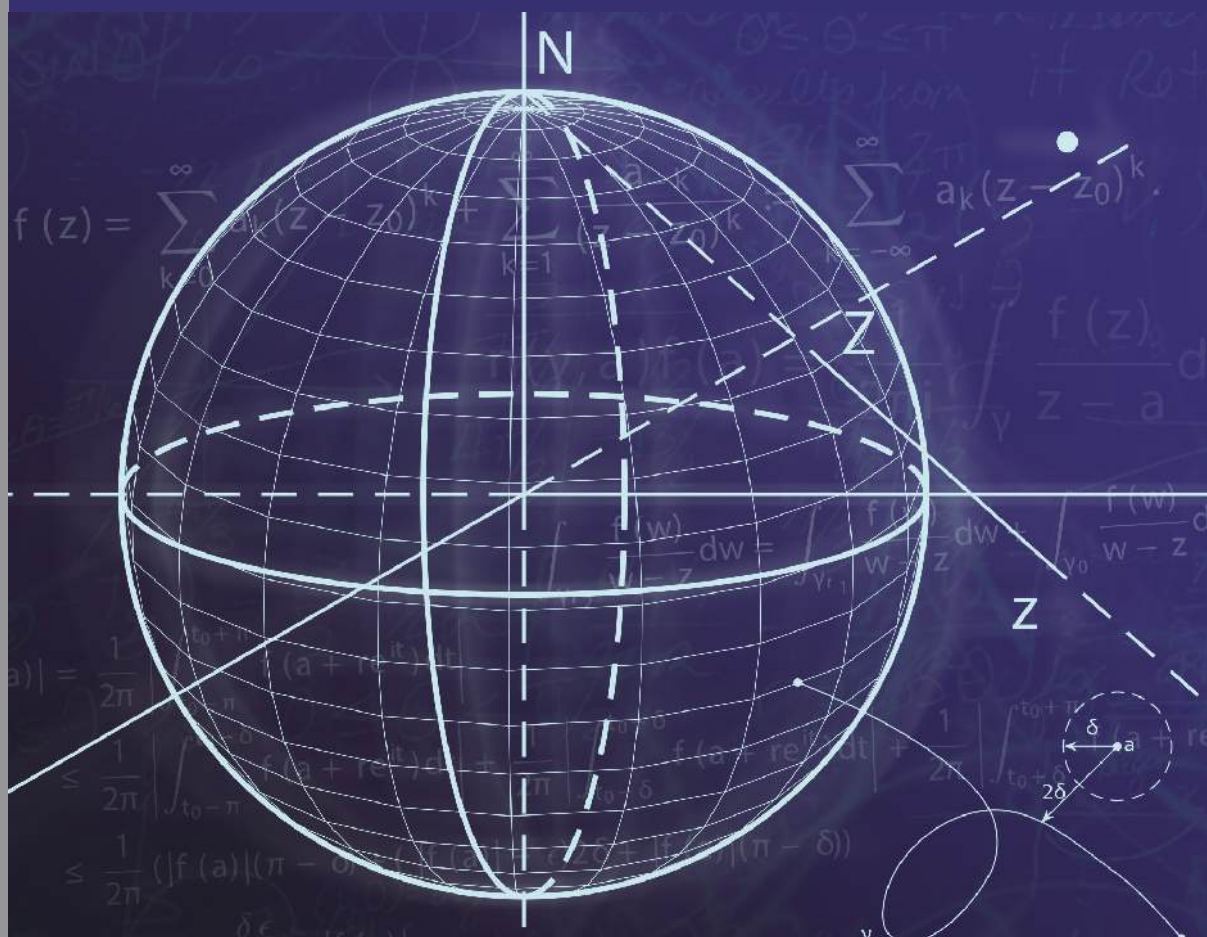


Primeros conceptos de Análisis Complejo



[2018] LIBROS DE TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Primeros conceptos de Análisis Complejo

*David E. FERREYRA
Luciano J. GONZÁLEZ
Fabián E. LEVIS
(Autores)*

LIBROS DE TEXTO PARA ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Primeros conceptos de Análisis Complejo

David E. FERREYRA, Luciano J. GONZÁLEZ, Fabián E. LEVIS
(Autores)

Octubre de 2018, Santa Rosa, La Pampa.

Edición: Melina Caraballo.

Diseño y Maquetado: Gastón Moisés (Diseño-EdUNLPam).

© Cumplido con lo que marca la ley 11.723

La reproducción total o parcial de esta publicación, no autorizada por los editores, viola los derechos reservados. Cualquier utilización debe ser previamente autorizada.

EdUNLPam - Año 2018

Cnel. Gil 353 PB - CP L6300DUG

SANTA ROSA - La Pampa - Argentina

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PAMPA

Rector: Oscar Daniel Alpa

Vicerrectora: Nilda Verónica Moreno

EdUNLPam

Presidente: María Claudia Trotta

Director: Rodolfo Rodríguez

Consejo Editor

María Marcela Domínguez

Victoria Aguirre

Daniel Eduardo Buschiazzo

María Estela Torroba / Liliana Campagno

Celia Rabotnikof

Yamila Magiorano / Edit Alvarellos

Paula Laguarda / Marisa Elizalde

Graciela Visconti

Mónica Boeris / Ricardo Tosso

Griselda Cistac / Raúl Alvarez

Prólogo	9
1. Números Complejos	11
1.1. Un poco de historia	12
1.2. Introducción a los números complejos. Forma binómica	14
1.3. Operaciones con números complejos	15
1.4. El conjugado de un número complejo	17
1.5. Módulo y argumento de un número complejo	18
1.6. Formas polar y trigonométrica de un número complejo	20
1.7. Conjuntos en el plano complejo	22
1.8. El plano complejo extendido	24
Ejercicios propuestos	26
2. Topología en el Plano Complejo	29
2.1. Conjuntos abiertos y cerrados. Puntos de acumulación	31
2.2. Sucesiones	34
2.3. Funciones continuas	37
2.4. Conjuntos conexos	43
2.5. Conjuntos arco-conexos	46
2.6. Conjuntos compactos	48
Ejercicios propuestos	51
3. Series de Potencias	55
3.1. Series	57
3.2. Series de potencias	62
Ejercicios propuestos	65
4. Funciones Elementales y Analíticas	69
4.1. La derivada	71
4.2. Las ecuaciones de Cauchy - Riemann	74
4.3. Analiticidad de series de potencias	78

4.4.	Funciones complejas elementales	81
4.4.1.	Función exponencial compleja	81
4.4.2.	Funciones trigonométricas complejas	83
4.4.3.	El logaritmo complejo	85
4.4.4.	Potencias complejas	88
4.5.	Funciones armónicas	90
4.6.	Aplicaciones conformes	92
4.6.1.	Conservación de Ángulos	92
4.6.2.	Transformaciones de Möbius	93
	Ejercicios propuestos	98
5.	Integración compleja	103
5.1.	Integral sobre intervalos reales	105
5.2.	Integral sobre curvas	107
5.3.	Teorema de Cauchy	115
5.4.	Índice de una curva cerrada	127
5.5.	La representación integral de Cauchy	128
5.6.	Consecuencias del Teorema de Cauchy	132
5.7.	Principio del módulo máximo	134
	Ejercicios propuestos	136
6.	Series de Taylor y de Laurent	139
6.1.	Series de funciones. Convergencia	141
6.2.	Series de Taylor	143
6.3.	Principio de prolongación analítica	146
6.4.	Series de Laurent	148
	Ejercicios propuestos	153
7.	Singularidades	155
7.1.	Clasificación de singularidades	157
7.2.	Residuos	161
	Ejercicios propuestos	167
A.	Apéndice. Límites superiores e inferiores de sucesiones reales	169
A.1.	Definición y propiedades	171
	Índice de figuras	175
	Índice alfabético	177
	Índice de símbolos	181
	Bibliografía	183

Prólogo

El análisis complejo clásico es un área que ha sido desarrollada principalmente a partir del siglo XIX. Esta área de la matemática no ha detenido su desarrollo allí sino que ha continuado creciendo desde entonces. En la actualidad existen importantes trabajos de investigación sobre temas correspondientes al análisis complejo, como así también investigaciones relacionadas a otras áreas del conocimiento que hacen uso de los temas y resultados de este, como por ejemplo en el campo de la Física.

Este libro está basado en las notas de clase que los autores redactaron para los cursos de Análisis III, de la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, y de Variable Compleja y Análisis de Fourier, de la carrera de Licenciatura en Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto. Los resultados expuestos en este libro corresponden a un curso introductorio de la teoría de funciones de una variable compleja, y como tal se busca transmitir al estudiante la habilidad para calcular límites, derivadas, integrales, series de potencias, la comprensión intuitiva y su relación con otras ramas de la matemática, todo esto con el fin de prepararlos para cursos posteriores.

Es nuestra intención en este material, poner el acento en el rigor de las deducciones y en los aspectos conceptuales, sin dejar de lado la intuición de los estudiantes acerca de los conceptos del análisis complejo. Esto es, tratar de que el/la estudiante se convenza de que la precisión y el rigor no constituyen ni obstáculos para la intuición ni tampoco fines en sí mismos, sino simplemente el medio natural para formular y tratar las cuestiones matemáticas. Aunque ésto implique mucho trabajo tanto para el profesor como para el estudiante, creemos que a futuro tiene, en el mejor entendimiento del tema, su recompensa, tanto para el que está interesado en las aplicaciones como para el que desee introducirse en las matemáticas superiores.

Los temas desarrollados en este libro son bien conocidos y están basados en varios textos clásicos, los que a nuestro entender dan más rigurosidad y comprensión del tema, pero que al mismo tiempo, no escapan de nuestro objetivo principal que es brindar un texto introductorio.

Los contenidos están desarrollados en 7 capítulos. En el capítulo 1 introducimos los números complejos, operaciones de suma y producto entre ellos, que le dan

una estructura de cuerpo, y sus propiedades algebraicas más relevantes. Otras nociones importantes que estudiaremos son la de módulo y argumento de un número complejo.

El capítulo 2 está dedicado al estudio de las nociones topológicas en el plano complejo. Como podemos identificar isomórficamente a \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , muchas de las nociones consideradas aquí son similares o totalmente análogas a las nociones topológicas estudiadas en el plano real \mathbb{R}^2 en un curso de análisis en varias variables.

En el capítulo 3 tratamos algunos hechos elementales sobre series infinitas en \mathbb{C} que tienen una gran analogía a series infinitas en \mathbb{R} . Seguidamente, damos la definición y propiedades básicas de una serie de potencias, y desarrollamos algunas herramientas esenciales sobre estas.

En el capítulo 4 estudiamos el concepto de función analítica, el cual podría definirse, a grandes rasgos, como el tema principal de estudio del análisis complejo. Para ello desarrollaremos el concepto de diferenciabilidad de funciones complejas y luego nos enfocaremos en algunas de las funciones complejas elementales más usuales. Además, introduciremos el concepto de aplicaciones conformes y en particular hacemos hincapié en una de ellas llamadas Transformaciones de Möbius.

En el capítulo 5 mostramos uno de los resultados principales de este texto, conocido como el Teorema de Cauchy, el cual es central en el desarrollo subsiguiente de la teoría y sus aplicaciones, tales como el Teorema de Liouville, el Teorema de Morera, el Teorema Fundamental del Álgebra, entre otros.

En el capítulo 6 retornamos con los tópicos de series, más precisamente series de funciones. Estas herramientas nos permiten concentrarnos en las series de Taylor y de Laurent. También mostraremos un resultado fundamental en la teoría de funciones de una variable compleja conocido como el Principio de Prolongación Analítica.

