

TD

Applications linéaires

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

EXERCICE 1 ■ □ □

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires

- ① $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0);$
- ② $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$
- ③ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2.$
- ④ $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(0), P'(1));$
- ⑤ $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto AP,$ où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé;
- ⑥ $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X], P \mapsto P^2.$
- ⑦ $\phi_1 : E \rightarrow E, \phi_1(f)(x) = (f(x))^2;$
- ⑧ $\phi_2 : E \rightarrow E, \phi_2(f)(x) = (f(x^2));$
- ⑨ $\phi_3 : E \rightarrow E, \phi_3(f)(x) = \int_0^x f(t)dt;$

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Dans tous les cas, donner le noyau et l'image des applications suivantes. Dire si elles sont injectives et/ou surjectives.

- ① $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \mapsto (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$
- ② $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $(x, y, z) \mapsto (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z)$

$$\textcircled{3} \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, x - y, x + y)$$

$$\textcircled{4} \quad u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{telle que}$$

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2$$

$$\text{et } u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

$$\textcircled{5} \quad \Phi : \mathbb{R}_4[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X]$$

$$P \mapsto XP' - P$$

$$\textcircled{6} \quad D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$$

$$f \mapsto f'$$

$$\textcircled{7} \quad \Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P \mapsto P(X + 1) - P(X)$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

- ① Dans $\mathbb{R}^2$, considérons les sous-espaces vectoriels $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$ et $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.
 Considérons s la symétrie par rapport à D_1 parallèlement à D_2 et p la projection sur D_1 parallèlement à D_2 .

1.a Démontrer que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$.

1.b Dessiner les sous-espaces vectoriels D_1, D_2 ainsi que l'image par p et s des vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (1, 1), \vec{w} = (2, 1)$.

1.c Vérifier vos résultats par le calcul.

1.d Donner les expressions de s et p .

- ② Dans $\mathbb{R}^3$, considérons les sous-espaces vectoriels $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x, z = 0\}$ et $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.
 Considérons s la symétrie par rapport à P parallèlement à D et p la projection sur P parallèlement à D .

2.a Démontrer que $D \oplus P = \mathbb{R}^3$.

2.b Dessiner les sous-espaces vectoriels D, P ainsi que l'image par p et s des vecteurs suivants : $\vec{u} = (1, 0, 0), \vec{v} = (1, 0, 1), \vec{w} = (2, 1, 0)$.

2.c Vérifier vos résultats par le calcul.

2.d Donner les expressions de s et p .

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$.

- ① Montrer que p est un projecteur si, et seulement si, $\text{Id} - p$ l'est.
- ② Exprimer alors $\text{Im}(\text{Id} - p)$ et $\text{Ker}(\text{Id} - p)$ en fonction de $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ □ □

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (-3x + 2y - 4z, 2x + 2z, 4x - 2y + 5z)$. Montrer que f est la projection sur un plan P parallèlement à une droite D . Donner une équation cartésienne du plan P et un vecteur directeur de D . ► Indication

► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □

On considère l'endomorphisme $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$s(x, y, z) = (-x - 4y - 2z, 4x + 9y + 4z, -8x - 16y - 7z)$$

- ① Montrer que s est une symétrie.
- ② Déterminer $F = \text{Ker}(s - \text{Id})$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id})$ et une base de chacun des ces deux sous-espaces.

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de E de dimension quelconque. Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H . Montrer $H \oplus \text{Vect}(a) = E$. ► Indication

► Correction

EXERCICE 8 ■ □ □

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer

$$V \subset f(V) \implies f(V) = V.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □

Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E .

- ① Montrer que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
- ② Trouver u et v dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que $\text{rg}(u + v) < \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.
- ③ Trouver deux endomorphismes u et v de $\mathbb{R}^2$ tels que $\text{rg}(u + v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe un endomorphisme f tel que $\text{Im } f = \text{Ker } f$ si, et seulement si, n est pair. ► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ □ □

Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n . On suppose qu'il existe $x \in E$ non nul tel que

$$f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0.$$

Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée. ► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ □ □

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et f, g deux formes linéaires non nulles sur E . Montrer que

$$\exists x \in E, f(x)g(x) \neq 0.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

Déterminer les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ laissant stables chacun des axes de coordonnées et la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$. ► Indication ► Correction

EXERCICES TECHNIQUES

EXERCICE 14 ■ □ □

Soit $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau. ► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ □ □

Soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E .

- ① Exprimer $u^{-1}(u(F))$ en fonction de F et de $\ker u$.
- ② Exprimer $u(u^{-1}(F))$ en fonction de F et de $\text{Im } u$.
- ③ À quelle condition a-t-on $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$?

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, x et $f(x)$ soient colinéaires.

Montrer que f est une homothétie vectorielle. ► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ □

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$.

- ① Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .
- ② Établir que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ □

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les assertions

- (i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$
- (ii) p et q sont des projecteurs de même noyau.

► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 4f + 3\text{Id} = 0$. Montrer

$$\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 3\text{Id}) = E$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 20 ■ □ □

Soient $f, g \in E^*$ telles que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f = \alpha g$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 21 ■ ■ □

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^*, f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0 \implies f = 0$$

Montrer que $\mathcal{E}$ est une base de E . ► Indication ► Correction

EXERCICE 22 ■ □ □

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts et $\varphi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\varphi(P) = (P(a_0), P'(a_0), \dots, P(a_n), P'(a_n))$$

Montrer que φ est bijective. ► Indication ► Correction

EXERCICE 23 ■ ■ □

Soient $v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\text{rg } u + \text{rg } v - \dim F \leq \text{rg}(u \circ v) \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v).$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 24 ■ ■ □

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f)$.

- ① Montrer que $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$.
- ② Montrer $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$.

► Indication ► Correction

EXERCICES "COMME EN COLLE"

EXERCICE 25 ■ ■ □

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, une application $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $f(A) \subset f(B) \iff A + \ker f \subset B + \ker f$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 26 ■ ■ □

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ vérifiant $f \circ g = \text{Id}$.

① Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im } g$.

② Montrer

$$E = \ker f \oplus \text{Im } g$$

③ Dans quel cas peut-on conclure $g = f^{-1}$?

④ Calculer $(g \circ f) \circ (g \circ f)$ et caractériser $g \circ f$

► Indication ► Correction

EXERCICE 27 ■ ■ □

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p avec $n > p$.

On considère $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ vérifiant $u \circ v = \text{Id}_F$.

① Montrer que $v \circ u$ est un projecteur.

② Déterminer son rang, son image et son noyau.

► Indication ► Correction

EXERCICE 28 ■ ■ □ Retour dans les groupes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition et contenant l'endomorphisme Id_E .

Montrer que $F \cap \text{GL}(E)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}(E), \circ)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 29 ■ (A) ■

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n .

Montrer que $(I, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée et en déduire qu'il existe un polynôme non identiquement nul qui annule f . ► Indication ► Correction

EXERCICE 30 ■ ■ ■

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer

$$\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) \iff \begin{cases} \text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\} \\ \ker(f) + \ker(g) = E \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 31 ■ (A) ■

Soit E de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^2 + u \circ v = \text{Id}$. Montrer que u et v commutent. ► Indication ► Correction

EXERCICE 32 ■ (A) ■

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = 0$. Montrer que $\text{rg } u + \text{rg } u^2 \leq n$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 33 ■ ■ □

Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tels que

$$u + v = \text{id et } \text{rg}(u) + \text{rg}(v) \leq n$$

Montrer que u et v sont des projecteurs. ► Indication ► Correction

EXERCICE 34 ■ (A) ■

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que $\text{rg } f^2 = 3$. Quels sont les rangs possibles pour f ? ► Indication ► Correction

EXERCICE 35 ■ ■ □

Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré n ; posons, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q_i(X) = Q(X + i)$.

