

Mecânica Clássica I

Takeshi Kodama
Instituto de Física - UFRJ

November 25, 2004

Contents

I	Introdução	5
1	Ciência e Método Científico	6
2	Conceito de Modelo - Simplificação, Idealização, Abstração	8
3	Importância da Linguagem Universal -Matemática	10
II	Movimento Unidimensional	12
4	Base Matemática	12
4.1	Equação Diferencial Ordinária	12
4.2	Equação Linear de Primeira Ordem	15
4.3	Expansão em Série de Taylor de Uma Função	16
4.3.1	Raio de Convergência	21
4.3.2	Variável complexa	21
4.3.3	Forma polar de números complexos	22
4.4	Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem (Geral)	23
5	Problemas	25
6	Exemplo de Modelagem de Problemas	31
7	Equação de 2ª Ordem	35
7.1	Sistema Massa+Mola - Oscilador Harmônico Amortecido	35
7.2	Caso Homogêneo	38
8	Equação Diferencial de segunda ordem linear com coeficientes constantes	40
8.1	Caso Homogênea: Método de Equação Característica	40

8.2	Uso de método da álgebra linear	41
8.3	Comportamento da Solução	46
8.3.1	Caso a)	46
8.3.2	Caso b)	47
8.3.3	Caso c)	48
8.4	Caso Não Homogêneo	50
8.5	Função δ de Dirac	52
8.5.1	Derivadas de função δ	58
8.5.2	Derivada de uma Função descontínua	59
8.6	Método de Função de Green	60
8.7	Construção da Função de Green	61
8.8	Função de Green de Oscilador Harmônico Amortecido	64
8.9	Ressonância	67
8.10	Pêndulo	75
8.10.1	Escolha das variáveis e Equação de Movimento	75
8.10.2	Presença de um vínculo entre variáveis	76
8.10.3	Representação paramétrica	77
8.10.4	Primeira Integral	78
8.10.5	Segunda Integral	79
8.10.6	Análise do comportamento da solução	80
8.10.7	Movimento Oscilatório	81
8.10.8	Regime Harmônico	82
8.10.9	Movimento Não Harmônico - correção perturbativa	84
8.10.10	Movimento Não Oscilatório	85
8.11	Força Conservativa e a Energia Potencial	87
8.12	Oscilação Harmônica em torno do ponto de Mínimo do Potencial	91
8.12.1	Expansão de Taylor do Potencial na vizinhança do ponto de equilíbrio	91
8.13	Estabilidade do movimento em torno do ponto de equilíbrio	93
9	Espaço de Fase	95
9.1	Momento Linear vs. Velocidade	95
9.2	Espaço de Fase e o Retrato do Movimento no Espaço de Fase	96
10	Problemas	100

III Movimento Tri- Dimensional 104

11	Vetor e Espaço Vetorial	104
----	-----------------------------------	-----

11.1	Produto Escalar	107
11.2	Forma de Vetor Coluna	114
11.3	Produto Vetorial	117
11.4	Símbolo de Levi-Civita	120
12	Problemas	121
13	Análise Vetorial	123
13.1	Problemas	125
13.2	Exemplo de Uso de Vetor	126
14	Derivada de um produto escalar, produto vetorial	129
14.1	Função de vetor, Gradiente	131
15	Problemas	137
16	Movimento de Uma Partícula no Espaço 3-Dimensional	140
16.1	Equação de Newton na forma vetorial e Sistema de Equações Acopladas	140
17	Exemplos Simples	141
17.1	Movimento na Ausência da Força - Sistema Não acoplado	141
17.2	Queda Livre	143
18	Forças Centrais	144
18.1	Momento Angular	146
18.2	Plano de Movimento	148
18.3	Base Comovente (Bi-dimensional)	154
18.4	Velocidade Areolar	157
18.5	Movimento Radial	158
18.6	Energia Cinética Radial e a Lei de Conservação da Energia	159
IV	Conservação de Energia em 3D	163
19	Energia, Trabalho e Potencial	163
19.1	Forças Conservadas e Energia Potencial	163
20	Análise vetorial II	171
20.1	Teorema de Stokes	173
21	A força Conservativa	177
22	Conservação da Energia	178
23	Importância da Função Hamiltoniana na Mecânica - Equação de Hamilton	180
23.1	Mudança de Variáveis numa Hamiltoniana e Momento General- izado - Pêndulo Esférico	183
24	Simetria e Lei de Conservação	189
25	Problemas	191

26	Força Gravitacional Newtoniana e Movimento Kepleriano	195
26.1	Movimento Circular	196
26.2	Estado Ligado	198
26.3	Estado Não Ligado	199
26.4	Trajectoria	199
26.5	Estado Ligado ($E < 0$)	201
26.6	Caso $E \geq 0$	204

V Complemento Matemático 205

27	Integração Múltipla e Jacobiana da Transformação de Variáveis	205
27.1	Integral Dúpla	205
27.2	Integral 3-dimensional	210
27.3	Integral n dimensional	213
27.4	Integral múltiplas com vetores	214

VI Sistema de Dois Corpos com Forças Conservativas 219

28	Ação e Reação e Lei de Conservação do Momento do Sistema do Centro de Massa	219
29	Centro de Massa e Coordenada Relativa	221
30	Problema de dois corpos com a força externa	226
31	Forças Conservativas e a Conservação de Energia Total	230
31.1	Força Central de 2 Corpos sem força externa	233

VII Lei de Transformação do sistema de referência e noção de Invariantes 235

32	Sistema de Referências e Transformação de Galilei	235
33	Rotação de sistema de coordenadas, quantidades covariantes sob a rotação	239
33.1	Tensor	246

VIII Transformação de Lorentz e Teoria de Relatividade Restrita 251

33.2	Simultaneidade, Contração de Lorentz, Dilatação do Tempo . . .	261
33.3	Covariância Relativística	266

33.4	Conservação de Momento	270
33.5	Reações, Energia de Ligação	276
33.6	Transformações Sucessivas de Lorentz, Adição de Velocidades . . .	277
34	Problemas	282

IX Processo de Espalhamento 287

35	Seção de Choque	287
35.1	Ângulos de Espalhamento	294
36	Espalhamento de Rutherford	297
36.1	Parametro de Impacto e o Ângulo de Espalhamento	297
36.2	Seção de Choque de Rutherford	302
36.3	Hamiltoniana de Sistema de Muitos Corpos	304
37	Pequena Oscilações em torno do Ponto de Equilíbrio	306
37.1	Exemplos	313
37.1.1	Exemplo I:	313
37.1.2	Exemplo II:	317

Part I

Introdução

Embora a Mecânica Clássica seja uma das disciplinas mais antigas da Física, os conceitos e métodos introduzidos na Mecânica Clássica formam uma base essencial para o estudo mais avançado, mesmo para a área de Física Moderna. Por exemplo, não seria possível falar sobre o procedimento de quantização sem noção sobre os conceitos básicos da estrutura Hamiltoniana da Mecânica. Ao mesmo tempo, na área da Mecânica Clássica propriamente dito há muitos desenvolvimentos completamente novos e, portanto, existem e estão surgindo muitos problemas fundamentais não resolvidos. Desta forma, ao contrário do que o nome diz, a *Mecânica Clássica* continua sendo uma das áreas de pesquisa de ponta mais importantes. Os estudos sobre sistemas não lineares, fenômenos caóticos, fractais, etc. são destes exemplos.

Um dos objetivos principais deste curso de Mecânica Clássica é introduzir vários métodos matemáticos para tratar certa classe de sistemas físicos que são governados pelas leis de Newton. Na verdade, quase todos os fenômenos que obser-

vamos em torno de nós são governados pelas leis de Newton. Assim, na Mecânica, usualmente tratamos apenas sistemas físicos nos quais a lei de Newton *por si* é o único elemento dinâmico necessário para compreender seu comportamento. Isto é, não tratamos fenômenos que envolvem as propriedades da matéria, a origem da natureza da interação, os fenômenos eletromagnéticos, etc.

Um outro ponto fundamental que gostaria de enfatizar neste curso, além do aspecto técnico-acadêmico da matéria, é que a estrutura da Mecânica Clássica é um excelente exemplo para ilustrar o método científico utilizado na Física, que é fundamental nos estudos da ciência em geral. Neste sentido, antes de iniciar o curso, vamos refletir um pouco sobre o que é a Ciência, o que é o método científico, e até, porque estudamos Ciência.

1. Ciência e Método Científico

O que distingue um estudo científico de uma ficção científica? Devem existir vários fatores. Mas, um dos mais fundamentais é que, enquanto uma ficção científica se propõe a curtir a imaginação sem compromisso, a Ciência assume uma responsabilidade sobre suas afirmações. É claro, uma afirmação científica pode ter sua origem na imaginação ou na criatividade. Mas, o que distingue a Ciência de uma ficção científica é que uma afirmação científica deve, no final das contas, ser sempre confrontada pelos fatos observacionais de forma universal.

Uma afirmação científica não é apenas afirmação sem base, mas deve ser posta como uma conclusão inevitável baseada numa série de raciocínios lógicos e observações experimentais. Neste sentido, se uma afirmação científica contradiz o fato observacional, então a origem desta contradição deve ser investigada mais cuidadosamente. Esta discrepância tem como origem, por exemplo, a interpretação dos dados, ou a suposição inicial do modelo, ou até o próprio princípio que foi utilizado. Muitas vezes, o que traz um novo salto no desenvolvimento da Ciência é justamente esta discrepância entre uma previsão teórica e os dados observacionais. Em outras palavras, nos sempre aprendemos muito pelos erros. Mas para isto, devemos sempre deixar bem claro a origem do erro.

Um outro aspecto importante é que uma afirmação científica deve ser *universal*. O que quer dizer que uma afirmação é considerada universal? Naturalmente a tal afirmação deve ter uma sequência de raciocínios lógicos universalmente aceitos. Ou seja, deve ser expressa numa linguagem lógica universal. No mundo das Ciências Exatas, esta linguagem é a matemática. Um dos objetivos básicos do estudo de Física é expressar matematicamente as leis que governam os fenômenos da

Natureza na sua forma mais geral possível.

Os fenômenos da Natureza são infinitamente variados e as vezes extremamente complexos. A Física busca uma descrição dos fenômenos em que esta complexidade possa ser entendida como combinações de certas leis bem mais simples. Uma vez aceita essa posição, o que devemos descobrir é a lei universal por trás dos fenômenos aparentemente complexos. Só que as aparências dos fenômenos são também extremamente variadas e, portanto, a tentativa não organizada de estudar um determinado fenômeno não é produtiva. Além disto, as vezes, as novas leis descobertas não necessariamente têm uma interpretação simples, nem compreensível. Como podemos construir uma lei fundamental a partir de um conjunto de fenômenos completamente fora do conceito estabelecido? Deve haver um método sistemático. Este método é em geral chamado o método científico.

Podemos dividir este método científico em três fases. A primeira fase é de observações organizadas para extrair certas regras sistemáticas que existem entre os dados. Uma sistemática entre dados observacionais é referida como uma *lei empírica*. Para uma classe de fenômenos podemos estabelecer várias leis empíricas. Em geral, estas leis devem ser expressas *quantitativamente* na linguagem matemática. Estas leis empíricas não necessariamente são todas independentes. Algumas leis empíricas para uma determinada classe de fenômenos podem ser reduzidas a outras leis empíricas com a introdução de hipóteses ou idéias simplificadoras. Este processo seria a segunda fase do estudo, onde tentamos organizar as leis empíricas utilizando *modelos* para o sistema em estudo e buscamos as leis mais fundamentais possíveis. Esta segunda fase é as vezes chamada de *fenomenologia*. Quando estabelecemos a lei mais fundamental possível e tendo uma imagem do sistema (modelo), podemos então extrapolar esta teoria fenomenológica e fazer previsões sobre o comportamento do sistema numa condição que ainda não tenha sido testada. Isto induz uma nova área de pesquisa experimental, estimulando o desenvolvimento de métodos tecnológicos. Ao mesmo tempo, do lado teórico, a abstração ou generalização da teoria fenomenológica pode ser introduzida, que eventualmente unifica vários modelos distintos ou conflitantes. Nesta terceira fase, é fundamental encontrar um novo campo de fenômenos onde o sistema em estudo ou a lei obtida nas fases anteriores manifeste-se de forma inteiramente diferente daquelas até então conhecidas. Como consequência desta terceira fase, junto com os desenvolvimentos tecnológicos estimulados, em geral são induzidas novas descobertas e novos fenômenos. Para estes, iniciamos novamente a primeira fase de análise empírica, só que com um novo horizonte de conhecimento comparado com a etapa anterior. Este é o processo de desenvolvimento da Ciência. Por exemplo,

na área da Mecânica, o recém desenvolvimento do estudo sobre sistemas não lineares deve essencialmente no desenvolvimento de computadores. Em particular, quando encontramos uma contradição insolúvel entre as conclusões obtidas nestes processos, pode surgir um conceito completamente novo que englobe de uma forma natural os dois conceitos contraditórios. Este novo conceito está certamente em um nível superior que dificilmente teria sido alcançado sem se ter explicitado o conflito fatal dos conceitos anteriores. O surgimento da Mecânica Quântica é um excelente exemplo desta dialética científica.

Naturalmente, as três fases não necessariamente são claramente distinguíveis uma da outra, e nem sempre cronologicamente ordenadas. As vezes, novas idéias ou fenômenos podem surgir sem nenhuma correlação com estudos básicos trabalhosos. Mas estas são exceções e, via de regra, o método sistemático acima é fundamental para o real e seguro desenvolvimento da pesquisa científica. Desta forma, vemos claramente que o que é mais importante no estudo de Ciência é o processo de encadeamento das idéias utilizadas para resolver um determinado problema e não os resultados individuais.

Assim, o estudo da Física, ou da Ciência em geral, nunca deve ser encarado como o de simplesmente adquirir *conhecimentos enciclopédicos* sobre fatos, resultados ou teoremas. O estudo da Física exige aprendiz a dada *metodologia e o processo de desenvolvimento de raciocínio*. Os leitores devem ser bem cientes do fato de que os problemas tratados num curso como este são *meros exemplos utilizados só para ilustrar* esta metodologia e o processo de desenvolvimento de raciocínio. Saber apenas os resultados de certos problemas sem saber reconstituir sua sequência lógica e métodos utilizados será completamente inútil. Neste curso, enfatizaremos este ponto. Assim, os estudantes deste curso deve encarar os exercícios não como problema isolado mas uma ilustração de idéias. Será recomendado que o leitor procure sempre exemplos análogos ou contra-exemplos do problema proposta.

2. Conceito de Modelo - Simplificação, Idealização, Abstração

Na seção anterior, mencionamos modelos científicos. O que é um modelo científico? Por exemplo, suponhamos que queremos estudar o movimento da Terra em torno do Sol. Neste caso, estamos acostumados a pensar em uma massa pontiforme M_{Terra} girando em torno de um ponto com a massa do Sol, M_{Sol} , fixo no centro. Obviamente, esta imagem é uma simplificação e, portanto, uma aproximação. Quais fatores físicos deveriam ser considerados para descrição mais precisa

do movimento da Terra? Existem vários, tais como: a presença de outros planetas, a presença da Lua, o tamanho finito da Terra e do Sol, o movimento do Sol, a rotação da Terra, a não rigidez da Terra (efeito de maré), etc, etc... Para cada aspecto, devemos introduzir as quantidades matemáticas para descrevê-lo quantitativamente. Mas, neste exemplo, a imagem do Sol fixo no centro e a Terra como uma massa puntiforme que se move em sua volta parece ser, intuitivamente, aceitável como primeira aproximação. Nesta imagem, apenas o vetor de posição da Terra em relação ao Sol precisa ser especificado para a resolução do problema.

Introduzir a simplificação (aproximação) adequada para tratar um determinado problema é muito importante para identificar o(s) parâmetro(s) principal(is) do problema. Uma imagem aproximada de um sistema introduzida intencionalmente a fim de identificar o(s) aspecto(s) mais relevante(s) dos fenômenos é chamado de *modelo*. Um modelo é um espécie de caricatura que representa um ou alguns aspectos do sistema físico para especificar os graus de liberdades relevantes. Assim, um determinado modelo para um sistema não necessariamente representa todas as propriedades deste sistema. Dependendo da complexidade do sistema é necessário e, até melhor, introduzir modelos diferentes para representar aspectos distintos do sistema. Uma nova visão, ou uma nova dimensão nas idéias, pode surgir dentro dos esforços para unificar vários modelos distintos atribuídos a um dado sistema. Assim, um modelo e sua representação matemática servem como um meio de abstração dos componentes essenciais da natureza do problema.

Por outro lado, um modelo não é apenas uma caricatura. Um modelo deve representar a realidade fielmente dentro de suas limitações e, portanto, deve ter o poder de previsão. Note que a palavra “fielmente” acima não necessariamente significa “exatamente”. Dentro de um modelo científico válido, as relações entre quantidades observadas devem ser representadas corretamente. No sentido amplo, qualquer descrição matemática de um determinado sistema é um modelo. Quando um modelo deste tipo tem poder de descrever todas as propriedades do sistema, aceitamos o modelo como representação da realidade. Por exemplo, o Modelo Padrão para descrição de interações entre partículas elementares tem atingido um nível de sucesso bastante elevado de forma tal que este modelo é atualmente considerado a representação correta da natureza, até que se prove o contrário com experiências a serem realizadas.

3. Importância da Linguagem Universal -Matemática

Para validar uma teoria física, devemos confrontar as previsões desta teoria com os dados experimentais. A ciência exige que a confrontação seja feita não apenas qualitativamente, mas quantitativamente. Este é o aspecto fundamental da ciência moderna.

Por exemplo, na época AD140, o astrônomo da Alexandria, Ptolomeu estabeleceu um conceito que é conhecido como o Sistema de Ptolomeu no qual os movimentos dos planetas (e do Sol) seriam explicados basicamente por uma combinação de dois movimentos circulares uniformes. A filosofia por trás disto é uma crença de que o movimento circular uniforme tem harmonia e, portanto, os movimentos dos planetas devem obedecer esta regra. O princípio inicial era um dogma e não uma lei empírica. Este tipo de pensamento dogmático muitas vezes dificulta o caminho de encontrar o princípio real. O pior foi que este sistema funciona razoavelmente. Mesmo o Thyco-Brahe e o Kepler (Johanes Kepler) que perceberam as falhas deste sistema Ptolomeu, não se conseguiu librar da imagem dos conceitos dogmáticos. O trabalho do Galileo (Galileo Galilei 1564-1642) foi fundamental para a implementação das bases da Ciência moderna, onde buscamos as leis da Natureza baseados somente nos fatos observáveis e rejeitamos qualquer imposição dogmática como ponto de partida. Foi o primeiro enfatizou explicitamente o uso de *experimentos* como o meio fundamental para verificar *hipóteses* ou *idéias*. Assim, não deve haver dogmas, mas hipótese de trabalho.

Para expressar qualquer idéia, precisamos de uma linguagem. A linguagem que expressa os fatos observáveis numa sequência lógica é a matemática. Note que a matemática em si não necessariamente reflete os fenômenos da Natureza. Ela é uma linguagem que trata dos relacionamentos lógicos entre diferentes afirmações. Pode acontecer que a matemática pode concluir uma afirmação não é real se o ponto de partida não tem compromisso com o fenômeno real.

Em geral, os dados observados são conjuntos de números. Na Física, utilizamos os modelos para encaixar estes dados numa sequência de lógica matemática. Uma vez expressos os fatos observados numa forma matemática, podemos extrapolar a idéia dentro do raciocínio lógico da matemática. As conclusões obtidas desta forma serão universais no sentido de não depender de quem utilizou esta linguagem. Nas linguagens comuns, não é fácil de garantir este aspecto. Descrições feita em uma linguagem comum dependem muito da pessoa e do modo que a utiliza. Na verdade, este aspecto de subjetividade numa língua é fundamental na literatura. Mas a linguagem para expressar uma lei da natureza não deve depender da forma

como esta linguagem é utilizada. Deve expressar puramente as ligações lógicas entre afirmações¹.

Um outro aspecto importante da linguagem matemática é a *precisão e o poder de quantificar* as afirmações. Se ficássemos satisfeitos apenas com argumentos qualitativos baseados nas intuições, nunca alcançaríamos o nível da ciência de hoje. Devemos também lembrar que, embora a intuição seja um elemento muito importante para compreensão, ela é às vezes bastante traidora. Por exemplo, responda rapidamente o seguinte quebra-cabeça: “Suponha que existe um fio que tem o comprimento certinho para fazer uma volta completa à Terra no equador (cerca de 40.000 km). Naturalmente, utilizando um fio com comprimento um pouco maior, teremos uma folga entre o fio e a superfície da Terra. Agora, se este comprimento extra for de 1 (um) metro, a altura deste espaço entre o fio e da Terra será suficiente para que uma formiga passa (supondo que a Terra é uma esfera ideal com superfície lisa e que seja possível manter o espaço entre o fio e a superfície constante em toda a volta) ?” É claro, fazendo uma conta simples, podemos obter imediatamente a resposta correta, mas se dependesse somente da intuição, a maioria das pessoas ficariam na dúvida para responder esta questão pela primeira vez. Este exemplo mostra que a intuição não ajuda muito mesmo para uma questão tão simples e, imagine, nas situações mais complicadas.

Por outro lado, as intuições são produtos de acúmulo do nosso conhecimento e das experiências de cada um. Isto significa que, quanto mais se treina e se adquire experiência, o horizonte e a capacidade da intuição aumentam. Sabemos muito bem que a língua materna é melhor para apreciar a sutileza e beleza de um texto literário ou uma poesia. Mas, dependendo de treino, podemos alcançar esta capacidade em outras línguas. Desta forma, para entender o real significado das leis da Natureza, devemos nos acostumar com o uso da matemática como uma língua materna. Considerando este aspecto didático, enfatizarei bastante o uso e treinamento da matemática neste curso. Mas isto não quer dizer que apenas as contas que é importante. O objetivo mais importante é que saber expressar os conceitos físicos em termos de expressões matemáticas adequadas. Inversamente, saber interpretar o significado de uma expressão matemática em termos de uma imagem física correspondente. Neste sentido, é fundamental se acostumar pensar que, para cada etapa de uma dedução de uma fórmula, sempre o significado do cada resultado.

¹Isto não quer dizer que os conceitos subjetivos não possam ser tratados em linguagem matemática. Como tratar subjetividade numa linguagem científica é um dos assuntos de estudos modernos.

Part II

Movimento Unidimensional

Neste capítulo, vamos fazer uma revisão da Equação de Movimento de Newton, isto é, a terceira lei, para os casos mais simples, ou seja os movimentos unidimensionais. Vamos considerar o movimento unidimensional de uma partícula punteforme. Neste caso, a variável relevante seria a coordenada x da posição. A segunda lei de Newton relaciona a aceleração, a massa e a força através da equação,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f, \quad (3.1)$$

onde m é a massa da partícula, f é a força que atua na partícula. Quando a força f é conhecida, podemos utilizar esta equação para determinar como a partícula se move em função do tempo. Neste sentido, a segunda lei de Newton é chamada de *equação de movimento*.

4. Base Matemática

4.1. Equação Diferencial Ordinária

A Equação de Movimento de Newton é apresentada na forma de uma equação diferencial, mais especificamente, de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em relação ao tempo. Aqui, vamos refletir sobre as equações diferenciais ordinárias.

Uma equação diferencial ordinária é uma equação que relaciona uma *função incognita*, digamos $x(t)$ e suas derivadas e a variável t . Com isto, podemos determinar, em geral, a forma da função $x = x(t)$ quando especificada a *condição inicial*. O propósito de uma equação diferencial é determinar a forma da função $x = x(t)$. Uma relação algébrica entre variáveis $A, B, \dots, X$ é expressa genericamente por

$$F(A, B, C, \dots, X) = 0, \quad (4.1)$$

onde F é uma certa função². Consideramos aqui as equações diferenciais onde a

²Um exemplo de que a relação não é algébrica é,

$$C(t) + B(t) \int_0^\infty A(t) dt = 0.$$

relação entre as derivadas e a função é expressa em termos de relação algébrica. Assim, a forma mais geral de uma equação diferencial que consideremos tem a forma;

$$F(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}, t) = 0. \quad (4.2)$$

Numa equação diferencial, a ordem de derivada mais alta que aparece na equação é dita a ordem da equação diferencial. Por exemplo, uma equação diferencial da forma,

$$F(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, t) = 0, \quad (4.3)$$

é a equação diferencial de segunda ordem. Por exemplo, a equação,

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = E, \quad (4.4)$$

onde m e E são constantes e V é uma função de x constitui uma equação diferencial de primeira ordem para $x = x(t)$.

As equações, (4.2, 4.3, 4.4) são as equações dadas na forma implícita. Em princípio, podemos expressar as mesmas relações em termos de uma equação explícita para a derivada mais alta da equação. Por exemplo, a Eq.(4.4) pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}. \quad (4.5)$$

A Eq.(4.2) pode, em princípio, ser escrita como

$$\frac{d^nx}{dt^n} = f \left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}; t \right). \quad (4.6)$$

Daqui por diante, consideramos a equação diferencial na forma Eq.(4.6), sem perder a generalidade. Isto é, a Eq.(4.6) é a forma mais geral da equação diferencial de ordem n .

Uma equação diferencial de ordem n é dita *linear* quando tem a forma,

$$\frac{d^nx}{dt^n} = a_0(t)x + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)\frac{d^2x}{dt^2} + \dots + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + b(t) \quad (4.7)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \frac{d^i x}{dt^i} + b(t), \quad (4.8)$$

isto é, a derivada mais alta da equação é expressa em termos de uma combinação linear de derivadas mais baixas³ com coeficientes que dependem apenas em t . Ou seja, os coeficientes são funções conhecidas de t . Em particular, quando $b = 0$ nesta equação, a equação é dita *homogênea*.

Podemos provar facilmente o seguinte teorema:

Teorema: Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ duas soluções de uma equação diferencial **linear homogênea**. Então sua combinação linear com os coeficientes constantes,

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

é também uma solução.

Prova: Seja a equação diferencial expressa por

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0(t) x + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + \cdots a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}. \quad (4.9)$$

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções, então,

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = a_0(t) x_1 + a_1(t) \frac{dx_1}{dt} + a_2(t) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \cdots a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}}, \quad (4.10)$$

$$\frac{d^n x_2}{dt^n} = a_0(t) x_2 + a_1(t) \frac{dx_2}{dt} + a_2(t) \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \cdots a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}}. \quad (4.11)$$

Multiplicando c_1 e c_2 nas Eq.(4.10) e Eq.(4.11), respectivamente, e adicionando ambos os lados, temos

$$c_1 \frac{d^n x_1}{dt^n} + c_2 \frac{d^n x_2}{dt^n} = a_0 (c_1 x_1 + c_2 x_2) + \cdots + a_{n-1} \left(c_1 \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-1} x_2}{dt^{n-1}} \right),$$

ou seja,

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_0(t) x + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + \cdots a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}},$$

com

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t).$$

Portanto, $x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ satisfaz a equação diferencial, ou seja, é uma solução da equação. Assim, uma combinação linear das duas soluções é uma solução.

³Aqui, convencionamos que

$$\frac{d^0 x}{dt^0} = x.$$

Quando a dinâmica de um sistema é escrita em termos de uma equação diferencial linear, então um estado de movimento deste sistema pode ser expressa como a superposição de outros dois estados diferentes. Este fato é dito a lei de superposição.

Exercício: Verifique que para a Eq.(4.5) se a lei da superposição das soluções é válida ou não.

4.2. Equação Linear de Primeira Ordem

A forma mais simples de uma equação diferencial é a equação diferencial linear de primeira ordem e tem a seguinte forma:

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t), \quad (4.12)$$

onde p e q são funções de t .

Para obter uma solução, vamos considerar primeiramente o caso mais simples desta equação. Suponhamos que $q = 0$ ou seja, a equação é homogênea.

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x.$$

Neste caso, temos a solução imediatamente

$$\frac{dx}{x} = p(t) dt,$$

e, portanto,

$$x(t) = C e^{\int_{t_0}^t p(t') dt'}, \quad (4.13)$$

onde C é o valor de x para $t = t_0$.

Agora, vamos considerar o caso $q = q(t) \neq 0$. Neste caso, um método conhecido é utilizar a forma da solução da equação homogênea, mas colocamos $C = C(t)$. O motivo deste pensamento é que, sabendo a forma da Eq.(4.13) resolva a Eq.(4.12) quando $q = 0$, esperamos que esta forma pelo menos deve cancelar o termo de $p(t)x$. Temos de fato,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dC}{dt} e^{\int_{t_0}^t p(t') dt'} + C p(t) e^{\int_{t_0}^t p(t') dt'} \\ &= \frac{dC}{dt} e^{\int_{t_0}^t p(t') dt'} + p(t) x. \end{aligned}$$

Então, substituindo esta última em

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + q(t),$$

vejamos que o termo $p(t)x$ se cancela, tendo

$$\frac{dC}{dt} e^{\int_{t_0}^t p(t') dt'} = q(t).$$

Ou, equivalentemente,

$$\frac{dC}{dt} = q(t) e^{-\int_{t_0}^t p(t') dt'}.$$

Integrando em t , temos

$$C(t) = \int_{t_0}^t dt'' q(t'') e^{-\int_{t_0}^{t''} p(t') dt'} + C_0,$$

onde C_0 é o valor do C quando $t = t_0$. Finalmente, temos

$$x(t) = \left[\int_{t_0}^t dt'' q(t'') e^{-\int_{t_0}^{t''} p(t') dt'} + C_0 \right] e^{\int_{t_0}^t p(t') dt'}. \quad (4.14)$$

Exercício: Verifique que a Eq.(4.14) é a solução da Eq.(4.12) diretamente pela substituição.

Assim, a equação diferencial linear de primeira ordem pode ser obtida explicitamente na forma de uma integral. Isto não quer dizer que a forma da função é expressa analiticamente em termos de uma função conhecida de t , mas é suficiente para explicitar a sua dependência em t em termos de quadratura (integrais de funções).

4.3. Expansão em Série de Taylor de Uma Função

Numa análise de propriedade de uma função, um conceito fundamental é a expansão em série de Taylor de uma função. Seja $f = f(x)$ uma função arbitrária, contínua e suave. Gostaríamos de estudar o comportamento desta função em torno de um certo ponto fixo, digamos $x = x_0$. Naturalmente o valor da função no ponto $x = x_0$ é $f(x_0)$. Queremos saber como o valor da função varia quando $x = x_0 + \delta x$, onde δx é uma quantidade bem pequena.

Para estudar este problema, vamos ver a figura abaixo.

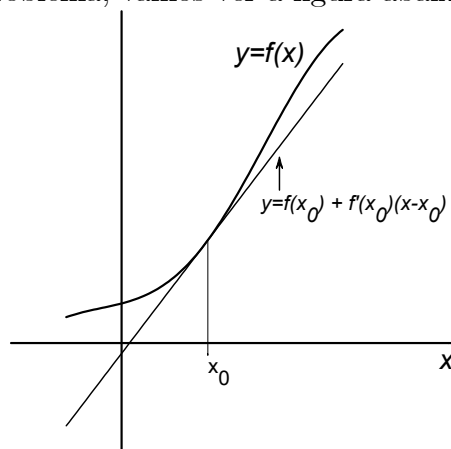


Fig.1

A reta indicada é a reta tangente desta função no ponto $x = x_0$. Aqui,

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$$

é a derivada no ponto $x = x_0$. Esta figura mostra que, quando x é muito próximo do x_0 , a reta tangente praticamente coincide com a função $f(x)$ em si. Isto é,

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0),$$

ou seja

$$f(x_0 + \delta x) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \delta x. \quad (4.15)$$

Exercício: Calcule o erro da expressão (4.15) nos seguintes casos:

1.

$$f(x) = \exp(x), \quad x_0 = 0, \quad \delta x = 0.2$$

2.

$$f(x) = \cos(x), \quad x_0 = 0, \quad \delta x = 0.2$$

3.

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0, \quad \delta x = 0.2$$

4.

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0, \quad \delta x = 0.5$$

Vejamos que, de fato, a aproximação (4.15) é bastante boa enquanto δx é pequeno. Mas, naturalmente a aproximação vai piorando na medida que δx se torna maior. Para melhorar a aproximação, podemos incluir a dependência quadrática em δx como

$$f(x_0 + \delta x) \simeq f_0 + f'(x_0)\delta x + C(\delta x)^2, \quad (4.16)$$

onde C é uma constante a ser determinada. Naturalmente esta expressão ainda é uma aproximação e não é possível que os dois lados se tornem idênticos como função de δx . Por outro lado, a aproximação linear (Eq.(4.15, ou os primeiros dois termos da Eq.(4.9) acima) já ajustava a curva no ponto $x = x_0$ até a derivada. Assim, para melhorar a aproximação em torno de $x = x_0$, é interessante que o último termo na Eq.(4.9) ajustasse a segunda derivada da curva no ponto $x = x_0$. Temos

$$\left. \frac{d^2 f(x_0 + \delta x)}{d\delta x^2} \right|_{\delta x=0} = f''(x_0),$$

e

$$\frac{d^2}{d\delta x^2} (f_0 + f'(x_0)\delta x + C(\delta x)^2) = 2C.$$

Escolhendo

$$C = \frac{1}{2}f''(x_0),$$

temos

$$f(x_0 + \delta x) \simeq f_0 + f'(x_0)\delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)(\delta x)^2, \quad (4.17)$$

como uma aproximação melhor que a Eq.(4.15).

Exercício: Calcule o erro da expressão (4.17) nos casos do Exercício anterior.

Note que o termo quadrático em δx decresce rapidamente comparado com o termo linear. Por exemplo, se $\delta x = 0.1$, $(\delta x)^2 = 0,01$, mas se $\delta x = 0.001$, então $(\delta x)^2 = 0.000001$, etc.

O procedimento acima sugere que podemos ir melhorando a aproximação até obtermos uma expressão polinomial em δx que seja idêntica à função original. Vamos então pôr

$$f(x_0 + \delta x) = f_0 + f'(x_0)\delta x + \frac{1}{2}f''(x_0)(\delta x)^2 + c_3(\delta x)^3 + c_4(\delta x)^4 + \dots + c_n(\delta x)^n + \dots \quad (4.18)$$

Os coeficientes c'_i s podem ser determinados requerendo que todas as derivadas em relação a δx dos dois lados no ponto $\delta x = 0$ devem coincidir. Por exemplo, para a terceira derivada no ponto $\delta x = 0$ do lado esquerdo fica

$$\left. \frac{d^3}{d\delta x^3} f(x_0 + \delta x) \right|_{\delta x=0} = f'''(x_0),$$

no entanto, o lado direito fica

$$3 \cdot 2 \cdot c_3,$$

e portanto, temos

$$c_3 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0), \quad (4.19)$$

onde $f^{(n)}(x_0)$ representa a n -ésima derivada no ponto x_0 . Em geral,

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0). \quad (4.20)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} f(x_0 + \delta x) &= f_0 + \frac{1}{1!} f'(x_0) \delta x + \frac{1}{2!} f''(x_0) (\delta x)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (\delta x)^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \delta x^n. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Podemos escrever também como

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0) (x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0) (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n + \cdots$$

A expressão acima é conhecida como a expansão em série de Taylor da função $f(x)$ em torno de $x = x_0$.

Exercício: Obtenha as séries de Taylor nos seguintes casos:

1.

$$\sin(x), \cos(x), e^x$$

em torno de $x = 0$.

2. As mesmas funções em torno de $x = \pi/2$.

3.

$$\ln(1-x)$$

em torno de $x = 0$.

4.

$$\frac{1}{1-x}$$

em torno de $x = 0$.

Exercício: Verifique se as relações,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sin x &= \cos x, \\ \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x, \\ \int_0^x \frac{dx}{1-x} &= -\ln(1-x),\end{aligned}$$

são válidas nas séries de Taylor correspondentes.

Exercício: Prove que

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x, \quad (4.22)$$

e usando a fórmula acima, obtenha a expansão de Taylor da função

$$\tan^{-1} x \quad (4.23)$$

em torno de $x = 0$.

Quando a variação de x , δx for pequena, como vimos, podemos truncar a série de Taylor dentro de uma aproximação desejada. O truncamento de série de Taylor em certa ordem de δx , digamos $n = 2$, é

$$f(x_0 + \delta x) = f_0 + \frac{1}{1!} f'(x_0) \delta x + \frac{1}{2!} f''(x_0) (\delta x)^2 + O(\delta x^3),$$

onde $O(\delta x^3)$ significa “da ordem de δx^3 ”, mostrando que os termos desprezados não passam de uma quantidade pequena da ordem superior de δx^3 . Ou seja, se $\delta x = 0.01$, o termo de correção seria da ordem de 10^{-6} .

4.3.1. Raio de Convergência

A série de Taylor pode não convergir. Por exemplo, a série de Taylor,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (4.24)$$

não é válida para $|x| \geq 1$.

Exercício: Calcule os dois lados da Eq.(4.24) para os valores de $x = 0.1$, $x = -2$, e $x = 2$.

Para uma dada série, o domínio de variável para o qual a série converge é chamado de raio de convergência. No exemplo do exercício acima, o raio da convergência da série da Eq.(4.24) é $|x| = 1$. Os raios de convergência das séries de Taylor para $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\exp(x)$ são infinitas, ou seja, a série converge para qualquer valor de x .

4.3.2. Variável complexa

Vamos ver um exemplo interessante da aplicação de série de Taylor. Já sabemos que

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \end{aligned}$$

e

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \dots$$

Em particular, se

$$z = ix$$

na última expressão, temos

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 + \dots \quad (4.25)$$

A inspeção das expressões acima mostra que vale a seguinte relação:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (4.26)$$

Esta é conhecida como a relação de Euler, e é extremamente útil para tratar as funções trigonométricas. Por exemplo,

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= e^{i(x+y)} \\ &= \cos(x+y) + i \sin(x+y). \end{aligned} \quad (4.27)$$

mas

$$\begin{aligned} e^{ix} \cdot e^{iy} &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Igualando as partes reais e imaginárias das equações (4.26) e (4.27), temos as fórmulas de adição,

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned}$$

Podemos obter a inversa da Eq.(4.26) como

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \\ \sin(x) &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \end{aligned}$$

Exercício: Prove as relações acima.

Exercício: Obtenha a fórmula que expressa

$$\sin 3x$$

em termos de polinômio de $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

4.3.3. Forma polar de números complexos

A relação de Euler pode ser utilizada para expressar um número complexo na forma polar. Seja

$$z = x + iy$$

um número complexo, sendo x e y reais. Podemos sempre escrever,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}.$$

Se considerarmos um ponto (x, y) no plano XY , podemos identificar as quantidades $\sqrt{x^2 + y^2}$, $x/\sqrt{x^2 + y^2}$, e $y/\sqrt{x^2 + y^2}$ por

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} &= r, \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \cos \theta, \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \sin \theta,\end{aligned}$$

onde r é a distância entre o ponto (x, y) e a origem, e θ é o ângulo entre o eixo X e o vetor da posição. Assim,

$$\begin{aligned}z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= re^{i\theta}.\end{aligned}$$

A última forma é dita a representação polar de um número complexo.

Exercício: Obtenha as representações polares dos seguintes números complexos:

1.

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3},$$

2.

$$z_2 = 1 + i,$$

3.

$$z_1 z_2,$$

4.

$$\frac{z_1}{z_2}.$$

4.4. Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem (Geral)

Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem em geral tem a forma,

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{4.29}$$

onde f é uma função de t e x . O objetivo da equação diferencial é encontrar a função que satisfaz esta relação. Em geral, *não há método analítico geral* para

se obter a solução, mas, isto não significa que não *exista* solução. Pelo contrário, se a função f e sua derivada parcial, $\partial f / \partial x$ forem contínuas em torno do ponto (t_0, x_0) (chamada de Condição de Lipschitz), é garantida a existência e unicidade da solução da Eq.(4.29) para uma dada condição inicial $x = x_0$ para $t = t_0$.

Podemos entender a equação diferencial como um exercício de série de Taylor. Seja $x = x(t)$ a solução procurada. Pela condição inicial, temos

$$x(t_0) = x_0.$$

Agora, pela série de Taylor,

$$x(t_0 + \delta t) = x_0 + x'(t_0)\delta t + O(\delta t^2).$$

Mas da Eq.(4.29),

$$x'(t_0) = f(t_0, x_0)$$

é uma quantidade calculável, uma vez sabemos os valores de t_0 e x_0 . Assim,

$$x(t_0 + \delta t) = x_0 + f(t_0, x_0)\delta t + O(\delta t^2). \quad (4.30)$$

Para δt suficientemente pequena, a expressão acima pode ser utilizada para obter o valor de x no ponto $t = t_0 + \delta t$. Em geral, este procedimento pode ser repetido para obter o valor de $x_k = x(t + k\delta t)$ pelo processo iterativo,

$$x_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1})\delta t, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

com

$$t_k = t_{k-1} + \delta t. \quad (4.32)$$

O método iterativo acima é conhecido como o método de Euler.

Exercício: Obtenha, pelo método de Euler, a solução aproximada da equação,

$$\frac{dx}{dt} = x$$

com a condição inicial, $t = 0$, $x(0) = 1$, $\delta t = 0.1$, até $t = 1$. Compare o seu resultado com a solução exata.

5. Problemas

1. Fatorize as seguintes expressões.

$$a^3 \pm b^3$$

$$a^n - b^n$$

$$a^4 + a^2b^2 + b^4$$

2. Para um polinômio de ordem n ,

$$f_n(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n,$$

se

$$f_n(a) = 0,$$

então, podemos fatorizar $f_n(x)$ por

$$f_n(x) = (x - a)f_{n-1}(x)$$

onde $f_{n-1}(x)$ é um polinômio de ordem $n - 1$. Podemos construir $f_{n-1}(x)$ pela divisão,

$$f_{n-1}(x) = f_n(x)/(x - a).$$

Fatorize as seguintes funções:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$$

$$f(x) = 3x^4 - 9x^3 + 5x^2 + 7x - 10$$

3. Seja $y = ax^2 + bx + c$.

1. Sejam α e β os raízes de

$$y = 0.$$

Mostre que

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

2. Prove que a condição suficiente e necessária para ter duas raízes positivos é expressa por

$$ab < 0, \quad ac > 0, \quad D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

3. Prove que a condição suficiente e necessária para ter uma raiz positiva, e outra negativa é

$$ac < 0.$$

4. Prove que

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 0.$$

4. Esboce os gráficos das seguintes funções.

- 1.

$$y = ax + b,$$

- 2.

$$y = ax^2 + bx + c$$

- 3.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- 4.

$$y = ax + b + \frac{1}{dx + e},$$

- 5.

$$y = \frac{1}{(x - a)^2 + b^2},$$

- 6.

$$y = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2},$$

- 7.

$$y = Ce^{ax+b},$$

- 8.

$$y = Ce^{ax^2+bx+c},$$

- 9.

$$y = \frac{1}{e^{ax+b} + 1}.$$

5. Obtenha as expansões em série de Taylor das seguintes funções em torno de $x = 0$.

1.

$$f(x) = e^x,$$

2.

$$f(x) = \sin(x),$$

3.

$$f(x) = \cos(x),$$

4.

$$f(x) = \ln(1 + x),$$

5.

$$f(x) = (1 + x)^n$$

6. Utilizando a expansão em série de Taylor, verifique a igualdade

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

7. Para um número complexo,

$$z = x + iy,$$

podemos expressar na forma,

$$z = |z| e^{i\theta}.$$

Calcule $|z|$ e θ em função de x e y .

8. Para dois números complexos, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, definimos

$$w_1 = z_1 + z_2,$$

$$w_2 = z_1 - z_2,$$

$$w_3 = z_1 z_2,$$

$$w_4 = z_1 / z_2.$$

Expresse os w_i 's na forma polar, usando r_1, θ_1, r_2 e θ_2 .

9. Usando a expressão acima, obtenha as fórmulas de funções trigonométricas,

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= , \\ \cos(\alpha + \beta) &= , \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= , \\ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= , \\ \sin 2\theta &= , \\ \sin 3\theta &= , \\ \sin 4\theta &= ,\end{aligned}$$

10. Deduza a seguinte fórmula trigonométrica.

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \delta) ,$$

onde

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) . \quad (5.1)$$

11. Calcule a derivada

$$\begin{aligned}y &= x^x, \\ y &= x^{x^x}.\end{aligned}$$

12. Quando a relação funcional implícita entre x e y

$$f(x, y) = 0$$

é conhecida, expresse a primeira e segunda derivadas de y em relação a x .

13. Calcule as seguintes integrais indefinidas.

$$\begin{aligned}
& \int dx x^\alpha, \quad \int dx \frac{x}{(x^2 + a^2)^n}, \quad \int \frac{dx}{ax + b}, \\
& \int \frac{dx}{x(ax + b)}, \quad \int dx \frac{x}{\sqrt{ax + b}}, \quad \int dx \sqrt{\frac{x + b}{x + a}}, \\
& \int dx \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \int dx \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \int dx \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \\
& \int \frac{dx}{(1 + \sqrt{x}) \sqrt{x - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a} \sqrt{x + b}}, \\
& \int dx \log x, \quad \int dx \log^2 x, \quad \int dx \log^3 x, \\
& \int dx x \log x, \quad \int dx x^2 \log x, \quad \int dx x^3 \log x, \\
& \int dx \frac{\log x}{\sqrt{x}}, \quad \int \frac{\log x}{x}, \quad \int \frac{dx}{x \log x}, \\
& \int x^n \sin x dx, \quad \int dx \sin^2 x, \quad \int dx \sin^3 x, \text{ etc} \\
& \int dx \frac{1}{\sin x}, \quad \int dx \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \int dx \frac{1}{\sin^3 x}.
\end{aligned}$$

14. O método de Euler descrito no texto é uma aproximação da solução da equação diferencial baseada na expansão de Taylor da função até a primeira ordem em Δx . Elabore um esquema para obter uma solução de uma equação diferencial até a segunda ordem em Δx .

15. O volume de um cone com a área da base S , altura h é dada por

$$V = \frac{1}{3}hS. \quad (5.2)$$

Deduz a esta fórmula usando integral.

16. A área do domínio num plano, cercada de dois círculos concentricos de raio r e $r + dr$, é dada por

$$dS = 2\pi r dr \quad (5.3)$$

no limite de

$$dr \ll r. \quad (5.4)$$

Usando este fato, mostre que a área de um disco de raio R é dada por

$$S = \pi R^2. \quad (5.5)$$

17. Deduza a fórmula para a área da superfície de uma esfera de raio R é

$$S = 4\pi R^2. \quad (5.6)$$

18. Deduza a fórmula para o volume de uma esfera de raio R é

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (5.7)$$

6. Exemplo de Modelagem de Problemas

Vamos considerar a queda de um paraquedista. Um fator crucial para a vida de um paraquedista é naturalmente a existência do atrito do ar. O problema real deste tipo é na verdade bastante complexo, e devemos tratar-lo dentro da hidrodinâmica, pois o movimento do ar causado por um pára-quedas reflete no movimento da paraqueda em si. Aqui, também temos que idealizar o problema para extrair a essência do problema.

O que seria a origem do atrito do ar? Vamos tentar construir uma teoria (tentativa) sobre isto. Quando um pára-quedas se desloca no ar com a velocidade v , uma parte do ar é colocada em movimento. Os movimentos das moléculas do ar são bastante complexos perto do pára-quedas, mas para efeito de estimativa, podemos simplificar a imagem de seguinte forma: o pára-quedas se choca com as moléculas do ar, inicialmente em repouso em média, colocando-as em movimento coletivo com a velocidade média $\langle \Delta v \rangle$. A variação de momento por partícula, portanto, fica

$$\bar{p} = m_a \langle \Delta v \rangle, \quad (6.1)$$

onde m_a é a massa da molécula. Num intervalo do tempo pequeno dt , o pára-quedas desloca a distância vdt , e varre um volume $vdt \times S$, sendo S a área transversal do pára-quedas. Assim, o movimento do pára-quedas com a velocidade v transforma o momento total para as moléculas do ar,

$$\begin{aligned} \Delta p &= \bar{p} = m_a \langle \Delta v \rangle \times n \times vdt \times S \\ &= \langle \Delta v \rangle \rho v S dt, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde n é a densidade numérica das moleculas do ar e

$$\rho = m_a n \quad (6.3)$$

é a densidade massa do ar. Pela lei de Newton, sabemos que a taxa da variação do momento é a força. Então a força exercida pelo pára-quedas nas moléculas no ar é

$$f_{\text{pára-quedas} \rightarrow \text{ar}} = \langle \Delta v \rangle \rho S v. \quad (6.4)$$

Pela lei, ação-reação, temos

$$f_{\text{ar} \rightarrow \text{pára-quedas}} = -\langle \Delta v \rangle \rho S v, \quad (6.5)$$

que mostra que a força do ar para o pára-quedas é proporcional à velocidade v , à densidade do ar ρ e à área do pára-quedas S , desde que a velocidade média $\langle \Delta v \rangle$ seja constante e independente de v .

A quantidade $\langle \Delta v \rangle$ não pode ser determinada sem saber o detalhe da dinâmica do ar. Em princípio, $\langle \Delta v \rangle$ pode depender da velocidade da pára-quedas. Mas, enquanto v não muito grande, podemos pensar a série de Taylor,

$$\langle \Delta v \rangle = c_0 + c_1 v + \dots \quad (6.6)$$

Assim, a força de atrito do ar contra a queda de um pára-quedas tem a forma,

$$f_{\text{atrito}} = -\eta_1 v - \eta_2 v^2 - \dots, \quad (6.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \eta_1 &= c_0 \rho S, \\ \eta_2 &= c_1 \rho S, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Em particular, para v bem pequeno, podemos aproximar

$$f_{\text{atrito}} = -\eta_1 v. \quad (6.8)$$

Sejam m a massa do paraquedista. Supomos que não há vento. Também a força gravitacional é constante. A equação do movimento do paraquedista fica

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\eta_1 \frac{dy}{dt} - mg, \quad (6.9)$$

onde y é a coordenada vertical do paraquedista num sistema de coordenadas.

Esta é uma equação diferencial de 2ª ordem, linear, não homogênea. Mas devido a ausência do termo que contém y , podemos considerar esta equação como sendo uma equação diferencial de 1ª ordem em relação a $v = dy/dt$. Temos

$$\frac{dv}{dt} + bv + g = 0, \quad (6.10)$$

onde $b = \eta_1/m$. Como tem a forma da equação de 1ª ordem linear, temos a solução imediata,

$$\begin{aligned} v(t) &= e^{-bt} \left(- \int_0^t g e^{bt'} dt' + v_0 \right) \\ &= -\frac{g}{b} (1 - e^{-bt}) + v_0 e^{-bt}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

onde v_0 é a velocidade inicial.

Podemos considerar dois limites. Para b grande, a função e^{-bt} decrece rapidamente em t e a velocidade atinge rapidamente ao seu valor assintótica,

$$\begin{aligned} v &\rightarrow v_\infty = -\frac{g}{b} \\ &= -\frac{mg}{c_0\rho S}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Podemos ver que a velocidade final é proporcional ao peso do paraquedista (incluindo o pára-quedas), e inversamente proporcional a área do pára-quedas.

Por outro lado, se $b \rightarrow 0$, da Eq.(6.11), expandindo e^{-bt} em série de Taylor, temos

$$v(t) = v_0 - gt + O(b),$$

recuperando a queda livre.

Exercício I: Esboce o gráfico da Eq.(6.11) e estude a variação da curva em relação ao parâmetro b .

Exercício II: Integrando a Eq.(6.11) em t , obtenha y como função do tempo.

Exercício III: Na dedução da Eq.(6.7), vários fatores realísticos foram simplificados. Por exemplo, a forma do pára-quedas não foi mencionada. Será que a forma do pára-quedas relevante? Aponte os outros fatores importantes que devem ser considerados e discute como devem ser incluídos na teoria.

Exercício IV: Discuta o movimento de um pára-quedas quando existe uma vento.

Exercício V: Um espaço nave de massa M entra com a velocidade inicial V_0 numa região onde há uma concentração de meteorites. A densidade de meteorites nesta banda é n , e a massa média de meteorites é m . Obtenha a variação da velocidade do nave em função da distância percorrida para os seguintes casos: A) Cada meteorite adere na superfície do espaço nave quando choca. B) Cada meteorite choca elasticamente com a superfície. Considere o nave como um cilindro com área transversal A .

Exercício VI Quando a força de atrito do ar é dada pela

$$f_{atrito} = -\eta_1 v - \eta_2 v^2, \quad (6.13)$$

obtenha a solução para a equação de movimento do pára-queda,

$$m \frac{dv}{dt} = f, \quad (6.14)$$

e discuta o comportamento da solução. Nesta solução, verifique que no limite de $\eta_2 \rightarrow 0$, a solução coincide com o caso obtido anterior. Compare as soluções nos casos de $(\eta_1 \neq 0, \eta_2 = 0)$ e $(\eta_1 = 0, \eta_2 \neq 0)$ e interprete o resultado.

Exercício VII Uma espaçonave de massa M (incluindo o peso do combustível) está navegando no espaço a velocidade V . Num determinado instante, para acelerar a nave, o combustível foi acendido, ejetando um jato durante um intervalo de tempo dt . Durante este intervalo de tempo, a quantidade do jato lançado tem uma massa total de dm , e tem velocidade relativa a nave q .

1. Usando a conservação de momento, expresse a variação da velocidade dV da nave.
2. Supondo que o jato seja continuamente lançado com a mesma taxa de ejeção, (q constante, e dm/dt constante.), expresse a velocidade da nave como função do tempo.

7. Equação de 2ª Ordem

7.1. Sistema Massa+Mola - Oscilador Harmônico Amortecido

Vamos considerar a dinâmica de oscilação de um carro correndo numa estrada cheia de buracos como numa certa cidade que conhecemos bem. Queremos saber as forças que atuam num passageiro dentro do carro. Para estudar este problema, vamos introduzir as simplificações. Em primeiro lugar, estamos interessados em oscilações verticais, vamos concentrar o movimento vertical do veículo. Abstraindo o sistema (carro+roda) como na figura abaixo,

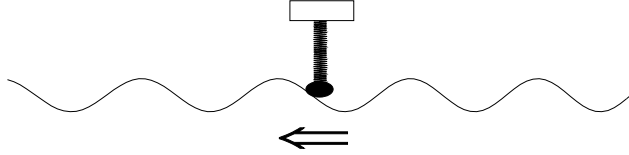


Fig. 2

queremos determinar o movimento do retângulo quando a posição vertical da roda é colocada em movimento forçada devido ao movimento ao longo da superfície irregular da estrada. Aqui, o carro será abstraído como sendo uma massa puntiforme.

Seja a forma funcional da superfície da estrada dada por

$$h = h(x), \quad (7.1)$$

onde h é a altura da superfície medido em relação a um plano fixo. Se o movimento do carro na direção de x é um movimento uniforme com a velocidade V , então a posição vertical da roda R_0 (supondo que a roda sempre está em contato com a superfície da estrada) é dada por

$$R_0 = R_0(t) = h(x_0 + Vt), \quad (7.2)$$

onde x_0 é a posição inicial do carro na direção de x .

Denotamos a coordenada vertical da massa M por $y = y(t)$. Escolhemos a direção do eixo para cima. Pela lei de Newton, devemos ter

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = f, \quad (7.3)$$

onde f é a força total que atua na massa M .

Podemos pensar duas origens desta força. A primeira, a força gravitacional, que atua em M para baixo,

$$f_G = -Mg, \quad (7.4)$$

onde g é a constante de aceleração do campo gravitacional da terra, e a segunda, a força de contato atuada pela mola,

$$f_{mola} = -k(y - R_0 - l), \quad (7.5)$$

onde k é a constante da mola, l o comprimento natural da mola. Aqui a quantidade

$$\Delta l = (y - R_0) - l$$

é a variação da extensão da mola. A equação de movimento fica

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -Mg - k(y - R_0 - l).$$

Na verdade, para simular o movimento vertical de um carro, está faltando um fator importante. O efeito de amortecedor. Sabemos que se não tiver um bom amortecedor, o carro pula com qualquer buraco no chão e perde o contato da roda com a superfície da estrada. Em geral, o efeito de um amortecedor é gerado pela viscosidade de um fluido (óleo) num cano, de tal forma que esta resista contra movimentos rápidos. Isto é, quanto maior a velocidade do movimento, a força se torna maior para resistir ao movimento. Assim, a força que atua na massa por um amortecedor pode ser descrita aproximadamente

$$f_{amort} = -\eta \frac{dy}{dt},$$

onde η é o coeficiente do atrito, e o sinal negativo indica que a força tem a direção contra a velocidade. Incluindo desta força na equação de movimento, temos

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -Mg - k(y - R_0(t) - l) - \eta \frac{dy}{dt}. \quad (7.6)$$

Embora esta equação parece um pouco complicada, podemos limpar-a um pouco. Por exemplo, o comprimento natural da mola, l e a força gravitacional Mg podem ser absorvidos se escolhermos a variável adequada. Vamos considerar a

situação onde o carro esteja parado na posição de equilíbrio. Denotamos a posição de equilíbrio y_0 . Neste caso, devemos ter,

$$\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{y=y_0} = 0, \quad (7.7)$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=y_0} = 0, \quad (7.8)$$

e portanto,

$$-Mg - k(y_0 - \bar{R}_0 - l) = 0, \quad (7.9)$$

onde $\bar{R}_0$ indica a posição da roda no local do carro esteja parado. A solução desta equação para y_0 , a posição do carro em equilíbrio, fica

$$y_0 = \bar{R}_0 + l - \frac{Mg}{k}. \quad (7.10)$$

Na Eq.(7.1) está implícita que existe algum lugar a origem do sistema de coordenadas que mede a altura. Podemos escolher esta origem arbitrariamente. Podemos, por exemplo, medir a altura do carro em relação a posição de equilíbrio, y_0 . Para fazer isto, introduzimos a nova variável,

$$z \equiv y - y_0,$$

e reescrevemos a equação de movimento em termos deste z . Temos

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z - R_0(t) + \bar{R}_0) - \eta \frac{dz}{dt}, \quad (7.11)$$

ou

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + \eta \frac{dz}{dt} + kz = k\Delta R_0(t), \quad (7.12)$$

onde denotamos que

$$\Delta R_0(t) = R_0(t) - \bar{R}_0$$

que é a variação temporal da altura da roda em relação a posição em equilíbrio.

É importante analisar a forma da equação (7.12) em relação a equação original Eq.(7.6). Da Eq.(7.6) temos também praticamente a mesma forma da equação,

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + \eta \frac{dy}{dt} + ky = -Mg + k(R_0(t) + l) \quad (7.13)$$

exceto o lado direito.

Exercício I: Qual é a dimensão do constante η ?

Exercício II: Qual é a necessidade do amortecedor para carros?

A Eq.(7.12) tem a forma

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2b \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = f(t), \quad (7.14)$$

onde

$$\begin{aligned} b &= \frac{\eta}{2M}, \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{M}}, \\ f(t) &= \omega_0^2 \Delta R_0(t) \end{aligned}$$

e, é um exemplo de uma equação diferencial ordinária de 2 ordem, linear.

Exercício: Qual é a dimensão de b e ω_0 ?

Uma equação diferencial ordinária de 2^a ordem linear mais geral tem a forma,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + P(t) \frac{dz}{dt} + Q(t)z = f(t). \quad (7.15)$$

E eq.(7.14) é o caso particular desta para quual P e Q são constantes.

7.2. Caso Homogêneo

Vamos estudar o caso homogêneo, isto é o caso em que $f(t) \equiv 0$. A equação de segunda ordem homogênea mais geral seria,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + P(t) \frac{dz}{dt} + Q(t)z = 0. \quad (7.16)$$

Muitas funções conhecidas, tais como, Polinômio de Legendre, Funções de Bessel, Função de Hermite, funções frigonôméticas, exponencial, são obtidas como solução de equação diferencial deste tipo. No caso de coeficientes constantes, temos

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2b \frac{dz}{dt} + cz = 0. \quad (7.17)$$

Como provamos anteriormente, se tivermos duas soluções distintas da equação diferencial linear homogênea, sua combinação linear é também uma solução. Esta afirmação vale independentemente que os coeficientes da equação sejam constantes ou não. Assim, se

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1(t), \\ z_2 &= z_2(t) \end{aligned}$$

são duas soluções independentes da Eq.(7.16) ou da Eq.(7.17),

$$z = \alpha z_1(t) + \beta z_2(t) \quad (7.18)$$

é a solução da respectiva equação.

Para obter uma equação diferencial de segunda ordem, o procedimento envolve as integrais duas vezes, já que é da segunda ordem em derivada. E a cada integral deve introduzir uma constante de integração. Portanto, a solução geral de uma equação diferencial de segunda ordem deve conter duas constantes arbitrárias. Estas constantes devem ser especificadas pela condição inicial do problema. Isto é, para especificar uma solução completamente, precisamos de duas condições que determinam estas constantes de integração. No caso de equação de movimento de Newton, estas duas condições correspondem a fornecer a posição inicial e a velocidade inicial do problema.

Inversamente falando, a forma da equação Eq.(7.18) pode cobrir qualquer possibilidade da condição inicial escolhendo os coeficientes α e β apropriadamente. Neste sentido, a forma da solução (7.18) é chamada de solução geral, e as duas soluções z_1 e z_2 são chamadas de soluções particulares. Desta forma, se encontramos qualquer duas soluções particulares, z_1 e z_2 , linearmente independentes⁴,

⁴Duas funções, $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são ditas linearmente independentes quando a condição,

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \equiv 0$$

para qualquer valor de t implica necessariamente $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Por exemplo,

$$\alpha t + \beta t^2 \equiv 0,$$

para todos valores de t , então, necessariamente temos

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, \\ \beta &= 0, \end{aligned}$$

e, portanto, as duas funções, $f_1 = t$ e $f_2 = t^2$ são linearmente independentes.

podemos obter a solução mais geral pela combinação linear destas duas funções. Os coeficientes devem ser determinados em termos da condição inicial do problema. Note que esta afirmação é válida só para equações diferenciais lineares homogêneas.