En el capítulo 7 prestaremos especial interés al comportamiento de las funciones que no son diferenciables en un punto pero sí en un entorno suyo. En conexión con estos tópicos, incluimos el Teorema de los Residuos y sus aplicaciones al cálculo de integrales impropias.

Capítulo **1**

Números Complejos

El objetivo de este primer capítulo es introducir los *números complejos*, operaciones de suma y producto entre ellos que le dan una estructura de cuerpo, y sus propiedades algebraicas más relevantes. Otras nociones importantes que estudiaremos son la de módulo y argumento de un número complejo. Muchas de las demostraciones a las afirmaciones de este capítulo no son dadas ya que no representan dificultad y son un buen ejercicio para el estudiante que se inicia en el estudio del análisis complejo.

1.1. Un poco de historia

La primera referencia conocida para calcular raíces cuadradas de números negativos proviene del trabajo de los matemáticos griegos, como Herón de Alejandría en el siglo I antes de Cristo, como resultado de una imposible sección de una pirámide.

Los complejos se hicieron más patentes en el Siglo XVI, cuando la búsqueda de fórmulas que dieran las raíces exactas de los polinomios de grados 2 y 3 fueron encontradas por matemáticos italianos como Tartaglia y Cardano. Aunque solo estaban interesados en las raíces reales de este tipo de ecuaciones, se encontraban con la necesidad de lidiar con raíces de números negativos. El término imaginario para estas cantidades fue acuñado por Descartes en el Siglo XVII, debido a que eran considerados como fantasmas de otro mundo, por carecer de representación real.

En 1796, Wessel escribió su primer y único documento matemático en el cual expresaba la interpretación geométrica de los números complejos y lo presentó en una reunión de la Real Academia Danesa el 10 de marzo de 1797. La existencia de los números complejos fue recién aceptada después de 1799, momento en que este documento fue publicado, y luego de ser redescubierto y popularizado por Gauss unos años después. La implementación más formal, con pares de números reales fue dada en el Siglo XIX.

1.2. Introducción a los números complejos. Forma binómica

Supongamos que queremos resolver la ecuación

$$x^2 + 1 = 0. \quad (1.1)$$

Nos encontramos entonces que $x^2 = -1$ y no existe ningún número real que verifique tal condición. Introducimos entonces un nuevo número i de manera que verifique la ecuación (1.1), esto es,

$$i^2 = -1.$$

Este número, del que todavía no hemos apuntado sentido alguno, debe satisfacer las propiedades algebraicas usuales de suma y producto de números reales. Entonces, las siguientes identidades se verifican: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i i^2 = -i$, $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$, y a partir de estas todas las potencias se repiten, teniéndose que

$$i^n = i^k, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

donde k es el resto de la división de n por 4, es decir $n = 4l + k$ con $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $0 \leq k \leq 3$.

Definición 1.2.1. Definimos un *número complejo* como una expresión de la forma $z = a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Dicha manera de escribir un número complejo se denomina *forma binómica*. Llamaremos a a la *parte real* de z y lo denotaremos por $\operatorname{Re}(z) = a$ y a b lo llamaremos la *parte imaginaria* de z y lo denotaremos por $\operatorname{Im}(z) = b$.

De esta manera, si operamos formalmente tenemos que las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ son

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}i}{2} = 1 \pm i,$$

con lo que puede resolverse cualquier ecuación algebraica de grado dos.

Si la parte imaginaria de un número complejo es nula, éste resulta un número *real*, mientras que si la parte real es nula, el número complejo es llamado *imaginario puro*.

Observemos que si $z = a + bi$ y $w = c + di$ son números complejos y tenemos que $a + bi = c + di$, entonces usando las leyes ordinarias del cálculo algebraico obtenemos que $a - c = (d - b)i$. Luego elevando al cuadrado ambos miembros nos queda que $(a - c)^2 = (d - b)^2 i^2$. Con lo cual $(a - c)^2 = -(d - b)^2$. Pero esto solo es posible si $a = c$ y $b = d$. Por lo tanto, podemos identificar los números complejos como pares ordenados de \mathbb{R}^2 donde la parte real sea el eje x y la parte imaginaria sea el eje y (véase la Figura 1.1). El conjunto de todos los números complejos lo denotaremos por \mathbb{C} y es evidente que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Esta extensión de los números reales a la de los números complejos es la más natural si se quiere que toda ecuación polinómica tenga raíces.

1.3. Operaciones con números complejos

Vamos a dotar al conjunto de los números complejos de dos operaciones, una llamada suma y la otra producto, de tal manera que el conjunto \mathbb{C} con estas operaciones tenga estructura de cuerpo conmutativo en el cual \mathbb{R} sea un subcuerpo de él.

Para definir la suma tomamos como idea la identificación hecha anteriormente de \mathbb{C} con el plano real.

Definición 1.3.1. Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos su suma como $z + w = (a + c) + (b + d)i$ (véase la Figura 1.2).

Atendiendo a la definición de suma de vectores en el plano real, las propiedades de la suma son las siguientes.

Proposición 1.3.2. La suma verifica las siguientes propiedades:

(S1) **Propiedad conmutativa.** Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $z + w = w + z$.

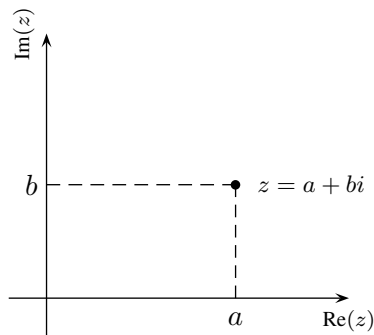


Figura 1.1: El plano complejo.

- (S2) **Propiedad asociativa.** Si $z, w, v \in \mathbb{C}$, entonces $(z + w) + v = z + (w + v)$.
- (S3) **Propiedad del elemento neutro.** El número complejo $0 = 0 + 0i$, es el elemento *neutro para la suma*, es decir, si $z \in \mathbb{C}$ entonces $z + 0 = z$.
- (S4) **Propiedad del opuesto.** Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, existe su elemento *simétrico* $-z = -a + (-b)i$, que también escribiremos $-z = -a - bi$ (véase la Figura 1.3).

Con estas cuatro propiedades se dice que $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano.

Demostración. Las demostraciones son obvias y se dejan al lector.

En la Figura 1.4 se muestra la representación geométrica de la suma de un número complejo z y la del opuesto de un número complejo w . En este caso, como es usual, llamaremos a $z + (-w)$ la diferencia de z y w y lo denotaremos simplemente por $z - w$.

Es importante darnos cuenta que cuando los números complejos no tienen parte imaginaria, entonces la suma de números complejos es la suma de números reales que ya conocemos. Por lo tanto, $(\mathbb{R}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{C}, +)$.

Esta última idea la tendremos también en cuenta a la hora de definir el producto de números complejos.

Definición 1.3.3. Dados los números complejos $z = a + bi$ y $w = c + di$, definimos su producto como $zw = (a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$.

Como puede observarse, si tanto b como d son nulos, recuperamos el producto usual de los números reales.

Proposición 1.3.4. El producto verifica las siguientes propiedades:

- (P1) **Propiedad conmutativa.** Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $zw = wz$.

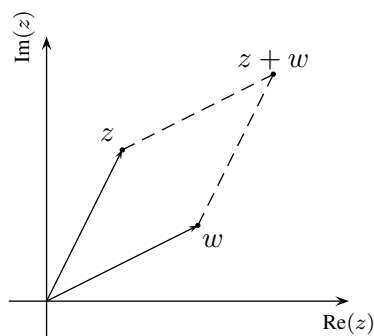


Figura 1.2: Suma geométrica de números complejos.

(P2) **Propiedad asociativa.** Si $z, w, v \in \mathbb{C}$, entonces $(zw)v = z(wv)$.

(P3) **Propiedad del elemento neutro.** El número complejo $1 = 1 + 0i$, es el elemento *neutro para el producto*, es decir, si $z \in \mathbb{C}$ entonces $1z = z$.

(P4) **Propiedad del inverso.** Si $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, existe su elemento *inverso*

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

(P5) **Propiedad distributiva.** Si $z, w, v \in \mathbb{C}$, entonces $z(w + v) = zw + zv$.

Demostración. Las demostraciones son obvias y se dejan al lector.

Con las propiedades (S1)-(S4) y (P1)-(P5) se verifica que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo y del cual $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un subcuerpo.

Como es usual, se pueden definir las potencias enteras de números complejos como sigue. Primero procedemos de manera inductiva para todos los números enteros no negativos de la siguiente manera:

$$z^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ z^{n-1} z & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Ahora si n es un entero negativo, entonces $z^n = (z^{-n})^{-1}$.

1.4. El conjugado de un número complejo

Definición 1.4.1. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos su complejo *conjugado* como $\bar{z} = a - bi$ (véase la Figura 1.5).

La demostración de las siguientes propiedades son obvias y se dejan al lector.

Proposición 1.4.2. El conjugado tiene las siguientes propiedades:

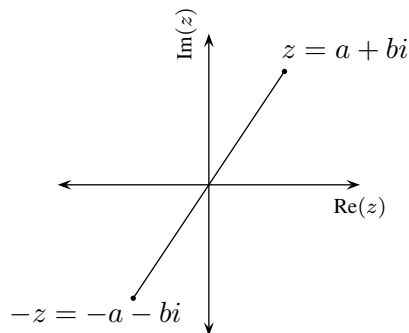


Figura 1.3: Opuesto de un número complejo.

(C1) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{\overline{z}} = z$.

(C2) Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

(C3) Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $\overline{z\overline{w}} = \overline{z}w$.

(C4) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z)$ y $z - \overline{z} = 2\text{Im}(z)i$.

(C5) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $z\overline{z} \in \mathbb{R}$.

(C6) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $z = \overline{z}$.

El uso del conjugado es muy útil en algunas ocasiones. Por ejemplo, si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenemos que su elemento inverso puede escribirse como

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}}.$$

1.5. Módulo y argumento de un número complejo

Ya vimos que los números complejos pueden identificarse con el plano \mathbb{R}^2 . En virtud de esta identificación, a todo número complejo $z \neq 0$ podemos asociarle un módulo y un argumento o ángulo que forma el vector determinado por el número complejo con el eje real.

Definición 1.5.1. Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos su *módulo* como $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposición 1.5.2. El módulo tiene las siguientes propiedades:

(M1) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $|z| \geq 0$. Además $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.

(M2) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $|z|^2 = z\overline{z}$.

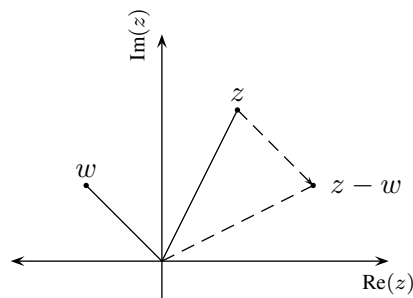


Figura 1.4: Diferencia de números complejos.

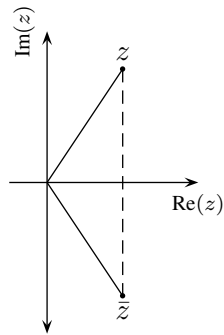


Figura 1.5: Conjugado de un número complejo.

(M3) Si $z \in \mathbb{C}$, entonces $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

(M4) Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|zw| = |z||w|$.

(M5) Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$.

(M6) Si $z, w \in \mathbb{C}$ tal que $z \neq 0$, entonces $\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{|z|}$.

(M7) **Desigualdad de Cauchy-Schwarz.** Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|\operatorname{Re}(zw)| \leq |z||w|$ y $|\operatorname{Im}(zw)| \leq |z||w|$.