① Montrer que la famille $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

② Montrer que, pour toute forme linéaire φ sur $\mathbb{R}_n[X]$, il existe des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\varphi(P) = \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \dots + \alpha_n P^{(n)}(0).$$

- ③ Soit une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\varphi(Q_0) = \dots = \varphi(Q_n) = 0$. Montrer que φ est nulle. On pourra considérer le polynôme $\alpha_0 Q + \dots + \alpha_n Q^{(n)}$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ les scalaires associés à φ dans la question précédente.

- ④ Conclure que la famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 36 ■ ■ ■

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E .

- ① Supposons que $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une famille libre de E^* . Montrer que $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ si, et seulement si,

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } \varphi.$$

- ② On suppose que

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i = \{0_E\}.$$

Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est génératrice de E^* .

► Indication ► Correction

EXERCICE 37 ■ ■ □ Images et noyaux itérés d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $I_p = \text{Im } f^p$ et $N_p = \text{Ker } f^p$.

- ① Montrer que $(I_p)_{p \geq 0}$ est décroissante tandis que $(N_p)_{p \geq 0}$ est croissante.
- ② Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.
- ③ Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés. Montrer que $\forall s \geq r, I_s = I_r$ et $N_s = N_r$.
- ④ Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E .

► Indication ► Correction

EXERCICE 38 ■ ■ □ Endomorphismes nilpotents

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent, c'est à dire, tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$.

- ① Montrer que $\text{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f .

- ② Supposons que E est un plan vectoriel.

- ②.a Montrer que f endomorphisme non nul est nilpotent si, et seulement si, $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

- ②.b En déduire qu'un tel endomorphisme ne peut s'écrire sous la forme $f = u \circ v$ avec u et v nilpotents.

- ③ Supposons maintenant E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n > 1$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et que f aie un indice $n \in \mathbb{N}$ fixé de nilpotence, c'est à dire, $f^n = 0$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f^k \neq 0$. On note $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$.

- ③.a Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

- ③.b Soit a un vecteur de E tel que $f^{n-1}(a) \neq 0_E$. Montrer que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ constitue une base de E .

- ③.c Soit $\varphi_a : \mathcal{C}(f) \rightarrow E$ l'application définie par $\varphi_a(g) = g(a)$. Montrer que φ_a est un isomorphisme.

- ③.d En déduire que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$.

- ④ Supposons encore E de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p (tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$) et $\Phi : v \in \mathcal{L}(E) \mapsto u \circ v - v \circ u$.

- ④.a Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\Phi^n(v) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k$$

- ④.b Montrer que Φ est nilpotente et majorer son indice de nilpotence.

- ④.c Soit $a \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $a \circ b \circ a = a$.

- ④.d En déduire l'indice de nilpotence de Φ .

► Indication ► Correction

EXERCICE 39 ■ ■ □

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, on note S_p l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists P \in \mathbb{R}_p[X], \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n).$$

- ① Montrer que si $u \in S_p$, alors P est unique. On le notera P_u .
- ② Montrer que S_p est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- ③ Montrer que $\phi : u \mapsto P_u$ est linéaire et donner une base de son noyau. Que représente son image?
- ④ Donner une base de S_p
On pourra utiliser $R_k(X) = (X+1)^k - aX^k$ pour $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$.
- ⑤ **Application.** Déterminer la suite (u_n) définie par

$$u_0 = -2 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 40 ■ ■ □ Un supplémentaire dans $\mathcal{L}(E)$

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, sur F parallèlement à G . On pose $q = \text{Id}_E - p$.

- ① Rappeler pourquoi q est un projecteur, dont on donnera son image et noyau en fonction de ceux de p .
- ② On définit les parties F et G suivantes de $\mathcal{L}(E)$

$$F = \{f \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ p\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in \mathcal{L}(E), \exists u \in \mathcal{L}(E), f = u \circ q\}$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$.
- ③ Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 41 ■ ■ ■ Théorème de Maschke

Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$, et F un sous-espace vectoriel de E stable par tout élément g de G , c'est à dire $g(F) \subset F$. On suppose disposer d'un projecteur q de E sur F .

On souhaite montrer que F admet un supplémentaire H stable par tout élément de G (théorème de Maschke). Pour ce faire, on pose

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ q \circ g^{-1}$$

- ① **Preliminaires.** Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que g laisse stables $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$, c'est à dire $g(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$ et $g(\text{Ker}(f)) \subset \text{Ker}(f)$.
- ② Montrer que p est un endomorphisme d'image incluse dans F , puis que c'est un projecteur d'image F .
- ③ Soit $g_0 \in G$. Montrer que $p \circ g_0 = g_0 \circ p$. Conclure.

► Indication ► Correction

Indications

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

EXERCICES TECHNIQUES

[INDICATION POUR L'EXERCICE 14](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 15](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 16](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 17](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 18](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 19](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 20](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 20](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 21](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 21](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 22](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 22](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 23](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 23](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 24](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 24](#)

EXERCICES "COMME EN COLLE"

[INDICATION POUR L'EXERCICE 25](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 26](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 27](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

[INDICATION POUR L'EXERCICE 28](#) [Retour dans les groupes](#) _____

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 29 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 30 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 31 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 31](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 32 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 32](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 33 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 33](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 34 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 34](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 35 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 35](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 36 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 36](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 37 **Images et noyaux itérés d'un endomorphisme**

[↩ retour à l'EXERCICE 37](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 38 **Endomorphismes nilpotents** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 38](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 39 _____

[↩ retour à l'EXERCICE 39](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 40 **Un supplémentaire dans $\mathcal{L}(E)$** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 40](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 41 **Théorème de Maschke** _____

[↩ retour à l'EXERCICE 41](#)

Corrections

EXERCICES D'APPLICATION DU COURS

Correction de l'EXERCICE 1

- ① f est une application linéaire. Prenons $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x+x') + (y+y'), (x+x') - 2(y+y'), 0) \\ &= (x+y, x-2y, 0) + (x'+y', x'-2y', 0) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - 2\lambda y, 0) \\ &= \lambda(x+y, x-2y, 0) \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

- ② f n'est pas une application linéaire car $f((0,0)) \neq (0,0,0)$.

- ③ f n'est pas une application linéaire. En effet,

$$f((1,0)) = 1, f((-1,0)) = 1 \text{ et } f((0,0)) = 0 \neq f((1,0)) + f((-1,0))$$

- ④ f est une application linéaire. Prenons $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$ dans $\mathbb{R}^2$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} f(u+v) &= ((x+x') + (y+y'), (x+x') - 2(y+y'), 0) \\ &= (x+y, x-2y, 0) + (x'+y', x'-2y', 0) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - 2\lambda y, 0) \\ &= \lambda(x+y, x-2y, 0) \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

- ⑤ f n'est pas une application linéaire car $f((0,0)) \neq (0,0,0)$.

- ⑥ f n'est pas une application linéaire. En effet,

$$f((1,0)) = 1, f((-1,0)) = 1 \text{ et } f((0,0)) = 0 \neq f((1,0)) + f((-1,0))$$

- ⑦ Non! Considérons les fonctions f et g définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = 2x$ de sorte que $\phi_1(f+g)(x) = 4x^2$, alors que $\phi_1(f)(x) + \phi_1(g)(x) = x^2 + x^2 = 2x^2$. On a donc $\phi_1(f+g) \neq \phi_1(f) + \phi_1(g)$ et donc ϕ_1 n'est pas une application linéaire.

- ⑧ Oui! Soit f, g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_2(f+g)(x) = (f+g)(x^2) = f(x^2) + g(x^2) = \phi_2(f)(x) + \phi_2(g)(x)$$

et

$$\phi_2(\lambda f)(x) = (\lambda f)(x^2) = \lambda f(x^2) = \lambda \phi_2(f)(x)$$

Remarquons que la place du carré (sur la variable ici) diffère de la place du carré dans la première question (sur la fonction).

