

y buscamos  $\phi$  tal que

$$\tilde{V}_t = x + \int_0^t \phi_s^1 d\tilde{S}_s - \int_0^t \tilde{c}_s ds$$

resultará que

$$\begin{aligned} \phi_t^1 &= \frac{\partial \tilde{V}_t}{\partial \tilde{S}_t} = \frac{\mu-r}{\sigma^2} \frac{e^{rt}}{a} \gamma(t) x e^{-bt} S_t^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}-1} \\ &= \frac{\mu-r}{\sigma^2} \frac{e^{rt} \tilde{V}_t}{S_t} = \frac{\mu-r}{\sigma^2} \frac{V_t}{S_t}, \end{aligned}$$

de manera que

$$\frac{\phi_t^1 S_t}{V_t} = \frac{\mu-r}{\sigma^2}.$$

al igual que obteníamos por el otro método.

**Ejercicio 2.4.1** Resolver el problema de minimizar

$$E(\exp\{\int_0^T u_t^2 dt + X_T^2\})$$

si

$$dX_t = (ax + u_t)dt + \sigma dW_t,$$

donde el control  $u_t$  no tiene restricciones.



## Capítulo 3

# Modelos de tipo de interés

Los modelos de tipos de interés son usados principalmente para valorar y recubrir bonos y opciones sobre bonos. Señalar que no existe un modelo de referencia como el modelo de Black-Scholes para opciones sobre "stocks".

### 3.1 Modelización

#### 3.1.1 La curva de tipos

En los modelos que hemos estudiado los tipos de interés se supusieron constantes. En la práctica el interés depende de la fecha de emisión del préstamo y del final o madurez del mismo.

Alguien que pide prestado un euro en el instante  $t$ , hasta la madurez  $T$ , tendrá que pagar una cantidad  $F(t, T)$  en el instante  $T$ , lo cual equivale a un tipo medio de tasa de interés continuo  $R(t, T)$  dado por la igualdad:

$$F(t, T) = e^{(T-t)R(t, T)}.$$

Si suponemos conocidos los tipos de interés  $(R(t, T))_{0 \leq t \leq T}$ , y no hay arbitraje, se deberá cumplir que

$$F(t, s) = F(t, u)F(u, s), \forall t \leq u \leq s,$$

y de aquí junto con con la igualdad  $F(t, t) = 1$ , se sigue, si  $F(t, s)$  es derivable como función de  $s$ , que existe una función  $r(t)$  tal que

$$F(t, T) = \exp \left( \int_t^T r(s) ds \right).$$

En efecto, sea  $s \geq t$

$$\begin{aligned} F(t, s+h) - F(t, s) &= F(t, s)F(s, s+h) - F(t, s) \\ &= F(t, s)(F(s, s+h) - 1), \end{aligned}$$

$$\frac{F(t, s+h) - F(t, s)}{F(t, s)h} = \frac{F(s, s+h) - F(s, s)}{h},$$

tendiendo  $h \rightarrow 0$  tendremos

$$\frac{\partial_2 F(t, s)/\partial s}{F(t, s)} = \partial_2 F(s, s)/\partial s := r(s)$$

y de aquí

$$F(t, T) = \exp\left(\int_t^T r(s)ds\right).$$

Notemos que

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s)ds.$$

La función  $r(s)$  se interpreta como un tipo de interés instantáneo, se le suele llamar "tipo en corto" ("short rate").

Planteémoslo al revés. Supongamos que quiero un contrato que me garantice el cobro de un euro en el instante  $T$ . Tendremos entonces lo que se llaman *bonos*. ¿Cuanto tendré que pagar por el precio de un bono en el instante  $t$ ? Para recibir  $F(t, T)$  en el instante  $T$  tenemos que pagar (poner en la cuenta bancaria) la cantidad de un euro, por tanto habrá que pagar  $1/F(t, T)$ .

En la práctica no se conocen los precios de los bonos para los diferentes instantes, estos van cambiando aleatoriamente con el instante inicial, pero intuitivamente parece que tenga que existir una relación entre los precios correspondientes a los diferentes instantes iniciales y de madurez. El ánimo de los modelos de bonos es establecer estas relaciones.

El principal objeto de estudio es lo que llamaremos "bono sin cupones" ("zero coupon bond").

**Definición 3.1.1** *Un bono sin cupones con madurez  $T$  es un contrato que garantiza el cobro de un euro en el instante  $T$ . Su precio en el instante  $t$  lo escribiremos  $P(t, T)$ .*

El convenio de que el pago en el instante de la madurez sea 1, conocido como "valor principal", es por simplicidad. Los bonos con cupones son los que van dando ciertas cantidades (cupones) hasta el final del periodo. Todos estos instrumentos tienen en común que proporcionan al propietario un flujo determinista de dinero y por ello se llaman activos de renta fija.

**Definición 3.1.2** *La curva de tipos (de un bono sin cupones) es la gráfica correspondiente de la aplicación*

$$T \mapsto R(t, T)$$

Hemos visto que si pudiéramos anticipar el futuro, o si quisiéramos construir un mercado con los precios de los bonos fijados para los diferentes instantes de negociación y madurez la condición de ausencia de arbitraje nos conduciría a

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r(s)ds}.$$

y

$$R(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s) ds$$

### 3.1.2 Curva de tipos para un futuro incierto

Para un falor fijo de  $t$ ,  $P(t, T)$  es una función de  $T$  cuya gráfica nos da la "curva de precios de los bonos en  $t$ " o "la estructura a término" ("term structure") en  $t$ . Es de esperar que sea una función suave. Si fijamos  $T$ ,  $p(t, T)$  será un proceso estocástico. En este contexto, nuestro mercado de bonos va a ser un mercado con infinitos activos (para cada  $T$  tenemos in activo) y lo que nos vamos a plantear es preguntas como:

- ¿qué modelos son razonables para valorar los bonos ?
- ¿qué relación deben tener los precios de los bonos para que no haya arbitraje?
- ¿podemos derivar precios de los bonos libres de oportunidades de arbitraje a partir de un modelo de los tipos en corto?
- dado un modelo para un mercado de bonos, ¿cómo podemos calcular los precios de derivados, como por ejemplo opciones de compra europeas de bonos?

### 3.1.3 Tipos de interés

Consideremos el siguiente ejemplo. Supongamos que estamos en el instante  $t$  y fijamos otros instantes futuros  $S$  y  $T$ ,  $t < S < T$ . El propósito es construir en el instante  $t$  un contrato que nos permita invertir en el instante  $S$  un euro y tener un interés **determinista** en el periodo  $[S, T]$ , de modo que obtengamos una cantidad en  $T$  determinista. Esto se puede hacer de la siguiente manera:

1. En el instante  $t$  vendemos un bono con madurez  $S$ . Esto nos proporciona  $P(t, S)$  euros.
2. En el instante  $t$  compramos  $P(t, S)/P(t, T)$  bonos que maduren en  $T$ .

Notemos que esto implica lo siguiente:

1. En el instante  $t$  el coste de la operación es cero.
2. En el instante  $S$ , tenemos que pagar 1 euro.
3. En el instante  $T$  recibimos  $P(t, S)/P(t, T)$  euros.

La cantidad que recibimos  $P(t, S)/P(t, T)$  se puede indicar mediante tipos simples o continuos:

- El interés simple a plazo (LIBOR),  $L = L(t; S, T)$ , que es la solución de la ecuación:

$$1 + (T - S)L = \frac{P(t, S)}{P(t, T)}$$

es decir es el interés simple que se garantiza para el periodo  $[S, T]$  en el instante  $t$ .

- El interés continuo a plazo  $R = R(t; S, T)$ , solución de la ecuación:

$$e^{R(T-S)} = \frac{P(t, S)}{P(t, T)}.$$

análogamente al caso anterior, es el interés continuo que se garantiza, en el instante  $t$ , para el periodo  $[S, T]$ . La anotación en términos de interés simple es la que se usa en el mercado, mientras que la otra se utiliza en contextos teóricos.

Por tanto dado el mercado de bonos, podemos definir diferentes tipos de interés, es decir los precios de los bonos se pueden indicar, presentar o marcar, de diferentes maneras.

### Definición 3.1.3

1. El tipo a plazo simple para el intervalo  $[S, T]$  contratado en  $t$ , (LIBOR a plazo) se define como

$$L(t; S, T) = -\frac{P(t, T) - P(t, S)}{(T - S)P(t, T)}$$

2. El interés actual simple ("spot") para  $[t, T]$ , LIBOR actual, se define como

$$L(t, T) = -\frac{P(t, T) - 1}{(T - t)P(t, T)},$$

es el anterior haciendo  $S = t$ .

3. El tipo de interés continuo a plazo contratado en  $t$  para  $[S, T]$  como

$$R(t; S, T) = -\frac{\log P(t, T) - \log P(t, S)}{T - S}$$

4. El tipo de interés continuo actual para  $[t, T]$  como

$$R(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T - t}$$

5. El tipo de interés instantáneo a plazo ("forward rate") con madurez  $T$ , contratado en  $t$  como

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T} = \lim_{T \rightarrow S} R(t; S, T)$$

6. El tipo de interés en corto ("short rate") o instantáneo en  $t$

$$r(t) = f(t, t) = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T)$$

Notemos que el tipo de interés instantáneo a plazo con madurez  $T$ , contratado en  $t$  se puede interpretar como el tipo de interés determinista contratado en  $t$  para el periodo infinitesimal  $[T, T + dT]$ .

Fijado  $t$ , cualquier tipo de interés de los definidos anteriormente permite recuperar los precios de los bonos con cualquier madurez. Entonces modelizar estos tipos, o sea dar su dinámica en  $t$ , es equivalente a modelizar los precios de los bonos.

Vamos a definir ahora el proceso "cuenta bancaria" o activo "sin riesgo". Crearemos un escenario aleatorio para los tipos de interés instantáneos  $r(s)$ . En concreto consideraremos un espacio de probabilidad dotado de una filtración  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T})$ , supondremos que  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  es la filtración natural generada por un movimiento browniano  $(W_s)_{0 \leq t \leq T}$  y que  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ . En este contexto introducimos el activo "sin" riesgo

$$S_t^0 = \exp\left\{\int_0^t r(s) ds\right\}$$

donde  $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$  es un proceso adaptado con  $\int_0^t |r(s)| ds < \infty$ . En nuestro mercado tendremos también activos con riesgo, estos serán los bonos! (sin cupones) de madurez menor o igual al horizonte  $T$ . Para cada instante  $u \leq T$  definimos un proceso adaptado  $(P(t, u))_{0 \leq t \leq u}$  satisfaciendo  $P(t, t) = 1$ .