(M8) **Desigualdad triangular.** Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demostración. Las demostraciones de (M1)-(M6) son obvias y se dejan al lector. Para ver (M7), observar que por (M3) y (M4) tenemos

$$|\operatorname{Re}(zw)| \leq |zw| = |z||w| \quad \text{y} \quad |\operatorname{Im}(zw)| \leq |zw| = |z||w|.$$

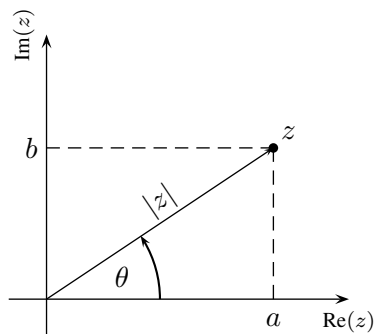


Figura 1.6: Módulo y argumento de un número complejo.

Finalmente, (M8) sigue de las Proposiciones 1.3.2, 1.3.4, 1.4.2, (M2) y (M7). En efecto, como

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w = |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

tomando raíz cuadrada a ambos miembros obtenemos la prueba.

Pasemos a continuación a introducir el argumento de un número complejo.

Definición 1.5.3. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un número real θ se dice un *argumento* de z si se verifica que

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(z) = |z| \operatorname{sen}(\theta).$$

Observar que si θ es un argumento de z , cualquier múltiplo de 2π más θ también es un argumento, por lo que el conjunto de los argumentos será

$$\begin{aligned} \arg(z) &= \{\theta \in \mathbb{R} : \operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta), \operatorname{Im}(z) = |z| \operatorname{sen}(\theta)\} \\ &= \{\operatorname{Arg}(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

donde $\operatorname{Arg}(z)$ denotará el único argumento comprendido entre $(-\pi, \pi]$, llamado *argumento principal*.

Es inmediato ver que en cada intervalo de la forma $(\alpha, \alpha + 2\pi]$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, hay un único argumento de un complejo no nulo. Este número es denotado por $\arg_\alpha(z)$.

1.6. Formas polar y trigonométrica de un número complejo

Cuando definimos el producto entre números complejos se habrá notado que no dimos una interpretación geométrica de este, como sí lo hicimos para la suma. Recordemos que la fórmula para el producto es dada por

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad - bc)i.$$

El lado derecho de esta expresión, resulta realmente difícil de interpretar usando el sistema de coordenadas cartesianas. Para solventar este problema, requerimos el uso de otro sistema de coordenadas. Veremos como la trigonometría nos servirá de herramienta para resolver este problema.

Sea $z = a + bi \neq 0$. Por la Definición 1.5.3 sabemos que $a = |z| \cos(\theta)$ y $b = |z| \sin(\theta)$, siendo θ un argumento de z (véase la Figura 1.6). Entonces, z se puede escribir como

$$z = |z| \cos(\theta) + |z| \sin(\theta)i = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)i).$$

Definición 1.6.1. Un número complejo $z \neq 0$ se dice que está en *forma polar* si $z = |z|_\theta$ con $\theta \in \arg(z)$. Se dice que esta en *forma trigonométrica* si se escribe como $z = |z|e^{i\theta}$ con $\theta \in \arg(z)$, donde $e^{i\theta}$ es una abreviación de $\cos(\theta) + \sin(\theta)i$, esto es, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)i$. Esta última igualdad es llamada la *fórmula de Euler*.

Ambas formas tratan de escribir el número complejo dependiendo de su módulo y su argumento, al igual que las coordenadas polares en \mathbb{R}^2 . La elección del símbolo $e^{i\theta}$ para denotar $\cos(\theta) + \sin(\theta)i$ no es arbitraria y quedará justificada en la subsección 4.4.1 del Capítulo 4.

Las formas polar y trigonométrica son útiles para trabajar con el producto, potencias y raíces de números complejos, como veremos a continuación. Sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\theta \in \arg(z)$ y $\varphi \in \arg(w)$. Si los multiplicamos en forma trigonométrica tenemos que

$$\begin{aligned} zw &= |z|e^{i\theta}|w|e^{i\varphi} \\ &= |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)i)|w|(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) \\ &= |z||w|(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + (\cos(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\varphi)\sin(\theta))i) \\ &= |z||w|(\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta + \varphi)i) \\ &= |z||w|e^{i(\theta + \varphi)} \end{aligned}$$

En forma polar, hacer una multiplicación de números complejos es básicamente multiplicar los módulos y sumar los argumentos, esto es

$$zw = (|z||w|)_{\theta + \varphi}.$$

Con lo cual, ahora es más sencillo interpretar geoméricamente el producto de números complejos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.6.2. Consideremos los números complejos $z = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $w = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$. Entonces, $zw = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (véase la Figura 1.7).

Observemos que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $z^n = (|z|^n)_{n\theta}$ y si $w \neq 0$, $\frac{z}{w} = \left(\frac{|z|}{|w|}\right)_{\theta - \varphi}$.

Igualmente si n es un entero negativo, tenemos que $z^n = (|z|^n)_{n\theta}$.

Las coordenadas polares también son útiles para obtener las raíces n -ésimas de un número complejo. Sea $n \in \mathbb{N}$, si $z \neq 0$, tenemos que $w = z^{\frac{1}{n}}$ si y solo si $z = w^n$. Entonces

$$(|w|^n)_{n\varphi} = w^n = z = |z|_\theta, \quad \text{donde } \theta \in \arg(z) \quad \text{y} \quad \varphi \in \arg(w).$$

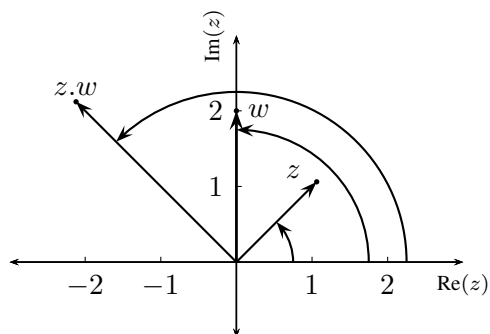


Figura 1.7: Producto de números complejos.

De aquí,

$$|w| = |z|^{\frac{1}{n}} \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, si $k \notin \{0, 1, \dots, n-1\}$ tenemos que $k = nl + p$, donde $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Así

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2(nl + p)\pi}{n} = \frac{\theta + 2p\pi}{n} + 2l\pi,$$

con lo que todos los argumentos de las raíces son

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Por lo tanto, las raíces n -ésimas de z son

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(|z|^{\frac{1}{n}} \right)_{\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.2)$$

Ejemplo 1.6.3. Encontramos las raíces quintas del número complejo $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Aplicando la fórmula de la ecuación (1.2), obtenemos que las cinco raíces de z son (véase la Figura 1.8).

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{15}}, \quad w_1 = e^{i\frac{7}{15}\pi}, \quad w_2 = e^{i\frac{13}{15}\pi}, \quad w_3 = e^{i\frac{19}{15}\pi}, \quad w_4 = e^{i\frac{5}{3}\pi}.$$

1.7. Conjuntos en el plano complejo

Denotemos por L a una línea recta en \mathbb{C} . De la geometría analítica elemental, sabemos que L está determinada por un punto en L y un vector dirección. Así, si $w \in L$ y $v \neq 0$ es su vector dirección, tenemos

$$L = \{z \in \mathbb{C} : z = w + tv, t \in \mathbb{R}\} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im} \left(\frac{z - w}{v} \right) = 0 \right\}.$$

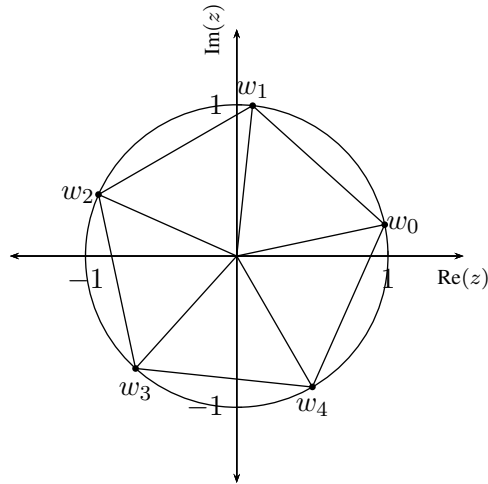


Figura 1.8: Raíces quintas de $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$.

Veamos ahora qué representan los conjuntos

$$H_w := \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im} \left(\frac{z-w}{v} \right) > 0 \right\} \text{ y } K_w := \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im} \left(\frac{z-w}{v} \right) < 0 \right\}.$$

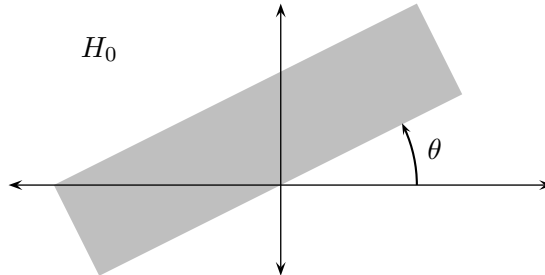


Figura 1.9: Semiplano H_0 .

Consideremos primero el caso $w = 0$ y supongamos que $v = |v|e^{i\varphi}$. Si $z = |z|e^{i\theta}$, entonces

$$\frac{z}{v} = \left(\frac{|z|}{|v|} \right) e^{i(\theta - \varphi)}.$$

Luego, $\text{Im} \left(\frac{z}{v} \right) > 0$ si y solo si $\text{sen}(\theta - \varphi) > 0$, esto es cuando $\varphi < \theta < \pi + \varphi$. Entonces H_0 es un semiplano limitado por la recta $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im} \left(\frac{z}{v} \right) = 0\} := L$. Más precisamente, el semiplano que queda a la izquierda cuando camino a lo largo de la recta L en la dirección de v .

Es fácil ver que $H_w = w + H_0 = \{w + v : v \in H_0\}$, es decir H_w es la traslación de H_0 por w . Por lo tanto, H_w es un semiplano que vive a la izquierda de L . De manera similar, K_w es un semiplano que vive a la derecha de L .

Ahora introduciremos de manera breve otros objetos geométricos en el plano complejo que usaremos repetidamente a lo largo del libro.

Definición 1.7.1. Sean $w \in \mathbb{C}$ y $r, s > 0$. Llamaremos *disco abierto* de centro w y radio r al conjunto $D(w, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$. Llamaremos *disco cerrado* de centro w y radio r al conjunto $\overline{D}(w, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| \leq r\}$. Llamaremos *anillo* con centro en w de radios s y r , $s < r$, al conjunto $A(w, s, r) := \{z \in \mathbb{C} : s < |z - w| < r\}$. Llamaremos *disco punteado* con centro en w y radio r al conjunto $A(w, 0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - w| < r\}$.

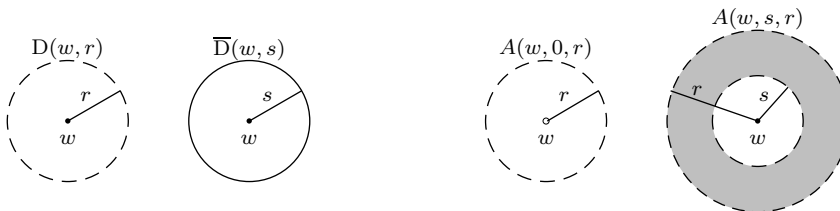


Figura 1.10: Discos y anillos

Observación 1.7.2. Observemos que los puntos sobre la circunferencia de centro w y radio r no pertenecen a $D(w, r)$, y $\overline{D}(w, r)$ contiene todos los puntos interiores de la circunferencia de centro w y radio r , más todos los puntos sobre ella. Además, $A(w, s, r) = D(w, r) \setminus \overline{D}(w, s)$.

