

SEMAINE DU 16/3 AU 22/3

ESPACES VECTORIELS

Retour sur le programme sur les espaces vectoriels.

APPLICATIONS LINÉAIRES

$f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- ① **Rappels.** Définition d'application linéaire, d'isomorphisme, d'endomorphisme, d'automorphisme, de forme linéaire. Notations $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$, $\text{GL}(E)$
Intuition sur les applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
Définition d'image de f , de noyau, d'image réciproque. Caractérisation de l'injectivité par le noyau et de la surjectivité par l'image.
- ② **Premières propriétés.** L'image et l'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F . L'image d'un ensemble engendré par une partie est l'ensemble engendré par l'image de cette partie.
En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F , $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E et l'image de f est engendrée par la famille image de toute base de E .
La composée, la combinaison linéaire et la réciproque (quand elle existe) d'une application linéaire est une application linéaire. Distributivité de la composition sur la combinaison linéaire.
- ③ **Image d'une famille de vecteurs.** L'image d'une base détermine une application linéaire.
 u injective $\iff u$ envoie toute famille libre sur une famille libre
 u surjective $\iff u$ envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice
 u bijective $\iff u$ envoie toute base sur une base
Définition d'espaces isomorphes.
- ④ **Dimension finie.** Lien entre matrices et applications linéaires en dimension finie. Matrice d'une application linéaire. Isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, Isomorphisme de groupe entre $\text{GL}(E)$ et $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.
 $\dim E = \dim F \iff E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \iff \left(f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective} \right)$
 $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.
Unicité de l'inverse à gauche ou à droite (pour $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour $\mathcal{L}(E)$).
 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible $\iff$ les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
- ⑤ **Rang.** Définition pour une matrice et pour une application linéaire. Notion d'application de rang fini.
Rang de la composée de 2 applications.
Théorème de factorisation (ou d'isomorphisme), Théorème du rang.
- ⑥ **Projecteur, symétrie.** Définitions, caractérisations, Images et noyaux, Liens entre projecteurs et symétries.
Notion d'espace dual.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Preuve de $\begin{cases} u \text{ injective} & \Longleftrightarrow & u \text{ envoie toute famille libre sur une famille libre} \\ u \text{ surjective} & \Longleftrightarrow & u \text{ envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice} \end{cases}$
- ② Savoir démontrer qu'une application est linéaire et donner une base de son noyau et son image. L'examinateur pourra choisir l'exemple qu'il voudra parmi (voir exercice 2 pour les étudiants)
- ③
- (a) $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z) \end{matrix}$
- (b) $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $u(e_1) = -2e_1 + 2e_3$, $u(e_2) = 3e_2$ et $u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$.
- (c) $\Phi : \begin{matrix} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \longmapsto & XP' - P \end{matrix}$
- (d) $D : \begin{matrix} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{matrix}$
- (e) $\Phi : \begin{matrix} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{matrix}$
- ③ Preuve que, pour $p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$ implique que p est un projecteur.
- ④ Preuve que, pour $s \in \mathcal{L}(E)$, $s \circ s = \text{Id}_E$ implique que s est une symétrie.