- ⑨ Ceci découle de la linéarité de l'intégrale. Soit f, g dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi_3(f+g)(x) = \int_0^x (f+g)(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt = \phi_3(f)(x) + \phi_3(g)(x)$$

et

$$\phi_3(\lambda f)(x) = \int_0^x (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_0^x f(t)dt = \lambda \phi_3(f)(x)$$

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

- ① $\text{Ker } f = \{(0,0,0)\}$
 $\text{Im } f = \text{Vect}\{(1,-1,0,1), (0,1,1,1), (1,0,1,2)\}$
 L'application est donc injective, non surjective.
- ② $\text{Ker } f = \text{Vect}\{(1,-2,1)\}$
 $\text{Im } f = \text{Vect}\{(1,4,0), (0,1,1)\}$
 L'application est donc non injective, non surjective.
- ③ $\text{Ker } f = \{(0,0)\}$
 $\text{Im } f = \text{Vect}\{(1,1,1), (1,-1,1)\}$
 L'application est donc injective, non surjective.

- ④ $\text{Ker } u = \text{Vect}\{(2, 0, -1)\}$
 $\text{Im } u = \text{Vect}\{(-2, 0, 2), (0, 3, 0)\}$
 L'application est donc injective, non surjective.
- ⑤ $\text{Ker } \Phi = \text{Vect}\{X\}$
 $\text{Im } u = \text{Vect}\{1, X^2, X^3, X^4\}$
 L'application est donc non injective, non surjective.
- ⑥ $\text{Ker } D = \{\text{fonctions constantes}\}$
 $\text{Im } D = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
 L'application est donc non injective, mais surjective.
- ⑦ $\text{Ker } \Phi = \text{Vect}\{1\}$
 $\text{Im } \Phi = \mathbb{R}[X]$
 L'application est donc non injective, mais surjective.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

- ① D_1 et D_2 sont deux droites vectorielles; elles sont donc de dimension 1. De plus, on a clairement $D_1 \cap D_2 = \{(0, 0)\}$ donc D_1 et D_2 sont supplémentaires. De $\dim(D_1 \oplus D_2) = \dim(D_1) + \dim(D_2)$, on tire que $D_1 \oplus D_2 = \mathbb{R}^2$.
 On remarque que $\vec{u}$ est un vecteur de D_2 . Son image par p est donc le vecteur nul, et son image par s et son opposé. $\vec{v}$ est un vecteur de D_1 . Il est invariant par p comme par s . Finalement, pour construire l'image de $\vec{w}$ par p , on considère la parallèle à D_2 passant par $\vec{w}$: elle coupe D_1 en $\vec{v}$. On a ainsi $p(\vec{w}) = \vec{v}$. Pour construire l'image de $\vec{w}$ par s , on utilise que, notant $\vec{w}_1 = \vec{w} - \vec{v}$, $s(\vec{w}) = \vec{v} - \vec{w}_1$. Par le calcul on a $\vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in D_2$, et donc $p(\vec{u}) = \vec{0}$, $s(\vec{u}) = \vec{0} - \vec{u} = -\vec{u}$.
 $-\vec{v} = \vec{v} + \vec{0}$ avec $\vec{v} \in D_1$, et donc $p(\vec{v}) = s(\vec{v}) = \vec{v}$.
 $-\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$, avec $\vec{v} \in D_1$ et $\vec{u} \in D_2$, et donc $p(\vec{w}) = \vec{v}$, $s(\vec{w}) = \vec{v} - \vec{u} = (0, 1)$.
- ② P est un plan vectoriel (une base est donnée par les vecteurs $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$). Il est donc de dimension 2. D , comme intersection de deux plans vectoriels non confondus, est une droite vectorielle dont une base est donnée par $(1, 1, 0)$. Elle est donc de dimension 1. Comme dans la question précédente, on vérifie que $D \cap P = \{(0, 0, 0)\}$ (c'est immédiat), et donc que D et P sont en somme directe. De $\dim(D \oplus P) = \dim(D) + \dim(P) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on déduit que D et P sont supplémentaires : $D \oplus P = \mathbb{R}^3$. Pour construire les images des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, on procède comme dans le plan, mais il faut avoir une bonne vue dans l'espace!

Pour plus de lisibilité, on va réaliser 3 dessins différents. Pour chacun de ces dessins, l'axe (Ox) est en rouge, l'axe (Oy) est en vert et l'axe (Oz) est en bleu. La droite D est elle aussi représentée en bleu foncé, et le plan P est en bleu ciel.

On a $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Posons $\vec{u}_1 = (0, -1, 0)$ et $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$. Alors $\vec{u}_1 \in P, \vec{u}_2 \in D$ et $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. On a donc $p(\vec{u}) = \vec{u}_1$ et $s(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (-1, -2, 0)$.

On a $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Posons $\vec{v}_{11} = (0, -1, 1)$ et $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$. Alors $\vec{v}_{11} \in P, \vec{v}_2 \in D$ et $\vec{v} = \vec{v}_{11} + \vec{v}_2$. On a donc $p(\vec{v}) = \vec{v}_{11}$ et $s(\vec{v}) = \vec{v}_{11} - \vec{v}_2 = (-1, -2, 1)$.

On a $\vec{w} = (2, 1, 0)$. Posons $\vec{w}_1 = (0, -1, 0)$ et $\vec{w}_2 = (2, 2, 0)$. Alors $\vec{w}_1 \in P, \vec{w}_2 \in D$ et $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$. On a donc $p(\vec{w}) = \vec{w}_1$ et $s(\vec{w}) = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 = (-2, -3, 0)$.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

- ① $(\text{Id} - p)^2 = \text{Id} - 2p + p^2$ donc $(\text{Id} - p)^2 = (\text{Id} - p) \iff p = p^2$. $p \circ (\text{Id} - p) = \tilde{0}$ donc $\text{Im}(\text{Id} - p) \subset \ker p$.
- Inversement, soit $x \in \ker p$, on a $(\text{Id} - p)(x) = x - p(x) = x$ donc $x \in \text{Im}(\text{Id} - p)$. Ainsi $\ker p \subset \text{Im}(\text{Id} - p)$. Finalement $\ker p = \text{Im}(\text{Id} - p)$ et de même $\ker(\text{Id} - p) = \text{Im } p$.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

Notons A la matrice de f dans la base canonique. On a

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Alors on vérifie facilement que $A^2 = A$, c'est-à-dire que $f \circ f = f$: f est donc une projection. Pour déterminer ses éléments caractéristiques, on commence par calculer $\ker(f)$:

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \ker(f) &\iff \begin{cases} -3x + 2y - 4z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ -3x + 2y - 4z = 0 \\ 4x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 2y \\ y = 1 \\ z = 2y \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc $\ker(f) = \text{vect}(u)$ avec $u = (-2, 1, 2)$. Par le théorème du rang, on sait que $\text{Im}(f)$ est de dimension 2. Soit $v_1 = f(e_1) = (-3, 2, 4)$ et $v_2 = f(e_2) = (2, 0, -2)$. Alors (v_1, v_2) est une famille libre contenue dans $\text{Im}(f)$ qui est de dimension 2, donc c'est une base de $\text{Im}(f)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
(x, y, z) \in \text{Im}(f) &\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = -3\lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda \\ z = 4\lambda - 2\mu \end{cases} \\
&\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \mu = \frac{x}{2} + \frac{3y}{4} \\ \lambda = \frac{y}{2} \\ z = 2y - x - \frac{3y}{2} \end{cases} \\
&\iff 2x - y + 2z = 0
\end{aligned}$$

f est donc la projection sur le plan $P = \text{Im}(f)$ d'équation $2x - y + 2z = 0$ parallèlement à la droite D de vecteur directeur $u = (-2, 1, 2)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned}
(s \circ s)(x, y, z) &= s(s(x, y, z)) = s(\underbrace{-x - 4y - 2z}_X, \underbrace{4x + 9y + 4z}_Y, \underbrace{-8x - 16y - 7z}_Z) \\
&= (-X - 4Y - 2Z, 4X + 9Y + 4Z, -8X - 16Y - 7Z).
\end{aligned}$$

Or, $-X - 4Y - 2Z = x$, $4X + 9Y + 4Z = y$ et $-8X - 16Y - 7Z = z$. On a donc $s \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc s est une symétrie.