1.8. El plano complejo extendido

En un curso de análisis real se define la recta real extendida como

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\},$$

de forma tal que las operaciones suma y producto en \mathbb{R} son extendidas a $\overline{\mathbb{R}}$ prolongando la relación de orden usual.

El caso complejo tendrá un desarrollo bastante similar. Como motivación, consideremos la proyección estereográfica, que consiste en proyectar el plano complejo \mathbb{C} , sobre la esfera unitaria

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

con la proyección de centro el polo norte, digamos $N = (0, 0, 1)$.

En la Figura 1.11 observamos que la imagen del punto $z \in \mathbb{C}$ se proyecta sobre la esfera en el punto $Z \in S^2$. También remarcamos que esta proyección es inyectiva, pero no es sobreyectiva ya que el polo norte no es imagen de ningún punto

del plano complejo. Si queremos que la proyección esteográfica sea biyectiva, debemos agregar un elemento a \mathbb{C} . Por otro lado, no es difícil observar que N es el límite de la proyección, cuando $|z| \rightarrow \infty$.

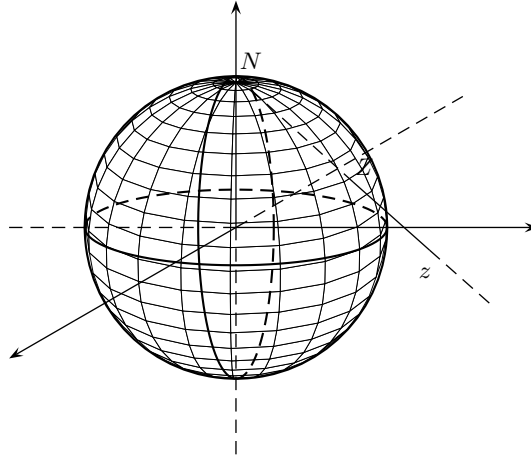


Figura 1.11: Proyección estereográfica.

Definición 1.8.1. Se define el *plano complejo extendido* como el conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Explicitemos ahora la proyección estereográfica. Sean

$$z = x + yi, \quad Z = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{y} \quad \{(1-t)x, (1-t)y, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

la recta que pasa por z y N . Para encontrar las coordenadas de Z debemos hallar el valor de t para el cual la recta interseca la esfera S^2 . Entonces

$$1 = (1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2 = (1-t)^2|z|^2 + t^2,$$

y por lo tanto $1 - t^2 = (1-t)^2|z|^2$. Como $z \neq \infty$ y $t \neq 1$, conseguimos

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Luego

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1},$$

o equivalentemente

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1} \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Por consiguiente la proyección estereográfica $\Pi: \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ está dada por

$$\Pi(z) = \begin{cases} \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{-i(z-\bar{z})}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Podemos ahora definir una métrica en \mathbb{C}_∞ de la siguiente manera.

Definición 1.8.2. Sean $z, w \in \mathbb{C}_\infty$, definimos una métrica en el plano complejo extendido por $d(z, w) = \|\Pi(z) - \Pi(w)\|_2$, donde $\|\cdot\|_2$ es la métrica euclídea en \mathbb{R}^3 definida por $\|(x_1, x_2, x_3)\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.1. Expresar los números complejos en la forma binómica.

- (a) $(2 + i)(4 + 3i)$; (c) $\frac{1 - i}{1 + i}$;
 (b) $(\sqrt{2} + i)((\sqrt{2} + 3i) + (\sqrt{2} - 4i))$; (d) $(4 + \sqrt[3]{3}i)^3$.

Ejercicio 1.2. Calcular el módulo, el argumento, las formas polar y trigonométrica de los siguientes números complejos.

- (a) $\frac{1}{3 + i}$; (d) $(\sqrt{3} - i)^6$;
 (b) $(\overline{1 + i})^2$; (e) $\frac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$;
 (c) $\frac{2 + i}{2 - i}$; (f) $\frac{i}{-2 - 2i}$.

Ejercicio 1.3. Hallar las partes reales e imaginarias de los siguientes números complejos.

- (a) $\frac{1}{z}$; (d) i^n , para $n \in \mathbb{Z}$;
 (b) $\frac{z - a}{z + a}$, con $a \in \mathbb{R}$ y $z \neq -a$; (e) $\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^n$, con $2 \leq n \leq 8$;
 (c) z^3 ; (f) z^{-2} .

Ejercicio 1.4. Representar gráficamente $z + w$ y $z - w$ si

- (a) $z = 2 - i$ y $w = 5$; (c) $z = \sqrt{2} + i$ y $w = -\sqrt{2} - 3i$.
- (b) $z = -3 - 2i$ y $w = -3 + 5i$;

Ejercicio 1.5. Determinar una ecuación de coeficientes reales cuyas soluciones en \mathbb{C} sean -3 , $2 + i$ y $2 - i$.

Ejercicio 1.6. Determinar un polinomio de coeficientes reales de grado 4 que tenga por raíces los números complejos $-4i$ y $-5 + 2i$.

Ejercicio 1.7. Resolver en \mathbb{R} y \mathbb{C} las siguientes ecuaciones

- (a) $z^4 + 3z^2 - 10 = 0$;
- (b) $z^3 + 5z^2 + 6z = 0$;
- (c) $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

Ejercicio 1.8. Demostrar que se verifican las siguientes desigualdades:

$$\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

Ejercicio 1.9. Sean z_1, z_2, \dots, z_n números complejos. Probar:

- (a) $|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n|$;
- (b) $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

Ejercicio 1.10. Probar las siguientes afirmaciones.

- (a) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$;
- (b) $\operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{2}(z - \bar{z})i$;
- (c) z es imaginario puro si y solo si $z = -\bar{z}$;
- (d) z es puramente real o imaginario si y solo si $z^2 = \bar{z}^2$;
- (e) Sean z, w dos números complejos no nulos tales que $|z+w| = |z-w|$. Probar que $\frac{z}{w}$ es imaginario;
- (f) Consideremos el número complejo: $z = x + yi = \frac{1}{2+\cos(\theta)+isen(\theta)}$. Probar que cuando θ varía en los números reales, z se mueve sobre la circunferencia cuyo diámetro es el segmento que une los puntos $(\frac{1}{3}, 0)$ y $(1, 0)$.

Ejercicio 1.11. Probar

- (a) $||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|$;
- (b) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ (**Ley del Paralelogramo**).

Ejercicio 1.12. Indicar si es verdadero o falso el enunciado siguiente, razonando la respuesta. Si z y $w \in \mathbb{C}$, de módulo 1, entonces $|z + w| = 2$ si y solo si $z = w$.

Ejercicio 1.13. Describir geoméricamente el conjunto de números complejos z tales que

- (a) $|z| > 1$; (d) $|z - 1| = |z + 1|$;
 (b) $|\operatorname{Im}(z)| < 1$; (e) $|\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| = 1$;
 (c) $|z - 1| = 2$; (f) $\operatorname{Im}\left(\frac{z - w}{v}\right) = 0$, con $w, v \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 1.14. Demostrar que existen exactamente n raíces n -ésimas del número complejo $z = re^{i\theta}$, y que son de la forma

$$w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right),$$

con $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Ejercicio 1.15. Encontrar todos los valores de z para los cuales $z^5 = -32$ y localizar estos valores en el plano complejo.

Ejercicio 1.16. Probar la identidad

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad (z \neq 1).$$

Ejercicio 1.17. Mostrar que si $z \in \mathbb{C}$ y $\operatorname{Re}(z^n) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces z es un número real no negativo.

Ejercicio 1.18. Sea $\Pi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ la proyección estereográfica. Calcular la imagen de los siguientes puntos.

- (a) $w = 0$; (d) la parte real de \mathbb{C} ;
 (b) $w = 1 + i$;
 (c) $w = 3 + 2i$; (e) la parte imaginaria de \mathbb{C} .

Ejercicio 1.19. Sean $\Pi: \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ la función que determina la Proyección estereográfica y d la distancia euclídea en \mathbb{R}^2 .

- (a) Describir explícitamente $\Pi(\mathbb{C}_\infty)$ en función de la parte real e imaginaria de z , $z \in \mathbb{C}$.
 (b) Probar que la aplicación $\bar{d}: \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\bar{d}(z, w) = d(\Pi(z), \Pi(w))$ es igual a

$$\frac{2|z - w|}{((|z|^2 + 1)(|w|^2 + 1))^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{si } z, w \in \mathbb{C};$$

- (c) Obtener que $\bar{d}(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 1.20. Sea Γ un círculo en S^2 . Si Γ contiene a $(0, 0, 1)$, entonces su proyección en \mathbb{C} es una línea recta, y si no, Γ se proyecta en un círculo en \mathbb{C} .

Capítulo **2**

Topología en el Plano Complejo

Este capítulo está dedicado al estudio de las nociones topológicas en el plano complejo. Como podemos identificar isomórficamente a \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , muchas de las nociones consideradas aquí son similares o totalmente análogas a las nociones topológicas estudiadas en el plano real \mathbb{R}^2 en un curso de análisis en varias variables.

2.1. Conjuntos abiertos y cerrados. Puntos de acumulación

Definición 2.1.1. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El conjunto A es llamado *abierto* si para cada elemento $z \in A$, existe un número real $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset A$.

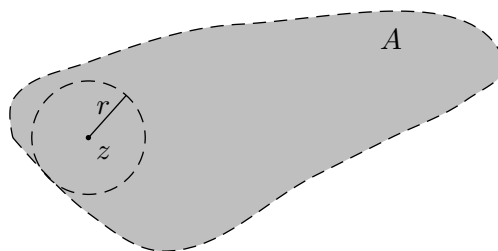


Figura 2.1: Conjunto abierto.

Como conjuntos abiertos triviales tenemos \emptyset y \mathbb{C} . Además, es claro que todo disco abierto, todo disco punteado y todo anillo son conjuntos abiertos. Afirmamos que ningún disco cerrado $\overline{D}(z, r)$ es un conjunto abierto ¿por qué?

Definición 2.1.2. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El conjunto A es llamado *cerrado* si $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto.

Como hemos dicho más arriba el disco cerrado no es un conjunto abierto, pero sí es un conjunto cerrado.

Definición 2.1.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Diremos que z es un *punto de acumulación* de A si $A(z, 0, r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. El conjunto de todos los puntos de acumulación de A es denotado por A' . Un punto que no es un punto de acumulación de A es llamado un *punto aislado* de A .

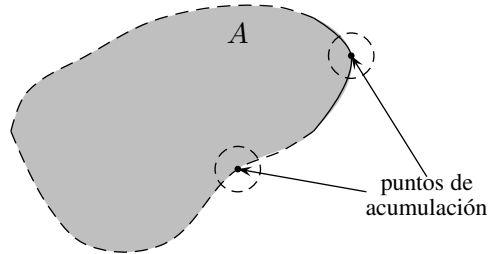


Figura 2.2: Puntos de acumulación.

El objetivo de usar un disco punteado en lugar de un disco abierto en la definición anterior, es para evitar que los puntos de A sean automáticamente puntos de acumulación de A . En otras palabras, no todo punto de A es necesariamente un punto de acumulación de A .

Ejemplo 2.1.4. Si $A := \{1 + i, 2 + i\}$, entonces $1 + i$ y $2 + i$ no son puntos de acumulación de A ¿por qué? De hecho, A no tiene puntos de acumulación.

Definición 2.1.5. Sea $A \subset \mathbb{C}$. La *clausura* \overline{A} de A es la unión de A y todos sus puntos de acumulación, esto es, $\overline{A} = A \cup A'$.

