

Bien commencer : Premiers pas calculatoires

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à calculer. Il y aura du déjà-vu (limites, suites, équations) et du tout nouveau (formules de trigonométrie, calcul algébrique).

Le but est de revoir les bases ensemble du calcul et de la rédaction, rigoureuse dans des exemples plus parlant pour vous.

Table des matières

1	Les ensembles de nombres - Rappels	2
1.1	$\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels	2
1.2	$\mathbb{Z}$ ensemble des entiers relatifs	2
1.3	$\mathbb{Q}$ ensemble des nombres rationnels	2
1.4	$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels	2
1.5	$\mathbb{D}$ ensemble des nombres décimaux	2
2	Factorisation	2
2.1	Factorisation et racines	3
2.2	Produit de fonctions polynomiales : regrouper par degré	4
2.3	Somme de fonctions rationnelles	4
2.4	Relations coefficients racines pour les fonctions polynomiales de degrés 2	5
3	Bases du calculs algébriques dans les réels	6
3.1	Puissances et racines	6
3.2	Valeur absolue	7
4	Résoudre une équation	9
5	Résoudre une inéquation	10
6	Systèmes linéaires	12
6.1	Définition	12
6.2	Exemples	15
7	Limites	17
7.1	Rappel rapide de cours	17
7.2	Méthodologie de terminale	17
8	Trigonométrie	19
8.1	Définitions de cos, sin et tan	19
8.2	Formules	20
8.3	Tangente	23
8.4	Équations et inéquations	25
8.4.1	Cas des équations	25
8.4.2	Cas des Inéquations	26
9	Sommes et produits	29
9.1	Premières propriétés	30
9.2	Changement d'indices	32
9.2.1	Décalage d'indice	32
9.2.2	Symétrisation	32
9.3	Sommes rectangulaires	33
9.4	Sommes triangulaires	36
9.5	Interversions de produits	38
9.6	Quelques sommes et produits usuels	38
10	Coefficients binomiaux	40

1 LES ENSEMBLES DE NOMBRES - RAPPELS

1.1 $\mathbb{N}$ ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ est celui des **nombre entiers naturels**. On peut toujours ajouter et multiplier des entiers naturels. Cependant la soustraction et la division de deux nombres entiers naturels peut ne pas rester dans $\mathbb{N}$.

1.2 $\mathbb{Z}$ ENSEMBLE DES ENTIERS RELATIFS

L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ est celui des **nombre entiers relatifs**. On peut toujours ajouter, soustraire et multiplier des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Mais la division reste toujours impossible en général.

1.3 $\mathbb{Q}$ ENSEMBLE DES NOMBRES RATIONNELS

L'ensemble $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ est celui des **nombre rationnels**. Cette fois ci, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont toujours possibles entre rationnels.

1.4 $\mathbb{R}$ ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

Les nombres rationnels ne sont pas suffisants pour représenter tous les nombres. Il n'y a par exemple pas le nombre x tel que

$$x^2 = 2.$$

Les constructions de l'ensemble des nombres réels ne sont pas au programme, mais on peut très bien se représenter cet ensemble de nombres à l'aide de la droite graduée. Soit $\mathcal{D}$ une droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$. A tout réel $x \in \mathbb{R}$, on associe son image sur la droite, le point $M(x)$ d'abscisse x . On pourra retenir la chaîne d'inclusions des ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.5 $\mathbb{D}$ ENSEMBLE DES NOMBRES DÉCIMAUX

Les nombres réels peuvent tous être représentés comme des nombres à virgule. En général, la suite des décimales (les chiffres à droite de la virgule) est infinie. C'est le cas par exemple, pour π dont on connaît aujourd'hui les 10000 milliards premières décimales :

$$\pi = 3,141592653589793\dots$$

Pour un nombre rationnel, en général, la suite des décimales est périodique, comme par exemple $3,5555\dots$. Mais il existe un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ qui contient les nombres avec une suite de décimales finie, comme $1,65 = \frac{165}{100}$. Ces nombres sont des *décimaux* et l'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{D}$. On peut aussi l'écrire :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pour rappel, on note un ensemble de nombres indexé d'un '+' ou d'un '-', respectivement pour les nombres positifs et négatifs de l'ensemble. Par exemple, $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

On note un ensemble de nombres avec une étoile '*' en exposant, pour tous les nombres inversibles, c'est à dire, tous les nombres sauf 0. Par exemple, $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2 FONCTIONS POLYNOMIALES, RATIONNELLES ET FACTORISATIONS

Mais ça sert à quoi ?

Le but est de s'exercer à repérer des factorisations, dans l'optique de faire des tableaux de signes, et/ou de mettre sous forme canonique, afin de repérer des minimums, ou des maximums.

2.1 FACTORISATION ET RACINES

Peut être que vous n'avez jamais vu les choses comme cela, mais la factorisation n'est qu'une histoire de **racines**.

Définition 1

On dit qu'un scalaire $a \in \mathbb{R}$ est **racine** (ou zéro) de la fonction polynomiale P si $P(a) = 0$.

Factorisation de fonctions polynomiales

Normalement, cette partie devrait être acquise : Pour factoriser une fonction polynomiale de degré 2, on calcule son discriminant, souvent noté Δ , pour trouver ses (ou sa) racine réelle (quand elle existe).

Cette (ou ces) racine(s) permet de factoriser la fonction polynomiale.

Pour une fonction polynomiale de degré supérieur, on ne connaît pas de formules (dites à radicaux) pour trouver les racines d'une fonction polynomiale. En fait elles existent jusqu'au degré 4 (mais ne sont pas à connaître).

Au delà, E. Galois a démontré que ces formules ne peuvent pas exister.

Donc, si vous avez une fonction polynomiale de degré 3 ou plus à factoriser, soit **il y a une racine évidente**, soit vous avez raté une factorisation plus simple avant !

⚠ ATTENTION Il existe des fonctions polynomiales de degrés 4 (ou plus) qui n'ont pas de racines réelles, mais qui sont pourtant factorisables. C'est le cas, par exemple, de $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$.

Exemple 1

La fonction polynomiale $x \mapsto x^2 + 4x - 1$ admet pour discriminant $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20 > 0$. Donc il est factorisable en deux fonctions polynomiales distinctes de degrés 1, donnés par les formules

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{20}}{2} = -2 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} = -2 - \sqrt{5}.$$

Donc on a $x^2 + 4x - 1 = (x + 2 + \sqrt{5})(x + 2 - \sqrt{5})$.

Exemple 2

La fonction polynomiale $x \mapsto x^4 - 5x^2 + 4$ admet pour racines évidentes 1,2,-1,-2, donc, pour des raisons de degré,

$$x^4 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2).$$

Factorisation de sommes de fonctions polynomiales

Quand on veut factoriser la somme de deux fonctions polynomiales P et Q , déjà factorisées, il peut, comme on l'a vu plus haut, risqué de tout développer. On peut retomber sur un polynôme de degré 3 qui ne serait pas factorisable facilement. Il vaut mieux trouver un facteur commun entre les deux, quand c'est possible.

Pour trouver un facteur commun entre deux fonctions polynomiales, on s'intéresse **seulement aux racines** de ces deux fonctions.

S'il y a une racine commune, on peut factoriser !

Exemple 3

Facile : $(x + 2)^2 - (x + 2)(2x + 1) = (x + 2)(1 - x)$. Ici, on le voit, mais il y a bien -2 en racine commune.

Moins évident : $(3x + 1)^2 - (x - 1)(x + 1/3) = (x + 1/3)(3(3x + 1) - x + 1) = 4(x + 1/3)(2x + 1)$.

Si on réfléchit en terme de racines, la factorisation est immédiate, puisque $1/3$ est racine des deux polynômes !

2.2 PRODUIT DE FONCTIONS POLYNOMIALES : REGROUPER PAR DEGRÉ

La tentation naturelle quand on multiplie deux fonctions polynomiales, P et Q est de tout développer terme à terme puis de « ranger » ensuite les termes semblables. C'est long et source d'erreurs. La bonne méthode consiste à faire l'inverse : décider d'abord quel degré on cherche à obtenir, puis n'aller collecter que les produits de coefficients qui y contribuent !

Long mais sans erreur : Le tableau à double entrée

Le moyen le plus sûr de visualiser ce regroupement est un tableau croisant les monômes de $P : x \mapsto b_0 + b_1x + b_2x^2$ (en lignes) et ceux de $Q : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$ (en colonnes) : chaque case contient le degré $i + j$ du produit $a_i b_j$ qui s'y trouve. Les cases de même couleur sont sur une même diagonale - elles contribuent toutes au même coefficient du résultat.

■ degré 0
 ■ degré 1
 ■ degré 2
 ■ degré 3
 ■ degré 4

	b_0x^0	b_1x^1	b_2x^2
a_0x^0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2
a_1x^1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2
a_2x^2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2

Il ne reste qu'à lire les diagonales pour écrire directement le résultat, sans jamais avoir développé une longue somme désordonnée : $c_0 = a_0 b_0$

$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$

$$c_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1$$

$$c_4 = a_2 b_2$$

Où $PQ : x \mapsto c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4$.

On remarque assez facilement que l'on aura toujours deux coefficients gratuits !

Le coefficient constant sera toujours le produit des coefficients constants et celui de plus haut degré sera toujours le produit des coefficients de plus haut degré.

Astuce : Pensez à regarder la parité des degrés. le produit de deux degrés pairs, ne peut pas donner un degré impair, par exemple !

Exemple 4

Soient $P : x \mapsto 2x^3 - x + 1$ et $Q : x \mapsto x^4 + 3x^2 - 2$. Calculons PQ .

Étape 1 : repérer les degrés non nuls.

P n'a que des monômes de degrés $\{3, 1, 0\}$: $a_3 = 2$, $a_1 = -1$, $a_0 = 1$.

Q n'a que des monômes de degrés $\{4, 2, 0\}$: $b_4 = 1$, $b_2 = 3$, $b_0 = -2$.

Étape 2 : les deux coins, immédiats.

$\deg(PQ) = 3 + 4 = 7$. On a donc directement :

Coefficient dominant : $a_3 b_4 = 2 \times 1 = 2$.

Terme constant : $a_0 b_0 = 1 \times (-2) = -2$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Coefficient dominant : } a_3 b_4 = 2 \times 1 = 2. \\ \text{Terme constant : } a_0 b_0 = 1 \times (-2) = -2. \end{array} \right\} \implies P(x)Q(x) = 2x^7 + \dots - 2.$$

Étape 3 : un coefficient ciblé, ici celui de x^3 .

On cherche tous les couples (i, j) , i parmi les degrés de P , j

parmi ceux de Q , avec $i + j = 3$:

- $i = 3$, $j = 0$: les deux existent (a_3 et b_0) $\rightarrow$ contribution $a_3 b_0 = 2 \times (-2) = -4$.
- $i = 1$, $j = 2$: les deux existent (a_1 et b_2) $\rightarrow$ contribution $a_1 b_2 = (-1) \times 3 = -3$.
- $i = 0$, $j = 3$: b_3 n'existe pas (coefficient nul) $\rightarrow$ on ne calcule rien, cette case est vide.

D'où $c_3 = -4 - 3 = -7$: deux produits utiles au lieu de développer les 21 monômes du produit complet.