Hagamos ahora la hipótesis:

(H) Existe una probabilidad  $P^*$  equivalente a  $P$  tal que para todo  $0 \leq u \leq T$ ,  $(\tilde{P}(t, u))_{0 \leq t \leq u}$  definido por

$$\tilde{P}(t, u) = e^{-\int_0^t r(s) ds} P(t, u)$$

es una martingala.

Esta hipótesis tiene las siguientes interesantes consecuencias.

### Proposición 3.1.1

$$P(t, u) = E_{P^*} \left( e^{-\int_t^u r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right)$$

#### Demostración.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(t, u) &= E_{P^*}(\tilde{P}(u, u) \mid \mathcal{F}_t) = E_{P^*}(e^{-\int_0^u r(s) ds} P(u, u) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= E_{P^*}(e^{-\int_0^u r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t), \end{aligned}$$

con lo que eliminando el factor de descuento

$$P(t, u) = E_{P^*}(e^{-\int_t^u r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t)$$

■

Si escribimos, como siempre,  $Z_T = \frac{dP^*}{dP}$ , sabemos que  $Z_t := E(\frac{dP^*}{dP} | \mathcal{F}_t)$  es una martingala estrictamente positiva, entonces del hecho de que la filtración es la generada por un movimiento browniano resultará la siguiente representación:

**Proposición 3.1.2** *Existe un proceso adaptado  $(q(t))_{0 \leq t \leq T}$  tal que, para todo  $0 \leq t \leq T$ ,*

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t q(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t q^2(s) ds\right\}, \quad \text{c.s.}$$

**Demostración.** Como  $Z_t$  es una martingala browniana, un argumento de localización (ya que no sabemos si es de cuadrado integrable), nos permite extender el teorema (1.5.5) y concluir que existe un proceso  $(H_t)$  satisfaciendo  $\int_0^T H_t^2 dt < \infty$ , c.s., tal que

$$Z_t = 1 + \int_0^t H_s dW_s,$$

ahora como  $Z_t > 0$ ,  $P$  c.s., y aplicando la formula de Itô, tendremos

$$\log Z_t = \int_0^t \frac{H_s}{Z_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{H_s^2}{Z_s^2} ds$$

de manera que  $q(s) = \frac{H_s}{Z_s}$ , c.s., ■

**Corolario 3.1.1** *El precio en el instante  $t$  de un bono (sin cupones) con madurez  $u \leq T$  viene dado por*

$$P(t, u) = E\left(e^{-\int_t^u r(s) ds + \int_t^u q(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^u q^2(s) ds} | \mathcal{F}_t\right)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} E_{P^*}\left(e^{-\int_t^u r(s) ds} | \mathcal{F}_t\right) &= \frac{E\left(e^{-\int_t^u r(s) ds} Z_u | \mathcal{F}_t\right)}{Z_t} \\ &= E\left(e^{-\int_t^u r(s) ds} \frac{Z_u}{Z_t} | \mathcal{F}_t\right) \\ &= E\left(e^{-\int_t^u r(s) ds + \int_t^u q(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_t^u q^2(s) ds} | \mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

■

La siguiente proposición da una interpretación económica del proceso  $q$ .

**Proposición 3.1.3** *Para cada madurez  $u$ , existe un proceso adaptado  $(\sigma_t^u)_{0 \leq t \leq u}$  tal que, para todo  $0 \leq t \leq u$ ,*

$$\frac{dP(t, u)}{P(t, u)} = (r(t) - \sigma_t^u q(t)) dt + \sigma_t^u dW_t$$

**Demostración.** Como  $(\tilde{P}(t, u))$  es una martingala bajo  $P^*$  resultará que  $(\tilde{P}(t, u)Z_t)$  lo es bajo  $P$ , además es estrictamente positiva y argumentando como antes tendremos que

$$\tilde{P}(t, u)Z_t = P(0, u)e^{\int_0^t \theta_s^u dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta_s^u)^2 ds}$$

para cierto proceso adaptado  $(\theta_s^u)_{0 \leq t \leq u}$ , de manera que

$$P(t, u) = P(0, u) \exp\left\{ \int_0^t r(s) ds + \int_0^t (\theta_s^u - q(s)) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t ((\theta_s^u)^2 - q^2(s)) ds \right\},$$

de manera que, aplicando la fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, u)}{P(t, u)} &= r(t)dt + (\theta_t^u - q(t))dW_t \\ &\quad - \frac{1}{2}((\theta_t^u)^2 - q^2(t))dt \\ &\quad + \frac{1}{2}(\theta_t^u - q(t))^2 dt \\ &= (r(t) + q^2(t) - \theta_t^u q(t))dt \\ &\quad + (\theta_t^u - q(t))dW_t, \end{aligned}$$

y el resultado se sigue tomando  $\sigma_t^u = \theta_t^u - q(t)$ . ■

**Observación 3.1.1** *Si comparamos la fórmula*

$$\frac{dP(t, u)}{P(t, u)} = (r(t) - \sigma_t^u q(t))dt + \sigma_t^u dW_t$$

con

$$\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r(t)dt$$

encontramos que los bonos son activos con mayor riesgo que el activo "sin riesgo"  $S^0$ . Notemos también que bajo  $P^*$

$$\tilde{W}_t := W_t - \int_0^t q(s) ds$$

es un  $(\mathcal{F}_t)$ -browniano estándar (por el teorema de Girsanov (1.5.3)) y podemos escribir

$$\frac{dP(t, u)}{P(t, u)} = r(t)dt + \sigma_t^u d\tilde{W}_t$$

justificando el nombre de probabilidad neutral que se da a  $P^*$ .

### 3.2 Opciones sobre bonos

Supongamos un derivado europeo con madurez  $T$  y payoff

$$(P(T, T^*) - K)_+$$

donde  $T^* > T$  y  $P(T, T^*)$  es el precio de un bono que madura en  $T^*$ . El propósito es valorar y recubrir este derivado, esta opción de compra del bono que madura en  $T^*$ . Parece razonable tratar de recubrir el derivado a partir del stock sin riesgo

$$S_t^0 = e^{\int_0^t r(s) ds}$$

y del stock con riesgo

$$P(t, T^*) = P(0, T^*) \exp\left\{\int_0^t \left(r(s) - \frac{1}{2} (\sigma_s^{T^*})^2\right) ds + \int_0^t \sigma_s^{T^*} d\tilde{W}_s\right\},$$

de manera que una estrategia será un par de procesos adaptados  $(\phi_t^0, \phi_t^1)_{0 \leq t \leq T^*}$  que representan la cantidad de activos sin riesgo y de bonos con madurez  $T^*$  respectivamente. El valor de la cartera autofinanciada en el instante  $t$  vendrá dado por

$$V_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 P(t, T^*)$$

y la condición de autofinanciación implica que

$$\begin{aligned} dV_t &= \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t^1 dP(t, T^*) \\ &= \phi_t^0 r(t) e^{\int_0^t r(s) ds} dt + \phi_t^1 P(t, T^*) (r(t) dt + \sigma_t^{T^*} d\tilde{W}_t) \\ &= (\phi_t^0 r(t) e^{\int_0^t r(s) ds} + \phi_t^1 r(t) P(t, T^*)) dt + \phi_t^1 \sigma_t^{T^*} P(t, T^*) d\tilde{W}_t \\ &= r(t) V_t dt + \phi_t^1 \sigma_t^{T^*} P(t, T^*) d\tilde{W}_t, \end{aligned}$$

entonces impondremos las condiciones  $\int_0^T |r(t) V_t| dt < \infty$  y  $\int_0^T |\phi_t^1 \sigma_t^{T^*} P(t, T^*)|^2 dt < \infty$ , para que lo anterior esté bien definido.

**Definición 3.2.1** Una estrategia  $\phi = (\phi_t^0, \phi_t^1)_{0 \leq t \leq T}$  es admisible si es autofinanciada y su valor descontado,  $\tilde{V}_t$ , es no negativo.

**Proposición 3.2.1** Sea  $T < T^*$ . Supongamos que  $\sup_{0 \leq t \leq T} r(t) < \infty$  c.s. y que  $\sigma_t^{T^*} \neq 0$  c.s. para todo  $0 \leq t \leq T$ . Sea  $h$  una variable aleatoria  $\mathcal{F}_T$ -medible tal que  $\tilde{h} = e^{-\int_0^T r(s) ds} h$  sea de cuadrado integrable bajo  $P^*$ . Entonces existe una estrategia admisible que en el instante  $T$  vale  $h$  y su valor en  $t \leq T$  viene dado por

$$V_t = E_{P^*}(e^{-\int_t^T r(s) ds} h | \mathcal{F}_t).$$

**Demostración.**  $\tilde{h}$  es una variable  $\mathcal{F}_T$ -medible, con  $\mathcal{F}_T = \sigma(W_t, 0 \leq t \leq T)$ , además es de cuadrado integrable respecto a  $P^*$  por tanto

$$M_t := E_{P^*}(\tilde{h} | \mathcal{F}_t)$$



es una  $P^*$ -martingala de cuadrado integrable. Entonces  $(M_t Z_t)$  es una  $P$ -martingala, no necesariamente de cuadrado integrable. En efecto, sabemos que

$$E_{P^*}(\tilde{h}|\mathcal{F}_t) = \frac{E(\tilde{h}Z_T|\mathcal{F}_t)}{Z_t}$$

de manera que

$$M_t Z_t = E(\tilde{h}Z_T|\mathcal{F}_t)$$

y  $(E(\tilde{h}Z_T|\mathcal{F}_t))$  es claramente una  $P$ -martingala. De esta manera tendremos, por una ligera generalización del teorema (1.5.5),

$$M_t Z_t = E(M_t Z_t) + \int_0^t J_s dW_s,$$

con  $(J_s)$  adaptado y tal que  $\int_0^T J_s^2 ds < \infty$  c.s., por tanto

$$Z_t dM_t + M_t dZ_t + d\langle M, Z \rangle_t = J_s dW_s,$$

esto es

$$\begin{aligned} dM_t &= -M_t \frac{dZ_t}{Z_t} - \frac{1}{Z_t} d\langle M, Z \rangle_t + \frac{J_t}{Z_t} dW_t \\ &= -M_t q(t) dW_t - \frac{1}{Z_t} d\langle M, Z \rangle_t + \frac{J_t}{Z_t} dW_t \\ &= \left( \frac{J_t}{Z_t} - M_t q(t) \right) dW_t - \frac{1}{Z_t} d\langle M, Z \rangle_t \\ &= \left( \frac{J_t}{Z_t} - M_t q(t) \right) dW_t - \left( \frac{J_t}{Z_t} - M_t q(t) \right) q(t) dt \\ &= \left( \frac{J_t}{Z_t} - M_t q(t) \right) d\tilde{W}_t = H_t d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

con  $H_t := \frac{J_t}{Z_t} - M_t q(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Entonces si tomamos

$$\phi_t^1 = \frac{H_t}{\sigma_t^{T^*} \tilde{P}(t, T^*)}, \phi_t^0 = E_{P^*}(\tilde{h}|\mathcal{F}_t) - \frac{H_t}{\sigma_t^{T^*}}$$

tendremos una cartera autofinanciada con valor final  $e^{\int_0^T r(s) ds} M_T = h$ . En efecto