Las siguientes dos proposiciones son consecuencias de las Definiciones 2.1.3 y 2.1.5. La primera de ellas es una caracterización de la clausura de un conjunto y su demostración es inmediata. La segunda refiere a una caracterización de los conjuntos cerrados y daremos una prueba de esta.

Proposición 2.1.6. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces, $z \in \overline{A}$ si y solo si $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Proposición 2.1.7. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) A es cerrado;

(b) $A' \subset A$, es decir, A contiene a todos sus puntos de acumulación;

(c) $A = \overline{A}$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Supongamos que A es cerrado y sea z un punto de acumulación de A , es decir, $z \in A'$. Supongamos que $z \notin A$, entonces $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Como A es cerrado, tenemos que $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto y ya que $z \in \mathbb{C} \setminus A$, se sigue que existe un $r > 0$ tal que $D(z, r) \subset \mathbb{C} \setminus A$. Entonces $A(z, 0, r) \cap A = \emptyset$, lo que contradice que $z \in A'$. Por lo tanto, $z \in A$.

(b) \Rightarrow (c) Es trivial por la definición de la clausura de A .

(c) \Rightarrow (a) Supongamos que $A = \overline{A}$ y probemos que $\mathbb{C} \setminus A$ es un abierto. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus A$, con lo cual $z \notin A$. Ya que $A = \overline{A} = A \cup A'$, tenemos que $A' \subset A$ y por lo tanto $z \notin A'$. Por la Definición 2.1.3, existe un $r > 0$ tal que $A(z, 0, r) \cap A = \emptyset$. Entonces, $D(z, r) \subset \mathbb{C} \setminus A$. Así, $\mathbb{C} \setminus A$ es un abierto y por ende A es un cerrado de \mathbb{C} .

Otras propiedades de la clausura de un conjunto puede observarse en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.8. Sean $A, B \subset \mathbb{C}$. Entonces, las siguientes condiciones se cumplen:

(a) $A \subset \overline{A}$;

(b) si $B \subset A$, entonces $\overline{B} \subset \overline{A}$;

(c) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(d) \overline{A} es un cerrado de \mathbb{C} ;

(e) $\overline{B \cap A} \subset \overline{B} \cap \overline{A}$.

Demostración. La propiedad (a) es obvia por definición y (b) no es difícil y se deja a cargo del lector. Ahora probemos (c). Por la definición 2.1.5, es claro que $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Por otra parte, sea $z \in \overline{\overline{A}}$ y $r > 0$. Por la Proposición 2.1.6, $D(z, r) \cap \overline{A} \neq \emptyset$, entonces existe $w \in D(z, r) \cap \overline{A}$. Como $D(z, r)$ es un abierto que contiene a w , existe un $s > 0$ tal que $D(w, s) \subset D(z, r)$. Dado que $w \in \overline{A}$, por la Proposición 2.1.6, nos queda que $D(w, s) \cap A \neq \emptyset$. Entonces, $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$. Como r es arbitrario, nuevamente la Proposición 2.1.6 implica $z \in \overline{A}$. La propiedad (d) es consecuencia directa de la Proposición 2.1.7. Finalmente, por (b) conseguimos $\overline{B \cap A} \subset \overline{B}$ y $\overline{B \cap A} \subset \overline{A}$, y en consecuencia vale (e).

Intuitivamente, podemos decir que la frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es el conjunto de puntos que pertenecen al “borde” de A .

Definición 2.1.9. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El conjunto $\overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}} \setminus A$ es llamado la *frontera* de A y denotada por ∂A .

El lector puede probar fácilmente la siguiente caracterización de los puntos fronteras.

Proposición 2.1.10. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Entonces, $z \in \partial A$ si y solo si $D(z, r) \cap A \neq \emptyset$ y $D(z, r) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset$, para todo $r > 0$.

2.2. Sucesiones

Esta sección está dedicada a estudiar el concepto de sucesión de números complejos como así también la noción de límite de una sucesión de números complejos. Muchos de los temas expuestos en esta sección (como también en el resto de las secciones de este capítulo) tratan con aquellos conceptos y resultados los cuales se transfieren en una manera enteramente directa del análisis real elemental. Se asume que el estudiante está familiarizado con las nociones de sucesión y límite de sucesiones en el contexto de números reales. Ya que \mathbb{C} puede ser considerado como \mathbb{R}^2 con la estructura algebraica extra de la multiplicación compleja, muchos conceptos geométricos como también algebraicos pueden ser trasladado a \mathbb{C} . Por ejemplo, como hemos visto anteriormente, el módulo de un número complejo $z = a + bi$ es simplemente la norma o longitud del vector (a, b) en \mathbb{R}^2 .

Definición 2.2.1. Una *sucesión de números complejos* es una aplicación f del conjunto de los números naturales \mathbb{N} al conjunto de los números complejos \mathbb{C} , esto es, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Es frecuente denotar la imagen de un $n \in \mathbb{N}$ por f como z_n , es decir, $f(n) = z_n$ y como es habitual denotaremos a una sucesión f como $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ o simplemente como $\{z_n\}$.

Definición 2.2.2. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos. Se dice que la sucesión $\{z_n\}$ es *convergente* si existe un número complejo z_0 que cumple con la siguiente condición: para todo $\epsilon > 0$, existe un entero positivo n_0 tal que

$$z_n \in D(z_0, \epsilon) \quad \text{si } n \geq n_0.$$

Al número complejo z_0 se lo llama *límite* de la sucesión $\{z_n\}$ y también diremos que la sucesión $\{z_n\}$ *converge a* z_0 y lo denotaremos por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \text{o bien} \quad \lim z_n = z_0 \quad \text{o también} \quad z_n \rightarrow z_0$$

Si la sucesión $\{z_n\}$ no es convergente, diremos que es *divergente*.

Observe que el entero positivo n_0 en la definición anterior depende de ϵ . La siguiente proposición nos dice básicamente que podemos reducir el cálculo de una sucesión de números complejos al cálculo de sucesiones de números reales.

Proposición 2.2.3. Sean $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos y $z_0 = a_0 + b_0i \in \mathbb{C}$. Supongamos que $z_n = a_n + b_ni$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $\lim z_n = z_0$;
- (b) $\lim a_n = a_0$ y $\lim b_n = b_0$.

Demostración. Supongamos que (a) es cierta. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe un entero positivo n_0 tal que $|z_n - z_0| < \epsilon$ siempre que $n \geq n_0$. Dado que

$$|(a_n - a_0) - (b_n - b_0)i| = |z_n - z_0|,$$

por la propiedad (M3) en la Proposición 1.5.2 tenemos que

$$|a_n - a_0| \leq |z_n - z_0| < \epsilon \quad \text{y} \quad |b_n - b_0| \leq |z_n - z_0| < \epsilon$$

siempre que $n \geq n_0$. Entonces $\lim a_n = a_0$ y $\lim b_n = b_0$. Recíprocamente, supongamos que (b) es cierta y probemos (a). Sea $\epsilon > 0$, entonces existe un entero positivo n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $|a_n - a_0| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|b_n - b_0| < \frac{\epsilon}{2}$. Luego por la desigualdad triangular tenemos que

$$|z_n - z_0| = |(a_n - a_0) - (b_n - b_0)i| \leq |a_n - a_0| + |b_n - b_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

siempre que $n \geq n_0$. Por lo tanto $\lim z_n = z_0$.

Ejemplo 2.2.4. Veamos que la sucesión $\{\frac{i^n}{n}\}$ converge a 0. Sea $\epsilon > 0$ y elijamos $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Luego,

$$\left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \epsilon \quad \text{si } n > n_0.$$

Entonces, $\lim \frac{i^n}{n} = 0$.

Ejemplo 2.2.5. La sucesión de números complejos $\{i^n\}$ es divergente. Esto es intuitivamente claro dado que los posibles valores de i^n son cuatro 1, -1 , i , $-i$ que se van alternando sucesivamente. Ahora, veamos una prueba formal de esto. Supongamos que la sucesión $\{i^n\}$ converge a $z_0 = a_0 + b_0i$. Esto implica que para cualquier $\epsilon > 0$ que elijamos, existe un entero positivo n_0 tal que $|i^n - z_0| < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}$. Consideramos los dos únicos casos posibles (i) $a_0 \geq 0$ y (ii) $a_0 < 0$. Si $a_0 \geq 0$, entonces para cualquier entero positivo n_0 , tomamos un $n \geq n_0$ tal que $i^n = -1$, lo cual siempre es posible ya que $i^{4k+2} = -1$ para todo entero k . Luego, tenemos que

$$|i^n - z_0| = |-1 - (a_0 + b_0i)| \geq |-1 - a_0| = |1 + a_0| \geq 1 > \frac{1}{2}.$$

Ahora si $a_0 < 0$, para cualquier entero positivo n_0 elegimos un $n \geq n_0$ tal que $i^n = 1$, lo cual siempre es posible ya que $i^{4k} = 1$ para todo entero k . Luego, tenemos que

$$|i^n - z_0| = |1 - (a_0 + b_0 i)| \geq |1 - a_0| \geq 1 > \frac{1}{2}.$$

Entonces, la sucesión $\{i^n\}$ no converge a z_0 y dado que z_0 fue elegido arbitrariamente, obtenemos que la sucesión $\{i^n\}$ es divergente.

Es bien conocido que toda sucesión convergente de números reales tiene un único límite. Entonces, por la Proposición 2.2.3 podemos concluir que toda sucesión convergente de números complejos tiene un único límite.

Las siguientes propiedades no son difíciles de probar y se dejan como ejercicio al lector. Para varias de ellas puede usar las propiedades correspondientes al caso real de sucesiones y la Proposición 2.2.3.

Proposición 2.2.6. Sean $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ sucesiones de números complejos y $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$. Si $\lim z_n = z_0$ y $\lim w_n = w_0$, entonces:

- (a) $\lim(z_n + w_n) = z_0 + w_0$;
- (b) $\lim(z_n w_n) = z_0 w_0$;
- (c) $\lim\left(\frac{z_n}{w_n}\right) = \frac{z_0}{w_0}$, si $w_0 \neq 0$;
- (d) $\lim \overline{z_n} = \overline{z_0}$;
- (e) $\lim |z_n| = |z_0|$.

Ahora veremos que algunos de los resultados de la sección anterior se pueden reformular en término de sucesiones.

Proposición 2.2.7. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El subconjunto A es cerrado si y solo si para cada sucesión $\{z_n\} \subset A$ con $z_0 = \lim z_n$ se tiene que $z_0 \in A$.

Proposición 2.2.8. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces, z_0 es un punto de acumulación de A si y solo si existe una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos distintos ($z_i \neq z_j$ si $i \neq j$) perteneciente a A tal que $\lim z_n = z_0$.

Sabemos del análisis real que \mathbb{R} es completo. Es decir, que toda sucesión para la cual sus términos están “muy próximos entre sí” a medida que n crece, debe ser convergente. Tales sucesiones con la propiedad anterior son llamadas *sucesiones de Cauchy*. Ahora introducimos la definición formal de sucesión de Cauchy en el contexto de números complejos.

Definición 2.2.9. Una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos es llamada una *sucesión de Cauchy* si para cada $\epsilon > 0$, existe un entero positivo n_0 tal que $|z_n - z_m| < \epsilon$ para todo $n, m \geq n_0$.

En muchas ocasiones puede resultar difícil demostrar que una sucesión de números complejos es convergente exhibiendo explícitamente su límite. Dado que en muchas situaciones solo estamos interesados en saber si la sucesión con la que trabajamos es convergente y no en el valor particular de su límite, es importante contar con algún otro método que nos permita determinar si una sucesión converge o no. Para ello, la noción de sucesión de Cauchy es de mucha utilidad.