De la même manière on remarque qu'il ne peut y avoir de coefficient en x^6 , que le coefficient en x^5 est seulement $-1 + 6 = 5$, celui devant x^4 est seulement 1 et devant x^2 seulement 3 et enfin devant x est 2. On trouve

$$P(x)Q(x) = 2x^7 + 5x^5 - 7x^3 + x^4 + 3x^2 - 2.$$

2.3 SOMME DE FONCTIONS RATIONNELLES

La règle d'or est la symétrique de celle du produit de polynômes : là où on regroupait par degré *après* avoir listé les termes, ici on **simplifie avant de développer**. L'ordre des opérations à respecter est le suivant.

- **Factoriser** chaque numérateur et chaque dénominateur séparément : racines évidentes, identités remarquables ($a^2 - b^2$, $(a \pm b)^2 \dots$), facteur commun.
- **Simplifier** les facteurs qui apparaissent à la fois en haut et en bas — d'un même produit, ou après avoir multiplié les fractions entre elles — *avant* de redévelopper quoi que ce soit.
- Ne développer le produit des facteurs restants qu'en tout dernier lieu, et seulement si la forme factorisée ne suffit pas à répondre à la question ; le cas échéant, on retrouve alors la méthode précédente.

⚠ ATTENTION Une simplification n'efface pas les valeurs interdites. La fraction $\frac{x-1}{x^2-1}$ est définie pour tout x différents de -1 et 1 !

Astuce : Ne multiplier pas les facteurs commun.

Pour $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x^2(x-1)}$, le produit brut des dénominateurs donnerait $x^3(x-1)^2$.

Si on prend les facteurs communs, le produit donne seulement $x^2(x-1)$.

On a un facteur $x(x-1)$ de moins à porter tout au long du calcul.

Exemple 5

Calculons $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} - \frac{x+1}{x-1}$.

Étape 1 : factoriser chaque bloc. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. La première fraction

devient $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)}{(x+1)}$.

Étape 2 : faire en fonction des facteurs communs. Ici, il n'y en a aucun. On doit multiplier des polynômes. Ce que l'on sait faire !

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)^2 - (x+1)^2}{(x-1)(x-1)} = \frac{-4x}{(x-1)(x-1)}.$$

2.4 RELATIONS COEFFICIENTS RACINES POUR LES FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉS 2

Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, admettant deux racines x_1 et x_2 , dans $\mathbb{C}$, éventuellement confondues.

La factorisation $P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$, développée puis identifiée à $aX^2 + bX + c$, donne

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ces deux relations servent surtout dans deux directions opposées :

Vérifier des racines déjà trouvées sans refaire le calcul du discriminant,

Construire une équation du second degré à partir d'une somme S et d'un produit P de racines imposés, via $X^2 - SX + P = 0$.

Exemple 6

Pour $3x^2 - 7x + 2 = 0$ (ici $a = 3$, $b = -7$, $c = 2$), le calcul du discriminant donne $x_1 = 2$ et $x_2 = \frac{1}{3}$. On vérifie directement : $x_1 + x_2 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, à comparer à $-\frac{b}{a} = \frac{7}{3}$; et $x_1 x_2 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, à comparer à $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Les deux égalités tombent juste, la résolution est confirmée sans repasser par le discriminant.

Exemple 7

On cherche une équation du second degré dont les racines sont 3 et -5 , sans développer $(x-3)(x+5)$ à la main. Ici $S = 3 + (-5) = -2$ et $P = 3 \times (-5) = -15$, d'où directement

$$X^2 - SX + P = 0 \iff X^2 + 2X - 15 = 0.$$

3 BASES DU CALCULS ALGÈBRIQUES DANS LES RÉELS

3.1 PUISSANCES ET RACINES

Définition 2

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ un réel et $n \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

- si $n = 0$, on pose $a^0 = 1$;
- si $n > 0$, on définit

$$a^n = \prod_{k=1}^n a = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

- si $n < 0$, on définit

$$a^n = (1/a)^{-n}.$$

Convention

Si $a = 0$, on convient que $0^0 = 1$, les puissances d'exposant strictement positif sont nulles, et les puissances d'exposants strictement négatif ne sont pas définies. Dans l'écriture a^n , a s'appelle la *base* et n l'*exposant*.

Proposition 1 : Règles de calcul avec les puissances d'exposants entiers

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ des réels non nuls et $n, m \in \mathbb{Z}$ des entiers relatifs. On a les égalités suivantes :

- $a^0 = 1$,
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$,
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$,
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$,
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$,
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Proposition 2 : Identités remarquables

Soient a, b des réels. On a les égalités suivantes :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$,
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Définition 3

Soit a un réel positif. Il existe un unique réel positif $b \in \mathbb{R}^+$, unique tel que :

$$b^2 = a$$

Cet élément b est noté $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt{a}$ ou $a^{1/2}$ et est appelé la racine carrée de a .

⚠ ATTENTION Pour $x, y \in \mathbb{R}$: $x \leq y \not\Rightarrow x^2 \leq y^2$ et $x^2 \leq y^2 \not\Rightarrow x \leq y$.

Existence de $b \in \mathbb{R}^+$

Il n'y a pas de raison pour que b existe en général. Le terme "définition" est un peu trompeur, et doit normalement être justifié. En effet, b existe et est unique. C'est le théorème des valeurs intermédiaire, que nous reverrons dans un autre chapitre qui le justifie, car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3 : Règles de calcul avec la racine carrée

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ des réels.

- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $x \leq y \iff \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$,
- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$,
- Si $x \geq 0$ et $y > 0$ alors $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

⚠ ATTENTION Et si $x \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{x^2} \neq x$. Le réel x peut être négatif. Donc

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Aussi, si $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Exemple 8

On souhaite calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$, si elle existe.

Sous cette forme, on a une forme indéterminée $\infty - \infty$. On multiplie alors par le conjugué !

$$\frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} = \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} = \frac{3 + 2/x}{\sqrt{1 + 3/x + 2/x^2} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3$$

Pour ne pas écrire tout le temps cette accolade, on définit la

3.2 VALEUR ABSOLUE

Définition 4

On définit la **valeur absolue** d'un réel x , que l'on note $|x|$, par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Point Notations : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note $\max(a, b)$ le plus grand des deux réels a et b et $\min(a, b)$ le plus petit.

Proposition 4

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

- ① Cette définition est bien cohérente,
- ② $|x| \geq 0$. De plus, $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$
- ③ $|x| = \max(-x, x)$, donc $-|x| \leq x \leq |x|$ et $|-x| = |x|$,
- ④ $|xy| = |x||y|$,
- ⑤ $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

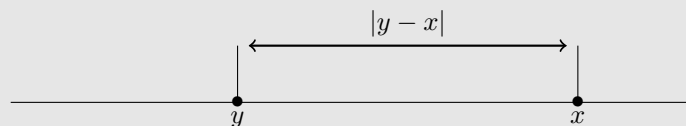
Preuve.

- ① Si $x \geq 0$ et $x \leq 0$, alors $x = 0 = -x$.
- ② Pour démontrer l'inégalité, il suffit d'appliquer la définition. Le cas d'égalité est évident si $x = 0$. Si $|x| = 0$, alors $x = 0$ ou $-x = 0$, ce qui revient au même.
- ③ Si $x \geq 0$, on a bien $|x| = x$ et $\max(-x, x) = x$, car $x \geq 0 \geq -x$. On fait de même pour $x \leq 0$ ce qui conclut la preuve par disjonction de cas.
On a alors $|-x| = \max(x, -x) = \max(-x, x) = |x|$.
- ④ Une disjonction de cas simple sur le signe de xy prouve le résultat.
- ⑤ On a $|x| \leq a \Leftrightarrow \max(x, -x) \leq a \Leftrightarrow (x \leq a) \wedge (-x \leq a) \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

□

Définition 5

On définit la **distance** entre deux réels par la valeur absolue de leur différence.



C'est la définition de distance intuitive que l'on a entre deux nombres.

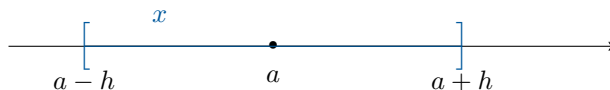
Proposition 5

Pour tous $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|x - a| \leq h \iff a - h \leq x \leq a + h.$$

Preuve.

Cela revient à dire que x est à une distance plus petite que h de a .



En effet, $|x - a| \leq h \iff -h \leq x - a \leq h \iff a - h \leq x \leq a + h$. □

Exemple 9

Démontrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Valeur absolue, donc disjonction de cas !

Cas $x \leq 1$. On a alors $x - 1 \leq 0$ et $|x - 1| = 1 - x$. On doit alors démontrer que, si $x \leq 1$, on a $1 - x \leq x^2 - x + 1$.
Or $x^2 - x + 1 - (1 - x) = x^2 \geq 0$. La propriété est donc vraie si $x \leq 1$.

Cas $x \geq 1$. On a alors $x - 1 \geq 0$ et $|x - 1| = x - 1$. On doit alors démontrer que, si $x \geq 1$, on a $x - 1 \leq x^2 - x + 1$.
Or $x^2 - x + 1 - (x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 0$. La propriété est donc vraie si $x \geq 1$. En conclusion, la propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 6 : Inégalités triangulaires

Si x et y sont deux réels quelconques, alors on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Preuve.

On a

$$|x + y| = \sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy}.$$

Or $xy \leq |xy|$. Donc

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 2|xy|} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|xy|} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y|,$$

car $|x| + |y| \geq 0$. Cela prouve la première inégalité.

Autre preuve : $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$. En additionnant $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Donc $|x + y| \leq |x| + |y|$. Puisque $x = (x - y) + y$, on a d'après la première inégalité : $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$. Donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. En intervertissant les rôles de x et y , on a aussi $|y| - |x| \leq |y - x|$. Comme $|y - x| = |x - y|$, on a donc $||x| - |y|| \leq |x - y|$. $\square$

Remarque

Comme on a $|-y| = |y|$, On peut combiner les deux inégalités en une :

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Exemple 10

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. **Montrer que** $|a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|$.

Par inégalité triangulaire, on force :

$$|2a| + |2b| = |(a + b) + (a - b)| + |(a + b) + (b - a)| \leq |a + b| + |a - b| + |a + b| + |a - b| = 2(|a + b| + |a - b|).$$

d'où le résultat.

4 RÉSOUDRE UNE ÉQUATION

On a vu dans le chapitre précédent, la rédaction et certains raisonnements qui permettent de résoudre une équation. On va ici donner quelques exemples de résolutions.

Exemple 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(E_1) : \frac{x}{x-2} + \frac{3}{x+1} = \frac{6}{x^2-x-2}$.

Domaine. $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, donc il faut $x \neq 2$ et $x \neq -1$. L'équation est définie sur $\mathcal{D}_1 := \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Résolution. On a, pour tout $x \in \mathcal{D}_1$.

$$(E_1) \iff \frac{x(x+1) + 3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \frac{6}{x^2-x-2} \iff \frac{x^2+4x-6}{x^2-x-2} = \frac{6}{x^2-x-2} \quad \text{Cependant, } x \neq 2 \text{ pour}$$

$$\iff x^2+4x-6=6 \iff x^2+4x-12=0 \iff (x-2)(x+6)=0$$

cette équation, donc annule les deux dénominateurs de l'équation de départ : c'est une valeur interdite, à **rejeter**, même si elle résout le trinôme.