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= d(e^{-\int_0^t r(s) ds} V_t) = -e^{-\int_0^t r(s) ds} r(t) V_t dt + e^{-\int_0^t r(s) ds} dV_t \\ &= e^{-\int_0^t r(s) ds} (-r(t) V_t dt + r(t) V_t dt + \phi_t^1 \sigma_t^{T^*} P(t, T^*) d\tilde{W}_t) \\ &= \phi_t^1 \sigma_t^{T^*} \tilde{P}(t, T^*) d\tilde{W}_t = H_t d\tilde{W}_t = dM_t \end{aligned}$$

por tanto tendremos una cartera autofinanciada con valor final  $e^{\int_0^T r(s) ds} M_T = h$ . Es inmediato que  $\tilde{V}_t \geq 0$ . La condición  $\sup_{0 \leq t \leq T} r(t) < \infty$  c.s. garantiza que  $\int_0^T |r(t) V_t| dt < \infty$ . ■

### 3.3 Modelos basados en los tipos instantáneos

Consideremos una evolución de la forma

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t \quad (3.1)$$

y supongamos que

$$P(t, T) = F(t, r(t); T) \quad (3.2)$$

donde  $F$  es una función suave en  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . Evidentemente se deberá cumplir la condición de contorno  $F(T, r(T); T) = 1$ , cualquiera que sea el valor de  $r(T)$ . Consideremos dos bonos con distinta madurez  $T_1$  y  $T_2 > T_1$ . Supongamos que existe un portfolio  $(\phi_t^0, \phi_t^1)$ , autofinanciado, basado en la cuenta bancaria y en el bono que expira en  $T_2$  tal que en el instante  $T_3 < T_1$  replica el bono con madurez  $T_1$ , esto es

$$P(T_3, T_1) = \phi_{T_3}^0 e^{\int_0^{T_3} r(s)ds} + \phi_{T_3}^1 P(T_3, T_2)$$

entonces si no hay arbitraje se deberá cumplir la igualdad para todo  $t \leq T_3$ , de manera que

$$dP(t, T_1) = r(t)\phi_t^0 e^{\int_0^t r(s)ds} dt + \phi_t^1 dP(t, T_2)$$

y aplicando la fórmula de Itô a (3.2) tendremos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} dt + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial r} dr(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial r^2} \sigma^2 dt \\ &= r(t)\phi_t^0 S_t^0 dt + \phi_t^1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} dt + \phi_t^1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial r} dr(t) + \phi_t^1 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial r^2} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

Igualando los términos con  $dW_t$  y  $dt$  tendremos,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial r} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial r^2} \sigma^2 \\ &= r\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \phi_t^1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial r} \mu + \phi_t^1 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial r^2} \sigma^2 \\ & \sigma \frac{\partial F^{(1)}}{\partial r} = \phi_t^1 \frac{\partial F^{(2)}}{\partial r} \sigma \end{aligned} \quad (3.3)$$

de aquí

$$\phi_t^1 = \frac{\frac{\partial F^{(1)}}{\partial r}}{\frac{\partial F^{(2)}}{\partial r}}$$

y

$$r\phi_t^0 S_t^0 = r(F^{(1)} - \frac{\frac{\partial F^{(1)}}{\partial r}}{\frac{\partial F^{(2)}}{\partial r}} F^{(2)})$$

### 3.3. MODELOS BASADOS EN LOS TIPOS INSTANTÁNEOS J.M. Corcuera

substituyendo en (3.3) tendremos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\frac{\partial F^{(1)}}{\partial r}} \left( \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial r} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial r^2} \sigma^2 - r F^{(1)} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{\partial F^{(2)}}{\partial r}} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial r} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial r^2} \sigma^2 - r F^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Como esto es cierto para arbitrarios,  $T_1, T_2 < T$ , resultará que existe un  $\lambda(t, r)$  tal que

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sigma^2 - r F = \lambda \sigma \frac{\partial F}{\partial r} \quad (3.4)$$

Como vemos resulta una indeterminación en  $\lambda$  y esto tiene que ver con el hecho de que la dinámica de  $r(t)$  bajo  $P$  **no** determina los precios de los bonos.

Tenemos la siguiente proposición

**Proposición 3.3.1** *Sea  $P^*$  equivalente a  $P$  tal que*

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left\{-\int_0^T \lambda(s, r(s)) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(s, r(s)) ds\right\},$$

supongamos que

$$F(t, r(t); T) = E_{P^*}(e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t)$$

es  $C^{1,2}$ , entonces es una solución de (3.4) con la condición de contorno  $F(T, r(T); T) = 1$ . Además bajo  $P^*$

$$dr(t) = (\mu - \lambda \sigma) dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

con  $\tilde{W}$  ( $\mathcal{F}_t$ )  $P^*$ -movimiento browniano.

**Demostración.** Sea  $P^*$  equivalente a  $P$  tal que

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left\{-\int_0^T \lambda(s, r) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(s, r) ds\right\}$$

(una condición suficiente es la condición de Novikov  $E(\exp\{\frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(s, r(s)) ds\}) < \infty$ ) entonces sabemos, por el teorema de Girsanov, que

$$\tilde{W} = W + \int_0^\cdot \lambda(s, r(s)) ds$$

es un ( $\mathcal{F}_t$ )-browniano respecto a  $P^*$ . Si aplicamos la fórmula de Itô a  $e^{-\int_0^t r(s) ds} F(t, r(t); T)$

tendremos:

$$\begin{aligned}
& e^{-\int_0^t r(s)ds} F(t, r(t); T) \\
&= F(0, r(0); T) + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sigma^2 - rF \right) ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} \frac{\partial F}{\partial r} \sigma dW_s \\
&= F(0, r(0); T) + \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sigma^2 - rF - \lambda \sigma \frac{\partial F}{\partial r} \right) ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_0^s r(u)du} \frac{\partial F}{\partial r} \sigma d\tilde{W}_s.
\end{aligned}$$

Entonces como  $e^{-\int_0^t r(s)ds} F(t, r(t); T) = E_{P^*}((e^{-\int_0^T r(u)du} | \mathcal{F}_t))$  resultará que  $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sigma^2 - rF - \lambda \sigma \frac{\partial F}{\partial r} = 0$ , y la condición de contorno  $F(T, r(T); T) = 1$  se cumple trivialmente. ■

Ante esta circunstancia se han propuesto diversos modelos para  $r(t)$  bajo la probabilidad neutral:

1. Vasicek

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW_t.$$

2. Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)} dW_t$$

3. Dothan

$$dr(t) = ar(t)dt + \sigma r(t) dW_t$$

4. Black-Derman-Toy

$$dr(t) = \Theta(t)r(t)dt + \sigma(t)r(t) dW_t$$

5. Ho-Lee

$$dr(t) = \Theta(t)dt + \sigma dW_t$$

6. Hull-White (Vasicek generalizado)

$$dr(t) = (\Theta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)dW_t$$

7. Hull-White (CIR generalizado)

$$dr(t) = (\Theta(t) - a(t)r(t))dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}dW_t$$

### 3.3. MODELOS BASADOS EN LOS TIPOS INSTANTÁNEOS J.M. Corcuera

#### 3.3.1 Inversión de la curva de tipos

En estos modelos tenemos una serie de parámetros desconocidos, que denotaremos globalmente por  $\alpha$ , estos parámetros No pueden estimarse a partir de la observación de la evolución de los valores de  $r(s)$  ya que estos evolucionan en realidad bajo  $P$  y no bajo  $P^*$ . Donde si aparece el efecto de la  $P^*$  es en los precios reales de los bonos ya que si el modelo es correcto

$$P(t, T) = E_{P^*}(e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t) = F(t, r(t); T, \alpha),$$

esto último si el modelo es markoviano bajo  $P^*$ . Entonces si por ejemplo la evolución de  $r$  bajo  $P^*$  viene dada por

$$dr(t) = \mu(t, r(t); \alpha)dt + \sigma(t, r(t); \alpha)dW_t$$

podemos tratar de resolver la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \sigma^2 - rF = 0, \quad (3.5)$$

$$F(T, r(T); T, \alpha) = 1 \quad (3.6)$$

y luego ajustar el valor de  $\alpha$  para que los valores que hemos obtenido de  $P(t, T) = F(t, r(t); T, \alpha)$  se parezcan a los valores observados de los bonos. Evidentemente determinados modelos darán lugar a ecuaciones más fáciles de resolver que otros.

#### 3.3.2 Estructuras de tipos afines.

**Definición 3.3.1** Si la estructura de tipos ("term structure")  $\{P(t, T); 0 \leq t \leq T\}$  tiene la forma

$$P(t, T) = F(t, r(t); T)$$

donde  $F$  tiene la forma

$$F(t, r(t); T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r}$$

donde  $A(t, T)$  y  $B(t, T)$  son funciones deterministas, entonces el modelo se dirá que tiene una estructura de tipos afín (Affine Term Structure: ATS).