2. On a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x - 4y - 2z = x \\ 4x + 9y + 4z = y \\ -8x - 16y - 7z = z \end{cases} \iff x + 2y + z = 0$$

Ainsi, on a

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + 2y + z = 0\} = \text{vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

De même, on a $(x, y, z) \in G$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} -x - 4y - 2z = -x \\ 4x + 9y + 4z = -y \\ -8x - 16y - 7z = -z \end{cases} \iff \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 4x + 8y + 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z + 2y = 0 \\ 2z + 5y + 2x = 0 \\ 3z + 8y + 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z + 2y = 0 \\ y + 2x = 0 \\ 2y + 4x = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z - 4x = 0 \\ y + 2x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $G = \{(x, -2x, 4x) \text{ avec } x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, -2, 4))$.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

Puisque $a \notin H$, on vérifie aisément

$$\text{Vect}(a) \cap H = \{0_E\}$$

Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $H = \ker \varphi$. Pour tout $x \in E$, on peut écrire

$$x = (x - \lambda a) + \lambda a \text{ avec } \lambda = \varphi(x)/\varphi(a)$$

Puisque $\varphi(x - \lambda a) = 0$, on a $x - \lambda a \in H$ et puisque $\lambda a \in \text{Vect}(a)$, on obtient

$$E = H + \text{Vect}(a)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

Si $V = \{0\}$: ok Sinon, soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de V .

$$f(V) = f(\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$$

Donc $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension inférieure à p . Or $V \subset f(V)$ donc $\dim f(V) \geq p$ et par suite $\dim f(V) = p$. Par inclusion et égalité des dimensions : $f(V) = V$.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

- ① Pour tout $x \in E$, on a

$$(u + v)(x) = u(x) + v(x) \in \text{Im } u + \text{Im } v$$

donc

$$\text{Im}(u + v) \subset \text{Im } u + \text{Im } v$$

Puisque

$$\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G$$

on obtient

$$\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v$$

De plus, on peut écrire

$$u = (u + v) + (-v)$$

donc

$$\text{rg } u \leq \text{rg}(u + v) + \text{rg}(-v) = \text{rg}(u + v) + \text{rg } v$$

puis

$$\text{rg } u - \text{rg } v \leq \text{rg}(u + v)$$

Aussi

$$\text{rg } v - \text{rg } u \leq \text{rg}(u + v)$$

et donc

$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v)$$

- ② Les endomorphismes $u = v = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ conviennent.

- ③ Les endomorphismes $u = v = 0$ conviennent..

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

Si un tel endomorphisme f existe alors

$$\dim E = \text{rg}(f) + \dim \ker f = 2 \text{rg}(f)$$

donc n est pair. Inversement si n est pair, $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$ Si $p = 0$, l'endomorphisme nul convient. Si $p > 0$, soit $e = (e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$f(e_1) = 0_E, \dots, f(e_p) = 0_E, f(e_{p+1}) = e_1, \dots, f(e_{2p}) = e_p$$

Pour cet endomorphisme, il est clair que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \text{Im } f$ et $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker f$. Par suite $\dim \text{Im } f, \dim \ker f \geq p$ et par le théorème du rang $\dim \text{Im } f, \dim \ker f = p$. Par inclusion et égalité des dimensions

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \ker f$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

Soit φ une forme linéaire ne s'annulant pas sur x . Celle-ci n'est pas combinaison linéaire des $(f_1, \dots, f_n)$. Cette famille n'est donc pas génératrice et par suite elle est liée car formée de $n = \dim E^*$ éléments de E^* .

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

Si $\ker f = \ker g$ alors le résultat est immédiat. Sinon, pour des raisons de dimension, $\ker f \not\subset \ker g$ et $\ker g \not\subset \ker f$. La somme d'un vecteur de $\ker f$ qui ne soit pas dans $\ker g$ et d'un vecteur de $\ker g$ qui ne soit pas dans $\ker f$ est solution.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

Notons $e_1, e_2, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui vérifie les conditions de l'énoncé. Par définition, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in \mathbb{K}$ tels que $u(e_k) = \lambda_k e_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $u(e_1 + \dots + e_n) = \lambda(e_1 + \dots + e_n)$. Par linéarité, on a

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \lambda(e_1 + \dots + e_n)$$

et donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda$. En conclusion, u est une homothétie. Réciproquement, il est évident que les homothéties vérifient bien les conditions de l'énoncé.

↩ retour à l'EXERCICE 13

EXERCICES TECHNIQUES

Correction de l'EXERCICE 14

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)'' - 3(\lambda f + \mu g)' + 2(\lambda f + \mu g)$$

puis

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda(f'' - 3f' + 2f) + \mu(g'' - 3g' + 2g)$$

donc

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

De plus $\varphi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc φ est un endomorphisme $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$f \in \ker \varphi \iff f'' - 3f' + 2f = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ de racines 1 et 2. La solution générale est

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Par suite

$$\ker \varphi = \{C_1 e^x + C_2 e^{2x} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$$

↩ retour à l'EXERCICE 14

Correction de l'EXERCICE 15

- ① $u^{-1}(u(F))$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et $\ker u$ donc

$$F + \ker u \subset u^{-1}(u(F))$$

Inversement, soit $x \in u^{-1}(u(F))$. On a $u(x) \in u(F)$ donc il existe $a \in F$ tel que $u(x) = u(a)$ et alors pour $b = x - a$ on a $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in \ker u$. Ainsi

$$u^{-1}(u(F)) = F + \ker u$$

- ② $u(u^{-1}(F))$ est un sous-espace vectoriel de E inclus dans F et dans $\text{Im } u$ donc

$$u(u^{-1}(F)) \subset F \cap \text{Im } u$$

Inversement, soit $x \in F \cap \text{Im } u$. Il existe $a \in E$ tel que $x = u(a)$. Or, puisque $x \in F$, $a \in u^{-1}(F)$ et donc $x = u(a) \in u(u^{-1}(F))$. Ainsi

$$u(u^{-1}(F)) = F \cap \text{Im } u$$

- ③ On a $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$ si, et seulement si,

$$F + \ker u = F \cap \operatorname{Im} u$$

Si cette condition est vérifiée alors

$$F \subset F + \ker u = F \cap \operatorname{Im} u \subset F$$

et donc

$$F = F + \ker u = F \cap \operatorname{Im} u$$

ce qui entraîne

$$\ker u \subset F \text{ et } F \subset \operatorname{Im} u$$

Inversement, si ces conditions sont vérifiées, on a immédiatement $F + \ker u = F = F \cap \operatorname{Im} u$. Finalement $u(u^{-1}(F)) = u^{-1}(u(F))$ si, et seulement si, F est inclus dans l'image d'un endomorphisme injectif.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

Pour tout x non nul, la liaison de la famille $(x, f(x))$ permet d'écrire $f(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$ unique. Soient x, y non nuls.

Cas (x, y) liée. On peut écrire $y = \mu x$ et alors

$$f(y) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y \text{ et } f(y) = \lambda_y y$$

donc $\lambda_y = \lambda_x$.