8. Equação Diferencial de segunda ordem linear com coeficientes constantes

Vamos estudar a equação diferencial ordinária de segunda ordem com coeficientes constantes. A forma mais geral é

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2b \frac{dz}{dt} + cz = f(t). \quad (8.1)$$

Primeira, vamos estudar o caso homogênea, ou seja

$$f(t) \equiv 0. \quad (8.2)$$

8.1. Caso Homogênea: Método de Equação Característica

No caso de uma equação linear homogênea com coeficientes constantes, um método padrão de obter soluções particulares é supor que a solução tenha a forma⁵,

$$z = e^{\lambda t}, \quad (8.3)$$

e substituir esta expressão na equação original, Eq.(7.17), o que resulta em

$$(\lambda^2 + 2b\lambda + c)e^{\lambda t} = 0. \quad (8.4)$$

Esta equação mostra que existe um valor da constante λ (independente de t) para qual o anstaz Eq.(8.3) é de fato a solução. Isto é, se λ satisfaz a equação,

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0, \quad (8.5)$$

⁵Para resolver uma equação, as vezes supomos uma certa forma da solução a priori, deixando alguns parâmetros incógnitos. Substituindo na equação a ser resolvida, obteremos a condição para estes parâmetros.

Este tipo de método é útil e eficiente quando sabemos o comportamento da solução a priori. A solução assumida é chamada “*Ansatz*”, a palavra da origem alemã. Naturalmente a forma de ansatz depende do problema. Se o ansatz não for adequado, pode ter a condição incinsistente com o próprio ansatz.

a ansatz se torna a solução. Temos⁶

$$\lambda_{\pm} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}. \quad (8.6)$$

Assim, chegamos a duas soluções particulares,

$$\begin{aligned} z_+ &= e^{\lambda_+ t}, \\ z_- &= e^{\lambda_- t}. \end{aligned}$$

Estas duas soluções são linearmente independentes, se $\lambda_+ \neq \lambda_-$. Neste caso, podemos construir a solução geral,

$$z = \alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t}, \quad (8.7)$$

desde $\lambda_+ \neq \lambda_-$, ou seja, $q \equiv \sqrt{b^2 - c} \neq 0$. Para $q = 0$, as duas soluções z_+ e z_- são idênticas e não faz sentido de formar uma combinação linear das duas. Neste caso deverá ser tratado separadamente como se verá mais adiante.

8.2. Uso de método da álgebra linear

O método da característica pode parecer uma técnica ad-hoc, devido à introdução de “ansatz” Eq. Para uma equação linear, existe um método de raciocínio bastante geral para levar à solução do problema. No caso do problema aqui, é um pouco exagerado introduzir o método, mas é interessante sempre entender o método complexo numa situação mais fácil.

Estamos considerando a equação

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (8.8)$$

É sempre possível transformar a equação de segunda ordem em um conjunto de equações de primeira ordem como mostrado abaixo. Vamos introduzir uma nova variável

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (8.9)$$

⁶Note que podemos escrever também

$$\lambda_{\pm} = \frac{c}{-b \mp \sqrt{b^2 - c}}.$$

Esta forma é útil quando $c \rightarrow 0$, devido ao grande cancelamento entre $-b$ e $\sqrt{b^2 - c}$.

Podemos re-escrever a Eq.(8.8) como

$$\frac{dv}{dt} = -cx - 2bv. \quad (8.10)$$

Assim, a Eq.(8.8) é completamente equivalente a seguinte conjunto das equações para os incógnitos x e v :

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (8.11)$$

$$\frac{dv}{dt} = -cx - 2bv. \quad (8.12)$$

Vamos introduzir a notação matricial. Escrevemos o conjunto de variáveis (x, v) em termos de um vetor coluna $\vec{x}$ como

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

Podemos então escrever as equações (8.11,8.12) na forma matricial,

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix} \vec{x}. \quad (8.14)$$

ou seja,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad (8.15)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix}. \quad (8.16)$$

Exercício: Obtenha a matriz A nas seguintes relações:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = 2, \end{cases} \quad (8.17)$$

$$\rightarrow A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

$$\begin{cases} dx/dt = 4x - 2y, \\ dy/dt = 3x + y, \end{cases} \quad (8.19)$$

$$\rightarrow d\vec{x}/dt = A\vec{x} \quad (8.20)$$

Mudança de Variáveis Na álgebra linear, aprendemos que a multiplicação de uma matriz constante, digamos S ,

$$\vec{y} = S\vec{x} \quad (8.21)$$

corresponde a mudança de variáveis de (x, v) para (y, u) onde

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}. \quad (8.22)$$

Multiplicando os dois lados da equação vetorial,

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = A\vec{x}, \quad (8.23)$$

do lado esquerda, (importante o lado da multiplicação de uma matrix a um vetor)

$$S\frac{d}{dt}\vec{x} = SA\vec{x}. \quad (8.24)$$

Já que

$$\vec{y} = S\vec{x}, \quad (8.25)$$

$$\vec{x} = S^{-1}\vec{y}, \quad (8.26)$$

temos

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = SAS^{-1}\vec{y}, \quad (8.27)$$

onde utilizamos o fato de que a matriz S é uma matriz constante e, portanto,

$$S\frac{d}{dt}\vec{x} = \frac{d}{dt}S\vec{x} \quad (8.28)$$

$$= \frac{d}{dt}\vec{y}. \quad (8.29)$$

A Eq.(8.27) tem a forma

$$\frac{d}{dt}\vec{y} = D\vec{y}, \quad (8.30)$$

onde

$$D = SAS^{-1} \quad (8.31)$$

é uma nova matriz (2×2) . A forma desta matriz depende, claro, de S . A Eq.(8.31) é considerada uma transformação de matriz A pela matriz S e chamada a *transformação similar*. É conhecido que, podemos escolher S adequadamente de tal forma que a matriz D fica na forma diagonal. Tal matriz S é determinada, dentro de um fator constante, quando A é dada.

$$D = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (8.32)$$

Os valores λ_1 e λ_2 são valores intrínsecos de A e são chamados de autovalores de A . Suponhamos que encontramos tal S e os autovalores de A . Neste caso, a Eq.(8.30) fica explicitamente

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}. \quad (8.33)$$

Ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 y, \quad (8.34)$$

$$\frac{du}{dt} = \lambda_2 u. \quad (8.35)$$

Nesta forma, podemos resolver facilmente, tendo

$$y = y_0 e^{\lambda_1 t}, \quad (8.36)$$

$$u = u_0 e^{\lambda_2 t}. \quad (8.37)$$

Em termos de variáveis originais, x e v , temos

$$\vec{x} = S^{-1} \vec{y}, \quad (8.38)$$

e escrevendo

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad (8.39)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \end{pmatrix}. \quad (8.40)$$

Explicitamente,

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (8.41)$$

$$v = C_3 e^{\lambda_1 t} + C_4 e^{\lambda_2 t}, \quad (8.42)$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes que podem ser escritas em termos de $y_0, u_0, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, mas como estes devem ser determinados por condições iniciais para x e v , não precisam ser explicitados.

Agora vamos determinar λ_1 e λ_2 . Da Eq.(8.32), temos

$$AS^{-1} = S^{-1}D \quad (8.43)$$

Explicitamente

$$A \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (8.44)$$

Pela regra de multiplicação de matriz, podemos verificar que a equação acima pode ser escrita como

$$\left(A \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right) = \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \lambda_2 \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right). \quad (8.45)$$

Ou seja,

$$A \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (8.46)$$

e

$$A \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}. \quad (8.47)$$

As ambas equações acima tem a forma,

$$A\vec{\xi} = \lambda\vec{\xi}, \quad (8.48)$$

onde $\lambda = \lambda_1$ ou λ_2 , e $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$, respectivamente. Aqui, $\vec{\xi}$ é chamado de *autovetor* de A . Note que a Eq.(8.48) pode ser escrita por

$$(A - \lambda\mathbf{I})\vec{\xi} = 0, \quad (8.49)$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.50)$$

A equação Eq.(8.49) é um sistema de equações linear e homogênea, e para ter solução não trivial, devemos ter

$$\det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0. \quad (8.51)$$

Isto determina os possíveis valores de λ . No nosso caso particular

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -2b \end{pmatrix}, \quad (8.52)$$

temos

$$A - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -\lambda - 2b \end{pmatrix}, \quad (8.53)$$

e portanto,

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -c & -\lambda - 2b \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2b\lambda + c. \quad (8.54)$$

Assim, os valores de λ_1 e λ_2 devem satisfazer a equação,

$$\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0, \quad (8.55)$$

que é nada mais que a Eq.(8.5).

8.3. Comportamento da Solução

Vamos investigar as propriedades das funções, z_+ e z_- . Devemos tratar separadamente os casos,

a)

$$b^2 > c,$$

b)

$$b^2 < c,$$

c)

$$b^2 = c.$$

8.3.1. Caso a)

No caso a), já que

$$\lambda_+ < \lambda_- < 0,$$

as duas soluções são funções que *decaem exponencialmente* em tempo t . Assim, sua combinação linear também é uma função que decai exponencialmente, a menos

que um eventual crescimento na origem dependendo da velocidade inicial. Para determinar as constantes, colocamos $z(t=0) = z_0$ e $dz/dt(t=0) = v_0$, tendo,

$$\begin{aligned} z_0 &= \alpha + \beta, \\ v_0 &= \lambda_+ \alpha + \lambda_- \beta. \end{aligned}$$

Neste regime, o movimento é dito superamortecido.

8.3.2. Caso b)

No caso b), vamos introduzir uma nova notação

$$\omega_{amt} = \sqrt{c - b^2}, \quad (8.56)$$

e

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= -b + i\omega_{amt}, \\ \lambda_- &= -b - i\omega_{amt}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} z &= e^{-bt} (\alpha e^{i\omega_{amt}t} + \beta e^{-i\omega_{amt}t}) \\ &= e^{-bt} \{ \alpha (\cos \omega_{amt}t + i \sin \omega_{amt}t) + \beta (\cos \omega_{amt}t - i \sin \omega_{amt}t) \} \\ &= e^{-bt} \{ (\alpha + \beta) \cos \omega_{amt}t + i (\alpha - \beta) \sin \omega_{amt}t \} \\ &= e^{-bt} \{ C_1 \cos \omega_{amt}t + C_2 \sin \omega_{amt}t \} \\ &= A e^{-bt} \cos (\omega_{amt}t - \phi) \end{aligned} \quad (8.57)$$

onde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ e $\phi = \tan^{-1} (C_2/C_1)$. Novamente, as constantes, C_1 e C_2 , ou A e ϕ são determinadas pelas condições iniciais. A solução oscila indefinidamente com a frequência ω_{amt} , embora sua amplitude diminua exponencialmente com o fator e^{-bt} . Este é o regime de oscilação subamortecida.

Note que a frequência de um oscilador amortecido é uma função do coeficiente do atrito,

$$\omega_{amt} = \sqrt{\omega_0^2 - b^2},$$

e, portanto, não é exatamente igual ao caso sem atrito para qual a frequência é $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. A frequência diminui com o aumento do coeficiente do atrito. Assim, podemos pensar numa situação em que o atrito se tornar tão grande que esta frequência se torna exatamente nula, ou seja, não oscila. Isto é o caso c).

8.3.3. Caso c)

Quando

$$b^2 = c, \quad (8.58)$$

as duas raízes da Eq.(8.4) ficam degenerados e a solução (8.7) se torna,

$$z = (\alpha + \beta) e^{\lambda_+ t} \quad (8.59)$$

contendo apenas uma constante, e não duas,

$$A = \alpha + \beta \quad (8.60)$$

na solução. Portanto, a Eq.(8.7) não pode constituir uma solução geral.

Por outro lado, o caso de $b^2 = c$ pode ser considerado como o caso de limite de $q = \sqrt{b^2 - c} \rightarrow 0$. Sabemos que quando $q \neq 0$,

$$\begin{aligned} \lambda_+ &= -b + q, \\ \lambda_- &= -b - q, \end{aligned}$$

e podemos escrever,na forma,

$$\begin{aligned} z &= e^{-bt} (\alpha e^{qt} + \beta e^{-qt}) \\ &= e^{-bt} \left[(\alpha + \beta) \frac{e^{qt} + e^{-qt}}{2} + (\alpha - \beta) \frac{e^{qt} - e^{-qt}}{2} \right]. \end{aligned}$$

Assim, vejamos como no limite de $q \rightarrow 0$, se $\alpha - \beta$ não for infinito, o segundo termo dentro de [] desaparece na equação acima e resulta na Eq.(8.59). Mas, nada impede que o coeficiente $\alpha - \beta$ pode tender infinito quando $q \rightarrow 0$. Ou explicitamente, sempre podemos escrever,

$$\begin{aligned} z &= e^{-bt} \left[(\alpha + \beta) \frac{e^{qt} + e^{-qt}}{2} + (\alpha - \beta) \frac{e^{qt} - e^{-qt}}{2} \right] \\ &= e^{-bt} \left[A \frac{e^{qt} + e^{-qt}}{2} + B \frac{e^{qt} - e^{-qt}}{2q} \right], \end{aligned}$$

onde escrevemos

$$\begin{aligned} A &= \alpha + \beta, \\ B &= q(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Agora, A e B são os constantes de combinação linear de duas funções linearmente independentes,

$$\begin{aligned}\bar{y}_1(t) &= e^{-bt} \left(\frac{e^{qt} + e^{-qt}}{2} \right), \\ \bar{y}_2(t) &= e^{-bt} \left(\frac{e^{qt} - e^{-qt}}{2q} \right),\end{aligned}$$

de tal forma que

$$z = A\bar{y}_1(t) + B\bar{y}_2(t).$$

Note que esta forma preserva o papel dos dois constantes mesmo para o limite $q \rightarrow 0$, pois neste limite,

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= e^{-bt}, \\ \bar{y}_2 &= te^{-bt},\end{aligned}$$

mantendo as duas funções linearmente independentes. Finalmente temos

$$z = e^{-bt} [A + Bt], \text{ para } q = 0. \quad (8.61)$$

Exercício: Verifique que a Eq.(8.61) é a solução da Eq.(7.17) diretamente pela substituição.

Finalmente, para o caso $\lambda_+ = \lambda_-$, ou seja $\omega_{aort} = 0$, temos a Eq.(8.61),

$$z = e^{-bt} (A + Bt),$$

que é novamente uma função que decai exponencialmente, tendo, no máximo, um ponto de extremo. Como foi esperado, não ha movimento oscilatório. Este é o regime de amortecimento crítico.

Exercício I: Esboce os gráficos das soluções de cada regime, dependendo dos parâmetros α e β .

Exercício II: Discuta os três casos em relação a variação dos parâmetros físicos M, η e k .

Exercício III: Expresse as constantes α e β ou A e B em termos de posição inicial x_0 e velocidade inicial v_0 nos três regimes.

8.4. Caso Não Homogêneo

Agora vamos estudar o caso $f(t) \neq 0$. Quando $f(t) \neq 0$, não vale a afirmação anterior de que, se z_1 e z_2 forem duas soluções, sua combinação linear arbitrária não é a solução. Mas, vale a seguinte propriedade.

Para visualizar melhor a estrutura lógica do raciocínio, vamos introduzir uma noção de um *operador* para uma função. Um operador, digamos O , é uma determinada regra de mapeamento de uma função para uma outra função. Suponhamos que uma função $f(t)$ seja mapeado (transformada) para a outra função $F(t)$ com certa regra bem determinada. Por exemplo, construir a função $F(t)$ como a derivada de $f(t)$,

$$F(t) = \frac{df}{dt}, \quad (8.62)$$

pode ser visto como um mapeamento de uma função f para outra função F . Escrevemos o mapeamento como

$$f \rightarrow F = Of$$

No exemplo de derivada, o próprio símbolo de derivada

$$O = \frac{d}{dt}$$

é um operador. Um operador aplica qualquer um dos elementos do espaço cujo elemento é função $\{f(t)\}$. Certamente, a aplicação deste operador numa função f arbitrária produz uma nova função F ,

$$f \rightarrow F = \frac{d}{dt}f.$$

Todas as derivadas de ordem superiores são também operadores⁷.

⁷A operação de integral é um operador, pois a integral de uma função f ,

$$F(t) = \int^t dt f(t).$$

pode ser considerada como uma regra de mapeamento

$$f \rightarrow F.$$

Um operador é dito operador linear se, para duas funções arbitrárias f e g ,

$$O(\alpha f + \beta g) = \alpha O f + \beta O g, \quad (8.63)$$

sendo α e β constantes. Isto é, para operadores lineares, vale a regra de distribuição. Os operadores diferenciais são operadores lineares. Uma equação diferencial linear tipo (7.16) pode ser escrita na forma

$$D[z] = f, \quad (8.64)$$

onde definimos um operador diferencial D por

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + P(t) \frac{d}{dt} + Q(t), \quad (8.65)$$

que é um operador linear. Podemos provar facilmente que, se existem duas funções z_1 e z_2 que satisfazem

$$\begin{aligned} D[z_1] &= f_1(t), \\ D[z_2] &= f_2(t), \end{aligned}$$

com

$$f_1 + f_2 = f(t), \quad (8.66)$$

então,

$$z = z_1 + z_2$$

é a solução da equação diferencial,

$$D[z] = f. \quad (8.67)$$

Exercício I: Verifique se a afirmação acima é verdade e confira a importância da propriedade linear do operador para valer este teorema.

Exercício: Generalizando a afirmação acima, prove o seguinte teorema. Seja $\{z_n, n = 1, \dots, N\}$ um conjunto de funções que satisfazem,

$$D[z_n] = f_n(t), \quad n = 1, \dots, N.$$

Então, a solução da equação

$$D[z] = f,$$

onde

$$f = \sum_{n=1}^N f_n,$$

é dada por

$$z = \sum_{n=1}^N z_n.$$

Como um caso particular do teorema acima, podemos provar que para uma dada solução $z = z(t)$, a adição da solução geral da equação homogênea é também uma solução. Isto é, seja $z = z(t)$ uma solução da equação diferencial linear não homogênea,

$$D[z] = f(t). \quad (8.68)$$

Então,

$$z_{\text{novo}} = z + z_{\text{hom}}$$

é também a solução, onde z_{hom} é uma solução da equação homogênea,

$$D[z_{\text{hom}}] = 0.$$

No caso de uma equação diferencial linear de 2^a ordem não homogênea, a solução mais geral será então,

$$z = z_{\text{non hom}} + \alpha z_{\text{hom}}^{(1)} + \beta z_{\text{hom}}^{(2)}. \quad (8.69)$$

onde $z_{\text{non hom}}$ é uma solução particular da equação não homogênea, e $z_{\text{hom}}^{(1)}$ e $z_{\text{hom}}^{(2)}$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea. Assim, para obter a solução geral da equação não homogênea, é necessário ter uma solução particular não homogênea, além de soluções gerais da parte homogênea.

8.5. Função δ de Dirac

Para equações lineares, existe um método sistemático para obter uma solução particular da equação não homogênea a partir das soluções da equação homogênea. Para vermos isto, vamos introduzir uma nova função, chamada de função δ de Dirac⁸.

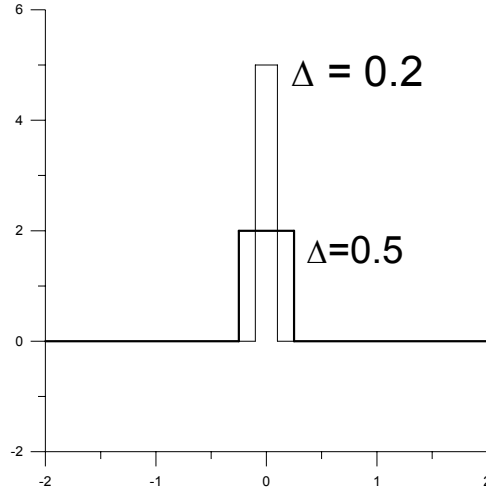
⁸Esta função, como o nome indica, foi introduzido por Paul Maurice A. Dirac, para sua construção da teoria da transformação na Mecânica Quântica. Inicialmente os matemáticos não aceitaram a idéia pois existem várias dificuldades matemáticas como uma função normal.

Posteriormente, a função δ de Dirac foi englobada numa teoria de distribuição (ou função generalizada) pelo Laurent Schwartz.

Vamos considerar uma função $\phi_\Delta(x)$ definida por

$$\phi_\Delta(x) = \begin{cases} 0, & t < -\Delta, \\ 1/2\Delta, & -\Delta < t < \Delta, \\ 0, & t > \Delta, \end{cases} \quad (8.70)$$

Como ver a figura abaixo, na medida que Δ se torna menor, esta função se torna cada vez mais estreita e alta na origem.



Note que para qualquer Δ , temos por construção,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\Delta(x) dx = 1. \quad (8.71)$$

A condição tipo acima é chamada de *condição de normalização*.

Vamos considerar o limite,

$$\Delta \rightarrow 0.$$

Neste limite, a função ϕ_Δ se torna ∞ na origem, e zero em qualquer outro valor de x , mantendo a condição de normalização, Eq.(8.71). Isto é, a área abaixo desta função é sempre 1. Isto deve ser mantido mesmo para $\Delta \rightarrow 0$. Assim, chegamos ao conceito da função $\delta(x)$ de Dirac como o limite⁹,

$$\delta(x) \rightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} \phi_\Delta(x). \quad (8.72)$$

A função δ de Dirac tem as seguintes propriedades:

⁹Note que este limite é para ilustrar sua essência e, *não é* a definição da função δ de Dirac.

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0, \quad (8.73)$$

$$\int_{x \in \Omega} dx \delta(x) = 1, \quad (8.74)$$

onde Ω é um domínio qualquer que inclua a origem.

Uma propriedade fundamental da função $\delta(x)$ é, para uma função contínua e suave, $f(x)$,

$$\int_{x \in \Omega} dx \delta(x) f(x) = f(0). \quad (8.75)$$

Podemos verificar a propriedade acima como seguir. Já que Ω é um domínio qualquer que inclui a origem, podemos tomar escolher $\Omega = [-\varepsilon, \varepsilon]$ e tomar o limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Queremos calcular a integral,

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \delta(x) f(x). \quad (8.76)$$

Quando o intervalo de um integral converge a zero, então a função $f(x)$ converge ao valor $f(0)$. Assim,

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \delta(x) f(0) \\ &= f(0) \int_{\Omega} dx \delta(x) = f(0). \end{aligned} \quad (8.77)$$

Podemos adotar a Eq.(8.75) como a definição da função δ de Dirac.

Definição: Chamamos de função δ de Dirac que tem a propriedade,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0), \quad (8.78)$$

para qualquer função $\phi(x)$ bem comportada.

As propriedades Eqs.(8.73,8.74) resultam da definição acima. Uma outra forma útil da função δ de Dirac é

$$\delta(x - a)$$

que corresponde ao deslocamento do eixo x por a . Temos

$$\int_{\Omega \ni a} dx \delta(x - a) f(x) = f(a), \quad (8.79)$$

e

$$\int_{a \notin \Omega} dx \delta(x - a) f(x) = 0. \quad (8.80)$$

Uma imagem intuitiva da função δ de Dirac na física é considerar a distribuição puntiforme de, por exemplo, carga, ou massa. Mas, matematicamente, a função δ de Dirac sempre aparece quando calculamos a derivada de uma função descontínua. Por exemplo, vamos considerar uma função $\theta(x)$ que tem a seguinte propriedade:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0, \end{cases} \quad (8.81)$$

Esta função é conhecida como a função degrau de Heaviside. A função de Heaviside tem uma descontinuidade em $t = 0$ onde seu valor pula de 0 a 1. Como fica a derivada? Quando $t \neq 0$, obviamente,

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = 0.$$

O que acontece em $t = 0$? Para ver isto, podemos considerar a função degrau de Heaviside como o limite de seguinte função contínua,

$$\theta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < -\Delta, \\ \frac{1}{2\Delta} (t + \Delta), & -\Delta < t < \Delta, \\ 1, & t > \Delta, \end{cases} \quad (8.82)$$

com

$$\theta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \theta_{\Delta}(t).$$

Assim, a derivada da função degrau de Heaviside pode ser considerada como o limite da derivada de $\theta_{\Delta}(t)$. Mas,

$$\frac{d}{dt} \theta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & t < -\Delta, \\ \frac{1}{2\Delta}, & -\Delta < t < \Delta, \\ 0, & t > \Delta, \end{cases}$$

que é exatamente a função $\phi_{\Delta}(t)$ da Eq.(8.70). Assim, concluímos que

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \delta(x). \quad (8.83)$$

Podemos provar mais formalmente da seguinte forma. Consideramos a integral,

$$I = \int_a^b dt \frac{d\theta}{dt} f(t)$$

onde $f(t)$ é uma função contínua e suave arbitrária, e $[a < 0 < b]$ é um intervalo arbitrário, contendo a origem $t = 0$. Aplicando a integral por parte, temos

$$\begin{aligned} I &= \theta(t)f(t)|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b dt \theta(t) \frac{df}{dt} \\ &= f(b) - \int_0^b dt \frac{df}{dt} \\ &= f(b) - f(t)|_{t=0}^b \\ &= f(0). \end{aligned}$$

onde da primeira para a segunda linha, utilizamos a propriedade da função degrau de Heaviside, $\theta(t) = 0$ para $t < 0$. Assim, para $\forall \Omega \ni 0$

$$\int_{\Omega \ni 0} dt \frac{d\theta}{dt} f(t) = f(0),$$

implica em

$$\frac{d\theta}{dt} = \delta(t). \quad (8.84)$$

Exercício I: Esboce graficos das funções $\theta(t)$ e $\theta_{\Delta}(t)$.

Exercício II: Esboce o grafico da função,

$$\theta(a - t).$$

Exercício III: Calcule as derivadas,

$$\begin{aligned} &\frac{d\theta(t - a)}{dt}, \\ &\frac{d\theta(a - t)}{dt}. \end{aligned}$$

Exercício IV: Prove que,

$$\begin{aligned}\delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x), \\ \delta(-x) &= \delta(x) \\ f(x)\delta(x) &= f(0)\delta(x)\end{aligned}$$

Na verdade, o limite de várias funções resulta em função δ . Por exemplo,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} = \delta(x),$$

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{x^2 + \Gamma^2} = \delta(x),$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\pi} \frac{1}{\cosh(x/\sigma)} = \delta(x)$$

etc.

Exercício I: Confira os limites acima¹⁰.

¹⁰Para integrar a função gaussiana,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-x^2-y^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{\int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta e^{-r^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d(r^2) e^{-r^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}.\end{aligned}$$

Exercício II: Mostre que a função θ é dado como o limites das seguites funções.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\pi} \tan^{-1} \frac{x}{\Gamma} \rightarrow \theta(x),$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{e^{x/\sigma}}{e^{x/\sigma} + 1} \rightarrow \theta(x).$$

8.5.1. Derivadas de função δ

A função δ de Dirac na verdade não é uma função no sentido usual. Ela só tem sentido quando está dentro de uma integral,

$$\int \delta(x) \phi(x) dx,$$

onde $\phi(x)$ é uma função bem comportada (derivável até qualquer ordem) e tende a zero para $|x| \rightarrow \infty$, mais rapidamente que qualquer polinômio de x ,

$$x^n \phi(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \forall n. \quad (8.85)$$

Vamos introduzir a derivada da função δ baseada na fórmula de integração por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\delta(x)}{dx} \phi(x) = \delta(x) \phi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) \frac{d\phi(x)}{dx} = 0 - \frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_{x=0} \quad (8.86)$$

Assim, a derivada da função δ , $\delta'(x)$ é definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta'(x - x_0) f(x) = - \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} \quad (8.87)$$

Para a integral Lorentziana,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \Gamma^2} &= \frac{1}{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\Gamma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d(\tan \theta)}{\tan^2(\theta) + 1} \\ &= \frac{1}{\Gamma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{\Gamma}. \end{aligned}$$

Analogamente, a derivada de ordem mais alta da função δ é definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) = (-1)^n \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \quad (8.88)$$

8.5.2. Derivada de uma Função descontínua

A função δ de Dirac sempre aparece quando derivamos uma função descontínua. Por exemplo, seja f uma função que formada de duas partes,

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t < a, \\ f_2(t), & t > a, \end{cases}$$

Neste caso, podemos escrever

$$f(t) = f_1(t) \theta(a - t) + f_2(t) \theta(t - a).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{df_1}{dt} \theta(a - t) - f_1(t) \delta(t - a) + \frac{df_2}{dt} \theta(t - a) + f_2(t) \delta(t - a) \\ &= \frac{df_1}{dt} \theta(a - t) + \frac{df_2}{dt} \theta(t - a) + [f_2(a) - f_1(a)] \delta(t - a) \\ &= \frac{df_1}{dt} \theta(a - t) + \frac{df_2}{dt} \theta(t - a) + \Delta f_{t=a} \delta(t - a) \end{aligned}$$

onde $\Delta f_{t=a}$ é a descontinuidade da função na posição da menda, $t = a$.

Exercício: Calcule a derivada das seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases},$$

$$f(x) = e^{-|x|},$$

$$f(x) = \text{sign}(x) \text{ }^{11}$$

11

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

8.6. Método de Função de Green

Uma vez introduzida a noção de função δ de Dirac, podemos agora discutir o método de função de Green para obter uma solução particular da equação não homogênea.

Seja D o operador diferencial linear dado por

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + P(t)\frac{d}{dt} + Q(t).$$

A função de Green $G(t, t')$ deste operador é definida como a solução da equação,

$$D[G(t, t')] = \delta(t - t'). \quad (8.89)$$

Antes de discutirmos como obter $G(t, t')$, vamos ver para que serve. O ponto fundamental do método de função de Green é que, uma vez obtida $G(t, t')$ podemos calcular a solução particular da equação não homogênea,

$$D[z(t)] = f(t), \quad (8.90)$$

por

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') f(t'). \quad (8.91)$$

A prova é quase imediata. É só verificarmos que esta expressão satisfaz a Eq.(8.90). Aplicando o operador diferencial,

$$D[z(t)] = D \left[\int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') f(t') \right]. \quad (8.92)$$

As derivadas do operador diferencial se referem a variável t e não a t' e, portanto, só a parte da função $G(t, t')$ que depende em t . Assim, temos

$$D[z(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt' D[G(t, t')] f(t'). \quad (8.93)$$

Mas por definição da função de Green G ,

$$D[G(t, t')] = \delta(t - t'),$$

então temos

$$\begin{aligned} D[z(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t - t') f(t') \\ &= f(t). \end{aligned} \quad (8.94)$$

Isto é, verificamos que a Eq.(8.91) satisfaz a Eq.(8.90).

Adicionando a solução geral da parte homogênea da equação, a solução geral da equação homogênea é formalmente dada por¹²

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') f(t') + \alpha z_1(t) + \beta z_2(t), \quad (8.95)$$

onde z_1 e z_2 são as soluções linearmente independentes da parte homogênea da equação,

$$D[z_{1,2}] = 0.$$

8.7. Construção da Função de Green

Agora, vamos estudar como obter a função de Green $G(t, t')$ a partir de soluções da parte homogênea da equação. Da definição da função de Green

$$D[G(t, t')] = \delta(t - t') \quad (8.96)$$

implica que

$$D[G(t, t')] = 0, \quad t \neq t', \quad (8.97)$$

devido a propriedade da função δ de Dirac. Isto significa que quando $t \neq t'$, a dependência em t da função de Green $G(t, t')$ é *uma solução* da parte homogênea da equação. Por outro lado, a Eq.(8.96) sugere alguma descontinuidade da função em $t = t'$. Assim, vamos separar em duas regiões, $t > t'$ e $t < t'$. Escrevemos, então,

$$G(t, t') = \begin{cases} C_1 z_1(t), & t < t' \\ C_2 z_2(t), & t > t' \end{cases} \quad (8.98)$$

onde $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são duas soluções linearmente independentes da parte homogênea da equação. A expressão acima pode ser re-escrita como

$$G(t, t') = C_1 z_1(t) \theta(t' - t) + C_2 z_2(t) \theta(t - t'), \quad (8.99)$$

¹²Aqui, restringimos a discussão ao caso da equação diferencial de 2º ordem, mas o argumento vale para qualquer ordem. No caso de uma equação diferencial linear de ordem n , teremos n -soluções linearmente independentes da parte homogênea da equação e, portanto, a solução geral tem a forma,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') f(t') + \sum_{i=1}^n \alpha_i z_{\text{hom}}^{(i)}(t),$$

onde $\{z_{\text{hom}}^{(i)}(t), i = 1, \dots, n\}$ é o conjunto de n soluções linearmente independentes da parte homogênea da equação.

onde θ é a função degrau de Heaviside.

Vamos calcular o resultado do operador diferencial $D[\]$ aplicado a esta expressão. Utilizando a expressão de derivada da função degrau de Heaviside, temos

$$\frac{d}{dt}G(t, t') = C_1 \frac{dz_1(t)}{dt} \theta(t' - t) + C_2 \frac{dz_2(t)}{dt} \theta(t - t') + \{C_2 z_2(t) - C_1 z_1(t)\}_{t=t'} \delta(t - t'),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}G(t, t') = & \\ & C_1 \frac{d^2 z_1(t)}{dt^2} \theta(t' - t) + C_2 \frac{d^2 z_2(t)}{dt^2} \theta(t - t') + \left\{ C_2 \frac{dz_2(t)}{dt} - C_1 \frac{dz_1(t)}{dt} \right\}_{t=t'} \delta(t - t') \\ & + \{C_2 z_2(t') - C_1 z_1(t')\}_{t=t'} \frac{d\delta(t - t')}{dt}, \end{aligned}$$

e, portanto, para $D = d^2/dt^2 + P(t)d/dt + Q(t)$, temos

$$\begin{aligned} D[G(t, t')] = & C_1 D[z_1(t)] \theta(t' - t) + C_2 D[z_2(t)] \theta(t - t') \\ & + \left\{ C_2 \frac{dz_2(t)}{dt} - C_1 \frac{dz_1(t)}{dt} \right\}_{t=t'} \delta(t - t') \\ & + \{C_2 z_2(t') - C_1 z_1(t')\}_{t=t'} \frac{d\delta(t - t')}{dt} \\ & + P(t') \{C_2 z_2(t) - C_1 z_1(t)\}_{t=t'} \delta(t - t') \end{aligned} \quad (8.100)$$

O lado direito da primeira linha anula, pois $z_1(t)$ e $z_2(t)$ são soluções da equação,

$$D[z_{1,2}] = 0.$$

Queremos escolher C_1 e C_2 de tal forma que a Eq.(8.100) seja igual a $\delta(t - t')$. Assim, a terceira linha não deve aparecer. Isto implica

$$C_2 z_2(t') - C_1 z_1(t') = 0, \quad (8.101)$$

e esta condição elimina também a última linha da Eq.(8.100). Agora basta escolher,

$$C_2 \frac{dz_2(t')}{dt'} - C_1 \frac{dz_1(t')}{dt'} = 1. \quad (8.102)$$

A solução do sistema {Eq.(33.32), Eq.(33.33)} fornece,

$$C_1 = \frac{z_2(t')}{W[z_1(t'), z_2(t)]}, \quad (8.103)$$

$$C_2 = \frac{z_1(t')}{W[z_1(t'), z_2(t)]}, \quad (8.104)$$

onde W no denominador é uma quantidade conhecida por *Wronskiana*, definida por¹³

$$\begin{aligned} W[z_1(t), z_2(t)] &= z_1(t) \frac{dz_2(t)}{dt} - z_2(t) \frac{dz_1(t)}{dt} \\ &= \det \begin{vmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ dz_1(t)/dt & dz_2(t)/dt \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (8.105)$$

Finalmente, obtivemos a expressão de função de Green para a equação diferencial linear de segunda ordem por

$$G(t, t') = \frac{1}{W[z_1(t'), z_2(t')]} \begin{cases} z_2(t') z_1(t), & t < t' \\ z_1(t') z_2(t), & t' < t \end{cases}, \quad (8.106)$$

onde, como foi dito, z_1 e z_2 são quaisquer duas soluções linearmente independentes da equação homogênea.

Exercício: Prove que a Wronskiana de duas funções *linearmente dependente* é nula. Prove também que se a Wronskiana é identicamente nula, então as duas funções são linearmente dependentes.

Note que a função de Green não é unívoca. Em primeiro lugar, qualquer duas funções $z^{(1)}$ e $z^{(2)}$ podem ser utilizadas desde que elas sejam soluções linearmente independentes da equação homogênea. Isto é equivalente dizer que se $G_0(t, t')$ é uma função de Green da equação, então,

$$G(t, t') = G_0(t, t') + z_{\text{hom}}(t)$$

é uma outra função de Green, também.

Esta não-unicidade pode ser utilizada para escolher a melhor combinação das soluções $z^{(1)}$ e $z^{(2)}$ de acordo com a condição de contorno do problema. Vejamos em seguida um exemplo deste questão.

¹³Em geral, a Wronskiana de duas funções f e g é definida por

$$W[f, g] = fg' - gf'.$$

Genericamente, a Wronskiana de n funções é definida por

$$W[f_1, f_2, \dots, f_n] = \det \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

8.8. Função de Green de Oscilador Harmônico Amortecido

Como um exemplo, vamos calcular a função de Green de um oscilador harmônico amortecido,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] G(t, t') = \delta(t - t').$$

Podemos escolher as duas soluções homogêneas por

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\lambda_+ t}, \\ z_2(t) &= e^{\lambda_- t}. \end{aligned}$$

onde como antes,

$$\lambda_{\pm} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.$$

Aqui, vamos supor, por simplicidade, que as duas raízes λ_+ e λ_- não são degeneradas ($b^2 \neq c$). A Wronskiana fica

$$\begin{aligned} W[z_1, z_2] &= \lambda_- e^{\lambda_+ t} e^{\lambda_- t} - \lambda_+ e^{\lambda_- t} e^{\lambda_+ t} \\ &= (\lambda_- - \lambda_+) e^{(\lambda_+ + \lambda_-)t}. \end{aligned}$$

Assim, a função de Green correspondente é

$$G_0(t, t') = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{cases} e^{\lambda_+(t-t')}, & t < t' \\ e^{\lambda_-(t-t')}, & t' < t \end{cases}. \quad (8.107)$$

Exercício I: Esboce o gráfico de $G_0(t, t')$ em função de t com t' fixo nos dois regimes de a) superamortecido, b) oscilação amortecida.

Exercício II: Esboce o gráfico de $G_0(t, t')$ em função de t' com t fixo nos dois regimes.

Exercício III: Obtenha a função de Green no caso de amortecimento crítico.

Esta é, de fato, uma função de Green, satisfazendo

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] G_0(t, t') = \delta(t - t'),$$

mas existe uma inconveniência. Como vimos, para obter uma solução da equação não homogênea,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z(t) = f(t),$$

devemos calcular a integral,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t, t') f(t') \quad (8.108)$$

Utilizando a Eq.(8.107), temos

$$z(t) = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \left[\int_{-\infty}^t dt' e^{\lambda_-(t-t')} f(t') + \int_t^{\infty} dt' e^{\lambda_+(t-t')} f(t') \right]. \quad (8.109)$$

A inconveniência da escolha da função aparece na segunda integral desta expressão. No caso de oscilador amortecido, sabemos que

$$e^{\lambda_+ t}$$

é uma função cuja amplitude decresce exponencialmente para $t > 0$ em todos os regimes, pois

$$\text{Re} \{ \lambda_+ \} < 0. \quad (8.110)$$

Por outro lado, com a mesma razão,

$$e^{-\lambda_+ t'}$$

é uma função cuja amplitude diverge exponencialmente para $t' \rightarrow \infty$. Assim, se a função $f(t')$ não for uma função decrescente mais rápida que $e^{-\lambda_+ t'}$, a integral diverge. Usualmente, numa situação realística, não podemos não podemos esperar esta propriedade para f , porque $f(t)$ é uma função arbitrária. Para a primeira integral na Eq(8.109) não tem este problema, pois o fator

$$e^{\lambda_-(t-t')}$$

decrece exponencialmente para $t' \rightarrow -\infty$.

Podemos eliminar a segunda integral utilizando a liberdade de somar a função de Green uma solução da equação homogênea sem estragar a propriedade de ser uma função de Green. Se define a nova função por

$$\begin{aligned} G(t, t') &= G_0(t, t') - \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} e^{\lambda_+(t-t')} \\ &= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{cases} 0, & t < t' \\ e^{\lambda_-(t-t')} - e^{\lambda_+(t-t')}, & t' < t \end{cases} \end{aligned} \quad (8.111)$$

podemos checar diretamente que este $G(t, t')$ é uma função de Green, satisfazendo,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] G(t, t') = \delta(t - t'). \quad (8.112)$$

Exercício I: Prove diretamente a Eq.(8.112).

Exercício II: Esboce o gráfico de $G(t, t')$ em função de t com t' fixo nos dois regimes de a) superamortecido, b) oscilação amortecida.

Exercício III: Esboce o gráfico de $G(t, t')$ em função de t' com t fixo nos dois regimes.

Utilizando a função G na Eq.(8.108), temos

$$z(t) = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \int_{-\infty}^t dt' \left(e^{\lambda_-(t-t')} - e^{\lambda_+(t-t')} \right) f(t'). \quad (8.113)$$

A solução geral é

$$z(t) = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \int_{-\infty}^t dt' \left(e^{\lambda_-(t-t')} - e^{\lambda_+(t-t')} \right) f(t') + \alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t}. \quad (8.114)$$

Uma certa escolha da função de Green corresponde à escolha da solução particular com determinado comportamento nos limites de $t \rightarrow \pm\infty$. Em geral, escolhemos

$$G(t, t') \rightarrow 0, \quad t' \rightarrow \pm\infty, \quad (8.115)$$

de modo que a integral na Eq.(8.108) convirja para dada função $f(t)$ não divergente.

Exercício: Obtenha a função de Green da equação,

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] G(r, r') = \delta(r - r'),$$

que satisfaz a condição de contorno, a Eq.(8.115), onde ℓ é um número inteiro não negativo¹⁴.

¹⁴Note que a ansatz,

$$z(r) = e^{\lambda r}$$

não funciona neste caso. Experimente o ansatz,

$$z(r) = r^\alpha,$$

onde α é a constante a ser determinada. Encontre um motivo de porque esta forma de ansatz funcionaria.

8.9. Ressonância

Vamos considerar o caso em que a força externa tenha a forma¹⁵,

$$f(t) = e^{i\omega t}.$$

Queremos resolver a equação,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z_{\omega}(t) = e^{i\omega t}. \quad (8.116)$$

À primeira vista, esta forma da força externa pode parecer estranha, pois $e^{i\omega t}$ não é um real, mas um complexo. Nenhuma força na natureza seria um número complexo. Mas, pelo teorema geral que provamos para a equação diferencial linear, se tivermos as soluções das equações,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z_{\omega}(t) = e^{i\omega t},$$

e

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z_{-\omega}(t) = e^{-i\omega t},$$

sua combinação linear,

$$z_r(t) = \frac{1}{2} [z_{+\omega}(t) + z_{-\omega}(t)]$$

é a solução da equação,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z_r(t) = \cos \omega t.$$

Esta é uma força oscilante, que corresponde, no exemplo de carro, à superfície também ter a forma senoidal,

$$h(x) = \cos(k(x - x_0)),$$

onde $\omega = kv$. Na prática, a forma exata senoidal raramente se encontra como a forma da superfície de uma estrada. Mas, têm certa situação em que a sucessão de buracos de tamanhos similares pode ser aproximada pela senóide. Além disto,

¹⁵Não pode confundir ω e ω_r na Eq.(8.56).

pelo teorema de Fourier, podemos expressar qualquer função geral como uma combinação linear de sin e cos. Assim, se resolvermos a Eq.(8.116), podemos expressar a solução da equação

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z(t) = f(t)$$

para qualquer $f(t)$.

Exercício I: Expresse a solução da equação,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z_{im}(t) = \sin \omega t$$

em termos de $z_{+\omega}(t)$ e $z_{-\omega}(t)$.

Exercício II: Prove que, quando b e c são números reais, então

$$z_{-\omega}(t) = z_{\omega}(t)^*,$$

onde z^* é o complexo conjugado de z , ou seja, se $z = x + iy$, então, $z^* = x - iy$.

Exercício III: Mostre que, quando b e c são números reais, então

$$z_r(t) = \operatorname{Re} z_{\omega}(t), \quad (8.117)$$

$$z_{im}(t) = \operatorname{Im} z_{\omega}(t), \quad (8.118)$$

onde $\operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(z)$ são a parte real e imaginária do complexo z , ou seja, se $z = x + iy$, então, $\operatorname{Re}(z) = x$, e $\operatorname{Im}(z) = y$.

Exercício IV: Se a função $f(t)$ for expresso pela série de Fourier,

$$f(t) = \sum (a_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t),$$

expresse a solução da equação,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z(t) = f(t)$$

em termos de combinação linear das soluções das equações,

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2b \frac{d}{dt} + c \right] z_{\omega_n}(t) = e^{i\omega_n t}.$$

Voltando à Eq.(8.116), a solução particular é dada pela Eq.(8.113),

$$\begin{aligned} z_\omega(t) &= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \int_{-\infty}^t dt' \left(e^{\lambda_-(t-t')} - e^{\lambda_+(t-t')} \right) e^{i\omega t'} \\ &= \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \left[\frac{1}{-\lambda_- + i\omega} - \frac{1}{-\lambda_+ + i\omega} \right] e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{(-\lambda_- + i\omega)(-\lambda_- + i\omega)} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Substituindo

$$\lambda_\pm = -b \pm \sqrt{b^2 - c},$$

temos

$$z_\omega(t) = \frac{1}{-\omega^2 + 2ib\omega + c} e^{i\omega t}.$$

A mesma expressão pode ser obtida diretamente da Eq.(8.116), se soubermos que existe uma solução da forma,

$$z_\omega(t) = Ae^{i\omega t}.$$

Substituindo esta expressão na Eq.(8.116), temos diretamente

$$A = \frac{1}{-\omega^2 + 2ib\omega + c}.$$

Vamos estudar o regime subamortecido. Neste caso, temos

$$\lambda_\pm = -b \pm i\omega_{amt},$$

e

$$c = \omega_{amt}^2 - b^2.$$

Assim,

$$A = \frac{1}{\omega_{amt}^2 - \omega^2 - b^2 + 2ib\omega}. \quad (8.119)$$

Para facilitar o visual e o cálculo, vamos adotar a representação polar desta amplitude complexa. Podemos escrever

$$A = |A| e^{i\phi}$$

onde

$$\begin{aligned}
 |A| &= \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{amt}^2 + b^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}},
 \end{aligned} \tag{8.120}$$

$$\tan \phi = \frac{2b\omega}{\omega^2 - \omega_{amt}^2 + b^2}. \tag{8.121}$$

Exercício: Verifique as expressões acima.

Podemos então expressar a solução particular como

$$z_\omega(t) = |A| e^{i(\omega t + \phi)}. \tag{8.122}$$

para o caso que a parte não homogênea tenha a forma

$$f(t) = e^{i\omega t}.$$

Por outro lado, como discutimos, se $f(t) = \cos \omega t$, a solução é

$$\begin{aligned}
 z_r(t) &= \operatorname{Re}(z_\omega(t)) \\
 &= |A| \cos(\omega t + \delta),
 \end{aligned} \tag{8.123}$$

onde $|A|$ é dada pela Eq.(8.120) que tem a forma,

$$|A| = F(\omega; \omega_{amt}, b).$$

A amplitude da oscilação desta solução particular é uma função de ω que varia com ω_{amt} e b .

A amplitude $|A|$ mostra um comportamento interessante como função de ω . Para ver isto, escrevemos

$$\begin{aligned}
 |A| &= \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\omega^4 - 2(\omega_0^2 - 2b^2)\omega^2 + \omega_0^4}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{[\omega^2 - (\omega_{amt}^2 - 2b^2)]^2 + 4b^2(\omega_0^2 - b^2)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{[\omega^2 - (\omega_0^2 - 2b^2)]^2 + 4b^2(\omega_0^2 - b^2)}}.
 \end{aligned}$$

É fácil de ver esta função cresce de $\omega^2 = 0$ até atinge ao seu máximo quando para

$$\begin{aligned}
 \omega^2 &= \omega_{res}^2 \\
 &= \omega_0^2 - 2b^2,
 \end{aligned}$$

e decresce monotonicamente depois. A forma da amplitude em torno do máximo é mais aguda para menor valor de b , tendo

$$|A|_{Max} = \frac{1}{2b\sqrt{(\omega_0^2 - 2b^2)}}.$$

Quando dissermos que b pequeno, é necessário dizer comparado com quem. Neste caso, estamos falando que b pequeno comparado com ω_0 . Assim, é conveniente introduzir um parâmetro adimensional, ε para expressar b por

$$b = \varepsilon\omega_0.$$

Em termos de quantidades originais, temos

$$\varepsilon = \frac{\eta}{2\sqrt{kM}}.$$

Exercício: Verifique que ε é uma quantidade adimensional.

O fato de b ser pequeno é expresso em termos de ε por

$$\varepsilon \ll 1.$$

Temos

$$\begin{aligned} |A| &= \frac{1}{\sqrt{[\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\omega_0\varepsilon^2)]^2 + 4\omega_0^2\varepsilon^2(\omega_0^2 - \omega_0^2\varepsilon^2)}} \\ &= \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{[x^2 - (1 - 2\varepsilon^2)]^2 + 4\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)}}, \end{aligned}$$

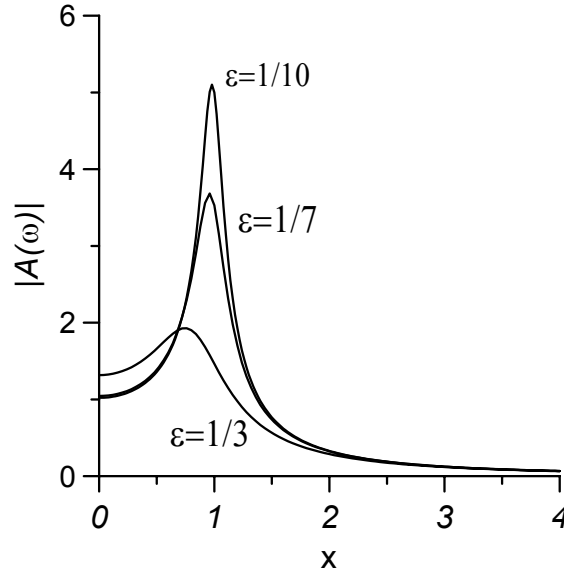
onde introduzimos a variável adimensional,

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

para expressar ω . Na figura abaixo, mostramos a função

$$F(x; \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{[x^2 - (1 - 2\varepsilon^2)]^2 + 4\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)}}$$

para $\varepsilon = 1/3$, $1/7$ e $1/10$.



O pico agudo para os casos $\varepsilon \ll 1$ em torno de $x \simeq 1$ mostra que a solução particular corresponde a oscilação com enorme amplitude. Este fenômeno é conhecido com a ressonância.

Exercício I: Obtenha a expressão para a solução particular para $f(t) = \sin \omega t$. O comportamento da amplitude muda comparado com o caso de $f(t) = \cos \omega t$?

Exercício II: Obtenha a expressão para a solução particular para $f(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$.

Para obter a solução geral, basta adicionar a combinação linear da equação homogênea. Para $f(t) = \cos \omega t$, temos

$$\begin{aligned} z_\omega(t) &= \operatorname{Re} \{ |A| e^{i\omega t + \delta} + \alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t} \} \\ &= |A| \cos(\omega t + \delta) + C e^{-bt} \cos(\omega_{amt} t - \phi), \end{aligned} \quad (8.124)$$

onde C e ϕ são constantes a serem determinadas pela condição inicial do problema.

Exercício: Obtenha a expressão para a solução geral para $f(t) = \sin \omega t$.

A solução geral, a Eq.(8.124) mostra a natureza da solução particular obtida pela função de Green com a condição de contorno escolhida. Na Eq.(8.124), vamos estudar quando t bastante grande. Neste caso, o segundo termo que depende da condição inicial diminui exponencialmente devido o fator e^{-bt} . Assim, existe sempre um tempo, t_{relax} , depois o qual, o segundo termo se torna desprezível comparado com o primeiro termo, isto é,

$$|A| \gg C e^{-bt}, \quad t > t_{relax}.$$

Por exemplo, pode escolher

$$t_{relax} \simeq \frac{1}{b} \ln \left(\frac{C}{|A|} \right).$$

Assim, para $t > t_{relax}$, o movimento do sistema tende a

$$z_\omega(t) \rightarrow |A| \cos(\omega t + \delta), \quad (8.125)$$

independentemente da condição inicial. Este é o aspecto geral e o ponto importante de um sistema com a força dissipativa. Em geral, um sistema com a força dissipativa, a memória da condição inicial será apagado com o tempo t . No caso de um oscilador subamortecido com a força solenoidal, o sistema oscila com a

mesma frequência para $t \gg t_{relax}$ neste regime assintótico e sua amplitude é determinada completamente em termos dos parâmetros que são característica do sistema, tais como M , k , e η , independente da condição inicial.

O movimento entre $0 < t < t_{relax}$ ainda reflete o efeito da condição inicial. Este regime é dita o *regime transiente*.

Vamos voltar ao problema inicial de determinar as forças que atuam para os passageiros dentro do carro. Agora tendo a solução do problema, onde $z(t)$ representa a variação temporal da altura do carro, podemos calcular as forças que atuam para quem fica dentro deste carro. A lei de Newton pode ser utilizada não só para determinar o trajétoria quando a força é dada, mas também para calcular a força quando o movimento é dado. No caso de oscilação subamortecida, a força que atua para um passageiro que tem a massa m é dada por

$$\begin{aligned} f &= m \frac{d^2 z}{dt^2} \\ &= m \left(-\omega_0^2 (z - \Delta R(t)) - 2\varepsilon \omega_0 \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned}$$

Sabendo a forma de $z = z(t)$, podemos calcular f .

Exercício: No verão, o asfalto das estradas derrete e acaba criando uma superfície ondulatória. Supondo que esta ondulação tem a forma senóide com comprimento de onda λ . Para um carro cuja frequência própria é ω_0 , qual é a velocidade que o carro entra em ressonância com a ondulação da superfície?

8.10. Pêndulo

Como último exemplo da revisão do sistema unidimensional, vamos analisar o movimento de um pêndulo. Consideramos um pêndulo de massa m , pendurado por uma barra de comprimento l , cuja massa é desprezível. Por simplicidade, consideramos também que o pêndulo só oscila num plano. Veja a figura abaixo.

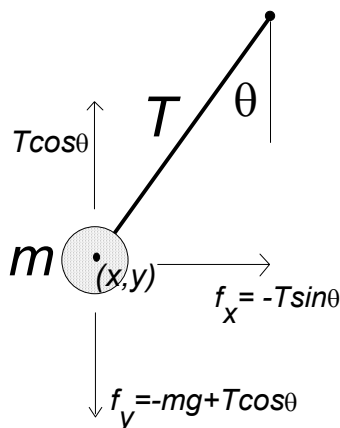


Fig. 5

8.10.1. Escolhe das variáveis e Equação de Movimento

Nesta figura, (x, y) são as coordenadas da massa do pêndulo, T é a tensão na barra que suspende a massa m e θ é o ângulo da inclinação do pêndulo. Estão indicadas as forças aplicadas na massa. Escolhendo a origem do sistema de coordenadas, temos¹⁶

$$x = l \sin \theta, \quad (8.126)$$

$$y = -l \cos \theta. \quad (8.127)$$

Naturalmente

$$x^2 + y^2 = l^2. \quad (8.128)$$

¹⁶Note aos sinais. Os sinais dependem da convenção de escolher as direções para medir quantidades. Aqui, como é de costume, x cresce de esquerda para direita, y cresce de baixo para cima, e θ cresce na direção anti-horária. Por exemplo, na configuração da figura acima, $\theta < 0$ e, portanto, $x < 0$, e $y < 0$.

Primeiro, vamos definir as variáveis para descrever o movimento deste sistema. Poderíamos utilizar as coordenadas (x, y) da massa do pêndulo. Neste caso, teríamos as equações de Newton para cada variável,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f_x, \quad (8.129)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f_y, \quad (8.130)$$

onde f_x e f_y são as componentes da força atuando no pêndulo, como indicadas na figura. Isto é,

$$f_x = -T \sin \theta = -\frac{T}{l} x, \quad (8.131)$$

$$f_y = -mg + T \cos \theta = -mg + \frac{T}{l} y, \quad (8.132)$$

onde utilizamos as Eqs.(8.126,8.127).

Temos então as duas equações de movimento para x e y ,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{T}{l} x, \quad (8.133)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg + \frac{T}{l} y, \quad (8.134)$$

que parece que as duas equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, e poderiam ser resolvidas utilizando os resultados da seção anterior.

8.10.2. Presença de um vínculo entre variáveis

Mas, isto não é correto. Primeiro, sabemos a massa m e o comprimento l mas qual é o valor de T ? Em geral, T depende do estado dinâmico do pêndulo. Isto é fácil de imaginar, pois quando o pêndulo tem a velocidade maior, a força centrífuga fica maior, gerando a tensão maior na barra. Isto é, T depende da velocidade do pêndulo. Segundo, mesmo supondo que T é uma constante, as soluções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ das Eqs.(8.133,8.134) não garantiria a condição Eq.(8.128).

Na verdade, a Eq.(8.128) deve ser utilizada para saber justamente quem é T . Em outras palavras, temos três equações, Eqs.(8.133,8.134 e 8.128) para determinar os três incógnitas, x, y e T .

A condição Eq.(8.128) não é uma equação diferencial, mas uma relação entre as variáveis x e y . Uma condição entre variáveis escrita na forma de uma relação

algébrica como a Eq.(8.128) é chamada de *vínculo holônomo*. Um método direto de tratar um problema com vínculo holônomo é eliminar uma das variáveis utilizando este vínculo. Por exemplo, vamos eliminar primeira T . Para isto, multiplicando y na Eq.(8.133) e x na Eq.(8.134), e subtraindo os dois lados, temos,

$$my\frac{d^2x}{dt^2} - mx\frac{d^2y}{dt^2} = mgx. \quad (8.135)$$

Do vínculo, Eq.(8.128), podemos expressar y em termos de x ,

$$y = \sqrt{l^2 - x^2},$$

e substituindo esta expressão na Eq.(8.135), podemos ter uma equação diferencial, contendo só x ,

$$m\sqrt{l^2 - x^2}\frac{d^2x}{dt^2} - mx\frac{d^2}{dt^2}\sqrt{l^2 - x^2} = mgx.$$

cuja aparência é um pouco complicada.

8.10.3. Representação paramétrica

Para um vínculo tipo (8.128), é útil introduzir a representação paramétrica de x e y . Em outras palavras, podemos utilizar o ângulo θ como a variável para descrever a configuração do pêndulo. Neste caso, utilizamos as Eqs.(8.126,8.127) para expressar x e y em termos de θ , que automaticamente satisfazem o vínculo (8.128). Temos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= l \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= l \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -l \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= l \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}$$

Substituindo estas expressões na Eq.(8.135) temos ,

$$\begin{aligned} -ml \cos \theta \left(-l \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) - ml \sin \theta \left(l \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + l \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \\ = mgl \sin \theta, \end{aligned}$$

ou simplificando, temos finalmente,

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin \theta, \quad (8.136)$$

ou ainda cancelando os fatores comuns,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \quad (8.137)$$

Exercício: Verifique a Eq.(8.136).

8.10.4. Primeira Integral

A Eq.(8.136) é a equação de movimento de Newton para o ângulo θ . Discutiremos a origem desta equação mais em detalhe no próximo capítulo. Mas antes, vamos analisar a solução da equação.

A Eq.(8.137) é a equação diferencial de segunda ordem, mas não é linear, pois o termo $\sin \theta$ não é linear em θ . Assim, o teorema de superposição linear das soluções não vale mais aqui. Mas a Eq.(8.137) tem a forma,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta). \quad (8.138)$$

Nesta situação, o método geral é multiplicar $d\theta/dt$ aos dois lados,

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta) \frac{d\theta}{dt}, \quad (8.139)$$

e observar que

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2,$$

e

$$f(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt} \int^{\theta(t)} f(\theta') d\theta'.$$

Assim, a equação Eq.(8.139) fica

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{d}{dt} \int^{\theta} f(\theta') d\theta'.$$

Agora podemos integrar os dois lados em t , obtendo simplesmente,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \int^{\theta} f(\theta') d\theta' + C, \quad (8.140)$$

onde C é uma constante de integração.

8.10.5. Segunda Integral

Independentemente de que a integral

$$\int^{\theta} f(\theta') d\theta'$$

seja feita analiticamente ou não, sabemos que isto é uma função de θ . Assim, denotamos

$$V(\theta) = - \int^{\theta} f(\theta') d\theta',$$

onde o sinal $-$ foi introduzido por mera conveniência posterior¹⁷. Desta forma, a Eq.(8.140) fica

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -V(\theta) + C. \quad (8.141)$$

Resolvendo em relação a $d\theta/dt$, temos

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{2(C - V(\theta))}.$$

O lado direito desta equação é uma função de θ apenas. Assim, podemos escrever,

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2(C - V(\theta))}} = \pm dt,$$

cuja integral é imediata:

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{2(C - V(\theta))}} = \pm(t - t_0),$$

onde t_0 é a outra constante de integração. Novamente, independentemente de que a integral do lado esquerdo desta expressão seja feita analiticamente ou não, a equação diferencial é em princípio foi resolvida, pois a equação acima tem a forma,

$$F(\theta) = \pm(t - t_0),$$

¹⁷Mesmo que não podemos expressar a forma de $V(\theta)$ analiticamente, podemos sempre calcular $V(\theta)$ para qualquer valor de θ , se quiser, por exemplo, pelo método numérico. Neste sentido, podemos considerar que a função $V(\theta)$ é uma função *conhecida*.

onde

$$F(x) = \int^x \frac{dx}{\sqrt{2(C - V(x))}}$$

e esta estabelece uma relação entre t e θ . A forma de F pode ser obtida numericamente mesmo a integral não pode ser feita analiticamente.

Vamos aplicar o método acima para a equação (8.137). Multiplicando $d\theta/dt$ aos dois lados desta equação, temos

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \frac{d\theta}{dt},$$

ou

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} \frac{d}{dt} \cos \theta.$$

Integrando os dois lados, temos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} \cos \theta + C. \quad (8.142)$$

Agora resolvendo em $d\theta/dt$, temos

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{2 \left(\frac{g}{l} \cos \theta + C \right)}.$$

Já que o lado direito é uma função só de θ , podemos integrar, obtendo,

$$\int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2 \left(\frac{g}{l} \cos \theta + C \right)}} = \pm \int^t dt + C', \quad (8.143)$$

onde C' é a constante de integração.