Par équivalence, l'équation a alors une unique solution, qui est

-6.

Exemple 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(E_2) : \ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln 3$.

Domaine. Il faut $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$, donc l'ensemble de définition de E_2 est $\mathcal{D}_2 =]1, +\infty[$.

Résolution. Sur $\mathcal{D}_2$, on peut donc écrire $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln[(x+1)(x-1)] = \ln(x^2 - 1)$.

En remplaçant, puis en passant à l'exponentielle dans (E_2) , on obtient

$$(E_2) \iff \ln(x^2 - 1) = \ln 3 \iff x^2 - 1 = 3 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2.$$

Seul $x = 2$ appartient à $\mathcal{D}_2$, donc c'est la seule solution de (E_2) .

Exemple 13

Montrer que l'équation $x^3 + 3x - 1 = 0$ admet une unique solution réelle α , et en donner un encadrement à 10^{-2} près.

préambule. Ici $f : x \mapsto x^3 + 3x - 1$, est une fonction polynomiale. On peut chercher les solutions de cette équation, mais il n'y a pas de racine évidente...

Stricte monotonie. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Donc, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Limites aux bornes. Le terme de plus haut degré x^3 impose $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème de la bijection. f continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, de limites $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes : f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier 0 admet un unique antécédent $\alpha = f^{-1}(0)$: l'équation $f(x) = 0$ a **exactement une** solution réelle. C'est ici que l'unicité est acquise.

Encadrement par balayage. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 3 > 0$, donc $\alpha \in]0, 1[$.

On resserre : $f(0,3) \approx -0,073 < 0$ et $f(0,4) \approx 0,264 > 0$, donc $\alpha \in]0,3; 0,4[$.

On resserre encore : $f(0,32) \approx -0,007 < 0$ et $f(0,33) \approx 0,026 > 0$, donc $\alpha \in]0,32; 0,33[$.

On peut continuer ainsi pour trouver une valeur de plus en plus précise, mais on n'aura jamais de valeur exacte.

5 RÉSOUDRE UNE INÉQUATION

Proposition 7 : Règles de calculs des inégalités

Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien strict/large** Si $a < b$, alors : $a \leq b$.

Dans les règles qui suivent, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

- **Somme** Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors : $a + c \leq b + d$.

- **Produit :**

▷ **par un réel positif** Si $a \leq b$ et $\lambda \geq 0$, alors : $\lambda a \leq \lambda b$,

▷ **par un réel négatif** Si $a \leq b$ et $\lambda \leq 0$, alors : $\lambda a \geq \lambda b$,

▷ **d'inégalités positives** Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors : $0 \leq ac \leq bd$.

- **Passage à l'inverse** Si $a \leq b$ et si a et b sont de même signe, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

- **Transitivité** Si $(a \leq b \text{ et } b \leq c)$ alors $a \leq c$.

- **Antisymétrie** Si $(a \leq b \text{ et } b \leq a)$ alors $a = b$.

Vocabulaire

Majorer une expression veut dire "Trouver un nombre réel toujours plus grand que l'expression". Ce nombre est appelé un *majorant* de l'expression.

Minorer une expression veut dire "Trouver un nombre réel toujours plus petit que l'expression". Ce nombre est appelé un *minorant* de l'expression.

⚠ ATTENTION Les inégalités strictes " $<$ " et " $>$ " et des inégalités larges " $\geq$ " et " $\leq$ " sont différentes. Nous allons manipuler des inégalités toute l'année, alors faites l'effort de bien choisir le symbole que vous utilisez.

Exemple 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; notons $s_n = 1^4 + \dots + n^4$. On va utiliser une majoration grossière de s_n . Fixons $n \in \mathbb{N}^*$

Puisque tous les termes de la somme sont minorés par 1, on a $s_n \geq 1 + \dots + 1 = n$.

Puisque tous les termes de la somme sont majorés par n^4 , on a $s_n \leq n^4 + \dots + n^4 = nn^4 = n^5$.

On a donc montré que

$$n \leq s_n \leq n^5,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La pratique

Pour résumer ce que l'on peut faire concrètement, on a le droit

- d'appliquer aux deux membres de l'inégalité une fonction strictement croissante sur l'intervalle donné par les deux membres de l'inégalité, (Comme par exemple la fonction $x \mapsto \lambda x$ de multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$),
- d'appliquer aux deux membres de l'inégalité une fonction strictement décroissante sur l'intervalle donné par les deux membres de l'inégalité, en changeant le sens de l'inégalité (Comme par exemple la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$).

⚠ ATTENTION

Majorer une fraction de réels positifs, c'est majorer son numérateur et MINORER son dénominateur.

Minorer une fraction de réels positifs, c'est minorer son numérateur et MAJORER son dénominateur.

Exemple 15

- On souhaite encadrer grossièrement le réel $\frac{2x}{x^2+4}$, pour tout $x \in [3, 5]$.

Par hypothèse, $3 \leq x \leq 5$, donc $6 \leq 2x \leq 10$ et $13 \leq x^2 + 4 \leq 29$, car la fonction $x \mapsto x^2 + 4$ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Par quotient,

$$\frac{6}{29} \leq \frac{2x}{x^2+4} \leq \frac{10}{13}.$$

Et non

$$\frac{6}{13} \leq \frac{2x}{x^2+4} \leq \frac{10}{29} !$$

- Montrons que pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

BROUILLON

On peut commencer à chercher d'où vient cette inégalité

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \iff x^2 + 1 \geq 2x, \text{ car } x > 0$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x-1)^2 \geq 0,$$

puis d'observer que le carré d'un réel est toujours positif.

Sur une copie, pour un calcul aussi simple, il vaut mieux partir de la fin: $(x-1)^2 \geq 0$ et en déduire rapidement l'inégalité désirée.

⚠ ATTENTION ① Il est **interdit** de soustraire 2 inégalités !

Même si $0 < 1$ et $1 < 3$,

$$0 - 1 = -1 \not\leq -2 = 1 - 3.$$

② Dans l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$, quand on remplace y par $-y$, c'est toujours un "+" qu'on trouve à droite $|x - y| \leq |x| + |y|$ et non $|x - y| \leq |x| - |y|$!

6 SYSTÈMES LINÉAIRES

On souhaite avoir une méthode algorithmique pour résoudre les système du type

$$\begin{cases} 4x - 2y = -1 \\ 7x - y = 5 \end{cases}, \quad (*)$$

où $x, y \in \mathbb{R}$ sont les inconnues. Bien sûr, ce système est à 2 équations et 2 inconnues, mais on aimerait une méthode qui fonctionne pour tout système à n équations et m inconnues.

6.1 DÉFINITION ET PRINCIPE DU PIVOT DE GAUSS

Définition 6 : Système linéaire

Un **système linéaire** est l'intersection de solutions de plusieurs équations linéaires.

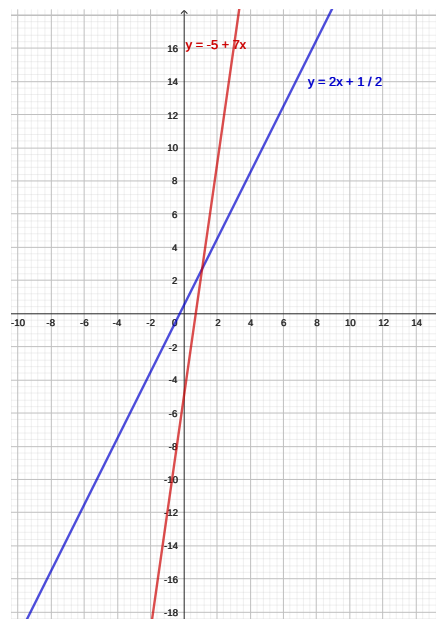
Intersections de droites

Pourquoi parler d'intersections de solutions ?

Le système (*) peut être vu comme l'intersection de deux droites. En effet, on peut réécrire les équations

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} + 2x \\ y = -5 + 7x \end{cases} \quad (*)$$

ce qui n'est pas sans vous rappeler les droites de coefficient directeur 2 et 7 et d'ordonnée à l'origine $1/2$ et -5 respectivement. La solution de ce système est alors l'intersection des deux droites.



Il existe une méthode très efficace pour résoudre ces systèmes : **l'algorithme du pivot de Gauss**. Pour le mener à bien, on a besoin de trois opérations élémentaires.

Définition 7 : Opérations élémentaires

Soit un système (S) à n équations et m inconnues $x_1, \dots, x_m$.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,m}x_m = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,m}x_m = b_n & (L_n) \end{cases} \quad (S)$$

On note ses équations en lignes par $L_1, \dots, L_n$. On appelle **opération élémentaire** une des opérations suivantes sur les lignes de (S) :

- **Ajout à une ligne d'un multiple d'une autre** Étant donné λ un réel et $i \neq j$, on indiquera

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$$

pour signaler que l'on a modifié la ligne i en lui ajoutant la ligne j multipliée par λ .

- **Multiplication d'une ligne par un réel non nul** Étant donné un réel non nul μ , on indiquera

$$L_i \leftarrow \mu L_i$$

pour signaler que l'on a modifié la ligne i en la multipliant par μ .

- **Échange de deux lignes** On indiquera

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

pour signaler que l'on a échangé les lignes i et j .

Proposition 8

Soit (S) un système linéaire. Si (S') est obtenu de (S) par opérations élémentaires alors (S') est équivalent à (S) .

Preuve. Il suffit de remarquer que chacune des trois opérations est réversible !

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ est inversée par $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ est inversée par $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$
- $L_i \leftrightarrow L_j$ est inversée par elle-même.

□

Méthode du Pivot de Gauss

La méthode consiste à mettre le système "sous forme échelonnée" de manière à pouvoir, en partant de la solution de la dernière équation et en remontant, résoudre toutes les équations. On se fixe une variable, disons x_1 dans (S) . On utilise un **pivot** (ici $a_{1,1}$) pour *tuer* la variable x_1 dans toutes les équations sauf celle du pivot, en utilisant l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,m}x_m = b_1 & (L_1) \\ \boxed{} + \left(a_{2,2} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\right)x_2 + \dots = b_2 - \frac{b_1}{a_{1,1}} & \left(L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}L_1\right) \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{} + \left(a_{n,2} - \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}\right)x_2 + \dots = b_n - \frac{b_1}{a_{1,1}} & \left(L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}L_1\right) \end{cases}$$

Il suffit alors de répéter l'opération sur chaque variable pour obtenir un **système échelonné** "en escalier".

$$\begin{cases} x_1 + \dots = b'_1 \\ \boxed{0} + x_2 + \dots = b'_2 \\ \boxed{} + x_3 + \dots = b'_3 \\ \vdots \\ \boxed{} + x_n = b'_n \end{cases}$$

On remonte alors les équations : La dernière donne la valeur de x_n , l'avant dernière donne celle de x_{n-1} , ...

Il est facile de se convaincre (la démonstration rigoureuse est lourde, mais elle n'est pas difficile) que par des opérations élémentaires, on peut toujours mettre le système sous forme échelonnée, c'est-à-dire on peut remplacer le système par un autre dont la matrice est échelonnée (l'ensemble des solutions n'aura pas changé).