Cas (x, y) libre.

$$f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$$

donc $\lambda_x = \lambda_y$ par identification des scalaires facteurs dans une famille libre. On pose λ la valeur commune des λ_x . On a donc

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, f(x) = \lambda x$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 0_E$. On peut alors conclure $f = \lambda \operatorname{Id}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

- ① Posons $g = \frac{1}{2}(3\operatorname{Id} - f) \in \mathcal{L}(E)$. On a $f \circ g = \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}f^2 = \operatorname{Id}$ et de même $g \circ f = \operatorname{Id}$ donc f est un automorphisme et $f^{-1} = g$.

- ② En tant que noyaux d'applications linéaires, $\ker(f - \operatorname{Id})$ et $\ker(f - 2\operatorname{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels de E . Soit $x \in \ker(f - \operatorname{Id}) \cap \ker(f - 2\operatorname{Id})$. On a $f(x) = x$ et $f(x) = 2x$ donc $x = 0_E$. Ainsi

$$\ker(f - \operatorname{Id}) \cap \ker(f - 2\operatorname{Id}) = \{0_E\}$$

Soit $x \in E$. Posons $u = 2x - f(x)$ et $v = f(x) - x$. On a $u + v = x$, $f(u) = 2f(x) - f^2(x) = 2x - f(x) = u$ donc $u \in \ker(f - \operatorname{Id})$ et $f(v) = f^2(x) - f(x) = 2f(x) - 2x = 2v$ donc $v \in \ker(f - 2\operatorname{Id})$. Ainsi

$$E = \ker(f - \operatorname{Id}) + \ker(f - 2\operatorname{Id})$$

Finalement, $\ker(f - \operatorname{Id})$ et $\ker(f - 2\operatorname{Id})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

- (i) $\implies$ (ii) $p^2 = p \circ q \circ p = p \circ q = p$ et $q^2 = q \circ p \circ q = q \circ p = q$ donc p et q sont des projecteurs. Soit $x \in \ker p$. On a $q(x) = q(p(x)) = 0_E$ donc $x \in \ker q$. Ainsi $\ker p \subset \ker q$. Par symétrie l'égalité.

- (ii) $\implies$ (i) Soit $x \in E$. On peut écrire $x = u + v$ avec $u \in \operatorname{Im} q$ et $v \in \ker q = \ker p$. D'une part $(p \circ q)(x) = p(q(u)) + p(0_E) = p(u)$ et d'autre part $p(x) = p(u) + p(v) = p(u)$. Ainsi $p \circ q = p$ et de même $q \circ p = q$.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

Soit $\vec{x} \in \ker(f - \operatorname{Id}) \cap \ker(f - 3\operatorname{Id})$. On a $f(\vec{x}) = \vec{x}$ et $f(\vec{x}) = 3\vec{x}$ donc $\vec{x} = \vec{0}$. Soit $\vec{x} \in E$. Posons $\vec{u} = \frac{1}{2}(3\vec{x} - f(\vec{x}))$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}(f(\vec{x}) - \vec{x})$. On a $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in \ker(f - \operatorname{Id})$ et $\vec{v} \in \ker(f - 3\operatorname{Id})$ après calculs.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)

Correction de l'EXERCICE 20

Si $f = 0$: ok.

Sinon, on introduit $\vec{u} \notin \ker f$ de sorte que $\text{Vect } \vec{u}$ et $\ker f$ soient supplémentaires puis on introduit α de sorte que $f(\vec{u}) = \alpha g(\vec{u})$ avant de conclure via $h = f - \alpha g$ s'annule sur $\ker f$ et $\vec{u}$.

↩ retour à l'EXERCICE 20

Correction de l'EXERCICE 21

Par contraposée : si $\mathcal{E}$ n'est pas une base de E alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \neq E$. Soit H un hyperplan tel que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset H$ et f une forme linéaire non nulle de noyau H . On a $f(e_1) = \dots = f(e_n) = 0$ mais $f \neq 0$.

↩ retour à l'EXERCICE 21

Correction de l'EXERCICE 22

φ est clairement linéaire et si $P \in \ker \varphi$ alors P a plus de racines (comptés avec multiplicité) que son degré donc $P = 0$. Ainsi φ est injective et puisque $\dim \mathbb{R}_{2n+1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n+2}$, φ est un isomorphisme.

↩ retour à l'EXERCICE 22

Correction de l'EXERCICE 23

La deuxième inégalité est bien connue et provient de $\text{Im}(u \circ v) \subset \text{Im } u$ qui donne $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg } u$ et de $\text{Im}(u \circ v) = u(v(E)) = \text{Im } u_{\uparrow v(E)}$ qui donne $\text{rg}(u) \leq \text{rg } v$ car le rang d'une application linéaire est inférieure à la dimension de l'espace de départ. Montrons maintenant la première inégalité. Comme déjà écrit $\text{Im}(u \circ v) = \text{Im } u_{\uparrow v(E)}$ donc par la formule du rang

$$\text{rg}(u \circ v) = \dim v(E) - \dim \ker u_{\uparrow v(E)}$$

Or $\ker u_{\uparrow v(E)} \subset \ker u$ donc

$$\text{rg}(u \circ v) \geq \text{rg } v - \dim \ker u = \text{rg } u + \text{rg } v - \dim F$$

↩ retour à l'EXERCICE 23

Correction de l'EXERCICE 24

① $\text{rg}(f^2) = \text{rg}(f) \implies \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ car on sait $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

Par le théorème du rang $\ker(f^2) = \ker(f)$ car on sait $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.

② Soit $x \in \ker(f) \cap \text{Im}(f)$.

On peut écrire $x = f(a)$. Comme $f(x) = 0$, on a $a \in \ker(f^2) = \ker(f)$ donc $x = 0$. Par le théorème du rang, on conclut.

↩ retour à l'EXERCICE 24

EXERCICES "COMME EN COLLE"

Correction de l'EXERCICE 25

($\Rightarrow$) Supposons $f(A) \subset f(B)$. Soit $\vec{x} \in A + \ker f$. On peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in A$ et $\vec{v} \in \ker f$. $f(\vec{x}) = f(\vec{u}) \in f(A) \subset f(B)$ donc il existe $\vec{w} \in B$ tel que $f(\vec{x}) = f(\vec{w})$. On a alors $\vec{x} = \vec{w} + (\vec{x} - \vec{w})$ avec $\vec{w} \in B$ et $\vec{x} - \vec{w} \in \ker f$. Ainsi $\vec{x} \in B + \ker f$.

($\Leftarrow$) Supposons $A + \ker f \subset B + \ker f$. Soit $\vec{y} \in f(A)$. Il existe $\vec{x} \in A$ tel que $\vec{y} = f(\vec{x})$. Or $\vec{x} \in A \subset A + \ker f \subset B + \ker f$ donc on peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in B$ et $\vec{v} \in \ker f$. On a alors

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = f(\vec{u}) \in f(B)$$

[↩ retour à l'EXERCICE 25](#)

Correction de l'EXERCICE 26

- ① Evidemment $\ker f \subset \ker(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$.
Pour $x \in \ker(g \circ f)$, on a $f(x) = f(g(f(x))) = f(0) = 0$ donc $x \in \ker f$.
Pour $y \in \text{Im } g$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et alors $y = g(f(g(x))) = g(f(a)) \in \text{Im}(g \circ f)$.
- ② Si $x \in \ker f \cap \text{Im } g$ alors on peut écrire $x = g(a)$ et puisque $f(x) = 0$, $a = f(g(a)) = 0$ donc $x = 0$.
Pour $x \in E$, on peut écrire $x = (x - g(f(x))) + g(f(x))$ avec $x - g(f(x)) \in \ker f$ et $g(f(x)) \in \text{Im } g$.
- ③ Si f est inversible alors $f \circ g = \text{Id}$ entraîne $g = f^{-1}$. Cette condition suffisante est aussi évidemment nécessaire.
- ④ $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$ et donc $g \circ f$ est un projecteur.

[↩ retour à l'EXERCICE 26](#)

Correction de l'EXERCICE 27

- ① $(v \circ u)^2 = v \circ \text{Id}_F \circ u = v \circ u$ donc $v \circ u$ est un projecteur.