8.10.6. Análise do comportamento da solução

Do ponto de vista matemático, a equação diferencial é considerada resolvida formalmente pela Eq.(8.143), pois o resto é só executar a integral. A integral não é sempre capaz de ser expressa em termos de funções analíticas conhecidas. Neste caso em particular, a integral do lado esquerdo se torna uma função chamada de

integral elítica. Mas de qualquer forma, como está, não é transparente o comportamento da solução. Assim, vamos analisar certas situações para obter uma imagem geral da solução. Primeiro, reescrevemos a Eq.(8.143) por

$$\int^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta + a}} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} (t - t_0), \quad (8.144)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{Cl}{g}, \\ \sqrt{\frac{2g}{l}} t_0 &= \pm C'. \end{aligned}$$

Pela forma da Eq.(8.144), podemos notar que temos que considerar certos casos separadamente. Já que sempre

$$|\cos \theta| \leq 1,$$

a solução física para θ só pode existir para

$$a > -1,$$

se não, a integral do lado esquerdo fica imaginário.

8.10.7. Movimento Oscilatório

Com a mesma razão acima, se

$$-1 < a < 1,$$

então, o integrando fica real somente para

$$\cos \theta \geq -a.$$

Isto implica que os valores de θ são limitados por

$$-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0, \quad (8.145)$$

onde (veja a figura abaixo)

$$\theta_0 = \cos^{-1}(-a).$$

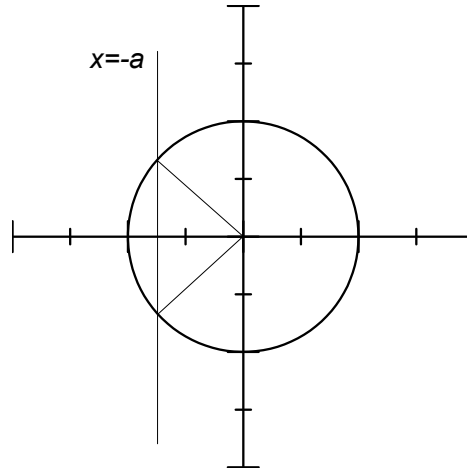


Fig.6: O limite de θ permitido.

A limitação Eq.(8.145) implica o movimento também limitado entre estes limites. Vemos abaixo, o movimento do pêndulo é oscilatório.

8.10.8. Regime Harmônico

Para ver mais em detalhe, vamos analisar uma situação em que a é bem próximo de -1 . Escrevemos

$$a = -1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad (8.146)$$

onde $0 < \varepsilon^2 \ll 1$. Neste caso, podemos ver pela figura acima, o limite de θ , θ_0 também fica pequeno. De fato,

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right) \\ &= \varepsilon + \frac{1}{24}\varepsilon^3 + \cdot \\ &\ll 1. \end{aligned}$$

Exercício: Prove que

$$\cos^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \right) = \varepsilon + \frac{1}{24}\varepsilon^3 + \cdot$$

para $\varepsilon \ll 1$.

Assim, o movimento fica limitado dentro de uma região pequena de θ , significando sempre

$$|\theta| \ll 1.$$

Nesta situação, podemos aproximar $\cos \theta$ por sua expansão de Taylor em torno de $\theta = 0$, ou seja,

$$\cos \theta \simeq 1 - \frac{1}{2}\theta^2. \quad (8.147)$$

Substituindo as Eqs.(8.146) e (8.147) na Eq.(8.144), temos

$$\int^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\theta^2 - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2}} = \pm \sqrt{\frac{2g}{l}} (t - t_0),$$

ou

$$\int^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \theta^2}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0). \quad (8.148)$$

A integral fica

$$\int^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\varepsilon^2 - \theta^2}} = \sin^{-1} \frac{\theta}{\varepsilon} \quad (8.149)$$

e, portanto, temos

$$\theta(t) = \pm \varepsilon \sin \sqrt{\frac{g}{l}} (t - t_0), \quad (8.150)$$

onde ε e t_0 devem ser ajustados em termos de condição inicial do pêndulo. Os sinais $\pm$ correspondem nada mais que a direção inicial da oscilação como pode ser visto no exercício seguinte.

Exercício I: Determine t_0 e ε para as seguintes condições iniciais:

- a) No tempo $t = 0$, o pêndulo foi solto de uma inclinação θ_0 , ou seja, $\theta(0) = \theta_0$ e $d\theta/dt = 0$.
- b) No tempo $t = 0$, o pêndulo foi solto da mesma inclinação $|\theta_0|$ mas do outro lado, ou seja, $\theta(0) = -\theta_0$.

Exercício II: Estime o ângulo θ_0 para qual a aproximação tenha o erro menor que 1%.

Vejamos que o movimento do pêndulo é de um oscilador harmônico para $\theta \ll 1$. Na verdade, para ver isto, não precisava a teoria completa para integrar a equação de movimento, mas podemos introduzir a aproximação

$$\theta \ll 1$$

desde início. Por exemplo, na equação de movimento, a Eq.(8.137), podemos aproximar

$$\sin \theta \simeq \theta.$$

O erro associado a esta aproximação seria da ordem de $\theta^3/6$. Assim, para $\theta = 0.5$, o erro é da ordem de 2%. Nesta aproximação, a equação de movimento fica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta,$$

que é nada mais que a equação de um oscilador harmônico, com a frequência,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

tendo a solução exatamente dada pela Eq.(8.150).

8.10.9. Movimento Não Harmônico - correção perturbativa

Quando a for maior, a aproximação $\theta \ll 1$ não valeria mais. Neste caso devemos avaliar a integral, (8.144) sem a aproximação, Eq.(8.147). Como mencionamos, esta integral é expressa em termos de uma integral elítica. O movimento do pêndulo se torna oscilatório, mas não harmônico. Mas, podemos estudar o comportamento de movimento não harmônico ainda analiticamente quando o desvio do movimento harmônico é pequeno. Ou seja, tratamos o sistema essencialmente harmônico, mas com pequena correção. Este tipo de abordagem é chamado aproximação perturbativa.

Na Eq.(8.144), para $a < 1$, podemos parametrizar a como

$$a = -\cos \varepsilon. \tag{8.151}$$

Então, o movimento é limitado por

$$-\varepsilon \leq \theta \leq \varepsilon.$$

Já que

$$\cos \theta - \cos \varepsilon = 2 \sin \frac{\theta + \varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon - \theta}{2},$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta + a}} &= \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2 \sin \frac{\theta + \varepsilon}{2} \sin \frac{\varepsilon - \theta}{2}}} \\ &= \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2 \sin \varepsilon \left(\frac{1+s}{2}\right) \sin \varepsilon \left(\frac{1-s}{2}\right)}}, \end{aligned}$$

onde $s = \theta/\varepsilon$.

Expandindo em ε o integrando acima, temos

$$\frac{1}{\sqrt{2 \sin(\varepsilon \left(\frac{1+s}{2}\right)) \sin(\varepsilon \left(\frac{1-s}{2}\right))}} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{1-s^2}} \left(1 - \frac{1+s^2}{24} \varepsilon^2 + \frac{7+22s^2+7s^4}{2 \cdot 4! \cdot 4!} \varepsilon^4 \dots \right).$$

Desta forma, podemos integrar em s pelo termo a termo.

Exercício: Efetue a integral acima até a segunda ordem em ε e estime a correção para o período do pênculo até esta ordem.

8.10.10. Movimento Não Oscilatório

Quando

$$a > 1,$$

então para qualquer θ existe a integral do lado esquerdo da Eq.(8.144). O integrando

$$f(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + a}} \quad (8.152)$$

é uma função sempre positiva, oscilando, como ilustrada na figura abaixo.

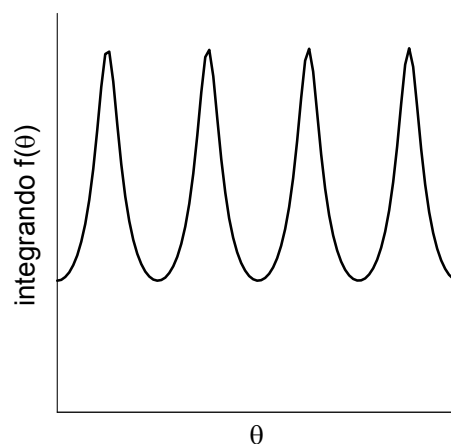


Fig. 7 O integrando

Agora, a integral é uma função crescente em θ . Na figura abaixo, ilustramos o comportamento da integral, e como θ fica determinado como função do tempo t . Nesta figura, escolhemos o sinal $+$ na Eq.(8.144). O ângulo θ é uma função indefinidamente crescente no tempo t . Isto é, o pêndulo tem a energia inicial tão grande que, em vez de oscilar, fica rodando em torno do ponto fixo.

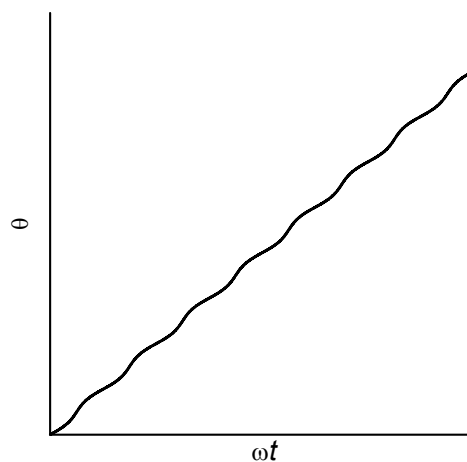


Fig. 8

Como vimos, o movimento de um pêndulo muda o seu comportamento com o valor da constante a . Queremos entender o significado desta constante. Certamente esta quantidade deve estar associada com a velocidade inicial ou a energia

inicial. Vejamos em seguida este ponto.

Exercício: Discuta o movimento de $\theta(t)$ para o caso com o sinal $-$ na Eq.(8.144).

8.11. Força Conservativa e a Energia Potencial

O método aplicado para obter a Eq.(8.140) pode ser utilizado na Eq.(8.136) diretamente. Multiplicando $d\theta/dt$ para os dois lados da Eq.(8.136), temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = -mgl \frac{d}{dt} \int^\theta \sin \theta d\theta,$$

ou

$$\frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mgl \cos \theta + E, \quad (8.153)$$

onde E é uma constante da integração. Naturalmente, esta expressão é a mesma coisa da Eq.(8.140) ou Eq.(8.141), afora uma constante multiplicativa. Mas, nesta equação, os termos tem significados físicos diretamente. Por exemplo, o termo

$$\frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

é nada mais que a energia cinética associada à massa do pêndulo. Para ver isto, podemos calcular a energia cinética no sistema de coordenadas Cartesiano,

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dy}{dt} \right)^2, \quad (8.154)$$

e substituindo as Eqs.(8.126,8.127), temos

$$T = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

Por outro lado, o primeiro termo da Eq.(8.153) é

$$mgl \cos \theta = -mgy, \quad (8.155)$$

que é a *negativa* da energia potencial gravitacional do pêndulo que está na posição y . Assim, a Eq.(8.153) fica

$$T + V = E, \quad (8.156)$$

onde

$$V = mgy$$

é a energia potencial do pêndulo. A Eq.(8.156) representa a conservação da energia, pois E é uma constante.

A lei de conservação de energia é bastante geral para sistemas com forças conservativas. Para ver isto, vamos considerar a equação de movimento que tem a forma,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x), \quad (8.157)$$

onde f é a força que somente função da posição e não depende nem em t nem em v . Neste caso, novamente, multiplicando aos dois lados dx/dt , e temos,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right\} = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^x dx f(x), \quad (8.158)$$

onde x_0 é um certo valor de x arbitrário. Aqui, a integral do lado direito

$$\int_{x_0}^x f(x) dx \quad (8.159)$$

é o trabalho que a força f exerce ao sistema quando a massa for deslocada da posição x_0 até x . Em outras palavras, a quantidade

$$V(x) \equiv \int_x^{x_0} f(x) dx = - \int_{x_0}^x f(x) dx \quad (8.160)$$

é o trabalho que precisaria se recolocar ao sistema da posição x até x_0 *contra* a força f . Este trabalho é chamado de *energia potencial*. Por exemplo, no caso de uma massa m sob a força gravitacional constante, precisaria a quantidade do trabalho,

$$\int_0^y mg dy \quad (8.161)$$

para colocar a massa, contra a força gravitacional $-mg$, na altura y da posição inicial de $y = 0$. Neste caso,

$$V = mgy. \quad (8.162)$$

Temos da Eq.(8.158),

$$\frac{d}{dt} (T + V) = 0, \quad (8.163)$$

onde

$$T = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (8.164)$$

é a energia cinética. Integrando a Eq.(8.163), temos

$$T + V = E, \quad (8.165)$$

onde E é a constante de integração. Desta forma, obtemos a lei da conservação de energia.

Para um movimento unidimensional de uma partícula, podemos entender o comportamento geral do sistema pela lei de conservação de energia, sem resolver problema completamente. Suponha que o potencial $V(x)$ tem a forma como ilustrado na figura abaixo.

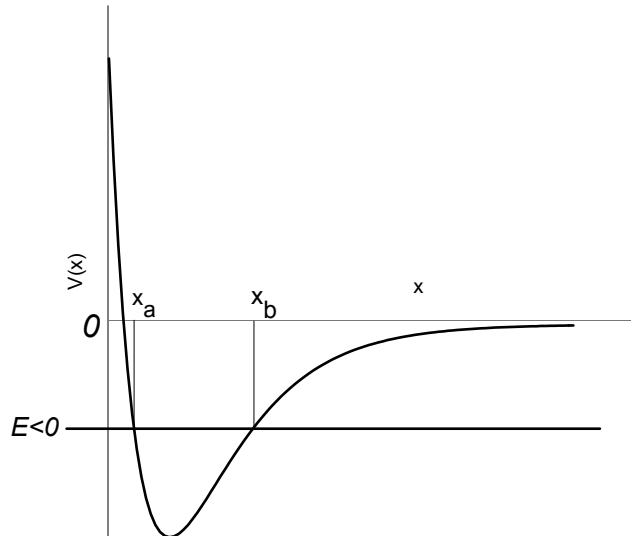


Fig. 9 Exemplo de $V(x)$

Para um movimento real, a energia cinética T tem que ser não negativa. Isto implica

$$E - V \geq 0.$$

Assim, no exemplo acima, se $E < 0$, então, o movimento é restrito para o intervalo de x ,

$$x_a \leq x \leq x_b.$$

Da Eq.(8.165), podemos expressar o valor absoluto da velocidade como

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \sqrt{2m(E - V)},$$

e, portanto, a velocidade atinge seu valor máximo quando atravessa o fundo do potencial $V(x)$, e se torna nula quando

$$E = V(x). \quad (8.166)$$

No exemplo da figura, x_a e x_b são exatamente as raízes desta equação e são chamados de ponto de retorno. Nestes pontos,

$$\left| \frac{dx}{dt} \right|_{x=x_a, x_b} = 0, \quad (8.167)$$

ou seja, a velocidade se anula. O movimento é um movimento oscilatório entre dois pontos de retorno.

Exercício: Discuta o movimento do exemplo quando $E > 0$ (veja a figura abaixo).

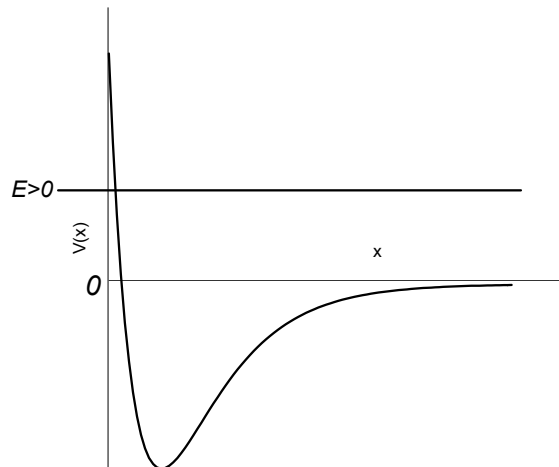


Fig. 10

8.12. Oscilação Harmônica em torno do ponto de Mínimo do Potencial

No problema do pêndulo simples, vimos que quando a amplitude é pequena, o movimento do pêndulo se torna um oscilador harmônico. Iste não é por acaso. Para um potencial geral, $V(x)$, se a energia E é muito próxima do valor mínimo do potencial V_0 , os dois pontos de retorno ficam próximos do ponto mínimo x_0 e, portanto, o movimento fica restrito a próximo deste ponto (veja a figura abaixo). Naturalmente quando $E = V_0$, a partícula não pode movimentar, e fica no ponto mínimo do potencial. Este o caso que a partícula está em equilíbrio.

Num sistema realistico, em geral, sempre existe atritos mesmo que seu efeito não seja muito apreciavel no movimento. Mas com tempo, o sistema perde a energia gradualmente devido estes atritos, e acaba ficando num estado que tenha a energia menor possível. Este é o ponto de equilíbrio.

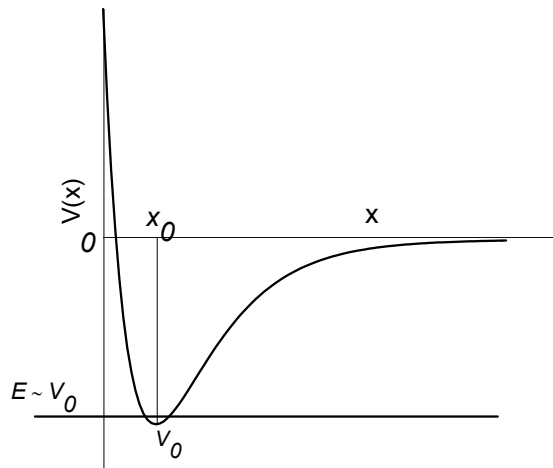


Fig. 11

8.12.1. Expansão de Taylor do Potencial na vizinhança do ponto de equilíbrio

Quando a energia for ligeiramente acima do mínimo do potencial, a partícula oscila em torno deste ponto. Como o movimento é limitado bem próximo do ponto mínimo do potencial, podemos aproximar a forma do potencial em termos dos primeiros termos da expansão de Taylor. Vamos expandir o potencial em

torno do ponto $x = x_0$. Temos

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{1!} \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Mas, como x_0 é o mínimo do potencial, sabemos que

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{x_0} = 0.$$

Então,

$$V(x) = V_0 + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

Assim, a força f fica

$$\begin{aligned} f &= -\frac{d}{dx}V(x) \\ &\simeq -\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} (x - x_0). \end{aligned}$$

A equação de movimento da partícula fica,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -C(x - x_0),$$

onde $C = d^2V/dx^2(x = x_0)$. Mudando a variável

$$y = x - x_0,$$

temos

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -Cy, \tag{8.168}$$

que é nada mais do que a equação do oscilador harmônico. A constante da mola é dada pela segunda derivada (curvatura) do potencial no ponto de equilíbrio. Note que se x_0 é o mínimo, então, $C > 0$.

Assim, concluímos que o movimento de uma partícula bem próximo do ponto de mínimo do potencial é sempre aproximado como um oscilador harmônico, com a constante de mola igual à curvatura do potencial no ponto mínimo.

8.13. Estabilidade do movimento em torno do ponto de equilíbrio

Em geral, um ponto de equilíbrio é o ponto em que se o sistema esteja em repouso neste ponto, ele permanecerá a toda vida. Ou seja, num ponto de equilíbrio, a força deve ser nula. Mas um ponto de equilíbrio não necessariamente corresponde ao ponto mínimo do potencial. O ponto máximo do potencial também é o ponto de equilíbrio. Veja a figura abaixo.

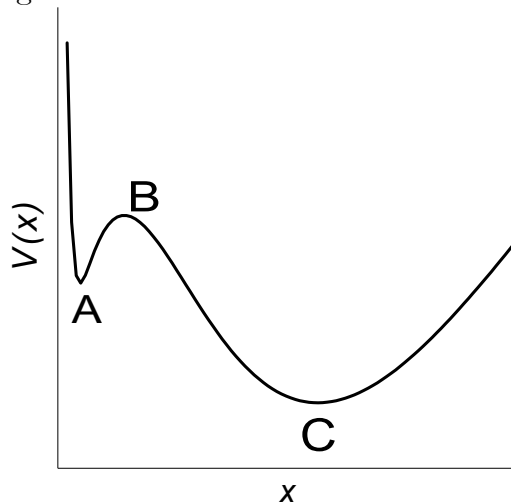


Fig. 12

Neste exemplo do potencial, existem 3 pontos, A, B e C, onde a força (negativa da derivada do potencial) se anula. Assim, se coloca uma partícula nestes exatos pontos com a velocidade exatamente nula, a partícula permanecerá sempre no mesmo lugar, desde que nenhuma perturbação atue na partícula. Como vimos, nos pontos A e C, mesmo que a partícula esteja não exatamente no ponto, ou tendo a velocidade não exatamente nula, o movimento é um oscilador harmônico em torno destes pontos. Assim, os pontos A e C são pontos de equilíbrio *estáveis*. Mas, no ponto B, se tiver qualquer deslocamento, ou a velocidade inicial não nula, a partícula começa a se afastar do ponto B e não volta ao ponto. O ponto de equilíbrio B é *instável*.

Matematicamente, podemos ver a situação de ser estável ou instável através do sinal da curvatura do potencial no ponto. Independentemente de estável ou instável, o movimento da partícula bem próximo de um ponto de equilíbrio é descrito pela Eq.(8.168), pois na dedução desta equação, utilizamos apenas o fato de que o movimento é bem próximo do ponto do equilíbrio, e a primeira derivada

é nula.

Quando o ponto de equilíbrio corresponde a um mínimo local do potencial, então a curvatura no ponto é positiva,

$$C = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} > 0, \quad (8.169)$$

onde x_0 é o valor do x do ponto de equilíbrio. Assim, a Eq.(8.168) corresponde a um movimento de oscilador harmônico.

Por outro lado, se o ponto de equilíbrio corresponde a um máximo local, então a curvatura no ponto é negativa,

$$C = \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x_0} < 0. \quad (8.170)$$

Neste caso, a solução da Eq.(8.168) é escrita por

$$y(t) = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}, \quad (8.171)$$

onde

$$k = \sqrt{\frac{C}{m}},$$

e c_1 e c_2 são constantes. Estes exponenciais são as mesmas de um oscilador harmônico, mas com a frequência *imaginária* como pode ser visto da seguinte forma,

$$e^{\pm kt} = e^{\mp i(i\omega)t}.$$

Exceto uma condição inicial muito peculiar, a Eq.(8.171) mostra que y cresce rapidamente no tempo t e, portanto, a posição da partícula afasta do ponto x_0 rapidamente ($y = x - x_0$). Este é a representação matemática do fato de que o ponto máximo local do potencial é o ponto de equilíbrio instável.

Como pode ser visto acima, num problema unidimensional a relação entre a estabilidade de um ponto de equilíbrio e o sinal da curvatura do potencial deste ponto é bastante simples. Para um sistema com mais de um grau de liberdade, não é sempre facilmente visível a forma de potencial. Neste caso, uma análise em termos de frequência de oscilação perto do ponto de equilíbrio é um método poderoso para saber a estabilidade do sistema. Voltaremos a este problema mais adiante.

9. Espaço de Fase

9.1. Momento Linear vs. Velocidade

Vamos voltar a analisar o problema de um pára-quedas. Suponha que, ao invés de os átomos do ar serem empurrados pelo pára-quedas, vamos considerar que todos os átomos aderem a ele completamente. Neste caso, naturalmente

$$\langle \Delta v \rangle = v,$$

e, portanto, a equação de movimento do pára-quedas fica

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \rho S v^2. \quad (9.1)$$

Mas a quantidade

$$\rho S v = \frac{\rho S dx}{dt} = \left(\frac{dm}{dt} \right)_{adere} \quad (9.2)$$

é justamente a quantidade da massa do ar que adere ao pára-quedas por unidade de tempo. A massa do sistema, isto é, a massa do pára-quedas inicial mais a massa do ar aderidos a ele até o tempo t , é função do tempo $m(t)$. Substituindo Eq.(9.2) na equação de movimento (9.1), obtemos

$$\frac{d}{dt} (m(t)v) = -mg, \quad (9.3)$$

ou

$$\frac{dp}{dt} = -mg, \quad (9.4)$$

onde

$$p = mv \quad (9.5)$$

é o momento linear do sistema (pára-quedas + o ar aderido). A Eq.(9.4) tem a forma da equação de Newton, sem a força do atrito. O efeito do atrito do ar contra ao movimento da pára-quedas fica absorvido como a variação da massa do sistema.

A equação (9.4) sugere que a equação de movimento que envolve a variação da massa do sistema é mais conveniente escrever

$$\frac{dp}{dt} = f, \quad (9.6)$$

do que

$$m \frac{dv}{dt} = f - \frac{dm}{dt} v, \quad (9.7)$$

onde o último termo representa a força que atua ao sistema devido a absorção ou a emissão da massa. Utilizando o momento no lugar de velocidade, o efeito da mudança da massa fica automaticamente incluído na equação de movimento.

Em princípio, para uma partícula cuja força não depende da velocidade, não há diferença essencial entre o momento e a velocidade, exceto o fator constante m . Assim podemos utilizar o momento linear no lugar da velocidade para especificarmos o estado de movimento de uma partícula. Vejamos posteriormente, o par (x, p) é mais conveniente do que o par (x, v) para especificar o estado de movimento. No momento, consideramos o momento linear como sendo apenas uma variável equivalente a velocidade.

9.2. Espaço de Fase e o Retrato do Movimento no Espaço de Fase

Um estado de movimento é especificado pelo par de variável (x, p) . Por exemplo, a condição inicial de uma partícula em movimento unidimensional é especificada pelo este par,

$$(x, p)_{t_0}.$$

O movimento da partícula é nada mais que a sucessão deste par como função do tempo. Podemos considerar um espaço bidimensional abstrato, onde estes dois números (a coordenada x e o momento linear p) como as duas coordenadas deste espaço. Este espaço artificialmente introduzido é chamado de espaço de fase. Assim, um “ponto” no espaço de fase $P = (x, p)$ representa um estado de movimento de partícula, não apenas a posição mas seu momento, também. Desta forma, o espaço de fase é formado todos os estados de movimentos do sistema em consideração.

Um movimento particular, correspondente a uma condição inicial corresponde uma trajetória neste espaço,

$$P = P(t).$$

Vamos considerar um oscilador harmônico de massa m , a frequência ω . Neste caso, sabemos que¹⁸

$$\frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = E,$$

¹⁸Exercício: Prove.

onde E é a energia do oscilador. Neste caso, a trajetória no espaço de fase é dada pela um elipse, como ilustrado na figura abaixo.

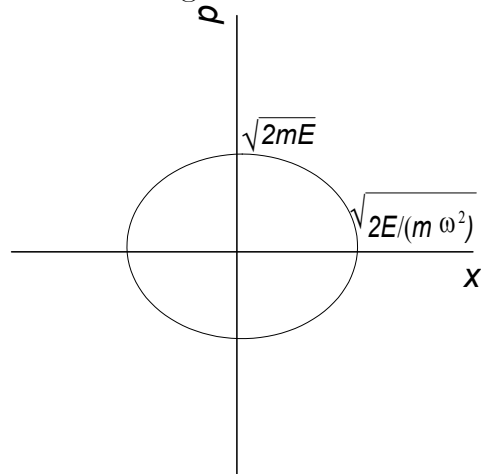


Fig. 13

O ponto no espaço de fase corresponde ao estado do movimento do oscilador circula com o tempo em cima deste elipse com a frequência angular ω . Para uma fixa energia E , as diferentes condições iniciais correspondem aos pontos iniciais em cima deste elipse.

Quando varia E , o retrato no espaço de fase é um elipse, variando seu tamanho de acordo como indicado na figura abaixo.

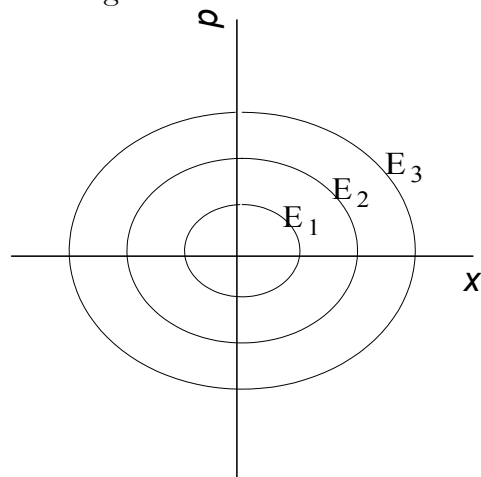


Fig. 14

Nesta figura, obviamente

$$E_1 < E_2 < E_3.$$

Na verdade, estas curvas são nada mais que as curvas de níveis da função de duas variáveis, $H = H(x, p)$, onde, no caso de oscilador harmônico,

$$H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

A função H é chamada de *Hamiltoniana*. Para um sistema com a força conservativa, a Hamiltoniana é nada mais que a energia vista como função da posição x e o momento p , e

$$H = H(x, p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$$

para uma partícula de massa m submetida num potencial $V(x)$.

Vamos considerar o caso de um pêndulo simples. Neste caso, escolhendo θ como a coordenada, pela Eq.(8.153) temos

$$E = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - mgl \cos \theta.$$

Observe que nesta expressão, o fator ml^2 está fazendo o papel da massa para o movimento angular do pêndulo. Isto é, se comparamos a energia cinética

$$E_K = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

por

$$\frac{1}{2}M \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

o fator ml^2 corresponderia a M . Mas devemos lembrar que a velocidade angular $d\theta/dt$ não tem dimensão da velocidade usual. Mesmo assim, em analogia do momento linear, podemos definir o *momento angular* por

$$p_\theta = ml^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Desta forma, a Hamiltoniana do pêndulo simples fica

$$H = \frac{1}{2ml^2}p_\theta^2 - mgl \cos \theta.$$

Vamos esboçar as curvas de nível desta Hamiltoniana. A curva de nível é dada por

$$\frac{1}{2ml^2}p_\theta^2 - mgl \cos \theta = E.$$

Quando $E > mgl$, para qualquer θ , podemos resolver p_θ por

$$p_\theta = \pm \sqrt{2ml^2 (E + mgl \cos \theta)}$$

que é a curva ondulatória na direção horizontal. (Ver as curvas abertas na figura abaixo). Por outro lado, quando $E < mgl$, só existe o valor de p_θ para

$$E + mgl \cos \theta \geq 0,$$

e a curva de nível fica uma curva fechada como ilustrada na figura.

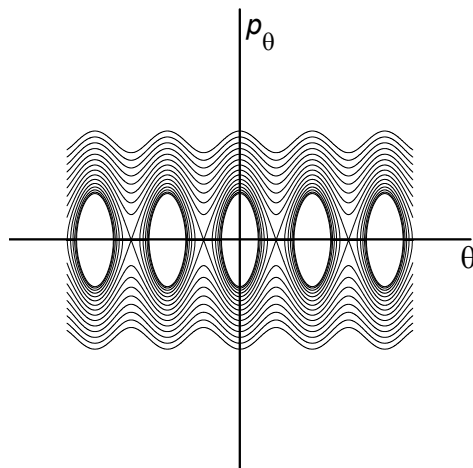


Fig. 14

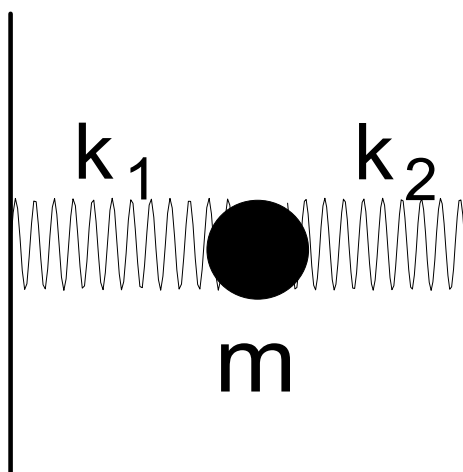
Exercício I: Porque aparecem varias regiões de trajetórias de elipse na figura acima? O que correspondem estas regiões, fisicamente?

Exercício II: Existe uma curva que separa as regiões ondulatórias e elíticas. O que corresponde esta curva fisicamente? Qual é a situação física no ponto que esta curva curza o eixo θ ?

Exercício III: Esboce as curvas de níveis da energia nos casos das Figs. 9-10-11 e Fig. 12.

10. Problemas

1. Calcule a constante da mola para seguintes casos:
 1. Duas molas com constante da mola k_1 e k_2 ligadas em serie.
 2. Duas molas com constante da mola k_1 e k_2 ligadas paralelamente.
 3. Quando corta na metade uma mola de constante da mola k .
 4. Quando corta uma mola de constante de mola k em duas partes, com proporção de $l_1 : l_2$.
2. Uma massa m está ligada com as duas molas de constantes de mola k_1 e k_2 , um do lado esquerdo, e outro, do lado direito, como ilustrado na figura abaixo.



Considere apenas o movimento horizontal.

1. Obtenha a equação de movimento da massa.
2. Obtenha a solução do problema acima com condição inicial adequada.
3. Analise os seguintes casos:
 1. Coloque em oscilação a parede direita com a frequência ω_1 .
 2. Coloque em oscilação a parede esquerda com a frequência ω_2 .
 3. Coloque simultaneamente em oscilação as duas paredes com frequências ω_1 e ω_2 , respectivamente.

3. No problema do pára-quadras, discuta o caso em que a variação média da velocidade dos átomos do ar seja proporcional a velocidade do pára-quadras,

$$\langle \Delta v \rangle = \zeta v.$$

Análise também o caso

$$\langle \Delta v \rangle = \eta + \zeta v$$

e discuta os comportamentos de cada caso comparativamente.

4. No problema do carro com a mola, supusemos o tempo todo, a roda está sempre em contato com a superfície da estrada. Na realidade isto não acontece. As rodas também pulam. Determine quando o tratamento no texto falha, e discuta como tratar o problema.
5. Calcule o Wronskiano dos seguintes casos:

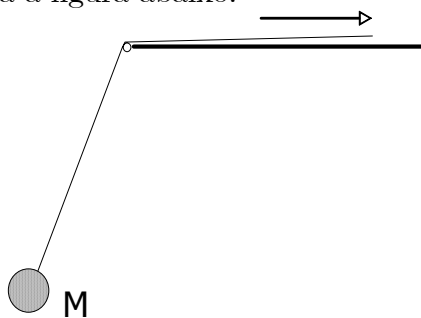
$$W [\sin x, \cos x],$$

$$W [e^{ix}, e^{-ix}],$$

$$W [ax + b, cx + d],$$

e no último caso, verifique que a condição de o Wronskiano não nulo garante a independência linear das duas funções.

6. Considere um pêndulo simples, pendurado por um fio de comprimento l . Durante a oscilação, variamos o comprimento do fio, puxando através do ponto de suspensão. Veja a figura abaixo.



A variação do comprimento do pêndulo é dada por $l = l(t)$.

1. Obtenha a equação de movimento.

2. Obtenha a expressão do trabalho necessário para puxar o pêndulo do comprimento inicial l_0 a l_f .
3. Calcule a taxa de variação da energia do pêndulo, dE/dt , onde

$$E = \frac{m}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta. \quad (10.1)$$

7. Considere uma massa m colocada numa mesa plana, mas não lisa. Discuta o movimento da massa quando a mesa oscila horizontalmente.
8. Sabemos que

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \end{aligned}$$

Em analogia destas expressões, definimos as funções hiperbólicas por

$$\begin{aligned} \sinh x &\equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh &\equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{aligned}$$

1. 1. Esboce os gráficos destas funções.
2. Prove seguintes relações:

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \\ \cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b, \\ \sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

3. Expresse as funções hiperbólicas em termos de funções trigonométricas com argumento imaginário.
4. Deduza as relações de derivadas e integrais das funções hiperbólicas.

5. Mostre que

$$\begin{aligned}\sinh^{-1} x &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \\ \cosh^{-1} x &= \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ \tanh^{-1} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}.\end{aligned}$$

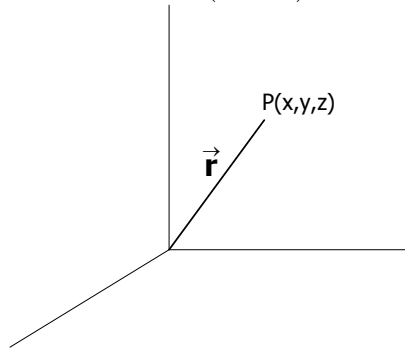
Part III

Movimento Tri- Dimensional

Na seção anterior, estudamos os problemas de movimento unidimensional. Muitos conceitos e métodos introduzidos para casos unidimensionais podem ser generalizados facilmente para os casos mais de uma dimensão. Inclusive, o uso de notação vetorial permite tratar, com certo cuidado, as quantidades multidimensional como se fosse uma única quantidade. Neste capítulo, vamos estudar os movimentos de uma partículas num espaço tridimensional, principalmente sob a força conservativa.

11. Vetor e Espaço Vetorial

Para representar a posição de uma partícula no espaço tridimensional $R^{(3)}$ em termos de quantidades mensuráveis, precisaríamos *estabelecer um sistema de coordenadas*. Para escolher um sistema de coordenadas *Cartesiano*, precisamos definir um ponto como origem, e as três direções ortogonais. Uma vez estabelecido o sistema de coordenadas, podemos representar a posição de qualquer ponto no espaço em termos de 3 valores de coordenadas, (x, y, z) , como ilustrado na figura abaixo.



A seta $\overrightarrow{OP}$ é o *vetor de posição* do ponto P e denotamos por $\vec{r}$. Aqui, os valores x, y e z são as projeções do vetor $\vec{r}$ para cada eixo, X, Y e Z . Usualmente utilizamos a convenção de sistema dextrógiro. A *norma* do vetor $\vec{r}$ é definida como o comprimento desta seta, $\overrightarrow{OP}$ e denotada por $|\vec{r}|$. Assim,

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (11.1)$$

Um vetor cujo norme é um é chamado *vetor unitário*. A partir de um vetor arbitrário $\vec{r}$, podemos sempre obter o vetor uninário $\vec{n}$, dividindo o vetor original

pelo seu norme,

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{r}|} \vec{r}.$$

O procedimento de obter o vetor uniário na direção do vetor original é dito como ‘normalização do vetor $\vec{r}$ ’.

O espaço tridimensional $R^{(3)}$ é o conjunto de todos estes vetores.

$$R^{(3)} = \{\vec{r}\}. \quad (11.2)$$

Um vetor não é um número e, portanto, é essencial distingui-lo pelos números. Por exemplo, até neste momento, nem estão definidas as operações de adição dos vetores, de multiplicar números a um vetor, ou fazer produtos entre vetores. Um vetor $\vec{r}$ pode se tornar uma *entidade* matemática que permite fazer algum tipo de cálculos, só quando introduzimos a estrutura algebrica no conjunto $R^{(3)}$.

Primeiro, para dado $\vec{r}$, consideramos um vetor que é paralelo a $\vec{r}$, mas o comprimento é α vezes de $\vec{r}$. Denotamos este vetor por

$$\alpha\vec{r}.$$

É claro que este novo vetor é um membro do conjunto $R^{(3)}$,

$$\alpha\vec{r} \in R^{(3)}.$$

Em outras palavras, estamos introduzindo uma operação de *multiplicar um vetor $\vec{r}$ por um número α* . Em contraste ao vetor, este último, em vez de “número”, é chamado escalar. Quando $\alpha < 0$, convencionamos que o vetor resultante inverte a direção, tendo o comprimento $|\alpha|$ vezes do vetor $\vec{r}$.

Note que quando $\alpha = 0$, o vetor resultante $\alpha\vec{r}$ para qualquer vetor corresponde a origem. Denotamos o vetor corresponde a origem por 0, pela razão obvia acima.

Agora, consideramos dois vetores quaisquer, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$. Denotamos os pontos correspondentes a estes vetores como P_1 e P_2 (ver a figura abaixo).

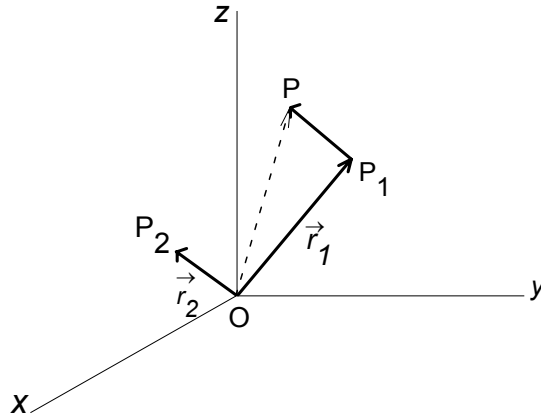


Fig. 15

Estes dois vetores representam duas direções, com respectivos comprimentos. Podemos sempre construir o vetor $\vec{r}$ (a seta tracejada) correspondente ao ponto P que esteja localizado na posição onde a seta $\overrightarrow{P_1P}$ seja paralela ao vetor $\vec{r}_2$ com o mesmo comprimento. Isto é, desta forma, a partir de dois elementos do conjunto $R^{(3)}$, estamos construindo um outro elemento $\vec{r}$ do conjunto $R^{(3)}$. Denotamos esta construção por símbolo $+$, e temos

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 \in R^{(3)}.$$

Isto é, estamos introduzindo a operação de *adição* de dois vetores.

Exercício: Prove geometricamente que a operação de adição acima definida é comutativa, isto é,

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_2 + \vec{r}_1.$$

Com duas operações acima, o conjunto $R^{(3)}$ se torna um *espaço vetorial linear*. Note que para quaisquer dois números reais α e β ,

$$\forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in R^{(3)} \longrightarrow \vec{r} = \alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2 \in R^{(3)}. \quad (11.3)$$

Note que, até aqui, não tem o conceito de sistema de coordenadas. Vamos formular matematicamente o conceito de sistema de coordenadas. Dado um ponto O como origem, um sistema de coordenadas é determinado por 3 vetores unitários,

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3,$$

que determinam as direções de três eixos¹⁹. Sabemos que qualquer ponto no $R^{(3)}$ pode ser alcançado a partir da origem, descolando-se, primeiro ao longo da direção $\vec{e}_1$ por uma distância, digamos r_1 , em seguida deslocando-se na direção $\vec{e}_2$ por uma distância, digamos r_2 , e por último, deslocando-se na direção $\vec{e}_3$, por uma distância, digamos r_3 . Pela definição de adição dos vetores e multiplicação de escalares, isto significa que qualquer vetor $\vec{r}$ contido no conjunto $R^{(3)}$ pode ser escrito por

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 + r_3\vec{e}_3 \\ &= \sum_{i=1}^3 r_i\vec{e}_i.\end{aligned}\tag{11.4}$$

Assim, o vetor $\vec{r}$ é especificado pelos 3 números, (r_1, r_2, r_3) . Estes três números são referidos como *coordenadas* e, é dito que os três vetores $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ formam uma *base*. Geometricamente, estas coordenadas são nada mais de projeções do vetor $\vec{r}$ nas direções respectivas.

Note que nenhum das três direções $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ pode ser alcançadas em termos de combinação linear de outros dois vetores. Isto é, não existe as constantes α, β, γ que satisfazem

$$\alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 = 0,$$

exceto

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Assim, os vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são ditos *linearmente independentes*. No espaço $R^{(3)}$, só pode ter, no máximo, 3 vetores linearmente independentes. O número máximo de vetores linearmente independente num espaço vetorial linear é dito a *dimensão* do espaço.

Exercício: Qual é a dimensão de um plano?

11.1. Produto Escalar

Vamos denotar a projeção de um vetor arbitrário $\vec{r}$ na direção de um destes vetores $\vec{e}_i$ unitários por

$$r_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{r}).\tag{11.5}$$

¹⁹Neste caso, os três vetores ortogonais. Mas o conceito de ortogonalidade ainda não é definido.

Aqui, a notação $(\vec{e}_i \cdot \vec{r})$ significa que a projeção é um número formado de dois vetores, $\vec{e}_i$ e $\vec{r}$, mas note que não está dito como calcular este número. Podemos operacionalizar o conceito de projeção a partir do conceito intuitivo sobre *ortogonalidade*. Posteriormente, reformulamos o conceito. Primeiro, a projeção de um vetor unitário para sua própria direção deve ser um.

$$(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3) = 1. \quad (11.6)$$

Segundo, a projeção de um vetor na direção ortogonal a ele deve ser nula. Portanto,

$$\begin{aligned} (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) &= (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) = (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) = 0, \\ (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) &= (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) = 0. \end{aligned} \quad (11.7)$$

As propriedades de projeções Eqs.(11.6,11.7) se resumem na seguinte forma:

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \delta_{ij}, \quad (11.8)$$

onde δ_{ij} é a delta de Kronecker, definida por

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1, \text{ se } i = j, \\ &= 0, \text{ se } i \neq j. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Para operacionalizar o cálculo para obter a projeção de um vetor sobre uma direção, vamos considerar a expressão

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{r}) = r_i$$

como sendo uma operação sobre um vetor $\vec{r}$ que é um elemento do espaço $R^{(3)}$ para mapear um número r_i . Ou seja, consideramos um objeto,

$$(\vec{e}_i \cdot \square)$$

como uma operação que mapeia um qualquer vetor a ser inserido no lugar $\square$ à um número. Podemos postular que esta operação é linear,

$$\forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \in R^{(3)}, \quad (\vec{e}_i \cdot [\alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2]) = \alpha (\vec{e}_i \cdot \vec{r}_1) + \beta (\vec{e}_i \cdot \vec{r}_2). \quad (11.10)$$

Com esta propriedade da operação de projeção, podemos mostrar facilmente que a Eq.(11.5) é a consequência das Eqs.(11.6,11.7). De fato, da Eq.(11.4),

$$\begin{aligned} (\vec{e}_i \cdot \vec{r}) &= (\vec{e}_i \cdot [r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3]) \\ &= r_1 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_1) + r_2 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_2) + r_3 (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_3) \\ &= r_1 \delta_{i1} + r_2 \delta_{i2} + r_3 \delta_{i3} \\ &= r_i. \end{aligned} \quad (11.11)$$

A última linha vem da propriedade de δ de Kronecker, pois dentro de três termos da penúltima linha, só um dos termos sobrevive, de acordo com cada caso de $i = 1, 2$ ou 3 . É conveniente acostumar escrever na forma mais compacta,

$$\begin{aligned}
 (\vec{e}_i \cdot \vec{r}) &= \left(\vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^3 r_j \vec{e}_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^3 r_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \\
 &= \sum_{j=1}^3 r_j \delta_{ij} \\
 &= r_i.
 \end{aligned} \tag{11.12}$$

Podemos estender a noção de projeção para incluir os vetores não unitários. Para isto, postular a reciprocidade dos dois vetores na operação de projeção.

$$\forall \vec{r} \in R^{(3)}, \quad (\vec{r} \cdot \vec{e}_i) = (\vec{e}_i \cdot \vec{r}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Com este postulado, podemos calcular a quantidade,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

para quaisquer dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ no $R^{(3)}$. Expressando

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \\
 \vec{b} &= b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3,
 \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot [b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3]) \\
 &= b_1 (\vec{a} \cdot \vec{e}_1) + b_2 (\vec{a} \cdot \vec{e}_2) + b_3 (\vec{a} \cdot \vec{e}_3) \\
 &= b_1 (\vec{e}_1 \cdot \vec{a}) + b_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{a}) + b_3 (\vec{e}_3 \cdot \vec{a}) \\
 &= b_1 (\vec{e}_1 \cdot [a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3]) \\
 &\quad + b_2 (\vec{e}_2 \cdot [a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3]) \\
 &\quad + b_3 (\vec{e}_3 \cdot [a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3]) \\
 &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.
 \end{aligned} \tag{11.13}$$

Esta conta fica mais compacta se usarmos o simbolo de somatório,

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= \left(\left[\sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j \right] \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.
\end{aligned} \tag{11.14}$$

A quantidade

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

é um escalar (um número) formado de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e é chamado de produto escalar.

Quando um dos vetores é um vetor unitário, então este escalar é a projeção do outro vetor na direção do vetor unitário. Assim, se escrevemos

$$\vec{a} = |\vec{a}| \vec{n},$$

onde $\vec{n}$ é o vetor unitário na direção do vetor $\vec{a}$, ($|\vec{a}|$ é a norma do vetor $\vec{a}$). Neste caso,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| (\vec{n} \cdot \vec{b}).$$

Já que a projeção do vetor $\vec{b}$ na direção do vetor $\vec{n}$ é dado por

$$(\vec{n} \cdot \vec{b}) = |\vec{b}| \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre dois vetores, temos uma fórmula útil,

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta. \tag{11.15}$$

A Eq.(11.15) mostra que para quaisquer dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o produto escalar deve satisfazer a seguinte desigualdade,

$$-|\vec{a}| |\vec{b}| \leq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \leq |\vec{a}| |\vec{b}|. \tag{11.16}$$

Esta desigualdade é conhecida como a desigualdade de Schwartz. Já que em termos de projeções nas direções, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i, \\ \vec{b} &= \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i,\end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ |\vec{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \\ |\vec{b}| &= \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2},\end{aligned}$$

e, portanto, a desigualdade de Schwartz é equivalente a desigualdade algébrica,

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2). \quad (11.17)$$

Exercício I: Prove *algebricamente* a Eq.(11.17), i.e., sem depender da relação Eq.(11.15). Mostre também que a igualdade acontece somente para o caso,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

e discuta o que significa esta condição geometricamente.

Exercício II: Prove que para um triângulo com lados de a, b e c , o ângulo entre lados a e b é dado por

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (11.18)$$

Podemos calcular o produto escalar de um vetor com o próprio.

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2, \quad (11.19)$$

isto é, o produto escalar de um vetor com o próprio é a norma do vetor ao quadrado. Note que isto é também coerente com a Eq.(11.15), pois neste caso,

naturalmente o ângulo entre dois vetores iguais é nulo ($\theta = 0$). Frequentemente abreviamos a notação de produto escalar neste caso e escrevemos simplesmente,

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) = \vec{a}^2. \quad (11.20)$$

Na linguagem matemática, a operação de produto escalar é um mapeamento

$$R^{(3)} \times R^{(3)} \rightarrow R^{(1)} \quad (11.21)$$

onde $R^{(3)} \times R^{(3)}$ é o produto direto²⁰ de $R^{(3)}$ e $R^{(3)}$. Isto implica que não há inverso da operação de produto escalar. Agora vamos definir o produto escalar mais abstratamente, sem depender do conceito intuitivo de projeção e ortogonalidade. O produto escalar num espaço vetorial $\mathcal{V}$ é um mapeamento de um par ordenado de dois vetores a um número $\in R$, onde R é o conjunto de números reais,

$$\begin{aligned} \forall \vec{x}, \vec{y} &\in \mathcal{V}, \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{y}) \in R, \end{aligned}$$

satisfazendo as seguintes propriedades (para quaisquer $\vec{x}$ e $\vec{y} \in R$):

1. Reciprocidade:

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{y} \cdot \vec{x}). \quad (11.22)$$

2. Linearidade e distributividade:

$$(\vec{x} \cdot \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \beta (\vec{x} \cdot \vec{z}), \quad (11.23)$$

onde α e β são números reais arbitrários.

3. Positividade:

$$(\vec{x} \cdot \vec{x}) \geq 0, \quad (11.24)$$

onde se vale a igualdade, então, necessariamente implica

$$\vec{x} = 0. \quad (11.25)$$

²⁰O conjunto produto direto C de dois conjuntos, A e B é

$$C = \{(x, y) ; \forall x \in A, \forall y \in B\}.$$

Qualquer regra de associação internamente consistente que satisfaz as três propriedades acima é aceito como produto escalar. Por exemplo, podemos verificar que a definição comum de produto escalar,

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) \equiv \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad (11.26)$$

de fato satisfaz as três propriedades acima como o produto escalar. Mas podemos também definir o produto escalar como

$$(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \sum_{i=1}^3 g_i x_i y_i \quad (11.27)$$

onde g_1, g_2 e g_3 são 3 números positivos.

É interessante provar a desigualdade de Schwartz, Eq.(11.16), usando somente as propriedades do produto escalar. Seja λ um número real. Para $\forall \vec{x}, \vec{y} \in R$, construímos

$$\vec{z} = \lambda \vec{y} + \vec{x}.$$

Obviamente

$$\vec{z} \in R.$$

Utilizando a linearidade do produto escalar, temos

$$\begin{aligned} (\vec{z} \cdot \vec{z}) &= \lambda^2 (\vec{y} \cdot \vec{y}) + \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \lambda (\vec{y} \cdot \vec{x}) + (\vec{x} \cdot \vec{x}) \\ &= \lambda^2 (\vec{y} \cdot \vec{y}) + 2\lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{x} \cdot \vec{x}), \end{aligned}$$

onde a reciprocidade (propriedade I) foi utilizada. A expressão acima pode ser considerada como uma função quadrática em λ . Agora, da terceira propriedade, devemos ter

$$(\vec{z} \cdot \vec{z}) \geq 0, \quad (11.28)$$

que deve ser válida para qualquer valor de λ . A condição necessária e suficiente para uma função quadrática

$$f = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0$$

para qualquer λ é

$$B^2 - AC \leq 0.$$

Assim, temos

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq (\vec{x} \cdot \vec{x}) (\vec{y} \cdot \vec{y}),$$

obtendo a desigualdade de Schwartz, Eq.(11.16).

Assim, para quaisquer dois vetores $\vec{a}, \vec{b} \in R$, é garantida sempre a relação,

$$-1 \leq \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \leq 1, \quad (11.29)$$

e, portanto, podemos definir o ângulo θ por

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (11.30)$$

Quando $\cos \theta = 0$, ou seja, $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$, os vetores $\vec{a}, \vec{b}$ são ditos ortogonais.

Exercício: Na prova de desigualdade de Schwartz acima, em que situação que vale a igualdade?

11.2. Forma de Vetor Coluna

Uma vez que a base for especificada (ou seja, um sistema de coordenadas Cartesiano), um vetor qualquer $\vec{r} \in R^{(3)}$ pode ser escrito por

$$\vec{r} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3,$$

e como os vetores base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ são fixos neste caso, o vetor $\vec{r}$ é completamente determinado pelos três números, (r_1, r_2, r_3) , ou, equivalentemente, escrevendo na forma de uma coluna,

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

e vice versa. Em outras palavras, um vetor $\vec{r}$ é equivalente a uma quantidade expressa em termos de coluna de 3 números,

$$\vec{r} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}. \quad (11.31)$$

Aqui, dizemos que o vetor $\vec{r} \in R^{(3)}$ é *representado* em termos de vetor-coluna na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. O vetor-coluna na Eq. (11.31) é a representação do vetor $\vec{r}$ na base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Os números r_1, r_2 e r_3 são chamados de *componentes*.

Quando uma quantidade for representada numa forma, as operações que envolvem esta quantidade devem ser representadas nesta forma. Por exemplo, como fica a multiplicação de um escalar α com um vetor $\vec{r}$ na representação de vetor coluna? Para ver isto, usamos a definição dos componentes

$$\vec{r} = r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3.$$

Já que

$$\begin{aligned} \alpha \vec{r} &= \alpha (r_1 \vec{e}_1 + r_2 \vec{e}_2 + r_3 \vec{e}_3) \\ &= (\alpha r_1) \vec{e}_1 + (\alpha r_2) \vec{e}_2 + (\alpha r_3) \vec{e}_3, \end{aligned}$$

a representação do vetor $\alpha \vec{r}$ na forma de vetor coluna fica

$$\alpha \vec{r} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha r_1 \\ \alpha r_2 \\ \alpha r_3 \end{pmatrix}$$

Assim, podemos escrever

$$\alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha r_1 \\ \alpha r_2 \\ \alpha r_3 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, a operação de adição de dois vetores fica representada como

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix},$$

pois

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) + (b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3) \\ &= (a_1 + b_1) \vec{e}_1 + (a_2 + b_2) \vec{e}_2 + (a_3 + b_3) \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Em geral, temos

$$x \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa_1 + yb_1 \\ xa_2 + yb_2 \\ xa_3 + yb_3 \end{pmatrix}.$$

Devemos enfatizar que, quando representamos um vetor na forma de vetor coluna, estamos assumindo implicitamente uma base. Os vetores da base são também podem ser representados por

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_2 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{e}_3 &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercício: Justifique a associação acima.

Às vezes fica esquecido este fato, mas o papel da base se torna crucial em certas situações, como por exemplo, quando escolhemos uma base que varia no tempo. Este ponto será discutido mais em detalhe posteriormente.

Um vetor coluna pode ser considerado como uma matriz (3×1) . O produto escalar dos dois vetores é escrito como

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

e se aplica a regra de produto de matrizes (1×3) e (3×1) . Neste sentido, as vezes utilizamos a notação matricial para expressar o produto escalar como

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a}^T \vec{b}$$

onde T representa a operação transposta. Isto é, para um vetor coluna,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

sua transposta fica

$$\vec{a}^T = (a_1 \ a_2 \ a_3).$$

Note que enquanto

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})$$

por reciprocidade,

$$\vec{a}^T \vec{b} \neq \vec{a} \vec{b}^T,$$

mas

$$\vec{a}^T \vec{b} = \vec{b}^T \vec{a}$$

Note também que a quantidade

$$\vec{a} \vec{b}^T.$$

é uma matriz (3×3) e não é um escalar.

Embora um vetor $\vec{r}$ e sua representação numa base em termos de vetor coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

sejam equivalentes, não são a mesma coisa. Um vetor $\vec{r}$ existe independentemente do sistema de referência enquanto o vetor coluna correspondente precisa uma base. Mas quando utilizamos uma dada base fixa, podemos identificar as duas quantidades como se fossem as mesmas. Assim, frequentemente utilizamos a notação que não distingue as duas, ou seja, escrevemos

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Neste caso, deve lembrar sempre que o vetor $\vec{r}$ é um vetor coluna matemático representando um vetor físico $\vec{r}$ no espaço físico $R^{(3)}$, utilizando um sistema de referência fixo.

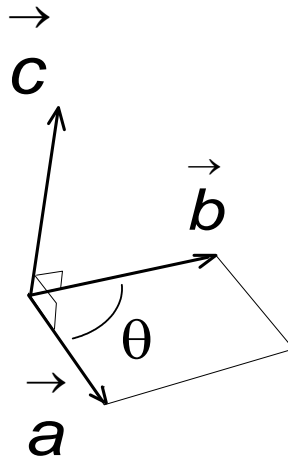
11.3. Produto Vetorial

Como foi dito, o produto escalar entre dois vetores é um mapeamento de espaço produto direto, $R^{(3)} \times R^{(3)}$ para escalar. Podemos construir outros tipos de mapeamento, por exemplo, um mapeamento do espaço produto direto $R^{(3)} \times R^{(3)}$ para o espaço $R^{(3)}$ próprio. Um deste tipo de mapeamento frequentemente utilizado é o produto vetorial.

O produto vetorial é uma regra de associação de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ para um outro vetor $\vec{c}$ denotado por

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Na figura abaixo, ilustramos geometricamente como construir o vetor resultante $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. O vetor $\vec{c}$ é perpendicular ao paralelogramo definido pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tendo a norma igual a área deste paralelogramo.



Isto é, o produto vetorial é definido pelas seguintes propriedades.

1. O vetor $\vec{c}$ é perpendicular ao plano formado de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Isto é,

$$\vec{a} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}] = 0. \quad (11.32)$$

2. A norma do vetor é dado pela área do paralelogramo formado de dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Ou seja,

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta, \quad (11.33)$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

3. A direção do vetor $\vec{c}$ é na direção dextrógira do vetor $\vec{a}$ para o vetor $\vec{b}$.

Podemos verificar imediatamente que o produto vetorial é antissimétrico em $\vec{a}$ e $\vec{b}$,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (11.34)$$

Uma consequência imediata desta propriedade é o produto vetorial de um vetor com ele mesmo é nulo,

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0.$$

Para os vetores de uma base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, temos

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}_k, \quad (i, j, k) \text{ cíclica} \quad (11.35)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Devido a propriedade antissimétrica, temos também,

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1, \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2, \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = 0. \end{aligned}$$

Uma outra propriedade importante é que o produto vetorial é linear em $\vec{b}$, valendo a distributividade, ou seja,

$$\vec{a} \times (x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2) = x(\vec{a} \times \vec{b}_1) + y(\vec{a} \times \vec{b}_2). \quad (11.36)$$

Com esta propriedade e a propriedade antissimétrica, o produto vetorial também é linear em $\vec{a}$, valendo a distributividade,

$$(x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2) \times \vec{b} = x(\vec{a}_1 \times \vec{b}) + y(\vec{a}_2 \times \vec{b}).$$

Assim, se

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i, \\ \vec{b} &= \sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^3 b_i \vec{e}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j [\vec{e}_i \times \vec{e}_j].\end{aligned}\tag{11.37}$$

11.4. Símbolo de Levi-Civita

Para uso futuro, vamos introduzir uma quantidade,

$$\varepsilon_{ijk} = (\vec{e}_i \cdot [\vec{e}_j \times \vec{e}_k]), \quad i, j, k = 1, 2, 3\tag{11.38}$$

Por definição de produto vetorial, vemos que se quaisquer dois índices entre os três (i, j, k) coincidem, esta quantidade é nula, ou seja,

$$\varepsilon_{ijk} = 0,$$

exceto nenhum dos i, j e k não coincide com outro. O que restam são seguintes casos, que podemos avaliar facilmente o valor de ε_{ijk} .

i	j	k	ε_{ijk}
1	2	3	1
1	3	2	-1
2	3	1	1
2	1	3	-1
3	1	2	1
3	2	1	-1

(11.39)

Todas as possibilidades acima citadas são as possíveis permutações dos três números, $(1, 2, 3)$. O número de todas as permutações de n números é $n!$. Para $n = 3$, temos $3! = 6$ permutações.

Em geral, qualquer uma das $n!$ permutações de n números pode ser obtida a partir da ordenação natural,

$$(1, 2, 3, \dots, n)$$

por uma sucessão de transposições entre um par de números. Por exemplo, a permutação

$$(3, 4, 2, 1)$$

pode ser obtido da ordenação natural pela seguinte série de transposições:

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4) &\xrightarrow{(1,4)} (4, 2, 3, 1) \\ &\xrightarrow{(2,3)} (4, 3, 2, 1) \\ &\xrightarrow{(4,3)} (3, 4, 2, 1) \end{aligned}$$

Neste exemplo, são precisas 3 transposições para obter a permutação final. Quando o número de transposições necessárias para se ter uma dada permutação a partir da ordenação natural for par, então é dito que a permutação é par. Quando este número for um ímpar, é dito que a permutação é ímpar. Assim, a permutação $(3, 4, 2, 1)$ é ímpar.