La cuestión es qué elecciones de  $\mu$  y  $\sigma$  en la dinámica de  $r(t)$  bajo  $P^*$ :

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW_t$$

nos conducen a un modelo ATS. La ecuación de estructura (3.5) nos lleva a

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \left\{1 + \frac{\partial B}{\partial t}\right\}r - \mu B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 = 0$$

y la condición de contorno (3.6) a

$$A(T, T) = 0$$

$$B(T, T) = 0.$$

Entonces si  $\mu(t, r(t))$  y  $\sigma^2(t, r(t))$  son también afines, esto es

$$\begin{aligned}\mu(t, r(t)) &= \alpha(t)r + \beta(t) \\ \sigma(t, r(t)) &= \sqrt{(\gamma(t)r + \delta(t))}\end{aligned}$$

resultará que

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \beta(t)B + \frac{1}{2}\delta(t)B^2 - \left\{1 + \frac{\partial B}{\partial t} + \alpha(t)B - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2\right\}r = 0$$

y como esto debe ocurrir para todo valor de  $r(t)(\omega)$  tendremos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} - \beta(t)B + \frac{1}{2}\delta(t)B^2 &= 0 \\ 1 + \frac{\partial B}{\partial t} + \alpha(t)B - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2 &= 0.\end{aligned}$$

**Ejercicio 3.3.1** *Demuestra que salvo los modelos de Dothan y de Black-Derman-Toy el resto de modelos mencionados tienen una estructura de tipos afín.*

### 3.3.3 El modelo de Vasicek

Vamos a ilustrar la técnica anterior con el modelo de Vasicek. Este modelo se ha utilizado bastante en Alemania y Reino Unido.

$$dr(t) = (b - ar(t))dt + \sigma dW_t,$$

por tanto  $\alpha(t) = -a$ ,  $\beta(t) = b$ ,  $\gamma(t) = 0$  y  $\delta(t) = \sigma^2$ , de manera que

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} - bB + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 &= 0, \quad A(T, T) = 0 \\ 1 + \frac{\partial B}{\partial t} - aB &= 0, \quad B(T, T) = 0\end{aligned}\tag{3.7}$$

Es fácil ver que (si  $a \neq 0$ )

$$B(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)}),$$

ahora de (3.7) obtenemos

$$A(t, T) = \frac{\sigma^2}{2} \int_t^T B^2 dt - b \int_t^T B dt$$

y substituyendo la expresión de  $B$  obtenemos

$$A(t, T) = \frac{B(t, T) - (T-t)}{a^2} \left(ab - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \frac{\sigma^2}{4a} B^2(t, T),$$

recordemos que

$$P(t, T) = \exp\{-(T-t)R(t, T)\}$$

### 3.3. MODELOS BASADOS EN LOS TIPOS INSTANTÁNEOS J.M. Corcuera

donde  $R(t, T)$  era el tipo de interés continuo para el periodo  $[t, T]$ , se trata de un tipo promedio en el intervalo  $[t, T]$ , entonces como

$$P(t, T) = \exp\{A(t, T) - B(t, T)r(t)\},$$

resulta que

$$R(t, T) = -\frac{A(t, T) - B(t, T)r(t)}{T - t},$$

se obtiene entonces que en nuestro modelo

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R(t, T) = \frac{b}{a} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

y esto es considerado como una imperfección del modelo.

**Ejercicio 3.3.2** *Considera el modelo anterior con  $a > 0$ . a) Resuelve la ecuación diferencial estocástica explícitamente y determina la distribución de  $r(t)$ . b) Cuando  $t \rightarrow \infty$ , la distribución de  $r(t)$  tiende a una distribución límite. Mostrar que es una distribución  $N(b/a, \sigma/\sqrt{2a})$ .*

### 3.3.4 El modelo de Ho-Lee

En el modelo de Ho-Lee

$$dr(t) = \Theta(t)dt + \sigma dW_t$$

de manera que  $\alpha(t) = \gamma(t) = 0$ ,  $\beta(t) = \Theta(t)$  y  $\delta(t) = \sigma^2$ . Tenemos entonces las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} - \Theta(t)B + \frac{\sigma^2}{2}B^2 &= 0, & A(T, T) &= 0 \\ 1 + \frac{\partial B}{\partial t} &= 0, & B(T, T) &= 0 \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} B(t, T) &= T - t \\ A(t, T) &= \int_t^T \Theta(s)(s - T)ds + \frac{\sigma^2}{2} \frac{(T - t)^3}{3}. \end{aligned}$$

Notemos que al contrario del modelo anterior no tenemos aparentemente una expresión explícita en términos de los parámetros, ahora tenemos un parámetro infinito-dimensional  $\Theta(s)$ . Una manera de estimarlo es tratar de ajustar la estructura de tipos inicial observada  $\{\hat{P}(0, T), T \geq 0\}$ , con los valores teóricos. Esto es

$$P(0, T) \approx \hat{P}(0, T), T \geq 0$$

Esto conduce a

$$-\frac{\partial^2 \log P(0, T)}{\partial T^2} \approx -\frac{\partial^2 \log \hat{P}(0, T)}{\partial T^2} = \frac{\partial \hat{f}(0, T)}{\partial T}$$

y por tanto

$$\Theta(T) = \frac{\partial \hat{f}(0, T)}{\partial T} + \sigma^2 T$$

**Ejercicio 3.3.3** Sean  $(W_1, W_2, \dots, W_n)$   $n$  movimientos Brownianos independientes y sean  $X_i, i = 1, \dots, n$ , procesos de Ornstein-Uhlenbeck soluciones de

$$dX_i(t) = -aX_i(t)dt + \sigma dW_i(t), i = 1, \dots, n.$$

Considerar el proceso

$$r(t) := X_1^2(t) + \dots + X_n^2(t).$$

Mostrar que

$$dr(t) = (n\sigma^2 - 2ar(t))dt + 2\sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

donde  $W$  es un movimiento Browniano estándar.

### 3.4 Modelos basados en los tipos a plazo

El principal inconveniente de los modelos basados en tipos instantáneos es su dificultad para capturar la estructura de los tipos observada en el instante inicial. Una manera alternativa es modelizar los tipos a plazo  $f(t, u)$  y utilizar la relación  $r(t) = f(t, t)$ , éste es el enfoque de Heath-Jarrow-Morton (HJM). Recordemos que

$$P(t, u) = \exp\left\{-\int_t^u f(t, s)ds\right\},$$

de manera que los  $f(t, s)$  representan los tipos instantáneos (en  $s$ ) "anticipados" por el mercado en  $t$ . Suponamos que bajo una probabilidad neutral  $P^*$

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)d\tilde{W}_t \quad (3.8)$$

con

$$f(0, T) = \hat{f}(0, T).$$

Vamos a tratar de deducir la evolución de  $P(t, u)$  a partir de la de  $f(t, T)$ . Si escribimos  $X_t = -\int_t^u f(t, s)ds$ , tenemos  $P(t, u) = e^{X_t}$  y de la ecuación (3.8) obtenemos

$$\begin{aligned} dX_t &= f(t, t)dt - \int_t^u df(t, s)ds = \\ &= f(t, t)dt - \int_t^u \alpha(t, s)dt ds - \int_t^u \sigma(t, s)d\tilde{W}_t ds \\ &= (f(t, t) - \int_t^u \alpha(t, s)ds)dt - \left(\int_t^u \sigma(t, s)ds\right)d\tilde{W}_t, \end{aligned}$$



donde hemos aplicado un Fubini "estocástico". De manera que

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, u)}{P(t, u)} &= dX_t + \frac{1}{2}d\langle X \rangle_t \\ &= (f(t, t) - \int_t^u \alpha(t, s)ds)dt - \left( \int_t^u \sigma(t, s)ds \right) d\tilde{W}_t \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \int_t^u \sigma(t, s)ds \right)^2 dt \\ &= (f(t, t) - \int_t^u \alpha(t, s)ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^u \sigma(t, s)ds \right)^2)dt \\ &\quad - \left( \int_t^u \sigma(t, s)ds \right) d\tilde{W}_t. \end{aligned}$$

Entonces si comparamos con lo obtenido en (3.1.1) y tenemos en cuenta que  $f(t, t) = r(t)$  resultará que

$$- \int_t^u \alpha(t, s)ds + \frac{1}{2} \left( \int_t^u \sigma(t, s)ds \right)^2 = 0$$

de manera que

$$\alpha(t, u) = \left( \int_t^u \sigma(t, s)ds \right) \sigma(t, u)$$

y podemos reescribir la ecuación de evolución (3.8) como

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \left( \int_t^T \sigma(t, s)ds \right) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}_t,$$

notemos que entonces todo depende de  $\sigma(t, s)$ , es decir de cierta volatilidad. Hemos "eliminado" la tendencia  $\alpha(t, u)$ , como en cierta manera ocurría en el modelo de Black-Scholes.

Entonces el algoritmo para el uso de un modelo HJM es

1. Especificar la elección de las volatilidades  $\sigma(t, s)$
2. Integrar  $df(t, T) = \sigma(t, T) \left( \int_t^T \sigma(t, s)ds \right) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}_t$  con la condición inicial  $f(0, T) = \hat{f}(0, T)$ .
3. Calcular los precios de los bonos por la fórmula  $P(t, T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t, s)ds\right\}$ .
4. Utilizar los resultados anteriores para calcular los precios de los derivados.

**Ejemplo 3.4.1** Supongamos que  $\sigma(t, T)$  es constante, constante que denotamos también por  $\sigma$ . Entonces

$$df(t, T) = \sigma^2(T - t)dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

de manera que

$$f(t, T) = \hat{f}(0, T) + \sigma^2 t \left(T - \frac{t}{2}\right) + \sigma \tilde{W}_t$$

en particular

$$r(t) = f(t, t) = \hat{f}(0, t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma \tilde{W}_t$$

de manera que

$$dr(t) = \left( \frac{\partial \hat{f}(0, T)}{\partial T} \Big|_{T=t} + \sigma^2 t \right) dt + \sigma d\tilde{W}_t$$

pero este es el modelo de Ho-Lee ajustado a la estructura inicial de los tipos a plazo!