- ② Le rang d'un projecteur est égal à sa trace donc

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{tr}(v \circ u) = \text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(\text{Id}_F) = p$$

On a

$$\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im } v \text{ et } \dim \text{Im}(v \circ u) = \text{rg}(v \circ u) = p \geq \text{rg}(v) = \dim \text{Im } v$$

On en déduit

$$\text{Im}(v \circ u) = \text{Im } v$$

On a $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ et $\dim \ker u = n - \text{rg } u \geq n - p = n - \text{rg}(v \circ u) = \dim \ker(v \circ u)$ donc

$$\ker(v \circ u) = \ker u$$

[↩ retour à l'EXERCICE 27](#)

Correction de l'EXERCICE 28 Retour dans les groupes

Posons $H = F \cap \text{GL}(E)$ On a immédiatement $H \subset \text{GL}(E)$, $\text{Id}_E \in H$ et $\forall u, v \in H$, $u \circ v \in H$. Montrer que H est stable par passage à l'inverse. Soit $u \in H$. Considérons l'application $\varphi : F \rightarrow F$ définie par

$$\varphi(v) = u \circ v$$

L'application φ est évidemment linéaire et puisque u est inversible, cette application est injective. Or F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie (car sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, lui-même de dimension finie) donc φ est un automorphisme de F . Par suite l'application φ est surjective et puisque $\text{Id}_E \in F$, il existe $v \in F$ tel que

$$u \circ v = \text{Id}_E$$

On en déduit $u^{-1} = v \in F$ et donc $u^{-1} \in H$. Posons $H = F \cap \text{GL}(E)$ On a immédiatement $H \subset \text{GL}(E)$, $\text{Id}_E \in H$ et $\forall u, v \in H$, $u \circ v \in H$. Montrer que H est stable par passage à l'inverse. Soit $u \in H$. Considérons l'application $\varphi : F \rightarrow F$ définie par

$$\varphi(v) = u \circ v$$

L'application φ est évidemment linéaire et puisque u est inversible, cette application est injective. Or F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie (car sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, lui-même de dimension finie) donc φ est un automorphisme de F . Par suite l'application φ est surjective et puisque $\text{Id}_E \in F$, il existe $v \in F$ tel que

$$u \circ v = \text{Id}_E$$

On en déduit $u^{-1} = v \in F$ et donc $u^{-1} \in H$.

[↩ retour à l'EXERCICE 28](#)

Correction de l'EXERCICE 29

Si $\dim E = n$ alors $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ donc la famille $(I, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est liée car formée de $n^2 + 1$ élément. Une relation linéaire sur les éléments de cette famille donne immédiatement un polynôme annulateur non nul.

[↩ retour à l'EXERCICE 29](#)

Correction de l'EXERCICE 30

($\Rightarrow$) Supposons $\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

Sachant $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$, on a $\operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g))$ et donc $\dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)) \leq 0$. Ainsi $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$. Sachant $\ker(f) \cap \ker(g) \subset \ker(f + g)$, on a $\dim \ker(f) + \dim \ker(g) - \dim(\ker(f) \cap \ker(g)) \leq \dim \ker(f + g)$.

Par la formule du rang, on obtient alors $\dim E + \operatorname{rg}(f + g) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) + \dim(\ker(f) + \ker(g))$ et donc $\dim(\ker(f) + \ker(g)) \geq \dim E$. Ainsi $\ker(f) + \ker(g) = E$.

($\Leftarrow$) Supposons $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$ et $\ker(f) + \ker(g) = E$.

Montrons $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. On sait déjà $\operatorname{Im}(f + g) \subset \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Inversement, soit $x \in \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Il existe $a, b \in E$ tels que $x = f(a) + g(b)$. Puisque $E = \ker(f) + \ker(g)$, on peut écrire $a = u + v$ avec $u \in \ker(f)$ et $v \in \ker(g)$. On a alors $f(a) = f(v)$. De même, on peut écrire $g(b) = g(w)$ avec $w \in \ker(f)$. On a alors $x = f(v) + g(w) = (f + g)(v + w)$ car $f(w) = 0$ et $g(v) = 0$. Ainsi $x \in \operatorname{Im}(f + g)$. Finalement $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g)$. Par suite $\operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 30](#)

Correction de l'EXERCICE 31

L'hypothèse entraîne que $u \circ (u + v) = \operatorname{Id}$. Comme $u, u + v$ sont des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, ceci entraîne que u est inversible et que $u^{-1} = u + v$ donc u commute avec $u + v$ et avec $(u + v) - u = v$.

[↩ retour à l'EXERCICE 31](#)

Correction de l'EXERCICE 32

Puisque $u^3 = 0$, on a $\operatorname{Im} u^2 \subset \ker u$ et donc

$$\operatorname{rg} u^2 \leq \dim \ker u$$

Or par la formule du rang

$$\operatorname{rg} u + \dim \ker u = \dim E$$

donc

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} u^2 \leq \dim E$$

[↩ retour à l'EXERCICE 32](#)

Correction de l'EXERCICE 33

On a

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$$

donc $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) \geq n$ puis $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v = n$. Si $x \in \ker u$ alors $x = u(x) + v(x) = v(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} v$. Par les dimensions, on conclut $\ker u = \operatorname{Im} v$ et de même $\ker v = \operatorname{Im} u$. Par suite $u \circ v = v \circ u = 0$ et donc aisément $u^2 = u$ et $v^2 = v$.

[↩ retour à l'EXERCICE 33](#)

Correction de l'EXERCICE 34

Puisque $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^6$, on a $3 \leq \operatorname{rg} f \leq 6$. Si $\operatorname{rg} f = 6$ alors f est un isomorphisme, donc f^2 aussi et $\operatorname{rg} f^2 = 6$. Contradiction. Si $\operatorname{rg} f = 5$ alors $\dim \ker f = 1$. Considérons $g = f|_{\operatorname{Im} f}$. Par le théorème du rang $\dim \ker g = 5 - \operatorname{rg} g$. Or $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Im} f^2$ donc $\operatorname{rg} g \leq 3$ et par suite $\dim \ker g \geq 2$. Or $\ker g \subset \ker f$ donc $\dim \ker f \geq 2$. Contradiction. $\operatorname{rg} f = 3$ et $\operatorname{rg} f = 4$ sont possibles en considérant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 34](#)

Correction de l'EXERCICE 35

- ① La famille est échelonnée en degrés (pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg Q^{(k)} = n - k$) et de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

- ② D'après la formule de Taylor pour les polynômes, la famille des formes linéaires $P \mapsto P^{(k)}(0)$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ est la base duale de la base des $\frac{1}{k!} X^k$ avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, c'est donc une base de l'espace dual de $\mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, pour toute forme linéaire φ sur $\mathbb{R}_n[X]$, il existe des scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\varphi(P) = \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \dots + \alpha_n P^{(n)}(0).$$

- ③ Soit $R = \alpha_0 Q + \dots + \alpha_n Q^{(n)}$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ les scalaires associés à φ dans la question précédente. La condition $\varphi(Q_k) = 0$ signifie que $R(k) = 0$. Par conséquent, R est un polynôme de degré au plus n qui admet $n+1$ racines il est donc nul. Comme la famille $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est libre, tous les coefficients α_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ sont nuls et donc φ est la forme linéaire nulle.
- ④ Si la famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}_n[X]$, elle engendre un sous-espace vectoriel $F \neq \mathbb{R}_n[X]$. On peut alors définir une forme linéaire nulle sur F et non nulle sur un supplémentaire de F , ce qui contredit la question précédente. Par conséquent, $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

[↩ retour à l'EXERCICE 35](#)

Correction de l'EXERCICE 36

- ① 1. Supposons que $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est une famille libre de E^* . Montrer que $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ si, et seulement si,