Proposición 2.2.10. El espacio \mathbb{C} es completo. Esto es, toda sucesión de Cauchy de \mathbb{C} es convergente.

Demostración. Sea $\{z_n = a_n + b_n i\}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} . Se puede probar de manera similar a la prueba de la Proposición 2.2.3 que $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones de Cauchy en \mathbb{R} . Dado que \mathbb{R} es completo, existen $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tales que $a_n \rightarrow a_0$ e $b_n \rightarrow b_0$. Entonces, por la Proposición 2.2.3 tenemos que $z_n \rightarrow z_0 = a_0 + b_0 i$. Por lo tanto, \mathbb{C} es completo.

2.3. Funciones continuas

Sea $A \subset \mathbb{C}$. Llamaremos *función compleja* (o simplemente *función*) a toda aplicación $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que a cada $z \in A$ le corresponde un único número complejo $f(z)$. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y sean $z_0 = x_0 + y_0 i \in A$ y $w_0 = u_0 + v_0 i \in \mathbb{C}$. Si $f(z_0) = w_0$, entonces $f(x_0 + y_0 i) = u_0 + v_0 i$. Con lo cual podemos observar que tanto u_0 como v_0 dependen de x_0 e y_0 . Luego f puede ser expresada en término de dos funciones reales en dos variables $u(x, y)$ y $v(x, y)$:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i.$$

Llamaremos a la función $u(x, y)$ la *parte real* de la función f y a $v(x, y)$ la *parte imaginaria* de f . A menudo, para abreviar, denotaremos $f = u + vi$ donde $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$.

Ejemplo 2.3.1. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función $f(z) = z^2$. Si $z = x + yi$, entonces $z^2 = (x - y) + 2xyi$. Luego, $f(z) = (x - y) + 2xyi$ y así $u(x, y) = x - y$ y $v(x, y) = 2xy$.

Sean $A \subset \mathbb{C}$, $z \in A$ y supongamos que $0 \notin A$. Como $z \neq 0$, sabemos que podemos expresar a z como $z = re^{\theta i}$ donde $r = |z|$ y $\theta \in \arg(z)$. Luego, las funciones parte real e imaginaria de $f = u + vi$ dependen ahora de r y θ . Esto es, para cada $z \in A$, $f(z) = u(r, \theta) + v(r, \theta)i$.

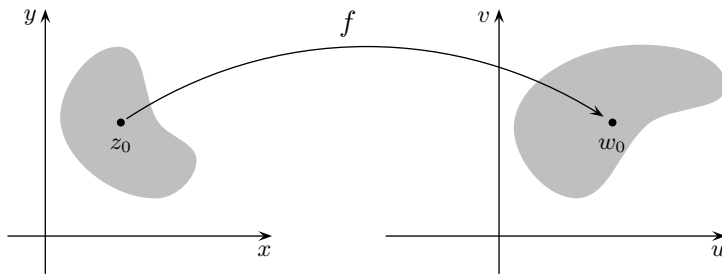


Figura 2.3: Función compleja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = w_0$.

Ejemplo 2.3.2. Sea $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y consideremos la función $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

Si $z = re^{\theta i}$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= re^{\theta i} + \frac{1}{re^{\theta i}} \\ &= re^{\theta i} + \frac{1}{r}e^{-\theta i} \\ &= r(\cos(\theta) + \text{sen}(\theta)i) + \frac{1}{r}(\cos(\theta) - \text{sen}(\theta)i) \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta) + \left(r - \frac{1}{r}\right) \text{sen}(\theta)i. \end{aligned}$$

Luego, $u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos(\theta)$ y $v(r, \theta) = \left(r - \frac{1}{r}\right) \text{sen}(\theta)$.

Definición 2.3.3. Sean $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida sobre un subconjunto $A \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Diremos que la función f tiene límite w_0 cuando z tiende a z_0 , y lo denotaremos por $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$, cuando para todo $\epsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que para cada $z \in A$,

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

La definición anterior de límite de una función compleja tiene la misma idea intuitiva que la noción de límite en análisis real. El límite de f , cuando existe, es determinado por el *comportamiento* de f cuando z se aproxima a z_0 en el anillo $A(z_0, \delta)$. Además, podemos observar que el valor de f en z_0 es irrelevante y puede aún no estar definido si $z_0 \notin A$.

Proposición 2.3.4. El límite de una función $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, si existe, es único.

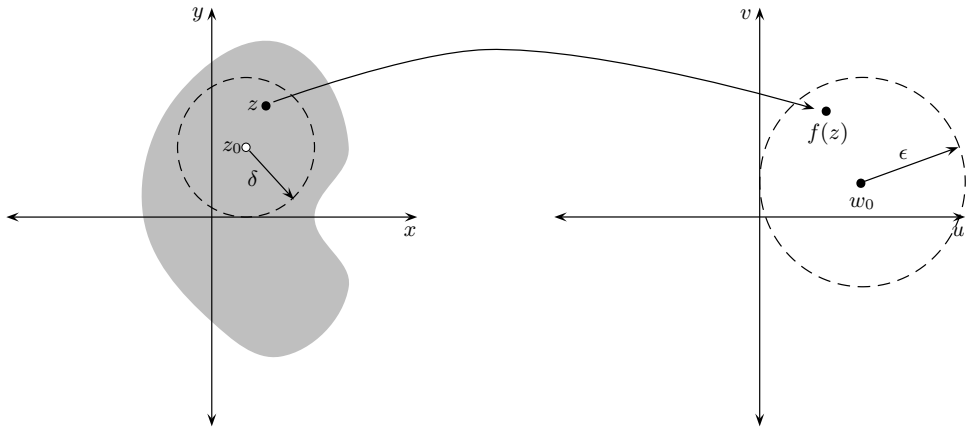


Figura 2.4: Representación gráfica del límite.

Demostración. Supongamos hacia una contradicción que existen $w_0, w_1 \in \mathbb{C}$ tales que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$ y que $w_0 \neq w_1$. Sea $\epsilon = \frac{|w_0 - w_1|}{2} > 0$. Por definición existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \epsilon$ y $|f(z) - w_1| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$. Elijamos cualquier $z \in A(z_0, 0, \delta)$. Entonces,

$$|w_0 - w_1| = |w_0 - f(z) + f(z) - w_1| \leq |w_0 - f(z)| + |f(z) - w_1| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |w_0 - w_1|,$$

lo cual es una contradicción.

El cálculo de límites complejos (suma, producto, composición) y otras propiedades básicas pueden ser desarrolladas similarmente como en el caso real. Pero debemos tener cuidado ya que aquellos resultados de \mathbb{R} que dependen del orden pueden no ser tan obvios.

Proposición 2.3.5. Sean $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$. Supongamos que $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$, $z_0 = x_0 + y_0i$ y $w_0 = u_0 + v_0i$. Entonces, las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$;
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0$.

Demostración. Recuerde que por simplicidad denotamos $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$. Asumamos primero que (a) es verdadera. Sea $\epsilon > 0$, entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$. Luego, tenemos que $|(u - u_0) + (v - v_0)i| < \epsilon$ siempre que $0 < |(x - x_0) + (y - y_0)i| < \delta$ donde $z = x + yi$. Como $|u - u_0| \leq |(u - u_0) + (v - v_0)i|$ y $|v - v_0| \leq$

$|(u - u_0) + (v - v_0)i|$, se sigue que $|u - u_0| < \epsilon$ y $|v - v_0| < \epsilon$ siempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Ahora, recíprocamente, supongamos que (b) es verdadera. Sea $\epsilon > 0$, entonces existen $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tales que

$$|u - u_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1$$

y

$$|v - v_0| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces,

$$|f(z) - w_0| = |(u - u_0) + (v - v_0)i| \leq |u - u_0| + |v - v_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

siempre que $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Por lo tanto, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

La demostración de las siguientes propiedades son similares al caso real y, por lo tanto, se dejan al lector.

Proposición 2.3.6. Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ funciones complejas y $z_0, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_1$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = w_2$, entonces:

- (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} (cf(z)) = cw_1$, para todo $c \in \mathbb{C}$;
- (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) + g(z)) = w_1 + w_2$;
- (c) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)g(z)) = w_1w_2$;
- (d) $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_1}{w_2}$ si $w_2 \neq 0$;
- (e) $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_1|$.

Ejemplo 2.3.7. Sean $a_0, a_1, \dots, a_n, z_0 \in \mathbb{C}$ y consideremos el polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Probaremos que $\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0)$. Para ello, notar primero que es directo chequear $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$. Ahora probaremos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{z \rightarrow z_0} z^k = z_0^k$. Para este fin usaremos inducción. Ya hemos visto que para $k = 1$ es válido. Supongamos que $\lim_{z \rightarrow z_0} z^k = z_0^k$. Ahora por la Proposición

2.3.6 tenemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} z^{k+1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^k z) = z_0^k z_0 = z_0^{k+1}$. Por lo tanto, usando nuevamente la Proposición 2.3.6, nos queda

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} P(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0) \\ &= a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0 = P(z_0). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.8. Sea $f(z) = \frac{z^4 + z^2 - 1}{z - 1}$, ¿existe $\lim_{z \rightarrow 1} f(z)$? Notar que $z^4 + z^2 - 2 = (z^2 - 1)(z^2 + 2) = (z - 1)(z + 1)(z^2 + 2)$. Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^4 + z^2 - 1}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1)(z + 1)(z^2 + 2)}{z - 1} = \lim_{z \rightarrow 1} (z + 1)(z^2 + 2) = 0.$$

Ejemplo 2.3.9. Sea $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, ¿existe $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$? Por la definición de límite y dado que el límite es único, tenemos que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$, si existe, tiene un único valor para cualquier dirección o camino por el cual z se aproxima a 0. Supongamos primero que z se aproxima a 0 por el eje real, esto es, $z = x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Ahora supongamos que z se aproxima a 0 por el eje imaginario, esto es, $z = yi$ con $y \in \mathbb{R}$. Note que en este caso $z \rightarrow 0$ es equivalente a $y \rightarrow 0$. Entonces,

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} f(yi) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-yi}{yi} = -1.$$

Luego, como $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ tiene dos valores diferentes, eligiendo dos caminos distintos, tenemos que $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ no existe.

Definición 2.3.10. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Se dice que f es *continua en un punto* $z_0 \in A$ si:

- (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe y
- (b) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

De manera abreviada podemos decir que f es continua en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Diremos que f es *continua en A* si es continua en todos los puntos $z_0 \in A$.

La siguiente proposición muestra el vinculo existente entre continuidad y sucesiones, y resulta de utilidad a la hora de probar que una función es continua.

Proposición 2.3.11. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$. La función f es continua si y solo si para cada sucesión convergente $z_n \rightarrow z_0$ de puntos de A (esto es, $z_n \in A$ y $z_0 \in A$), tenemos que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Demostración. Asumamos primero que f es continua y sea $z_n \rightarrow z_0$ una sucesión convergente de puntos en A . Probemos que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$. Sea $\epsilon > 0$. Como $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \quad (2.1)$$

Ahora, dado que $z_n \rightarrow z_0$ y $\delta > 0$, existe un entero positivo n_0 tal que

$$|z_n - z_0| < \delta \quad \text{siempre que} \quad n \geq n_0. \quad (2.2)$$

Luego, si $n \geq n_0$ tenemos por (2.2) que $|z_n - z_0| < \delta$ y así por (2.1) y dado que f está definida en z_0 , se sigue que $|f(z_n) - f(z_0)| < \epsilon$. Esto es, $|f(z_n) - f(z_0)| < \epsilon$ siempre que $n \geq n_0$ y por lo tanto $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$.