**Ejemplo 3.4.2** Una suposición habitual consiste en suponer que los tipos a plazo con mayor madurez fluctúan menos que los de madurez más corta. Para tener esto en cuenta podemos suponer por ejemplo que  $\sigma(t, T) = \sigma e^{-b(T-t)}$ ,  $b > 0$ , tendremos entonces que

$$\int_t^T \sigma(t, s) ds = \int_t^T e^{-b(s-t)} ds = -\frac{\sigma}{b} \left( e^{-b(T-t)} - 1 \right),$$

y

$$df(t, T) = -\frac{\sigma^2}{b} e^{-b(T-t)} (e^{-b(T-t)} - 1) dt + \sigma e^{-b(T-t)} d\tilde{W}_t.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} f(t, T) &= f(0, T) + \frac{\sigma^2 e^{-2bT}}{2b^2} (1 - e^{2bt}) - \frac{\sigma^2 e^{-bT}}{b^2} (1 - e^{bt}) \\ &\quad + \sigma e^{-bT} \int_0^t e^{bs} d\tilde{W}_s, \end{aligned}$$

y en particular

$$\begin{aligned} r(t) &= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2b^2} (e^{-2bt} - 1) - \frac{\sigma^2}{b^2} (e^{-bt} - 1) \\ &\quad + \sigma e^{-bt} \int_0^t e^{bs} d\tilde{W}_s, \end{aligned}$$

que es una generalización del modelo de Vasicek.

### 3.4.1 La ecuación de Musiela

Definamos

$$r(t, x) := f(t, t + x)$$

y supongamos un modelo del tipo HJM bajo una probabilidad neutral, de manera que

$$df(t, T) = \sigma(t, T) \left( \int_t^T \sigma(t, s) ds \right) dt + \sigma(t, T) d\tilde{W}_t,$$

tenemos la siguiente proposición

**Proposición 3.4.1**

$$dr(t, x) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} r(t, x) + \sigma_0(t, x) \left( \int_0^x \sigma_0(t, s) ds \right) dt + \sigma_0(t, x) d\tilde{W}_t \right.$$

donde

$$\sigma_0(t, x) := \sigma(t, t + x)$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} dr(t, x) &= df(t, T)|_{T=t+x} + \frac{\partial}{\partial T} f(t, T)|_{T=t+x} dt \\ &= \sigma(t, t + x) \left( \int_t^{t+x} \sigma(t, s) ds \right) dt + \sigma(t, t + x) d\tilde{W}_t \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} r(t, x) dt \end{aligned}$$

■

Notemos que la ecuación de Musiela es una ecuación diferencial estocástica infinito-dimensional o una ecuación en derivadas parciales estocástica.

**3.4.2 Bonos con cupones y swaps****Bonos con cupones fijos**

El más simple de los bonos con cupones es el bono con cupones fijados. Es un bono que en puntos intermedios proporciona unos pagos predeterminados (cupones) al poseedor del bono. La descripción formal es la siguiente:

- Fijamos unos instantes,  $T_0, T_1, \dots, T_n$ .  $T_0$  se interpreta como el instante de emisión del bono, mientras que  $T_1, \dots, T_n$  son los instantes de pago.
- En el instante  $T_i$  el propietario recibe la cantidad  $c_i$ .
- En  $T_n$  el propietario del bono recibe además  $K$ .

Es obvio que este bono puede ser replicado con una cartera con  $c_i$  bonos de cero cupones con madurez  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$  y  $K$  bonos de cero cupones de madurez  $T_n$ . De manera que su precio en cualquier instante  $t < T_1$  vendrá dado por

$$p(t) = KP(t, T_n) + \sum_{i=1}^n c_i P(t, T_i).$$

A menudo los cupones se determinan en términos de algún tipo de interés  $r_i$  en lugar de cantidades, de manera que por ejemplo

$$c_i = r_i(T_i - T_{i-1})K.$$

Para un cupon estándar los intervalos de tiempo son equiespaciados:

$$T_i = T_0 + i\delta,$$

y  $r_i = r$ , de manera que

$$p(t) = K \left( P(t, T_n) + r\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i) \right).$$

### Bonos con tipos flotantes

En muchos bonos con cupones el bono no se fija de antemano sino que se actualiza en cada periodo, un ejemplo es tomar  $r_i = L(T_{i-1}, T_i)$  donde  $L$  es el LIBOR del momento. Recordemos que

$$L(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1}) = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1$$

de manera (que si tomamos  $K = 1$ )

$$c_i = L(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1}) = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1.$$

Es fácil ver que podemos replicar esta cantidad vendiendo un bono (sin cupones) que madure en  $T_i$  y comprando uno que madure en  $T_{i-1}$ :

- Con el bono que vendemos tendremos en  $T_i$  un payoff  $-1$ .
- Con el bono que compramos, tendremos 1 en  $T_{i-1}$  y podemos comprar  $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$  bonos que maduren en  $T_i$  proporcionando un payoff  $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$ .
- El coste total es  $P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)$ .

Por tanto para cualquier instante  $t < T_0$  el precio del bono con cupones aleatorios será

$$p(t) = P(t, T_n) + \sum_{i=1}^n (P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)) = P(t, T_0)!$$

### Swaps de tipos de interés.

Hay muchas clases de swaps sobre tipos de interés pero todos ellos son básicamente un intercambio de pagos a un tipo fijo con pagos a un interés aleatorio. Vamos a considerar los llamados "forwards swaps settled in arrears". Denotemos por  $K$  el nominal y  $R$  el ("swap rate") interés fijo. Supongamos unos instantes  $T_i$  equiespaciados, en el instante  $T_i$ ,  $i \geq 1$  recibimos

$$K\delta L(T_{i-1}, T_i)$$

a cambio de  $K\delta R$ , de manera que el balance en  $T_i$  es  $K\delta[L(T_{i-1}, T_i) - R]$ , el valor de este flujo de dinero en  $t \leq t_0$  será

$$\begin{aligned} & K(P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)) - K\delta R P(t, T_i) \\ & = KP(t, T_{i-1}) - K(1 + R\delta)P(t, T_i), \end{aligned}$$

de manera que en total

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{i=1}^n (KP(t, T_{i-1}) - K(1 + R\delta)P(t, T_i)) \\ &= KP(t, T_0) - KP(t, T_n) - KR\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i) \\ &= KP(t, T_0) - K \sum_{i=1}^n d_i P(t, T_i), \end{aligned}$$

con  $d_i = R\delta, i = 1, \dots, n-1$  y  $d_n = 1 + R\delta$ .

$R$  se suele tomar de manera que el valor del contrato sea cero a la hora de establecerlo Si se establece en  $t < T_0$ ,

$$R = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i)}.$$

### 3.4.3 "The foward measure"

Vamos a estudiar un procedimiento que puede ser útil a la hora de calcular precios de derivados en el mercado de bonos. Se trata del uso de la llamada "forward measure". Sea  $P^*$  la probabilidad neutral. Por definición  $P^*$  es una probabilidad tal que

$$\left( \tilde{P}(t, T) \right)_{0 \leq t \leq T}$$

son martingalas, cualquiera que sea  $T$ . Fijemos un tiempo  $T$  y consideremos los valores de los bonos con otra madurez  $\tilde{T} > T$ , con referencia al bono que madura en  $T$ :

$$U_{T, \tilde{T}}(t) := \frac{P(t, \tilde{T})}{P(t, T)},$$

es decir en vez de tomar como referencia ("numeraire") el valor de la cuenta bancaria, tomamos el bono que madura en  $T$ . Sea  $P^T$  una probabilidad respecto a la cual  $\left( U_{T, \tilde{T}}(t) \right)_{0 \leq t \leq T}$  son martingalas para cualquier  $\tilde{T} > T$ . A  $P^T$  le llamaremos "forward measure". Definamos una probabilidad en  $\mathcal{F}_T$ ,  $P^T$  tal que

$$\frac{dP^T}{dP^*} = \frac{e^{-\int_0^T r_s ds}}{P(0, T)}.$$

Veamos que es una "forward measure" (de hecho es la única por el teorema de representación de martingalas brownianas).

**Proposición 3.4.2** Si  $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$  es el valor de una cartera autofinanciada, entonces su valor descontado utilizando el bono  $P(t, T)$  como referencia ("numeraire") es una  $P^T$ -martingala. Es decir

$$\frac{V_t}{P(t, T)}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

es una  $P^T$ -martingala.

**Demostración.** Definamos

$$Z_t := E_{P^*} \left( \frac{e^{-\int_0^T r_s ds}}{P(0, T)} \mid \mathcal{F}_t \right),$$

entonces

$$Z_t = \frac{\tilde{P}(t, T)}{P(0, T)}.$$

Por la regla de Bayes (1.8)

$$\begin{aligned} E_{P^T} \left( \frac{V_T}{P(T, T)} \mid \mathcal{F}_t \right) &= E_{P^T} (V_T \mid \mathcal{F}_t) = \frac{E_{P^*} (V_T Z_T \mid \mathcal{F}_t)}{Z_t} \\ &= \frac{E_{P^*} (\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t)}{P(0, T) Z_t} = \frac{\tilde{V}_t}{\tilde{P}(t, T)} \\ &= \frac{V_t}{P(t, T)}. \end{aligned}$$

■

**Corolario 3.4.1** El precio de cualquier  $T$ -payoff  $Y$  replicable viene dado por

$$P(t, T) E_{P^T} (Y \mid \mathcal{F}_t).$$

**Demostración.** Sea  $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$  la cartera que replica  $Y$ , entonces  $V_T = Y$  y por tanto

$$E_{P^T} (Y \mid \mathcal{F}_t) = \frac{V_t}{P(t, T)}.$$

■

**Proposición 3.4.3** Supongamos que

$$\frac{\partial}{\partial T} E_{P^*} (e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t) = E_{P^*} \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} \right) \mid \mathcal{F}_t \right),$$

entonces

$$E_{P^T} (r_T \mid \mathcal{F}_t) = f(t, T).$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 f(t, T) &= -\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial P(t, T)}{\partial T} = -\frac{1}{P(t, T)} \frac{\partial}{\partial T} E_{P^*}(e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t) \\
 &= -\frac{1}{P(t, T)} E_{P^*} \left( \frac{\partial}{\partial T} \left( e^{-\int_t^T r_s ds} \right) | \mathcal{F}_t \right) = \frac{1}{P(t, T)} E_{P^*}(r_T e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t) \\
 &= E_{P^T}(r_T | \mathcal{F}_t).
 \end{aligned}$$

■ Sea  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  un activo estrictamente positivo y denotemos por  $P^{(S)}$  la probabilidad (en  $\mathcal{F}_T$ ) que convierte a

$$\left( \frac{V_t}{S_t} \right)_{0 \leq t \leq T}$$

en martingala, donde  $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$  es una cartera autofinanciada. Veamos una fórmula general para el precio de una opción.