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i \subset \text{Ker } \varphi.$$

2. On suppose que

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } \varphi_i = \{0_E\}.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 36](#)

Correction de l'EXERCICE 37 Images et noyaux itérés d'un endomorphisme

- ① $\forall \vec{y} \in \text{Im } f^{p+1}, \exists \vec{x} \in E, \vec{y} = f^{p+1}(\vec{x}) = f^p(f(\vec{x})) \in \text{Im } f^p$ donc $I_{p+1} \subset I_p$. $\forall \vec{x} \in \text{Ker } f^p$, on a $f^p(\vec{x}) = \vec{0}$ donc $f^{p+1}(\vec{x}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$ puis $\vec{x} \in \text{Ker } f^{p+1}$. Ainsi $N_p \subset N_{p+1}$.
- ② La suite $\dim I_p$ est une suite décroissante d'entiers naturels donc il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $\dim I_s = \dim I_{s+1}$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a alors $I_s = I_{s+1}$. De plus, par le théorème du rang : $\dim N_s = \dim E - \dim I_s = \dim E - \dim I_{s+1} = \dim N_{s+1}$. Par inclusion et égalité des dimensions, on a alors $N_s = N_{s+1}$.
- ③ Montrons par récurrence sur $s \geq r$ que $I_s = I_r$. La propriété est vraie au rang r . Supposons la propriété vraie au rang s . On sait déjà que $I_{s+1} \subset I_s$. $\forall \vec{y} \in I_s, \exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = f^s(\vec{x}) = f^{s-r}(f^r(\vec{x}))$. Or $f^r(\vec{x}) \in I_r = I_{r+1}$ donc $\exists \vec{u} \in E$ tel que $f^r(\vec{x}) = f^{r+1}(\vec{u})$ et alors $\vec{y} = f^{s+1}(\vec{u}) \in I_{s+1}$. Ainsi $I_{s+1} = I_s$ puis, par hypothèse de récurrence : $I_{s+1} = I_r$. Par le théorème du rang : $\dim N_r + \dim I_r = \dim E = \dim N_s + \dim I_s$ donc par inclusion et égalité des dimensions : $\forall s \geq r, N_s = N_r$.
- ④ Soit $\vec{x} \in I_r \cap N_r$. Il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{x} = f^r(\vec{u})$ et on a $f^r(\vec{x}) = \vec{0}$. Par suite $\vec{u} \in N_{2r}$, or $N_{2r} = N_r$ donc $\vec{x} = f^r(\vec{u}) = \vec{0}$. Par suite $I_r \cap N_r = \{\vec{0}\}$. De plus, par le théorème du rang : $\dim I_r + \dim N_r = \dim E$ donc I_r et N_r sont supplémentaires dans E .

[↩ retour à l'EXERCICE 37](#)

Correction de l'EXERCICE 38 Endomorphismes nilpotents

$$\text{Id} = \text{Id} - f^n = (\text{Id} - f)(\text{Id} + f + \dots + f^{n-1}) \text{ et aussi}$$

- ① $\text{Id} = (\text{Id} + f + \dots + f^{n-1})(\text{Id} - f)$.

$$\text{Par suite } \text{Id} - f \text{ est inversible et } (\text{Id} - f)^{-1} = \text{Id} + f + \dots + f^{n-1}.$$

- ② 2.a) Si $\text{Ker } f = \text{Im } f$ alors $f^2 = 0$ et donc f est nilpotent. Si f est nilpotent alors $\text{Ker } f \neq \{0\}$ et donc $\dim \text{Ker } f = 1$ ou 2 . Or $f \neq 0$ donc il reste $\dim \text{Ker } f = 1$. $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ donc $\dim \text{Ker } f^2 = 1$ ou 2 . Si $\dim \text{Ker } f^2 = 1$ alors $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ et classiquement (cf. noyaux itérés) $\text{Ker } f^n = \text{Ker } f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui contredit la nilpotence de f . Il reste donc $\dim \text{Ker } f^2 = 2$ et donc $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ puis l'égalité par argument de dimension.
- 2.b) Si $f = u \circ v$ avec u et v nilpotents et nécessairement non nuls alors $\text{Im } f \subset \text{Im } u$ et $\text{Ker } v \subset \text{Ker } f$. Or ces espaces sont de dimension 1 donc $\text{Im } f = \text{Im } u$ et $\text{Ker } f = \text{Ker } v$. Mais $\text{Im } f = \text{Ker } f$ donc $\text{Im } u = \text{Ker } v$ puis $\text{Ker } u = \text{Im } v$ d'où $u \circ v = 0$. C'est absurde.

③ 3.a) $\mathcal{C}(f) \subset \mathcal{L}(E), \tilde{0} \in \mathcal{C}(f)$.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $g, h \in \mathcal{C}(f)$. On a

$$f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) = \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = (\lambda g + \mu h) \circ f$$

donc $\lambda g + \mu h \in \mathcal{C}(f)$.

3.b) Supposons

$$\lambda_0 a + \lambda_1 f(a) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(a) = 0_E$$

En appliquant f^{n-1} à cette relation, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(a) = 0_E$ et donc $\lambda_0 = 0$ car $f^{n-1}(a) \neq 0_E$. En répétant l'opération, on obtient successivement la nullité de chaque λ_k . La famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est alors libre puis base de E car constituée de $n = \dim E$ vecteurs de E .

3.c) L'application φ_a est linéaire car

$$\varphi_a(\lambda f + \mu g) = \lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda \varphi_a(f) + \mu \varphi_a(g)$$

Si $\varphi_a(g) = 0_E$ alors $g(a) = 0_E$ puis $g(f(a)) = f(g(a)) = 0_E$, etc. L'application g est alors nulle sur une base et c'est donc l'application nulle. Ainsi φ_a est injective. Soit $b \in E$. Considérons l'application linéaire g définie par

$$g(a) = b, g(f(a)) = f(b), \dots, g(f^{(n-1)}(a)) = f^{(n-1)}(b)$$

L'application linéaire g est entièrement définie par l'image d'une base et l'on vérifie $g \circ f = f \circ g$ sur chaque vecteur de cette base. Ainsi $g \in \mathcal{C}(f)$ et l'on vérifie $\varphi_a(g) = b$. Ainsi φ_a est surjective.

3.d) Par l'isomorphisme $\dim \mathcal{C}(f) = n$.

Il est immédiat de vérifier $\text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1}) \subset \mathcal{C}(f)$ ainsi que la liberté de la famille $(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(\text{Id}, f, \dots, f^{n-1})$

④ 4.a) Montrons le résultat par récurrence sur n . $\triangleright$ Le résultat est évident pour $n = 0$ (et $n = 1$). $\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\Phi^n(v) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^k$$

Alors, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned} \Phi^{n+1}(v) &= \Phi(\Phi^n(v)) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k+1} \circ v \circ u^k - \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v \circ u^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} u^{n-k+1} \circ v \circ u^k - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k-1} u^{n-k+1} \circ v \circ u^k \\ &= u^{n+1} \circ v + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) u^{n-k+1} \circ v \circ u^k - (-1)^n v \circ u^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} u^{n+1-k} \circ v \circ u^k, \end{aligned}$$

avec la formule de Pascal.

4.b) Avec $n = 2p - 1$, $\max\{k, n - k\} \geq p$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Par conséquent, $\Phi^n(v) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$. L'indice de nilpotence de Φ est inférieur ou égal à $2p - 1$.