Com este conceito de paridade da permutação, podemos notar que a Eq.(11.39) resume na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} &= \begin{cases} +1, & (ijk) : \text{par} \\ -1, & (ijk) : \text{ímpar} \end{cases} \\ &= 0, \text{ resto.} \end{aligned}$$

ε_{ijk} é chamado o símbolo de Levy-Civita. Utilizando este símbolo, podemos escrever o produto vetorial $\vec{a} \times \vec{b}$ por

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k \right) \vec{e}_k. \quad (11.40)$$

Exercício I: Demonstra que a validade da Eq.(11.36).

Exercício II: O símbolo de Levy-Civita acima é o caso do espaço tridimensional R^3 , ou seja $n = 3$. Podemos definir analogamente o símbolo de Levy-Civita para o espaço de dimensão n , em geral. Obtenha explicitamente o símbolo de Levy-Civita para $n = 2$ e $n = 4$.

12. Problemas

1. Das propriedades de produto vetorial, Eqs.(11.36, 11.34, 11.35), calcule as componentes do vetor resultante $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ em termos das componentes dos vetores $\vec{a}, \vec{b}$, completando o cálculo da Eq.(11.37).

2. Prove que para três vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ arbitrários,

$$\left(\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]\right) = \left(\vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}]\right) = \left(\vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]\right). \quad (12.1)$$

3. Mostre que para três vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ arbitrários, a quantidade

$$\left(\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]\right)$$

é o volume do paralelepípedo formado destes três vetores.

4. Podemos considerar as propriedades, Eqs.(11.36, 11.34, 11.35) como a definição de produto escalar. Neste caso, prove as Eqs.(11.32, 11.33) somente usando esta definição.

5. Mostre em geral que,

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] \neq [\vec{a} \times \vec{b}] \times \vec{c}.$$

Usualmente convencionamos que

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}].$$

6. Prove que

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (12.2)$$

As Eqs.(12.1) e (12.2) podem ser utilizadas para provar Eq.(11.33) sem depender da representação. Para isto,

$$\begin{aligned} |\vec{c}| &= |[\vec{a} \times \vec{b}]| = \sqrt{([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot [\vec{a} \times \vec{b}])} \\ &= \sqrt{\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}])} \\ &= \sqrt{\vec{a} \cdot (\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{b} \cdot \vec{a}))} \\ &= \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \vec{a})^2} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta} \\ &= |\vec{a}| |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta. \end{aligned}$$

13. Análise Vetorial

Para discutir o movimento de uma partícula no espaço tridimensional $R^{(3)}$, devemos considerar a posição da partícula como uma função do tempo. Assim,

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Isto é, estamos considerando uma *função cujo valor é um vetor*, ou *função vetorial*. Se denotamos o vetor de posição da partícula num sistema de coordenadas adequadamente estabelecido por

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned}$$

são as coordenadas da posição. Lembramos que o significado do vetor-coluna acima é

$$\vec{r}(t) = x(t) \vec{e}_1 + y(t) \vec{e}_2 + z(t) \vec{e}_3,$$

onde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base.

Já vimos que, num espaço vetorial existe uma estrutura algébrica. Assim, podemos introduzir a noção de derivada para funções cujos valores são vetores. Vamos definir a derivada de uma função vetorial por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)}{dt},$$

que é uma completa analogia ao caso de uma função usual. Utilizando a regra de adição (subtração) vetorial, temos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left\{ \begin{array}{l} x(t + dt) \vec{e}_1 + y(t + dt) \vec{e}_2 + z(t + dt) \vec{e}_3 \\ - x(t) \vec{e}_1 - y(t) \vec{e}_2 - z(t) \vec{e}_3 \end{array} \right\} \quad (13.1)$$

$$= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \begin{pmatrix} x(t + dt) - x(t) \\ y(t + dt) - y(t) \\ z(t + dt) - z(t) \end{pmatrix} \quad (13.2)$$

$$= \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Assim, a derivada de uma função vetorial é o vetor com as derivadas das componentes do vetor. Note que, aqui foi implicitamente assumido que os vetores da base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ são fixos e não variam no tempo. No caso em que a base varia com o tempo, a expressão (13.3) tem a contribuição pela mudança da base. No momento, até nos acostumarmos com os conceitos básicos, consideramos o caso em que a base é fixa no espaço, mas voltaremos a tratar mais adiante o problema de uma base que varia com o tempo.

A derivada temporal do vetor de posição $\vec{r}$ de uma partícula é a velocidade. A velocidade é, então, um vetor. Geometricamente, a velocidade é o vetor tangente da trajetória da partícula no espaço, como ilustrado na Fig. 17. Nesta figura,

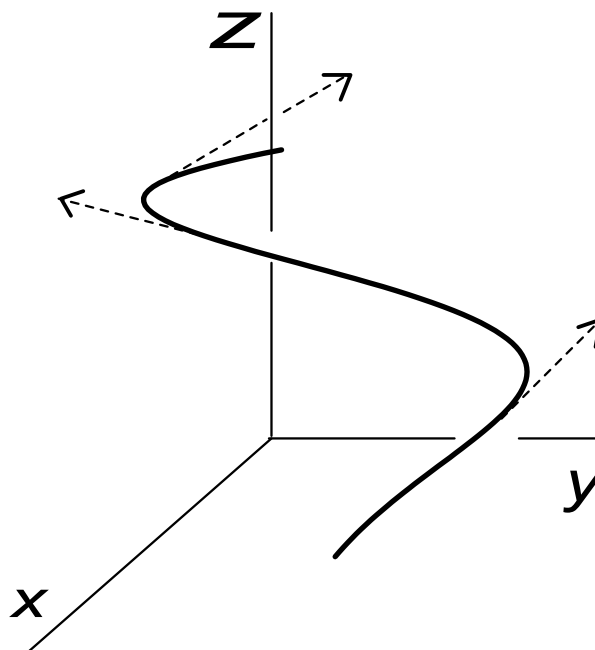


Fig. 17

a trajetória da partícula está indicada pela curva sólida e os vetores de velocidade de 3 instantes diferentes são ilustrado pelas setas pontilhadas.

Vamos denotar o vetor de velocidade por $\vec{v}$. Em geral, o vetor de velocidade é uma função do tempo,

$$\vec{v} = \vec{v}(t). \quad (13.4)$$

Sua derivada temporal

$$\frac{d\vec{v}}{dt}$$

é novamente um vetor, que é chamado de aceleração. Assim, a aceleração de uma partícula no espaço tridimensional é um vetor. Vamos denotar este vetor por $\vec{\alpha}$.

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (13.5)$$

Note que os três vetores, $\vec{r}$, $\vec{v}$ e $\vec{\alpha}$ não necessariamente são paralelos.

13.1. Problemas

1. Obtenha a trajetória dos seguintes movimentos e desenhe-a no plano $(x - y)$.

1.

$$\begin{aligned} x &= t - 2 \\ y &= 2t + 1, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x &= 3 + t, \\ y &= 1 + t - \frac{1}{2}t^2, \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x &= R \cos \omega t, \\ y &= R \sin \omega t, \end{aligned}$$

$(R, \omega : \text{const.})$

4.

$$\begin{aligned} x &= 2R \cos \omega t, \\ y &= 3R \sin \omega t, \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} x &= 2R \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right), \\ y &= 3R \sin (\omega t), \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}x &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \\y &= \frac{e^t - e^{-t}}{2},\end{aligned}$$

2. Prove as seguintes igualdades (θ = ângulo entre dois vetores).

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2, \\(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}), \\(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= 2(1 - \cos \theta), \quad \text{se } |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1.\end{aligned}$$

3. Expresse a condição de que os tres pontos expressos por vetor posição $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ e $\vec{r}_3$ estejam numa reta.

4. Para dois vetores arbitrários $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com mesmo módulo, mostre que os seguintes vetores,

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \\ \vec{v} &= \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})\end{aligned}$$

são ortogonais entre si. Represente geometricamente esta situação.

13.2. Exemplo de Uso de Vetor

Para demonstrar o uso de notação vetorial, vamos considerar o seguinte problema. Da posição $\vec{r}_0$, uma bala é lançada com a velocidade vetor $\vec{v}$. Tem um observador está na posição $\vec{a}$. Qual é a distância mínima entre o observador e a bala? Para resolver esta problema, vamos expressar a trajetória da bala como

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v},$$

onde t é o tempo. A distância d entre o observador é dada por

$$d = |\vec{r}(t) - \vec{a}|.$$

Temos portanto,

$$\begin{aligned}
 d(t)^2 &= (\vec{r}(t) - \vec{a}) \cdot (\vec{r}(t) - \vec{a}) \\
 &= (t\vec{v} + \vec{r}_0 - \vec{a}) \cdot (t\vec{v} + \vec{r}_0 - \vec{a}) \\
 &= t^2 \vec{v}^2 + 2t \vec{v} \cdot \vec{d}_0 + \vec{d}_0^2,
 \end{aligned} \tag{13.6}$$

onde introduzimos um novo vetor

$$\vec{d}_0 = \vec{r}_0 - \vec{a}.$$

A Eq.(13.6) tem a forma de uma simple função quatratca em t . Assim, $d(t)^2$ assume o menor valor quando

$$t = -\frac{\vec{v} \cdot \vec{d}_0}{\vec{v}^2}, \tag{13.7}$$

tendo

$$d_{\min}^2 = \vec{d}_0^2 - \frac{1}{\vec{v}^2} (\vec{v} \cdot \vec{d}_0)^2. \tag{13.8}$$

Vamos utilizar a notação matricial. Temos

$$\begin{aligned}
 d_{\min}^2 &= \vec{d}_0^2 - \frac{1}{\vec{v}^2} (\vec{v} \cdot \vec{d}_0)^2 \\
 &= \vec{d}_0^T \vec{d}_0 - \frac{1}{\vec{v}^2} (d_0^T \vec{v}) (\vec{v}^T \vec{d}_0).
 \end{aligned}$$

Nesta notação matricial, podemos utilizar a propriedade associativa,

$$A(BC) = (AB)C, \text{ etc},$$

portanto,

$$\begin{aligned}
 d_{\min}^2 &= \vec{d}_0^T \vec{d}_0 - \frac{1}{\vec{v}^2} d_0^T (\vec{v} \vec{v}^T) \vec{d}_0 \\
 &= \vec{d}_0^T \vec{d}_0 - d_0^T Q \vec{d}_0,
 \end{aligned} \tag{13.9}$$

onde

$$Q \equiv \frac{1}{\vec{v}^2} (\vec{v} \vec{v}^T)$$

é uma matriz (3×3) com a propriedade,

$$Q^2 = Q.$$

Uma matriz que tem esta propriedade é dita *projektor* (ver a questão 7 nos problemas abaixo) . Ainda podemos escrever a Eq.(13.9) por

$$\begin{aligned} d_{\min}^2 &= \vec{d}_0^T \mathbf{I} \vec{d}_0 - \vec{d}_0^T Q \vec{d}_0 \\ &= \vec{d}_0^T (\mathbf{I} - Q) \vec{d}_0 \\ &= \vec{d}_0^T P \vec{d}_0, \end{aligned}$$

onde

$$P = (\mathbf{I} - Q)$$

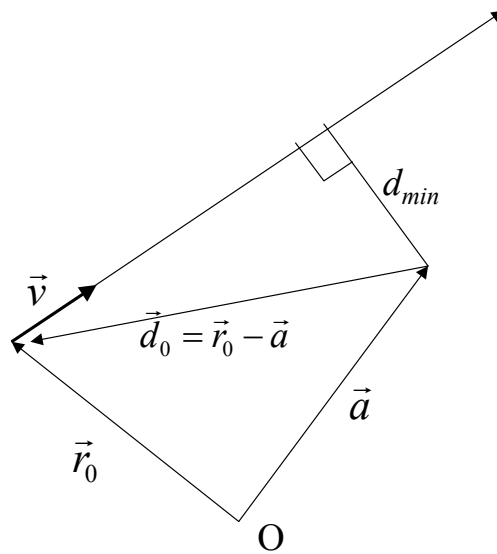
e $\mathbf{I}$ é a matriz de identidade. A matriz P é novamente um projektor. Usando as propriedades deste projektor (ver as questões 8, 9 nos problemas abaixo), podemos escrever

$$\begin{aligned} d(t)_{\min}^2 &= \vec{d}_0^T P \vec{d}_0 \\ &= \vec{d}_0^T P^2 \vec{d}_0 \\ &= \left(P \vec{d}_0 \right)^T P \vec{d}_0 \\ &= \left(P \vec{d}_0 \right)^2, \end{aligned}$$

Assim, a menor distância é igual a norma do vetor $P \vec{d}_0$,

$$d_{\min} = \left| P \vec{d}_0 \right|.$$

Por outro lado, sabemos que (ver as questões) vetor $P \vec{d}_0$ é o vetor $\vec{d}_0$ projetado na direção perpendicular ao vetor $\vec{v}$, ou seja, a menor distância é a distância da reta normal dada do ponto $\vec{a}$ a reta trajetória da bala (ver a figura abaixo).



14. Derivada de um produto escalar, produto vetorial

Vamos ver a regra de cadeia da derivada, d/dt para produtos de vetores. No caso de produto escalar,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t) \right) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dt} (a_i b_i) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{da_i}{dt} b_i + a_i \frac{db_i}{dt} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{da_i}{dt} b_i \right) + \sum_{i=1}^3 \left(a_i \frac{db_i}{dt} \right) \\
 &= \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} \right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \right)
 \end{aligned}$$

Assim, a regra de cadeia da derivada para um produto escalar fica

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} \right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} \right),$$

ou seja, a regra analoga no caso de derivada de duas funções, mas mantendo o produto como o produto escalar. Em particular, se $\vec{a} = \vec{b}$, então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{a}) &= \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} \right) + \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \right) \\ &= 2 \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \right), \end{aligned} \tag{14.1}$$

já que pela propriedade do produto escalar,

$$\left(\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} \right) = \left(\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} \right).$$

A Eq.(14.1) é a analoga da fórmula para uma função

$$\frac{d}{dt} x^2 = 2x \frac{dx}{dt}.$$

Podemos aplicar a regra acima de derivada de um produto escalar para o exemplo anterior de calcular a mínima distância entre uma reta e um ponto. De fato, a distância mínima ocorre quando o vetor

$$\vec{d}(t) = \vec{r}(t) - \vec{a}$$

é perpendicular ao vetor $\vec{v}$ pode ser visto de forma mais simples. O mínimo da distância ocorre quando

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} d(t)^2 \\ &= \frac{d}{dt} (\vec{r}(t) - \vec{a})^2, \end{aligned}$$

Efeturando a derivada, temos

$$(\vec{r}(t) - \vec{a}) \cdot \frac{d}{dt} (\vec{r}(t) - \vec{a}) = 0,$$

ou seja

$$(\vec{r}(t_{\min}) - \vec{a}) \cdot \vec{v} = 0, \quad (14.2)$$

ja que

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}(t) - \vec{a}) = \vec{v}.$$

A Eq.(14.2) mostra que

$$\vec{d}_{\min} \cdot \vec{v} = 0,$$

ou seja os dois vetores, $\vec{d}_{\min}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares entre si.

No caso de um produto vetorial, utilizando a Eq.(11.40), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k \right) \vec{e}_k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{d}{dt} (a_j b_k) \right) \vec{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \left(\frac{da_j}{dt} b_k + a_j \frac{db_k}{dt} \right) \right) \vec{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \left(\frac{da_j}{dt} b_k \right) \right) \vec{e}_k + \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \left(a_j \frac{db_k}{dt} \right) \right) \vec{e}_k \\ &= \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}. \end{aligned}$$

Temos novamente a regra de cadeia,

$$\frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} \right) + \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \right), \quad (14.3)$$

mantendo o produto vetorial para cada um dos termos.

14.1. Função de vetor, Gradiente

Existem quantidades físicas que dependem da posição espacial. Por exemplo, vamos pensar em a pressão do ar. A pressão do ar depende da posição. Obviamente,

quanto mais alta, a pressão deve diminuir. Não só da altura, mas também depende do local. Assim, a pressão do ar p pode ser considerado como uma função do vetor de posição $\vec{r}$,

$$p = p(\vec{r}). \quad (14.4)$$

Se utilizamos uma base (sistema de coordenadas), o vetor de posição $\vec{r}$ é representado pelos 3 números, (x, y, z) e, portanto, a Eq.(14.4) fica uma função de 3 variáveis,

$$p = p(x, y, z).$$

Assim, uma quantidade que depende da posição é necessariamente uma função de 3 variáveis quando expressamos a posição em termos de um sistema de coordenadas.

Podemos imaginar também uma quantidade Q que depende da velocidade de partícula, por exemplo, a energia cinética. Neste caso, esta quantidade é também uma função de vetor, mas agora o argumento é a velocidade,

$$Q = Q(\vec{v}),$$

que fica a função de três variáveis (v_x, v_y, v_z) quando expressamos o vetor de velocidade num sistema de coordenadas.

Em geral, uma função de vetor no espaço tri-dimensional é função de 3 variáveis. Vamos considerar uma função f ,

$$\begin{aligned} f &= f(\vec{r}) \\ &= f(x, y, z). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Se o vetor de posição é uma função do tempo t ,

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

então, naturalmente $f(\vec{r})$ é uma função do tempo t . A derivada da função f em relação ao tempo t é dada pela regra de cadeia de derivada,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

É interessante notar que esta expressão pode ser vista como um produto escalar entre dois vetores,

$$\begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}.$$

Então, podemos escrever,

$$\frac{df}{dt} = \left(\nabla f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \quad (14.6)$$

onde introduzimos uma notação,

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix}.$$

O vetor acima introduzido é chamado de *gradiente* da função f .

Exercício: Sendo $\vec{a}$ e b um vetor constante e um escalar constante,

1. calcule o gradiente de seguintes funções;

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \vec{r}^2, \\ f(\vec{r}) &= \vec{a} \cdot \vec{r}, \\ f(\vec{r}) &= \sin(\vec{r}^2). \end{aligned}$$

2. calcule a derivada temporal das seguintes funções de vetor $\vec{r}(t)$.

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= \vec{r}^2, \\ f(\vec{r}) &= \frac{1}{(\vec{r}^2 + b^2)}, \\ f(\vec{r}) &= e^{-\vec{r}^2}, \\ f(\vec{r}) &= \vec{a} \cdot \vec{r}. \end{aligned}$$

Uma forma de visualizar a função de vetor é considerar a superfície de $f = \text{constante}$. No caso de 2 variáveis,

$$f = f(x, y), \quad (14.7)$$

a condição de

$$f = \text{Const.}$$

estabelece uma relação funcional entre x e y . Variando o valor de $Const$, esta relação gera uma família de curvas no plano (x, y) . Estas curvas são as curvas de nível da função (14.7).

Da mesma forma, no caso tridimensional, para a função de 3 variáveis (14.5), a condição

$$f(x, y, z) = Const. \quad (14.8)$$

corresponde uma superfície no espaço $R^{(3)}$. Não é sempre trivial visualizar a superfície de f constante para uma dada função f , mas é importante ter certas noções para os casos simples. Por exemplo, considere

$$f(\vec{r}) = \vec{r}^2.$$

Neste caso, a superfície

$$f(x, y, z) = C$$

é uma esfera com raio $\sqrt{C}$.

Exercício: Quais são as superfícies de f constante das seguintes funções:

$$\begin{aligned} f &= |(\vec{r} - \vec{a})|^2, \\ f &= (\vec{a} \cdot \vec{r}) + b, \\ f &= \vec{r}^2 + \vec{a} \cdot \vec{r}, \\ f &= e^{-b\vec{r}^2}. \end{aligned}$$

onde $\vec{a}$ é um vetor constante e b é uma constante.

O vetor gradiente tem um significado geométrico. Para fixar a ideia, vamos considerar o exemplo da pressão do ar em função da posição,

$$\begin{aligned} p &= p(\vec{r}) \\ &= p(x, y, z). \end{aligned}$$

O vetor gradiente

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{pmatrix}$$

num ponto $\vec{r}$ aponta a direção em que a pressão cresce mais rápida, e perpendicular a superfície de f constante. Para ver isto, vamos generalizar a expansão em série de Taylor de uma função com mais de uma variável.

Seja

$$f = f(x, y, z)$$

uma função de três variáveis. Queremos uma expansão da função em pequenos deslocamentos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ das variáveis,

$$(x, y, z) \rightarrow (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z).$$

Fazendo a expansão em série de Taylor em cada variáveis sucessivamente e arrumando os termos em ordem de $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ temos

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) (\Delta z)^2 \right. \\ &+ 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \Delta x \Delta y + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \Delta x \Delta z + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \Delta y \Delta z \left. \right\} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Exercício: Deduza a equação acima.

A expressão fica um pouco extensa. Mas se introduzimos o conceito de operador diferencial vetorial,

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}, \quad (14.9)$$

podemos expressar a expansão em série de uma função com 3 variáveis na forma mais compacta. O operador ∇ é o análogo ao operador d/dx no caso unidimensional e chamado de *nabla*. A aplicação deste operador *nabla* à uma função resulta o gradiente da função, do mesmo modo que a aplicação do operador d/dx à uma função de x produz a derivada da função.

Com este operador, o termo

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z$$

pode ser escrito como

$$(\Delta \vec{r} \cdot \nabla) f,$$

onde $\Delta\vec{r}$ é o vetor de pequeno deslocamento,

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}.$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} (\Delta\vec{r} \cdot \nabla)^2 f &= \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f \\ &= \left\{ (\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + (\Delta y)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + (\Delta z)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\Delta x \Delta y \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) + 2\Delta x \Delta z \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \right) + 2\Delta y \Delta z \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \right) \right\} f, \end{aligned}$$

etc.

Note que no caso unidimensional, usando esta noção de operador diferencial, a expansão de Taylor é expressa por

$$f(x + \Delta x) = \left[1 + \Delta x \frac{d}{dx} + \frac{1}{2!} \left(\Delta x \frac{d}{dx} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\Delta x \frac{d}{dx} \right)^3 + \dots \right] f(x).$$

Da mesma forma, no caso tridimensional, a expansão de Taylor fica

$$\begin{aligned} f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) &= f(\vec{r}) + (\Delta\vec{r} \cdot \nabla) f(\vec{r}) + \frac{1}{2!} (\Delta\vec{r} \cdot \nabla)^2 f(\vec{r}) + \frac{1}{3!} (\Delta\vec{r} \cdot \nabla)^3 f(\vec{r}) + \dots \\ &= \left[1 + (\Delta\vec{r} \cdot \nabla) + \frac{1}{2!} (\Delta\vec{r} \cdot \nabla)^2 + \frac{1}{3!} (\Delta\vec{r} \cdot \nabla)^3 + \dots \right] f(\vec{r}). \quad (14.10) \end{aligned}$$

Exercício: Obtenha a expansão em série de Taylor até a terceira ordem das seguintes funções em torno da origem.

$$\begin{aligned} f(\vec{r}) &= e^{(\vec{a} \cdot \vec{r})}, \\ f(\vec{r}) &= \frac{1}{1 + \vec{r}^2}, \\ f(\vec{r}) &= \sqrt{1 + (\vec{a} \cdot \vec{r})}, \end{aligned}$$

onde $\vec{a}$ é um vetor constante.

Quando o vetor de deslocamento $\Delta\vec{r}$ é infinitesimal, podemos manter apenas a primeira ordem da expansão e temos

$$f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \Delta\vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r}).$$

Assim, a variação da função $\Delta f \equiv f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - f(\vec{r})$ fica

$$\Delta f = \Delta\vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r}). \quad (14.11)$$

Se o deslocamento $\Delta\vec{r}$ está na superfície de $f = \text{constante}$ então $\Delta f = 0$ e, portanto,

$$\Delta\vec{r} \cdot \nabla f(\vec{r}) = 0.$$

Ou seja, o vetor de deslocamento e o vetor gradiente são ortogonais, quando o deslocamento é feito na superfície de f constante. Isto é, o vetor gradiente ∇f é perpendicular a superfície de f constante.

Agora, da Eq.(14.11) e da propriedade do produto escalar, temos

$$\Delta f = |\Delta\vec{r}| |\nabla f(\vec{r})| \cos \theta,$$

onde θ é o ângulo entre o vetor de deslocamento $\Delta\vec{r}$ e o vetor gradiente ∇f . Para uma dada norma do deslocamento $|\Delta\vec{r}|$, a variação Δf fica máximo quando $\cos \theta = 1$, ou seja $\theta = 0$. Em outras palavras, a variação máxima é realizada na direção de ∇f . Isto é, o vetor gradiente está apontando na direção da máxima variação da função f .

15. Problemas

1. Para dado vetor unitário $\vec{n}$, o operador

$$\vec{n} \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y} + n_z \frac{\partial}{\partial z}$$

é dito a derivada direcional na direção $\vec{n}$. Mostre que para uma função f do vetor $\vec{r}$, a diferença δf dos valores desta função entre os pontos infinitesimalmente separados, $\vec{r}$ e $\vec{r} + \varepsilon\vec{n}$ é dado por

$$\delta f = \varepsilon \vec{n} \cdot \nabla f(\vec{r}).$$

2. Prove que a afirmação abaixo é errada.

$$Se\ para\ um\ \vec{a} \neq 0, \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) = 0, \text{ então, } \vec{b} = 0.$$

3. Prove que

$$Se\ \forall \vec{a}, \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) = 0, \text{ então, } \vec{b} = 0.$$

4. Calcule os seguintes valores:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \delta_{ij}, \\ & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}, \\ & \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \delta_{jk}, \\ & \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} \delta_{jk}, \\ & \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \end{aligned}$$

5. O procedimento de transformar um vetor $\vec{r}$ em vetor $\vec{n}$ unitário, mantendo sua direção é dito “*normalizar*” o vetor. Normalize os seguintes vetores.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. O método de obter a matriz inversa iterativa tem problema quando um dos elementos diagonais se torna nulo durante o processo de transformação. Como resolver o caso?
7. Seja $\vec{n}$ um vetor unitário arbitrário. Podemos construir uma matriz Q (3×3) por

$$Q \equiv \vec{n} \vec{n}^T.$$

O que é o resultado da multiplicação desta matriz sobre um vetor $\vec{r}$,

$$\vec{r}' = Q\vec{r} \text{ ?}$$

8. Para P da questão anterior, mostre que

$$\begin{aligned} Q^2 &= Q, \\ Q^T &= Q. \end{aligned}$$

9. Seja P a matriz definida por

$$P = 1 - Q.$$

sendo $Q = \vec{n}\vec{n}^T$ com $\vec{n}$ um vetor unitário.

1. Prove que

$$\begin{aligned} P^2 &= P, \\ PQ &= QP = 0. \end{aligned}$$

2. O que é o resultado

$$P\vec{r} \text{ ?}$$

10. Demonstre que a expansão de Taylor de uma função

$$f = f(\vec{r})$$

até a segunda ordem em pequeno deslocamento $\Delta\vec{r}$ em torno do ponto $\vec{r}$ fica

$$f(\vec{r} + \Delta\vec{r}) = f(\vec{r}) + \Delta\vec{r}^T \nabla f + \frac{1}{2} \Delta\vec{r}^T H \Delta\vec{r},$$

onde

$$H = \begin{pmatrix} \partial^2 f / \partial x^2 & \partial^2 f / \partial x \partial y & \partial^2 f / \partial x \partial z \\ \partial^2 f / \partial x \partial y & \partial^2 f / \partial y^2 & \partial^2 f / \partial y \partial z \\ \partial^2 f / \partial x \partial z & \partial^2 f / \partial y \partial z & \partial^2 f / \partial z^2 \end{pmatrix}.$$

A matriz H é chamada de *Hessiana* da função f .

11. Mostre que para uma função suave f , podemos escrever

$$f(\vec{r} + \vec{a}) = e^{\vec{a} \cdot \nabla} f(\vec{r}).$$

16. Movimento de Uma Partícula no Espaço 3-Dimensional

16.1. Equação de Newton na forma vetorial e Sistema de Equações Acopladas

Consideramos uma partícula com massa m se movendo no espaço tridimensional. Precisamos 3 coordenadas, digamos (x, y, z) para especificar sua posição. O movimento de uma partícula então é determinada pelas três funções no tempo t ,

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\y &= y(t), \\z &= z(t).\end{aligned}$$

Assim, o número de graus de liberdade é 3. Consequentemente, a equação de movimento é um conjunto de 3 equações diferenciais, uma para cada coordenada,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x, \quad (16.1)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y, \quad (16.2)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z, \quad (16.3)$$

onde F_x , F_y , e F_z são os componentes da força que atua na partícula.

Podemos escrever as três equações na forma vetorial,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (16.4)$$

onde introduzimos a força vetor $\vec{F}$,

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}.$$

Em geral, as três equações, (16.1,16.2,16.3), ou na sua forma vetorial, (16.4), não são equações separadas de um a outra. Os componentes da força em princípio,

dependem de todas as coordenadas, x, y e z e suas velocidades e o tempo t ,

$$\begin{aligned} F_x &= F_x \left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t \right), \\ F_y &= F_y \left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t \right), \\ F_z &= F_z \left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}; t \right). \end{aligned}$$

Desta forma, as três equações são *acopladas*, no sentido de nenhuma delas podem ser resolvida independentemente de outra.

17. Exemplos Simples

Para acostumar com as notações vetoriais, vamos estudar os casos mais simples e triviais.

17.1. Movimento na Ausência da Força - Sistema Não acoplado

Se nenhuma força aplica a partícula, então, a equação de movimento fica

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0.$$

Podemos introduzir o vetor de momento linear,

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Em termos do vetor de momento, a equação de movimento fica

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$$

Isto é, em termos de componentes,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = 0,$$

que fornece as três equações,

$$\begin{aligned}\frac{dp_x}{dt} &= 0, \\ \frac{dp_y}{dt} &= 0, \\ \frac{dp_z}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Estas três equações não são acopladas e, portanto, podem ser resolvidas independentemente de outra. Temos

$$\begin{aligned}p_x &= p_{0x}, \\ p_y &= p_{0y}, \\ p_z &= p_{0z},\end{aligned}$$

onde p_{0x} , p_{0y} e p_{0z} são constantes de integração. Assim, temos

$$\vec{p} = \vec{p}_0,$$

onde

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \\ p_{0z} \end{pmatrix}$$

é o vetor constante.

A dedução acima se resume em

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{17.1}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \tag{17.2}$$

mostrando a solução da equação diferencial vetorial Eq.(17.1) é dada por um vetor constante.

- Na ausência de força, o vetor de momento linear de uma partícula é um *vetor constante*.

Este resultado é referido como a lei de conservação do momento. Note que a conservação de uma quantidade vetorial implica a constância da quantidade como vetor, isto é, o seu módulo e sua direção são mantidos. Isto é, o movimento é uniforme e retilinear. Podemos obter a trajetória da partícula integrando a equação,

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}_0,$$

em relação ao tempo t . Aqui, novamente esta equação vetorial constitui as três equações em seus componentes e neste caso, as equações são desacopladas. Isto é, as três equações podem ser resolvidas independentemente de outras. Este fato permite escrever

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \frac{1}{m} \vec{p}_0 (t - t_0),$$

onde $\vec{r}_0$ é o vetor da posição quando $t = t_0$. Naturalmente, os dois vetores constantes r_0 e $\vec{p}_0$ devem ser determinado em termos da condição inicial do problema.

17.2. Queda Livre

Consideramos agora a força gravitacional constante. Por enquanto, desprezamos o efeito de atrito. Para explorar a notação vetorial, vamos indicar a direção em que a força gravitacional pelo vetor unitário $\vec{n}$. Assim, a equação de movimento de Newton na forma vetorial fica

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = mg \vec{n}.$$

O lado direito desta equação é um vetor constante. Portanto, podemos integrar imediatamente em t tendo

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = g \vec{n} t + \vec{v}_0, \quad (17.3)$$

onde $\vec{v}_0$ é a velocidade da partícula no instante $t = 0$.

Exercício: Obtenha a Eq.(17.3) integrando a equação de movimento para cada componente.

A Eq.(17.3) ainda pode ser integrada em t e temos

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2} g \vec{n} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \quad (17.4)$$

Aqui, $\vec{r}_0$ é o vetor da posição no instante $t = 0$.

Exercício: Obtenha a Eq.(17.4) integrando a Eq.(17.3) para cada componente.

Exercício: Esboce o grafico da trajetória, $\vec{r}(t)$ nos seguintes casos:

1. $\vec{n} = (1, 0, 0)$, $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_0 = (0, 1, 0)$.
2. $\vec{n} = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_0 = (1, -1, 0)$.

18. Forças Centrais

Nos exemplos anteriores, as equações para as componentes da Equação de Movimento são desacopladas e por isso foi fácil de integrar. Em geral, isto não acontece. Por exemplo, vamos considerar uma partícula com massa M ligada a extremidade de uma mola cuja outra extremidade é fixa num ponto O no espaço, permitindo rodar em qualquer direção em torno deste ponto. Vamos supor que a mola não se curva. Aqui, por simplicidade, supomos que não existe a força gravitacional, nem atrito. Veja a figura abaixo.

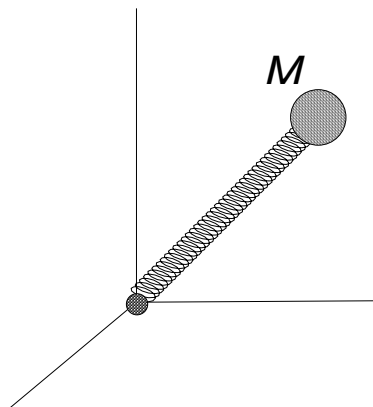


Fig. 18

Para construir a equação de movimento de Newton neste caso, vamos escolher a origem do sistema de coordenadas no ponto que a mola está presa. Vamos denotar o vetor de posição da massa M por $\vec{r}$. Pela lei de Hook, sabemos que, independente da direção do vetor $\vec{r}$, a força da mola atua na direção deste vetor, com o módulo proporcional a variação do comprimento da mola. Assim, o vetor da força é

$$\vec{F} = -k(r - l)\vec{e}_r, \quad (18.1)$$

onde, como sempre, l é o comprimento natural da mola, r a norma do vetor $\vec{r}$, e $\vec{e}_r$ é o vetor unitário ($|\vec{e}_r| = 1$) que tem a direção do vetor $\vec{r}$. Temos

$$\vec{e}_r = \frac{1}{r} \vec{r}, \quad (18.2)$$

e naturalmente

$$(\vec{e}_r \cdot \vec{r}) = r. \quad (18.3)$$

Assim, a equação de movimento da massa na ponta da mola fica

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \frac{r - l}{r} \vec{r}. \quad (18.4)$$

Em termos de coordenadas Cartesianas (x, y, z) ,

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} r &= |\vec{r}| \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned}$$

portanto, as equações de movimento para cada coordenada fica,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} x, \quad (18.5)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} y, \quad (18.6)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - l}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} z. \quad (18.7)$$

Como foi dito, estas são equações acopladas e aparentemente bastante complicadas. Parece que impossível de ser resolvidas.

Entretanto, este sistema possui uma propriedade particular que permite resolver o problema, pelo menos formalmente. Esta propriedade vem do fato de que a direção da força é sempre a mesma da sua posição. O problema acima é um caso particular do tipo da força,

$$\vec{F} = f(r) \vec{e}_r, \quad (18.8)$$

onde $f(r)$ é uma função qualquer da norma do vetor $\vec{r}$. No caso do exemplo acima, $f(r) = |r - l|$.

No problema de força central, a aceleração é sempre paralela ao vetor da posição em cada instante e o modulo da força é uma função apenas da distância da partícula da origem e não depende da direção.

Alguns exemplos de problema de uma força central occorem na natureza. A força central historicamente mais conhecida é a força gravitacional. Considerando o Sol imovel na origem do sistema de coordenadas, a força gravitacional que atua numa planeta de massa m na posição $\vec{r}$ é

$$\vec{F}_{Sol-Planeta} = -G \frac{mM_{\odot}}{r^2} \vec{e}_r, \quad (18.9)$$

onde $M_{\odot} (= 1.989 \times 10^{33} g)$ é a massa do Sol, $G (= 6.672 \times 10^{-8} dyn cm^2 g^{-2})$ é a constante gravitacional. Assim, a equação de movimento da planeta em torno do Sol fica

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{mM_{\odot}}{r^2} \vec{e}_r. \quad (18.10)$$

Um outro exemplo de uma força central é a força de Coulomb que atua no elétron que gira em torno de um próton,

$$\vec{F}_{elétron-proton} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad (18.11)$$

onde $e (= 1.60217733 \times 10^{-19} C)$ é a carga do elétron medido na unidade eletrostática. Se a dinâmica de um elétron do átomo hidrogêneo fosse descrita em termos de Mecânica Clássica, a equação de movimento do elétron seria²¹,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad (18.12)$$

onde m é a massa do elétron. Aqui, o proton do átomo hidrogêneo foi considerado imovel na origem.

18.1. Momento Angular

Vamos escrever a equação de movimento como

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = f(r) \vec{e}_r, \quad (18.13)$$

²¹Infelizmente, no mundo microscópico, a lei dinâmica não é dada pela lei de Newton. Mesmo assim, o conceito de força central continua valendo para este problema.

onde

$$\vec{p} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (18.14)$$

é o momento da partícula. Se tomamos o produto vetorial desta equação com o vetor $\vec{r}$, temos

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times (f(r)\vec{e}_r).$$

O lado direito desta equação anula, pois $\vec{e}_r \parallel \vec{r}$.

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0. \quad (18.15)$$

Por outro lado, usando a regra de cadeia da derivada para o produto vetorial, a Eq.(14.3), temos

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] - \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}.$$

Mas o último termo é zero, pois

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \parallel \vec{p}.$$

Assim, concluímos que

$$\frac{d}{dt} [\vec{r} \times \vec{p}] = 0. \quad (18.16)$$

Um resultado imediato é, o vetor

$$\vec{r} \times \vec{p}$$

é um vetor constante no tempo. Lembre que a Eq.(18.16) é uma equação vetorial, fornecendo 3 equações diferenciais.

Definimos o vetor de *momento angular* por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Assim, temos um resultado extremamente importante para o movimento sob uma força central,

- O vetor de momento angular de uma partícula é uma quantidade conservada sob a força central.

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = 0, \quad (18.17)$$

ou equivalentemente,

$$\vec{L} = \vec{L}_0,$$

onde $\vec{L}_0$ é o vetor constante.

O resultado acima é referido como *a lei de conservação do momento angular* no caso de uma força central e, é bastante geral no sentido de não depende a forma da função $f(r)$ da força, a Eq.(18.8).

18.2. Plano de Movimento

A conservação do momento angular tem uma consequência bastante forte. Já que o momento angular

$$\vec{L} = m \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right]$$

é o vetor perpendicular ao plano formado de dois vetores $\vec{r}$ e sua velocidade $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, a constância do $\vec{L}$ implica em a invariância deste plano no tempo. Em outras palavras, a trajetória da partícula nunca sai deste plano, ou seja, o movimento fica limitado neste plano. Assim, o movimento se torna bi-dimensional.

Podemos provar a afirmação acima mais rigorosamente. Seja $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ os vetores da posição inicial e da velocidade inicial, respectivamente. Seja $\vec{n}$ o vetor unitário perpendicular ao plano formado²² de dois vetores, $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$. Os três vetores ($\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$, $\vec{n}$) formam uma base. Desta forma, podemos escrever o vetor $\vec{r}$ de posição no tempo t arbitrário pela combinação linear destes vetores.

$$\vec{r}(t) = c_1(t)\vec{r}_0 + c_2(t)\vec{v}_0 + c_3(t)\vec{n}, \quad (18.18)$$

onde c_1, c_2, c_3 são função do tempo t . Naturalmente pela definição,

$$\begin{aligned} c_1(0) &= 1, \\ c_2(0) &= 0, \\ c_3(0) &= 0. \end{aligned}$$

Queremos provar que

$$c_3(t) \equiv 0.$$

Da Eq.(18.18), temos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dc_1}{dt}\vec{r}_0 + \frac{dc_2}{dt}\vec{v}_0 + \frac{dc_3}{dt}\vec{n}.$$

²²Supomos que $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ são linearmente independentes.

Calculando o momento angular com estas expressões, temos

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= (c_1\vec{r}_0 + c_2\vec{v}_0 + c_3\vec{n}) \times \left(\frac{dc_1}{dt}\vec{r}_0 + \frac{dc_2}{dt}\vec{v}_0 + \frac{dc_3}{dt}\vec{n} \right) \\
&= \left(c_1 \frac{dc_2}{dt} - c_2 \frac{dc_1}{dt} \right) (\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) + \left(c_3 \frac{dc_1}{dt} - c_1 \frac{dc_3}{dt} \right) \vec{n} \times \vec{r}_0 + \left(c_3 \frac{dc_2}{dt} - c_2 \frac{dc_3}{dt} \right) \vec{n} \times \vec{v}_0.
\end{aligned}$$

Agora, o vetor do primeiro termo

$$(\vec{r}_0 \times \vec{v}_0)$$

é exatamente o momento angular $\vec{L}_0$ no $t = 0$. Os vetores

$$\begin{aligned}
&\vec{n} \times \vec{r}_0, \\
&\vec{n} \times \vec{v}_0
\end{aligned}$$

estão no plano formado de $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ e, portanto, são perpendicular ao vetor $\vec{L}_0$. Assim,

$$\vec{L} = \vec{L}_0$$

implica em

$$\left(c_1 \frac{dc_2}{dt} - c_2 \frac{dc_1}{dt} \right) = 1, \quad (18.19)$$

$$\left(c_3 \frac{dc_1}{dt} - c_1 \frac{dc_3}{dt} \right) = 0, \quad (18.20)$$

$$\left(c_3 \frac{dc_2}{dt} - c_2 \frac{dc_3}{dt} \right) = 0. \quad (18.21)$$

Exercício: Justifique as Eqs.(33.36,33.37,33.38).

Da Eq.(33.37) temos

$$\frac{dc_1}{c_1} = \frac{dc_3}{c_3}$$

e, portanto,

$$c_3 = \alpha c_1,$$

onde α é uma constante. Analogamente da Eq.(33.38), concluímos que

$$c_3 = \beta c_2,$$

sendo β é uma constante. Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, então, podemos eliminar c_3 e temos

$$\alpha c_1 = \beta c_2,$$

e portanto c_1 e c_2 ficariam *linearmente dependente*. Mas, isto, obviamente contradiz com a Eq.(33.36), pois o lado esquerda é a Wonskiana das funções c_1 e c_2 , e se c_1 e c_2 fossem linearmente *dependentes*, a Wronskiana seria zero. A Eq.(33.36) implica c_1 e c_2 devem ser linearmente *independentes*. Assim, devemos ter

$$\alpha = \beta = 0.$$

ou

$$c_3 = 0.$$

Isto é, o vetor da posição da partícula nunca terá o componente fora do plano inicialmente determinado pelo $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$. O movimento da partícula sempre está restringido dentro deste plano (Ver a Fig. 19).

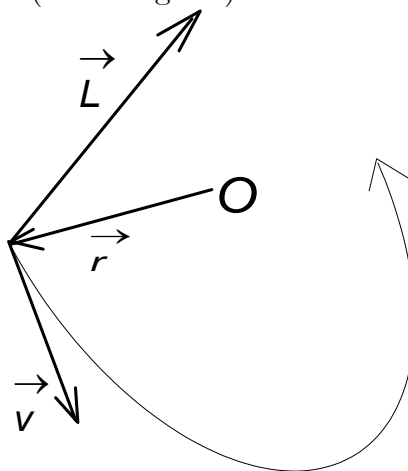


Fig. 19

Uma vez provamos que o movimento da partícula sob a ação de uma força central é um movimento plano, podemos escolher o sistema de coordenadas adequado

tal forma que o plano de movimento coincide com o plano XY do sistema de coordenadas. Nesta escolha, a equação de movimento fica

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = f(r) \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},$$

pois

$$\vec{e}_r = \frac{1}{r} \vec{r} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

e $z \equiv 0$. Assim, podemos eliminar a coordenada z . A equação de movimento neste plano fica

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r) \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (18.22)$$

Para tratar o problema de força central no plano XY , é conveniente utilizar o sistema de coordenadas polares, pois a força só depende da parte radial.

$$x(t) = r \cos \theta, \quad (18.23)$$

$$y(t) = r \sin \theta, \quad (18.24)$$

onde $r = r(t)$ e $\theta = \theta(t)$. As equações acima constituem a *transformação de variáveis*. Isto é, em vez de especificar a posição $\vec{r}$ por 2 coordenadas cartesianas, (x, y) , estamos especificando em termos de 2 coordenadas polares, (r, θ) . Temos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad (18.25)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}, \quad (18.26)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos \theta - 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta + 2 \cos \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2\theta}{dt^2}. \end{aligned}$$

Assim, a equação de movimento fica

$$m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \cos \theta - 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \cos \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} = f(r) \cos \theta \quad (18.27)$$

$$m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} \sin \theta + 2 \cos \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \sin \theta \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \cos \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right\} = f(r) \sin \theta \quad (18.28)$$

Multiplicando $\cos \theta$ na Eq.(18.28) e $\sin \theta$ na Eq.(18.27) e subtraindo os dois lados, temos

$$m \left(r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) = 0. \quad (18.29)$$

Por outro lado, Multiplicando $\sin \theta$ na Eq.(18.28) e $\cos \theta$ na Eq.(18.27) e somando os dois lados, temos

$$m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right\} = f(r). \quad (18.30)$$

Podemos utilizar as Eqs.(18.29) e (18.30) no lugar das Eqs.(18.28) e (18.27).

A expressão do lado esquerdo da Eq.(18.29) pode ser simplificada. Já que

$$\begin{aligned} r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r} \left(r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right), \end{aligned}$$

da Eq.(18.29) temos

$$m \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0. \quad (18.31)$$

Daí, temos de imediato,

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{Const.} \quad (18.32)$$

Aqui, propositalmente mantivemos o fator m explicitamente no lado esquerdo. A quantidade acima é exatamente o módulo do vetor de momento angular $\vec{L}$, que

pode ser calculado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
|\vec{L}| &= \left| \vec{r} \times m \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \\
&= m \sqrt{\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2} \\
&= m \sqrt{\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)} \\
&= m \sqrt{\vec{r} \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right)} \\
&= m \sqrt{\left(\vec{r} \cdot \left\{ \vec{r} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \frac{d\vec{r}}{dt} \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \right\} \right)} \\
&= m \sqrt{(\vec{r} \cdot \vec{r}) \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2} \tag{18.33}
\end{aligned}$$

onde utilizamos as fórmulas já conhecemos,

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}),$$

e

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Agora, das Eqs.(18.25) e (18.26), temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) &= \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \\
&= \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\
&= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \tag{18.34}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) &= r \cos \theta \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right) + r \sin \theta \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right) \\
&= r \frac{dr}{dt}.
\end{aligned}$$

Sustituindo estes resultados na Eq.(18.33), temos

$$\begin{aligned} |\vec{L}| &= m \sqrt{r^2 \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - \left(r \frac{dr}{dt} \right)^2} \\ &= mr^2 \frac{d\theta}{dt}. \end{aligned}$$

Assim, a Eq.(18.32) é

$$|\vec{L}| = \text{Const.}$$

que é o resultado que já obtivimos pela discussão anterior.

Em resumo, a conservação do momento angular implica em

1. o movimento da partícula está restringido num plano, e
2. o módulo do momento angular conserva, i.e.,

$$|\vec{L}| = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L_0 = \text{Const.} \quad (18.35)$$

Exercício: Mostre que se escolhemos o plano do movimento como o plano XY , então

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |L| \end{pmatrix},$$

isto é, a Eq.(18.35) é o componente z do momento angular.

18.3. Base Comovente (Bi-dimensional)

Para representar um vetor $\vec{r}$ em termos de coordenadas Cartesianas, a base fixo no espaço $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ foi utilizada. No caso de movimento bi-dimensional, precisa-se a base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Mas, se utilizamos as coordenadas polares, existe uma base mais adequada para isto. Para cada instante t , de acordo com o vetor da posição $\vec{r}$, introduzimos o vetor unitário $\vec{e}_r$ na direção de $\vec{r}$. Introduzimos um outro vetor unitário $\vec{e}_\theta$, perpendicular a $\vec{e}_r$. Escolhemos a direção deste último vetor como a direção em que o ângulo θ cresce.

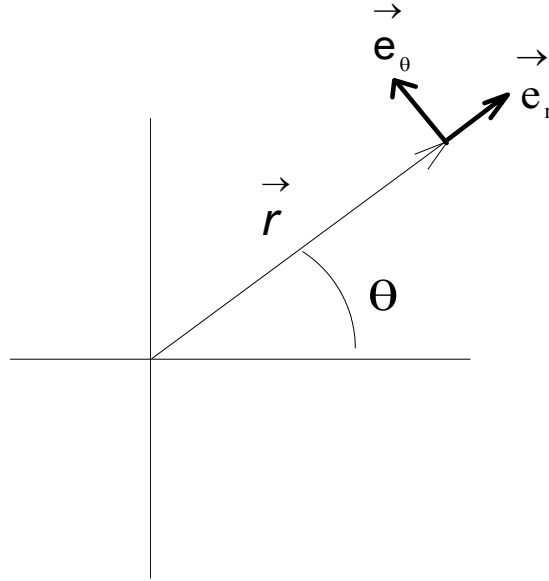


Fig. 20

Obviamente, em cada instante, os dois vetores $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ formam uma base para representar qualquer vetor no plano XY . Isto é, qualquer vetor no plano XY pode ser escrita como a combinação linear destes vetores. Em particular, temos

$$\vec{r} = r\vec{e}_r.$$

Note que a base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ variam com o tempo t , acompanhando o movimento da partícula. Tal base é chamada a base comovente (com a partícula). Em termos de coordenadas Cartesianas, estes vetores podem ser representados por

$$\vec{e}_r \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix},$$

e

$$\vec{e}_\theta \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Verificamos que os dois vetores formam uma base ortonormal,

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \delta_{ij},$$

sendo os índices i, j referem se r e θ .

Com estas expressões, temos imediatamente,

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_r \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta, \quad (18.36)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta \rightarrow \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r. \quad (18.37)$$

As relações acima são bastante úteis para simplificar os cálculos das derivadas temporais do vetor $\vec{r}$. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d}{dt}\vec{e}_r \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta. \end{aligned} \quad (18.38)$$

Esta expressão mostra que o vetor de velocidade da partícula tem o componente radial (na direção de $\vec{e}_r$) dr/dt , e tem o componente tangencial (na direção de $\vec{e}_\theta$) $r d\theta/dt$. O quadrado do módulo do vetor da velocidade é

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) \\ &= \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

que é exatamente a Eq.(18.34).

A aceleração pode ser obtida da Eq.(18.38),

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \right) \\ &= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d}{dt}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\vec{e}_\theta \\ &= \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

Desta forma, a equação de movimento fica

$$m \left\{ \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta \right\} = f(r)\vec{e}_r.$$

Já que os vetores $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ são linearmente independentes, temos

$$\begin{aligned} m \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) &= f(r), \\ \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

que são idênticas a Eqs. (18.30) e (18.29), respectivamente.

18.4. Velocidade Areolar

A conservação do componente z do momento angular L_z , Eq.(18.35) relaciona a velocidade angular $d\theta/dt$ com a distância da partícula com a origem. Pela definição do momento angular, sabemos que

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \\ &= \frac{1}{dt} |\vec{r} \times d\vec{r}|, \end{aligned} \tag{18.39}$$

onde

$$|\vec{r} \times d\vec{r}|$$

é a área do paralelograma formado do vetor $\vec{r}$ e $d\vec{r}$. Portanto,

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|$$

é a área do triângulo formado de dois vetores, $\vec{r}$ e $\vec{r} + d\vec{r}$.

Exercício: Verifique a afirmação acima.

Assim, podemos definir a velocidade areolar, i.e., a área varrida pelo vetor $\vec{r}$ por unidade do tempo,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right|.$$

A Eq.(18.35) fica escrita em termos desta quantidade como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_0}{2m} = \text{Const.}$$

Desta forma, a conservação do momento angular para um movimento de uma partícula sob uma força central acarretará equivalente a constância da área varrida por unidade do tempo (velocidade areolar). Esta lei foi observada pelo Kepler no estudo de movimento planetário em 1608.

18.5. Movimento Radial

A Eq.(18.35) pode ser usada para expressar a velocidade angular em termos de L_0 e r .

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L_0}{mr^2}. \quad (18.40)$$

Substituindo esta expressão na Eq.(18.30), temos

$$m \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{L_0}{mr^2} \right)^2 \right) = f(r),$$

ou

$$m \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L_0^2}{mr^3} = f(r). \quad (18.41)$$

Se transferimos o segundo termo do lado esquerdo para o lado direito, temos

$$m \frac{d^2r}{dt^2} = f(r) + \frac{L_0^2}{mr^3}, \quad (18.42)$$

que tem a forma como se fosse uma equação de Newton de uma partícula unidimensional. Esta é a equação de movimento radial. O movimento radial é o movimento da partícula em relação a apenas distância radial, independentemente da direção. Ou seja, esta equação de movimento correspondente ao movimento aparente da partícula de um observador que gira junto com a partícula acompanhando seu movimento angular. Neste caso, como é de se esperar, além da força radial $f(r)$, aparece uma outra força devido a momento angular L_0 que é a força centrífuga. A força centrífuga é dada por

$$f_{c.f.} = + \frac{L_0^2}{mr^3}, \quad (18.43)$$

com o sinal positivo. Já que $L_0^2 > 0$, a força centrífuga atua para acelerar a partícula para crescer a distância da origem.

Note que a força centrífuga não aparece na equação original de movimento na forma vetorial, Eq.(18.13). A força centrífuga aparece como uma força efetiva para o grau de liberdade do movimento radial após ter eliminado o movimento angular. Isto é, quando olhamos o movimento radial da partícula, acompanhando seu movimento angular, o observador vê que como se fosse existe uma força extra a Eq.(18.43) além da força central $f(r)$. Podemos interpretar a força centrífuga como uma força aparente que aparece quando descreve o movimento de uma partícula num sistema não inercial. Teremos outras oportunidades de falar sobre este tipo de força efetiva.

18.6. Energia Cinética Radial e a Lei de Conservação da Energia

Já que a Eq.(18.42) tem a mesma forma de uma equação de movimento unidimensional, podemos aplicar o método de obter a lei de conservação de energia que discutimos no Capítulo anterior.

Multiplicando

$$\frac{dr}{dt}$$

aos dois lados da Eq.(18.42), temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right) = -\frac{d}{dt} V(r) - \frac{d}{dt} \left(\frac{L_0^2}{mr^2} \right), \quad (18.44)$$

onde

$$V(r) = - \int^r f(r') dr'.$$

A Eq.(18.44) pode ser integrada de forma imediata,

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = -V(r) - \left(\frac{L_0^2}{mr^2} \right) + E, \quad (18.45)$$

onde E é uma constante. Escrevemos

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L_0^2}{mr^2} \right) + V(r) = E. \quad (18.46)$$

Podemos re-escrever esta equação ainda como

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(\frac{L_0^2}{m^2 r^2} \right) \right] + V(r) = E,$$

ou usando a Eq.(18.40),

$$\frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] + V(r) = E.$$

Mas a quantidade dentro do [...] é exatamente o modulo quadrado da velocidade, a Eq.(18.34). Finalmente²³ temos

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + V(r) = E, \quad (18.47)$$

²³Tome cuidado para distinguir r e $\vec{r}$. Igualmente para dr/dt e $d\vec{r}/dt$.

que é a lei da conservação de energia. Isto é, a soma da energia cinética (uma quantidade escalar) e a energia potencial (também uma quantidade escalar) é mantida constante durante o movimento. A energia potencial $V(r)$ é o trabalho que a partícula consome contra a força (neste caso, a força central, a Eq.(18.8)).

A primeira vista, a Eq.(18.47) pode parecer estranha, pois a parte a energia cinética contém as velocidades tanto radial quanto angular, no entanto a energia potencial depende apenas da posição radial. A razão disto é que, a força central não exerce trabalho para um movimento puramente angular, sem deslocamento radial. Estudaremos este aspecto mais detalhadamente na seção seguinte

Exercício: Introduzimos o sistema de coordenadas esfericas,

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta,\end{aligned}$$

onde r, θ, ϕ são funções do tempo t . Expresse o modulo da velocidade,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2$$

em termos de coordenadas esfericas.

Exercício: Vamos introduzir a base comovente tridimensional. Definimos

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &\equiv \frac{\vec{r}}{r}, \\ \vec{e}_\theta &\equiv \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}, \\ \vec{e}_\phi &\equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi}.\end{aligned}$$

1. Prove que os vetores $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ forma uma base ortonormal, e um sistema dextrógiro na ordem acima.
2. Expresse os seguintes vetores nesta base.

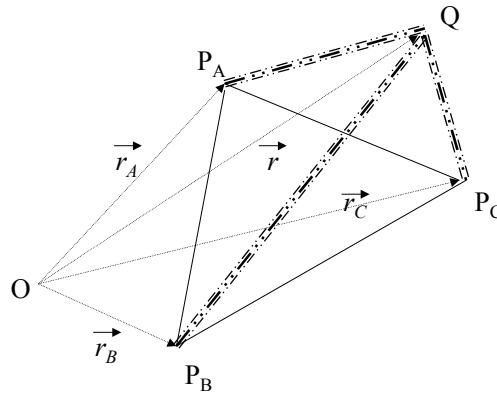
$$\frac{d\vec{e}_r}{dt}, \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}, \frac{d\vec{e}_\phi}{dt}, \frac{d^2\vec{e}_r}{dt^2}, \frac{d^2\vec{e}_\theta}{dt^2}, \frac{d^2\vec{e}_\phi}{dt^2}.$$

3. Expresse o vetor de aceleração

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

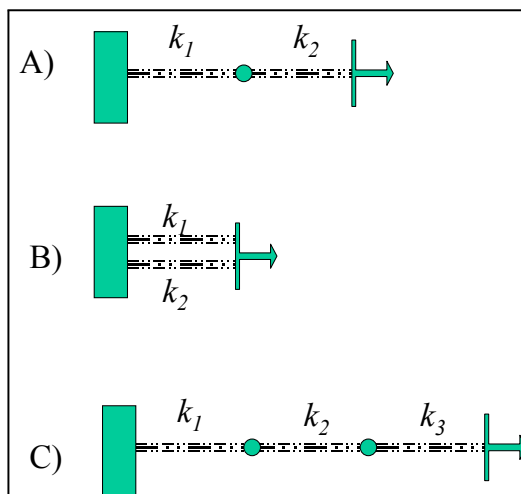
em termos desta base.

4. Existem 3 pontos fixos no plano, P_A , P_B e P_C , cujos vetores posição são $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, e $\vec{r}_C$, respectivamente. Seja $\vec{r}$ o vetor posição de um corpo Q , que está ligado aos três pontos P_A , P_B e P_C pelas molas cujas constantes de molas k_1 , k_2 e k_3 , e os comprimentos naturais l_1^0 , l_2^0 e l_3^0 , respectivamente (veja a figura abaixo).

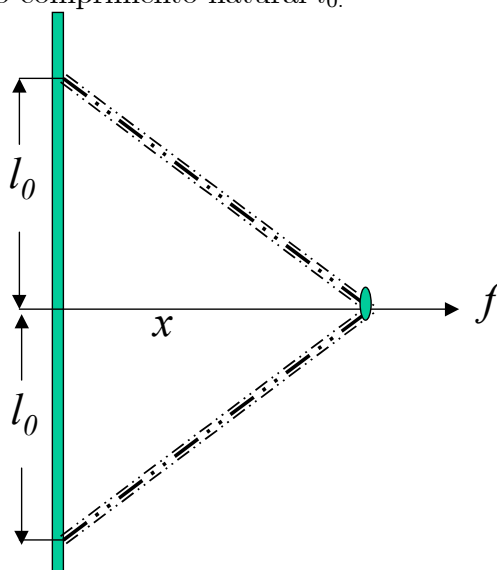


1. Expresse a força $\vec{f}$ que está atuando no objeto Q em termos dos vetores posição.
2. Expresse a condição para o vetor posição $\vec{r}$ pela qual o corpo Q esteja em equilíbrio.
3. Vamos supor que todas as molas são muito pequenas de tal forma que os comprimentos naturais sejam desprezíveis. Além disto, se todas as constantes de mola são iguais, qual é a posição do equilíbrio?
4. Continuamos supor que os comprimentos naturais são desprezíveis. Qual seria a condição para as constantes de mola pela qual a posição de equilíbrio seja no centro da massa do triângulo, P_A - P_B - P_C ?
5. Calcule, com justificativa, a constante de mola do sistema final quando as molas distintas são conectadas nos casos a), b) e c) como mostrados

abaixo.



6. Obtenha a força f necessária para puxar o objeto O até na posição x como ilustrada na figura abaixo. As duas molas são idênticas e têm constante de mola k , o comprimento natural l_0 .



Part IV

Conservação de Energia em 3D

Na seção anterior, vimos que o papel de lei de conservação é fundamental para compreensão do movimento da partícula. Nesta seção, vamos estudar a lei de conservação de energia no caso tridimensional.

19. Energia, Trabalho e Potencial

19.1. Forças Conservadas e Energia Potencial

Inicialmente vamos introduzir o conceito de *trabalho*. No caso de movimento unidimensional, o trabalho feito pela força f para deslocar uma partícula por pequeno deslocamento Δx é dado por

$$\Delta W = f \Delta x.$$

Podemos generalizar esta definição para o caso tridimensional. Consideramos uma partícula sob a influência de uma força $\vec{f}$. Se esta força desloca a partícula na direção $\Delta\vec{r}$, então, o trabalho feito pela força é

$$\Delta W = \vec{f} \cdot \Delta\vec{r}.$$

Isto porque, se

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

e

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \\ \Delta r_3 \end{pmatrix},$$

então, na direção de cada componente, o trabalho fica

$$\Delta W_i = f_i \Delta r_i,$$

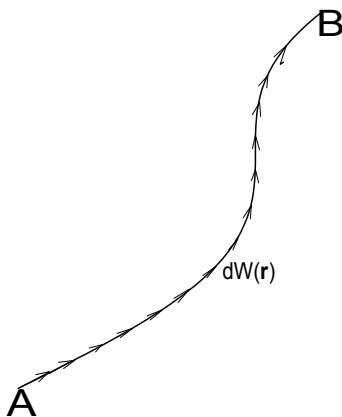
e considerando o trabalho é aditivo, temos

$$\begin{aligned}\Delta W &= \sum_{i=1}^3 \Delta W_i \\ &= \sum_{i=1}^3 f_i \Delta r_i = \vec{f} \cdot \Delta \vec{r}.\end{aligned}$$

Suponha que a força $\vec{f}$ dependa em $\vec{r}$, i.e., $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$ e a partícula seja deslocada do ponto $\vec{r}_A$ ao ponto $\vec{r}_B$ ao longo a uma trajetória (uma curva no espaço) C . O trabalho total feito pela força é a soma dos trabalhos dW correspondentes aos deslocamentos infinitesimais $d\vec{r}$ da partícula ao longo a essa curva. Escrevemos esta soma ao longo a curva C por

$$W_{A \rightarrow B} = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}), \quad (19.1)$$

onde a integral é feita ao longo ao caminho C .