**Proposición 3.4.4** *Sea  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  un activo estrictamente positivo entonces el precio de una opción de compra con madurez  $T$  del activo  $S$  y strike  $K$  viene dado por*

$$\Pi(t; S) = S_t P^{(S)}(S_T \geq K | \mathcal{F}_t) - K P(t, T) P^T(S_T \geq K | \mathcal{F}_t).$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
 \Pi(t; S) &= E_{P^*}(e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t) \\
 &= E_{P^*}(e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K) \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}} | \mathcal{F}_t) \\
 &= E_{P^*}(e^{-\int_t^T r_s ds} S_T \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}} | \mathcal{F}_t) - K E_{P^*}(e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}} | \mathcal{F}_t) \\
 &= S_t P^{(S)}(S_T \geq K | \mathcal{F}_t) - K P(t, T) P^T(S_T \geq K | \mathcal{F}_t),
 \end{aligned}$$

con

$$\frac{dP^{(S)}}{dP^*} = \frac{e^{-\int_0^T r_s ds} S_T}{S_0}.$$

■ Supongamos que  $S$  es otro bono que madura en  $\bar{T} > T$ , entonces la opción (de madurez  $T$ ) sobre ese bono tendrá un precio dado por

$$\begin{aligned}
 \Pi(t; S) &= P(t, \bar{T}) P^{\bar{T}}(P(T, \bar{T}) \geq K | \mathcal{F}_t) - P(t, T) P^T(P(T, \bar{T}) \geq K | \mathcal{F}_t) \\
 &= P(t, \bar{T}) P^{\bar{T}} \left( \frac{P(T, T)}{P(T, \bar{T})} \leq \frac{1}{K} | \mathcal{F}_t \right) - K P(t, T) P^T \left( \frac{P(T, \bar{T})}{P(T, T)} \geq K | \mathcal{F}_t \right).
 \end{aligned}$$

Definamos,

$$F_B(t, T, \bar{T}) := \frac{P(t, T)}{P(t, \bar{T})}.$$

En nuestro contexto de estructuras afines

$$F_B(t, T, \bar{T}) = \frac{P(t, T)}{P(t, \bar{T})} = \exp\{-A(t, \bar{T}) - A(t, T) + (B(t, \bar{T}) - B(t, T))r_t\}$$

y respecto a  $P^*$

$$dF_B(t) = F_B(t)(\dots dt + (B(t, \bar{T}) - B(t, T))\sigma_t dW_t),$$

entonces respecto  $P^{\bar{T}}$  y a  $P^T$  tendremos

$$\begin{aligned} dF_B(t) &= F_B(t)(B(t, \bar{T}) - B(t, T))\sigma_t dW_t^{\bar{T}}, \\ dF_B^{-1}(t) &= -F_B^{-1}(t)(B(t, \bar{T}) - B(t, T))\sigma_t dW_t^T. \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} F_B(T) &= \frac{P(t, T)}{P(t, \bar{T})} \exp\left\{-\int_t^T \sigma_{\bar{T}, T}(s) dW_s^{\bar{T}} - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_{\bar{T}, T}^2(s) ds\right\}, \\ F_B^{-1}(T) &= \frac{P(t, \bar{T})}{P(t, T)} \exp\left\{\int_t^T \sigma_{\bar{T}, T}(s) dW_s^T - \frac{1}{2} \int_t^T \sigma_{\bar{T}, T}^2(s) ds\right\}. \end{aligned}$$

con

$$\sigma_{\bar{T}, T}(t) = -(B(t, \bar{T}) - B(t, T))\sigma_t$$

entonces si  $\sigma_t$  es **determinista** la ley de log  $L_T$  condicionada a  $\mathcal{F}_t$  es Gaussiana respecto de  $P^T$  y  $P^{\bar{T}}$  de varianza

$$\Sigma_{t, T, \bar{T}}^2 := \int_t^T \sigma_{\bar{T}, T}^2(s) ds,$$

$$\begin{aligned} \text{Ley} \left( \frac{\log F_B(T) - \log \frac{P(t, T)}{P(t, \bar{T})} + \frac{1}{2} \Sigma_{t, T, \bar{T}}^2}{\Sigma_{t, T, \bar{T}}} \middle| \mathcal{F}_t \right) &\sim N(0, 1) \text{ bajo } P^{\bar{T}} \\ \text{Ley} \left( \frac{\log F_B^{-1}(T) - \log \frac{P(t, \bar{T})}{P(t, T)} + \frac{1}{2} \Sigma_{t, T, \bar{T}}^2}{\Sigma_{t, T, \bar{T}}} \middle| \mathcal{F}_t \right) &\sim N(0, 1) \text{ bajo } P^T \end{aligned}$$

Notemos finalmente que

$$\begin{aligned} \Pi(t; S) &= P(t, \bar{T})P^{\bar{T}}\left(\frac{P(T, T)}{P(T, \bar{T})} \leq \frac{1}{K} \middle| \mathcal{F}_t\right) - KP(t, T)P^T\left(\frac{P(T, \bar{T})}{P(T, T)} \geq K \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= P(t, \bar{T})P^{\bar{T}}(F_B(T) \leq \frac{1}{K} \middle| \mathcal{F}_t) - KP(t, T)P^T(F_B^{-1}(T) \geq K \middle| \mathcal{F}_t) \\ &= P(t, \bar{T})P^{\bar{T}}(\log F_B(T) \leq -\log K \middle| \mathcal{F}_t) - KP(t, T)P^T(\log F_B^{-1}(T) \geq \log K \middle| \mathcal{F}_t) \\ &= P(t, \bar{T})\Phi(d_+) - KP(t, T)\Phi(d_-), \end{aligned} \tag{3.9}$$

con

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{P(t, \bar{T})}{KP(t, T)} \pm \frac{1}{2} \Sigma_{t, T, \bar{T}}^2}{\Sigma_{t, T, \bar{T}}}.$$



**Ejemplo 3.4.3** *En el modelo de Ho-Lee*

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{T},T} &= -\sigma(\bar{T} - T), \\ \Sigma_{t,T,\bar{T}} &= \sigma(\bar{T} - T)\sqrt{\bar{T} - t}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 3.4.4** *En el modelo de Vasicek*

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{T},T} &= \frac{\sigma}{a}e^{at}(e^{-a\bar{T}} - e^{-aT}), \\ \Sigma_{t,T,\bar{T}}^2 &= \frac{\sigma^2}{2a^3}(1 - e^{-2(T-t)})(1 - e^{-(\bar{T}-T)})^2.\end{aligned}$$

### Caps and Floors

Un "cap" es un contrato que protege de tener que pagar más que un tipo de interés preespecificado, "the cap rate",  $R$  aunque el préstamo sea a interés variable. También se puede definir el "floor" que es un contrato que garantiza que el tipo de interés va a estar siempre por encima del "floor rate"  $R$  aunque el préstamo sea a interés variable.

Técnicamente un cap es una suma de "caplets" que consisten en los siguientes contratos básicos.

- El intervalo  $[0, T]$  se divide en puntos equidistantes  $\delta$ :  $0 = T_0, T_1, \dots, T_n = T$ . Típicamente  $1/4$  de año o medio año.
- El "cap" funciona sobre una "cantidad principal" digamos  $K$  y el "cap rate" es  $R$ .
- El tipo de interés flotante es por ejemplo el LIBOR  $L(T_{i-1}, T_i)$ .
- El caplet  $i$  se define como un contrato con payoff en  $T_i$  dado por

$$K\delta(L(T_{i-1}, T_i) - R)_+.$$

**Proposición 3.4.5** *El valor de un "cap" con nominal  $K$  y "cap rate"  $R$  es el de una cartera de  $1 + R\delta$  opciones de venta que maduran en  $T_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  sobre bonos que maduran en  $T_i$  y con un precio de ejercicio  $\frac{1}{1+R\delta}$ .*

Notemos que

$$\text{Cap}(t) - \text{Floor}(t) = \text{Swap}(t).$$

## 3.5 Forwards and Futures

**Definición 3.5.1** *Sea  $X$  un payoff en  $T$ . Un contrato a plazo sobre  $X$  con instante de suministro  $T$  es un contrato establecido en  $t < T$  que especifica un precio a plazo  $f(t; T, X)$  que se pagará en  $T$  por recibir  $X$ . El precio  $f(t; T, X)$  se determina de manera que el contrato en  $t$  valga cero.*

**Proposición 3.5.1**

$$\begin{aligned} f(t; T, X) &= \frac{1}{P(t, T)} E_{P^*}(X \exp\{-\int_t^T r_s ds\} | \mathcal{F}_t) \\ &= E_{P^T}(X | \mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

**Definición 3.5.2** Sea  $X$  un payoff en  $T$ . Un contrato de futuros sobre  $X$  e instante de suministro  $T$  es un activo financiero con las siguientes propiedades

- Existe un "precio futuro"  $F(t; T, X)$  sobre  $X$  en cada instante  $t$ .
- En  $T$  el poseedor del contrato paga  $F(T; T, X)$  y recibe  $X$ .
- Para un intervalo de tiempo arbitrario  $(s, t]$  el poseedor recibe  $F(t; T, X) - F(s; T, X)$ .
- En cada instante el precio del contrato es cero.

**Proposición 3.5.2**

$$F(t; T, X) = E_{P^*}(X | \mathcal{F}_t).$$

**Corolario 3.5.1** Los precios futuros y los "forward" coinciden si y sólo si los tipos de interés son deterministas.

**Un modelo de Libor.**

En primer lugar notemos que

$$L(t; T_{i-1}, T_i) = -\frac{P(t, T_i) - P(t, T_{i-1})}{\delta P(t, T_i)},$$

de manera que

$$F_B(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} = 1 + \delta L(t; T_{i-1}, T_i)$$

con lo que

$$dF_B(t, T_{i-1}, T_i) = \delta dL(t; T_{i-1}, T_i),$$

con lo que, respecto a  $P^{T_i}$ , y en nuestro contexto de estructura afín

$$\begin{aligned} dL(t; T_{i-1}, T_i) &= F_B(t, T_{i-1}, T_i)(B(t, T_i) - B(t, T_{i-1}))\sigma_t dW_t^{T_i} \\ &= \frac{1}{\delta}(1 + \delta L(t; T_{i-1}, T_i))(B(t, T_i) - B(t, T_{i-1}))\sigma_t dW_t^{T_i}. \end{aligned}$$

Entonces la estructura de los LIBOR queda determinada. Otra manera de proceder es dar un modelo para los LIBOR, pero hay que hacerlo de manera que el modelo sea consistente y libre de oportunidades de arbitraje, una manera es que implique algún modelo para los forward libre de oportunidades de arbitraje.