Nombres d'équations et d'inconnues

Point Vocabulaire : Nous ne définiront pas le terme d'équation *cohérentes et non redondantes*. Il est à comprendre dans le sens où ce type d'équations ne vont pas l'une à l'encontre d'une autre, comme

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

et ne sont pas combinaisons linéaires les unes des autres, comme

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}.$$

Il est possible qu'il y ait plus de variables que d'équation dans le système échelonné. On aura alors un système de la forme

$$\begin{cases} x_1 + \cdots & + x_{n+1} + \cdots = b'_1 \\ \boxed{} + x_2 + \cdots & + x_{n+1} + \cdots = b'_2 \\ \boxed{} + x_3 + \cdots & + x_{n+1} + \cdots = b'_3 \\ \vdots & \vdots \\ \boxed{} + x_n & + x_{n+1} + \cdots = b'_n \end{cases}$$

Les inconnues qui apparaissent alors au début de chaque équation sont dites *inconnues principales*, les autres sont appelées les *variables libres*.

- S'il n'y a pas de variables libres, on est dans le premier cas expliqué dans la méthode. Alors le système admet une et une seule solution que l'on obtient en résolvant d'abord la dernière équation et en remontant jusqu'à la première. **On est dans le cas où il y a autant de variables que d'équations cohérentes et non redondantes.** (Voir Exemples 1,2 et 4)
- S'il y a des variables libres, on donne alors aux variables libres des valeurs arbitraires $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. On envoie les λ_i au second membre et l'on est ramené au cas précédent : il existe alors une et une seule solution pour chaque choix de $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ c'est-à-dire, une infinité de solutions dépendante de m paramètres, où m est le nombre des variables libres. **On est dans le cas où il y a plus de variables que d'équations cohérentes et non redondantes.** (Voir Exemples 3 et 5)
- S'il y a une équation incohérente le système n'a pas de solution. (Voir Exemple 6)

Quand il y a plus d'équation que de variables, soit une équation est incohérente, soit plusieurs équations sont redondantes. La même méthode permet de le savoir.

6.2 EXEMPLES

Exemple 16

Reprenons le système (*).

$$\begin{cases} 4x - 2y = -1 \\ 7x - y = 5 \end{cases} \quad (*)$$

À la première ligne, le coefficient 4 devant l'inconnue x_1 est non nul. On l'utilise comme pivot. L'opération élémentaire

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{4}L_1$$

a pour effet d'éliminer l'inconnue x_1 dans la deuxième équation :

$$\begin{cases} 4x - 2y = -1 \\ \frac{5}{2}y = \frac{27}{4} \end{cases}$$

Le système obtenu admet alors une unique solution, obtenue par résolution du bas vers le haut. On obtient directement

$$y = 27/10, \text{ puis } x = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{27}{5} \right) = 11/10.$$

En conclusion, le système (*) possède le couple $(27/10, 11/10)$ comme unique solution.

Exemple 17

On souhaite résoudre le système (1)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases} \quad (1)$$

À la première ligne, le coefficient 2 devant l'inconnue x_1 est non nul. On constate alors que les deux opérations élémentaires

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

ont pour effet d'éliminer l'inconnue x_1 dans les deux dernières équations :

$$(1) \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

L'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$ donne alors

$$(1) \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$

Le système obtenu admet alors une unique solution, obtenue par résolution du bas vers le haut. On obtient directement

$$x_3 = 3, \text{ puis } x_2 = 3 - 2 = 1 \text{ et enfin } x_1 = \frac{1}{2}(1 + 2 \times 3 - 1) = 3.$$

En conclusion, le système (1) possède le triplet $(3, 1, 3)$ comme unique solution.

Exemple 18

On souhaite résoudre le système (2),

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Comme il y a moins d'équation que de variables, on sait déjà que s'il y a des solutions, elles ne seront pas uniques ! Choisissons comme pivot le coefficient 2 devant l'inconnue x_1 de la première ligne. L'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

donne

$$(2) \iff \begin{cases} \boxed{2}x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

On a bien un système complètement échelonné. On passe donc les variables libres (ici x_3) à droite des égalités. On obtient un système échelonné d'inconnues x_1 et x_2 :

$$(2) \iff \begin{cases} \boxed{2}x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 \\ -x_2 = 2 - x_3 \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$, il existe un unique couple (x_1, x_2) tel que le triplet (x_1, x_2, x_3) soit solution de (2). Plus précisément :

$$(2) \iff \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} + \frac{x_3}{2} \\ x_2 = -2 + x_3. \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (2) est $\left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{x_3}{2}, -2 + x_3, x_3 \right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Exemple 19

On souhaite résoudre le système (3),

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases} \quad (3)$$

Comme il y a plus d'équation que de variables, soit une équation est incohérente et il n'y a pas de solutions, soit plusieurs équations sont redondantes. On a

$$(3) \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \begin{cases} \boxed{1}x + 2y - 3z = 4 \\ \boxed{} + y + 2z = 7 \\ \boxed{} + y + z = 5 \\ \boxed{} + 2y + 4z = 14 \end{cases} \iff \begin{array}{l} L_3 - L_2 \rightarrow L_3 \\ L_4 - 2L_2 \rightarrow L_4 \end{array} \begin{cases} \boxed{1}x + 2y - 3z = 4 \\ \boxed{1}y + 2z = 7 \\ -z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation, qui est une relation de compatibilité, est vérifiée. On en déduit alors en remontant les équations que le système (3) admet une unique solution $(4, 3, 2)$.

Exemple 20

On souhaite résoudre le système (4),

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases} \quad (4)$$

On a alors

$$(4) \iff L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \begin{cases} \boxed{1}x + y + z - 3t = 1 \\ y - 3z + 7t = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z - 4t - 2 \\ y = -3z + 7t + 3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système (4) est donc

$$\{(2z - 4t - 2, -3z + 7t + 3, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exemple 21

On souhaite résoudre le système (5),

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases} \quad (5)$$

On a

$$(5) \iff \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1 \end{array} \begin{cases} 1x + 2y - 3z = -1 \\ -7y + 11z = 10 \\ -14y + 22z = 17 \end{cases} \iff \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \begin{cases} 1x + 2y - 3z = -1 \\ -7y + 11z = 10 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

La dernière équation est absurde. On en déduit alors que le système (5) n'admet aucune solution.

7 LIMITES

Le but de ce paragraphe est de faire des révisions de lycée sur les limites : savoir identifier rapidement des limites, s'il y a des formes indéterminées, et le principe pour les lever.

7.1 RAPPEL RAPIDE DE COURS

- Avoir l'intuition de chaque terme de la limite:
 - ▷ si $x \rightarrow 5$, regarder dans sa tête $x = 5 + 0.01$, ou $x = 5 - 0.01$.
 - ▷ si $x \rightarrow +\infty$, s'imaginer $x = 1000$, $x = 10^6$, etc...
 - ▷ si $x \rightarrow 0$ s'imaginer $x = 0.001$, puis $x = \pm 10^{-6}$ etc...

⚠ ATTENTION En cas d'inverse, on a besoin d'avoir le signe de la fraction : $\frac{1}{10^{-6}} = 10^6$ est très grand, et $\frac{1}{-10^{-6}} = -10^6$ est à l'opposé sur l'axe des réels...

- Connaitre les limites de toutes les fonctions usuelles sans souci. En particulier les croissances comparées avec $\exp$ et $\ln$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^n(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^n(x) = 0 . \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \exp(x) = 0 . \end{aligned}$$

- Attention aux opérations sur les calculs: **REPERER LES FORMES INDETERMINEES**, mais ne jamais écrire ces opérations interdites sur le propre:

$$"(+\infty) + (-\infty)" \quad "(0) \times (\infty)" \quad "\frac{(\infty)}{(\infty)}" \quad "\frac{(0)}{(0)}"$$

- Une limite peut être finie (un réel), infinie ($+\infty$ ou $-\infty$), ou ne pas exister (par exemple $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$. A vous de déterminer cela.
- Savoir composer des limites.
- Savoir utiliser un théorème d'encadrement pour lever une forme indéterminée. (par exemple lorsqu'il y a un $\cos(u(x))$ où $u(x) \rightarrow +\infty$).

7.2 MÉTHODOLOGIE DE TERMINALE

- ① **Ecrire le terme au brouillon. Identifier chaque terme, et sa limite.**

Exemple 22

Pour $\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x+1}$ en 0^+ , regardez la limite des termes x^2 , puis $\frac{1}{x}$. on en déduit la limite de la somme et donc du numérateur $\rightarrow +\infty$.

On procède de même au dénominateur $\rightarrow +1$. On en déduit la limite du quotient $\rightarrow +\infty$.

En prépa, s'il n'y a pas de forme indéterminée, vous pouvez écrire tout de suite le résultat.

② **Maintenant, si c'est une F.I.**, il faut regarder le type de forme indéterminée.

- Si c'est une différence de deux termes tendant vers ∞ , factoriser par le terme le plus gros (pour cela, il faut connaître ses croissances comparées).

Exemple 23

$$\ln(x) - x = x \cdot \underbrace{\left(\frac{\ln(x)}{x} - 1 \right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty, \quad \text{par croissances comparées puis produits de limites.}$$

- De même si c'est un quotient de deux termes tendant vers ∞ : factoriser le numérateur par le plus gros, et le dénominateur par le plus gros (ce qui est le terme de plus haut degré pour les polynômes en ∞).

Exemple 24

$$\frac{2x^3 - 3}{x^2 - x^3} = \frac{\cancel{x^3}(2 - 3x^{-3})}{\cancel{x^3}(x^{-1} - 1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -2.$$

- Si c'est un FI avec une somme ou différence avec des racines, multiplier par la quantité conjuguée.

Exemple 25

$$\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2} - 1}{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x^2 + 1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exemple 26

$$\frac{\cos(x) - 1}{\exp(x) - 1} = \frac{x}{\exp(x) - 1} \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +0} \exp(0)^{-1} \cdot \sin(0).$$

- Si c'est une FI du type $\frac{0}{0}$, quand $x \rightarrow \alpha$, regarder le terme qui annule le numérateur, et le dénominateur et factoriser par $(x - \alpha)$.
Sinon, penser aux limite du cours provenant de la limite d'un taux d'accroissement.

Exemple 27

$$\frac{2x^3 - 16}{2x^2 - x^3} = \frac{(x-2)(2x^2 + 4x + 8)}{(x-2)(-x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \frac{24}{-4} = -6.$$

- Si c'est une FI avec un cosinus et sinus: l'intérieur tend vers 0, se rappeler des FI du cours, et les exploiter. Si l'intérieur tend vers $\pm\infty$, pensez à un théorème d'encadrement.