A integral Eq.(19.1) pode ser escrita como

$$W_{A \rightarrow B} = \int_C (dx f_x(x, y, z) + dy f_y(x, y, z) + dz f_z(x, y, z)), \quad (19.2)$$

onde f_x é o componente x do vetor força. A integral acima NÃO pode ser confundida como a soma das três integrais independentes,

$$W_{A \rightarrow B} \neq \int dx f_x(x, y, z) + \int dy f_y(x, y, z) + \int dz f_z(x, y, z).$$

Isto porque, os deslocamentos dx, dy e dz não são independentes mas tem que estar na trajetória C . Se quiser separar os 3 termos, devemos escrever

$$W_{A \rightarrow B} = \int dx f_x(x, y(x), z(x)) + \int dy f_y(x(y), y, z(y)) + \int dz f_z(x(z), y(z), z),$$

onde

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}, \begin{cases} x = x(y) \\ z = z(y) \end{cases}, \begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \end{cases}$$

representam a mesma curva, C .

Uma forma mais conveniente é expressar a curva C no espaço tridimensional por

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \{t_A \leq t \leq t_B\}$$

onde t é o parametro. Devemos ter

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_A) &= \vec{r}_A, \\ \vec{r}(t_B) &= \vec{r}_B. \end{aligned}$$

Em outras paravras, a curva C é especificada pelas 3 funções $x(t), y(t)$ e $z(t)$ com

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \{t_A \leq t \leq t_B\}.$$

Desta forma, as variações dx, dy e dz são espessas por

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx}{dt} dt, \\ dy &= \frac{dy}{dt} dt, \\ dz &= \frac{dz}{dt} dt. \end{aligned}$$

A Eq.(19.2) fica

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B} &= \int_{t_A}^{t_B} dt \left(\frac{dx}{dt} f_x(x, y, z) + \frac{dy}{dt} f_y(x, y, z) + \frac{dz}{dt} f_z(x, y, z) \right) \quad (19.3) \\ &= \int_{t_A}^{t_B} dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \right) \end{aligned}$$

Em geral, o valor da integral Eq.(19.3) depende do caminho, ou seja da trajetória da partícula. Por exemplo, se

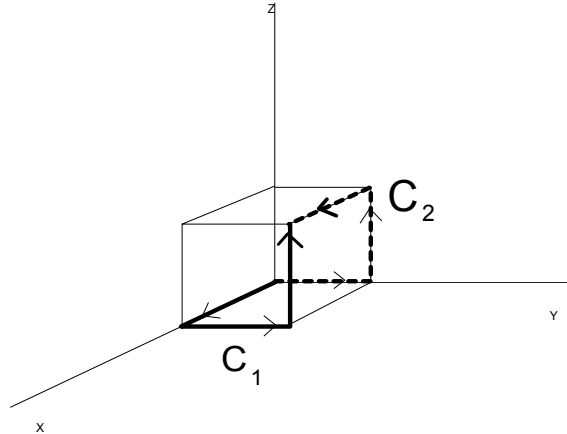
$$\begin{aligned}f_x(\vec{r}) &= z, \\f_y(\vec{r}) &= x, \\f_z(\vec{r}) &= y,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{r}_A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vamos calcular a integral ao longo ao cubo,

$$C_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Neste caso, a integral fica decomposta em três partes,

$$\begin{aligned}W_{A \rightarrow B}(C_1) &= \int_0^1 dx f_x(x, 0, 0) + \int_0^1 dz f_z(1, 0, z) + \int_0^1 dy f_y(1, y, 1) \\ &= \int_0^1 dy = 1.\end{aligned}$$

Por outro lado, se integramos ao longo ao caminho C_2 ,

$$C_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

temos

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(C_2) &= \int_0^1 dy f_y(0, y, 0) + \int_0^1 dz f_z(0, 1, z) + \int_0^1 dx f_x(x, 1, 1) \\ &= \int_0^1 dz + \int_0^1 dx = 2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$W_{A \rightarrow B}(C_1) \neq W_{A \rightarrow B}(C_2).$$

Por outro lado, se

$$\begin{aligned} f_x(\vec{r}) &= x, \\ f_y(\vec{r}) &= y, \\ f_z(\vec{r}) &= z, \end{aligned} \tag{19.4}$$

independentemente de caminho, vemos

$$W_{A \rightarrow B}(C) = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy + \int_0^1 z dz = \frac{3}{2}.$$

Um outro exemplo da força que a integral Eq.(19.2) seja independente de caminho é

$$\begin{aligned} f_x &= 2x + y + z \\ f_y &= 2y + x + z \\ f_z &= 2z + x + y. \end{aligned} \tag{19.5}$$

Exercício: Calcule as integrais $W_{A \rightarrow B}(C_1)$ e $W_{A \rightarrow B}(C_2)$ no caso acima.

Podemos perguntar em que caso a integral do ponto A ao ponto B se torna independente de caminho. No caso do exemplo da Eq.(19.4), temos

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = dx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} x^2 \right) + dy \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) + dz \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} z^2 \right)$$

Se colocamos

$$F = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) ,$$

então podemos escrever

$$\begin{aligned} f_x dx + f_y dy + f_z dz &= dx \left(\frac{\partial}{\partial x} F \right) + dy \left(\frac{\partial}{\partial y} F \right) + dz \left(\frac{\partial}{\partial z} F \right) \\ &= d\vec{r} \cdot \nabla F. \end{aligned}$$

Já vimos que

$$d\vec{r} \cdot \nabla F = dF,$$

onde

$$dF = F(\vec{r} + d\vec{r}) - F(\vec{r}).$$

Desta forma, para a Eq.(19.4), podemos escrever

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(C) &= \int_A^B (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \\ &= \int_A^B dF. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_A^B dF &= \lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \sum_i (F(\vec{r}_{i+1}) - F(\vec{r}_i)) \\ &= \lim_{\substack{\Delta \vec{r} \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left\{ \begin{array}{c} F(\vec{r}_1) - F(\vec{r}_A) + \\ + F(\vec{r}_2) - F(\vec{r}_1) \\ + F(\vec{r}_3) - F(\vec{r}_2) \\ \vdots \\ + F(\vec{r}_B) - F(\vec{r}_{n-1}) \end{array} \right\} = F(\vec{r}_B) - F(\vec{r}_A). \quad (19.6) \end{aligned}$$

onde $\vec{r}_i = \vec{r}_{i-1} + \Delta \vec{r}$. A equação acima mostra que o trabalho feito pela força é a diferença dos valores da função $F(\vec{r})$ nos pontos final e inicial, independentemente do caminho que passa no meio.

Exercício: No caso do exemplo da força dada pela Eq.(19.5), descubra a razão pela qual porque o trabalho não depende do caminho. Encontre a expressão de $F(\vec{r})$ analoga da discussão acima.

Os exemplos acima mostra que se existe uma função da posição $F(\vec{r})$ e o vetor força seja escrita como o gradiente desta função,

$$\vec{f} = \nabla F(\vec{r}), \quad (19.7)$$

então, o trabalho feito pela força fica

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow B}(C) &= \int_C d\vec{r} \cdot \vec{f} \\ &= \int_C d\vec{r} \cdot \nabla F \\ &= \int_A^B dF \\ &= F(\vec{r}_B) - F(\vec{r}_A), \end{aligned} \quad (19.8)$$

isto é, a diferença dos valores da função F nos pontos final e inicial, independentemente do caminho no meio. Em resumo, quando a força é dada pela Eq(19.7), o trabalho feito pela força para deslocar a partícula de um ponto inicial a outro ponto final não depende de como chegar no ponto final. Neste caso, a força é chamada a *força conservativa*.

Para uma força conservativa, por conveniência, introduzimos a função negativa da função F

$$V(\vec{r}) \equiv -F(\vec{r}),$$

e chamamos de energia potencial, ou simplesmente, o potencial. A força é dada pela negativa do gradiente do potencial,

$$\vec{f} = -\nabla V(\vec{r}). \quad (19.9)$$

O razão deste sinal vem do seguinte raciocínio. Vamos considerar o trabalho feito pela força para mover a partícula por um deslocamento infinitesimal $d\vec{r}$. Temos

$$\begin{aligned} dW &= \vec{f} \cdot d\vec{r} \\ &= -d\vec{r} \cdot \nabla V. \end{aligned}$$

Mas

$$d\vec{r} \cdot \nabla V = V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = dV,$$

e, portanto,

$$dW = -dV,$$

ou

$$dW + dV = 0.$$

Isto é, a soma das variações da energias, uma é do trabalho feito pela força sobre a partícula, e outra, a energia potencial da partícula, é sempre nula. Podemos considerar a relação acima como a energia do trabalho feito pela força é compensado como a diminuição da energia potencial. Ou seja, a energia potencial que “*paga o preço*” do trabalho. Como veremos abaixo, para o movimento de uma partícula, o trabalho feito pela força é utilizada para aumentar a energia cinética da partícula. Assim, para o movimento de uma partícula sob a força conservativa, vale a seguinte relação.

$$dT = dW = -dV. \quad (19.10)$$

Exercício: Calcule a integral

$$W_C = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r})$$

para os seguintes casos:

1.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} ax \\ by \\ cz \end{pmatrix},$$
$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

onde a, b, c são constantes.

2. mesma $\vec{f}$ acima, mas

$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Exercício: A força acima é uma força conservativa? Se for, prove.

Exercício: Analize os seguintes casos se a força é conservativa ou não.

1.

$$\vec{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{\sqrt{r^2 + a^2}},$$

2.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x^2 + yz \\ y^2 + xz \\ z^2 + xy \end{pmatrix},$$

3.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}.$$

20. Análise vetorial II

Como o operador $\vec{\nabla}$ tem a estrutura vetorial, podemos considerar as seguintes operações para uma função vetorial, $\vec{f}(\vec{r})$, correspondente ao produto escalar e produto vetorial, respectivamente.

1. Divergência

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} f_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{aligned}$$

2. Rotacional

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{f} &\equiv \left(\vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\vec{e}_1 f_x + \vec{e}_2 f_y + \vec{e}_3 f_z) \\ &= \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{e}_1 + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) \vec{e}_2 + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos verificar facilmente que para uma função vetorial $\vec{f}$ regular,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0, \quad (20.1)$$

e para uma função escalar $f(x, y, z)$,

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (20.2)$$

As propriedades acima são análogas a dos vetores normais,

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0,$$

e

$$\vec{a} \times (\vec{a} f) = 0.$$

Exercise 20.1. Prove as Eqs.(20.1) e (20.2).

A divergência de gradiente, $\nabla \cdot (\nabla f)$ fica escrita como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla f) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \\ \partial f / \partial z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{pmatrix} f \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right] f \\ &\equiv \nabla^2 f \end{aligned}$$

e o operador diferencial (de segunda ordem) ∇^2 é chamado Laplaciano.

Valem as seguintes fórmulas em relação a expressões que envolve o operador $\vec{\nabla}$.

1.

$$\nabla^2 (\phi \psi) = \phi \nabla^2 \psi + 2 (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) + \psi \nabla^2 \phi,$$

2.

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}),$$

3.

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} - (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \cdot \vec{a},$$

4.

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) \vec{a} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}.$$

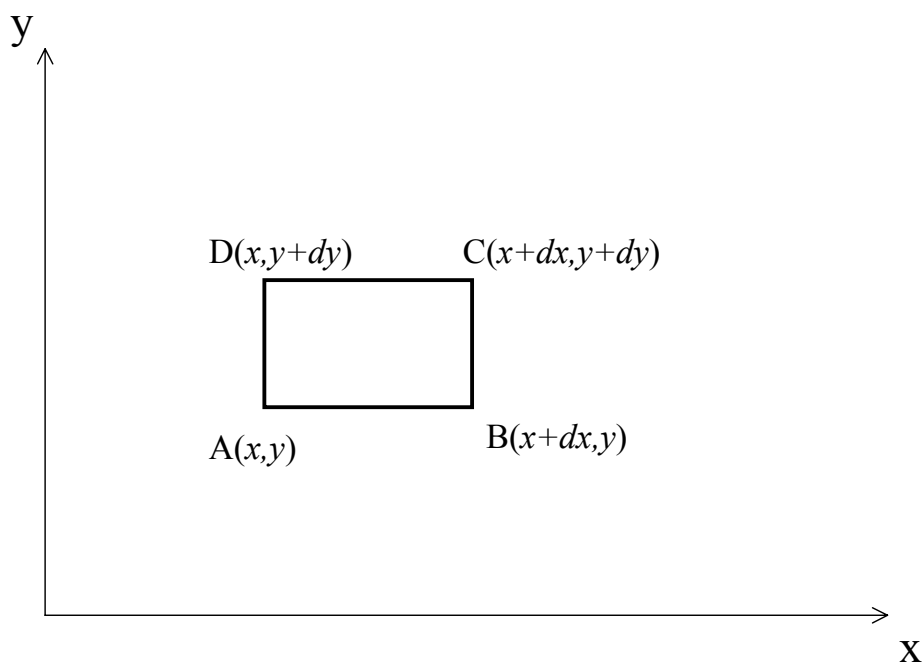
Exercise 20.2. Verifique as fórmulas acima.

20.1. Teorema de Stokes

Vamos considerar uma integral de linha tipo

$$I_C = \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f},$$

onde C é uma curva fechada. Para lembrar que a curva C é fechada, usamos o simbolo, $\oint$. Como um caso particular desta integral, vamos escolher a curva C como uma pequena (infinitesimal) retangulo, no plano $(x-y)$ (veja a figura abaixo).



Neste caso, podemos escrever a integral por

$$I_C = I_{A \rightarrow B} + I_{B \rightarrow C} + I_{C \rightarrow D} + I_{D \rightarrow C},$$

onde

$$\begin{aligned} I_{A \rightarrow B} &= \int_x^{x+dx} f_x(x', y) dx', \\ I_{B \rightarrow C} &= \int_y^{y+dy} f_y(x + dx, y') dy', \\ I_{C \rightarrow D} &= \int_{x+dx}^x f_x(x', y + dy) dx', \\ I_{D \rightarrow A} &= \int_{y+dy}^y f_y(x, y') dy'. \end{aligned}$$

Considerando que dx e dy são infinitesimais, temos até a segunda ordem,

$$\begin{aligned} I_{A \rightarrow B} &= f_x(x, y) dx + \frac{1}{2} \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x} (dx)^2 + \dots, \\ I_{B \rightarrow C} &= f_y(x, y) dy + \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y} (dy)^2 + \dots, \\ I_{C \rightarrow D} &= -f_x(x, y) dx - \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} dx dy - \frac{1}{2} \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial x} (dy)^2 + \dots, \\ I_{D \rightarrow A} &= -f_y(x, y) dy - \frac{1}{2} \frac{\partial f_y(x, y)}{\partial y} (dy)^2 + \dots, \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_C = \left(\frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

Note que

$$\left(\frac{\partial f_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(x, y)}{\partial y} \right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{f} \right)_z,$$

e introduzindo um vetor normal ao plano $(x - y)$ com o modulo $dx dy$,

$$d\vec{\sigma} = dx dy \vec{e}_3,$$

podemos escrever

$$I_C = d\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{f} \right).$$

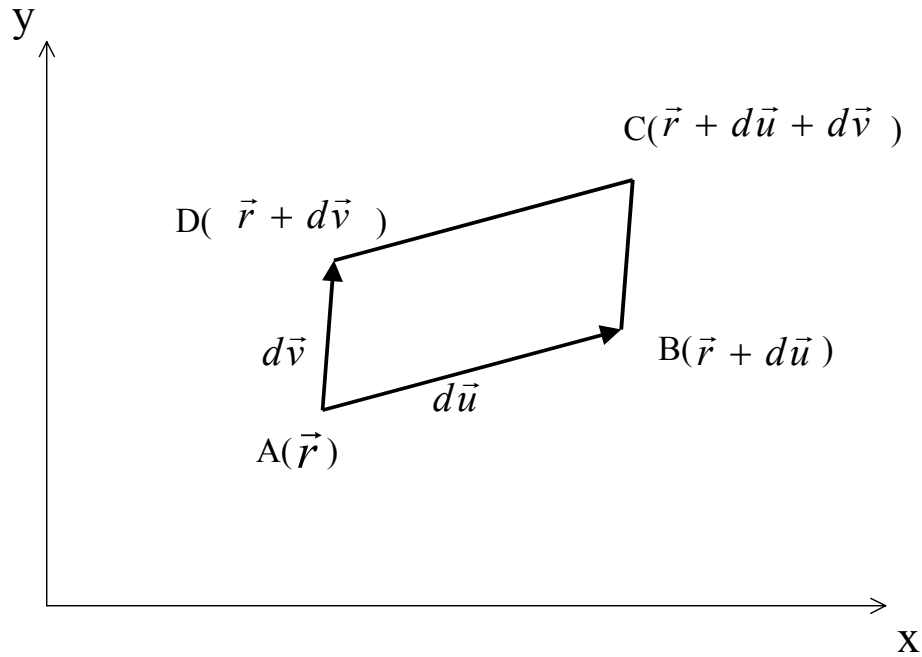


Figure 20.1:

A expressão acima mostra que para uma área retangular infinitesimal, temos

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f} = d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}).$$

Podemos mostrar que este resultado vale, não só para um retângulo, mas também para um losangulo, como na figura abaixo. Podemos provar que

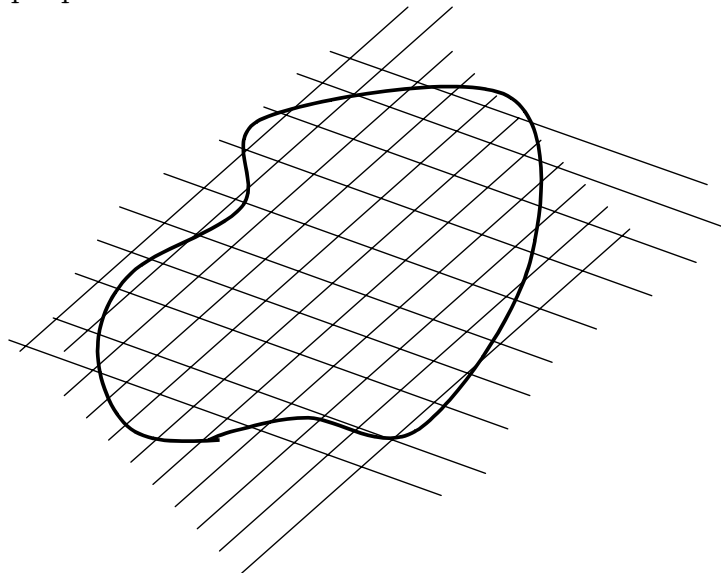
$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f} = d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}), \quad (20.3)$$

onde

$$d\vec{\sigma} = d\vec{u} \times d\vec{v}. \quad (20.4)$$

Exercise 20.3. Mostre que vale a Eq.(20.3) para um losangulo, com a definição do elemento da área, Eq.(20.4).

Agora, vamos pensar um área Ω qualquer e o contorno desta área C . Dividimos esta área Ω em pequenas plaquetas. Denotamos o contorno e o elemento de área da plaqueta i por C_i e $d\vec{\sigma}_i$, respectivamente. A soma das integrais Eq.(20.3) para todas as plaquetas fica



$$\sum_{\text{plaquetas}} \oint_{C_i} d\vec{r} \cdot \vec{f} = \sum_{\text{plaquetas}} d\vec{\sigma}_i \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}). \quad (20.5)$$

Note que se duas plaquetas possuem um trecho comum, as integrais sobre deste trecho cancelam entre as duas plaquetas, pois as direções das integrais são opostas. Desta forma, a soma das integrais de linhas das todas as plaquetas se cancelam dentro da área Ω , exceto para os trechos pertencente a apenas uma plaqueta, ou seja, o contorno da área Ω . Assim, o lado esquerdo da expressão acima pode ser escrita como a integral de linha ao longo ao contorno C da área.

$$\sum_{\text{plaquetas}} \oint_{C_i} d\vec{r} \cdot \vec{f} \longrightarrow \oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f}. \quad (20.6)$$

Por outro lado, o lado direito da Eq.(20.5) se converge para a integral sobre a área total Ω ,

$$\sum_{\text{plaquetas}} d\vec{\sigma}_i \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \longrightarrow \iint_{\Omega} d\vec{\sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{f}). \quad (20.7)$$

Temos portanto,

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f} = \iint_{\Omega} d\vec{\sigma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{f} \right). \quad (20.8)$$

A Eq.(20.8) é chamado o teorema de Stokes. Aqui, mostramos que o teorema no caso de um área Ω num plano, mas é facil de demostrar que o teorema vale mesmo para qualquer superfície curvada tridimensional e seu contorno fechado C .

Exercise 20.4. *Argumete que a Eq.(20.8) vale também para uma superfície curvada.*

21. A força Conservativa

As Eqs.(19.7) e (19.8) mostram que quando a força é derivada de um potencial pela sua gradiente, o trabalho feito pela força não depende do caminho, ou seja a força é conservativa. Inversamente, podemos postrar que se a força é conservativa (i.e., o trabalho não depende do caminho), deve existir uma função potencial $V(\vec{r})$, tal que a força é obtida como derivada deste potencial.

Seja $\vec{f}$ a força conservativa. Para os dois pontos $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$ arbitrários, consideramos os dois caminhos quaisquer distintas, digamos $C_1(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)$ e $C_2(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)$, que liguem estes dois pontos. Sendo $\vec{f}$ conservativa, temos

$$\int_{C_1(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)} d\vec{r} \cdot \vec{f} = \int_{C_2(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)} d\vec{r} \cdot \vec{f}.$$

Mas, se invertemos o ponto inicial e o ponto final, temos

$$\int_{C_2(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)} d\vec{r} \cdot \vec{f} = - \int_{C_2(\vec{r}_f \rightarrow \vec{r}_i)} d\vec{r} \cdot \vec{f}$$

pois o deslocamento tem o sinal contrário. Temos então,

$$\int_{C_1(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)} d\vec{r} \cdot \vec{f} = - \int_{C_2(\vec{r}_f \rightarrow \vec{r}_i)} d\vec{r} \cdot \vec{f},$$

ou

$$\int_{C_1(\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_f)} d\vec{r} \cdot \vec{f} + \int_{C_2(\vec{r}_f \rightarrow \vec{r}_i)} d\vec{r} \cdot \vec{f} = 0. \quad (21.1)$$

Esta equação mostra que, se $\vec{f}$ é uma força conservativa, o trabalho feito da força indo de um ponto $\vec{r}_i$ até um outro ponto $\vec{r}_f$ alongo a um camilho qualquer C_1

e volta de novo do ponto $\vec{r}_f$ ao ponto inicial $\vec{r}_i$ ao longo a uma outra caminho C_2 qualquer é exatamente nula. Ou seja, o trabalho feito da força ao longo ao caminho fechado conectando dos ponto $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$ é nulo. Mas já que tanto os dois pontos $\vec{r}_i$ e $\vec{r}_f$ como os caminhos C_1 e C_2 são arbitrários, concluímos que para uma força conservativa, o trabalho feito ao longo a qualquer trajetória fechada seria nulo.

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{f} = 0,$$

para qualquer curva fechada, C . Agora, usando o teorema de Stokes, a conclusão acima pode ser dita como

$$\iint_{\Omega} d\vec{\sigma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{f} \right) = 0,$$

para *qualquer* área Ω . A única possibilidade disto é que o integrando é identicamente nulo. Temos portanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) \equiv 0, \quad \forall \vec{r}. \quad (21.2)$$

Assim, mostramos que o rotacional de uma força conservativa é identicamente nulo. Agora, podemos mostrar que se o rotacional de $\vec{f}$ é identicamente nulo, sempre existe uma função $F(\vec{r})$ tal que

$$\vec{f} = \vec{\nabla} F.$$

Exercise 21.1. Prove que para uma força $\vec{f}$ tal que

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{r}) \equiv 0,$$

então existe uma função escalar $V(\vec{r})$ tal que

$$\vec{f} = -\vec{\nabla} V.$$

22. Conservação da Energia

Seja $\vec{f}$ a força conservativa, ou seja, o trabalho feito pela esta força não depende do caminho. Começamos com a lei de Newton,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}. \quad (22.1)$$

Sendo $\vec{f}$ a força conservativa, vale a Eq.(19.9). Isto é, deve existir a função potencial $V(\vec{r})$ tal que

$$\vec{f} = -\nabla V(\vec{r}). \quad (22.2)$$

A Eq.(22.1) é uma equação vetorial e, portanto, um conjunto de equações acopladas. Podemos construir uma equação escalar, tomando o produto escalar de dois lados com $d\vec{r}/dt = \vec{v}$,

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f} \right). \quad (22.3)$$

Usando a propriedade de derivada de produto escalar, o lado esquerdo da Eq.(22.3) pode ser escrito por

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right). \quad (22.4)$$

Por outro lado, usando a Eq.(22.2), o lado direito da Eq.(22.3) fica

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{f} \right) &= - \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \nabla V \right) \\ &= - \frac{d}{dt} V(\vec{r}), \end{aligned} \quad (22.5)$$

onde utilizamos a propriedade Eq.(14.6) da derivada para a função $V(\vec{r})$.

Substituindo as Eqs.(??) e (22.5) na Eq.(22.3) temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right) = - \frac{d}{dt} V(\vec{r}),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + V(\vec{r}) \right) = 0.$$

Definindo a energia cinética T por

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2,$$

temos

$$\frac{d}{dt} (T + V) = 0. \quad (22.6)$$

Quando integramos em t a equação acima, temos

$$T + V = E, \quad (22.7a)$$

que é a lei da conservação de energia para o movimento de uma partícula sob a ação de uma força conservativa.

Uma força central é uma força conservativa. Isto porque, se

$$\vec{f} = f(r) \vec{e}_r,$$

então, podemos escrever

$$\vec{f} = -\nabla V(r),$$

onde

$$V(r) = - \int^r f(r) dr.$$

Exercício: Confira a afirmação acima.

Assim, a lei da conservação de energia no caso de uma força central fica

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + V(r) = E, \quad (22.8)$$

re-obtendo a Eq.(18.47).

Exercício: Prove que se o deslocamento $d\vec{r}$ for tangencial (na direção de $\vec{e}_\theta$) então o trabalho feito pela força central é nula.

23. Importância da Função Hamiltoniana na Mecânica - Equação de Hamilton

O ponto fundamental da Mecânica é expressar a função Hamiltoniana do sistema em termos de variáveis apropriadas. Para um sistema conservativo, isto é, se as todas as forças atuam para o sistema sejam conservativas, podemos obter as equações de movimentos para todas as variáveis partindo da Hamiltoniana do sistema. Para ilustrar, vamos considerar uma partícula com a massa m sob a ação de uma força conservada. Neste caso, a Hamiltoniana é dada por

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + V(\vec{r}), \quad (23.1)$$

onde $\vec{p}$ é o momento linear da partícula e $V(\vec{r})$ a energia potencial da posição $\vec{r}$. Consideramos em geral a Hamiltoniana de um sistema como função de momento $\vec{p}$ e as coordenadas. Neste caso, temos

$$H = H(x, y, z, p_x, p_y, p_z).$$

Se a Hamiltoniana é dada nesta forma, podemos calcular explicitamente as derivadas para cada um destas variáveis,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}, \frac{\partial H}{\partial p_z}. \end{aligned}$$

Note que da EQ.(23.1), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_x} &= \frac{1}{m}p_x. \end{aligned}$$

Comparando com a definição de momento $p_x = m\dot{x}$, e a equação de Newton para o componente x , temos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \tag{23.2}$$

Analogamente, temos para outros componentes,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \end{aligned} \tag{23.3}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_z}, \\ \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \tag{23.4}$$

Note que as equações (23.2,23.3,23.4) tem a mesma forma. Isto é, se denotamos as variáveis x, y, z genericamente por

$$\{q_i, \ i = 1, 2, 3\}$$

isto é,

$$\begin{aligned} q_1 &= x, \\ q_2 &= y, \\ q_3 &= z, \end{aligned}$$

e os momentos por

$$\{p_i, \ i = 1, 2, 3\},$$

e escrevendo a Hamiltoniana na forma

$$H = H(q_1, q_2, q_3; p_1, p_2, p_3),$$

as equações, (23.2,23.3,23.4) podem ser expressas por

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \quad (23.5)$$

Estas equações são conhecidas pelo nome de *Equação de Hamilton*.

Quando estendemos o sistema cuja Hamiltoniana é dada pela EQ.(31.9), as equações de movimento ficam expressas novamente pela equação de Hamilton,

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, 6, \quad (23.6)$$

onde, por exemplo,

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1, \quad q_2 = y_1, \quad q_3 = z_1, \\ q_4 &= x_2, \quad q_5 = y_2, \quad q_6 = z_2, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{1,x}, \quad p_2 = p_{1,y}, \quad p_3 = p_{1,z}, \\ p_4 &= p_{2,x}, \quad p_5 = p_{2,y}, \quad p_6 = p_{2,z}. \end{aligned}$$

Exercício: Verifique que as equações (23.6) são equivalentes com as equações de movimentos de Newton, junto com a definição de momentos.

A equação de Hamilton é equivalente a equação de Newton para um sistema conservativo, mas tem uma vantagem no sentido de que todas as equações de movimento são deduzidas a partir de uma quantidade escalar, a Hamiltoniana. Em outras palavras, para um sistema conservativo, *a Hamiltoniana contém toda informação sobre a dinâmica do sistema.*

23.1. Mudança de Variáveis numa Hamiltoniana e Momento Generalizado - Pêndulo Esférico

O que acontece se introduzimos uma mudança de variáveis, por exemplo, em vez de um conjunto de coordenadas Cartesianas, utilizamos o sistema de coordenadas esféricas. Para fixar a idéia, vamos considerar o problema de pêndulo esférico. Um pêndulo esférico é um pêndulo cujo movimento não é limitado num plano. Isto é, uma massa m pendurada por um barra sem massa com comprimento l , cujo a outra extremidade está fixo num teto, permitindo qualquer movimento angular.

Escolhendo um sistema de coordenadas Cartesianas, onde escolhendo a direção vertical para baixo como o eixo z , podemos escrever a Hamiltoniana como

$$H = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - mgz, \quad (23.7)$$

pois

$$V = -mgz$$

é a energia potencial. O sinal é negativo, pois na convenção que escolhemos (a direção do eixo z para baixo), para $z > 0$ obviamente a energia potencial gravitacional reduz.

As equações de movimentos de Newton para as coordenadas x, y e z são análogas as Eqs.(8.133) e (8.134), mas aqui, temos que lembrar que além do fato de que o eixo z representa a direção vertical, existem os componentes da força para x e y também.

Vamos denotar o vetor de projeção do $\vec{r}$ no plano $x - y$ por $\vec{\rho}$. Temos

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y, \\ \rho &= |\vec{\rho}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

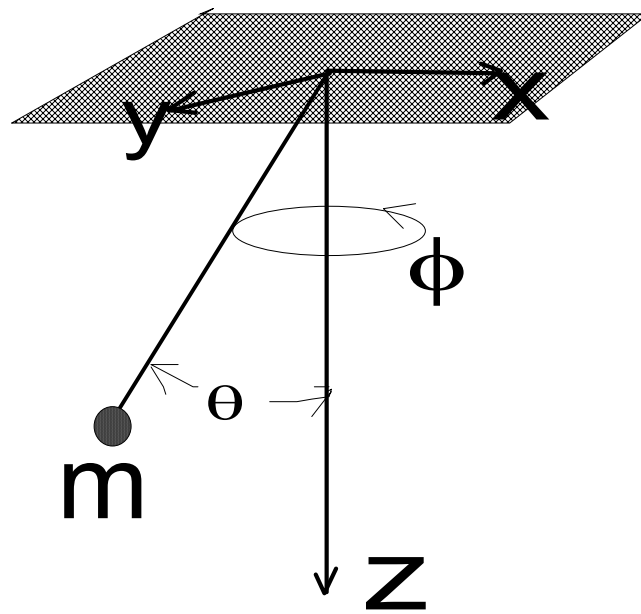


Figure 23.1: Fig.33 Pendulo esferico

A equação de Newton para o vetor $\vec{\rho}$ fica análoga a Eq.(8.133),

$$m \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = -T \sin \theta \frac{\vec{\rho}}{\rho}, \quad (23.8)$$

onde T é a tensão da barra que atua na massa. Em termos de componentes, temos

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -T \sin \theta \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (23.9)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -T \sin \theta \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (23.10)$$

A equação de movimento na direção z fica (lembre novamente que a direção do eixo z aponta para baixo),

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -T \cos \theta + mg. \quad (23.11)$$

As coordenadas x, y e z não são independentes. O fato de que o comprimento do braço do pêndulo é fixo ($= l$), naturalmente existe um vínculo,

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \quad (23.12)$$

Esta equação pode ser utilizada para eliminar o incognito T , como foi abordado no problema de pêndulo. O procedimento será,

1. Construir $x \times \text{Eq.}(23.10) - y \times \text{Eq.}(23.9)$, o que elimina T no lado direito. Temos

$$mx \frac{d^2 y}{dt^2} - my \frac{d^2 x}{dt^2} = 0. \quad (23.13)$$

2. Construir $x \times \text{Eq.}(23.9) - y \times \text{Eq.}(23.10)$. Com isto o lado direito fica

$$-T \rho \sin \theta,$$

$$\text{pois } x^2 + y^2 = \rho^2.$$

3. Construir $\rho \sin \theta \times \text{Eq.}(23.11) - \cos \theta \times (\text{o resultado do item acima})$, o que elimina T , tendo

$$m \rho \sin \theta \frac{d^2 z}{dt^2} - m \cos \theta \left(x \frac{d^2 x}{dt^2} + y \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = mg \rho \sin \theta \quad (23.14)$$

As Eqs.(23.13) e (23.14), junto com a equação de vínculo, Eq.(23.12) constituem um sistema fechado de equações para 3 incógnitas, x, y e z .

Se introduzimos o sistema de coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta \cos \phi, \\y &= l \sin \theta \sin \phi, \\z &= l \cos \theta,\end{aligned}$$

podemos expressar as três variáveis junto com o vínculo a Eq.(23.12) em termos de duas variáveis θ e ϕ . Temos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= l \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} - l \sin \theta \sin \phi \dot{\phi}, \\ \frac{dy}{dt} &= l \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} + l \sin \theta \cos \phi \dot{\phi}, \\ \frac{dz}{dt} &= -l \sin \theta \dot{\theta},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= l \cos \theta \cos \phi \ddot{\theta} - l \sin \theta \cos \phi \dot{\theta}^2 - 2l \cos \theta \sin \phi \dot{\theta} \dot{\phi} \\ &\quad - l \sin \theta \cos \phi \dot{\phi}^2 - l \sin \theta \sin \phi \ddot{\phi}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= l \cos \theta \sin \phi \ddot{\theta} - l \sin \theta \sin \phi \dot{\theta}^2 + 2l \cos \theta \cos \phi \dot{\theta} \dot{\phi} \\ &\quad - l \sin \theta \sin \phi \dot{\phi}^2 + l \sin \theta \cos \phi \ddot{\phi}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -l \sin \theta \ddot{\theta} - l \cos \theta \dot{\theta}^2.\end{aligned}$$

Assim, podemos substituir estas expressões nas Eqs.(23.13) e (23.14), teremos as equações de movimento para novas variáveis, θ e ϕ .

Exercício: Obtenha as equações de movimento para θ e ϕ .

Como vemos, a dedução de equações de movimento ficou bastante trabalhosa, em particular, quando o sistema possui um vínculo. Uma das grande vantagens da Equação de Hamilton reside de fato de que a força de vínculo (no exemplo acima de pêndulo esférico, a força de tensão T) não faz trabalho (o movimento é sempre perpendicular a força de vínculo), e portanto, não aparece na Hamiltoniana.

Se escrevemos a Hamiltoniana em termos de variáveis θ e ϕ , a parte do potencial fica

$$-mgz = -mgl \cos \theta,$$

e a parte da energia cinética fica

$$T = \frac{ml^2}{2} \left\{ \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right\}. \quad (23.15)$$

Assim, a Hamiltoniana do pêndulo nestas variáveis fica

$$H = \frac{ml^2}{2} \left\{ \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right\} - mgl \cos \theta. \quad (23.16)$$

Queremos aplicar a equação de Hamilton para as variáveis θ e ϕ . Mas existe um problema. A expressão acima, como uma expressão de energia total de um pêndulo, é correta. Entretanto, não podemos aplicar diretamente a equação de Hamilton, pois H não está expressa em termos de variáveis e seus *momentos*. Precisamos expressar a Hamiltoniana em termos de θ e ϕ e seus momentos, p_θ e p_ϕ .

No caso de uma coordenada Cartesiana, digamos x , o momento linear é definido por

$$p_x = m\dot{x}. \quad (23.17)$$

Mas esta não é uma relação universal. Quando se trata de uma variável *não Cartesiana*, precisamos uma nova definição de momento. Por exemplo, o que seria o momento p_θ correspondente a variável θ no sistema acima?

Para responder esta pergunta, vamos considerar como obter a relação Eq.(23.17) a partir da expressão da energia. Vemos logo que

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}.$$

Em analogia, podemos definir os momentos correspondentes a θ e ϕ a partir da expressão da energia cinética nestas variáveis, Eq.(23.15) por,

$$\begin{aligned} p_\theta &\equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \\ &= ml^2 \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (23.18)$$

e

$$\begin{aligned} p_\phi &\equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \\ &= ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (23.19)$$

Note que o momento p_ϕ é o componente z do momento angular,

$$L = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Podemos expressar $\dot{\phi}$ e $\dot{\theta}$ em termos de seus momentos. Temos

$$\dot{\phi} = \frac{1}{ml^2 \sin^2 \theta} p_\phi, \quad (23.20)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{ml^2} p_\theta. \quad (23.21)$$

Substituindo estas expressões na Eq.(23.16), temos

$$H = H(\theta, \phi; p_\theta, p_\phi) = \frac{1}{2ml^2} \left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} p_\phi^2 \right) - mgl \cos \theta. \quad (23.22)$$

Vamos escrever a equação de Hamilton. As equações são

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{1}{ml^2 \sin^2 \theta} p_\phi, \quad (23.23)$$

$$\dot{p}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0, \quad (23.24)$$

e

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{1}{ml^2} p_\theta, \quad (23.25)$$

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta + \frac{\cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta} p_\phi^2. \quad (23.26)$$

As Eqs.(23.23) e (23.25) são exatamente iguais a equações (23.20) e (23.21), respectivamente, assim, verificando a consistência da definição de momento, Eqs.(23.18) e (23.19).

Podemos verificar que as equações (23.24) e (23.26) são equivalentes a aquelas obtidas no Exercício acima.

Exercício: Verifica a afirmação acima.

Exercise 23.1. Definimos os vetores,

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &\equiv \frac{\vec{r}}{r}, \\ \vec{e}_\theta &\equiv \alpha \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta}, \\ \vec{e}_\phi &\equiv \beta \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \phi},\end{aligned}$$

onde (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas e α e β são constantes de normalização.

1. Determine α e β tal que $\vec{e}_\theta$ e $\vec{e}_\phi$ sejam normalizados.
2. Prove que os vetores $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ forma uma base ortonormal, e um sistema destrogiro na ordem acima.
3. Expresse o vetor velocidade

$$\frac{d\vec{r}}{dt}$$

nesta base.

4. Expresse a aceleração

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

nesta base.

24. Simetria e Lei de Conservação

Da Eq.(23.24), vemos logo que

$$p_\phi = \text{const.}$$

Isto é, o momento correspondente ao ângulo ϕ é uma constante de movimento. Por outro lado, da Eq.(23.23), temos

$$p_\phi = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

mostra que este é o momento angular em torno do eixo z . Assim, a conservação do componente z do momento angular é a consequência imediata do fato de que a Hamiltoniana não depende de ϕ !

A não dependência em ϕ da Hamiltoniana é a mesma coisa de dizer que a escolha da origem da variável ϕ não influencia nenhum para a Hamiltoniana. Isto é, a Hamiltoniana permanece exatamente mesma quando deslocamos a variável ϕ

$$\phi \rightarrow \phi + \phi_0, \quad (24.1)$$

onde ϕ_0 é uma constante arbitrário. A equação acima corresponde a uma rotação do sistema. Assim, podemos dizer que o sistema é mesmo se rodamos um ângulo arbitrário em torno do eixo z .

A consideração acima leva para seguinte conclusão:

- O sistema de pêndulo esférico tem a simetria rotacional em torno do eixo z e, portanto, o momento p_ϕ correspondente ao ângulo azimutal ϕ é uma constante do movimento.

A conclusão acima é extremamente importante, e teremos oportunidades de rever o assunto mais adiante.

25. Problemas

1. Vamos considerar o movimento de um sistema expressa pela seguinte equação de movimento.

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \vec{r}.$$

Desenhe um exemplo do sistema que obedece a equação acima. Resolva as equações de movimento e discuta as possíveis movimento do sistema.

2. Uma partícula se move com a velocidade variada ao longo a uma curva qualquer num plano $(x - y)$. A posição da partícula é especificada em termos da distância percorrida ao longo a curva a partir do ponto inicial. Seja $\vec{\sigma}$ o vetor unitário tangente a curva no ponto s , na direção em que s aumenta.

1. Mostre que

$$\frac{d\vec{\sigma}}{ds} = \frac{\vec{n}_\perp}{R(s)},$$

onde $\vec{n}_\perp$ é o vetor unitário perpendicular a curva no ponto s e $R(s)$ é o raio de curvatura da curva²⁴.

2. Mostre que a velocidade e aceleração da partícula são expressas como

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{ds}{dt} \vec{\sigma}, \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{\sigma} + \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \vec{n}_\perp. \end{aligned}$$

3. Uma bala é lançada na direção $\vec{n}$, com a velocidade inicial v_0 . Existe o vento homogêneo na direção $\vec{m}$, com a velocidade W . A força de atrito do ar é proporcional a velocidade relativa entre o ar e a bala, com o coeficiente b .

1. Descreva a equação de movimento.
2. Calcule a posição (x, y) onde a bala cai ao chão em primeira aproximação em b . Escolhe a posição inicial como a origem.

²⁴O raio de curvatura é definido como a distância da interseção de duas retas normais a curva infinitesimalmente separadas.

4. Determine os quais das seguintes forças são conservativas.

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \begin{pmatrix} 6abz^3y - 20bx^3y^2 \\ 6abxz^3 - 10bx^4y \\ 18abxz^2y \end{pmatrix} \\ \vec{f} &= \begin{pmatrix} 18abyz^3 - 20bx^3y^2 \\ 18abxz^3 \\ 6abxyz^2 \end{pmatrix} \\ \vec{f} &= \begin{pmatrix} F(x) \\ G(y) \\ H(z) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

onde a base é $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$.

5. Determine o potencial para cada caso de seguintes forças se for conservativa.

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \begin{pmatrix} 2ax(x^3 + y^3) \\ 2ay(z^3 + y^3) + 3ay^2(x^2 + y^2) \\ 3az^2(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \\ \vec{f} &= -2ar \sin \theta \cos \phi \vec{e}_r - ar \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta + ar \sin \theta \sin \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{f} &= F(r) \vec{e}_r \\ \vec{f} &= (\vec{r} \times \vec{a}) F(\vec{a} \cdot \vec{r}),\end{aligned}$$

onde, $\vec{a}$ é um vetor constante arbitrário, e $F(s)$ é uma função de s , escalar.

6. Calcule a força correspondente a seguintes potenciais.

$$\begin{aligned}V(\vec{r}) &= axy^2z^3, \\ V(\vec{r}) &= \frac{1}{2} \vec{r}^T A \vec{r} + \vec{b}^T \vec{r},\end{aligned}$$

onde A é uma matriz constante simétrica e $\vec{b}$ é um vetor constante.

7. Uma planeta está bem próximo da sua orbita esferica. Mostre que a distância radial desta planeta do Sol oscila como um oscilador harmonico. Mostre também que a frequência desta oscilação é igual a frequência de revolução dela em torno do Sol.

8. Uma partícula de massa m se move sob a ação da força cuja potencial é dado por

$$V(\vec{r}) = Kr^4, \quad K > 0.$$

Determine a energia e o momento angular para quais a órbita da partícula seja círculo de raio a . Quando esta partícula tiver uma energia ligeiramente superior que o valor determinado acima, discuta o movimento da partícula e determine o período da oscilação radial.

9. Discuta qualitativamente os possíveis movimentos de uma partícula sob a ação da força cuja potencial é

$$V(r) = K \frac{1}{r^3},$$

de acordo com vários valores de K e o momento angular L .

10. Faça o mesmo da questão anterior para o potencial,

$$V(r) = K \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

onde $\mu > 0$ é uma constante. O potencial desta forma é chamado de potencial de Yukawa e foi introduzido para explicar a força nuclear.

11. Uma partícula com a carga elétrica e num campo magnético $\vec{B}$ recebe a força

$$\vec{f} = e\vec{v} \times \vec{B},$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da partícula (a força de Lorentz). Um elétron foi injetado num campo magnético constante,

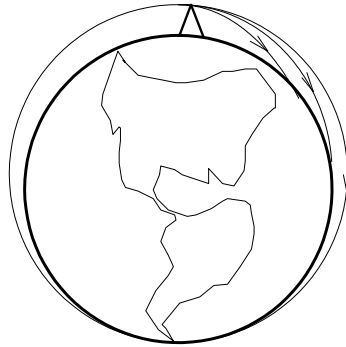
$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z,$$

com a velocidade inicial,

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}.$$

Obtenha a trajetória deste elétron.

12. Estime a massa da terra, supondo que a terra é esfericamente simétrica com o raio $R = 6,398km$. Use o valor da aceleração gravitacional na superfície da Terra $g = 980.665cm/sec^2$ e a constante gravitacional de Newton, $G = 6.672 \times 10^{-8}dyn cm^2 g^{-2}$. Calcule a densidade média da terra.
13. A figura abaixo é a famosa explicação pelo Newton, mostrando a equivalência entre a trajetória de uma satellite e a trajetória balística. Supondo que a Terra é uma esfera perfeita e não há atrito do ar, calcule a velocidade mínima de uma partícula para qual a partícula orbita em torno da terra quando lançada paralelamente a superfície da terra, da altura de $10,000m$ da superfície.



26. Força Gravitacional Newtoniana e Movimento Kepleriano

Vamos aplicar o método geral até aqui desenvolvido para resolver o caso de movimento Kepler como um exemplo. Como já discutimos, no caso onde a massa do Sol é muito grande comparado com a de planeta, podemos considerar o Sol como ponto fixo, e a equação de movimento de uma planeta fica

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{M_{\odot} m}{r^2} \vec{e}_r,$$

onde G é a constante gravitacional de Newton, $M_{\odot}$ é a massa do Sol, m é a massa da planeta e

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

é o vetor unitário na direção de $\vec{r}$.

Este problema é o caso de força central e, portanto, valem

- Conservação de energia,
- Conservação de momento angular,
- Movimento planar.

Sendo o movimento planar, podemos escolher o plano $(x - y)$ como o plano de movimento. Utilizando as coordenadas polares neste plano, temos

1. Equação Radial:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{M_{\odot} m}{r^2} + \frac{L^2}{mr^3}, \quad (26.1)$$

2. Equação angular:

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L, \quad (26.2)$$

3. Conservação de Energia:

$$\frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2} \right) - G \frac{M_{\odot} m}{r} = E. \quad (26.3)$$

Na verdade, a Eq.(26.3) é a primeira integral da Eq.(26.1). Podemos escrever na forma

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + V_{eff}(r) = E, \quad (26.4)$$

onde

$$V_{eff}(r) = -G \frac{M_{\odot} m}{r} + \frac{L^2}{2m^2} \frac{1}{r^2}. \quad (26.5)$$

Resolvendo em relação a velocidade radial, temos

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + 2GM_{\odot} \frac{1}{r} - \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^2}}. \quad (26.6)$$

Os duas possibilidades de sinal $\pm$ mostram que existem duas possíveis movimentos relacionados com a inversão temporal. O sinal $+$ representa o movimento afastando da origem e o sinal $-$ representa o movimento aproximando para a origem.

Como discutimos anteriormente, os possíveis movimentos podem ser analisados graficamente comparando a energia E e a curva de potencial efetivo em função de r (ver a figura abaixo).

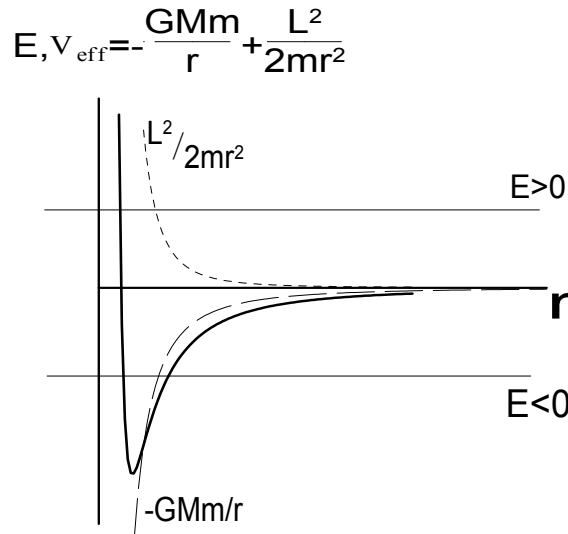


Fig. 24 Potencial efetivo e possíveis valores da energia

26.1. Movimento Circular

Na figura acima, note que sempre o mínimo do potencial efetivo para qualquer $L \neq 0$. Para um dado momento angular L , o mínimo do potencial efetivo é dado

por

$$r_0 = \frac{L^2}{GM_\odot m^2}, \quad (26.7)$$

$$E_{\min}(L) = -\frac{1}{2} \frac{(GM_\odot)^2 m^3}{L^2}. \quad (26.8)$$

Não há movimento física para

$$E < E_{\min}(L).$$

Para $E = E_{\min}$, temos sempre

$$\frac{dr}{dt} = 0,$$

ou seja a velocidade radial é nula. Diferente do caso unidimensional, a velocidade radial nula não significa que o objeto está parada. A velocidade tangencial não é nula. Assim, concluímos que para $E = E_{\min}$ o movimento é *circular*, com o raio r_0 . Neste caso, podemos expressar o valor de momento angular em termos de seu raio de movimento, $r = r_0$,

$$L = m\sqrt{GM_\odot r_0}.$$

No caso de movimento circular, a velocidade angular fica constante, dada por

$$\omega_{\text{circular}} = \frac{L}{mr_0^2} = \frac{\sqrt{GM_\odot r_0}}{r_0^2} = \sqrt{GM_\odot} \frac{1}{r_0^{3/2}},$$

que é equivalente a terceira lei de Kepler,

$$T^2 \propto r_0^3,$$

onde T é o período de revolução.

Exercise 26.1. Sabendo a distância média entre Sol-Terra (unidade astronômica) aproximadamente 149 milhões de km, estime a massa do Sol, usando $G = 6.672 \times 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$.

26.2. Estado Ligado

Para $E > E_{\min}(L)$, devemos separar dois casos,

$$\begin{aligned} a) \quad & E_{\min} < E < 0 \\ b) \quad & E \geq 0. \end{aligned}$$

Para o caso $a)$, o movimento é limitado, e os valores de r devem ficar dentro do intervalo,

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max},$$

onde $r_{\min}, r_{\max}$ são as raízes da equação,

$$E = V_{\text{eff}}(r),$$

e chamados de *ponto de retorno*. Temos

$$E = -GM_{\odot}m \frac{1}{r} + \frac{L^2}{2m} \frac{1}{r^2}.$$

Introduzindo

$$u = \frac{1}{r},$$

temos

$$u^2 - 2 \frac{GM_{\odot}m^2}{L^2} u - \frac{2m}{L^2} E = 0.$$

Esta equação ainda pode ser reescrita como

$$(u - u_0)^2 - \frac{2m}{L^2} (E - E_{\min}) = 0,$$

onde

$$u_0 = \frac{1}{r_0}.$$

Assim, temos

$$\frac{1}{r_{\max}} = u_{\min} = u_0 - \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})}, \quad (26.9)$$

$$\frac{1}{r_{\min}} = u_{\max} = u_0 + \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})}. \quad (26.10)$$

O movimento da planeta é limitado. O valor máximo da distância do Sol que a planeta atinge é $r_{\max}$, e a máxima aproximação ao Sol é dada por $r_{\min}$. A forma da trajetória será discutida na próxima sessão.

26.3. Estado Não Ligado

Para $E \geq 0$, não há dois pontos de retorno mas apenas um. Isto porque, para $E > 0$ na expressão acima, Eq.(26.9),

$$u_{\min}(E = 0) = 0,$$

e, por consequente, $r_{\max} \rightarrow \infty$. A expressão de $u_{\max} = 1/r_{\min}$, a Eq.(26.10) continua valendo. Neste caso o movimento não é mais a de planeta. O objeto em discussão faz um percurso que vem de infinito, aproxima ao Sol com sua máxima aproximação $r_{\min}$, e vai embora a infinito e nunca volta mais. Um classe de cometas tem este tipo de trajetória.

Exercício: A energia E e o momento angular L são constantes de integração e, portanto, são determinados pela condição inicial. Expresse E e L em termos de posição inicial r_i e a velocidade inicial,

$$\vec{v}_i = \left(\frac{dr}{dt} \right)_i \vec{e}_r + \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_i \vec{e}_\theta.$$

Exercício: No problema anterior, a condição inicial é especificada pelos 3 números,

$$r_i, \left(\frac{dr}{dt} \right)_i, \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_i$$

para determinar 2 parâmetros, E e L , sobrando um grau de liberdade. O que corresponde este grau de liberdade fisicamente?

26.4. Trajetória

O movimento de um objeto com a massa m na volta do Sol fica reduzida na forma de equação diferencial de primeira ordem em r e em θ ,

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + 2GM_\odot \frac{1}{r} - \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^2}}, \quad (26.11)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (26.12)$$

Em princípio, poderia integrar este sistema de equações pode ser integrado. Em particular, a Eq.(26.11) fica escrita na forma quadratura,

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + 2GM_\odot \frac{1}{r} - \frac{L^2}{m^2} \frac{1}{r^2}}} = \pm \int dt, \quad (26.13)$$

ou

$$r = R(t), \quad (26.14)$$

onde R é a função inversa da função,

$$\Xi(r) = \int^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + 2GM_{\odot}\frac{1}{r} - \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^2}}}. \quad (26.15)$$

A parte angular pode ser obtida pela integral da Eq.(26.12), substituindo a Eq.(26.14), obtendo

$$\theta(t) = \frac{L}{m} \int^t \frac{dt}{r^2(t)} \quad (26.16)$$

Neste sentido, dizemos que a equação é resolvida matematicamente.

Exercício: Discuta como especificar os valores da posição inicial (r_0, θ_0) para $t = t_0$ nas Eqs.(26.14) e (26.16).

Embora não é difícil de avaliar o valor de Ξ para um dado r arbitrário, a integral para a função Ξ acima não fica numa forma analítica de função simples. Por outro lado, para saber a forma geométrica da órbita, não precisa a dependência temporal da posição da planeta. Para ter uma idéia da natureza da órbita, até melhor eliminar t das Eqs. (26.14) e (26.16), obtendo

$$r = r(\theta). \quad (26.17)$$

Naturalmente a eliminação de t diretamente das Eqs. (26.14) e (26.16) não seria possível se não souber as formas destas equações. Mas podemos utilizar a equação de movimento para obter a forma da Eq.(26.17). Tomando a derivada da Eq.(26.17) em relação a t , temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}.$$

Assim,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \bigg/ \frac{d\theta}{dt}.$$

Substituindo as Eqs.(26.11,26.12), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + 2GM_{\odot}\frac{1}{r} - \frac{L^2}{m^2}\frac{1}{r^2}} \bigg/ \frac{L}{mr^2} \\ &= \pm \sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^4 + \frac{2Gm^2M_{\odot}}{L^2}r^3 - r^2} \end{aligned}$$

Esta equação pode ser escrita na forma quadratura,

$$\pm \int_{r_i}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^4 + \frac{2Gm^2M_\odot}{L^2}r^3 - r^2}} = \int_{\theta_i}^r d\theta = (\theta - \theta_0), \quad (26.18)$$

onde denotamos o valor de r quando $\theta = \theta_i$ por r_i .

A integral do lado esquerdo agora pode ser calculada analiticamente. Para isto, introduzimos uma mudança de variável,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= u, \\ -\frac{1}{r^2}dr &= du. \end{aligned}$$

Temos

$$\int_{r_i}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2}r^4 + \frac{2Gm^2M_\odot}{L^2}r^3 - r^2}} = - \int_{u_i}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2Gm^2M_\odot}{L^2}u - u^2}}. \quad (26.19)$$

Utilizando o resultado da análise anterior, vejamos que esta integral tem a forma

$$\int_{u_i}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{L^2}(E - E_{\min}) - (u - u_0)^2}}.$$

Esta integral é real só quando

$$u_{\min} < u_i < u_{\max},$$

onde

$$u_{\min} = u_0 - \sqrt{\frac{2m}{L^2}(E - E_{\min})}, \quad E < 0,$$

e

$$u_{\min} = 0, \quad E \geq 0.$$

26.5. Estado Ligado ($E < 0$)

Vamos analisar primeiro o caso $E < 0$. Neste caso,

$$u_{\min} \leq u_i \leq u_{\max}.$$

Sabendo que

$$\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min}) > 0,$$

podemos introduzir a mudança de variável, $u \rightarrow \phi$ tal que

$$u - u_0 = \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})} \cos \phi. \quad (26.20)$$

Temos portanto,

$$du = -\sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})} \sin \phi d\theta.$$

e a integral do lado esquerdo da Eq.(26.18) fica

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} r^4 + \frac{2Gm^2 M_{\odot}}{L^2} r^3 - r^2}} &= + \int_{\phi_i}^{\phi} \frac{\sin \phi d\phi}{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}} \\ &= (\phi - \phi_i), \end{aligned}$$

onde o sinal dúplo $\pm$ na Eq.(26.18) pode ser eliminado junto os possíveis sinais da relação

$$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \phi} = \sin \phi,$$

dependendo do valor de ϕ . Assim, da Eq.(26.18), temos

$$\phi - \phi_i = \theta - \theta_i,$$

ou

$$\cos \phi = \cos (\theta - \theta_i + \phi_i).$$

Substituindo a Eq.(26.20), temos

$$u - u_0 = \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})} \cos (\theta - \theta_i + \phi_i).$$

Ainda retornando a variável original r , temos

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i} = \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})} \cos (\theta - \theta_i + \phi_i). \quad (26.21)$$

A constante de integração ϕ_i pode ser determinado agora. Sabemos que por definição,

$$r(\theta = \theta_i) = r_i,$$

temos

$$0 = \cos(\phi_i).$$

Por outro lado, sempre podemos escolher

$$\theta_i = \frac{\pi}{2},$$

e temos

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i} = \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})} \cos(\theta), \quad (26.22)$$

onde agora $r_i = l$ é a distância radial quando $\theta = \pi/2$.

Temos

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{1/l + \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})} \cos(\theta)} \\ &= \frac{l}{1 + l \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})} \cos(\theta)}. \end{aligned}$$

Assim, sem perder a generalidade, podemos escrever a trajetória de uma planeta por

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos \theta}, \quad (26.23)$$

onde

$$\epsilon = l \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E - E_{\min})}. \quad (26.24)$$

No caso $E < 0$, todos os valores de θ é permitido. A Eq.(26.23) representa um elipse com a ecentricidade ϵ . Este parâmetro está associado com os valores limites de r , $r_{\min}$ ou $r_{\max}$ por

$$l = (1 + \epsilon) r_{\min} = (1 - \epsilon) r_{\max}. \quad (26.25)$$

Daí, podemos extrair l .

Exercício: Mostre que $l = r_0$.

Exercício: Mostre que a Eq.(26.23) representa uma parábola. Obtenha as coordenadas dos dois focos.

Exercício: Prove a Eq.(26.24).

26.6. Caso $E \geq 0$

A condição de $E \geq 0$ é equivalente a

$$\epsilon \geq 1.$$

Exceto esta condição, a expressão Eq.(26.23) continua valendo. A Eq.(26.23) representa uma parábola para $\epsilon = 1$ e uma curva hiperbólica para $\epsilon > 1$.

Exercício: Discuta a forma de trajetória representada pela Eq.(26.23) para $\epsilon \geq 1$.
Identifique os focos e as retas assintóticas no caso $\epsilon > 1$.

Part V

Complemento Matemático

27. Integração Múltipla e Jacobiana da Transformação de Variáveis

Como uma aplicação de análise vetorial, vamos deduzir a lei de transformação de variáveis nas integrais múltiplas.

27.1. Integral Dúpla

Vamos considerar a integral,

$$I = \int_{\Omega} \int dx dy f(x, y),$$

onde Ω representa o domínio da integral no plano $x - y$. Esta integral é o volume do pilar com a base Ω , e o teto dada pela superfície,

$$z = f(x, y)$$

A quantidade $dx dy$ é chamada de elemento de área. Queremos expressar esta integral introduzindo a mudança de variáveis, $(x, y) \rightarrow (u, v)$ de tal forma

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v). \end{aligned} \tag{27.1}$$

Para isto, devemos notar que o elemento da área $dx dy$ não é um mero produto de dois infinitesimais, dx e dy . Se for, da Eq.(27.1) teríamos

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \end{aligned}$$

e, portanto, seria

$$\begin{aligned} dx dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} (du)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) du dv + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} (dv)^2. \end{aligned}$$

Mas isto é obviamente errado, pois a quantidade tipo

$$\int \int \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u} (du)^2$$

não teria sentido. Numa integral dupla, nunca apareceria a quadrada de infinitesimal, $(du)^2$.