Recíprocamente, supongamos ahora que para cualquier sucesión convergente $z_n \rightarrow z_0$ de puntos en A , tenemos que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$. Probemos que f es continua en z_0 . Esto es, probemos que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Supongamos hacia una contradicción que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq f(z_0)$. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe un $z_\delta \in A$ que cumple con $0 < |z_\delta - z_0| < \delta$ y $|f(z_\delta) - f(z_0)| \geq \epsilon$. Luego para cada $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, sea $z_n \in A$ tal que $0 < |z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ y $|f(z_n) - f(z_0)| \geq \epsilon$. Entonces, se puede probar que la sucesión $\{z_n\}$ converge a z_0 y la sucesión $\{f(z_n)\}$ no converge a $f(z_0)$, lo cual contradice la hipótesis.

La siguiente proposición presenta otras caracterizaciones útiles de continuidad en término de conjuntos abiertos y cerrados.

Proposición 2.3.12. Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) f es continua;
- (b) la imagen inversa de cada subconjunto cerrado es un cerrado;
- (c) la imagen inversa de cada subconjunto abierto es un abierto.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Sea $A \subset \mathbb{C}$ cerrado. Para probar que $f^{-1}(A)$ es cerrado vamos a utilizar la Proposición 2.2.7. Sea $\{z_n\}$ un sucesión convergente de puntos en $f^{-1}(A)$ y sea z_0 su límite. Esto es, $\{z_n\} \subset f^{-1}(A)$ y $z_n \rightarrow z_0$. Como f es continua, por la Proposición 2.3.11, tenemos que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$. Dado que $\{z_n\} \subset f^{-1}(A)$ obtenemos que $\{f(z_n)\} \subset A$ y por el hecho que A es cerrado y $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ se sigue, por la Proposición 2.2.7, que $f(z_0) \in A$. Entonces, $z_0 \in f^{-1}(A)$ y por lo tanto $f^{-1}(A)$ es cerrado.

(b) \Rightarrow (c) Sea A un abierto de \mathbb{C} . Luego $\mathbb{C} \setminus A$ es un cerrado de \mathbb{C} . Entonces, por (b), $f^{-1}(\mathbb{C} \setminus A)$ es un cerrado. Observe que $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus A)$, con lo cual $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(A)$ es un cerrado y así $f^{-1}(A)$ es un abierto de \mathbb{C} .

(c) \Rightarrow (a) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Probemos que f es continua en z_0 , esto es, vamos a probar que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. Sea $\epsilon > 0$. Como $f(z_0) \in D(f(z_0), \epsilon)$, tenemos que $z_0 \in f^{-1}(D(f(z_0), \epsilon))$ y por (c) sabemos que $f^{-1}(D(f(z_0), \epsilon))$ es un abierto. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subseteq f^{-1}(D(f(z_0), \epsilon))$. Esto implica directamente que

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Luego, f es continua en z_0 y por lo tanto f es continua en \mathbb{C} .

En la proposición anterior la función f fue considerada definida en todo el plano complejo \mathbb{C} . En el caso de una función $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ definida sobre un subconjunto de \mathbb{C} , un resultado análogo (véase la proposición siguiente) puede ser enunciado y su prueba es similar a la anterior, considerando la topología de \mathbb{C} relativa a A .

Proposición 2.3.13. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) f es continua en A ;
- (b) para cada cerrado B de \mathbb{C} , existe un cerrado U de \mathbb{C} tal que $f^{-1}(B) = A \cap U$;
- (c) para cada abierto B de \mathbb{C} , existe un abierto U de \mathbb{C} tal que $f^{-1}(B) = A \cap U$;

2.4. Conjuntos conexos

En la definición de conjunto abierto, cuando decimos que $A \subset \mathbb{C}$ es abierto se sobreentiende que A es abierto en \mathbb{C} . En el estudio de la conexidad de conjuntos que haremos en esta sección, es necesario definir lo que significa que un conjunto B sea abierto en otro A que lo contenga. Para ello, damos la siguiente definición.

Definición 2.4.1. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El conjunto $B \subset A$ es llamado *abierto de A* si para cada $z \in B$ existe un $r > 0$ tal que $D(z, r) \cap A \subset B$. El conjunto $B \subset A$ es llamado *cerrado de A* si $A \setminus B$ es un abierto de A .

Observación 2.4.2. Sean $B \subset A \subset \mathbb{C}$.

- (a) Es fácil ver que si U es un abierto de A , entonces $U \cap B$ es un abierto de B .
- (b) Recíprocamente, si U es un abierto de B , existe un conjunto V abierto de A tal que $U = V \cap B$. En efecto, por hipótesis para cada $z \in U$, existe $r_z > 0$ tal que $D(z, r_z) \cap B \subset U$. Puesto que $D(z, r_z) \cap A$ son abiertos de A , entonces claramente sigue que $V := \bigcup_{z \in U} D(z, r_z) \cap A$ es un abierto en A satisfaciendo $U = V \cap B$.

(c) Si U es un cerrado de B , existe un conjunto V cerrado de A tal que $U = V \cap B$. En efecto, por (b) existe un abierto O de A tal que $B \setminus U = O \cap B$. Luego, $A \setminus U = (B \setminus U) \cup (A \setminus B) = (O \cap B) \cup (A \setminus B) = O \cup (A \setminus B)$, y por lo tanto $U = (A \setminus O) \cap B$. Tomando $V := (A \setminus O)$, concluimos la prueba.

Ejemplo 2.4.3. El conjunto $\{x + yi : x, y \in \mathbb{Q}, 0 < x, y < 1\}$ es abierto en $\{x + yi : x, y \in \mathbb{Q}\}$, pero no en \mathbb{C} .

La idea intuitiva de lo que es un conjunto conexo es que está formado por una sola pieza. Por ejemplo si consideramos \mathbb{R} con su topología usual, los únicos conjuntos conexos son los intervalos y así por ejemplo el conjunto $A := (-1, 0) \cup (1, 2)$ no es conexo en \mathbb{R} .

Definición 2.4.4. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El conjunto A es llamado *conexo* en \mathbb{C} si la única manera de escribir a A como la unión disjunta de dos conjuntos abiertos de A es la trivial, esto es, $A = A \cup \emptyset$.

Ejemplo 2.4.5. (a) Si $A := \{z\}$ para $z \in \mathbb{C}$, entonces A es conexo.

(b) Si $A := \{z \in \mathbb{C}; |z - i| < 1 \text{ ó } |z + i| < 1\}$, entonces A no es conexo.

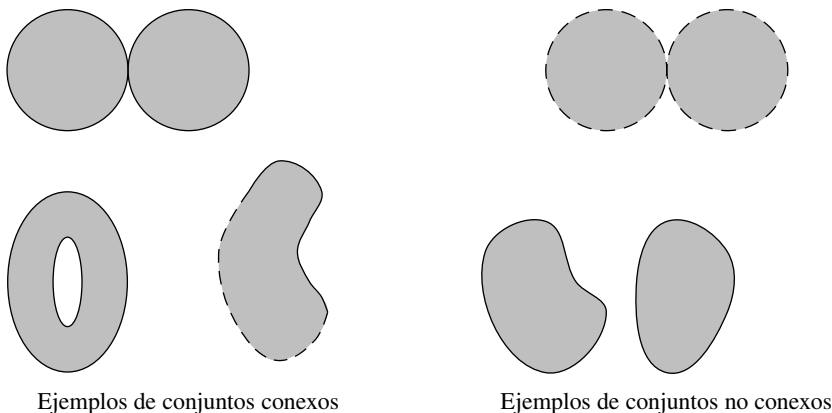


Figura 2.5: Ejemplo de conjuntos conexos y no conexos.

A continuación, veremos algunas propiedades y caracterizaciones de la noción de conexidad que serán de mucha utilidad a la hora de determinar si ciertos conjuntos son o no conexos. Comenzamos con la siguiente proposición.

Proposición 2.4.6. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El conjunto A es conexo si y solo si los únicos subconjuntos de A que son simultáneamente abiertos y cerrados en A son el mismo A y \emptyset .

Demostración. Sea $B \subset A$ un abierto y cerrado de A y supongamos $B \neq \emptyset$. Veamos que $B = A$. Si $B \neq A$, entonces $A \setminus B$ es no vacío y un abierto de A ya que B es un cerrado de A . Pero $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$ y $B \cup (A \setminus B) = A$, lo que contradice la hipótesis. Luego $B = A$.

Recíprocamente, supongamos que A no es conexo. Entonces existen U y V , conjuntos abiertos de A , no vacíos tales que $U \cap V = \emptyset$ y $A = U \cup V$. Como $A \setminus U = V$, V es un cerrado de A y además $V \neq A$. Luego V es un abierto y cerrado de A tal que $\emptyset \subsetneq V \subsetneq A$, lo que contradice la hipótesis.

Para la siguiente proposición necesitamos primero fijar el siguiente concepto.

Definición 2.4.7. Dos subconjuntos U y V de \mathbb{C} son llamados *separados* si $U \cap \overline{V} = \emptyset$ y $\overline{U} \cap V = \emptyset$.

Proposición 2.4.8. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El conjunto A es conexo si y solo si no es la unión de dos conjuntos no vacíos separados.

Demostración. Supongamos primero que A es un conjunto conexo. Entonces sabemos por la Proposición 2.4.6 que los únicos subconjuntos de A que son simultáneamente abiertos y cerrados de A son el mismo A y \emptyset . Supongamos que existen U y V no vacíos separados tal que $A = U \cup V$. Como U y V son separados, tenemos que $U \cap \overline{V} = \emptyset$ y $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Ahora, teniendo en cuenta que A es la unión de U y V obtenemos que

$$V = (U \cap \overline{V}) \cup V = A \cap \overline{V} \quad \text{y} \quad U = (\overline{U} \cap V) \cup U = \overline{V} \cap A.$$

Entonces, U y V son conjuntos cerrados de A y dado que $U = A \setminus V$ y $V = A \setminus U$, tenemos también que U y V son abiertos de A . Luego, U y V son abiertos y cerrados de A , no vacíos, y distintos de A , lo que contradice que A es conexo.

Recíprocamente, asumimos que A no es la unión de dos conjuntos no vacíos separados y supongamos que A no es conexo. Entonces existe un conjunto U , no vacío, abierto y cerrado de A tal que $U \neq A$. Sea $V := A \setminus U$, así V también es un abierto y cerrado de A . Como $U \subset A$ y por la Proposición 2.1.8 $U \subset \overline{U}$, entonces $U \subset \overline{U} \cap A$. Por otra parte, $\overline{U} \cap A \subset U$. En efecto, si $z \in \overline{U} \cap A$ y $z \notin U$, $z \in V$. Puesto que V es un abierto de A , existe $r > 0$ tal que $D(z, r) \cap A \subset V$. Pero $z \in \overline{U}$, entonces la Proposición 2.1.6 implica que $D(z, r) \cap U \neq \emptyset$. Sea $w \in D(z, r) \cap U$. Como U es abierto en A , existe $s > 0$, suficientemente pequeño, tal que $D(w, s) \cap A \subset U$ y $D(w, s) \subset D(z, r)$. Por ende $U \cap V \neq \emptyset$, una contradicción. Luego, $U = \overline{U} \cap A$. Similarmente, $V = \overline{V} \cap A$. Entonces, dado que U y V son disjuntos, $\overline{U} \cap V = \emptyset$ y $U \cap \overline{V} = \emptyset$. Por lo tanto, A es la unión de dos subconjuntos no vacíos separados, lo que contradice la hipótesis.