Exemple 28

D'après le théorème d'encadrement, $\frac{\cos(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1, 1]$, donc

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

8 TRIGONOMETRIE

8.1 DÉFINITIONS DE $\cos$, $\sin$ ET $\tan$

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 8

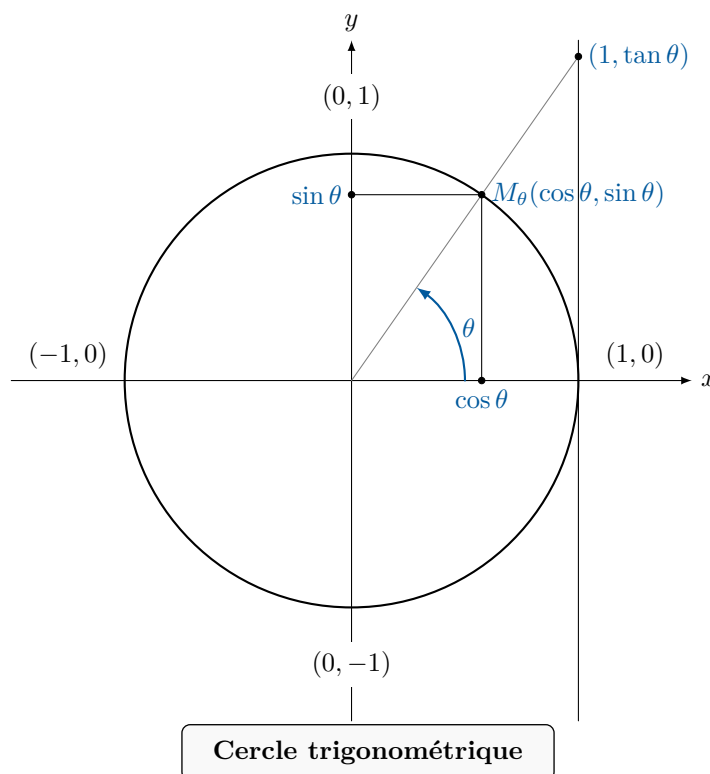
Le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est le cercle centré en l'origine et de rayon 1, autrement dit a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. On a aussi

$$C = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)), \theta \in [0, 2\pi[\}$$

Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, notons M_θ le point du cercle vérifiant :

$$(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta}) = \theta$$

- Le cosinus de θ , noté $\cos(\theta)$, est l'abscisse du point M_θ ,
- Le sinus de θ , noté $\sin(\theta)$, est l'ordonnée du point M_θ ,
- Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, pour tout nombre $k \in \mathbb{Z}$, On définit la tangente de θ , noté $\tan(\theta)$, comme la distance algébrique du point $(1, 0)$ à l'intersection entre (OM_θ) et la perpendiculaire à l'axe des abscisse, passant par $(1, 0)$.



Vocabulaire : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que x et y sont **congrus modulo 2π** et on note $x \equiv y[2\pi]$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 2k\pi$.

8.2 FORMULES

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Comme un tour de cercle est de longueur 2π , $M_\theta = M_{\theta + 2\pi}$ et donc

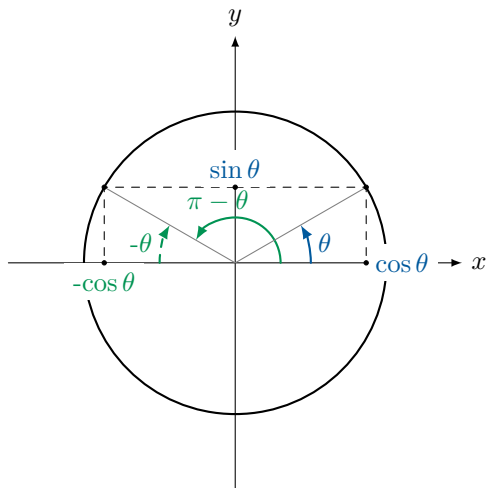
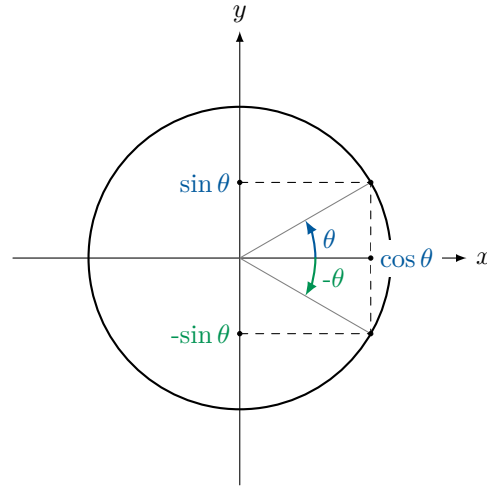
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$$

De plus, comme M_θ est un point du cercle, de rayon 1,

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, on a

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos(\theta) \\ \text{et} \\ \sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$

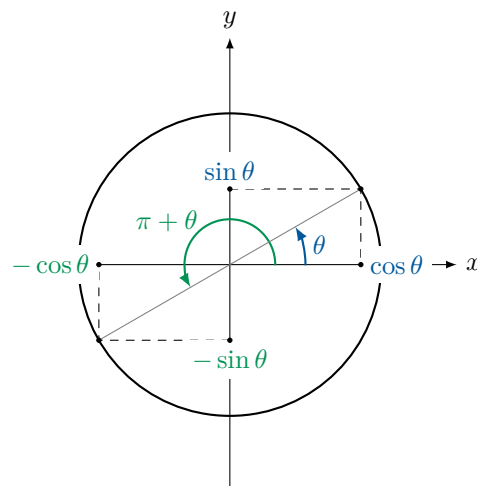


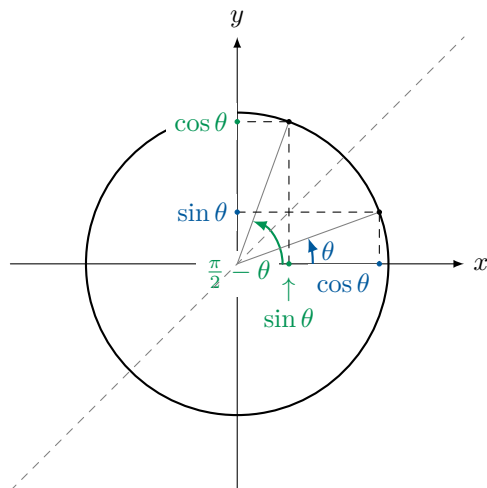
Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on a

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= -\cos(\theta) \\ \text{et} \\ \sin(\pi - \theta) &= \sin(\theta) \end{aligned}$$

Par symétrie par rapport à l'origine, on a

$$\begin{aligned} \cos(\pi + \theta) &= -\cos(\theta) \\ \text{et} \\ \sin(\pi + \theta) &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$





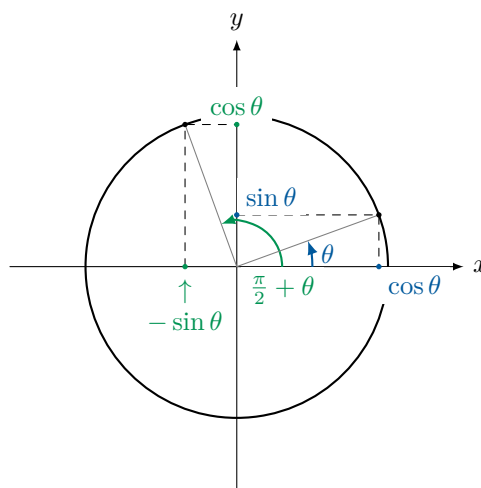
Par symétrie par rapport à la bissectrice des axes, on a

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin(\theta) \\ \text{et} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos(\theta)\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(\theta) \\ \text{et} \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\theta)\end{aligned}$$

A vous d'expliquer pourquoi !



Vous devez aussi connaître les valeurs remarquables de sin et cos qui sont rappelées dans ce tableau et dans la figure en fin de chapitre !

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Proposition 9 : Formules d'addition

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

Preuve. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Plaçons-nous dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et considérons les vecteurs

$$\vec{u} = \cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}$$

et

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} \\ &= -\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}.\end{aligned}$$

de telle sorte que le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est également un repère orthonormé.

Considérons alors M_{a+b} de coordonnées $(\cos(a + b), \sin(a + b))$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. D'autre part, les vecteurs $\overrightarrow{OM_{a+b}}$ et $\vec{u}$ font un angle respectifs de $a + b$ et a avec $\vec{i}$. Donc l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_{a+b}}) = b$. Donc M_{a+b} a pour coordonnées $(\cos(b), \sin(b))$

dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On a donc vectoriellement

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM_{a+b}} &= \cos(b)\vec{u} + \sin(b)\vec{v} \\ &= \cos(b)(\cos(a)\vec{i} + \sin(a)\vec{j}) + \sin(b)(-\sin(a)\vec{i} + \cos(a)\vec{j}) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\vec{i} + (\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a))\vec{j}\end{aligned}$$

On obtient ainsi une autre expression des coordonnées du point M_{a+b} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Par unicité des coordonnées d'un point dans un repère, on déduit deux des quatre formules souhaitées :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Les deux autres s'obtiennent alors en appliquant les précédentes au couple $(a, -b)$, et en utilisant les propriétés de parité de $\sin$ et $\cos$. $\square$

Exemple 29

On peut essayer de trouver d'autres valeurs remarquables avec ces formules. Par exemple, en remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, on peut obtenir les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

et

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}.$$

Proposition 10 : Formules de duplication

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

Preuve.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a),$$

et

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \cos(a)\sin(a) + \sin(a)\cos(a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

$\square$

Formules de linéarisation

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, les formules d'addition permettent d'obtenir les formules suivantes, de transformation de produit en somme :

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, & \cos^2(a) &= \frac{1 + \cos(2a)}{2}, \\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}, & \sin^2(a) &= \frac{1 - \cos(2a)}{2}, \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2},\end{aligned}$$

Point méthode : Dans la pratique, ces formules se retrouvent assez rapidement à partir des formules des Propositions 1 et 2. C'est toujours mieux de connaître ces formules par coeur.

On voit aussi parfois ces formules (et elle son parfois utiles) sous la forme

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \\ \cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right), \end{cases}$$

mais ce sont les mêmes formules !

Exemple 30

Montrons que $\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$, pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $a = \frac{x}{2^k}$ on réécrit la formule $\cos \left(\frac{x}{2^k} \right) = \frac{\sin \left(\frac{x}{2^{k-1}} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2^k} \right)}$ valable tant que $\sin \left(\frac{x}{2^k} \right) \neq 0$.

Maintenant multiplions ces identités pour $k = 1, 2, \dots, n$. Cela nous donne

$$\prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{x}{2^k} \right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin \left(\frac{x}{2^{k-1}} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2^k} \right)} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin x \sin \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2^2} \right) \cdots \sin \left(\frac{x}{2^{n-1}} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2^2} \right) \cdots \sin \left(\frac{x}{2^n} \right)}.$$

Tous les facteurs intermédiaires $\sin(x/2), \sin(x/2^2), \dots, \sin(x/2^{n-1})$ se simplifient, et il reste donc

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin \left(\frac{x}{2^n} \right)}.$$

8.3 TANGENTE

Proposition 11

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Preuve. On reprend la figure du cercle trigonométrique dans le paragraphe 8.1. Les perpendiculaires à l'axe des abscisses passant par $(\cos \theta, 0)$ et $(1, 0)$ sont parallèles. L'axe des abscisses et la droite (OM_θ) sont sécantes en O et coupent les deux droites parallèles en 2 points respectivement $(\cos \theta, 0)$ et $(1, 0)$ et M_θ et $(1, \tan \theta)$. D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{1},$$

d'où la proposition. On remarque que $\cos \theta$ est bien non nul pour tout $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. $\square$

Il suffit d'utiliser les formules de cos et sin pour obtenir les résultats suivants.