Onde está o erro? O ponto básico a ser lembrado é que o elemento da área $dx dy$ é de fato a área do retângulo, formado de dois vetores,

$$\begin{aligned} d\vec{r}_1 &= dx \vec{e}_x, \\ d\vec{r}_2 &= dy \vec{e}_y \end{aligned}$$

e a área do retângulo formado destes vetores de fato fica

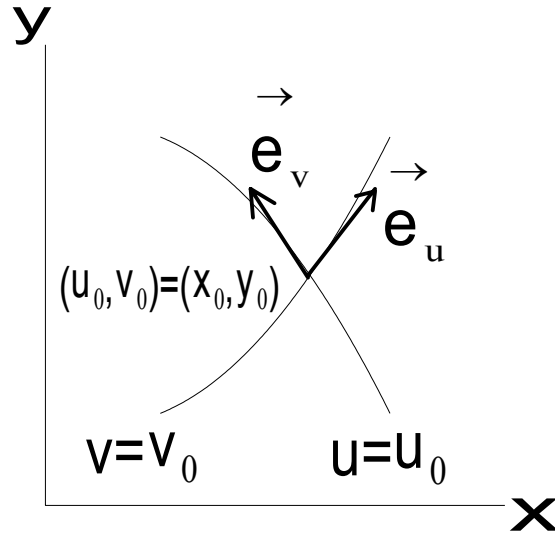
$$\begin{aligned} dS &= |d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2| \\ &= dx dy |\vec{e}_x \times \vec{e}_y| \\ &= dx dy. \end{aligned}$$

A primeira linha é sempre verdade para calcular a área do retângulo formada de quaisquer dois vetores $d\vec{r}_1$ e $d\vec{r}_2$, mas a última linha acima só vale quando os dois vetores são ortogonais e, portanto, não é sempre verdade. Se utilizamos as novas variáveis, devemos recalculer a área do elemento associada a variação de u e v .

A mudança de variáveis Eq.(27.1) pode ser escrita também na forma invertida,

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y). \end{aligned}$$

Neste sistema, $u = u_0 = \text{const.}$ representa uma curva no plano $x - y$, e analogamente $v = v_0 = \text{Const.}$ Vamos considerar um ponto (x_0, y_0) onde estas duas curvas cruzam. Veja a figura abaixo.



Assim, um vetor unitário $\vec{e}_u$ ao longo a curva $v = \text{const.}$ e analogamente $\vec{e}_v$ ao longo a curva $u = \text{const.}$ Note que eles não necessariamente ortogonais. Devemos expressar os vetores infinitesimais associados a variações de u e v , respectivamente.

O vetor associado a variação de u para $u + du$ é definido como um vetor cujo comprimento é du , tendo a direção de deslocamento da posição tal que se conserva o valor de v . Isto porque, se consideramos u e v como duas variáveis independentes, durante a variação de uma das variáveis, digamos $u \rightarrow u + du$, não deve alterar a outra, v . Assim,

$$d\vec{u} = du\vec{e}_u, \quad (27.2)$$

onde $\vec{e}_u$ é o vetor tangencial a curva $v(u, v) = v_0$ (ver a figura acima). Como calcular o vetor $\vec{e}_u$?

Escrevemos

$$d\vec{u} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que estas variações em x e y acarretam as variações em u e v como

$$\begin{aligned} du &= \nabla u \cdot d\vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y} dy_1, \\ dv &= \nabla v \cdot d\vec{u} = \frac{\partial v}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial v}{\partial y} dy_1. \end{aligned}$$

Por definição, $dv = 0$. Assim, temos um sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial y}dy_1 &= du \\ \frac{\partial v}{\partial x}dx_1 + \frac{\partial v}{\partial y}dy_1 &= 0.\end{aligned}$$

Adotando a representação matricial, este sistema pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} du \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27.3)$$

Vamos denotar a matriz da coeficiente acima por

$$\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

A Eq.(27.3) pode ser resolvido por

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \end{pmatrix} &= \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1} \begin{pmatrix} du \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} du,\end{aligned} \quad (27.4)$$

onde

$$\begin{aligned}J &\equiv \det \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| \\ &= \det \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right|\end{aligned} \quad (27.5)$$

é a quantidade conhecido como Jacobiana da transformação, $(x, y) \rightarrow (u, v)$.

Exercício: Prove que

$$\det \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| \det \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 1.$$

O vetor na Eq.(27.4) é nada mais que $d\vec{u}$. Assim, temos

$$d\vec{u} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} du, \quad (27.6)$$

e da Eq.(27.2), concluímos

$$\vec{e}_u = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}. \quad (27.7)$$

Esta expressão pode ser entendido geometricamente da seguinte forma. O vetor tangencial a curva $v(u, v) = v_0$ é sempre perpendicular ao gradiente da função $v(u, v)$.

$$\vec{e}_u \cdot \nabla v = 0.$$

Desta forma, é fácil de concluir que

$$\vec{e}_u \propto \begin{pmatrix} \partial v / \partial y \\ -\partial v / \partial x \end{pmatrix}.$$

Pelo procedimento análoga, temos

$$d\vec{v} = dv\vec{e}_v,$$

sendo

$$\vec{e}_v = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Agora podemos calcular a área do paralelograma, formado de dois vetores infinitesimais $d\vec{u}$ e $d\vec{v}$. Temos

$$\begin{aligned} dS &= |d\vec{u} \times d\vec{v}| \\ &= \frac{1}{J^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dudv \\ &= \frac{1}{J} dudv \\ &= \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|^{-1} dudv \\ &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv. \end{aligned}$$

Assim, a integral dupla fica escrita como

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Omega} \int dx dy f(x, y) \\ &= \int_{\Omega} \int dudv \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| f(x(u, v), y(u, v)). \end{aligned}$$

27.2. Integral 3-dimensional

No mesmo sentido do caso de integral dúpla, uma integral tripla,

$$I = \int \int \int_{\Omega} dx dy dz f(x, y, z) \quad (27.8)$$

deve ser considerada como a integral sobre volume espacial, com o elemento de volume

$$dV = dx dy dz.$$

As vezes escrevemos este elemento de volume 3-dimensional por

$$dV = d^3\vec{r}.$$

O elemento de volume deve ser considerado como um produto

$$dV = d\vec{x} \cdot (d\vec{y} \times d\vec{z}),$$

onde

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= dx\vec{e}_x, \\ d\vec{y} &= dy\vec{e}_y, \\ d\vec{z} &= dz\vec{e}_z, \end{aligned}$$

são os vetores que caracteriza o elemento de volume. dV é o volume do paralelepípedo formado pelos três vetores, $d\vec{x}$, $d\vec{y}$ e $d\vec{z}$.

Quando introduzimos uma transformação de variáveis,

$$(x, y, z) \rightarrow (u, v, w),$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z), \end{aligned}$$

podemos mostrar que o elemento de volume em u, v , e w fica

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

Prova: A prova é bem análogo ao caso de integral dúpla. Introduzimos os vetores,

$$\begin{aligned}d\vec{u} &= du\vec{e}_u, \\d\vec{v} &= dv\vec{e}_v, \\d\vec{w} &= dw\vec{e}_w,\end{aligned}$$

onde a direção de cada vetor unitário $\vec{e}_u, \vec{e}_v$ e $\vec{e}_w$ é definido como a direção em que os outros variáveis sejam mantidos constantes. Assim, por exemplo, escrevendo

$$d\vec{u} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{pmatrix}$$

na base Cartesiana, $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, devemos ter

$$\begin{aligned}u(x + dx_1, y + dy_1, z + dz_1) - u(x, y, z) &= du, \\v(x + dx_1, y + dy_1, z + dz_1) - v(x, y, z) &= 0, \\w(x + dx_1, y + dy_1, z + dz_1) - w(x, y, z) &= 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\nabla u \cdot d\vec{u} &= du, \\\nabla v \cdot d\vec{u} &= 0, \\\nabla w \cdot d\vec{u} &= 0.\end{aligned}$$

Em termos da forma matricial, a equação acima fica

$$\begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y & \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x & \partial w / \partial y & \partial w / \partial z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{pmatrix} = du \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27.9)$$

Vamos introduzir a notação

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y & \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x & \partial w / \partial y & \partial w / \partial z \end{pmatrix}.$$

Na mesma notação,

$$\left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right) = \begin{pmatrix} \partial x / \partial u & \partial x / \partial v & \partial x / \partial w \\ \partial y / \partial u & \partial y / \partial v & \partial y / \partial w \\ \partial z / \partial u & \partial z / \partial v & \partial z / \partial w \end{pmatrix}.$$

Exercício: Prove

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando o resultado acima, a Eq.(27.9) fica escrita por

$$\begin{pmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ou

$$d\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (27.10)$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$d\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ dv \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (27.11)$$

$$d\vec{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dw \end{pmatrix}. \quad (27.12)$$

Exercício: Prove as Eqs.(27.11,27.12).

O elemento de volume (o volume do paralelopérido formado dos vetores, $d\vec{u}$, $d\vec{v}$, $d\vec{w}$ fica

$$dV = d\vec{u} \cdot (d\vec{u} \times d\vec{w}).$$

Podemos mostrar facilmente que, utilizando as Eqs.(27.10,27.11 e 27.12), o lado direito da expressão acima fica

$$d\vec{u} \cdot (d\vec{u} \times d\vec{w}) = dudvdw \det \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|. \quad (27.13)$$

Exercício: Prove a Eq.(27.13).

Finalmente

$$dV = \det \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \right| du dv dw,$$

e a integral tripla fica sob a transformação de variáveis,

$$\int \int \int_{\Omega} d^3 \vec{r} f(x, y, z) = \int \int \int_{\Omega} \det \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \right| du dv dw f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)), \quad (27.14)$$

onde

$$J = \det \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} \right|$$

é chamada de Jacobiana da transformação.

27.3. Integral n dimensional

Podemos generalizar os resultados acima para a integral múltipla do tipo

$$I = \underbrace{\int \int \cdots \int}_{\substack{\Omega \\ n}} dx_1 \cdots dx_n f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

onde a integral é feita dentro de um domínio Ω no espaço n -dimensional. Quando introduzimos a transformação de variáveis,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

tal que

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ y_2 &= y_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ y_n &= y_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

a integral fica escrita em termos de y_i 's por

$$I = \underbrace{\int \int \cdots \int}_{\substack{\Omega \\ n}} dy_1 \cdots dy_n \det \left| \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| f(x_1(y), x_2(y), \dots, x_n(y)),$$

onde

$$\begin{aligned} J &= \det \left| \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| \\ &= \det \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \partial x_1 / \partial y_2 & \cdots & \partial x_1 / \partial y_n \\ \partial x_2 / \partial y_1 & \partial x_2 / \partial y_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \partial x_n / \partial y_1 & \cdots & & \partial x_n / \partial y_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

é a Jacobiana da transformação.

Exercício: Prove que

$$\det \left| \frac{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)} \right| \det \left| \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| = 1.$$

Exercício: Calcule a Jacobiana da transformação,

$$J(r, \theta, \phi) = \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, \phi)},$$

onde

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

27.4. Integral múltiplas com vetores

Num estudo de Mecânica, muitas vezes encontra-se integrais múltiplas sobre vetores. Por exemplo, vamos calcular a energia potencial gravitacional de um objeto massivo (uma estrela).

Para calcular a energia potencial gravitacional de uma estrela, lembramos, em geral, que quando duas massas m_1 e m_2 colocadas numa distância d , a energia potencial deste sistema (o par das massas) é

$$V(m_1, m_2; d) = -G \frac{m_1 m_2}{d}.$$

Para um sistema exenso como estrela, devemos introduzir o conceito *a distribuição de massa*. Seja $\rho(\vec{r})$ a densidade da massa do objeto. A matéria com o elemento de volume $d\vec{r}$ na posição $\vec{r}$ tem a massa

$$dm(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (27.15)$$

Podemos considerar o sistema como sendo uma agregação destas massas infinitesimais. Portanto, a massa total do objeto é dado por

$$M = \int \int \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}).$$

Muitos vezes, o símbolo de integral tripla $\iiint$ pode ser abreviado por $\int$, pois o elemento de volume $d^3\vec{r}$ já indica que a integral é tríplice. Isto é,

$$M = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}).$$

Agora, a *energia gravitacional total* do sistema pode ser calculado como a soma das energias potenciais entre todos os pares das massas infinitesimais acima. Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} V_{total} &= \sum_{par(1,2)} V(m_1, m_2; d_{12}) \\ &= -G \sum_{par(1,2)} \frac{m_1 m_2}{d_{12}}, \end{aligned}$$

onde d_{12} é a distância entre duas massas m_1 e m_2 , e a soma deve ser feita sobre todas as *pares dos pontos* $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ do sistema. Em geral,

$$\sum_{par(i,j)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \quad (27.16)$$

onde a soma do lado direito é a soma dupla em i e j .

Exercício: Prove a Eq.(27.16).

Utilizando os elementos de massa infinitesimais (Eq.(27.15)), podemos escrever

$$V_{total} = -\frac{1}{2} G \sum_{i \neq j} \frac{dm(\vec{r}_1) dm(\vec{r}_2)}{d_{12}}.$$

A distância entre duas massas nas posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ é dada por

$$d_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|,$$

isto é, o módulo do vetor de diferença $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Utilizando a expressão (27.15) e substituindo o símbolo de somatório pelo símbolo de integral (as quantidades dentro do somatório são infinitesimais), temos

$$V_{total} = -\frac{1}{2}G \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \frac{\rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (27.17)$$

Exercício: Obtenha a expressão da energia potencial eletrostática de um objeto carregada eletricamente, cuja distribuição é dada por

$$\rho(\vec{r}).$$

Como no caso de variáveis escalares, podemos introduzir a transformação de variáveis vetores. Por exemplo,

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{R}, \vec{r})$$

tal que

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \end{aligned}$$

e inversamente

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} - \frac{1}{2}\vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}. \end{aligned}$$

Neste caso, a integral tipo

$$I = \int \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

pode ser calculada em novas variáveis como

$$I = \int \int d\vec{R} d\vec{r} \det \left| \frac{\partial(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial(\vec{R}, \vec{r})} \right| \Phi\left(\vec{R} - \frac{1}{2}\vec{r}, \vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}\right),$$

onde a Jacobiana é o determinante da matrix 6×6 ,

$$\begin{aligned} \det \left| \frac{\partial (\vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\partial (\vec{R}, \vec{r})} \right| &= \det \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial R_x & \partial x_1 / \partial R_y & \partial x_1 / \partial R_z & \partial x_1 / \partial r_x & \partial x_1 / \partial r_y & \partial x_1 / \partial r_z \\ \partial y_1 / \partial R_x & \partial y_1 / \partial R_y & \partial y_1 / \partial R_z & \partial y_1 / \partial r_x & \partial y_1 / \partial r_y & \partial y_1 / \partial r_z \\ \partial z_1 / \partial R_x & \partial z_1 / \partial R_y & \partial z_1 / \partial R_z & \partial z_1 / \partial r_x & \partial z_1 / \partial r_y & \partial z_1 / \partial r_z \\ \partial x_2 / \partial R_x & \partial x_2 / \partial R_y & \partial x_2 / \partial R_z & \partial x_2 / \partial r_x & \partial x_2 / \partial r_y & \partial x_2 / \partial r_z \\ \partial y_2 / \partial R_x & \partial y_2 / \partial R_y & \partial y_2 / \partial R_z & \partial y_2 / \partial r_x & \partial y_2 / \partial r_y & \partial y_2 / \partial r_z \\ \partial z_2 / \partial R_x & \partial z_2 / \partial R_y & \partial z_2 / \partial R_z & \partial z_2 / \partial r_x & \partial z_2 / \partial r_y & \partial z_2 / \partial r_z \end{vmatrix} \\ &= \det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix} \\ &= \det \begin{vmatrix} I & -1/2 I \\ I & 1/2 I \end{vmatrix} \end{aligned}$$

onde I é a matrix de identidade (3×3),

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos provar que se uma matriz A (6×6) tenha a forma,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I \\ a_{21}I & a_{22}I \end{pmatrix},$$

então,

$$\det |A| = \left\{ \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right\}^3. \quad (27.18)$$

Exercício: Prove a Eq.(27.18).

Em geral, temos

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I \\ a_{21}I & a_{22}I \end{pmatrix} = \left\{ \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right\}^n,$$

se I é a matriz de identidade ($n \times n$).

Exercício: Calcule a integral,

$$V_{total} = -\frac{1}{2}G \int d\vec{r}_1 \int d\vec{r}_2 \frac{\rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

para uma distribuição de massa homogênea num esfera de raio R .

Part VI

Sistema de Dois Corpos com Forças Conservativas

28. Ação e Reação e Lei de Conservação do Momento do Sistema do Centro de Massa

Neste sessão, vamos estender o nosso estudo de um sistema mecânico para tratar a interação entre dois corpos. Representamos as duas partículas pelo índice 1 e 2, respectivamente. Necessitamos dois vetores para especificar as duas partículas,

$$\vec{r}_1, \vec{r}_2,$$

e temos as equações de movimento para cada uma destas variáveis,

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}_1, \quad (28.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{f}_2. \quad (28.2)$$

Aqui, m_1, m_2 são as massas e $\vec{f}_1$ e $\vec{f}_2$ representam as forças que atuam nas partículas 1 e 2, respectivamente.

Suponha que as duas partículas sejam completamente desvinculadas do resto do mundo e não existe nenhuma fonte de força além destas partículas 1 e 2 próprias. Neste caso, dizemos que estas duas partículas forma um *sistema isolado*²⁵, e a fonte da força $\vec{f}_1$ deve ser da partícula 2 e a fonte da força $\vec{f}_2$ deve ser a partícula 1. Ou seja,

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \vec{f}_{2 \rightarrow 1}, \\ \vec{f}_2 &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2}, \end{aligned}$$

onde a notação

$$\vec{f}_{A \rightarrow B}$$

²⁵Restritamente falando, não é possível ter um sistema isolado completamente. Mas dentro de uma aproximação, vários sistemas podem ser considerados na prática como sendo sistema isolado. Por exemplo, o Sol e uma planeta, a Terra e a Lua, o átomo hidrogênio, etc.

representa a força que atua de A para B .

Como é bem conhecida, a terceira lei de Newton estabelece a igualdade das forças de ação-reação,

$$\vec{f}_{2\rightarrow 1} = -\vec{f}_{1\rightarrow 2}. \quad (28.3)$$

Assim, as equação de movimento Eqs.(28.1,28.2) ficam

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}_{2\rightarrow 1}, \quad (28.4)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{f}_{2\rightarrow 1}, \quad (28.5)$$

e, portanto temos imediatamente,

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = 0.$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt} \left(m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} \right) = 0. \quad (28.6)$$

A quantidade dentro da parentese é a soma dos vetores de momento linear das partículas. Definimos então o momento linear total $\vec{P}$ do sistema por

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Assim, vemos que a terceira lei de Newton de ação-reação é equivalente a conservação do momento total,

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = 0.$$

Graça a lei de conservação do momento total, vejamos em seguida que a dinâmica de um sistema isolado de duas partículas é essencialmente igual ao problema de uma partícula. Note que a conservação do momento total não depende da natureza da força. Ela é a consequência direta da terceira lei de Newton. Assim, mesmo existindo a força dissipativa entre dois corpos, o momento total do sistema conserva.

29. Centro de Massa e Coordenada Relativa

A conservação do momento total do sistema isolado é a consequência direta da terceira lei de Newton. Alias, a terceira lei de Newton é uma outra forma de dizer que o momento total de um sistema isolado é conservado.

A forma do momento total,

$$\vec{P} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt}$$

mostra que a coordenada do Centro de Massa,

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (29.1)$$

se realiza o movimento retilinear uniforme, ou seja, o vetor velocidade do Centro de Massa é um vetor constante.

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}_{CM} = \text{Const.} \quad (29.2)$$

Assim, o movimento do Centro de Massa é resolvido trivialmente. Inicialmente tínhamos 2 vetores incógnitos, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ cujas equações a serem resolvidos. Isto significa que existem 6 coordenadas incógnitas. Mas de fato de que o vetor de coordenada para o Centro de Massa do sistema é resolvido significa que já temos 3 variáveis conhecidas entre as 6 incógnitas. Isto sugere que, em vez de tratar o problema em termos de dois vetores, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, podemos introduzir uma transformação de variáveis,

$$\begin{cases} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \end{cases} = \begin{cases} c_{11}\vec{r}_1 + c_{12}\vec{r}_2 \\ c_{21}\vec{r}_1 + c_{22}\vec{r}_2 \end{cases} \quad (29.3)$$

e escolhe um de novos vetores como sendo o vetor de coordenada do Centro de Massa, $\vec{R}$, Eq.(29.1). Isto é, vamos escolher

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \\ c_{12} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (29.4)$$

Para $\vec{R}_2$, ou seja, os coeficientes c_{21} e c_{22} , a escolha são livres, exceto uma condição de que os vetores

$$\vec{R}_1, \vec{R}_2$$

sejam linearmente independente quando $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são linearmente independentes. Para isto, basta garantir que

$$\det \left| \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

Exercício: Prove que a condição necessária e suficiente para que os dois vetores

$$\begin{cases} \vec{R}_1 \\ \vec{R}_2 \end{cases} = \begin{cases} c_{11}\vec{r}_1 + c_{12}\vec{r}_2 \\ c_{21}\vec{r}_1 + c_{22}\vec{r}_2 \end{cases}$$

sejam linearmente independentes quando $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são linearmente independentes é

$$\det \left| \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

Uma possível escolha é

$$\det \left| \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right| = 1.$$

Isto é,

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1.$$

Substituindo a Eq.(29.4), temos

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2}c_{22} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}c_{21} = 1.$$

Podemos escolher

$$\begin{aligned} c_{22} &= 1, \\ c_{21} &= -1. \end{aligned}$$

Assim, a transformação de um par de vetores $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ para o outro par, $\{\vec{R}, \vec{r}\}$ dada por

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_2, \\ \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \end{aligned} \tag{29.5}$$

tem a Jacobiana 1 (um). Esta transformação pode ser escrita na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2}I & \frac{m_2}{m_1+m_2}I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix}.$$

A transformação inversa fica

$$\begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2}I & \frac{m_2}{m_1+m_2}I \\ -I & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix}.$$

Em geral, para as matrizes que tem a forma,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I \\ a_{21}I & a_{22}I \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}I & b_{12}I \\ b_{21}I & b_{22}I \end{pmatrix},$$

podemos mostrar que as operações matriciais (produto, soma) podem ser feitas como se fosse não existisse a matriz de identidade I . Por exemplo,

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11}I & c_{12}I \\ c_{21}I & c_{22}I \end{pmatrix},$$

com os c_{ij} são determinados como sendo o produto matricial sem a matriz I

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Exercício: Confira a afirmação acima.

O resultado acima mostra que a matriz inversa de uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I \\ a_{21}I & a_{22}I \end{pmatrix}$$

pode ser obtida primeiramente calcule a matriz inversa (2×2)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

e em seguida, podemos construir a matriz inversa A^{-1} por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} a_{22}I & -a_{12}I \\ -a_{21}I & a_{11}I \end{pmatrix}. \quad (29.6)$$

Exercício: Verifique que da Eq.(29.6)

$$A^{-1}A = I_{(6 \times 6)},$$

onde $I_{(6 \times 6)}$ é a matriz de identidade (6×6) .

Usando o resultado acima, temos

$$\begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2}I & \frac{m_2}{m_1+m_2}I \\ -I & -I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -\frac{m_2}{m_1+m_2}I \\ I & \frac{m_1}{m_1+m_2}I \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & -\frac{m_2}{m_1+m_2}I \\ I & \frac{m_1}{m_1+m_2}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{R} \\ \vec{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \\ \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29.7)$$

Isto é, ²⁶

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}, \quad (29.8)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}. \quad (29.9)$$

Podemos expressar a energia cinética total do sistema em termos destes novos variáveis. Para fazer isto sistematicamente, vamos expressar a energia cinética total na forma matricial,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1 \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(\frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt}^T, \frac{d\vec{r}_2}{dt}^T \right) \begin{pmatrix} m_1I & 0 \\ 0 & m_2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\vec{r}_1/dt \\ d\vec{r}_2/dt \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

²⁶Naturalmente, este resultado pode ser obtido, talvez mais facilmente, da Eq.(29.5), invertendo diretamente. Aqui, foi feito desta forma para acostumar o uso de cálculo matricial.

onde o elemento não diagonal da matriz acima 0 deve ser interpretada como matriz 0 de (3×3) . Substituindo a Eq.(29.7), temos

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{d\vec{R}}{dt}^T & \frac{d\vec{r}}{dt}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & I \\ -\frac{m_2}{m_1+m_2}I & \frac{m_1}{m_1+m_2}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1I & 0 \\ 0 & m_2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\frac{m_2}{m_1+m_2}I \\ I & \frac{m_1}{m_1+m_2}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\vec{R}/dt \\ d\vec{r}/dt \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{d\vec{R}}{dt}^T & \frac{d\vec{r}}{dt}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (m_1+m_2)I & 0 \\ 0 & \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\vec{R}/dt \\ d\vec{r}/dt \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (m_1+m_2) \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2.
\end{aligned}$$

A energia cinética é descrita como a soma das energias cinéticas associadas aos movimento do centro de massa, e o movimento relativo, respectivamente. A massa associado ao movimento do centro de massa é a massa total do sistema, como no caso de momento linear, e a massa associada ao movimento relativo é a massa efetiva, dada por

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.$$

A origem da massa efetiva para o movimento relativo é obtida de outra forma. Dividindo a Eq.(28.4) por m_1 e a Eq.(28.5) por m_2 e subtraindo a primeira da segunda, temos

$$\frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{1}{m_2} \vec{f}_{1 \rightarrow 2} - \frac{1}{m_1} \vec{f}_{2 \rightarrow 1}.$$

Escrevendo

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{f},$$

temos

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \vec{f},$$

ou

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{f}.$$

Definindo a massa reduzida por

$$\begin{aligned}
\mu &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^{-1} \\
&= \frac{m_1m_2}{m_1+m_2},
\end{aligned}$$

a equação de movimento para o movimento relativo fica

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}. \quad (29.10)$$

A Eq.(29.10) tem exatamente a mesma forma de uma equação de Newton para uma partícula cuja coordenada é $\vec{r}$. Portanto, o momento correspondente a coordenada relativa $\vec{r}$ é dado por

$$\vec{p} = \mu \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Exercise 29.1. *Mostre que o momento angular total do sistema*

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

é escrito por

$$\vec{L} = \vec{L}_R + \vec{L}_r,$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{L}_R &= \vec{R} \times \vec{P}, \\ \vec{L}_r &= \vec{r} \times \vec{p}. \end{aligned}$$

30. Problema de dois corpos com a força externa

Podemos considerar um sistema composto de 2 massas m_1 e m_2 , interagindo entre si, mas ao mesmo tempo, recebe o efeito da força externa. Por exemplo, vamos considerar o sistema Terra-Lua, sob a influência gravitacional do Sol. Aqui, por simplicidade, consideramos que a massa do Sol é infinitamente maior que da massa da Terra ou da Lua. Temos as equações de Newton para cada uma destas massas,

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{e}_{12} - G \frac{M_\odot m_1}{|\vec{r}_1|^2} \vec{e}_1, \quad (30.1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{e}_{12} - G \frac{M_\odot m_2}{|\vec{r}_2|^2} \vec{e}_2, \quad (30.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{e}_{12} &\equiv \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}, \\ \vec{e}_1 &= \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}, \\ \vec{e}_2 &= \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}. \end{aligned}$$

Num problema geral, as equações tem a forma,

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1} + \vec{F}_{ext}^{(1)}, \quad (30.3)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} + \vec{F}_{ext}^{(2)}, \quad (30.4)$$

onde novamente

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1} \quad (30.5)$$

pela 3ª lei de Newton (ação-reação) e $\vec{F}_{ext}^{(1)}$ e $\vec{F}_{ext}^{(2)}$ são as forças externas que atuam para as massas 1 e 2, respectivamente.

Devido a Eq.(30.5), a soma das duas equações (30.3,30.4) elimina as forças internas $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$ e $\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$, tendo

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{ext}^{(1)} + \vec{F}_{ext}^{(2)}. \quad (30.6)$$

Introduzindo o vetor de coordenadas de Centro de Massa, $\vec{R}$,

$$\vec{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_2,$$

e a força total externa $\vec{F}_{ext}$ que atua ao sistema como todo,

$$\vec{F}_{ext}^{(tot)} \equiv \vec{F}_{ext}^{(1)} + \vec{F}_{ext}^{(2)},$$

temos a equação de movimento do Centro de Massa,

$$M^{(tot)} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}_{ext}^{(tot)}, \quad (30.7)$$

onde

$$M^{(tot)} \equiv m_1 + m_2$$

é a massa total do sistema. A Eq.(30.7) mostra que o movimento do Centro de Massa do sistema parece que a equação de movimento de Newton, como se fosse todas as massas esteja concentradas no ponto $\vec{R}$. Entretanto, note que, em geral esta equação não necessariamente resolvida da mesma forma de problema de um-corpo tratado anteriormente. Isto porque, a soma das forças $\vec{F}_{ext}^{(tot)}$ ainda pode depender das coordenadas individuais, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$.

Quando a soma das forças externas pode ser expressa como função de apenas $\vec{R}$ e t , podemos resolver a Eq.(30.7) independentemente do vetor de posição relativa, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Por exemplo, no caso de as forças externas são a força gravitacional uniforme,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ext}^{(1)} &= -m_1 g \vec{e}_z, \\ \vec{F}_{ext}^{(2)} &= -m_2 g \vec{e}_z,\end{aligned}$$

então temos

$$\begin{aligned}M^{(tot)} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} &= -m_1 g \vec{e}_z - m_2 g \vec{e}_z \\ &= -M^{(tot)} g \vec{e}_z,\end{aligned}$$

que é idêntica a equação de movimento de uma partícula com massa $M^{(tot)}$ cuja posição é $\vec{R}$.

Como chamamos atenção, em geral, o movimento do Centro de Massa não necessariamente desvincula com o movimento interno, isto é, o movimento da coordenada relativa, $\vec{r}$. Por exemplo, no exemplo das Eqs.(30.1) e (30.2),

$$\vec{F}_{ext}^{(tot)} = -G \frac{M_\odot m_1}{|\vec{r}_1|^2} \vec{e}_1 - G \frac{M_\odot m_2}{|\vec{r}_2|^2} \vec{e}_2. \quad (30.8)$$

que contem $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$. Expressando estes vetores em termos de $\vec{R}$ e $\vec{r}$, (Eqs.(29.8, 29.9)),

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R} - \frac{m_2}{M^{(tot)}} \vec{r}, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{m_1}{M^{(tot)}} \vec{r},\end{aligned}$$

temos

$$\vec{F}_{ext}^{(tot)} = -GM_\odot \left[\frac{m_1}{\left| \vec{R} - \frac{m_2}{M^{(tot)}} \vec{r} \right|^3} \left(\vec{R} - \frac{m_2}{M^{(tot)}} \vec{r} \right) + \frac{m_2}{\left| \vec{R} + \frac{m_1}{M^{(tot)}} \vec{r} \right|^3} \left(\vec{R} + \frac{m_1}{M^{(tot)}} \vec{r} \right) \right]. \quad (30.9)$$

Vemos desta expressão que a força total do Sol que atua no sistema Terra-Lua depende da distância relativa Terra-Lua. Assim, a equação de movimento do Centro de Massa não desvincula do movimento relativo $\vec{r}$. Isto quer dizer que

o movimento do Centro de Massa não pode ser resolvido independentemente do movimento relativo.

Por outro lado, quando a distância relativa é muito pequeno em relação a distância entre o Centro de Massa Terra-Lua e o Sol,

$$\eta \equiv \frac{r}{R} = \frac{|\vec{r}|}{|\vec{R}|} \ll 1,$$

temos

$$\begin{aligned} \left| \vec{R} - \frac{m_2}{M^{(tot)}} \vec{r} \right|^{-3} &= \left[\left(\vec{R} - \frac{m_2}{M^{(tot)}} \vec{r} \right) \cdot \left(\vec{R} - \frac{m_2}{M^{(tot)}} \vec{r} \right) \right]^{-3/2} \\ &= \left[R^2 - 2 \frac{m_2}{M^{(tot)}} R r \cos \theta + \left(\frac{m_2}{M^{(tot)}} \right)^2 r^2 \right]^{-3/2} \\ &= R^{-3} \left[1 - 2 \frac{m_2}{M^{(tot)}} \eta \cos \theta + \left(\frac{m_2}{M^{(tot)}} \right)^2 \eta^2 \right]^{-3/2} \\ &\simeq R^{-3} \left(1 + 3 \frac{m_2}{M^{(tot)}} \eta \cos \theta \right), \end{aligned} \quad (30.10)$$

até a primeira ordem em η . Acima, θ é o ângulo entre os vetores $\vec{R}$ e $\vec{r}$. Analogamente,

$$\left| \vec{R} + \frac{m_1}{M^{(tot)}} \vec{r} \right|^{-3} \simeq R^{-3} \left(1 - 3 \frac{m_1}{M^{(tot)}} \eta \cos \theta \right). \quad (30.11)$$

Substituindo as Eqs.(30.10,30.11) na Eq.(30.9), temos

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ext}^{(tot)} &\simeq -GM_{\odot} \left\{ \frac{m_1}{R^3} \left(1 + 3 \frac{m_2}{M^{(tot)}} \eta \cos \theta \right) \left(\vec{R} - \frac{m_2}{M^{(tot)}} \vec{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_2}{R^3} \left(1 - 3 \frac{m_1}{M^{(tot)}} \eta \cos \theta \right) \left(\vec{R} + \frac{m_1}{M^{(tot)}} \vec{r} \right) \right\} \\ &\simeq -GM_{\odot} (m_1 + m_2) \frac{1}{R^3} \vec{R} - GM_{\odot} \frac{m_1 m_2}{M^{(tot)}} \frac{1}{R^2} \eta^2 \vec{e}_r \\ &\simeq -GM_{\odot} M^{(tot)} \frac{1}{R^3} \vec{R}, \end{aligned}$$

até a primeira ordem em η . Assim, o movimento da posição do Centro de Massa do sistema Terra-Lua obedece a equação de movimento

$$M^{(tot)} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \simeq -GM_{\odot} M^{(tot)} \frac{1}{R^3} \vec{R}, \quad (30.12)$$

até a primeira ordem em η . O erro cometido na equação acima é da ordem de η^2 .

Exercício: No caso do sistema Terra-Lua, estime η .

Exercício: No problema Terra-Lua, com o Sol fixo na origem, expresse a equação de movimento para a coordenada relativa $\vec{r}$ exatamente. Note que as forças do Sol não se cancelam exatamente. Aproxime esta força até segunda ordem em η (força de marê).

31. Forças Conservativas e a Conservação de Energia Total

Suponha que as forças externas sejam conservativas. Neste caso, existe potencial V_{ext} tal que

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ext}^{(1)} &= -\nabla V_{ext}(\vec{r}_1), \\ \vec{F}_{ext}^{(2)} &= -\nabla V_{ext}(\vec{r}_2).\end{aligned}$$

Isto é, as forças atuam a 1 e 2 são derivadas do mesmo potencial. Supomos que as forças internas também são conservativas. Neste caso, existe o potencial V_{rel} que é a função da variável $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ tal que

$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = -\nabla_1 V_{rel}(\vec{r}), \quad (31.1)$$

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\nabla_2 V_{rel}(\vec{r}), \quad (31.2)$$

onde

$$\nabla_1, \nabla_2$$

são operadores gradiente em relação aos vetores $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, respectivamente. Se V_{rel} é uma função de $\vec{r}$, apenas, ou seja,

$$V_{rel} = V_{rel}(\vec{r}) = V_{rel}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

então,

$$\nabla_1 V_{rel}(\vec{r}) = -\nabla V_{rel}(\vec{r}),$$

e

$$\nabla_2 V_{rel}(\vec{r}) = \nabla V_{rel}(\vec{r}).$$

Assim, a lei da ação-reação está automaticamente satisfeita pelas Eqs.(31.1) e (31.2).

As equações de movimento Eqs.(30.3,30.4) ficam

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \nabla_1 V_{rel}(\vec{r}) - \nabla_1 V_{ext}(\vec{r}_1), \quad (31.3)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\nabla_2 V_{rel}(\vec{r}) - \nabla_2 V_{ext}(\vec{r}_2). \quad (31.4)$$

Tomando o produto escalar dos dois lados da Eq.(31.3) com o vetor velocidade $d\vec{r}_1/dt$ temos

$$m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \nabla_1 V_{rel}(\vec{r}) - \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \nabla_1 V_{ext}(\vec{r}_1). \quad (31.5)$$

Mas, como sempre,

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{m_1}{2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)^2 \right], \\ \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \nabla_1 V_{ext}(\vec{r}_1) &= \frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_1(t)), \end{aligned}$$

e a Eq.(31.5) fica

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m_1}{2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \nabla_1 V_{rel}(\vec{r}) - \frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_1(t)). \quad (31.6)$$

Analogamente da Eq.(31.4), temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m_2}{2} \left(\frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \nabla_2 V_{rel}(\vec{r}) - \frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_2(t)). \quad (31.7)$$

Adicionando os dois lados das Eqs.(31.6) e (31.7), temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[\frac{m_1}{2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)^2 \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{m_2}{2} \left(\frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \nabla_1 V_{rel}(\vec{r}) - \frac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \nabla_2 V_{rel}(\vec{r}) - \frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_1(t)) - \frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_2(t)). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \nabla_1 V_{rel}(\vec{r}) - \frac{d\vec{r}_2}{dt} \cdot \nabla_2 V_{rel}(\vec{r}) &= \frac{d}{dt} V_{rel}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ &= \frac{d}{dt} V_{rel}(\vec{r}), \end{aligned}$$

e, portanto, temos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m_1}{2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)^2 \right] + \frac{d}{dt} \left[\frac{m_2}{2} \left(\frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)^2 \right] = -\frac{d}{dt} V_{rel}(\vec{r}) - \frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_1(t)) - \frac{d}{dt} V_{ext}(\vec{r}_2(t)).$$

Integrando em t , temos a conservação da energia total,

$$\frac{m_1}{2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left(\frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)^2 + V_{rel}(\vec{r}) + V_{ext}(\vec{r}_1) + V_{ext}(\vec{r}_2) = E : \text{const.}$$

Desta expressão, a quantidade

$$H_1 = \frac{m_1}{2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)^2 + V_{ext}(\vec{r}_1)$$

é a energia total (Hamiltoniana) da partícula 1 sem presença da partícula 2, e a quantidade

$$H_2 = \frac{m_2}{2} \left(\frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)^2 + V_{ext}(\vec{r}_2)$$

é a energia total (Hamiltoniana) da partícula 2 sem presença da partícula 1. A energia total (Hamiltoniana) do sistema 1 + 2 é

$$H_{1+2} = H_1 + H_2 + V_{rel}(\vec{r}). \quad (31.8)$$

Concluimos que a energia do sistema de partículas 1 + 2 fica a soma das energias de partículas individuais mais a energia potencial de coordenada relativa.

Normalmente para expressar a Hamiltoniana, utilizamos os momentos no lugar de velocidade. Assim, a Hamiltoniana do sistema de dois corpos sob a força externa conservativa fica

$$H(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{1}{2m_1} \vec{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \vec{p}_2^2 + V_{rel}(\vec{r}) + V_{ext}(\vec{r}_1) + V_{ext}(\vec{r}_2). \quad (31.9)$$

Exercício: Expresse a Hamiltoniana do sistema, Sol+Terra+Lua, incluindo o movimento do Sol.

31.1. Força Central de 2 Corpos sem força externa

A força $\vec{f}$ de 2 corpos entre a massa 1 e 2 em geral só depende de $\vec{r}$. Se a direção da força aponta a direção do vetor relativo $\vec{r}$,

$$\vec{f} = f(r)\vec{e}_r,$$

o problema se reduz a um problema de uma partícula com a força central.

Como vimos na seção anterior, o movimento de uma partícula sob a ação de uma força central conserva a energia. Para o presente problema, a quantidade,

$$E_{rel} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + V(r)$$

é uma constante. Somando a energia cinética associado ao movimento do centro de massa $\vec{R}$,

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2,$$

temos a conservação de energia total,

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + V(r) = Const. \quad (31.10)$$

Em resumo, o problema de dois corpos com a força central se reduz ao movimento uniforme retilinear do Centro de Massa mais o movimento relativo com a força central. A energia do sistema é soma das energias destes movimentos. O movimento da coordenada do Centro de Massa, $\vec{R}$ é o movimento uniforme retilinear,

$$\vec{R} = \vec{v}_{CM} t + \vec{R}_0,$$

onde a velocidade $\vec{v}_{CM}$ é relacionada com o momento total do sistema como o todo,

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{m_1 + m_2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2).$$

Exercise 31.1. Mostre que o momento angular total

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

se conserva para um sistema de dois corpos com força central entre eles, sem força externa.

Caso não existe força externa vimos que o momento total se conserva, ou seja

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{0}.$$

Assim, o termo primeiro termo da Eq.(31.10), a energia cinética correspondente ao movimento de centro de massa, é constante. Portanto, da Eq.(31.10), temos

$$\frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + V(r) = \text{Const.}$$

ou seja, a energia do movimento relativo (a soma da energia cinética relativa mais a energia potencial) se conserva. Desta forma, o problema de dois corpos com força central se reduz completamente ao problema de um corpo com força central. O movimento relativo se torna completamente independente do movimento do Centro de Massa. Este fato é chamado a separação de movimento do centro de massa, e sempre acontece num sistema isolado.

Na verdade, a separação do centro de massa para um sistema isolado e conservação de momento e energia do movimento do centro de massa está intimamente relacionado de fato que não existe nenhuma referencia absoluto que define algum ponto e tempo privilegiados. Veremos mais tarde a formulação desta idéia.

Part VII

Lei de Transformação do sistema de referência e noção de Invariantes

32. Sistema de Referências e Transformação de Galilei

Vamos considerar dois observadores, A e B . Supormos que cada observador esteja num movimento retilinear uniforme, com velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, respectivamente, em relação a *um dado sistema de coordenadas fixos no espaço*. Cada observador A e B pode estabelecer o sistema de coordenadas Cartesianas tendo sua origem sempre acompanhando o observador respectivo.

No sistema de coordenadas originais, a posição da origem do sistema de coordenadas A é dada por

$$\vec{r}_A = \vec{v}_A (t - t_0) + \vec{r}_{0,A},$$

onde $\vec{r}_{0,A}$ é a posição do A no tempo t_0 . Analogamente,

$$\vec{r}_B = \vec{v}_B (t - t_0) + \vec{r}_{0,B},$$

para o sistema de coordenadas B . Uma posição $\vec{r}$ arbitrária no sistema fixo no espaço fica expressa no sistema de coordenadas A fica

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(A)} &= \vec{r} - \vec{r}_A \\ &= \vec{r} - (\vec{v}_A (t - t_0) + \vec{r}_{0,A}), \end{aligned} \quad (32.1)$$

e no sistema de coordenadas B fica

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(B)} &= \vec{r} - \vec{r}_B \\ &= \vec{r} - (\vec{v}_B (t - t_0) + \vec{r}_{0,B}). \end{aligned} \quad (32.2)$$

Daqui por diante, para uma quantidade visto por um observador, digamos Q , associamos um índice superscrito (A) ou (B) para distinguir o observador. Isto é, o valor de Q observado pelo observador A é expressa por $Q^{(A)}$.

Podemos utilizar $\vec{r}^{(A)}$ ou $\vec{r}^{(B)}$ no lugar de $\vec{r}$ a posição de uma partícula em movimento. Formalmente, o uso das coordenadas,

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$$

ou

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

em vez de

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

é a mudança de sistema de coordenadas. Mas, a palavra “*sistema de coordenadas*” também é utilizada para expressar um conjunto de variáveis que servem para expressar as posições, por exemplo, as coordenadas esféricas. Para caracterizar o aspecto de sistema de coordenadas fisicamente distintos, vamos utilizar o nome, *sistema de referência*. Um sistema de referência é o sistema de coordenadas associados para um observador em movimento.

Quando o movimento do observador é um movimento retilinear uniforme, o sistema de referência associado a este observador é dito *sistema de referência inercial*.

Os sistemas de referências A e B acima são sistemas inerciais. O vetor de coordenadas no sistema de referência B , $\vec{r}^{(B)}$ pode ser expresso pelo vetor de coordenadas no sistema de referência A , $\vec{r}^{(A)}$. Para isto, eliminamos $\vec{r}$ das Eqs.(32.1) e (32.2), temos

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(B)} &= \vec{r}^{(A)} - ((\vec{v}_B - \vec{v}_A)(t - t_0) + \vec{r}_{0,B} - \vec{r}_{0,A}) \\ &= \vec{r}^{(A)} - \left((\vec{v}_B - \vec{v}_A)(t - t_0) + \vec{r}_{0,B}^{(A)} \right) \end{aligned}$$

onde

$$\vec{r}_{0,B}^{(A)} = \vec{r}_{0,B} - \vec{r}_{0,A}$$

é a posição da origem do sistema B no sistema de referência A no instante $t = t_0$. A quantidade

$$(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

é a velocidade relativa do sistema B em relação a A . Isto é,

$$v_B^{(A)} = (\vec{v}_B - \vec{v}_A).$$

Em geral, de um sistema de referência inercial A para um outro sistema de referência inercial B , as coordenadas são transformadas por

$$\vec{r}^{(A)} \rightarrow \vec{r}^{(B)} = \vec{r}^{(A)} - \left(\vec{v}_B^{(A)} (t - t_0) + \vec{r}_{0,B}^{(A)} \right) \quad (32.3)$$

Na Mecânica Newtoniana, supomos implicitamente que o andamento do tempo de um sistema de referência é idêntico ao do tempo no outro sistema de referência inercial. Assim, as coordenadas espaciais e o tempo de um sistema para o outro estão relacionados por

$$\begin{cases} t^{(A)} \rightarrow t^{(B)} = t^{(A)}, \\ \vec{r}^{(A)} \rightarrow \vec{r}^{(B)} = \vec{r}^{(A)} - \left(\vec{v}_B^{(A)} (t - t_0) + \vec{r}_{0,B}^{(A)} \right). \end{cases} \quad (32.4)$$

A transformação Eq.(32.4) é chamada de Transformação de Galilei.

Uma das consequências importante é que a velocidade de um objeto qualquer no sistema de referência B é relacionada com a no sistema de referência A por

$$\begin{aligned} \vec{v}^{(B)} &= \frac{d\vec{r}^{(B)}}{dt^{(B)}} \\ &= \frac{d\vec{r}^{(A)}}{dt^{(A)}} - v_B^{(A)} \\ &= \vec{v}^{(A)} - v_B^{(A)}. \end{aligned} \quad (32.5)$$

Isto é, a velocidade no sistema B é igual a velocidade do objeto menos a velocidade do sistema B em relação ao sistema A . Este é uma consequência matemática que não pode ser alterado uma vez aceitamos a transformação de Galilei, Eq.(32.4) seja verdade. A experiência de Michelson e Moley, o que mostrou a velocidade de luz é uma constante universal independente de sistema de referência indicou que a transformação de Galilei não é correta para o fenômeno de propagação de luz. Na ocasião de discutir a relatividade restrita, vamos voltar estudar este ponto mais em detalhe.

Vamos expressar as equações de movimento de duas partículas com a força de dois corpos, as Eqs.(28.4, 28.5). Temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}^{(A)}}{dt^2} &= \vec{f}_{2 \rightarrow 1}, \\ \frac{d^2 \vec{r}^{(A)}}{dt^2} &= \vec{f}_{1 \rightarrow 2}, \end{aligned} \quad (32.6)$$

no sistema de referência A e

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vec{r}^{(B)}}{dt^2} &= \vec{f}_{2\rightarrow 1}, \\ \frac{d^2\vec{r}^{(B)}}{dt^2} &= \vec{f}_{1\rightarrow 2}.\end{aligned}\tag{32.7}$$

Como podemos ver, as equações de movimentos em qualquer um dos sistemas são idênticas. Em outras palavras, os sistemas inerciais são completamente equivalente para descrever o movimento de partículas. Este fato é às vezes referido como o Princípio de Relatividade de Galilei. Isto é, a lei de Newton não distingue nenhum sistema de referência inercial particular.

No início deste seção, referimos o sistema de coordenadas original para qual o vetor é descrito por $\vec{r}$ como sendo o sistema de coordenadas *fixo no espaço*, mas o que significa um sistema de coordenadas fixo no espaço? Quando falamos “fixo no espaço”, estamos implicitamente assumindo que existem muitos (infinitos) objetos estão parados num determinado sistema de referência. Estes infinitos objetos servem para definir um “palco” para descrever os movimentos de alguns objetos em relação a eles. Por exemplo, quando falamos num laboratório, o sistema de coordenadas fixo no espaço, estamos considerando o laboratório como a referência para fixar o sistema de coordenadas. Isto porque, existe muitas coisas imóveis no sistema de referencial fixo num laboratório (por exemplo, a parede, mesa, etc.) Mas, o resultado de experiências feitas neste laboratório nunca indicar o movimento do Laboratório em relação ao sistema inercial absoluto. Por exemplo, se este laboratório (sem janela) fosse num trem que corre com a velocidade constante, absolutamente uniformemente num trilho ideal, o observador não descobrirá se ele está repouso a Terra ou não. Mesmo na Terra, as medidas de movimentos das matérias não indicam a velocidade da Terra em relação a Universo.

Embora a Lei de Newton não privilegia nenhum sistema de referência em particular, para um determinado sistema, sempre existe algum sistemas de referência mais conveniente para descrição do sistema. Por exemplo, num movimento de Kepler, o sistema de referência em que o Centro de Massa do sistema seja em repouso é mais conveniente, pois neste sistema, o movimento de uma das massas reflecte diretamente o movimento de coordenadas relativa. Este sistema de referência é chamado de Sistema de Centro de Massa.

Exercício: No sistema de Centro de Massa do sistema Sol-Terra, escrevemos o vetor de posição da Terra por

$$\vec{r}_{\oplus}.$$

Expresse o vetor de posição do Sol, $\vec{r}_{\odot}$ em termos de $\vec{r}_{\oplus}$. Escreva a equação de movimento de $\vec{r}_{\oplus}$.

33. Rotação de sistema de coordenadas, quantidades covariantes sob a rotação

Como vimos, a escolha do sistema de referência em movimento uniforme não influencia a equação de movimento. Ou seja, a lei da física sobre o movimento não altera sua forma entre os observadores que em movimento homogênea. A situação é analoga para dois observadores num mesmo sistema de referência mas olhando nas direções distintas. Por exemplo, o observador A estabelece um sistema de coordenadas, $(X - Y - Z)$, usando três vetores unitários $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ como as direções dos eixos, no entanto, um outro observador, digamos B , estabelece o outro sistema de coordenadas, $(X' - Y' - Z')$, usando três vetores unitários $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ como as direções dos eixos respectivos. Os conjuntos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ formam as bases ortonormais. Seja o vetor $\vec{r}$ representa a posição do objeto. Para o observador A , o vetor $\vec{r}$ é descrito como a combinação linear,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \\ &= \sum_i x_i\vec{e}_i.\end{aligned}\tag{33.1}$$

A expressão indica que os coeficientes (x_i) são componentes do vetor $\vec{r}$ na base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e podemos estabelecer a correspondência,

$$\vec{r} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.\tag{33.2}$$

Usando as propriedades ortonormais da base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, temos

$$(\vec{e}_i \cdot \vec{r}) = x_i.$$

Re-substituindo esta expressão na Eq.(33.1), temos

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \sum_i (\vec{e}_i \cdot \vec{r}) \vec{e}_i \\ &= \sum_i \vec{e}_i (\vec{e}_i^T \vec{r}) \\ &= \left(\sum_i \vec{e}_i \vec{e}_i^T \right) \vec{r}.\end{aligned}$$

Note que o objeto

$$\left(\sum_i \vec{e}_i \vec{e}_i^T \right)$$

é uma matriz (3×3) se os vetores $\vec{e}_i$ expressos em termos de vetor-coluna. Já que

$$\vec{r} = \left(\sum_i \vec{e}_i \vec{e}_i^T \right) \vec{r}$$

para qualquer vetor arbitário $\vec{r}$, concluímos que

$$\left(\sum_i \vec{e}_i \vec{e}_i^T \right) = \mathbb{1}, \quad (33.3)$$

onde $\mathbb{1}$ é um operador de identidade. Esta expressão é sempre verdade para qualquer base ortonormal. Ou seja, temos também que

$$\left(\sum_i \vec{e}_i \vec{e}_i^T \right) = \mathbb{1}. \quad (33.4)$$

As relações Eq.(33.3) ou 33.4) são ditas completeza da base e útil para transformar um vetor de uma base para outra. Por exemplo, da Eq.(33.1), temos

$$\vec{r} = \sum_i \vec{e}_i x_i.$$

Mas substituindo a identidade na frente do lado direito, temos

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \sum_i \mathbb{1} \vec{e}_i x_i \\ &= \sum_i \left(\sum_j \vec{e}_j \vec{e}_j^T \right) \vec{e}_i x_i \\ &= \sum_j \vec{e}_j \sum_i \vec{e}_j^T \vec{e}_i x_i \\ &= \sum_j \vec{e}_j \sum_i (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i) x_i \\ &= \sum_j \vec{e}_j \sum_i A_{ji} x_i \\ &= \sum_j \vec{e}_j x_j \end{aligned} \quad (33.5)$$

onde definimos

$$A_{ji} \equiv (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i)$$

e

$$x'_i \equiv \sum_j x_j A_{ji} . \quad (33.6)$$

Note que A_{ij} é cosseno do ângulo entre eixos $\vec{e}_i$ do sistema A e $\vec{e}_j$ do sistema B . A Eq.(33.5) mostra que os coeficiente (x'_i) são os componentes do vetor $\vec{r}$ na base $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ e o vetor $\vec{r}$ é representado por um vetor-coluna por

$$\vec{r} \rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} . \quad (33.7)$$

Os vetores-coluna, Eqs.(33.2) e (33.7) representam o mesmo vetor $\vec{r}$, mas suas aparências são distintas. Esta diferença vem obviamente a diferença entre as bases que os dois observadores usam para representar o vetor físico $\vec{r}$. Os componentes destes vetores-coluna estão relacionados pela Eq.(33.6). Na forma vetorial, temos

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \quad (33.8)$$

Jã que

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{-1} , \quad (33.9)$$

podemos inverter a Eq.(33.8) para ter

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} . \quad (33.10)$$

Exercício: Prove a Eq.(33.9).

As Eqs.(33.6) ou equivalentemente, Eq.(33.8) definem a regra de transformação de componentes de um vetor $\vec{r}$ de um sistema de coordenadas para outro. Note que a lei análoga vale para qualquer vetor. Seja

$$\vec{f} \rightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

o vetor coluna de uma força $\vec{f}$ medida no sistema que o observador A . O outro observador que usa o sistema diferente observaria a vetor força como

$$\vec{f} \rightarrow \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix},$$

Os componentes destes vetores coluna estão relacionados por

$$f_i' = \sum_j f_j A_{ji},$$

ou

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad (33.11)$$

e sua inversa por

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix}. \quad (33.12)$$

Isto é, o vetor coluna para a força se transforma exatamente na mesma forma do vetor coluna posição. É este fato que garante a equação de movimento de Newton tenha a mesma forma independentemente da escolha do sistema de coordenadas. Mais explicitamente, consideramos a equação de movimento escrita no sistema do observador A .

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}. \quad (33.13)$$

Mas o vetor coluna da posição no sistema de coordenadas do observador A está relacionado com o do no sistema de coordenadas do observador B via Eq.(33.10), o vetor de coluna da força também pela Eq.(33.12). Substituindo estas relações na Eq.(33.13), temos

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ f_3' \end{pmatrix}.$$

Já que a matriz (A_{ij}) não depende do tempo, multiplicando sua inversa aos dois lados da equação acima, temos

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \end{pmatrix}. \quad (33.14)$$

que é a equação de movimento de Newton. O que é importante aqui é que as equações de movimento têm exatamente a mesma forma nos dois sistemas de coordenadas. Expressamos este fato como a equação de movimento de Newton é a *forma invariante*, ou *covariante*, sob a rotação de sistema da referência. Neste exemplo da equação de movimento de Newton, a covariância parece que trivial, pois desde início, estamos introduzindo o vetor posição $\vec{r}$ e o vetor força $\vec{f}$ como quantidades físicas que existem independentemente da sua representação em termos de vetor-coluna.

Como um exercício intelectual, vamos supor que nos não temos noção de um vetor físico $\vec{r}$ ou $\vec{f}$. Nesse caso, qualquer observador estabeleceria a descrição de lei da física somente em termos de quantidades medidas usando um sistema de coordenadas de cada um. Ou seja, o observador A estabelece a equação de movimento de posição de uma partícula sem noção de vetores, $\vec{r}$ ou $\vec{f}$ e as posição e força são reconhecidas somente através de suas componentes. Para ele, a posição da partícula é expressa em termos de vetor-coluna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

e nada mais. Neste caso, a posição de uma partícula é sempre expressa na forma dependente do sistema de coordenadas.

Mesmo assim, se este observador comunica com outros observadores que estudam a mesma quantidade usando outro sistema de coordenadas, ele acaba descobrindo a existência do conceito de posição como algo *independente* do sistema de coordenadas. Assim, para ele, a posição é algo que expresso em termos de vetor-coluna num sistema de coordenadas, mas no outro sistema, os componentes se transforma de acordo com a regra Eq.(33.8). Analogamente, a força é algo que expresso em termos de vetor-coluna num sistema de coordenadas em termos de seus componentes, mas no outro sistema, os componentes se transforma de acordo com a regra Eq.(33.11). Mas, agora a equação de movimento estabelecida no sistema de coordenadas A , Eq.(33.13) também vale para outros observadores usando

as quantidades correspondentes. Isto acontece, pois os dois lados da equação de movimento se transforma exatamente de mesma forma. Finalmente o observador A concluirá que a equação de movimento (33.13) é algo universal, independente do sistema de coordenadas. Com este processo de raciocínio de abstração, o observador alcançaria os conceitos independentes de sistema de coordenadas,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\rightarrow \vec{r}, \\ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} &\rightarrow \vec{f}, \\ m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \rightarrow m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}. \end{aligned}$$

A análise acima mostra que para uma lei universal, isto tem que ser uma igualdade entre quantidades que transformam da mesma forma sob a mudança de sistema de coordenadas. No caso de vetor, tais como a posição ou a força, vimos que eles transformam de mesma forma, de acordo com a lei,

$$Q_i \rightarrow Q'_i = \sum_j Q_j A_{ji}. \quad (33.15)$$

onde (Q_i) representa a quantidade posição ou força. Inversamente, se uma quantidade física expressa em termos de 3 números num sistema de coordenadas, e se transforma de acordo com a Eq.(33.15), chamamos que esta quantidade de *vetor* sob a transformação (A_{ij}) .

As quantidades físicas não são necessariamente sempre vetor. Por exemplo, vamos considerar o raio de uma esfera. Obviamente o valor do raio não depende do sistema de coordenadas que mede este raio. Existem várias quantidades como esta que possuem o mesmo valor independente do sistema de coordenadas. Estas quantidades são chamadas de *escalar*. Assim, seja O um escalar medido num sistema de coordenadas. Se o sistema de coordenadas $\{x_i\}$ se transformou para $\{x'_i\}$ por

$$x_i \rightarrow x'_i = \sum_j x_j A_{ji},$$

a quantidade escalar transforma por

$$O \rightarrow O' = O. \quad (33.16)$$

Podemos mostrar que o produto escalar de dois vetores é um escalar no sentido acima. Para ver isto, para dois vetores num sistema de coordenadas,

$$\{x_i\}, \{y_i\},$$

definimos o produto escalar,

$$O = \sum_i x_i y_i.$$

A mesma quantidade noutro sistema de coordenadas fica

$$O' = \sum_i x'_i y'_i.$$

Mas pela regra de transformação de vetor, temos

$$\begin{aligned} x'_i &= \sum_j x_j A_{ji}, \\ y'_i &= \sum_j y_j A_{ji}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} O' &= \sum_i \left(\sum_j x_j A_{ji} \right) \left(\sum_j y_j A_{ji} \right) \\ &= \sum_j \sum_k x_j y_k \sum_i A_{ji} A_{ki} \\ &= \sum_j \sum_k x_j y_k (AA^T)_{jk} \\ &= \sum_j \sum_k x_j y_k \delta_{jk} \\ &= \sum_i x_i y_i. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$O' = O,$$

portanto, por definição, O é um escalar.