4.c) Considérons $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ soit une base du noyau de a . Alors, $(a(e_1), \dots, a(e_r))$ est une base de l'image de a que l'on complète en une base $(a(e_1), \dots, a(e_r), e'_{r+1}, \dots, e'_n)$ de E . Définissons un endomorphisme b par l'image de cette base : - pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$, $b(a(e_k)) = e_k$; - pour tout $k \in \{r+1, \dots, n\}$, $b(e'_k) = 0_E$. Pour tout $x \in E$, il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $a(x) = \sum_{k=1}^r \lambda_k a(e_k)$. Alors,

$$\begin{aligned} a \circ b \circ a(x) &= a \circ b \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k a(e_k) \right) \\ &= a \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k b \circ a(e_k) \right) \\ &= a \left(\sum_{k=1}^r \lambda_k e_k \right) = a(x). \end{aligned}$$

En conclusion, $a \circ b \circ a = a$.

4.d) Nous avons déjà établi que $\Phi^{2p-1} = 0$; montrons que $\Phi^{2p-2} \neq 0$. Pour tout

$v \in \mathcal{L}(E)$,

$$\begin{aligned}\Phi^{2p-2}(v) &= \sum_{k=0}^{2p-2} (-1)^k \binom{2p-2}{k} u^{2p-2-k} \circ v \circ u^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-2} (-1)^k \binom{2p-2}{k} u^{2p-2-k} \circ v \circ u^k + (-1)^{p-1} \binom{2p-2}{p-1} u^{p-1} \circ v \circ u^{p-1} \\ &\quad + \sum_{k=p}^{2p-2} (-1)^k \binom{2p-2}{k} u^{2p-2-k} \circ v \circ u^k \\ &= (-1)^{p-1} \binom{2p-2}{p-1} u^{p-1} \circ v \circ u^{p-1}.\end{aligned}$$

En considérant v l'application associée à u^{p-1} d'après la question précédente, on obtient

$$\Phi^{2p-2}(v) = (-1)^{p-1} \binom{2p-2}{p-1} u^{p-1} \neq 0$$

En conclusion, Φ est nilpotente d'indice $2p-1$.

[↩ retour à l'EXERCICE 38](#)

Correction de l'EXERCICE 39

- ① Si $u \in S_p$ et si deux polynômes P, Q conviennent pour exprimer u_{n+1} en fonction de u_n alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = Q(n)$$

Puisque le polynôme $P - Q$ possède une infinité de racines, c'est le polynôme nul et donc $P = Q$.

- ② $S_p \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, 0 \in S_p$ (avec $P = 0$).

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in S_p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient aisément

$$(\lambda u + \mu v)_{n+1} = a(\lambda u + \mu v)_n + (\lambda P_u + \mu P_v)(n)$$

et donc $\lambda u + \mu v \in S_p$ avec $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v \in \mathbb{R}_p[X]$. S_p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc c'est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

- ③ Ci-dessus, on a obtenu $P_{\lambda u + \mu v} = \lambda P_u + \mu P_v$ ce qui correspond à la linéarité de l'application ϕ . $u \in \ker \phi$ si, et seulement si, $P_u = 0$ ce qui signifie que u est une suite géométrique de raison a . On en déduit que la suite $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un vecteur directeur de la droite vectorielle qu'est le noyau de ϕ . L'image de ϕ est $\mathbb{R}_p[X]$ car l'application ϕ est surjective puisque pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on peut définir une suite élément de S_p par la relation

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + P(n)$$

- ④ La famille $(R_0, R_1, \dots, R_p)$ est une famille de polynômes de degrés étagés de $\mathbb{R}_p[X]$, elle forme donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Pour $k \in \llbracket 0; p \rrbracket$, il est facile de déterminer une suite $u = (u_n) \in S_p$ vérifiant $S_u = R_k$ car

$$u_{n+1} = au_n + R_k(n) \iff u_{n+1} - (n+1)^k = a(u_n - n^k)$$

Ainsi la suite

$$u : n \mapsto n^k$$

convient. Considérons alors la famille formée des suites

$$v : n \mapsto a^n \text{ et } v_k : n \mapsto n^k \text{ avec } k \in \llbracket 0; p \rrbracket$$

Supposons

$$\lambda v + \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_p v_p = 0$$

En appliquant ϕ , on obtient

$$\lambda_0 R_0 + \dots + \lambda_p R_p = 0$$

donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_p = 0$ puis la relation initiale donne $\lambda = 0$ car $v \neq 0$. La famille $(v, v_0, \dots, v_p)$ est donc libre. De plus, en vertu de la formule du rang

$$\dim S_p = \dim \ker \phi + \operatorname{rg} \phi = 1 + (p+1) = p+2$$

donc la famille $(v, v_0, \dots, v_p)$ est une base de S_p .

- ⑤ En reprenant les notations qui précèdent, on peut écrire

$$u = \lambda v + \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1$$

On a

$$P_u = \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1 = -2X + 7$$

Puisque $R_0 = -1$ et $R_1 = 1 - X$, on obtient $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_0 = -5$. Par suite

$$u_n = \lambda 2^n + 2n - 5$$

Puisque $u_0 = -2$, on obtient $\lambda = 7$. Finalement

$$u_n = 3 \cdot 2^n + 2n - 5$$

[↩ retour à l'EXERCICE 39](#)

Correction de l'EXERCICE 40 Un supplémentaire dans $\mathcal{L}(E)$

- ① Soit $x \in E$, $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. On a $q(x) = x - p(x) = x_G$, donc q est le projecteur sur G parallèlement à F : $\text{Ker}(q) = \text{Im}(p)$ et $\text{Im}(q) = \text{Ker}(p)$.
- ② F est l'image de l'endomorphisme $u \mapsto u \circ p$ de $\mathcal{L}(E)$ (cette application est linéaire car la composition à droite par une application donnée est linéaire), c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
De même pour G .
- ③ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. En écrivant $f = f \circ (p+q) = f \circ p + f \circ q$, on constate que $f \in F + G$, d'où $F + G = E$. Soit $f \in F \cap G$. Comme $f \in F$ (resp. $f \in G$), $\text{Ker}(f)$ contient $G = \text{Ker}(p)$ (resp. contient $F = \text{Ker}(q)$). $\text{Ker}(f)$ étant un sous-espace vectoriel de E , il contient donc $F + G$, soit $E : f = 0$. F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$. Remarque : on aurait aussi pu dire que $\varphi_p : f \mapsto f \circ p$ et $\varphi_q : f \mapsto f \circ q$ sont des projecteurs de somme $\text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$, donc d'images supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 40](#)

Correction de l'EXERCICE 41 Théorème de Maschke

- ① Par définition de l'inclusion, preuve sans difficulté.
- ② p est un endomorphisme de E par structure d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$, et pour tout $x \in E$, tout $g \in G$,

$$g \circ q \circ g^{-1}(x) = g(q(g^{-1}(x))) \in g(\text{Im } q) = g(F) \subset F.$$

Ceci valant pour tous $g \in G, p(x) \in F$, puis, ceci valant pour tout $x \in E, \text{Im}(p) \subset F$. Enfin, soit $x \in F$. Soit $g \in G : g^{-1} \in G$ laisse stable F , donc $g^{-1}(x) \in F$, puis $q(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$, et enfin $g \circ q \circ g^{-1}(x) = x$. Ainsi, $p(x) = x$. Cela montre au passage que $\text{Im}(p) = F$ (puisque l'inclusion directe était déjà connue).

Pour tout $x \in E, p(x) \in F$, donc $p(p(x)) = p(x) : p$ est un projecteur d'image F .

- ③ L'application $g \in G \mapsto g_0 \circ g$ étant une permutation de G ,

$$\begin{aligned} g_0 \circ p &= g_0 \circ \frac{1}{|G|} \sum g \circ q \circ g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum (g_0 g) \circ q \circ g^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum (g_0 g) \circ q \circ (g_0 g)^{-1} g_0 = p \circ g_0. \end{aligned}$$

p commute avec chaque élément de G , donc son noyau H , supplémentaire de F dans E car p est un projecteur, est stable par tout élément de G .

[↩ retour à l'EXERCICE 41](#)