Proposition 12

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$ et $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$.

On peut aussi compléter notre tableau de valeurs :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Proposition 13

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $a + b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a

$$\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \quad \text{et} \quad \tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}.$$

Preuve.

On reprend les notations de l'énoncé.

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}},$$

en factorisant par $\cos(a)\cos(b)$ au numérateur et au dénominateur. La deuxième formule se retrouve en remplaçant b par $-b$. $\square$

Exemple 31

Cherchons la valeur de $t := \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Grâce à la formule juste démontrée, on a $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 = \frac{2t}{1 - t^2}$, d'où $2t = 1 - t^2 \implies t^2 + 2t - 1 = 0$.

Le calcul de discriminant nous donne alors $t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t > 0$, donc $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

On peut même en déduire facilement les valeurs de $\cos$ et $\sin$. Tout d'abord, par définition de $\tan$,

$$\sin \frac{\pi}{8} = \tan \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = (\sqrt{2} - 1) \cos \frac{\pi}{8}.$$

On a bien sûr $\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1$, d'où, en remplaçant, $((\sqrt{2} - 1)^2 + 1) \cos^2 \frac{\pi}{8} = 1$, et donc

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{16 - 8} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{8} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}.$$

Comme $\pi/8 \in [0, \pi/2]$, $\cos > 0$, on obtient

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \text{ puis } \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

On peut trouver des centaines de formules. On remarque que le plus important est de savoir comment retrouver les formules que l'on a besoin. L'exemple suivant, qui servira lors des changements de variables dans les intégrales, nous montre que l'on peut toujours trouver les formules. Il suffit de s'entraîner à utiliser les formules de bases.

Exemple 32

Essayons d'exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de $t = \tan(x/2)$.

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(x) &= \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}$$

8.4 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES**8.4.1 CAS DES ÉQUATIONS**

On cherche à savoir comment résoudre les équations (ou inéquations) de la forme, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \frac{1}{2},$$

⚠ ATTENTION La solution à l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$ n'est pas $x = \frac{\pi}{3}$. Il y a plusieurs autres solutions comme $x = -\frac{\pi}{3}$.

Exemple 33

Reprenons notre équation $\cos x = \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Un réel x est solution si, et seulement si, le point M_x a pour abscisse $\frac{1}{2}$. Les points M_x associés sont donc les points d'intersection entre le cercle trigonométrique et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$, ce qui correspond aux deux points $M_{\frac{\pi}{3}}$ et $M_{-\frac{\pi}{3}}$. On sait de plus que :

$$M_{x_1} = M_{x_2} \iff x_1 \equiv x_2[2\pi]$$

On en déduit que x est solution si, et seulement si, $x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Cette proposition n'est pas à apprendre par coeur. Vous pouvez raisonner comme l'exemple précédent pour chaque équation. La preuve se fait comme l'exemple.

Proposition 14

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\cos a = \cos b \iff (a \equiv b[2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b[2\pi])$$

$$\sin a = \sin b \iff (a \equiv b[2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b[2\pi])$$

Si de plus $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors

$$\tan a = \tan b \iff a \equiv b[\pi].$$

Exemple 34

Essayons de résoudre l'équation $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. À l'aide du cercle trigonométrique, on voit qu'un réel θ est solution si, et seulement si :

$$2\theta + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \quad \text{ou} \quad 2\theta + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Or, on a :

$$2\theta + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \iff 2\theta \equiv 0[2\pi] \iff \theta \equiv 0[\pi]$$

et

$$2\theta + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi] \iff 2\theta \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \iff \theta \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$$

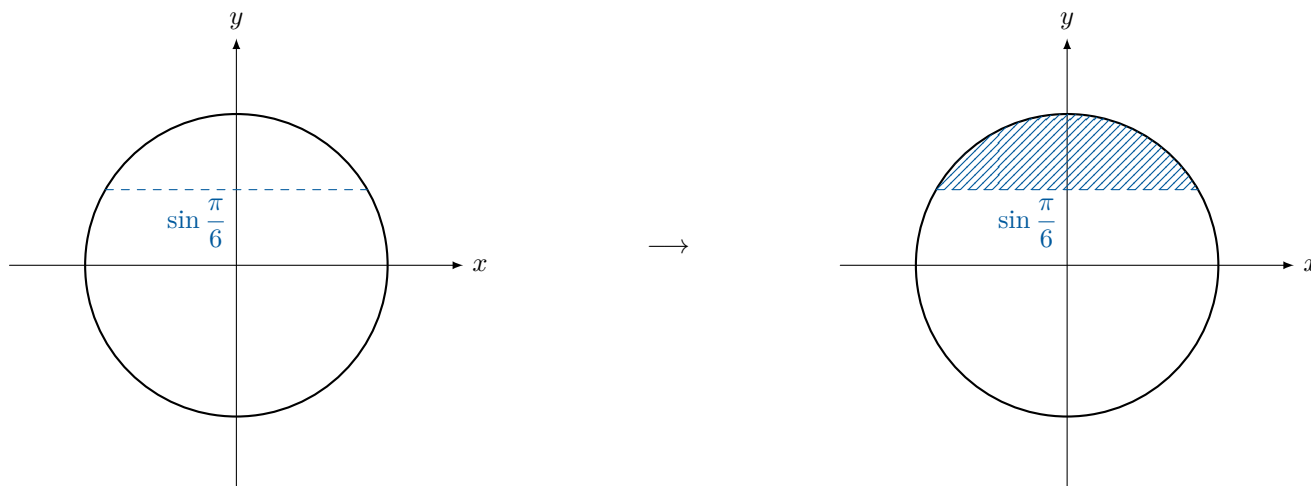
Par conséquent, l'ensemble des solutions est

$$\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

8.4.2 CAS DES INÉQUATIONS

Quand on a une inéquation comme $\sin x \geq \frac{1}{2}$, on résout d'abord l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ et on cherche la solution de l'équation sur le cercle trigonométrique.

Les solutions de cette équation sont $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$. Posons les sur le cercle. Ensuite, on résout l'équation graphiquement, en regardant où sont les angles avec un sinus supérieur à $\frac{1}{2}$.

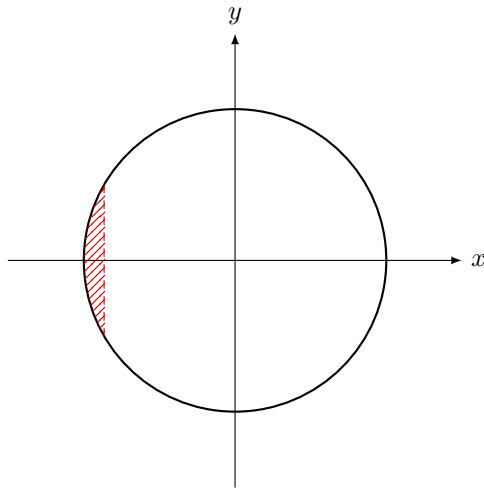


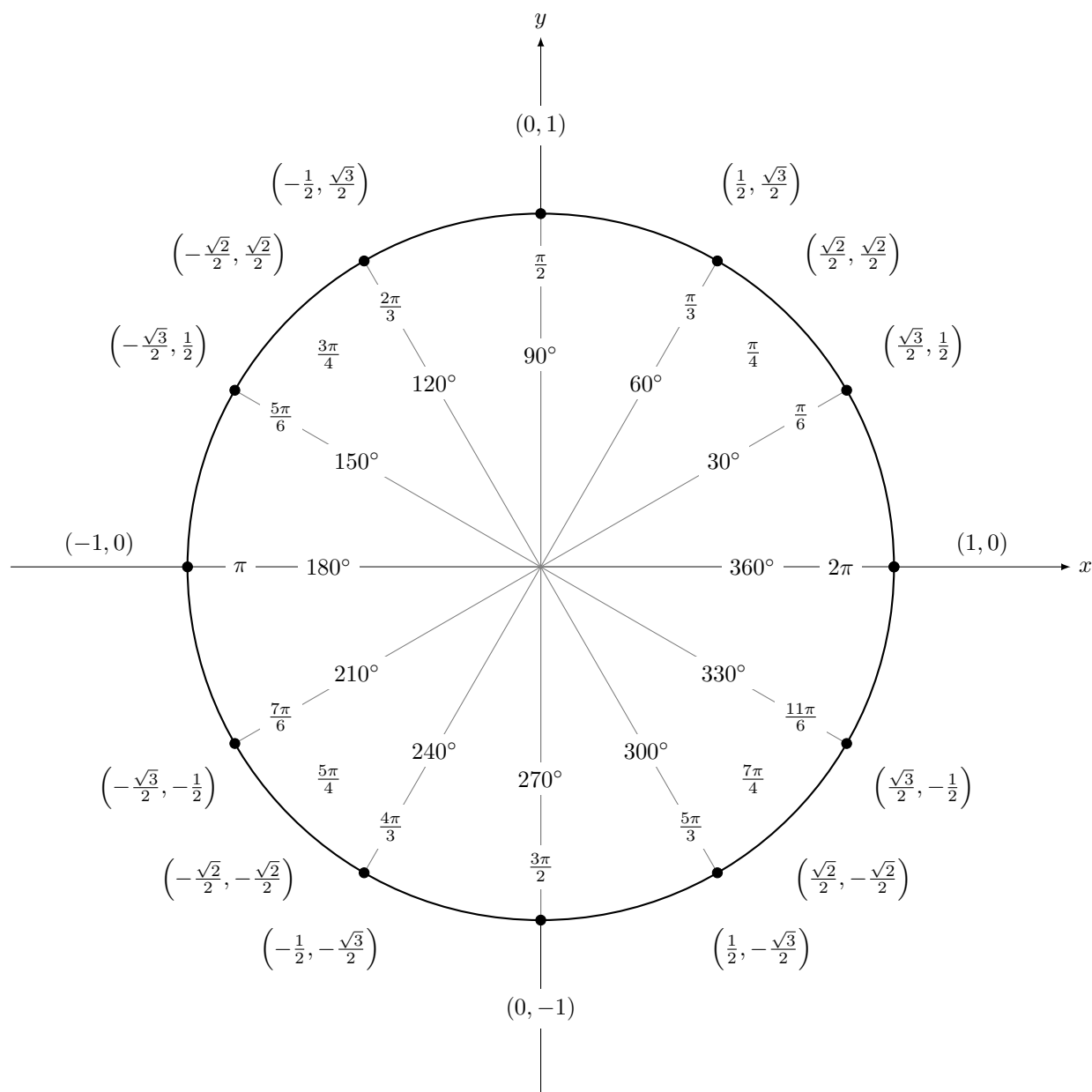
Les solutions de l'inéquation, entre 0 et 2π sont dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$. Pour les solutions sur $\mathbb{R}$, il faut ajouter tous

les intervalles qui sont décalés de 2π , depuis celui ci, soit
$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right].$$

⚠ ATTENTION On fait bien attention que l'intervalle proposé a bien un sens.

Les solutions de l'inéquation $\cos(x) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$, dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ ne sont pas l'intervalle $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, qui n'a aucun sens, mais plutôt $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$.