33.1. Tensor

Para um escalar, ou um vetor, podemos associar uma imagem independente do sistema de coordenadas. Por exemplo, no caso de um vetor, em vez de um conjunto de 3 números $\{x_1, x_2, x_3\}$, temos a imagem de uma seta, cuja projeção desta seta para eixos $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ são dados por $\{x_1, x_2, x_3\}$. Isto é, podemos pensar que os tres números,

$$\{x_1, x_2, x_3\}$$

são uma representação de uma seta, o que é um objeto físico, independente do sistema de coordenadas. Por outro lado, existem vários objetos que não tem a forma de uma seta. Vamos considerar um elipsoide,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \quad (33.17)$$

Este elipsoide tem seus eixos principais nas direções de eixos do sistema de coordenadas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, com respectivo tamanho, a, b e c . O que é a equação deste elipsoide se escolher o outro sistema de coordenadas, $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$? Para ver isto, é conveniente re-escrever a equação acima na forma matricial,

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1. \quad (33.18)$$

Podemos definir uma nova matriz,

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{a^2}, \quad E_{22} = \frac{1}{b^2}, \quad E_{33} = \frac{1}{c^2}, \\ E_{12} &= E_{13} = E_{21} = E_{31} = E_{23} = E_{32} = 0, \end{aligned}$$

e a equação do elipsoide é

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 1. \quad (33.19)$$

Se expressar esta equação em termos da nova base, $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$, sabemos que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (x'_1, x'_2, x'_3) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T,$$

temos

$$(x'_1, x'_2, x'_3) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = 1$$

que é a equação do mesmo elipse expresse no novo sistema de coordenadas. Podemos escrever

$$(x'_1, x'_2, x'_3) \begin{pmatrix} E'_{11} & E'_{12} & E'_{13} \\ E'_{21} & E'_{22} & E'_{23} \\ E'_{31} & E'_{32} & E'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = 1, \quad (33.20)$$

que tem a mesma forma da Eq.(33.19), só que a matriz $\{E_{ij}\}$ se transformou para $\{E'_{ij}\}$, onde

$$\begin{pmatrix} E'_{11} & E'_{12} & E'_{13} \\ E'_{21} & E'_{22} & E'_{23} \\ E'_{31} & E'_{32} & E'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$E'_{ij} = \sum_k \sum_l E_{kl} A_{ki} A_{lj}. \quad (33.21)$$

Note que as matrizes $\{E_{ij}\}$ e $\{E'_{ij}\}$ correspondem ao mesmo elipsoide. Assim, podemos considerar que as matrizes $\{E_{ij}\}$ e $\{E'_{ij}\}$ como sendo uma representação do elipsoide, um objeto físico independente do sistema de coordenadas. Análogo ao caso do vetor, imaginemos que exista um objeto $\hat{\mathbf{E}}$, independente do sistema de coordenadas, que sua representação no sistema de coordenadas do observador A fica

$$\hat{\mathbf{E}} \rightarrow \{E_{ij}\},$$

e para observador B fica

$$\hat{\mathbf{E}} \rightarrow \{E'_{ij}\}.$$

O objeto $\hat{\mathbf{E}}$ é chamado de tensor. Mais especificamente este é um exemplo do tensor de *rank* 2. Em geral, o tensor de rank 2 pode ser considerado como um operador que transforma um vetor para outro. Por exemplo, no caso de elipsoide acima, o tensor $\hat{\mathbf{E}}$ pode ser utilizado atuando num vetor $\vec{r}$ para construir um novo vetor $\vec{s}$.

$$\vec{r} \rightarrow \vec{s} = \hat{\mathbf{E}} \vec{r}.$$

Esta relação é independente do sistema de coordenadas. Podemos expressar a relação acima num sistema de coordenadas, tomando projeções com vetor-base,

$$\begin{aligned} s_i &= (\vec{e}_i \cdot \vec{s}) \\ &= \vec{e}_i^T (\hat{\mathbf{E}} \vec{r}) \end{aligned}$$

Inserindo a relação de completeza em $\{\vec{e}_i\}$,

$$\sum_j \vec{e}_j \vec{e}_j^T = \mathbf{1},$$

temos

$$\begin{aligned} s_i &= \vec{e}_i^T \left(\hat{\mathbf{E}} \sum_j \vec{e}_j \vec{e}_j^T \vec{r} \right) \\ &= \sum_j \left(\vec{e}_i^T \hat{\mathbf{E}} \vec{e}_j \right) (\vec{e}_j^T \vec{r}) \\ &= \sum_j E_{ij} x_j \end{aligned}$$

onde identificamos

$$\begin{aligned} \left(\vec{e}_i^T \hat{\mathbf{E}} \vec{e}_j \right) &= E_{ij}, \\ (\vec{e}_j^T \vec{r}) &= x_j. \end{aligned}$$

Exercício: Seja $\hat{\mathbf{E}}$ o tensor que representa um elipsoide.

1. Mostre que o vetor transformado pelo tensor $\hat{\mathbf{E}}$ do vetor $\vec{r}$

$$\vec{r}' = \hat{\mathbf{E}}\vec{r}$$

é perpendicular ao superfície do elipsoide.

2. Usando o exercício anterior, argumente geometricamente que existem pelo menos 3 vetores distintos $\vec{r}$, tal que o vetor transformado pelo tensor, $\vec{r}'$ fica paralelo ao $\vec{r}$,

$$\hat{\mathbf{E}}\vec{r} // \vec{r},$$

ou seja

$$\hat{\mathbf{E}}\vec{r} = \lambda\vec{r},$$

onde λ é um constante. Para um tensor $\hat{\mathbf{E}}$, o vetor que satisfaz a equação acima é dita como autovetor do tensor $\hat{\mathbf{E}}$.

Exercício: Seja

$$\hat{\mathbf{E}} = \{E_{ij}\}$$

é um tensor de rank 2.

1. Prove que

$$Tr(\hat{\mathbf{E}}) = \sum_{i=1}^3 E_{ii}$$

é um escalar.

2. Prove que

$$Det\hat{\mathbf{E}}$$

Exercício: Seja $\{v_i, i = 1, 2, 3\}$ os componentes de um vetor $\vec{v}$. Construímos um conjunto de 9 números formados de produtos de quaisquer dois compontes deste vetor,

$$\mathbf{Q} = \{Q_{ij} = v_i v_j ; \quad i, j = 1, 2, 3\}.$$

1. Mostre que este conjunto $\mathbf{Q}$ forma um tensor de rank 2.

2. Consideramos um espaço vetorial L , formado de todos as combinações lineares dos elementos de $\mathbf{Q}$

$$L \doteq \left\{ \sum_{i,j}^3 \alpha_{ij} Q_{ij} \right\},$$

ou seja o tensor $\mathbf{Q}$ é um vetor deste espaço. Qual é a dimensão deste espaço? Mostre que o espaço L é invariante sobre a mudança de sistema de coordenadas.

3. Podemos decompor o produto $Q_{ij} = v_i v_j$ como

$$v_i v_j = \frac{1}{2} (v_{ij} + v_{ji}) + \frac{1}{2} (v_{ij} - v_{ji})$$

e denotamos

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{1}{2} (Q_{ij} + Q_{ji}), \\ A_{ij} &= \frac{1}{2} (Q_{ij} - Q_{ji}). \end{aligned}$$

Os conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \{S_{ij}\} \\ \mathbf{A} &= \{A_{ij}\} \end{aligned}$$

são tensores, separadamente. Assim, o espaço vetorial L se decompõe em dois subespaços, um formado de tensores simétricos, e outro formado de tensores antisimétricas. Mostre que esta decomposição é invariante sob a mudança de base.

4. Mostre que o subespaço simétrico acima ainda pode ser decomposto em dois subespaços invariantes, fazendo

$$S_{ij} = \left[\frac{1}{3} \text{Tr} \{ \mathbf{S} \} \delta_{ij} \right] + \left[S_{ij} - \frac{1}{3} \text{Tr} \{ \mathbf{S} \} \delta_{ij} \right].$$

Desta forma, podemos decompor o espaço vetorial de tensores de rank 2 em 3 subespaços invariantes

$$L = L_{Sym} + L_{Asym} + L_{Tr}$$

onde L_{Sym} , L_{Asym} e L_{Tr} são subespaços formados de tensores simétricos com traço nulo, tensores antisimétricos, e o tensor proporcional a matriz de identidade. Obtenha a dimensão de cada subespaço.

Part VIII

Transformação de Lorentz e Teoria de Relatividade Restrita

Vimos que a descrição da lei da dinâmica, a equação de Newton é invariante sob a mudança de um sistema inercial para outra. Este fato está intimamente relacionado com a conservação de momento do centro de massa de um sistema isolado. Do ponto de vista matemática, a transformação de coordenadas de um sistema inercial para outro é expressa em termos de transformação de Galilei,

$$\begin{aligned}t' &= t, \\ \vec{r}' &= \vec{r} + \vec{V} t,\end{aligned}$$

ou na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (33.22)$$

Inversamente podemos considerar que a Eq.(33.22) é a representação matemática do conceito de sistema inercial compatível com a equação de movimento de Newton. O ponto importante é que uma vez aceitamos a definição acima de transformação entre dois sistemas inerciais, vimos que a velocidade de um objeto em movimento se transforma de acordo com a Eq.(32.5). Isto é, a velocidade de um objeto necessariamente varia de um sistema inercial para outra. A mesma situação acontece para a propagação de uma onda. Em particular, no caso de propagação de onda, a velocidade da propagação é determinada pela propriedade do meio que a onda se propaga.

No final do século 19, sabendo que a luz é a forma de onda eletromagnética, tentou-se descobrir, em relação a que matéria que esta onda propaga. Foram tentados várias experiências que medem a velocidade de luz a fim de detectar a matéria que a onda eletromagnética se propaga (ether). Entretanto, o resultado é surpreendente. A famosa experiência de Michelson-Moley mostrou que a velocidade da luz não depende da velocidade do sistema de observação. Já que a mudança da velocidade de propagação, Eq.(32.5) é a consequência direta da transformação de

Galilei, podemos dizer que o resultado da experiência de Michelson-Moley não é compatível com a transformação de Galilei, embora, o conceitoda transformação de Galilei parece tão natural e inofensiva como expressar a mudança do sistema de coordenadas de um sistema intercial para outro. Foi o Einstein que introduziu uma mudança conceitual fundamental, formulando a transformação de sistema de coordenadas através da Teoria de Relatividade Restrita.

Na teoria de Relatividade, encaramos o fato de propagação de luz é sempre constante, independente de sistema de referencia inercial, como sendo a propriedade fundamental de transformação de um sistema de coordenadas para outro, e não da propriedade originada de mecanismo físico da propagação em si. Vamos estudar a estrutura matemática de mudança de sistema de coordenadas.

Definimos um *evento* por um ponto no espaço num determinado instante. Assim, num sistema de coordenadas, digamos S , um evento é expresso por um vetor coluna,

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (33.23)$$

que é chamado de *quadri-vetor* de coordenadas do evento. O fator c foi introduzido aqui para ajustar a dimensão: o primeiro componente tem a mesma dimensão dos outros. O *espaço-tempo* é o conjunto de todos os eventos. Um evento é também chamado de *ponto do universo*. Para descrever os eventos, podemos utilizar um outro sistema de coordenadas, S' . Assim, um *único* evento arbitrário, digamos P , no espaço-tempo pode corresponder aos quadri-vetores

$$P \longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ no sistema } S, \right. \quad (33.24)$$

$$\left. \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ no sistema } S'. \right.$$

Isto implica, um quadri-vetor é função de outro. Desta forma, devemos ter, em

geral, as relações,

$$\begin{aligned} ct' &= f_0(ct, x, y, z), \\ x' &= f_1(ct, x, y, z), \\ y' &= f_2(ct, x, y, z), \\ z' &= f_3(ct, x, y, z), \end{aligned}$$

e sua inversa,

$$\begin{aligned} ct &= f_0^{-1}(ct', x', y', z'), \\ x &= f_1^{-1}(ct', x', y', z'), \\ y &= f_2^{-1}(ct', x', y', z'), \\ z &= f_3^{-1}(ct', x', y', z'). \end{aligned}$$

Esta relação é a transformação de coordenada mais geral possível. A Teoria Geral de Relatividade lida com transformação geral de coordenadas. Aqui vamos estudar o caso mais simples e básico, isto é, a relatividade restrita.

Na relatividade restrita, consideramos o caso em que a transformação seja linear. Isto é, as funções f são funções lineares,

$$\begin{aligned} ct' &= \lambda_{00} ct + \lambda_{01}x + \lambda_{02}y + \lambda_{03}z + b_0, \\ x' &= \lambda_{10} ct + \lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \lambda_{13}z + b_1, \\ y' &= \lambda_{20} ct + \lambda_{21}x + \lambda_{22}y + \lambda_{23}z + b_2, \\ z' &= \lambda_{30} ct + \lambda_{31}x + \lambda_{32}y + \lambda_{33}z + b_3, \end{aligned}$$

onde $\{\lambda_{\mu\nu}, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\}$ e $\{b_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ são constantes. Podemos utilizar a notação matricial,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (33.25)$$

onde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \lambda_{03} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{20} & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{30} & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Note que a transformação Eq.(33.25) contém alguns casos conhecidos. Por exemplo, o significado do termo que contém b_0, b_1 , etc fica claro se escolher Λ como uma matriz de identidade,

$$\Lambda \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Neste caso, a transformação fica

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

isto é, a transformação corresponde a apenas deslocamento de origem da coordenada por $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ e do tempo por b_0/c . Assim, sem perder generalidade, sempre podemos escolher o quadri-vetor $b = 0$, isto é, $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$. Desta forma, daqui adiante sempre tomamos $b = 0$, isto é, consideramos apenas transformação do tipo

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (33.26)$$

Agora, se

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & A \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (33.27)$$

sendo

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então, a transformação corresponde a uma rotação dos eixos das coordenadas espaciais. Isto é,

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ \vec{r}' &= A \vec{r}. \end{aligned}$$

Quando a matriz Λ tem a forma,

$$\Lambda \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (33.28)$$

corresponde à transformação de Galilei,

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x - vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \quad (33.29)$$

entre dois sistemas de coordenadas tendo a velocidade relativa v na direção do eixo x .

Vamos considerar a propagação da luz. Isto é, um pulso de luz foi emitido no ponto de universo P_A e observado no ponto P_B . Isto é, no sistema de coordenadas S , um pulso de luz foi emitido no instante t_A no ponto $\vec{r}_A$ e observado no instante t_B no ponto $\vec{r}_B$. Assim,

$$P_A(\text{ponto de emissão do pulso}) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} ct_A \\ x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}, \text{ no sistema } S, \\ \begin{pmatrix} ct'_A \\ x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{pmatrix}, \text{ no sistema } S', . \end{array} \right.$$

e

$$P_B(\text{ponto de recepção do pulso}) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} ct_B \\ x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}, \text{ no sistema } S, \\ \begin{pmatrix} ct'_B \\ x'_B \\ y'_B \\ z'_B \end{pmatrix}, \text{ no sistema } S'. \end{array} \right.$$

Sabendo que a velocidade da propagação da luz é c , temos que ter

$$\Delta s^2 \equiv c^2 (t_B - t_A)^2 - (\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 = 0. \quad (33.30)$$

Pelo fato da velocidade da luz não depender do sistema de observação, devemos ter também no sistema S' ,

$$\Delta s'^2 \equiv c^2 (t'_B - t'_A)^2 - (\vec{r}'_B - \vec{r}'_A)^2 \rightarrow 0, \quad (33.31)$$

só que se utilizamos a regra de transformação de Galilei, Eq.(33.29), por exemplo,

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &= c^2 (t_B - t_A)^2 - (x_B - vt_B - x_A + vt_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2 \\ &= c^2 (t_B - t_A)^2 - (\vec{r}_B - \vec{r}_A)^2 + 2v(x_B - x_A)(t_B - t_A) - v^2(t_B - t_A)^2 \\ &= 2v(x_B - x_A)(t_B - t_A) - v^2(t_B - t_A)^2, \end{aligned}$$

o qual, em geral, não é nulo. Claro que o resultado da experiência de Michelson-Moley não deve depender de tempo e posição. Desta forma, vemos que a transformação de Galilei e o resultado da experiência de Michelson-Moley não são compatíveis.

Então, qual transformação será compatível? Para ver isto, vamos escrever a Eq.(33.30) na forma matricial como

$$\Delta s^2 = \begin{pmatrix} c\Delta t & \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}.$$

onde, para facilitar a notação, introduzimos

$$\Delta t \equiv t_B - t_A, \quad \Delta x = x_B - x_A, \text{ etc.}$$

Por outro lado, utilizando a Eq.(33.26), temos

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} c\Delta t' & \Delta x' & \Delta y' & \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\Delta t & \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \Lambda^T,$$

então,

$$\begin{aligned} \Delta s'^2 &\equiv \begin{pmatrix} c\Delta t' & \Delta x' & \Delta y' & \Delta z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\Delta t & \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Queremos que

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2$$

independentemente de valores de $c\Delta t$, Δx , Δy e Δz . Isto é possível só se

$$\Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (33.32)$$

ou escrevemos

$$\Lambda^T G \Lambda = G, \quad (33.33)$$

onde

$$G \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Verificamos facilmente que a transformação dada pela Eq.(33.28) não satisfaz a condição (33.32). Vamos então determinar Λ para um caso simples. Suponhamos

que o sistema S' esteja em movimento uniforme com a velocidade v relativa ao sistema S na direção x . Para simplificar os cálculos, escolhemos que

$$\begin{aligned} y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Neste caso, a forma do Λ fica

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} & 0 & 0 \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33.34)$$

Como esta matriz se separa em dois setores independentes, um referente a (ct, x) e outro referente a (y, z) , podemos considerar só a parte (ct, x) , pois o setor (y, z) fica invariante. Assim, a condição Eq.(33.32) fica escrita como

$$\begin{pmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{10} \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{01} \\ \lambda_{10} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (33.35)$$

Em termos de componentes, temos 3 equações independentes para 4 incógnitas,

$$\lambda_{00}^2 - \lambda_{10}^2 = 1, \quad (33.36)$$

$$\lambda_{11}^2 - \lambda_{01}^2 = 1, \quad (33.37)$$

$$\lambda_{00}\lambda_{01} - \lambda_{11}\lambda_{10} = 0. \quad (33.38)$$

Quando existem 3 equações independentes para 4 variáveis incógnitas, podemos escolher uma delas e expressar o resto em termos desta variável. Ou, podemos escolher um outro parâmetro qualquer e expressar o resto em termos deste parâmetro para satisfazer todas as equações. Para isto, escrevemos a Eq.(33.38) por

$$\frac{\lambda_{10}}{\lambda_{00}} = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{11}} \equiv \beta,$$

e expressamos o resto das equações em termos de β . Temos

$$\lambda_{10} = \beta\lambda_{00},$$

$$\lambda_{01} = \beta\lambda_{11}.$$

Substituindo em (33.36) e (33.37), temos

$$\begin{aligned}(1 - \beta^2) \lambda_{00}^2 &= 1, \\ (1 - \beta^2) \lambda_{11}^2 &= 1.\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\lambda_{00} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (33.39)$$

$$\lambda_{11} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (33.40)$$

Agora vamos considerar o significado do parametro β . Pela transformação,

$$\begin{aligned}ct' &= \lambda_{00} ct + \lambda_{01} x, \\ x' &= \lambda_{10} ct + \lambda_{11} x.\end{aligned}$$

Note que $x = 0$ corresponde à origem do sistema de coordenadas S . Assim, o movimento da origem do sistema S aparece no sistema S' ,

$$\begin{aligned}ct' &= \lambda_{00} ct, \\ x' &= \lambda_{10} ct\end{aligned}$$

ou

$$x'(x = 0) = \frac{\lambda_{10}}{\lambda_{00}} ct' = \beta ct'. \quad (33.41)$$

Por outro lado, sabemos que no sistema S' , a origem do sistema S está correndo na direção $-x'$ com a velocidade v . Isto é, temos

$$x'(x = 0) = -vt'.$$

Comparando este resultado com a equação acima, temos

$$\beta = -\frac{v}{c}. \quad (33.42)$$

Voltando para as Eqs.(33.39) e (33.40), agora sabemos como determinar os sinais. Para $\beta = 0$, os dois sistemas devem ser idênticos.. Isto é, a matriz de transformação Λ deve ser a matriz de identidade. Neste caso, temos escolher o sinal +

para ambas equações, (33.39) e (33.40). Assim,

$$\begin{aligned}\lambda_{00} &= \lambda_{11} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \lambda_{01} &= \lambda_{10} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}$$

Frequentemente utilizamos o que é definido como *fator de Lorentz*, γ ,

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Finalmente, temos a *transformação de Lorentz*,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (33.43)$$

Exercícios :

1. Verifique que

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Confirme que

$$ds'^2 = ds^2.$$

3. Calcule o inverso da matriz de transformação de Lorentz,

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}^{-1},$$

e interprete o resultado.

4. Considere o significado do sinal $-$ na Eq.(33.40).
5. Obtenha a forma de transformação quando $\beta = v/c \ll 1$. (Expande os elementos de matriz da transformação em relação a β). Verifique neste limite, a transformação de Lorentz reproduz a transformação de Galilei, Eq.(33.29).

33.2. Simultaneidade, Contração de Lorentz, Dilatação do Tempo

A universalidade da velocidade da luz, independentemente do sistema de coordenadas inercial que a observa, é naturalmente incorporada na transformação de Lorentz, a qual envolve as coordenadas espaciais e temporal ao mesmo tempo. Este aspecto acarreta uma consequência não intuitiva, isto é, o conceito de simultaneidade não é um conceito universal de um sistema para outro. Mais concretamente: dois eventos que aparecem simultaneamente num sistema de coordenadas S não correspondem eventos simultâneos num outro sistema de coordenadas S' . De fato, consideramos dois eventos simultâneos no sistema S ,

$$\begin{aligned} P_1 &\rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \end{pmatrix}, \\ P_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} ct \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

No sistema S' , estes eventos são representados pelas coordenadas,

$$P_1 \rightarrow \begin{pmatrix} ct'_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct + \gamma\beta x_1 \\ \gamma\beta ct + \gamma x_1 \end{pmatrix}, \quad (33.44)$$

$$P_2 \rightarrow \begin{pmatrix} ct'_2 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct + \gamma\beta x_2 \\ \gamma\beta ct + \gamma x_2 \end{pmatrix}. \quad (33.45)$$

Assim,

$$c(t'_2 - t'_1) = \gamma\beta(x_2 - x_1) \neq 0,$$

se

$$x_1 \neq x_2.$$

Isto é, os dois eventos não aparecem simultâneos no sistema S' . Naturalmente, o efeito de não-simultaneidade é extremamente pequeno para velocidades que nos acostumados no dia-a-dia.

Exercícios :

1. Qual é a diferença de tempo de dois eventos, que ocorrem exatamente ao meio dia em Rio e São Paulo, quando visto de um avião voando com a velocidade de 10.000 km por hora.

Das Eqs.(33.44) e (33.45), temos também,

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \quad (33.46)$$

ou

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma} (x'_2 - x'_1) . \quad (33.47)$$

Isto é, um intervalo espacial entre dois pontos fixos no sistema S' separados por

$$L' = |x'_2 - x'_1| ,$$

ocupa o intervalo de espaço no sistema S num dado instante,

$$L = \frac{1}{\gamma} L'_{\text{fixo no } S'} . \quad (33.48)$$

Isto é, o intervalo espacial aparenta menor no sistema S , já que sempre $\gamma > 1$ se $v \neq 0$.

É importante lembrar que a Eq.(33.46) *não* pode ser utilizada para concluir que o intervalo entre dois pontos *fixos* no sistema S aparenta ser *maior* no sistema S' que está em movimento em relação a S . Isto porque, para deduzir a relação Eq.(33.46) ou Eq.(33.47), utilizamos o fato de que os dois eventos são simultâneos no sistema S , e os dois tempos correspondentes não são iguais no sistema S' . Quando os pontos estão parados em relação ao sistema S' , a diferença em tempo não importa, mas se o objeto está em movimento, a diferença do tempo influencia nas posições. Assim, se queremos calcular o intervalo aparente no sistema S' correspondente ao intervalo espacial fixo no sistema S , temos que igualar os tempos dos dois pontos no sistema S' , e não no sistema S . Fazendo assim, temos

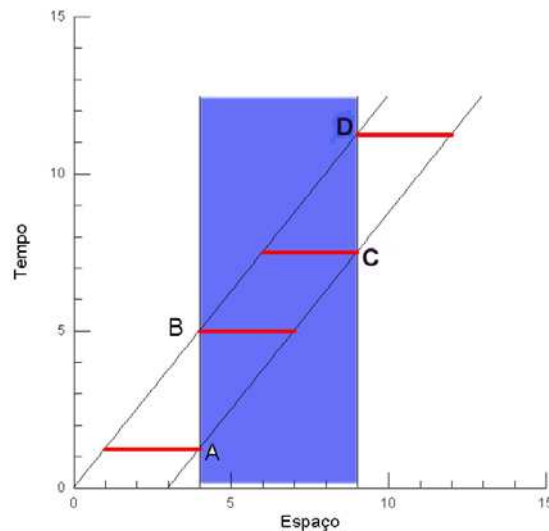
$$L' = \frac{1}{\gamma} L_{\text{fixo no } S} . \quad (33.49)$$

O resultado, Eq.(33.48) ou Eq.(33.49) é chamado de *contração de Lorentz* devido ao movimento relativístico. Qualquer objeto de comprimento L_0 ocupa, quando em movimento, um intervalo espacial menor, isto é, L_0/γ num instante do tempo.

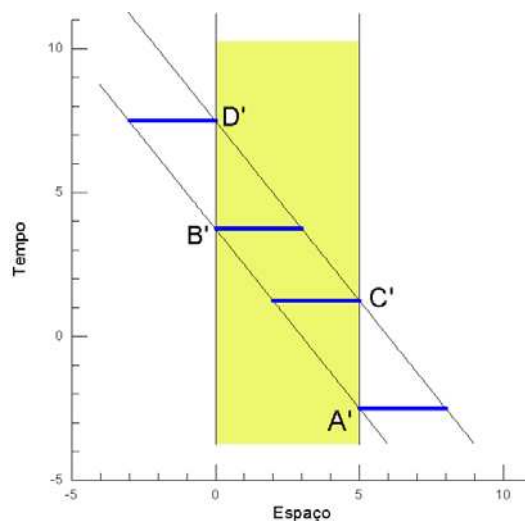
A afirmação acima pode causar a seguinte paradoxo aparente. Considere um trem correndo em alta velocidade o qual entra num túnel cujo comprimento é igual ao do trem. Devido à contração de Lorentz, num determinado instante de

tempo por um relógio fixo no túnel, o trem pode ficar inteiramente dentro do túnel.. Assim, fechando as entradas do túnel neste instante, o trem fica confinado no túnel.. Por outro lado, num determinado instante por um relógio fixo no trem, um observador do trem pode concluir que quando a cabeça do trem já saiu do túnel, o último vagão do trem ainda não está entrando no túnel..

A situação acima pode parecer como um paradoxo, mas na verdade, não há problema nenhum se considerar que a simultaneidade não é conceito universal e considerando o movimento relativo. Veja a figura 1.



Nesta figura, o eixo- x representa a coordenada espacial no sistema onde o túnel está parado. A posição do túnel está indicado com duas retas de $x = 4$ e $x = 9$. Isto é, o intervalo $[4, 9]$ é o túnel.. No eixo vertical, indica o tempo. Assim, os intervalos espaciais ocupados pelo trem em certos instantes são indicados pelos segmentos horizontais. A: o trem está entrando no túnel, B: o trem acabou de entrar completamente no túnel, D: o trem está começando a sair do túnel, E: o trem acabou de sair do túnel.. Aqui, o comprimento do trem e do túnel foi tomado como 5, e a velocidade do trem $= 4/5c$. Na figura 2, é mostrada a mesma situação, vista agora do sistema de referência do trem.



O intervalo ocupado pelo trem neste sistema de referência é $[0, 5]$. Neste sistema de referência, o túnel está se locomovendo de lado direito para esquerda como indicado pelos segmentos horizontais, A' , B' , C' , e D' . Os eventos A' , B' , C' e D' correspondem, respectivamente, aos eventos A, B, C e D na figura anterior. No sistema de referência do trem, dentro de intervalo do tempo dos evento C' e B' , o túnel fica completamente contido no comprimento do trem. Entretanto, note que o evento B (instante em que o final do trem começa a entrar no túnel) fica posterior ao do evento C (instante em que a frente do trem está saindo do túnel). A situação é invertida comparada com a figura anterior.

É importante lembrar que a contração de Lorentz é uma consequência da transformação de Lorentz, e não uma *lei* de transformação de comprimento de um sistema para outro. Quando falar em comprimento (espacial) de um objeto em movimento, sempre tem que se especificar um tempo comum para medir a distância entre dois pontos. Assim, o conceito de comprimento não é universal. Além disto, quando falar em contração de Lorentz, esta somente é válida entre um sistema em movimento em relação a outro, e onde o objeto é fixo num dos dois sistemas. Não deve ser utilizada a fórmula de contração de Lorentz entre dois sistemas de coordenadas para converter o comprimento de um objeto que está em movimento em ambos sistemas.

Agora vamos ver como um intervalo do tempo medido num ponto fixo no sistema S' aparece no sistema S . Para isto, consideramos 2 eventos,

$$\begin{aligned} P_1 &\rightarrow \begin{pmatrix} ct'_1 \\ x' \end{pmatrix} \\ P_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} ct'_1 + c\Delta T' \\ x' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O intervalo dos dois eventos correspondem a passagem do tempo $\Delta T'$ marcado num relógio fixo no ponto x' do sistema S' . Estes eventos ficam no sistema S ,

$$\begin{aligned} P_1 &\rightarrow \begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'_1 \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma ct'_1 - \gamma\beta x' \\ -\gamma\beta ct'_1 + \gamma x' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct'_1 + c\Delta T' \\ x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma c(t'_1 + \Delta T') - \gamma\beta x' \\ -\gamma\beta (ct'_1 + \Delta T') + \gamma x' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O intervalo do tempo medido no sistema S fica

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \gamma \Delta T', \quad (33.50)$$

isto é, a marca do tempo no sistema S fica γ vezes maior (o tempo passa mais rápido) do que no sistema S' onde o relógio está parado. Este fato é chamado de dilatação do tempo de Lorentz.

A dilatação do tempo pode ser observado experimentalmente. A partícula elementar, chamada méson $\pi^\pm$ (sua existência foi prevista por H. Yukawa em 1934 e foi descoberta pelo físico brasileiro, Prof. Cesar Lattes em 1947), quando produzido pelo processo de colisão entre outras partículas elementares decai em duas outras partículas, chamado muon μ e neutrino ν . Numa reação de partículas elementares à alta energia, o méson π fica produzido com velocidade relativística. O processo de decaimento assim aparece retardado no laboratório, como se tivesse uma vida média γ vezes maior.

A dilatação do tempo, como no caso de contração de Lorentz, só vale para o intervalo de tempo de um relógio parado num sistema para outro.

O ponto fundamental da transformação de Lorentz é que ela descreve uma transformação linear entre dois *quadri-vetores*. Os “paradoxos” aparecem sempre quando se utiliza a transformação de Lorentz da forma imprópria, sem introduzir o conceito de quadri-vetor.

33.3. Covariância Relativística

Qualquer lei da física, em geral, é descrita em termos de uma expressão matemática,

$$A = B, \quad (33.51)$$

onde A e B são quantidades bem definidas matematicamente. Quando passamos de um sistema de coordenadas para outro, estas quantidades se transformaram em

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A', \\ B &\rightarrow B'. \end{aligned}$$

A lei é dita *covariante sob a transformação* quando, no novo sistema de coordenadas preserva a *mesma forma* de antes, isto é,

$$A' = B'. \quad (33.52)$$

Por exemplo, a lei de Newton para movimento de uma partícula num sistema de coordenadas, é expressa pelas 3 equações abaixo, uma para cada componente,

$$m\ddot{x} = F_x, \quad (33.53)$$

$$m\ddot{y} = F_y, \quad (33.54)$$

$$m\ddot{z} = F_z. \quad (33.55)$$

onde m é a massa de partícula. A equação de movimento de Newton, como uma lei, é constituída pelas 3 equações como todo. É óbvio que, apenas a Eq.(33.53), por exemplo, não pode ser considerada como uma lei, pois, quando escolhemos um outro sistema de coordenadas por uma rotação de eixos, os três componentes da aceleração e da força se misturam entre si.

Vamos considerar um outro sistema de coordenadas $\{x', y', z'\}$, obtido por uma rotação de eixos do sistema de coordenadas,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

onde A é a matriz de transformação correspondente à rotação. Sabemos que o tri-vetor de aceleração se transforma, sob esta rotação, em

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}, \quad (33.56)$$

Por outro lado, os componentes da força também se transformam como

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}. \quad (33.57)$$

Utilizando estas relações (33.56) e (33.57), a equação de movimento,

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad (33.58)$$

fica

$$mA^{-1} \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix}.$$

É importante notar que aparece a matriz inversa de A em ambos lados da mesma forma. Isto porque, a aceleração e a força tem mesma natureza de transformação como vetor. Multiplicando A aos dois lados para cancelar a matriz A^{-1} , temos

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix}. \quad (33.59)$$

A equação de movimento (33.59) tem a mesma forma como (33.58). Desta forma, podemos dizer que a equação de movimento de Newton é covariante sob a transformação correspondente a uma rotação dos eixos.

Na verdade, é a esta propriedade de covariância sob a transformação de rotação que permite escrever a equação de Newton na forma vetorial,

$$m\vec{\alpha} = \vec{F}, \quad (33.60)$$

onde $\vec{\alpha}$ é a aceleração (tri-vetor) e $\vec{F}$ é a força (tri-vetor). A forma acima *não depende da escolha do sistema de coordenadas*. As equações, (33.58) ou (33.59) são uma *representação particular* da Eq.(33.60). Em outras palavras, podemos escolher qualquer direção para escolher os eixos de coordenadas para descrever as equações diferenciais em suas três componentes. Ou, dito ainda de outra forma; a lei de movimento de Newton não define qualquer direção privilegiada a priori.. Esta propriedade é fundamental para uma lei geral, pois as leis da natureza não devem escolher uma direção ou um sistema de coordenadas privilegiado.. Note que, a covariância é possível só quando a lei iguala as duas quantidades que se transformam do mesmo jeito. Em geral, qualquer observável pode ser classificada de acordo com sua propriedade de transformação. Isto é, um observável deve ser ou *escalar*, ou *vetor*, ou *tensor*, etc. A lei covariante deve igualar as duas quantidades de mesma categoria, isto é,

$$\begin{aligned} \text{Escalar} &= \text{Escalar}, \\ \text{Vetor} &= \text{Vetor} \\ \text{Tensor} &= \text{Tensor} \\ &\vdots \end{aligned}$$

A covariância é uma propriedade que é definida só quando a regra de transformação de coordenadas é dada. Assim, quando muda a regra de transformação, muda a propriedade de covariância. O exemplo acima é a covariância da lei de Newton sob a transformação de coordenadas em relação à rotação dos eixos tridimensionais.

A lei de Newton continua *covariante* sob transformação de Galilei entre dois sistemas de coordenadas, mas *não é covariante* sob a transformação de Lorentz. Isto é óbvio pois, como foi dito, para manter a covariância, a equação tem que ser uma igualdade entre *quadri-vetores* e não *tri-vetores*.

A transformação de Lorentz é a transformação entre dois quaisquer sistemas de referência inerciais para satisfazer o fato experimental de que a velocidade de

luz é uma constante universal. Assim, se a lei da natureza *não fosse covariante*, então deveria existir algum sistema de referência inercial privilegiado.. Mas isto não parece razoável. Qualquer sistema inercial deve ser equivalente para descrever uma lei da natureza, justamente como no caso de escolha da direção do sistema de coordenadas. De fato, podemos provar que as leis de Maxwell para onda eletromagnética é *covariante* sob transformação de Lorentz.

Assim, postulamos:

- Qualquer lei da natureza deve ser descrita na forma covariante sob transformação de Lorentz.

Isto é equivalente a dizer:

- A lei da natureza não distingue nenhum sistema de referência inercial privilegiado de outros relacionados pela transformação de Lorentz.

O postulado acima é conhecido como Princípio de Relatividade. Naturalmente, se substituísimos a palavra, *transformação de Lorentz* por *transformação de Galilei*, então a equação de movimento de Newton satisfaria o princípio de relatividade, que é neste caso, a relatividade *Galileana*. Na Relatividade Restrita, o importante é que os sistemas de referência inerciais estão relacionados entre si pela transformação de Lorentz.

Para satisfazer o Princípio de Relatividade Restrita, devemos alterar a equação de Newton. Entretanto, isto não quer dizer que podemos introduzir uma nova lei arbitrariamente. Para introduzir uma modificação na mecânica de Newton de tal forma que satisfaça o Princípio de Relatividade restrita, devemos considerar os seguintes pontos como guia.

- A nova equação deve ser uma igualdade entre dois quadri-vetores e não tri-vetores.
- Como a transformação de Lorentz no limite de $\beta \ll 1$ se reduz à transformação de Galilei, a nova lei deve coincidir com a Lei de Newton neste limite.

Tendo os dois pontos acima como guia, vamos considerar a lei de conservação de momento na relatividade restrita.

33.4. Conservação de Momento

Na mecânica de Newton, sabemos que o momento linear de um sistema isolado é conservado no tempo. Por exemplo, vamos considerar o processo de colisão de duas partículas pontiformes, com massas m_1 e m_2 , respectivamente. Em termos de momentos, podemos descrever o processo de colisão por

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*, \quad (33.61)$$

onde $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ são, respectivamente, os momentos antes da colisão de partículas 1 e 2, e $\vec{p}_1^*$ e $\vec{p}_2^*$ são os momentos depois da colisão. Na mecânica de Newton, podemos considerar a Eq.(33.61) como uma lei, descrevendo a conservação de momento total. Entretanto, na relatividade restrita, não pode ser uma lei, pois não é uma igualdade entre dois quadri-vetores. Na relatividade restrita, onde a lei deve ser covariante sob transformação de Lorentz, devemos esperar que

$$\begin{pmatrix} p_{1,0} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{2,0} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,0}^* \\ \vec{p}_1^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{2,0}^* \\ \vec{p}_2^* \end{pmatrix}, \quad (33.62)$$

onde, para cada momento, acrescentamos um componente p_0 a mais para se tornar um quadri-vetor. Este quadri-vetor para momento é chamado de *quadri-momento*. Não sabemos ainda o que é este componente p_0 . A única coisa que exijamos aqui é que cada momento deve se comportar como um quadri-vetor sob a transformação de Lorentz. Isto é, quando visto o processo de colisão num outro sistema de coordenadas inercial, S' , a conservação deve ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} p_{1,0} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} p_{2,0} \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} p_{1,0}^* \\ \vec{p}_1^* \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} p_{2,0}^* \\ \vec{p}_2^* \end{pmatrix}', \quad (33.63)$$

onde

$$\begin{pmatrix} p_{1,0} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}' = \Lambda \begin{pmatrix} p_{1,0} \\ \vec{p}_1 \end{pmatrix}, \quad (33.64)$$

e Λ é a matriz de transformação de Lorentz, e analogamente para outros momentos.

Sendo Λ a matriz de transformação de Lorentz, deve satisfazer a propriedade Eq.(33.32). Isto implica na Eq.(33.64),

$$p_{1,0}'^2 - \vec{p}_1'^2 = p_{1,0}^2 - \vec{p}_1^2, \quad (33.65)$$

em qualquer sistema de referência. Ou seja,

$$p_{1,0}^2 - \vec{p}_1^2 = p_{1,0}'^2 - \vec{p}_1'^2 = p_{1,0}''^2 - \vec{p}_1''^2 = \dots \quad (33.66)$$

Podemos eventualmente escolher o sistema de referência o qual se move junto com a partícula 1 antes da colisão. Naturalmente neste sistema, $\vec{p} = 0$. Assim, temos

$$p_{1,0}^2 - \vec{p}_1^2 = p_{1,0}'^2 - \vec{p}_1'^2 = \tilde{p}_{1,0}^2 \quad (33.67)$$

onde $\tilde{p}_{1,0}$ é o valor do p_0 da partícula 1 no sistema de referência onde esta partícula está repousa. Como não há velocidade da partícula neste sistema, a quantidade $\tilde{p}_{1,0}$ deve ser uma quantidade associada alguma natureza intrínseca da partícula 1. Vamos chamar esta quantidade por Z_1 só para simplificar a notação.

$$Z_1 \equiv \tilde{p}_{1,0}. \quad (33.68)$$

Assim, da Eq.(33.67), temos

$$p_{1,0} = \sqrt{Z_1^2 + \vec{p}_1^2}. \quad (33.69)$$

Note que a relação (33.69) é válida para qualquer valor de momento da partícula 1. Assim, vale também

$$p_{1,0}^* = \sqrt{Z_1^2 + \vec{p}_1^{*2}} \quad (33.70)$$

para o momento após a colisão, onde o valor de Z_1 é igual (quantidade intrínseca da partícula 1). Com o mesmo argumento, temos,

$$p_{2,0} = \sqrt{Z_2^2 + \vec{p}_2^2}, \quad (33.71)$$

e

$$p_{2,0}^* = \sqrt{Z_2^2 + \vec{p}_2^{*2}}. \quad (33.72)$$

Em geral, para uma determinada partícula, o quadri-momento é completamente especificado pelo momento (3-vetor) e o valor de Z ,

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Z^2 + \vec{p}^2} \\ \vec{p} \end{pmatrix}. \quad (33.73)$$

Podemos identificar o significado da quantidade Z utilizando o limite não relativística ($v \ll c$) da transformação de Lorentz. No sistema em que a partícula está em repouso, seu quadri-momento tem a forma,

$$\begin{pmatrix} Z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33.74)$$

Vamos observar esta partícula no sistema onde ela possui velocidade v na direção x . O quadri-momento neste sistema é obtido do quadri-momento no sistema repouso Eq.(33.74) pela transformação de Lorentz com a velocidade v (*Lorentz boost*)

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z\gamma \\ Z\gamma\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33.75)$$

donde temos

$$p_x = Z\gamma\beta,$$

ou

$$Z = \frac{p_x}{\gamma\beta} = \frac{p_x c}{\gamma v}.$$

Quando a velocidade $v \ll c$, sabemos que

$$p_x \rightarrow mv,$$

e

$$\gamma \rightarrow 1,$$

temos que ter

$$Z = mc.$$

Como esperava, o valor de Z é associada a massa, uma quantidade intrínseca da partícula. Assim, a Eq.(33.75) fica

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc\gamma \\ mv\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33.76)$$

A forma relativística do momento é

$$p_x = mv\gamma = \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (33.77)$$

e

$$p_0 = m\gamma = \frac{mc}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (33.78)$$

Podemos escrever ainda que

$$p_x = m_{rel}(v) v, \quad (33.79)$$

onde

$$m_{rel}(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

é a massa efetiva da partícula quando tem a velocidade v . Para deixar explícito a diferença com esta massa efetiva, chamamos m como a *massa de repouso*.

Voltando para Eqs.(33.69),(??),(33.71) e (33.72), temos

$$p_{1,0} = \sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2 c^2},$$

$$p_{1,0}^* = \sqrt{\vec{p}_1^{*2} + m_1^2 c^2},$$

$$p_{2,0} = \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2},$$

e

$$p_{2,0}^* = \sqrt{\vec{p}_2^{*2} + m_2^2 c^2},$$

e do primeiro componente da conservação de quadri-momento, Eq.(33.62), temos

$$\sqrt{\vec{p}_1^2 + m_1^2 c^2} + \sqrt{\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^2} = \sqrt{\vec{p}_1^{*2} + m_1^2 c^2} + \sqrt{\vec{p}_2^{*2} + m_2^2 c^2}. \quad (33.80)$$

O significado desta equação fica mais claro quando consideramos o limite não relativístico. Quando as velocidades de todas as partículas são muito menores do que c , temos

$$\vec{p}^2 \ll m^2 c^2$$

para cada um dos termos. Neste caso, podemos utilizar a expansão²⁷,

$$\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} = mc \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2}} = mc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^2}{m^2 c^2} + \dots \right),$$

²⁷Utiliza a expansão binomial de Newton,

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots$$

Substituindo esta expansão em cada um dos termos da Eq.(33.80), temos

$$\frac{1}{c} \left\{ m_1 c^2 + \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + m_2 c^2 + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + \dots \right\} = \frac{1}{c} \left\{ m_1 c^2 + \frac{\vec{p}_1^{*2}}{2m_1} + m_2 c^2 + \frac{\vec{p}_2^{*2}}{2m_2} + \dots \right\}$$

Assim, considerando até a ordem mais baixa, a primeira componente da lei da conservação implica

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_1^{*2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{*2}}{2m_2}, \quad (33.81)$$

que é nada mais é do que a conservação da soma das energias cinéticas das partículas,

$$K_1 + K_2 = K_1^* + K_2^*.$$

Ou seja, a lei de conservação de quadri-momentum Eq.(33.62) está englobando a lei de conservação de momento (3-vetor) mais a conservação de energia numa lei só!! Concluimos que o primeiro componente do quadri-vetor de uma partícula deve ser a energia da partícula dividido por c ,

$$p_0 \rightarrow E/c,$$

e o quadri-momento relativístico de uma partícula é formado por

$$\begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix},$$

sendo

$$E/c = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}. \quad (33.82)$$

Desta forma, a lei da conservação de quadri-momento Eq.(33.62) é equivalente à conservação de energia e momento,

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_1^* + E_2^*, \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^*. \end{aligned}$$

Também pode ser obtida pela expansão de Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots$$

Na Relatividade Restrita, a relação entre a energia de uma partícula e seu momento deve ser dada por Eq.(33.82) e não como no caso Newtoniano,

$$E_N = \frac{1}{2m} \vec{p}^2,$$

pois, do ponto de vista relativístico, a lei de conservação Newtoniana, Eq.(33.81) é uma aproximação da relação (33.80). Da Eq.(33.82) a energia de uma partícula é dada como função do momento por

$$\begin{aligned} E &= c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2} \\ &= mc^2 + \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{1}{8m^3c^2} \vec{p}^4 + \dots \end{aligned}$$

Se usarmos a Eq.(33.78), podemos expressar a energia da partícula em função da sua velocidade,

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= mc^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{3}{8}\beta^4 + \dots \right\} \\ &= mc^2 + \frac{m}{2}v^2 - \frac{3m}{8c^2}v^4 + \dots \end{aligned}$$

Estas expressões mostram que, mesmo que a velocidade da partícula seja nula, a energia desta não é nula, mas possui a *energia de massa de repouso*

$$E_0 = mc^2, \quad (33.83)$$

o que é conhecida como a relação de Einstein entre massa e energia.

Exercícios :

1. Suponha que duas partículas de massa m_1 e m_2 colidem com momento $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$, e gludem formando um sistema composto. Expresse o quadri-momento do sistema composto final em termos de $m_1, m_2, \vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$. Qual é a massa deste sistema composto? Responde com justificativa, se esta massa é maior ou menor que a soma das massas $m_1 + m_2$.
2. Considere uma partícula de massa m com momento $\vec{p}$. Obtenha a transformação de Lorentz para o sistema de referência onde esta partícula esteja parado.

3. A partícula acima decai em duas partículas com massa m_1 e m_2 . Utilizando a conservação de quadri-momento, obtenha os momentos das partículas finais.

33.5. Reações, Energia de Ligação

Como visto no Exercícios acima, o sistema composto formado de colisão de duas partículas tem a massa maior que a soma das massas iniciais. Mas, as vezes, o sistema composto final pode ter um estado ligado estável. Neste caso, o sistema composto formado após da colisão libera a energia em excesso e adquire o estado estável. Esquemáticamente escrevemos como

$$A + B \rightarrow M_{A+B}^* \rightarrow M_{A+B} + Q/c^2, \quad (33.84)$$

onde Q é a energia emitido pela reação. Nas reações químicas, esta energia é emitido geralmente na forma de radiação eletromagnética mas também eventualmente acompanha a emissão de elétrons quando o processo envolve a ionização.. Nas reações nucleares, o excesso da energia é também liberado em termos de radiação eletromagnética (raio γ), mas muitas vezes acompanha a emissão de outras partículas (α , β , neutrinos).

Para formar um estado ligado estável, é necessário que a massa final é menor que a soma das massas iniciais,

$$M_{A+B} < m_A + m_B.$$

Senão, em geral o sistema composto decai de novo para A e B . A quantidade $B \equiv \frac{1}{c^2} (m_A + m_B - M_{A+B})$ é chamada de *energia de ligação*. Se $B < 0$, o sistema composto $A + B$ é estável para decaimento para o estado $A + B$, e se contrário, o sistema é instável..

Exercícios :

1. Um núcleo de número de massa A e número atômico Z é o estado ligado de Z prótons e $N = A - Z$ nêutrons.. A energia de ligação deste núcleo é dada aproximadamente uma fórmula empírica de Weizsäcker-Bethe,

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \quad (33.85)$$

onde²⁸

$$\begin{aligned}a_V &\simeq 15.654 \text{ MeV}, \\a_S &\simeq 19.655 \text{ MeV}, \\a_{sym} &\simeq 19.681 \text{ MeV},\end{aligned}$$

e

$$a_C \simeq 0.1917 \text{ MeV}.$$

Estime a energia liberada quando 1g de ^{238}U ($A = 238$, $Z = 92$) se fissionam em 2 núcleos de ($A = 119$, $Z = 46$) e compare com a grandeza de energia de dia-a-dia.

33.6. Transformações Sucessivas de Lorentz, Adição de Velocidades

Vamos considerar um objeto, digamos O que está se movendo num sistema de referência, S_A com a velocidade $\vec{v}_{AO}$. Qual é a velocidade desta partícula quando vista de um outro sistema de referência S_B que está se movendo em relação ao sistema S_A com a velocidade, $\vec{v}_{AB}$?

Na mecânica Newtoniana, a resposta é simples,

$$\vec{v}_{BO} = \vec{v}_{AO} + \vec{v}_{AB}, \quad (33.86)$$

mas na relatividade restrita, isto não é correta. Devemos considerar o problema do ponto de vista de transformação de Lorentz. Seja Λ_{AO} a matriz de transformação de Lorentz do sistema de referência da partícula O para o sistema S_A . Um evento qualquer expresso nos dois sistemas está relacionados por

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_A = \Lambda_{AO} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_O \quad (33.87)$$

onde o subscrito O ou A representam o sistema de referência do respectivo quadri-vetor. Da mesma forma, se Λ_{BA} é a matriz de transformação de Lorentz que transforma um quadri-vetor no sistema S_A para o sistema S_B , então,

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_B = \Lambda_{BA} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_A. \quad (33.88)$$

²⁸ $\text{MeV} = \text{Mega-eletron-volt} = 1.6 \times 10^{-6} \text{ erg} = 1.6 \times 10^{-13} \text{ J}.$

Substituindo a Eq.(33.87) na Eq.(33.88), temos

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_B = \Lambda_{BA} \left(\Lambda_{AO} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_O \right). \quad (33.89)$$

Usando a propriedade de associatividade das operações matriciais, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_B = (\Lambda_{BA}\Lambda_{AO}) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_O \equiv \Lambda_{BO} \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix}_O, \quad (33.90)$$

onde $\Lambda_{OB} \equiv \Lambda_{BA}\Lambda_{AO}$. A equação acima mostra que Λ_{OB} é a matriz de transformação de Lorentz do sistema repouso da partícula para o sistema S' . Podemos provar que Λ_{OB} satisfaz a propriedade da transformação de Lorentz, Eq.(33.32). A velocidade da partícula O no sistema S_B é determinada pela esta matriz Λ_{OB} .

Exercícios :

1. Prove que o produto de duas matrizes, $\Lambda = \Lambda_1\Lambda_2$ satisfaz a propriedade,

$$\Lambda^T G \Lambda = G,$$

se

$$\begin{aligned} \Lambda_1^T G \Lambda_1 &= G, \\ \Lambda_2^T G \Lambda_2 &= G. \end{aligned}$$

Vamos considerar o caso mais simples em que $\vec{v}_{AO}$ e $\vec{v}_{AB}$ sejam paralelos. Neste caso, podemos escolher o eixo x na direção destas velocidades e aplicamos a expressão Eq.(33.43).

$$\begin{aligned} \Lambda_{AO} &\rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{AO} & (\gamma\beta)_{AO} \\ (\gamma\beta)_{AO} & \gamma_{AO} \end{pmatrix}, \\ \Lambda_{BA} &\rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{BA} & (\gamma\beta)_{BA} \\ (\gamma\beta)_{BA} & \gamma_{BA} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Lambda_{BO} &= \Lambda_{AO}\Lambda_{BA} \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{BA} & (\gamma\beta)_{BA} \\ (\gamma\beta)_{BA} & \gamma_{BA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{AO} & (\gamma\beta)_{AO} \\ (\gamma\beta)_{AO} & \gamma_{AO} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{BA}\gamma_{AO}(1 + \beta_{BA}\beta_{AO}) & \gamma_{BA}\gamma_{AO}(\beta_{BA} + \beta_{AO}) \\ \gamma_{BA}\gamma_{AO}(\beta_{BA} + \beta_{AO}) & \gamma_{BA}\gamma_{AO}(1 + \beta_{BA}\beta_{AO}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sabendo que esta matriz é a transformação de Lorentz de O para B ,

$$\Lambda_{BO} \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{BO} & (\gamma\beta)_{BO} \\ (\gamma\beta)_{BO} & \gamma_{BO} \end{pmatrix},$$

podemos identificar que

$$\gamma_{BO} = \gamma_{BA}\gamma_{AO}(1 + \beta_{BA}\beta_{AO}), \quad (33.91)$$

$$(\gamma\beta)_{BO} = \gamma_{BA}\gamma_{AO}(\beta_{BA} + \beta_{AO}). \quad (33.92)$$

Dividindo a Eq.(33.92) por (33.91), temos

$$\beta_{BO} = \frac{\beta_{BA} + \beta_{AO}}{1 + \beta_{BA}\beta_{AO}}.$$

A velocidade da partícula O em relação ao sistema S_B é então,

$$v_{BO} = c\beta_{BO} = \frac{v_{BA} + v_{AO}}{1 + v_{BA}v_{AO}/c^2}. \quad (33.93)$$

Isto é a fórmula de adição das velocidades. Note que quando

$$v_{BA}, v_{AO} \ll c,$$

então esta equação se reduz a adição das velocidades Newtoniana, Eq.(33.86).

O novo fator de Lorentz, γ_{BO} é dada pela Eq.(33.91). Podemos verificar diretamente que

$$\gamma_{BA}\gamma_{AO}(1 + \beta_{BA}\beta_{AO}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta_{BA} + \beta_{AO}}{1 + \beta_{BA}\beta_{AO}}\right)^2}}, \quad (33.94)$$

ou seja,

$$\gamma_{BO} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{BO}^2}},$$

satisfazendo a propriedade da transformação de Lorentz.

Exercícios :

1. Mostra que a velocidade da luz é constante usando a Eq.(33.93)²⁹.

²⁹Tome $v_{AO} = c$.

2. Prove a Eq.(33.94).

A fórmula de adição das velocidades, Eq.(33.93) pode ser obtida mais facilmente se introduzimos uma variável chamada *rapidez*. Já que

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1, \quad (33.95)$$

podemos sempre escrever³⁰,

$$\begin{aligned} \gamma &= \cosh y, \\ \beta\gamma &= \sinh y, \\ \beta &= \tanh y, \end{aligned}$$

³⁰Sabemos que se duas variáveis, a e b satisfazem a relação,

$$a^2 + b^2 = 1,$$

então, podemos escrever sempre

$$\begin{aligned} a &= \cos \theta, \\ b &= \sin \theta. \end{aligned}$$

Quando duas variáveis satisfazem a relação,

$$a^2 - b^2 = 1,$$

então, sempre é possível escrever

$$\begin{aligned} a &= \cosh \theta \\ b &= \sinh \theta. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} i \sin(ix) &= \sinh x, \\ \cos(ix) &= \cosh x. \end{aligned}$$

onde y é chamado rapidez.

Em termos de variável rapidez, a matriz da transformação de Lorentz na direção x fica escrita por

$$\Lambda(y) = \begin{pmatrix} \cosh y & \sinh y \\ \sinh y & \cosh y \end{pmatrix}.$$

Desta forma, o resultado das duas transformações sucessivas de Lorentz fica escrito como

$$\begin{aligned} \Lambda(y_3) &= \Lambda(y_2)\Lambda(y_1) = \begin{pmatrix} \cosh y_2 & \sinh y_2 \\ \sinh y_2 & \cosh y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh y_1 & \sinh y_1 \\ \sinh y_1 & \cosh y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh y_2 \cosh y_1 + \sinh y_2 \sinh y_1 & \cosh y_2 \sinh y_1 + \sinh y_2 \cosh y_1 \\ \cosh y_2 \sinh y_1 + \sinh y_2 \cosh y_1 & \cosh y_2 \cosh y_1 + \sinh y_2 \sinh y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh(y_2 + y_1) & \sinh(y_2 + y_1) \\ \sinh(y_2 + y_1) & \cosh(y_2 + y_1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Daí, temos imediatamente

$$y_3 = y_2 + y_1, \quad (33.96)$$

donde temos

$$\begin{aligned} v_3 &= c \tanh y_3 = c \tanh(y_2 + y_1) \\ &= \frac{c \tanh y_2 + c \tanh y_1}{1 + \tanh y_2 \tanh y_1} = \frac{v_2 + v_1}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \end{aligned}$$

Exercícios :

1. Expresse a energia e momento de uma partícula em termos de sua rapidez y .
2. Calcule a rapidez de uma partícula de massa m com energia E e momento p_x .

34. Problemas

1. No caso de uma transformação de Lorentz na direção x , existe apenas um único parâmetro β . Quantos parâmetros existem para uma transformação de Lorentz mais geral que é definida pela condição (33.32)? O que correspondem estes parâmetros fisicamente?
2. O quadri-momento de uma partícula num sistema de referência S é dado por

$$\begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule a energia da partícula no sistema de referência S' que está em movimento em relação ao sistema S na direção x , com velocidade v .

3. No problema acima, determine o valor do v tal que o momento da partícula no S' fica nulo. Calcule o valor da energia neste caso e confira a expressão da energia de repouso.
4. Considere a colisão entre duas partículas com massa m_1 e m_2 , respectivamente.

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1^f + \vec{p}_2^f,$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \begin{pmatrix} E_{in}/c \\ p_{in} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{p}_2 &= \begin{pmatrix} m_2 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja a partícula 1 incide com a energia E_{in} e momento p_{in} à partícula 2 em repouso. O sistema de referência para um processo de colisão como este é chamado o *Sistema Laboratório* (LAB).

A: Suponha que a partícula 1 ficou espalhado no plano (x, y) com um ângulo θ_{LAB} em relação ao eixo x com momento final p^f , isto é,

$$\vec{p}_1^f = \begin{pmatrix} p^f \cos \theta_{LAB} \\ p^f \sin \theta_{LAB} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Usando a conservação de energia e momento, expresse E^f e p^f em termos de $p_{in}, \theta_{LAB}, m_1$ e m_2 .

B: Obtenha $\vec{p}_2^f$.

5. Consideramos o processo de colisão acima no sistema de referência chamado de *Centro de Massa*. Definimos o sistema de referência Centro de Massa (CM) onde o (tri-) momento total do sistema é nulo. Isto é, no CM, o processo de colisão acima fica escrita como

$$\vec{p}_1^{CM} + \vec{p}_2^{CM} = 0 = \vec{p}_1^{f\,CM} + \vec{p}_2^{f\,CM},$$

no entanto a soma das energias das duas partículas não é nula,

$$E_1^{CM} + E_2^{CM} \neq 0.$$

Na notação usual de física de altas energias, a energia total do sistema no CM é expressa por $\sqrt{s}$, isto é,

$$\sqrt{s} \equiv E_1^{CM} + E_2^{CM}.$$

A: Mostre que

$$\begin{aligned} \sqrt{s} &= \sqrt{(E_{in} + m_2 c^2)^2 - p_{in}^2} \\ &= \sqrt{2m_2 c^2 (E_{in} + m_2 c^2)}. \end{aligned}$$

O que é o menor valor possível de $\sqrt{s}$?

B: Quando a partícula 1 tem a momento final,

$$\vec{p}_1^{f\,CM} = \begin{pmatrix} p^{f\,CM} \cos \theta_{CM} \\ p^{f\,CM} \sin \theta_{CM} \\ 0 \end{pmatrix},$$

expresse $p^{f\,CM}$ em termos de $\sqrt{s}$.

C: Expresse a matriz de transformação de Lorentz do sistema LAB para o sistema CM em termos de $\sqrt{s}$.

D: Estabeleça a relação entre θ_{LAB} e θ_{CM} .

6. Argumente que a definição Newtoniana do sistema de centro de massa,

$$\vec{R} = \frac{1}{m_1 + m_2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

perde seu significado nos processos de colisão de altas energias.

7. Demonstre que a rotação tri-dimensional, Eq.(33.27) satisfaz Eq.(33.32).

8. Mostre que o produto de uma matriz tipo Eq.(33.27) e tipo Eq.(33.34) satisfaz Eq.(33.32).

9. Seja $\vec{n}$ um tri-vetor unitário,

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

A: Mostre que os seguintes vetores,

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

e $\vec{n}$ formam uma base ortonormal.

B: Verifique que $\{\vec{n}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ neste ordem forma um sistema dextrogiro.

C: Considere a matriz (3×3) formada de estes três vetores,

$$A = \begin{pmatrix} \vec{n}^T \\ \vec{e}_1^T \\ \vec{e}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \sin \phi & -\cos \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Obtenha A^{-1} . Mostre que a matriz A é a matriz que corresponde a rotação dos eixos tal que

$$\begin{aligned} \text{novo eixo } x &\rightarrow \vec{n}, \\ \text{novo eixo } y &\rightarrow \vec{e}_1, \\ \text{novo eixo } z &\rightarrow \vec{e}_2. \end{aligned}$$

D: Considere a matriz (4×4),

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Mostre que esta é uma transformação de Lorentz. Que tipo de transformação de Lorentz ?

E: Mostre que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma\vec{n}^T \\ \beta\gamma\vec{n} & \gamma\vec{n}\vec{n}^T + \vec{e}_1\vec{e}_1^T + \vec{e}_2\vec{e}_2^T \end{pmatrix},$$

ou ainda

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma\vec{n}^T \\ \beta\gamma\vec{n} & \gamma\vec{n}\vec{n}^T + (1 - \vec{n}\vec{n}^T) \end{pmatrix}.$$

F: Qual é o quadri-vetor de uma partícula vista de um sistema de referência transformada pelo Λ do sistema de repouso dela?

G: Obtenha a matriz de transformação de Lorentz para o sistema de repouso de partícula de massa m com o tri-momento,

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}.$$

10. Considere um foguete lançado com a velocidade v no instante $t = 0$ na posição $x = 0$. Neste instante, também um pulso de luz é emitido de um ponto fixo na posição $x = L$ na direção do foguete. Seja T o instante para qual o sinal da luz e o foguete se encontram. Seja v_{rel} a velocidade relativa do foguete e o sinal da luz. Então, devemos ter

$$v_{rel}T = L,$$

mas sabemos que o resultado da adição das velocidades para um sinal de luz sempre é mesmo valor, c , portanto,

$$T = \frac{L}{c}.$$

Isto vale mesmo para $v \rightarrow c$. Portanto, dois sinais de luz, emitidos de uma distância L nas direções opostas se encontra no intervalo de tempo,

$$T = \frac{L}{c}.$$

É correto o raciocínio acima?

Part IX

Processo de Espalhamento

Nas investigações de estrutura da matéria na escala microscópica, o uso de processos de espalhamento é um dos métodos experimentais mais básicos. A idéia é simples. escolhe o objeto de investigação como alvo, e escolhe uma outra partícula como projétil. Seleciona energia incidente, e acerta o alvo pelo projétil. Observando como o projétil seja espalhado, obteremos informação sobre o alvo.