Se puede ver, por un procedimiento de inducción hacia atrás (enfoque de Musiela y Rutkowski) que es posible construir un modelo LIBOR tal que

$$dL(t; T_{i-1}, T_i) = L(t; T_{i-1}, T_i) \lambda(t, T_{i-1}, T_i) dW_t^{T_i}, i = 1, \dots, n$$

con la condiciones iniciales

$$L(0; T_{i-1}, T_i) = -\frac{P(0, T_i) - P(0, T_{i-1})}{\delta P(0, T_i)}, i = 1, \dots, n.$$

En particular si tomamos  $\lambda(t, T_{i-1}, T_i)$  determinista tendremos que  $L(t; T_{i-1}, T_i)$  es lognormal (LLM), este modelo es muy usado.

**Proposición 3.5.3** *En un modelo LLM el precio de un cap ("in arrears") con strike  $K$  y "tenor-structure"  $T_i = T_0 + i\delta$ ,  $i = 1, \dots, n$  viene dado por*

$$\Pi(t) = \sum_{i=1}^n \delta P(t, T_i) (L(t; T_{i-1}, T_i) \Phi(d_{i+}) - K \Phi(d_{i-})),$$

donde

$$d_{i\pm} = \frac{\log \frac{L(t; T_{i-1}, T_i)}{K} \pm \frac{1}{2} v_i^2(t)}{v_i(t)},$$

donde

$$v_i^2(t) = \int_t^{T_{i-1}} \lambda^2(s, T_{i-1}, T_i) ds.$$

**Observación 3.5.1** *Si  $\lambda^2(s, T_{i-1}, T_i) = \sigma_i^2$ ,  $i = 1, \dots, n$  para ciertas constantes entonces tenemos la llamada fórmula de Black para caps.*

## 3.6 Miscelanea

### 3.6.1 Black-Scholes en el caso multidimensional

El mercado consistirá en  $(d+1)$  activos financieros  $S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d$  de manera que

$$dS_t^0 = S_t^0 r(t) dt, S_0^0 = 1,$$

y

$$dS_t^i = S_t^i (\mu^i(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j), i = 1, \dots, d$$

donde  $W = (W^1, \dots, W^d)$  es un browniano  $d$ -dimensional. Por simplicidad suponemos que  $\mu, \sigma$  y  $r$  son deterministas y cadlag. Consideraremos la filtración natural asociada a  $W$ .

Una estrategia de inversión será un proceso adaptado  $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d))_{0 \leq t \leq T}$  en  $R^{d+1}$ . El valor de la cartera en el instante  $t$  es el producto escalar

$$V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^d \phi_t^i S_t^i,$$

su valor descontado es

$$\tilde{V}_t(\phi) = e^{-\int_0^t r_s ds} V_t(\phi) = \phi_t \cdot \tilde{S}_t.$$

Supondremos que los activos pueden producir dividendos continuos (y deterministas)  $((\delta_t^1, \dots, \delta_t^d))_{0 \leq t \leq T}$  de manera que si la estrategia es autofinanciada

$$dV_t(\phi) = \sum_{i=0}^d \phi_t^i dS_t^i + \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_t^i \delta_t^i dt.$$

Busquemos una probabilidad bajo la cual los precios actualizados de las carteras autofinanciadas sean martingala. Sabemos que

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t &= d\left(e^{-\int_0^t r_s ds} V_t(\phi)\right) = -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} V_t dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dV_t \\ &= -r_t e^{-\int_0^t r_s ds} V_t dt + e^{-\int_0^t r_s ds} \left( \sum_{i=0}^d \phi_t^i dS_t^i + \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_t^i \delta_t^i dt \right) \\ &= e^{-\int_0^t r_s ds} r_t (\phi_t^0 S_t^0 - V_t) dt + e^{-\int_0^t r_s ds} \sum_{i=1}^d (\phi_t^i dS_t^i + \phi_t^i S_t^i \delta_t^i dt) \\ &= e^{-\int_0^t r_s ds} \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_t^i (\delta_t^i - r_t) dt + e^{-\int_0^t r_s ds} \sum_{i=1}^d \phi_t^i dS_t^i \\ &= e^{-\int_0^t r_s ds} \left( \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_t^i (\delta_t^i + \mu_t^i - r_t) dt + \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j \right) \\ &= e^{-\int_0^t r_s ds} \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) d\left( W_t^j + \sum_{k=1}^d (\sigma^{-1})^{jk}(t) (\delta_t^k + \mu_t^k - r_t) dt \right) \\ &= e^{-\int_0^t r_s ds} \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_t^i \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) d\tilde{W}_t^j \end{aligned}$$

con

$$\tilde{W}_t^j = W_t^j + \sum_{k=1}^d (\sigma^{-1})^{jk}(t) (\delta_t^k + \mu_t^k - r_t) dt, j = 1, \dots, d$$

Entonces por el teorema de Girsanov con  $\theta_j(t) = (\sigma^{-1})^{jk}(t) (r_t - \delta_t^k - \mu_t^k)$  resulta que  $(\tilde{W}_t^j)_{0 \leq t \leq T}$  es un browniano estándar  $d$ -dimensional con respecto a la probabilidad  $P^*$ :

$$dP^* = \Pi_{j=1}^d \exp\left\{-\int_0^T \theta_j(t) dW_t^j - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_j^2(t) dt\right\} dP.$$

Tendremos así que

$$E_{P^*}(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t) = \tilde{V}_t,$$

y cualquier  $T$ -payoff  $X$  que sea replicable tendrá un precio en  $t$  dado por

$$V_t = e^{\int_0^t r_s ds} E_{P^*}(\tilde{X}_T | \mathcal{F}_t).$$

Por otro lado si  $\tilde{X}_T$  es de cuadrado integrable el teorema de representación de martingalas permite escribir

$$E_{P^*}(\tilde{X}_T | \mathcal{F}_t) = E_{P^*}(\tilde{X}_T) + \sum_{j=1}^d \int_0^t h_s^j d\tilde{W}_s^j,$$

con lo que podemos tomar

$$\phi_t^i = \frac{1}{\tilde{S}_t^i} \sum_{k=1}^d (\sigma_t^{-1})^{ik} h_t^k, i = 1, \dots, d.$$

**Observación 3.6.1** Hemos supuesto que  $(\sigma_t^{ij})$  es invertible y de aquí se deriva que el modelo está libre de arbitraje y es completo. Para la ausencia de arbitraje solo necesitamos que exista  $\theta(t)$  tal que  $\sum_{k=1}^d \sigma^{jk}(t) \theta_k(t) = \delta_t^j + \mu_t^j - r_t$ . En cambio para que el modelo sea completo necesitamos que  $(\sigma_t^{ij})$  sea invertible. De esta manera podemos tener modelos viables donde la dimensión de  $W$  sea mayor que el número de stocks pero entonces no serán completos.

### Precio de una opción de compra.

Notemos primero que bajo  $P^*$

$$dS_t^i = S_t^i ((r_t - \delta_t^i) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} d\tilde{W}_t^j), i = 1, \dots, d,$$

con lo que  $(S_t^i e^{-(r_t - \delta_t^i)t})$  son martingalas bajo  $P^*$ :

$$\begin{aligned} dS_t^i e^{-\int_0^t (r_s - \delta_s^i) ds} &= e^{-\int_0^t (r_s - \delta_s^i) ds} (-S_t^i (r_t - \delta_t^i) dt + dS_t^i) \\ &= \sum_{j=1}^d \sigma_t^{ij} S_t^i d\tilde{W}_t^j. \end{aligned}$$

Entonces

$$C_t := E_{P^*} \left( \frac{(S_T^i - K)_+}{\exp\{\int_t^T r_s ds\}} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \exp\left\{ \int_t^T \delta_s^i ds \right\} E_{P^*} \left( \frac{(S_T^i - K)_+}{\exp\{-\int_t^T (r_s - \delta_s^i) ds\}} \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

bajo  $P^*$ , y condicionando a  $\mathcal{F}_t$ ,

$$\log S_T^i - \log S_t^i \sim N \left( \int_t^T (r_s - \delta_s^i) ds - \frac{1}{2} \int_t^T \sum_{j=1}^d (\sigma_s^{ij})^2 ds, \int_t^T \sum_{j=1}^d (\sigma_s^{ij})^2 ds \right).$$

Por tanto

$$C_t = \exp\left\{\int_t^T \delta_s^i ds\right\} \left( S_t^i \Phi(d_+) - K \exp\left\{\int_t^T (r_s - \delta_s^i) ds\right\} \Phi(d_-) \right),$$

con

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S_t^i}{K} + \int_t^T \left( r_s - \delta_s^i \pm \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (\sigma_s^{ij})^2 \right) ds}{\sqrt{\int_t^T \sum_{j=1}^d (\sigma_s^{ij})^2 ds}}.$$

Si volvemos al caso  $d = 1$ , a un modelo de Black-Scholes con tipo de interés  $r$  y tasa de dividendos constante  $\delta$ , tenemos la siguiente fórmula para el precio de una opción de compra, con strike  $K$ , de un stock que genera dividendos.

$$C_t = S_t e^{-\delta(T-t)} \Phi(d_+) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_-),$$

con

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S_t}{K} + (r - \delta \pm \frac{1}{2} \sigma^2)(T-t)}{\sigma \sqrt{(T-t)}}.$$

### Opciones sobre divisas.

Un divisa se puede pensar como un tipo de stock cuyo valor por unidad en  $t$ , digamos  $X_t$ , varía de manera aleatoria y que genera unos intereses (o dividendos) al tipo foráneo, digamos  $r_f$ . De esta manera, si suponemos un modelo de Black-Scholes para  $X$  y tipo de interés (doméstico)  $r_d$ , el valor de una opción de compra con strike  $K$  se obtendrá por la fórmula anterior con  $\delta = r_f$  y  $r = r_d$ .