Rappels des valeurs remarquables pour sin et cos

9 SOMMES ET PRODUITS

Quand l'on fait une longue somme ou un produit de 10, 30, n termes, il est impossible d'écrire tous les termes. Les mathématiciens ont donc inventé une notation pour noter ces sommes et produits. Elles peuvent être contre-intuitives à première abord, mais sont très pratiques quand on sait les utiliser.

Par exemple, on note

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}}_{\text{Forme habituelle de la somme}} = \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k},$$

et jusqu'à un entier n quelconque :

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}}_{\text{Forme in extenso de la somme}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Variable muette

Vous avez bien sûr remarqué, comme vous êtes d'excellents rédacteurs en mathématiques, que la variable k dans la somme n'a jamais été définie. C'est inadmissible !

En fait, il n'y a pas besoin de définir cette variable car elle est dite muette et définie par la somme comme parcourant les entiers de 1 à 9, dans la première, et de 1 à n dans la seconde. C'est donc un compteur qui **n'a aucun sens en dehors de la somme** et qui peut être remplacé par n'importe quel autre lettre ou symbole, sans changer le sens. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k} = \sum_{\alpha=1}^9 \frac{1}{\alpha} = \sum_{\square=1}^9 \frac{1}{\square} = \sum_{\mathfrak{A}=1}^9 \frac{1}{\mathfrak{A}}.$$

Donc on peut utiliser le même indices pour plusieurs sommes dans le même calcul, car l'indice *meurt* à la fin de la somme ! On peut donc écrire

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k} \quad \left| \quad \sum_{k=1}^5 k \right.$$

Début de l'indice $\uparrow$ $\uparrow$ Fin de l'indice

Essayez juste de choisir des indices qui n'ont pas été définis plus tôt... On ne prend pas i comme indice si on travaille avec des nombres complexes.

Exemple 35

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}. \end{cases}$ Soit $N \in \mathbb{N}$. Calculons la somme $\sum_{k=0}^n u_n$.

On remarque que u_n est arithmétique, De plus, d'après la somme d'une suite arithmétique, on sait que

$$\sum_{k=0}^n u_n = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes} = \frac{1 + (1 + 3n/2)}{2} \times (n+1) = \frac{(4 + 3n)(n+1)}{4}.$$

9.1 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition 9

Soient p et q deux nombres entiers naturels, avec $p \leq q$, et $q - p + 1$ nombre réels $a_p, a_{p+1}, \dots, a_q$. On écrit

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$$

leur somme et

$$\prod_{k=p}^n a_k = a_p a_{p+1} \dots a_q$$

leur produit.

Exemple 36

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ termes}} = \prod_{k=1}^n x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factorielle** n , et l'on note $n!$, le nombre entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^n k$$

Point Notations : On peut trouver différentes écritures de l'indice de sommation. L'indice doit juste bien être délimité. Les notations suivantes sont équivalentes.

$$\sum_{k=p}^q a_k, \quad \sum_{k \in \llbracket p, q \rrbracket} a_k \quad \text{ou encore} \quad \sum_{p \leq k \leq q} a_k.$$

Bien sûr, au lieu d'écrire $k \in \llbracket p, q \rrbracket$, on peut aussi écrire $k \in I$, où I est un sous ensemble de $\mathbb{N}$. On verra aussi des exemples, où I n'est pas un sous ensemble de $\mathbb{N}$, il suffit qu'il soit dénombrable.

Somme et produit vides

On donne certaines conventions quand l'ensemble d'indices est vide. On convient convenant qu'une somme vide vaut 0 et qu'un produit vide vaut 1, c'est à dire,

$$\sum_{k \in \emptyset} a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$$

Par exemple,

- Si $p = q + 1$, on convient que

$$\sum_{k=p}^q a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^q a_k = 1,$$

- Cela est consistant avec la notation

▷ de puissance : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $x^0 = \prod_{k=1}^0 x = 1$,

▷ factorielle : $0! = \prod_{k=1}^0 k = 1$.

Exemple 37

Si I désigne l'ensemble des nombres premiers entre 1 et 15, alors

$$\sum_{k \in I} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} = \sum_{\substack{k \text{ premier} \\ k \in [11, 25]}} \frac{1}{k}.$$

Proposition 15 : Premières propriétés

Soient $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq q$. Soient $(a_i)_{i \in \llbracket p, q \rrbracket}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket p, q \rrbracket}$ deux familles de nombres réels, $\lambda \in \mathbb{R}$ $l \in \mathbb{N}$. On a

① **Linéarité de la somme** $\sum_{i=p}^q (a_i + b_i) = \sum_{i=p}^q a_i + \sum_{i=p}^q b_i$ et $\sum_{i=p}^q \lambda a_i = \lambda \sum_{i=p}^q a_i$,

② **Propriétés du produit** $\prod_{i=p}^q (a_i b_i) = \prod_{i=p}^q a_i \cdot \prod_{i=p}^q b_i$ et $\prod_{i=p}^q a_i^l = \left(\prod_{i=p}^q a_i \right)^l$.

La preuve n'est qu'un jeu d'écritures. Vous pouvez revenir à la notation intuitive de la somme pour voir les égalités.

Sommes et produits de constantes

En reprenant les notations de la proposition, on peut montrer que

$$\sum_{i=p}^q (a_i + \lambda) = \sum_{i=p}^q a_i + (q - p + 1)\lambda \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^q (\lambda a_i) = \lambda^{q-p+1} \prod_{i=p}^q a_i.$$

Pensez donc à sortir les constantes qui ne dépendent pas de l'indice de sommation.

Proposition 16

Soient I_1 et I_2 deux ensembles d'indices finis et disjoints ($I_1 \cap I_2 = \emptyset$) et soit $I := I_1 \cup I_2$. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels. On a

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} a_i = \left(\prod_{i \in I_1} a_i \right) \left(\prod_{i \in I_2} a_i \right).$$

Relation de Chasles

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq r \leq q$. Prenons dans la proposition $I_1 := \llbracket p, r \rrbracket$ et $I_2 := \llbracket r+1, q \rrbracket$. On a bien $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $I := I_1 \cup I_2 = \llbracket p, q \rrbracket$. La proposition donne alors les *relations de Chasles*

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^r a_k + \sum_{k=r+1}^q a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^q a_k = \left(\prod_{k=p}^r a_k \right) \left(\prod_{k=r+1}^q a_k \right).$$

9.2 CHANGEMENT D'INDICES

On peut avoir besoin de décaler l'indexage d'une suite.

9.2.1 DÉCALAGE D'INDICE

Par exemple, on peut vouloir ramener une somme à un indice de départ nul pour faciliter la lisibilité. Étant donné une somme $S = \sum_{k=p}^q a_k$, le changement d'indice $[j = k - p]$ permet de se ramener à une somme indexée à partir de 0 :

$$S = \sum_{j=0}^{q-p} a_{j+p}$$

k	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	$q-1$	q
j	0	1	2	$\cdots$	$q-p-1$	$q-p$

⚠ ATTENTION On ne change pas la somme, mais seulement l'indexation !

Exemple 38

Pour $n \geq 2$, on nous demande de calculer la somme

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}.$$

On réécrit d'abord $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$, valable pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On obtient

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}.$$

Dans cet exemple, on fait un changement d'indice pour avoir les mêmes termes à sommer. On fait donc le changement d'indice $[j = k + 2]$ dans la deuxième somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}.$$

On rappelle que l'indice de sommation est muet ! On obtient:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \quad (\text{car } n \geq 2) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

9.2.2 SYMÉTRISATION

On peut aussi vouloir inverser l'ordre des termes, en partant du dernier pour arriver au premier.

Exemple 39

Pour $n \in \mathbb{N}$, on veut calculer

$$S = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} . \quad (6)$$

Le résultat est évident pour $n = 0$, puisqu'une somme vide vaut 0. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons montrer, en gardant les notations intuitives, pourquoi le changement de sens de la somme peut être utile. Sommons une fois dans un sens, et une fois dans l'autre :

$$\begin{array}{rcccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ fois.}}$

On a donc $2S = n(n+1)$, c'est-à-dire $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

En toute généralité, fixons pour $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$S = \sum_{k=0}^n a_k \quad (7)$$

On va inverser l'ordre de sommation. Pour cela, on fait le changement d'indice $[j = n - k]$. On obtient

$$S = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{j=0}^n a_{n-j} . \quad (8)$$

k	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
j	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1	0

Si l'on écrit les sommes de manière intuitive on remarque que l'on a juste commencé par la fin :

- l'écriture (7) correspond à $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$,
- l'écriture (8) correspond à $S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$.

Exemple 40

Par exemple, calculons $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.

On peut remarquer que, si on sépare les sommes, le deuxième dénominateur est descendant. On peut avoir l'idée de changer l'indice pour les comparer. On pose $l = n + 1 - k$. Quand $k = 1$, alors $l = n$ et quand $k = n$, alors $l = 1$. On obtient donc

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{l=1}^n \frac{1}{l} = 0 .$$

9.3 SOMMES RECTANGULAIRES

Que se passe-t-il quand on multiplie 2 sommes ? Posons n, m deux entiers naturels et $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j &= (a_1 + \dots + a_m)(b_1 + \dots + b_n) \\
&= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + a_1 b_n \\
&\quad + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_2 b_n \\
&\quad \vdots \\
&\quad + a_m b_1 + a_m b_2 + \dots + a_m b_n \\
&= \sum_{(i,j) \in I} a_i b_j, \text{ où } I = \llbracket 0, m \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket
\end{aligned}$$

que l'on note $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j$. En effet, on a bien un produit $a_i b_j$ pour chaque (double) indice dans I

$i \backslash j$	1	2	...	n
1	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	...	$a_1 b_n$
2	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	...	$a_2 b_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	$a_m b_1$	$a_m b_2$	...	$a_m b_n$

Proposition 17 : Produit de deux $\sum$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Pour tous $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j.$$

Interversions de sommes

Comme l'ensemble de double indices à l'arrivée $I = \llbracket 0, m \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$ ne dépend du sens des sommes, Cela veut dire que l'on peut intervertir les sommes finies comme on le souhaite !

$$\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j = \sum_{j=1}^n b_j \times \sum_{i=1}^m a_i.$$

Exemple 41

Par exemple, le calcul de $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$, peut faire peur, mais est en fait quasi immédiat.

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exemple 42

De même,

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n} (j+1) = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+3)}{2} \\
&= \frac{n(n+3)}{4}.
\end{aligned}$$

Les sommes obtenues, de la forme $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} z_{i,j}$, où $(z_{i,j})_{(i,j) \in I}$ est une famille de réels (ou complexes), sont appelées *sommes doubles*. Parfois les indices i et j ne sont pas sécables, comme par exemple dans la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{1}{i+j},$$

mais on garde le droit d'intervertir les sommes.

Proposition 18

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $I = \llbracket 0, m \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour toute famille de nombres $(z_{i,j})_{(i,j) \in I}$, on a

$$\sum_{(i,j) \in I} z_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} z_{i,j} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n z_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m z_{i,j} \right)$$

Preuve.