Entretanto, note que nas experiências microscópicas, é normal que o tamanho do objeto que queremos estudar é muito menor que o limite de controle experimental para “acertar” o alvo pelo projétil. Isto é, dentro da precisão de controle da direção do feixe incidente, praticamente o alvo passa qualquer lugar na visinhança do alvo com a mesma probabilidade. (A situação é algo análoga a tentar acertar um alvo de tamanho de 1cm na distância de 1000km no espaço.) Assim, é impossível extrair alguma informação sobre o alvo apenas lançamento de uma vez só. Lançamos muitas vezes o projétil e extraímos alguma informação sobre o alvo usando o resultado de espalhamento do projétil. Desta forma, introduzimos conceito probabilístico para o tratamento de um processo de espalhamento. Além disto, a idéia acima de não possibilidade de acertar o alvo em precisão suficiente para ter informação do alvo se torna a questão intrínseca da dinâmica microscópica no regime da Mecânica Quântica. Assim, o tratamento probabilístico de processo de espalhamento é fundamental.

35. Seção de Choque

Numa experiência de espalhamento, a quantidade observável básica é chamada seção de choque. Vamos considerar a seguinte situação. Prepare uma folha fina contendo N alvos. Injeta um feixe ϕ de partículas nesta folha e observamos as partículas que sofrem espalhamento pelos alvos na folha. Seja C o número de partículas saindo da folha por unidade do tempo, espalhados pelos alvos. Definimos a quantidade,

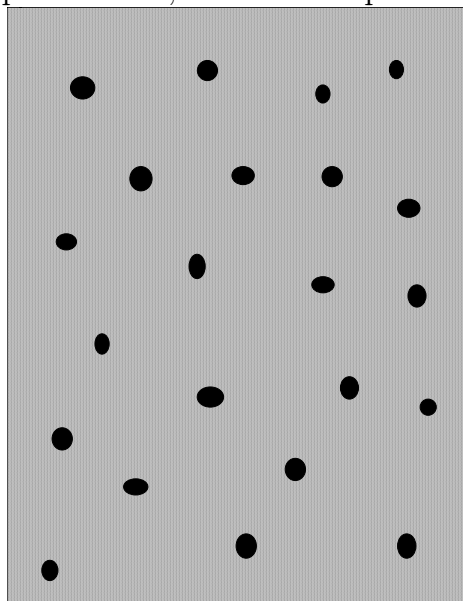
$$\sigma \equiv \frac{C}{N\phi}$$

que é chamado de seção de choque do alvo com a interação do projétil. Vejamos o significado desta quantidade.

O fluxo ϕ é definido como o número de partícula que entra numa unidade de área por unidade de tempo. Assim, o número de partículas que entra numa área A da folha por unidade do tempo é

$$\frac{dN_{in}}{dt} = \phi A.$$

Dentro destas partículas que entram, uma parte que batem no alvo e saim espalhadas. Qual é a porção que batem nos alvos? Naturalmente, se uma parícula entra na área ocupada por um alvo, acontece o espalhamento.



Seja S a área do cada alvo. A área total ocupada pelos alvos é $N \times S$. A probabilidade de acertar num alvo qualquer seria a razão da área ocupada pelos alvos em relação a área total. Assim, a probabilidade de acertar um dos alvos quaisquer é

$$prob. = \frac{N \times S}{A}.$$

Desta forma, temos o número de partículas espalhadas por unidade do tempo é dado por

$$\begin{aligned} C &= \frac{dN_{in}}{dt} \times prob. \\ &= \phi A \times \frac{N \times S}{A} \\ &= \phi \times N \times S. \end{aligned}$$

Assim, a seção de choque,

$$\sigma = \frac{C}{N\phi} = S,$$

que é nada mais que a área do cada alvo.

O conceito da seção de choque pode ser generalizado. Em vez de contar todas as partículas espalhadas, podemos contar apenas as partículas que sofrem certo tipo de espalhamento. De uma forma geral, a seção de choque é definida como a taxa de transição de um estado inicial para um determinado estado final por unidade de fluxo incidente por colisão.

Na linguagem experimental, a taxa de transição é determinada pela *contagem de ocorrência* por unidade de tempo dos eventos especificados. Suponha que um detector registra eventos de uma quantidade física, digamos α , (por exemplo, ângulo, momento, energia,...) dentro de um intervalo $[\alpha, \alpha + \Delta\alpha]$. Seja ΔC o número de contagens que este detector registrou num intervalo de tempo Δt . A seção de choque (parcial) $d\sigma$ é então calculada por

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta C}{\Delta T \phi N_{alvo}} = \frac{\Delta C}{\Delta N_{inc} N_{alvo}/A} \quad (35.1)$$

onde ϕ representa o fluxo incidente, ΔN_{alvo} e N_{inc} são, respectivamente, os números de alvos e partículas incidentes envolvidos no processo, e A é a área transversal do fluxo incidente. Note que $\Delta\sigma$ tem a dimensão de área. Para $\Delta\alpha$ suficientemente pequeno, $\Delta\sigma$ fica proporcional a $\Delta\alpha$. Assim, definimos a seção de *choque diferencial* por

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\alpha}. \quad (35.2)$$

A soma total desta quantidade em relação a α ,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\alpha} d\alpha \quad (35.3)$$

é chamada de *seção de choque total*.

Vamos considerar um exemplo simples. Um fluxo de partículas puntiformes, com massa m e energia E_{inc} , incide ao longo do eixo Z sobre uma esfera, fixa na origem, de raio R com superfície rígida sem atrito. O fluxo incidente é definido como o número de partículas que atravessam uma unidade de área transversal à direção do fluxo por unidade do tempo e está relacionado com a densidade numérica de partículas, n , e sua velocidade, v ,

$$\phi = vn. \quad (35.4)$$

O ponto importante é que as partículas incidentes se distribuem homogeneamente no plano perpendicular ao fluxo não sendo possível identificar suas trajetórias individualmente³¹. Devemos, portanto, tratar essa questão estatisticamente. Neste exemplo simples, as partículas que colidem com a esfera, tendo o parâmetro de impacto b , sempre se espalham com um ângulo Θ (o ângulo de espalhamento, ver Fig. 28),

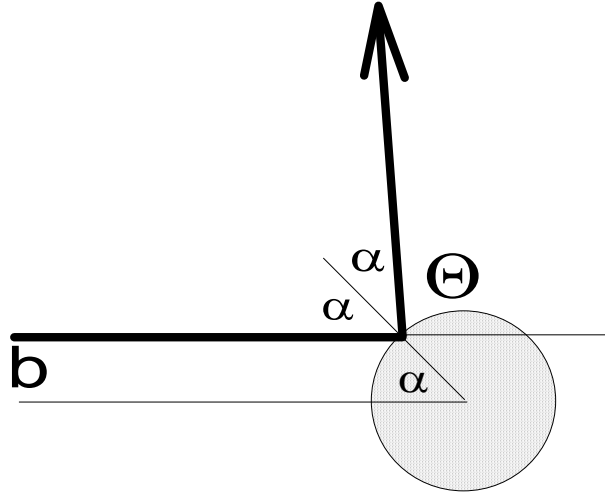


Fig. 28 Espalhamento elastico por uma esfera rígida.

sendo

$$\Theta = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \sin^{-1} \left(\frac{b}{R} \right). \quad (35.5)$$

Inversamente, se uma partícula for espalhada com o ângulo Θ , o parametro de impacto da partícula será

$$b = R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2} \right) = R \cos \left(\frac{\Theta}{2} \right). \quad (35.6)$$

Assim, o número de partículas espalhadas num intervalo de ângulo, $[\Theta, \Theta + d\Theta]$ tem de ser igual ao número de partículas que entram no intervalo, $[b(\Theta), b(\Theta + d\Theta)]$.

Pela condição inicial, o número de partículas que entram neste intervalo por

³¹Imagine a situação em que um feixe de elétrons incidindo a um alvo, por exemplo, um cristal. As colisões entre eletrons incidentes e átomos do cristal podem ter todas as configurações possíveis. Não existem nenhum aparelho que aponta os elétrons incidentes numa precisão microscópica a escala de átomos. Alias, pela princípio de incerteza da mecânica quântica, isto é impossível.

unidade de tempo por alvo é dado pela área multiplicada pelo fluxo,

$$\Delta N_{in}/\Delta t = 2\pi b db \times \phi \quad (35.7)$$

que é, por sua vez, igual ao número de partículas espalhadas no intervalo de ângulo por unidade do tempo, isto é, a taxa de espalhamento por alvo. Assim, temos

$$\frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{1}{\phi} \frac{\Delta N_{in}}{\Delta t} \frac{1}{d\Theta} = 2\pi b \left| \frac{db}{d\Theta} \right| \quad (35.8)$$

$$= \pi R^2 \cos \frac{\Theta}{2} \sin \frac{\Theta}{2} = \frac{\pi}{2} R^2 \sin \Theta. \quad (35.9)$$

Esta quantidade é a quantidade integrada sobre o ângulo azimutal ψ de 0 a π . Para um intervalo de $[\psi, \psi + d\psi]$, temos que dividir por 2π .

$$\frac{d^2\sigma}{d\Theta d\psi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\sigma}{d\Theta} = \frac{1}{4} R^2 \sin \Theta.$$

Em termos de ângulo sólido, $d\Omega \equiv \sin \Theta d\Theta d\psi$, temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} R^2, \quad (35.10)$$

o que é constante (não depende da direção), ou seja, o espalhamento de partículas puntiformes clássicas por uma esfera dura é isotrópico.

A seção de choque total fica,

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{4} R^2 \times 4\pi = \pi R^2, \quad (35.11)$$

que é a área transversal da esfera.

Este exemplo mostra que a seção de choque nada mais é do que a área efetiva do alvo visto pela partícula incidente para um determinado processo.

Para um processo de espalhamento, são os seguintes sistemas de referências mais frequentemente utilizados.

- **O sistema de Laboratório.** Neste sistema de referência, o alvo B é inicialmente repouso e o projétil incide com a energia E_{Lab} para o alvo. Durante o processo, o alvo recebe a parte do momento do projétil e adquire o movimento no final. Este movimento é dito *recuo*. Neste sistema, a energia total é a energia incidente (cinética) do projétil, pois o alvo está em repouso no instante quando o projétil é lançado bem longe do alvo. A energia potencial entre o projétil e o alvo é nula neste instante ($|\vec{r}_A - \vec{r}_B| \rightarrow \infty$).

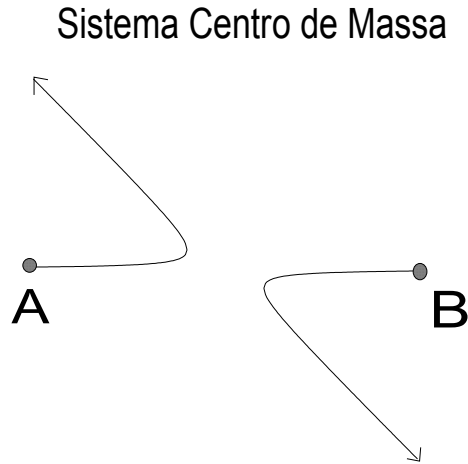


Figure 35.1: Fig. 31 Espalhamento visto no Sistema de Referência Centro de Massa

- **O sistema de Centro de Massa.** Neste sistema de referência, as duas partículas, o projétil e o alvo incidem de dois lados de tal forma que o momento total do sistema seja nulo. Neste sistema, o momento total é nulo,

$$\vec{p}_A^{(CM)} + \vec{p}_B^{(CM)} = 0,$$

onde, como antes, utilizamos o símbolo (CM) para indicar a quantidade medida no sistema CM para distinguir da mesma quantidade observada no sistema Lab.

É evidente que o fenômeno físico é idêntico nos dois sistemas embora as aparências são diferentes. Qualquer quantidade observável num sistema de referência sempre tem sua correspondente no outro sistema, embora os valores não são iguais. Por exemplo, seja $E^{(LAB)}$ a energia incidente do projétil no sistema Lab. e a energia total no sistema CM seja $E^{(CM)}$. Naturalmente

$$E^{(LAB)} \neq E^{(CM)}.$$

Para relacionar as quantidades de um sistema de referência para o outro, as quantidades básicas são a energia total e o momento total do sistema. Temos

Lab:

$$E^{(LAB)} = \frac{1}{2m_A} \left(\vec{p}_A^{(LAB)} \right)^2, \quad (35.12)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_A^{(LAB)}, \quad (35.13)$$

$$E^{(CM)} = \frac{1}{2m_A} \left(\vec{p}_A^{(CM)} \right)^2 + \frac{1}{2m_B} \left(\vec{p}_B^{(CM)} \right)^2, \quad (35.14)$$

$$\vec{p}^{(CM)} = \vec{p}_A^{(CM)} + \vec{p}_B^{(CM)} = 0 \quad (35.15)$$

Qual é a transformação do sistema LAB para o sistema CM? Para explicitar a transformação, devemos calcular a velocidade do sistema de referência do CM em relação ao sistema de referência LAB. A velocidade do CM é o momento total dividido pela massa total,

$$\begin{aligned} v_{CM}^{(LAB)} &= \frac{1}{m_A + m_B} \vec{p}^{(LAB)} \\ &= \frac{1}{m_A + m_B} \vec{p}_A^{(LAB)}. \end{aligned}$$

Mas, por definição, está é a velocidade relativa do sistema de referência CM em relação ao sistema LAB. Assim, pela transformação de Galilei, temos

$$\frac{d\vec{r}^{(CM)}}{dt} = \frac{d\vec{r}^{(LAB)}}{dt} - v_{CM}^{(LAB)}.$$

Os momentos ficam

$$\begin{aligned} \vec{p}_A^{(CM)} &= m_A \frac{d\vec{r}_A^{(CM)}}{dt} \\ &= m_A \left(\frac{d\vec{r}_A^{(LAB)}}{dt} - v_{CM}^{(LAB)} \right) \\ &= \vec{p}_A^{(LAB)} - \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{p}_A^{(LAB)} \\ &= \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{p}_A^{(LAB)}, \end{aligned} \quad (35.16)$$

$$\begin{aligned}
\vec{p}_B^{(CM)} &= m_B \frac{d\vec{r}_B^{(CM)}}{dt} \\
&= m_B \left(\frac{d\vec{r}_B^{(LAB)}}{dt} - \vec{v}_{CM}^{(LAB)} \right) \\
&= -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{p}_A^{(LAB)}.
\end{aligned} \tag{35.17}$$

De fato, temos

$$\vec{p}_A^{(CM)} = -\vec{p}_B^{(CM)},$$

verificando a Eq.(35.15). Assim, a energia total do sistema como todo no sistema de referência CM fica

$$\begin{aligned}
E^{(CM)} &= \frac{1}{2m_A} \left(\vec{p}_A^{(CM)} \right)^2 + \frac{1}{2m_B} \left(\vec{p}_B^{(CM)} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) \left(\vec{p}_A^{(CM)} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \frac{m_B}{m_A (m_A + m_B)} \left(\vec{p}_A^{(LAB)} \right)^2 \\
&= \frac{m_B}{m_A + m_B} E^{(LAB)}.
\end{aligned} \tag{35.18}$$

Exercício: Um carro A bateu com a velocidade v com outro carro B que estava em repouso. Seja A um Mercedes. Em que caso que tenha um dano maior, quando B é um onibus, ou um outro Mercedes igual, ou é um Ka.

Exercício: Mostre que a energia no sistema de CM é igual a energia relativa.

Exercício: Obtenha as transformações (35.17) e (35.18) no regime relativístico.

35.1. Ângulos de Espalhamento

Quando discutimos o processo de espalhamento (ver a seção Espalhamento de Rutherford), introduzimos o ângulo de espalhamento. O processo de espalhamento de uma partícula por um potencial fixo corresponde ao caso de 2 corpos com as coordenadas relativas. O ângulo de espalhamento Θ então corresponde o ângulo de espalhamento $\Theta^{(CM)}$ no sistema de referência CM, pois o movimento do Centro de Massa do sistema é considerado fixo. Então, qual é o ângulo de espalhamento no sistema LAB, $\Theta^{(LAB)}$?

Note que o ângulo de espalhamento é sempre definido como o ângulo entre o momento incidente $\vec{p}_A$ e o momento final $\vec{p}'_A$ do projétil. Assim, o ângulo de espalhamento $\Theta^{(LAB)}$ no sistema LAB é

$$\cos \Theta^{(LAB)} = \frac{\vec{p}_A^{(LAB)} \cdot \vec{p}'_A^{(LAB)}}{p_A^{(LAB)} p'_A^{(LAB)}}, \quad (35.19)$$

e

$$\cos \Theta^{(CM)} = \frac{\vec{p}_A^{(CM)} \cdot \vec{p}'_A^{(CM)}}{p_A^{(CM)} p'_A^{(CM)}} \quad (35.20)$$

no sistema CM. Aqui, utilizamos a notação para o módulo de momento $\vec{p}$ por

$$p = |\vec{p}|.$$

Para obter a relação entre os ângulos, $\Theta^{(LAB)}$ e $\Theta^{(CM)}$ devemos eliminar os momentos finais $\vec{p}'_A^{(LAB)}$ e $\vec{p}'_A^{(CM)}$. Estes momentos finais observados em dois sistemas são relacionados por

$$\begin{aligned} \vec{p}'_A^{(CM)} &= m_A \left(\vec{v}'_A^{(LAB)} - \vec{v}_{CM}^{(LAB)} \right) \\ &= \vec{p}'_A^{(LAB)} - \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{p}_A^{(LAB)} \\ &= \vec{p}'_A^{(LAB)} - \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{p}_A^{(LAB)}. \end{aligned} \quad (35.21)$$

Se escolhermos o eixo x na direção do momento incidente e o eixo y no plano de espalhamento, então, podemos escrever

$$\vec{p}_A^{(LAB)} = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{p}'_A^{(LAB)} = p'_A^{(LAB)} \begin{pmatrix} \cos \Theta^{(LAB)} \\ \sin \Theta^{(LAB)} \end{pmatrix}, \quad (35.22)$$

$$\vec{p}'_A^{(CM)} = p'_A^{(CM)} \begin{pmatrix} \cos \Theta^{(CM)} \\ \sin \Theta^{(CM)} \end{pmatrix}, \quad (35.23)$$

onde

$$p_0 = p_A^{(LAB)}.$$

Substituindo estas representações na Eq.(35.21), temos

$$p_A'^{(CM)} \begin{pmatrix} \cos \Theta^{(CM)} \\ \sin \Theta^{(CM)} \end{pmatrix} = p_A'^{(LAB)} \begin{pmatrix} \cos \Theta^{(LAB)} \\ \sin \Theta^{(LAB)} \end{pmatrix} - \frac{m_A}{m_A + m_B} \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que o componente $-y$ do momento fica invariante no sistema Lab e CM pois a direção de transformação está no eixo x . Temos

$$p_A'^{(CM)} \sin \Theta^{(CM)} = p_A'^{(LAB)} \sin \Theta^{(LAB)}. \quad (35.24)$$

Do componente x , temos

$$p_A'^{(CM)} \cos \Theta^{(CM)} + \frac{m_A}{m_A + m_B} p_0 = p_A'^{(LAB)} \cos \Theta^{(LAB)}. \quad (35.25)$$

Dividindo os dois lados da Eq.(35.24) pela Eq.(35.25), temos

$$\begin{aligned} \tan \Theta^{(LAB)} &= \frac{p_A'^{(CM)} \sin \Theta^{(CM)}}{p_A'^{(CM)} \cos \Theta^{(CM)} + \frac{m_A}{m_A + m_B} p_0} \\ &= \frac{\sin \Theta^{(CM)}}{\cos \Theta^{(CM)} + \frac{m_A}{m_A + m_B} \frac{p_0}{p_A'^{(CM)}}}. \end{aligned} \quad (35.26)$$

No caso de espalhamento elástico, pela conservação da energia, podemos provar que o módulo do momento não se altera pelo espalhamento,

$$p_A'^{(CM)} = p_A^{(CM)}. \quad (35.27)$$

Utilizando a Eq.(35.18), temos

$$\frac{m_A + m_B}{m_A m_B} \left(\vec{p}_A^{(CM)} \right)^2 = \frac{m_B}{m_A (m_A + m_B)} \left(\vec{p}_A^{(LAB)} \right)^2,$$

ou

$$p_A'^{(CM)} = \frac{m_B}{m_A + m_B} p_0.$$

Assim, no caso de um espalhamento elástico, temos

$$\tan \Theta^{(LAB)} = \frac{\sin \Theta^{(CM)}}{\cos \Theta^{(CM)} + \frac{m_A}{m_B}}. \quad (35.28)$$

Exercício: Prove a Eq.(35.27).

Exercício: Expresse $\tan \Theta^{(CM)}$ em termos de $\Theta^{(LAB)}$.

Exercício: Obtenha a relação entre os ângulos de espalhamento no regime relativístico.

36. Espalhamento de Rutherford

O processo de espalhamento por um potencial inversamente proporcional a distância radial é conhecido como o espalhamento de Rutherford. Este conceito foi introduzido primeiramente pelo Rutherford em 1911 para explicar o comportamento estranho do espalhamento de partícula α pela uma folha fina de ouro.

Nesta época, a descoberta dos espectros atômicos e sua sistemática como representados pelas várias séries, tipo Balmer, Lyman, etc vem desafiando pesquisadores como problema de compreender a estrutura da matéria. Lembre que ainda a existência dos átomos não tinha sido estabelecida. Por exemplo, um dos fundadores da Mecânica Estatística, Boltzmann já era defensor da origem atômica do calor, mas muitos físicos importantes, por exemplo, E. Mach, ou até M. Planck na época não tinham acreditado desta teoria. Junto com o descoberto de elétron em 1887, a existência da certa estrutura microscópica da matéria ficou explícita, pois a presença de elétrons implica em a presença de partículas com carga positiva que compensam as cargas negativas dos elétrons.

Vários modelos atômicos foram considerados. Mas o que colocou o final desta história foi a experiência de espalhamento de partícula α pela uma folha de ouro muito fina, feita pelos dois discípulos de E. Rutherford, Marsden e Geiger (este último é conhecido também pelo contador Geiger). O que foi observado nesta experiência é que na medida em que a partícula α atravessa a folha de ouro, a partícula α fica desviada com grande ângulo, bastante frequentemente. Este tipo de comportamento não pode ser esperado pelo modelo atômico de J.J. Thomson, onde ele supôs que as cargas elétricas positivas estão distribuídas continuamente no espaço. O Rutherford demonstrou que se existe um núcleo, bastante pequeno, praticamente considerado pontiforme comparado ao escala atômica, carregado positivamente e tendo a massa grande, então o resultado da experiência de Geiger-Marsden seria explicado. Assim, foi lançado o modelo atômico de Rutherford, onde os elétrons rodam a volta de núcleo, que tem a carga positiva Z .

36.1. Parametro de Impacto e o Ângulo de Espalhamento

O que importa na descrição de um processo de espalhamento é estabelecer uma relação entre o estado incidente do projétil ao seu estado final após do espalhamento. Uma quantidade importante para caracterizar o estado incidente do projétil é o *parametro de impacto*. Para definir a configuração do estado incidente, escolhamos a direção do momento do projétil como a direção de eixo x e chamaremos o eixo incidente. O processo de espalhamento é análogo a tira-alvo usando um rifle.

Quando miramos o alvo, a direção da mira é o eixo incidente.

O que ocorre nos processos de espalhamento numa experiência microscópica é que como o tamanho do alvo é muito menor que a resolução da mira do rifle (acelerador). Assim, mesmo a partícula projétil entra na direção de eixo de espalhamento, esta partícula não necessariamente está mirado no centro do alvo. Em outras palavras, a trajetória incidente (movimento retilinear uniforme) está paralelo a eixo incidente mas não necessariamente coincidente. A distância entre a reta da trajetória incidente com o eixo x é dito o *parametro de impacto* e usualmente denotamos com b . O parâmetro de impacto $b = 0$ representa a colisão frontal ao centro espalhador. Quanto maior b , a trajetória afasta do centro espalhador. Para um dado valor de b , podemos definir o ângulo de espalhamento Θ , como o ângulo entre o eixo incidente e a reta da trajetória após do espalhamento para $r \rightarrow \infty$. Esta reta é chamada a trajetória assintótica (veja a Fig. 25).

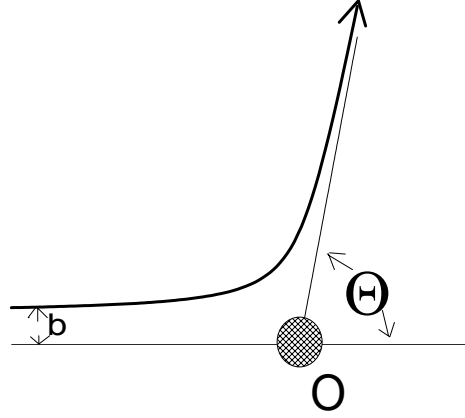


Fig. 25 Espalhamento e trajetória assintótica

Se a energia incidente da partícula é E , o momento incidente é dado por

$$\vec{p}_i = \sqrt{2mE}\vec{e}_x.$$

O momento angular é então,

$$L = bp_i. \quad (36.1)$$

Exercício: Prove a Eq.(36.1).

Vamos considerar o processo de colisão entre o núcleo do alvo e a partícula incidente os quais interagem através de força eletrostática. Como vimos, isto constitui

um problema de dois corpos sem força externa e, portanto, podemos separar o movimento do Centro de Massa e podemos considerar apenas o movimento relativo, representado pelo o vetor de coordenadas relativas, $\vec{r}$. Em termos de coordenadas relativas, a dinâmica de dois corpos se reduz como se fosse o movimento de uma partícula com a massa μ com a carga q seja injetada ao centro espalhador O com a carga Q localizado na origem (Fig. 25), onde μ é a massa efetiva. A força que atua a partícula incidente é

$$\vec{f} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r.$$

Assim, o problema é completamente análogo ao caso de Movimento de Kepler, exceto a substituição,

$$-GM_\odot m \rightarrow \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \equiv Z.$$

Note que qQ pode ser negativo ou positivo. Esta possibilidade de mudança do sinal reflete na integral Eq.(26.19), ficando

$$\pm(\theta - \theta_0) = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} - \frac{2\mu Z}{L^2}u - u^2}} \quad (36.2)$$

Obviamente se $Z > 0$, para ter a integral real, devemos ter $E > 0$, se não, todos os termos dentro do $\sqrt{\quad}$ fica negativo. Assim, para o caso de espalhamento de dois cargas do mesmo sinal,

$$qQ > 0,$$

o potencial fica repulsivo e não existe o estado ligado. A energia E tem que ser sempre positivo. A integral do lado direito da Eq.(36.2) fica

$$\begin{aligned} \pm(\theta - \theta_0) &= \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu Z}{L^2}\right)^2 - \left(u + \frac{\mu Z}{L^2}\right)^2}} \\ &= \cos^{-1} \left(\frac{u + \frac{\mu Z}{L^2}}{\sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu Z}{L^2}\right)^2}} \right), \end{aligned}$$

portanto temos

$$u + \frac{\mu Z}{L^2} = \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu Z}{L^2}\right)^2} \cos(\theta - \theta_0),$$

ou

$$r = \frac{1}{-\frac{\mu Z}{L^2} + \sqrt{\frac{2\mu E}{L^2} + \left(\frac{\mu Z}{L^2}\right)^2} \cos(\theta - \theta_0)}.$$

$\theta = \theta_0$ é a posição angular onde a distância radial é menor e sem perder a generalidade, podemos escolher $\theta_0 = 0$. Daqui, adiante, escolhemos $\theta_0 = 0$. Dividindo o numerador e o denominador por $\mu |Z| / L^2$, podemos escrever ainda

$$r = \frac{l}{-\text{sign}(Z) + \epsilon \cos(\theta)}, \quad (36.3)$$

onde

$$l = \frac{L^2}{\mu |Z|}, \quad (36.4)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{\mu Z^2} L^2} \quad (36.5)$$

e

$$\text{sign}(Z) = \begin{cases} 1, & Z \geq 0 \\ -1 & Z < 0. \end{cases}$$

Para o movimento Kepler, $Z < 0$, e a Eq.(36.3) fica idêntica a Eq.(26.23).

Já que $r > 0$, devemos ter

$$-\text{sign}(Z) + \epsilon \cos(\theta) > 0.$$

Ou seja, o domínio de ângulo θ permitido para o movimento real é dado por

$$\cos(\theta) < \frac{1}{\epsilon} \text{sign}(Z). \quad (36.6)$$

Definimos

$$\theta_{\max} = \cos\left(\frac{1}{\epsilon} \text{sign}(Z)\right),$$

e a solução da desigualdade (36.6) é dada por

$$-\theta_{\max} < \theta < \theta_{\max}.$$

Note que para $Z > 0$,

$$0 < \theta_{\max} < \frac{\pi}{2},$$

e para $Z < 0$,

$$\frac{\pi}{2} < \theta_{\max} < \pi.$$

Para $\theta \rightarrow \pm\theta_{\max}$, temos $r \rightarrow \infty$. A distância mínima $r_{\min}$ ocorre com $\theta = 0$, e fica expressa por

$$r_{\min} = \frac{L^2/mZ}{-\sin(Z) + \epsilon}.$$

Exercício: Esboce o grafico da Eq.(26.17), separando os casos $Z > 0$ e $Z < 0$. Interprete o significado da diferença entre os dois casos.

Por simplicidade, vamos considerar o caso $Z > 0$ (força repulsiva). Neste caso,

$$\theta_{\max} = \cos\left(\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Do grafico do exercício acima, o ângulo de espalhamento Θ é dado por

$$\begin{aligned}\Theta &= \pi - 2\theta_{\max} \\ &= \pi - 2\cos^{-1}\left(1/\sqrt{1 + \frac{2L^2}{mZ^2}E}\right).\end{aligned}$$

Podemos eliminar L em termos de b ,

$$L = b\sqrt{2mE}.$$

Assim, temos a expressão de ângulo de espalhamento em função de parametro de impacto b no caso de potencial Coulombiano.

$$\Theta = \pi - 2\cos^{-1}\left(1/\sqrt{1 + \frac{4E^2}{Z^2}b^2}\right) \quad (36.7)$$

Exercício: Esboce o grafico de $\Theta = \Theta(b)$ como a função de b e analize como esta função varia quando muda a energia E . Distuta fisicamente o comportamento.

A Eq.(36.7) também pode ser expressa por

$$\cot \frac{\Theta}{2} = \frac{2E}{Z}b \quad (36.8)$$

Exercício: Prove a Eq.(36.8) a partir da Eq.(36.7).

36.2. Seção de Choque de Rutherford

Podemos agora calcular a seção de choque diferencial de Rutherford. A fórmula da seção de choque em termos de parametro de impacto, Eq.(35.8) vale em geral para um potencial qualquer, embora a Eq.(35.9) é o caso da esfera rígida. Para o potencial Coulombiano, devemos utilizar a Eq.(36.8) no lugar da Eq.(35.5). Temos

$$b = \frac{Z}{2E} \cot \frac{\Theta}{2},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Theta} &= 2\pi b \left| \frac{db}{d\Theta} \right| \\ &= 2\pi \left(\frac{Z}{2E} \right)^2 \cot \frac{\Theta}{2} \times \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\Theta}{2} \right)} \\ &= 2\pi \left(\frac{Z}{2E} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{\Theta}{2}}{\sin^3 \frac{\Theta}{2}} \\ &= 2\pi \left(\frac{Z}{2E} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2}}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \\ &= 2\pi \left(\frac{Z}{2E} \right)^2 \frac{1}{4} \frac{\sin \Theta}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}. \end{aligned}$$

Novamente em termos de ângulo sólido, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2\pi \sin \theta} \frac{d\sigma}{d\Theta} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{Z}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}. \end{aligned} \tag{36.9}$$

A Eq.(36.9) é conhecido como a seção de choque de Rutherford.

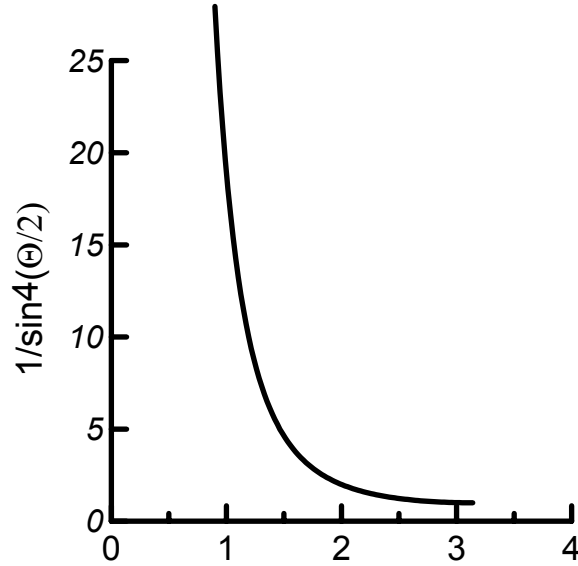


Fig. 29

Na Fig.29, mostramos a dependência angular da seção de choque de Rutherford. Embora para $\Theta \simeq 0$, existe um grande pico, a seção de choque tem os valores não nulos para os grandes ângulos até $\Theta = \pi$. Um fato interessante da seção de choque de Rutherford é que o pico na origem é muito agudo de tal forma que a seção de choque total diverge,

$$\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow \infty !$$

Exercício: Interprete porque a seção de choque total diverge no caso de espalhamento de Rutherford.

(Chapter head:)Pequenas Oscilações em Torno do Ponto de Equilíbrio e Modos Normais

36.3. Hamiltoniana de Sistema de Muitos Corpos

Vamos considerar um sistema que é composto de n partículas interagindo pelas forças conservativas entre si. Em geral, a energia cinética é dada por

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2.$$

Por outro lado, a energia potencial em geral é uma função de n vetores,

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n).$$

A Hamiltoniana do sistema, escrita em termos de coordenadas e suas velocidades tem a forma

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= H\left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \frac{d\vec{r}_2}{dt}, \dots, \frac{d\vec{r}_n}{dt}\right). \end{aligned}$$

As coordenadas $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ constituem $3n$ variáveis. Para sistematizar a notação, vamos introduzir uma re-indexação de variáveis,

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1, \\ q_2 &= y_1, \\ q_3 &= z_1, \\ q_4 &= x_2, \\ &\vdots \\ q_{N-1} &= y_n, \\ q_N &= z_n, \end{aligned}$$

onde

$$N = 3n.$$

Assim, podemos escrever a Hamiltoniana como

$$H = H(q_1, q_2, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N).$$

Note que a dependência em $\{\dot{q}_i\}$ vem da energia cinética e tem a forma bi-quadrada,

$$H = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T T \dot{\mathbf{q}} + V(q_1, q_2, \dots, q_N),$$

onde introduzimos N -vetor $\dot{\mathbf{q}}$ por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{q} \end{aligned}$$

Podemos também introduzir a gradiente,

$$\nabla_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial q_N} \end{pmatrix}.$$

A equação de movimento para o N -vetor $\mathbf{q}$ fica

$$\frac{d}{dt} (T \dot{\mathbf{q}}) = \nabla_q V(q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (36.10)$$

Quando o sistema esteja em equilíbrio, temos que ter

$$\dot{\mathbf{q}} = 0$$

ou seja

$$\dot{q}_i(t) \equiv 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (36.11)$$

Em equilíbrio, temos que ter também

$$\nabla_q V(q_1, q_2, \dots, q_N) = \mathbf{0} \quad (36.12)$$

o que define a posição de equilíbrio,

$$q_i = \bar{q}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (36.13)$$

O ponto $P_{eq.} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_N)$ no espaço de coordenadas $\{q_i; i = 1, \dots, N\}$ é chamado de ponto de equilíbrio do sistema. Se a condição inicial do sistema for dada como

$$\begin{cases} q_i(0) = \bar{q}_i, \\ \dot{q}_i(0) = 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad (36.14)$$

a Eq.(36.10) garante as Eqs.(36.13,36.11). Para um dado sistema, pode haver mais de um ponto de equilíbrio. Neste Capítulo, vamos estudar o comportamento do sistema perto de ponto de equilíbrio.

37. Pequenas Oscilações em torno do Ponto de Equilíbrio

Vamos introduzir agora a transformação de variáveis,

$$\eta_i = q_i - \bar{q}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Isto é, a nova variável η_i mede a variação da variável q_i do valor do ponto de equilíbrio. A dinâmica do sistema perto do de ponto de equilíbrio é caracterizada por pequenos valores destas variáveis. Podemos considerar a expansão em série de Taylor da Lagrangiana em torno do ponto de equilíbrio, também com pequenas velocidades,

$$\begin{aligned} & L(\eta_1, \dots, \eta_n, \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_n) \\ = & L_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \Big|_{P_{eq}} \eta_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{P_{eq}} \dot{\eta}_i \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{P_{eq}} \eta_i \eta_j + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{P_{eq}} \eta_i \dot{\eta}_j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{P_{eq}} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \right\} \\ & + O(\eta^3) \end{aligned} \quad (37.1)$$

onde

$$L_0 = L(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_n, 0, \dots, 0)$$

e é uma constante. Aqui, utilizamos η'_i s como as novas variáveis dinâmicas. O termo

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} \Big|_{P_{eq}} \eta_i$$

da Eq.(37.1) é nulo devido à condição do ponto de equilíbrio, a Eq.(36.10).

É fácil mostrar que o termo

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{P_{eq}} \dot{\eta}_i$$

não contribui para a equação de movimento, pois este é uma combinação linear em $\dot{\eta}_i$ com as coeficientes constantes. Podemos, portanto, redefinir a Lagrangiana subtraindo da original este termo, sem alterar a equação de movimento. Da mesma forma, o termo constante L_0 também pode ser desprezado. Analogamente, o termo

$$2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{P_{eq}} \eta_i \dot{\eta}_j$$

também não contruibui na equação de movimento, pois podemos escrever como

$$2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{P_{eq}} \eta_i \dot{\eta}_j = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{P_{eq}} \eta_i \eta_j \right\},$$

que é a derivada total de uma função.

Assim, a parte efetiva da Lagrangiana que determina o movimento do sistema perto do seu equilíbrio tem a forma,

$$L(\eta_1, \dots, \eta_n, \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - C_{ij} \eta_i \eta_j\} + O(\eta^3), \quad (37.2)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{P_{eq,0}}, \\ C_{ij} &= - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{P_{eq,0}}. \end{aligned}$$

Em geral, quando a amplitude do movimento é pequena, podemos desprezar³² o

³²Isto não é sempre verdade. Por exemplo, no caso unidimensional, se a segunda derivada da Lagrangiana for nula, temos que começar com a terceira ordem. Ver a discussão adiante.

termo superior em η da Eq.(37.2) e temos

$$\begin{aligned} L(\eta_1, \dots, \eta_n, \dot{\eta}_1, \dots, \dot{\eta}_n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \{T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - C_{ij} \eta_i \eta_j\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{\eta}}{dt} \right)^T \mathbf{T} \left(\frac{d\vec{\eta}}{dt} \right) - \frac{1}{2} \vec{\eta}^T \mathbf{C} \vec{\eta}, \end{aligned} \quad (37.3)$$

onde introduzimos a notação vetorial,

$$\begin{aligned} \vec{\eta} &= \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \\ T_{n1} & & T_{nn} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \\ C_{n1} & & C_{nn} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37.4)$$

Note que as matrizes $\mathbf{T}$ e $\mathbf{C}$ são simétricas e reais. A matriz $\mathbf{T}$ é chamada de tensor de massa. Aqui, vamos supor que a matriz $\mathbf{T}$ é positiva definida³³. Neste caso, existe a matriz,

$$\mathbf{T}^{1/2}$$

³³Uma matriz M é dita positiva definida, quando a forma biquadrada

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{x}^T M \vec{x}$$

é positiva definida para qualquer vetor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

tal que

$$\mathbf{T}^{1/2}\mathbf{T}^{1/2} = \mathbf{T},$$

e o seu inverso

$$\mathbf{T}^{-1/2}.$$

Temos

$$\mathbf{T}^{-1/2}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1/2} = \mathbf{T}^{-1/2}\mathbf{T}^{-1/2}\mathbf{T}^{1/2} = 1.$$

Vamos agora introduzir uma transformação de variáveis definida por

$$\vec{\eta} = \mathbf{T}^{-1/2}\vec{\xi}.$$

A Lagrangiana em termos de $\vec{\xi}$ fica

$$\begin{aligned} L\left(\vec{\xi}, \frac{d\vec{\xi}}{dt}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{\xi}}{dt}\right)^T \mathbf{T}^{-1/2}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1/2}\left(\frac{d\vec{\xi}}{dt}\right) - \frac{1}{2}\vec{\xi}^T \mathbf{T}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1/2}\vec{\xi} \\ &\equiv \frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{\xi}}{dt}\right)^T \left(\frac{d\vec{\xi}}{dt}\right) - \frac{1}{2}\vec{\xi}^T \mathbf{Q}\vec{\xi}, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1/2}$$

é uma matriz simétrica. Assim, podemos diagonalizar-la por uma transformação ortogonal. Vamos denotar por $\mathcal{M}$ tal matriz ortogonal que diagonaliza a matriz $\mathbf{Q}$,

$$\mathcal{M}^T \mathbf{Q} \mathcal{M} = \mathbf{D}.$$

onde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

é a matriz diagonal, cujos elementos diagonais são dados pelos autovalores da matriz $\mathbf{Q}$.

Agora, vamos introduzir mais uma vez a mudança de variáveis por

$$\vec{\xi} = \mathcal{M}\vec{x}.$$

A Lagrangiana para $\vec{x}$ fica

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^T \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right) - \frac{1}{2} \vec{x}^T \mathbf{D} \vec{x} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt} \right)^2 - d_i x_i^2 \right\}. \end{aligned}$$

Desta forma, a Equação de Euler-Lagrange fica completamente desacoplada para cada uma das variáveis, x_i . Ou seja,

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -d_i x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

A solução é

$$x_i(t) = A e^{i\omega_i t} + B e^{-i\omega_i t},$$

sendo

$$\omega_i^2 = d_i,$$

e A e B são constantes que serão determinadas em termos de condição inicial.

Qual é a relação entre estas soluções e as variáveis originais $\vec{\eta}$? Para ver isto, vamos seguir de volta a sequência de várias mudanças de variáveis que foram introduzidas. Temos

$$\begin{aligned} \vec{\eta} &= \mathbf{T}^{-1/2} \vec{\xi} \\ &= \mathbf{T}^{-1/2} \mathcal{M} \vec{x} \\ &\equiv \mathbf{S} \vec{x}. \end{aligned}$$

Note que a matriz

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1/2} \mathcal{M}$$

não é ortogonal mas

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \mathbf{S}^T &= \mathbf{T}^{-1/2} \mathcal{M} \mathcal{M}^T \mathbf{T}^{-1/2} = \mathbf{T}^{-1/2} \mathbf{T}^{-1/2} \\ &= \mathbf{T}^{-1}. \end{aligned}$$

Vamos decompor esta matriz $\mathbf{S}$ em termos de vetores coluna da seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \left(\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \vec{u}_n \end{pmatrix} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\vec{\eta} &= \left(\left(\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} \vec{u}_2 \end{pmatrix} \right) \cdots \left(\begin{pmatrix} \vec{u}_n \end{pmatrix} \right) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \cdots + x_n \vec{u}_n.\end{aligned}$$

Isto é, em termos das variáveis originais, a solução é dada pela combinação linear dos vetores $\{\vec{u}_i; i = 1, \dots, n\}$ com os coeficientes $x_i(t)$.

Em termos desta matriz, a matriz $\mathbf{D}$ está escrita em termos da matriz $\mathbf{C}$,

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & d_n \end{pmatrix},$$

Denotando por $\vec{v}_i$ o autovetor da matriz $\mathbf{D}$ de autovalor $d_i = \omega_i^2$, temos

$$\mathbf{D} \vec{v}_i = \omega_i^2 \vec{v}_i, \quad (37.5)$$

e, ele é dado explicitamente,

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i\text{-ésima posição} \\ \longleftarrow \end{matrix}. \quad (37.6)$$

Mas,

$$\mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} \vec{v}_i = \omega_i^2 \vec{v}_i. \quad (37.7)$$

Multiplicando $(\mathbf{S}^T)^{-1}$ aos dois lados, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{C} \mathbf{S} \vec{v}_i &= \omega_i^2 (\mathbf{S}^T)^{-1} \vec{v}_i \\ &= \omega_i^2 (\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \vec{v}_i.\end{aligned} \quad (37.8)$$

Mas

$$(\mathbf{S}^T)^{-1} \mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{S} \mathbf{S}^T)^{-1} = \mathbf{T},$$

e portanto temos

$$(\omega_i^2 \mathbf{T} - \mathbf{C}) \mathbf{S} \vec{v}_i = 0. \quad (37.9)$$

Isto é, o vetor

$$\mathbf{S} \vec{v}_i$$

é o autovetor da matriz

$$(\omega_i^2 \mathbf{T} - \mathbf{C})$$

com autovalor nulo. Em outras palavras, temos que ter

$$\det |\omega_i^2 \mathbf{T} - \mathbf{C}| = 0,$$

para qualquer ω_i^2 . Assim, concluímos que os autovalores da matriz D , devem satisfazer a equação,

$$\det |\omega^2 \mathbf{T} - \mathbf{C}| = 0.$$

Por outro lado, vemos que

$$\mathbf{S} \vec{v}_i = \vec{u}_i, \quad (37.10)$$

portanto,

$$(\omega_i^2 \mathbf{T} - \mathbf{C}) \vec{u}_i = 0. \quad (37.11)$$

Em resumo, o pequeno movimento geral em torno do ponto de equilíbrio de um sistema é dada por uma combinação linear do tipo,

$$\vec{\eta}(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) \vec{u}_i, \quad (37.12)$$

onde

$$x_i(t) = A_i e^{+i\omega_i t} + B_i e^{-i\omega_i t}, \quad (37.13)$$

e ω_i e $\vec{u}_i$ satisfazem a Eq.(37.11). A_i 's e B_i 's são constantes e devem ser determinadas em termos da condição inicial do problema.

Em particular, se

$$A_i = B_i = 0, \quad \forall i, \quad \text{exceto } i = i_0, \quad (37.14)$$

então,

$$\vec{\eta}(t) = x_{i_0}(t) \vec{u}_{i_0} \quad (37.15)$$

é a solução. Em outras palavras, se o movimento inicial estiver na direção de um dos $\vec{u}_i$'s, então o movimento posterior fica sempre nesta direção. Assim, os vetores $\vec{u}_i$'s são chamados de modos normais do sistema.

- O movimento geral do sistema em torno do ponto de equilíbrio é uma combinação linear dos modos normais.

Note que, se ω_i for real, ou seja se $\omega_i^2 > 0$, então o movimento de x_i é de um oscilador e oscilando em torno de $x_i = 0$ com a frequência ω_i . Se ω_i for imaginária, ou seja se $\omega_i^2 < 0$, o movimento da variável x_i é a função exponencial, e exceto para condição inicial bastante especial, sempre tende a amplificar seu movimento exponencialmente. Assim, o modo próprio $\vec{u}_i$ é estável se $\omega_i^2 > 0$ e instável se $\omega_i^2 < 0$.

O ponto de equilíbrio é dito estável se não existe nenhum modo instável, ou seja, se todos os modos for estáveis.

Quando ocorre

$$\omega_i^2 = 0,$$

a solução para amplitude do modo próprio correspondente fica

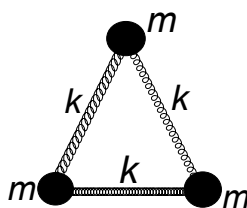
$$x_i(t) = a + bt. \quad (37.16)$$

Físicamente, este modo não possui a força restauradora quando uma pequena perturbação for aplicada no ponto de equilíbrio.

37.1. Exemplos

37.1.1. Exemplo I:

Vamos considerar um sistema de tres massas iguais num plano sem atrito, ligadas por molas sem massa.



Tres massas ligadas por molas

A Lagrangiana do sistema é dada por

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}_1}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}_2}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\frac{d\vec{r}_3}{dt} \right)^2 - \frac{k}{2} (|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0)^2 - \frac{k}{2} (|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| - l_0)^2 - \frac{k}{2} (|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - l_0)^2 \quad (37.17)$$

onde l_0 é o comprimento natural da mola. Para separar o movimento do centro de massa, vamos introduzir a mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3), \\ \vec{\rho}_1 &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \\ \vec{\rho}_2 &= \vec{r}_3 - \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2). \end{aligned}$$

Inversamente, temos

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} + \frac{1}{2} \vec{\rho}_1 - \frac{1}{3} \vec{\rho}_2, \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1 - \frac{1}{3} \vec{\rho}_2, \\ \vec{r}_3 &= \vec{R} + \frac{2}{3} \vec{\rho}_2. \end{aligned}$$

Em termos destas novas variáveis, a Lagrangiana do sistema fica

$$L = \frac{3m}{2} \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2 + \frac{m}{4} \left(\frac{d\vec{\rho}_1}{dt} \right)^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{d\vec{\rho}_2}{dt} \right)^2 - \frac{3k}{4} \vec{\rho}_1^2 - k \vec{\rho}_2^2 + k l_0 \left\{ |\vec{\rho}_1| + \left| \frac{1}{2} \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2 \right| + \left| \frac{1}{2} \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2 \right| \right\} - \frac{3}{2} l_0^3. \quad (37.18)$$

O centro de massa $\vec{R}$ é uma coordenada cíclica e portanto o momento total do sistema é conservado. Podemos escolher, sem perder a generalidade,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = 0,$$

e também podemos desprezar o termo constante. Assim, a dinâmica da parte não trivial do sistema é descrita em termos da Lagrangiana,

$$L(\rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_2) = \frac{m}{4} \left(\frac{d\vec{\rho}_1}{dt} \right)^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{d\vec{\rho}_2}{dt} \right)^2 - \frac{3k}{4} \vec{\rho}_1^2 - k\vec{\rho}_2^2 + kl_0 \left\{ |\vec{\rho}_1| + \left| \frac{1}{2}\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2 \right| + \left| \frac{1}{2}\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2 \right| \right\}. \quad (37.19)$$

O ponto de equilíbrio é determinado pelo sistema de equações,

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \vec{\rho}_1} \right|_{Eq.} = -\frac{3}{2}k\vec{\rho}_{1,0} + kl_0 \left\{ \frac{\vec{\rho}_{1,0}}{|\vec{\rho}_{1,0}|} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0}}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0}|} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0}}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0}|} \right\} = 0, \quad (37.20)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \vec{\rho}_2} \right|_{Eq.} = -2k\vec{\rho}_{2,0} + kl_0 \left\{ -\frac{\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0}}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0}|} + \frac{\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0}}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0}|} \right\} = 0. \quad (37.21)$$

Ja que $\vec{\rho}_{1,0}$ e $\vec{\rho}_{2,0}$ são linearmente independentes, a Eq.(37.20) se decompõe em duas equações,

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} + \frac{l_0}{|\vec{\rho}_{1,0}|} + \frac{l_0}{4} \left\{ \frac{1}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0}|} + \frac{1}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0}|} \right\} &= 0, \\ -\frac{1}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0}|} + \frac{1}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0}|} &= 0, \end{aligned}$$

e a Eq.(37.21) em

$$\begin{aligned} -2 + l_0 \left\{ \frac{1}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0}|} + \frac{1}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0}|} \right\} &= 0, \\ -\frac{1}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0}|} + \frac{1}{|\frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0}|} &= 0. \end{aligned} \quad (37.22)$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} - \vec{\rho}_{2,0} \right| &= \left| \frac{1}{2}\vec{\rho}_{1,0} + \vec{\rho}_{2,0} \right| = l_0, \\ |\rho_1| &= l_0, \end{aligned}$$

e ainda concluímos que

$$\vec{\rho}_{1,0} \cdot \vec{\rho}_{2,0} = 0,$$

e

$$|\vec{\rho}_{2,0}| = \frac{\sqrt{3}}{2}l_0. \quad (37.23)$$

Em fim, a configuração das tres massas em equilíbrio é um triangulo equilatero, como é de ser esperado intuitivamente. A orientação do triangulo não fica determinada. Podemos escolher,

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_{1,0} &= l_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\rho}_{2,0} &= \frac{\sqrt{3}}{2}l_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular o tensor de massa $\mathbf{T}$ e o coeficiente $\mathbf{C}$ da força restouradora. Tomando a base como

$$\vec{q} \rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{1,x} \\ \rho_{1,y} \\ \rho_{2,x} \\ \rho_{2,y} \end{pmatrix}$$

temos

$$\mathbf{T} = m \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}. \quad (37.24)$$

A matriz $\mathbf{C}$ é um pouco mais trabalhosa, mas um calculo direto leva ao resultado,

$$\mathbf{C} = k \begin{pmatrix} 9/8 & 0 & 0 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 3/8 & \sqrt{3}/4 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/4 & 1/2 & 0 \\ \sqrt{3}/4 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}. \quad (37.25)$$

O autovalor $d = \omega^2$ pode ser obtida pela equação,

$$\det |\omega^2 \mathbf{T} - \mathbf{C}| = 0. \quad (37.26)$$

ou,

$$\frac{1}{144}\omega^8 - \frac{\omega_0^2}{12}\omega^6 + \frac{5\omega_0^4}{16}\omega^4 - \frac{3\omega_0^6}{8}\omega^2 = 0, \quad (37.27)$$

onde $\omega_0^2 = k/m$. Assim, temos

$$\omega = 0, \pm\sqrt{6}\omega_0, \pm\sqrt{3}\omega_0. \quad (37.28)$$

O modo normal com o autovalor $\omega = 0$ corresponde ao movimento do sistema que gira o triângulo em torno do seu centro de massa sem deformar, isto é, como um corpo rígido. Isto porque, para a rotação do sistema em torno do seu centro de massa não existe a força restauradora. Os outros dois modos normais correspondem a vibrações do sistema. Um é a vibração em escala do sistema sem alterar a sua forma, e outro, a vibração do ângulo entre os dois vetores, $\vec{\rho}_1$ e $\vec{\rho}_2$. Esta afirmação deve ser confirmada obtendo os vetores de base para os modos normais correspondentes.

Exercício: Obtenha os vetores de modos normais correspondentes aos autovalores da Eq.(37.28) e analize seus significados.

37.1.2. Exemplo II:

Considere um sistema de $n + 2$ massas iguais, ligadas em linha por molas iguais. As massas se movem unidimensionalmente ao longo desta reta. As duas massas de pontassão amarradas nas paredes e, portanto, imóveis. A Lagrangiana do sistema é

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M \left(\frac{d\zeta_i}{dt} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{k}{2} (\zeta_i - \zeta_{i-1})^2, \quad (37.29)$$

onde ζ_i é o deslocamento da i -ésima massa da sua posição de equilíbrio. Aqui, $i = 0$ e $i = n + 1$ correspondem respectivamente, à primeira e à última massa e, portanto, seus deslocamentos são nulos, ou seja,

$$\zeta_0 = \zeta_{n+1} = 0, \quad (37.30)$$

e, assim,

$$\frac{d\zeta_0}{dt} = \frac{d\zeta_{n+1}}{dt} = 0. \quad (37.31)$$

Desta forma, as variáveis, de fato, são

$$\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n.$$

A equação de movimento de Euler-Lagrange para ζ fica

$$M \frac{d^2 \zeta_i}{dt^2} = k (\zeta_{i+1} - 2\zeta_i + \zeta_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (37.32)$$

Vamos introduzir a notação vetorial para o conjunto das variáveis ζ_i 's por,

$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_k \\ \vdots \\ \zeta_n \end{pmatrix}. \quad (37.33)$$

Neste caso, podemos escrever a Lagrangiana na forma matricial,

$$L = \frac{M}{2} \left\{ \frac{d\vec{\zeta}^T}{dt} \frac{d\vec{\zeta}}{dt} - \vec{\zeta}^T \mathbf{C} \vec{\zeta} \right\}, \quad (37.34)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz $n \times n$,

$$\mathbf{C} = \omega_0^2 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

com $\omega_0^2 = k/M$.

A matriz $\mathbf{C}$ é simétrica e *tridiagonal*. Isto é, todos os elementos de matriz são nulos exceto os dois lados da linha diagonal. Em geral, uma matriz simétrica tridiagonal pode ser diagonalizada analiticamente como segue. Seja

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

uma matriz $n \times n$ simétrica e tridiagonal. Queremos resolver o problema de autovalor,

$$A\vec{\zeta} = \lambda\vec{\zeta}. \quad (37.35)$$

Em termos de componentes, temos

$$b\zeta_{k-1} + a\zeta_k + b\zeta_{k+1} = \lambda\zeta_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (37.36)$$

onde convencionamos que

$$\zeta_0 = \zeta_{n+1} = 0. \quad (37.37)$$

A equação de diferença Eq.(37.36) pode ser resolvida em termos de *ansatz*³⁴,

$$\zeta_k = \sin(qk), \quad (37.38)$$

onde q é um parâmetro a ser determinado. Substituindo este *ansatz* na Eq.(37.36), temos

$$\sin(q(k-1)) + \sin(q(k+1)) = u \sin(qk),$$

onde $u = (\lambda - a)/b$. Utilizando a formula de adição para dois senos,

$$2 \sin(qk) \cos q = u \sin(qk),$$

Esta equação é satisfeita para todo k só se

$$2 \cos q = u \left(= \frac{\lambda - a}{b} \right), \quad (37.39)$$

que determina o valor do parâmetro q .

Note que a condição Eq.(37.37) para $k = 0$ é satisfeita automaticamente pela *ansatz* (37.38) mas para satisfazer a condição para $k = n + 1$ devemos ter

$$q(n+1) = m\pi, \quad (37.40)$$

onde m é um número inteiro. Em outras palavras, existem varios valores de q para os quais a Eq.(37.38) é a solução da Eq.(37.35). Vamos denotar o valor de q corespondente ao valor m por q_m . Para um dado $m \neq 0$, temos

$$q_m = \frac{\pi}{n+1}m, \quad (37.41)$$

³⁴A palavra *ansatz* é vem do alemão, significando uma solução advinhada de um problema, seja exata, seja aproximada. Muitas vezes, utilizamos um *ansatz* contendo alguns parâmetros a ser determinados.

e conseqüentemente devemos ter

$$u = u_m = 2 \cos \frac{\pi}{n+1} m. \quad (37.42)$$

Esta equação impor uma condição para o valor de λ . Assim, para um dado m , o autovalor λ é determinado por

$$\lambda_m = a + 2b \cos \frac{\pi}{n+1} m. \quad (37.43)$$

Note que existem n diferentes valores de λ_m para $m = 1, \dots, n$.

Aplicando o resultado acima para nosso problema original, temos

$$\begin{aligned} a &= 2, \\ b &= -1, \end{aligned}$$

e, portanto, os autovalores são

$$\lambda_m = 2(1 - \cos q_m), \quad m = 1, \dots, n \quad (37.44)$$

e o autovetor correspondente para λ_m é

$$\vec{\zeta}_m = \frac{1}{\sqrt{Z_m}} \begin{pmatrix} \sin(q_m) \\ \sin(2q_m) \\ \vdots \\ \sin(kq_m) \\ \vdots \\ \sin(nq_m) \end{pmatrix}. \quad (37.45)$$

onde Z_m é a constante de normalização e determinada por

$$\begin{aligned}
Z_m &= \vec{\zeta}_m^T \cdot \vec{\zeta}_m = \sum_{k=1}^n \sin^2(kq_m) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1 - \cos(2q_mk)}{2} \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos(2q_mk) \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos((n+1)q_m) \sin nq_m}{\sin \Delta_m} \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos(\pi m) \sin \frac{n}{n+1} \pi m}{\sin q_m} \\
&= \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos(\pi m) \sin(\pi m - q_m)}{\sin q_m} \\
&= \frac{n+1}{2},
\end{aligned}$$

onde utilizamos a fórmula³⁵,

$$\sum_{k=1}^n \cos xk = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) / \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad (37.46)$$

para x arbitrário. Com esta normalização, podemos provar, analogamente, que

$$\vec{\zeta}_m^T \cdot \vec{\zeta}_l = \delta_{ml}, \quad (37.47)$$

ou seja, o conjunto de vetores, Eq.(37.45), $m = 1, ..n$, forma uma base ortonormal. Podemos escrever um vetor arbitrário $\vec{\zeta}(t)$ dependente no tempo em termos de uma combinação linear destes vetores base,

$$\vec{\zeta} = \sum_{m=1}^n \eta_m \vec{\zeta}_m, \quad (37.48)$$

³⁵Prove a Eq.(37.46). Também prove

$$\sum_{k=1}^n \sin xk = \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{n}{2}x\right) / \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

onde η'_k s são as coeficientes dependentes no tempo,

$$\eta_m = \eta_m(t). \quad (37.49)$$

A componente do vetor $\vec{\zeta}$, ζ_k , fica

$$\zeta_k = \sum_{m=1}^n \eta_m \frac{1}{\sqrt{Z_m}} \sin(\chi_m k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{m=1}^n \eta_m \sin\left(\frac{\pi m k}{n+1}\right). \quad (37.50)$$

A Eq.(37.48) pode ser vista como a mudança de variáveis de $\{\zeta_k\}$ para $\{\eta_m\}$. Substituindo a Eq.(37.48) na Lagrangiana, a Eq.(37.34) e utilizando a propriedade ortonormal dos vetores $\{\vec{\zeta}_m\}$, temos

$$L = \frac{M}{2} \sum_{m=1}^n \left\{ \left(\frac{d\eta_m}{dt} \right)^2 - \lambda_m \omega_0^2 \eta_m^2 \right\},$$

onde $\omega_0^2 = k/M$ e

$$\lambda_m = 2(1 - \cos q_m) = 4 \sin^2 \frac{q_m}{2}.$$

Assim, temos a solução para η_m por

$$\eta_m = A_m \sin \omega_m t + B_m \cos \omega_m t,$$

com

$$\omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{m}{n+1}\right). \quad (37.51)$$

Desta forma, vemos que o sistema de $n+2$ massas ligadas pelas molas iguais, com a condição de contorno, Eq.(37.30) tem os modos normais de vibrações com frequências dadas pela Eq.(37.51). Em geral, a solução da equação de movimento fica escrita pela combinação linear das soluções correspondente a modos normais,

$$\sum_{m=1}^n [A_m \sin(\omega_m t) + B_m \cos(\omega_m t)] \vec{\zeta}_m, \quad (37.52)$$

onde as coeficientes A_m e B_m são determinadas pela condição inicial do sistema.