**Observación 3.6.2** *Los razonamientos anteriores se pueden extender al caso en que  $\mu, r$  y  $\delta$  sean procesos adaptados, cadlag y tales que*

$$\prod_{j=1}^n \exp\left\{-\int_0^t \theta_j(s) dW_s^j - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_j^2(s) ds\right\}, 0 \leq t \leq T,$$

*sea una martingala. También al caso en que  $\sigma$  sea adaptada e invertible para todo  $\omega$  y  $t$ , pero ya no tendremos formulas del "tipo Black-Scholes" ya que los valores "descontados" de los stocks ya no serán log-normales.*

### Stock options

Supongamos que los bonos tienen una volatilidad  $\sigma_B(t, T)$ ,  $d$ -dimensional, determinista y cadlag, esto es, que bajo la probabilidad neutral  $P^*$

$$dP(t, T) = P(t, T)(\dots dt + \sigma_B(t, T) \cdot dW_t)$$

y que tenemos un stock  $S$  tal que bajo  $P^*$

$$dS_t = S_t(r_t dt + \sigma_S(t) \cdot dW_t),$$

donde  $\|\sigma_S(t) - \sigma_B(t, T)\| > 0$ ,  $\sigma_S(t)$  determinista y cadlag. Entonces el precio de una opción de compra con strike  $K$  viene dado por

$$C_t = S_t \Phi(d_+) - KP(t, T) \Phi(d_-), \quad (3.10)$$

con

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S_t}{KP(t, T)} \pm \frac{1}{2} \Sigma_t^2}{\Sigma_t},$$

donde

$$\Sigma_t^2 = \int_t^T \|\sigma_S(u) - \sigma_B(u, T)\|^2 du.$$

En efecto por la fórmula general que vimos

$$\Pi(t; S) = S_t P^{(S)}(S_T \geq K | \mathcal{F}_t) - KP(t, T) P^T(S_T \geq K | \mathcal{F}_t),$$

bajo  $P^*$

$$F_S(t) := \frac{P(t, T)}{S_t} = \frac{P(0, T)}{S_0} \exp\left\{\int_0^t \dots du + \int_0^t (\sigma_S(u) - \sigma_B(u, T)) \cdot dW_u\right\},$$

y bajo  $P^{(S)}$

$$dF_S(t) = \|\sigma_S(u) - \sigma_B(u, T)\| dW_u^{(S)},$$

donde  $W^{(S)}$  es un browniano. Análogamente bajo  $P^T$

$$F_B(t) := \frac{S_t}{P(t, T)}$$

$$dF_B(t) = -\|\sigma_S(u) - \sigma_B(u, T)\| dW_u^T,$$

con  $W^T$  browniano bajo  $P^T$ . Y siguiendo los mismos cálculos que en (3.9) obtenemos (3.10).

### Volatilidad estocástica

Supongamos que bajo  $P^*$

$$dS_t = S_t(r_t dt + \sigma_S(W_t^2, t) dW_t^1)$$

donde  $W_t^1$  y  $W_t^2$  son dos brownianos estándar independientes. Entonces el precio de una opción de compra con strike  $K$  viene dado por

$$E(S_t \Phi(d_+) - KP(t, T) \Phi(d_-) | \mathcal{F}_t),$$

con

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S_t}{KP(t, T)} \pm \frac{1}{2} \Sigma_t^2}{\Sigma_t},$$

donde

$$\Sigma_t^2 = \int_t^T (\sigma_S(W_u^2, u) - \sigma_B(W_u^2, u, T))^2 du.$$

Estamos suponiendo que

$$dP(t, T) = P(t, T)(\dots dt + \sigma_B(W_t^2, t, T)dW_t^1).$$

Si  $\sigma_B(W_u^2, u, T) = 0$  obtenemos la fórmula de Hull-White.

Si suponemos una covarianza  $\int_0^t \rho_s ds$  entre  $W_t^1$  y  $W_t^2$  obtendríamos

$$E(S_t \xi_t \Phi(d_+) - KP(t, T) \Phi(d_-) | \mathcal{F}_t),$$

con

$$d_{\pm} = \frac{\log \frac{S_t \xi_t}{KP(t, T)} \pm \frac{1}{2} \hat{\Sigma}_t^2}{\hat{\Sigma}_t},$$

donde

$$\hat{\Sigma}_t^2 = \int_t^T (\sqrt{1 - \rho_u^2} \sigma_S(W_u^2, u) - \sigma_B(W_u^2, u, T))^2 du$$

and

$$\xi_t = \exp\left\{\int_t^T \rho_u \sigma_S(W_u^2, u) dW_u^2 - \frac{1}{2} \int_t^T \rho_u^2 \sigma_S^2(W_u^2, u) du\right\}.$$

### Métodos de Fourier para el cálculo de precios.

Definimos la transformada de Fourier de  $f$  por

$$(\mathbf{F}f)(v) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixv} f(x) dx.$$

Si  $f$  es integrable entonces siempre existe. Su inversa, si  $f$  es integrable, viene dada, para casi todo punto, por

$$(\mathbf{F}^{-1}f)(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixv} f(x) dx.$$

Supongamos que el modelo es, bajo  $P^*$ , de la forma

$$S_t = e^{rt+X_t},$$

donde  $(X_t)$  es un proceso con incrementos independientes y homogéneos y densidad  $f_{X_t}(x)$ . El precio de un call con strike  $e^k$  vendrá dado por

$$C(k) = e^{-rT} E((e^{rT+X_t} - e^k)_+).$$

Entonces si consideramos la función

$$z_T(k) = e^{-rT} E((e^{rT+X_t} - e^k)_+) - (1 - e^{k-rT})_+,$$

resulta que

$$\zeta_T(v) := (\mathbf{F}z_T)(v) = e^{ivrT} \frac{\varphi_{X_T}(v-i) - 1}{iv(iv+1)},$$



donde  $\varphi_{X_T}$  es la función característica de  $X_T$ .  $C(k)$  se puede obtener ahora invirtiendo  $\zeta_T(v)$ . En efecto

$$z_T(k) = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} f_{X_T}(x)(e^{rT+x} - e^k)(\mathbf{1}_{\{rT+x>k\}} - \mathbf{1}_{\{rT>k\}})dx.$$

Entonces si aplicamos Fubini a

$$\begin{aligned} \zeta_T(v) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ikv} z_T(k) dk \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} e^{ikv} \left( \int_{\mathbb{R}} f_{X_T}(x)(e^{rT+x} - e^k)(\mathbf{1}_{\{rT+x>k\}} - \mathbf{1}_{\{rT>k\}})dx \right) dk \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} f_{X_T}(x) \left( \int_{rT}^{rT+x} e^{ikv}(e^{rT+x} - e^k)dk \right) dx \\ &= e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} f_{X_T}(x) \left( e^{rT+x} \left[ \frac{e^{ikv}}{iv} \right]_{rT}^{rT+x} - \left[ \frac{e^{k(iv+1)}}{iv+1} \right]_{rT}^{rT+x} \right) dx \\ &= e^{irTv} \int_{\mathbb{R}} f_{X_T}(x) \frac{e^{x(iv+1)} - e^x}{iv} dx - e^{irTv} \int_{\mathbb{R}} f_{X_T}(x) \frac{e^{x(iv+1)} - 1}{iv+1} dx \\ &= \frac{e^{irTv}}{iv} (\varphi_{X_T}(v-i) - 1) - \frac{e^{irTv}}{iv+1} (\varphi_{X_T}(v-i) - 1) \\ &= \frac{e^{irTv}}{iv(iv+1)} (\varphi_{X_T}(v-i) - 1). \end{aligned}$$

El siguiente paso es invertir  $\zeta_T(v)$ , ya que se supone que conocemos  $\varphi_{X_T}$ , con lo que recuperamos  $z_T(k)$ .

Para hacer este último paso se suele recurrir a métodos numéricos. Si queremos calcular la transformada de Fourier inversa de  $f(x)$  podemos hacer la aproximación

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-iux} f(x) dx \approx \int_{-A/2}^{A/2} e^{-iux} f(x) dx \approx \frac{A}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k f(x_k) e^{-iux_k},$$

donde  $x_k = -A/2 + k\Delta$ , con  $\Delta = A/(N-1)$ ,  $w_k$  depende del tipo de aproximación, por ejemplo con la aproximación trapezoidal  $w_0 = w_{N-1} = 1/2$  y el resto de pesos 1. Si ahora tomamos  $u = u_n = \frac{2\pi n}{N\Delta}$  tendremos que

$$F^{-1}(f)(u_n) \approx \frac{A}{N} e^{iu_n A/2} \sum_{k=0}^{N-1} w_k f(x_k) e^{-2\pi ink/N}.$$

Entonces existe un algoritmo "fast Fourier transform" (FFT) para calcular de manera muy rápida

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-2\pi ink/N}, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

que sólo requiere  $O(N \log N)$  operaciones. Notemos que el paso en la red de puntos  $u_n$  viene dado por  $d = \frac{2\pi}{N\Delta}$ , de manera que  $d\Delta = \frac{2\pi}{N}$  de manera que si queremos  $d$  y  $\Delta$  pequeños tendremos que aumentar  $N$  de manera importante. Otra limitación es que en el algoritmo FFT la red de puntos tiene que ser uniforme y el número de puntos una potencia de 2 ( $N = 2^k$ ).

# Bibliography

- [1] T. Björk. (1998). Arbitrage Theory in Continuous Time. Oxford University Press: Oxford.
- [2] R.A. Dana y M. Jeanblanc (2002). Financial Markets in Continuous Time. Springer: Berlin.
- [3] R.J. Elliot y P.E. Kopp (1999). Mathematics of Financial Markets. Springer: Berlin.
- [4] F. Klebaner (1998). Introducción to Stochastic Calculus with Applications. Imperial College Press: London.
- [5] D. Lamberton y B. Lapeyre. (1996). Stochastic Calculus Applied to Finance. Chapman and Hall: New York.
- [6] M. Musiela y M. Rutkowski (1997). Martingale methods in Financial Modelling. Springer: Berlin.
- [7] S. Pliska (1997). Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models. Blackwell Publishers: Cornwall.
- [8] D. Revuz y M. Yor (1999) (Third Edition). Continuous Martingales and Brownian Motion. Springer-Verlag: New York.
- [9] A. Shiryaev (1999). Essentials of Stochastic Finance. World Scientific: Singapore.
- [10] D. Sondermann (2006). Introduction to Stochastic Calculus for Finance. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 579. Springer: Berlin.