Le tableau des valeurs des $z_{i,j}$ est donné comme le précédent

$i \backslash j$	1	2	...	n
0	z_{11}	z_{12}	...	z_{1n}
1	z_{21}	z_{22}	...	z_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	z_{m1}	z_{m2}	...	z_{mn}

La proposition est démontrée, si l'on montre que sommer d'abord sur le premier ou sur le deuxième indice ne change rien à la somme finale. Mais en fait, Pour i fixé, la somme

$$\sum_{j=1}^n z_{i,j}$$

revient à sommer la i -ème ligne du tableau donc

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n z_{i,j} \right)$$

est la somme des lignes du tableau, donc de tous les $(z_{i,j})_{(i,j) \in I}$. Le même raisonnement dans l'autre sens montre la proposition. $\square$

Exemple 43

Soit $(a_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de réels. En écrivant

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \right),$$

la proposition précédente donne :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_i a_j$$

En écrivant alors $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ comme une union disjointe

$$\llbracket 1, n \rrbracket^2 = \{(k, k) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \cup \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j\} \cup \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i > j\}$$

on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i a_j$$

On constate alors que les deux dernières sommes ci-dessus sont égales. En effet, du fait que $a_i a_j = a_j a_i$, on passe de l'une à l'autre en échangeant les variables muettes i et j . Alors

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j .$$

9.4 SOMMES TRIANGULAIRES

$i \backslash j$	1	2	3	4	
1	1				→ 1
2	2	4			→ 6
3	3	6	9		→ 18
4	4	8	12	16	→ 40
	↓ 10	↓ 18	↓ 21	↓ 16	↘ 65

On peut essayer de calculer la somme des produits ij dont l'ensemble d'indexation I est l'ensemble des couples d'entiers (i, j) vérifiant:

$$1 \leq j \leq i \leq 4$$

Les valeurs sont données par le tableau ci-contre.

On souhaite calculer la somme des termes de cette famille, que l'on note

$$S = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 4} ij .$$

Présentons deux manières naturelles de calculer cette somme S :

- on peut sommer d'abord les termes de chaque ligne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues:

$$S = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^i ij \right) = 1 + 6 + 18 + 40 = 65$$

- on peut sommer d'abord les termes de chaque colonne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=j}^4 ij \right) = 10 + 18 + 21 + 16 = 65$$

On remarque alors que

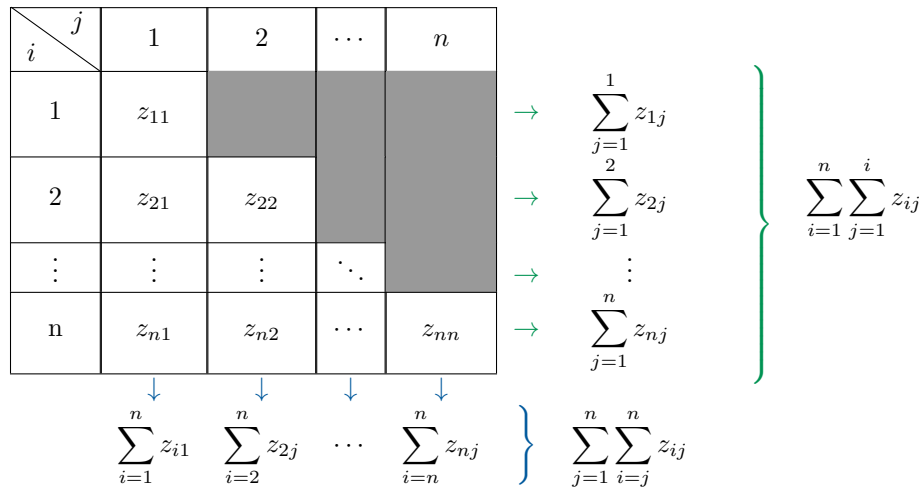
$$S = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 4} ij = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=j}^4 ij \right) = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^i ij \right)$$

Proposition 19

Pour toute famille $(z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de nombres, on a

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} z_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i z_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n z_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq j < i \leq n} z_{ij} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n z_{ij}$$

La preuve se fait exactement comme dans l'exemple. Je laisse le petit tableau explicatif.



⚠ ATTENTION Il est important de comprendre que, lorsqu'on écrit une somme triangulaire à l'aide de deux symboles $\sum$ imbriqués, c'est forcément l'ensemble parcouru par le second indice qui peut dépendre du premier, et JAMAIS l'inverse !

$$\sum_{i=1}^j \sum_{j=1}^n z_{ij}$$

n'a aucun sens car j n'a pas encore été défini avant la première somme !

Exemple 44

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on souhaite calculer la somme double

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}.$$

Sous cette forme le calcul est difficile car à i fixé, nous ne connaissons pas d'expression simple pour la somme

$$\sum_{j=i}^n \frac{1}{j}.$$

Intervertissons les deux symboles $\sum$.

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{j}$$

Et c'est tout de suite plus facile car $\frac{1}{j}$ ne dépend pas de i ! On a alors, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé,

$$\sum_{i=1}^j \frac{1}{j} = j \times \frac{1}{j} = 1.$$

d'où

$$S = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

Exemple 45

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
 \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min\{i, j\} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \min(i, j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \min(i, j) + \sum_{i=j+1}^n \min(i, j) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i + \sum_{i=j+1}^n j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j(j+1)}{2} + j \cdot (n-j) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{-j^2}{2} + \frac{(2n+1)j}{2} \right) \\
 &= \frac{-(2n+1)n(n+1)}{12} + \frac{(2n+1)n(n+1)}{4} = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

9.5 INTERVERSIONS DE PRODUITS

Les notations et les preuves sont similaires à celles des sommes.

Proposition 20 : Permutation des produits

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour toute famille $(z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de nombres, on a

- *Produits rectangulaires*

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} z_{ij} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n z_{ij} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n z_{ij} ,$$

- *Produits triangulaires*

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} z_{ij} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j z_{ij} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n z_{ij} ,$$

- *Produits triangulaires stricts*

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} z_{ij} = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} z_{ij} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n z_{ij}$$

Exemple 46

On a par exemple, $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n ij = \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^n = (n!)^{2n} .$

9.6 QUELQUES SOMMES ET PRODUITS USUELS

Nous allons voir quelques résultats à connaître et à savoir démontrer. On suppose connu le vocabulaire des suites numériques. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

Proposition 21 : Télescopage

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. On appelle **somme télescopique** toute somme de la forme

$$\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

Supposons de plus que $u_k \neq 0$ pour tout $k \in \llbracket p, n \rrbracket$. On appelle **produit télescopique** tout produit de la forme

$$\prod_{k=p}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$$

Preuve. C'est un calcul direct. On a

$$\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = (u_{n+1} - u_n) + (u_n - u_{n-1}) + \cdots + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+1} - u_p)$$

$$= u_{n+1} + (-u_n + u_n) + \cdots + (-u_{p+1} + u_{p+1}) - u_p$$

$$= u_{n+1} - u_p$$

$$\text{et } \prod_{k=p}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{p+1}}{u_p} \cdot \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$= \frac{1}{u_p} \cdot \frac{u_{p+1}}{u_{p+1}} \cdots \frac{u_n}{u_n} \cdot u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$$

□

Exemple 47

Calculons la somme $\sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{k+1}{k+2} \right)$. En séparant, on a

$$\sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{k+1}{k+2} \right) = \sum_{k=0}^n \ln(k+1) - \ln(k+2) = \ln(1) - \ln(n+2) = -\ln(n+2).$$

Car la somme est télescopique !

Proposition 22 : Somme d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}.$$

Pour retenir

Vous pouvez retenir

$$\text{Somme d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

Preuve. On a, par télescopage :

$$(1 - q) \sum_{k=p}^n q^k = \sum_{k=p}^n (q^k - q^{k+1}) = q^p - q^{n+1}$$

Par conséquent, si $q \neq 1$, alors :

$$\sum_{k=p}^n q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad \text{et en particulier pour } p = 0 \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Proposition 23 : Somme des premiers carrés*Pour $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Preuve. Prouvez le par récurrence ! □**Exemple 48**Calculons la somme $\sum_{k=0}^n \frac{5}{2^k} + 5k^2 - 1$.

On sépare les sommes, qui sont toutes calculables.

$$\sum_{k=0}^n \frac{3}{2^k} + 5k^2 - 1 = 3 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} + 5 \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n 1 = 3 \times \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} + 5 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1),$$

d'où $\sum_{k=0}^n \frac{5}{2^k} + 5k^2 - 1 = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) + \frac{(n+1)(10n^2 + 5n - 6)}{6}.$

Proposition 24 : Factorisation de $a^n - b^n$ *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :*

$$a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Preuve. On part du membre de droite de l'égalité. C'est plus simple !

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k})$$

On reconnaît alors une somme télescopique qui vaut $a^n b^0 - a^0 b^n$, donc $a^n - b^n$. □**Exemple 49****Trouvons le chiffre des unités de $23^n - 13^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.**On utilise la formule de factorisation de $a^n - b^n$, et on a $23^n - 13^n = (23 - 13) \sum_{k=0}^{n-1} 23^k 13^{n-1-k} = 10 \sum_{k=0}^{n-1} 23^k 13^{n-1-k}.$ Le nombre $\sum_{k=0}^{n-1} 23^k 13^{n-1-k}$ étant un entier positif, $23^n - 13^n$ admet 0 comme chiffre des unités.

10 COEFFICIENTS BINOMIAUX

Prenons a et b deux nombres complexes et développons :

$$(a + b)^0 = 1,$$

$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Les coefficients du développement de $(a+b)^n$ sont ceux du triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							$\ddots$

On les appelle les **coefficients binomiaux** notés dans la suite $\binom{n}{k}$.

Définition 10

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on appelle **coefficient binomial** le nombre

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si : } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est le nombre de façons de choisir k objets parmi n .

Cas particuliers

Autre expression pour $k \in \mathbb{N}$, après simplification des factorielles :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 25 : Propriétés des coefficients binomiaux

- ① **Symétrie** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- ② **Formule du pion** Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$.
- ③ **Formule de Pascal** Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.
- ④ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Preuve.

- ① • Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors changer k en $n-k$ ne change pas la valeur de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;
 • si $k < 0$ ou $k > n$, alors $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ sont tous les deux nuls par convention.

- ② Si k est strictement supérieur à n ,

$$\binom{n}{k} = 0 = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Dans le cas contraire :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- ③ Si k est strictement négatif ou strictement supérieur à $n + 1$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = 0 + 0 = 0 = \binom{n+1}{k}.$$

Si k vaut 0 ou $n + 1$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k}.$$

Enfin, si k est compris entre 1 et n ,

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1} &\stackrel{(2)}{=} \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} \\ &= \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

- ④ Nous allons montrer par récurrence la proposition : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si : } k = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ donc $\binom{0}{k} \in \mathbb{N}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Aussitôt pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$ et $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, donc par somme d'après la formule de Pascal : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

□

Exemple 50

Montrons, par récurrence sur n , que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$.

Initialisation. Le résultat est évident pour $n = 0$ car $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'égalité est vérifiée au rang n et montrons-la au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{p} &= \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p} + \binom{p+n+1}{p} \\ &= \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} = \binom{p+n+2}{p+1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Proposition 26 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Preuve. Procédez par récurrence, en utilisant la formule de Pascal.

□

Exemple 51

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$.

De même, Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n$.

Exemple 52

Simplifions la somme $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

On utilise la formule du pion pour "manger" le k , et on utilise l'exemple précédent.

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n 2^{n-1} .$$