Proposición 2.4.9. Si A y B son dos conjuntos conexos de \mathbb{C} que no son separados, entonces $A \cup B$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $A \cup B$ no es conexo. Por la Proposición 2.4.8, existen dos conjuntos no vacíos separados U, V de \mathbb{C} tal que $A \cup B = U \cup V$. Por hipótesis $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ o $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Entonces $A = A \cap \overline{(A \cup B)} = A \cap \overline{(U \cup V)} = (A \cap U) \cup (A \cap \overline{V})$. Como $A \cap U \cap \overline{A \cap V} \subset A \cap U \cap \overline{A \cap V} \subset U \cap \overline{V} = \emptyset$ y similarmente $\overline{A \cap U} \cap A \cap V = \emptyset$, entonces A es la unión de dos conjuntos no vacíos separados. Por ende, la Proposición 2.4.8 implica que A no es conexo y esto contradice la hipótesis.

Definidos los conjuntos conexos, una importante definición es la siguiente.

Definición 2.4.10. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Llamaremos a A *región* si A es abierto y conexo.

De esta manera, \mathbb{R} , el plano, un intervalo abierto en \mathbb{R} , y un disco abierto en el plano son regiones. De hecho, las regiones pueden ser consideradas como las equivalentes multidimensionales de los intervalos abiertos en \mathbb{R} .

Teorema 2.4.11 (Bolzano). Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si A es conexo, entonces $f(A)$ es conexo.

Demostración. Supongamos que $f(A)$ no es un conexo en \mathbb{C} , entonces existen U, V abiertos no vacíos de $f(A)$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $f(A) = U \cup V$. Por la Observación 2.4.2, existen R, S abiertos de \mathbb{C} tales que $U = R \cap f(A)$ y $V = S \cap f(A)$. Definimos $O = f^{-1}(R) \cap A$ y $B = f^{-1}(S) \cap A$. Como f es continua, O y B son abiertos de A . Además O y B son no vacíos pues U y V no lo son. Puesto que

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(f(A)) \cap A = f^{-1}(U \cup V) \cap A \\ &= (f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)) \cap A = (f^{-1}(U) \cap A) \cup (f^{-1}(V) \cap A) \\ &\subset (f^{-1}(R) \cap A) \cup (f^{-1}(S) \cap A) = O \cup B \subset A \end{aligned}$$

y $O \cap B \subset f^{-1}(U \cap V) = \emptyset$, entonces A no es conexo, una contradicción.

2.5. Conjuntos arco-conexos

Ahora introduciremos una noción más fuerte que la noción de conexidad. Para ello necesitamos primero introducir la siguiente definición.

Definición 2.5.1. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Un *camino* (o *trayectoria*) de z a w es una función continua γ que une los dos puntos z y w . En otras palabras, un camino de z a w es una función continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma(1) = w$.

Definición 2.5.2. Sea $A \subset \mathbb{C}$. El conjunto A es llamado *arco-conexo* (o *conexo por caminos*) si para cada par de complejos $z, w \in A$ existe un camino de z a w en A .

Ejemplo 2.5.3. (a) Si $A := \{z\} \cup \{0\}$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces A no es arco-conexo.

(b) Si $A := \{z \in \mathbb{C}; |z - i| < 1 \text{ ó } |z + i| < 1\} \cup \{0\}$, entonces A es arco-conexo.

Proposición 2.5.4. Todo conjunto arco-conexo A de \mathbb{C} es conexo.

Demostración. Supongamos que $A = U \cup V$ con U y V abiertos de A no vacíos. Por hipótesis, existe un camino $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ tal que $\gamma(0) \in U$ y $\gamma(1) \in V$. Como $[0, 1]$ es conexo, por el Teorema de Bolzano 2.4.11 también lo es $\gamma([0, 1])$, y por lo tanto $U \cap \gamma([0, 1])$ y $V \cap \gamma([0, 1])$ son abiertos no vacíos de $\gamma([0, 1])$ que no pueden ser disjuntos. Así pues, U y V no pueden ser disjuntos, de donde A es conexo.

El recíproco de la proposición anterior no es verdad como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5.5. Consideremos los siguientes conjuntos de \mathbb{C} :

$$B := \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \quad \text{y} \quad A := \left\{ z = x + yi \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1, y = \frac{x}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Observe la Figura 2.6. Los conjuntos A y B son arco-conexos, así ellos son también conexos. Ahora notemos que A y B no son separados ya que cada punto $z \in B$ es un punto de acumulación de A , esto es, $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Entonces, por la Proposición 2.4.9, $A \cup B$ es conexo. Observemos de la Figura 2.6 que para cada $z \in A$ y $w \in B$, no existe un camino de z a w . Por lo tanto, $A \cup B$ no es arco-conexo.

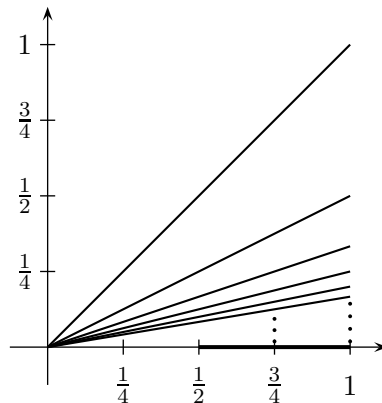


Figura 2.6: Conjunto conexo pero no arco-conexo.

Si bien las nociones de conexo y arco-conexo no son equivalentes en general, veremos en la siguiente proposición que para ciertos conjuntos ambas nociones coinciden.

Proposición 2.5.6. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto no vacío. Entonces, A es conexo si y solo si A es arco-conexo.

Demostración. Por la Proposición 2.5.4 solo debemos ver si A es un abierto y conexo de \mathbb{C} , entonces es arco-conexo. Sea $z \in A$ y llamemos

$$A_z := \{w \in A : \text{existe un camino de } z \text{ a } w \text{ en } A\}.$$

Nuestra intención es probar que $A_z = A$, para lo que será suficiente con ver que $A_z \neq \emptyset$ y A_z es un conjunto abierto y cerrado de A . Veamos que A_z es un abierto de A . Sea $w \in A_z$ y consideremos el camino $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ con $\gamma(0) = z$ y $\gamma(1) = w$. Tomemos $r > 0$ tal que $D(w, r) \subset A$, y comprobemos que $D(w, r) \subset A_z$. En efecto, si $v \in D(w, r)$ sea $\beta: [0, 1] \rightarrow D(w, r)$ tal que $\beta(t) = (1 - t)w + tv$. Observar que la función $\beta * \gamma: [0, 1] \rightarrow A$ definida por

$$\beta * \gamma(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un camino de z a v en A . Esto prueba que $D(w, r) \subset A_z$, y como $w \in A_z$ es un punto arbitrario, A_z es un abierto de \mathbb{C} . Ahora, como $A_z \subset A$, entonces A_z es un abierto de A . Veamos ahora que A_z es un cerrado de A . Tomemos un punto arbitrario $w \in \overline{A_z} \cap A$ y consideremos al igual que antes el disco abierto $D(w, r) \subset A$. Como $w \in \overline{A_z}$, necesariamente $D(w, r) \cap A_z \neq \emptyset$. Tomemos un punto $v \in D(w, r) \cap A_z$ y un camino $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ tal que $\gamma(0) = z$ y $\gamma(1) = v$, que existe pues $v \in A_z$. Consideremos $\beta: [0, 1] \rightarrow D(w, r)$ tal que $\beta(t) = (1 - t)v + tw$. Razonando como antes, $\beta * \gamma$ es un camino de z a w en A y por tanto, que $w \in A_z$. Así, $\overline{A_z} \cap A \subset A_z$ y en consecuencia, $\overline{A_z} \cap A = A_z$. Luego, por la Observación 2.4.2 (c), A_z es un cerrado de A . En definitiva, $A_z = A$ para cualquier punto $z \in A$, por lo que A es arco-conexo.

Corolario 2.5.7. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Si A es una región, entonces A es arco-conexo.

2.6. Conjuntos compactos

Una propiedad importante de los intervalos cerrados en la recta es que permite demostrar que las funciones continuas alcanzan un máximo y un mínimo sobre ellos. Este tipo de propiedad lleva a la noción de compacidad que se introduce a continuación. Veremos más abajo que los subconjuntos compactos de \mathbb{C} resultan ser los subconjuntos cerrados y acotados.

Definición 2.6.1. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Una familia $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in J}$ de conjuntos abiertos de \mathbb{C} es un *cubrimiento* por abiertos de A si $A \subset \bigcup_{\lambda \in J} U_\lambda$. Se dice que un cubrimiento por abiertos \mathcal{U} tiene un *subcubrimiento finito* si existe un subconjunto finito $\{U_{\lambda_j}\}_{j=1}^n$ tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^n U_{\lambda_j}$.

Definición 2.6.2. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Diremos que A es un conjunto *compacto* si todo cubrimiento por abiertos \mathcal{U} de A , tiene un subcubrimiento finito.

Ejemplo 2.6.3. (a) Si $A := \{z\}$ para $z \in \mathbb{C}$, entonces A es compacto.

(b) Si $A := \mathbb{R}$, entonces A no es compacto.

(c) Si $A := [a, b] \times [c, d]$, entonces A es compacto.

Antes de tratar la caracterización mas importante de compacidad, damos una definición y una proposición auxiliar.

Definición 2.6.4. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Decimos que A es *acotado* si existen $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que $A \subset D(z, r)$.

Proposición 2.6.5. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto y $z \notin A$. Entonces existen U, V abiertos disjuntos de \mathbb{C} tales que $z \in U$ y $A \subset V$.

Demostración. Para cada $w \in A$, sea $r_w = \frac{1}{4}|w - z|$, entonces $D(z, r_w) \cap D(w, r_w) = \emptyset$. Como $\{D(w, r_w)\}_{w \in A}$ es un cubrimiento por abiertos de A , existen $w_1, \dots, w_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^n D(w_j, r_{w_j})$. Sean $U = \bigcap_{j=1}^n D(z, r_{w_j})$ y $V = \bigcup_{j=1}^n D(w_j, r_{w_j})$. Es claro que U, V son abiertos de \mathbb{C} , $z \in U$ y $A \subset V$. Además, si $v \in U \cap V$, entonces existe $1 \leq l \leq n$ tal que $v \in D(z, r_{w_l}) \cap D(w_l, r_{w_l})$, lo cual es imposible. Luego $U \cap V = \emptyset$ y se completa la prueba.

Tenemos ahora el siguiente resultado de caracterización.

Proposición 2.6.6. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Entonces A es compacto si y solo si A es cerrado y acotado.

Demostración. Veamos que $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto, y en consecuencia A es cerrado. Sea $z \in \mathbb{C} \setminus A$, por la Proposición 2.6.5, existen U, V abiertos disjuntos de \mathbb{C} tales que $z \in U$ y $A \subset V$. Entonces $U \cap A = \emptyset$ y por lo tanto $z \in U \subset \mathbb{C} \setminus A$. Luego, $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto. Mostremos ahora que A es acotado. Sea $z \in A$ y $\mathcal{U} := \{D(z, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como \mathcal{U} es un cubrimiento por abiertos de A y A es compacto, existen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^k D(z, n_j)$. Sea $r = \max\{n_j : 1 \leq j \leq k\}$, entonces $A \subset D(z, r)$ y por ende A es acotado.

Recíprocamente, supongamos que A es cerrado y acotado. Como A es acotado, existen $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ tal que $A \subset D(z, r)$, y así $A \subset [\operatorname{Re}(z) - r, \operatorname{Re}(z) + r] \times [\operatorname{Im}(z) - r, \operatorname{Im}(z) + r] =: V$. Sea ahora $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un cubrimiento por abiertos de A . Como A es cerrado, $\mathbb{C} \setminus A$ es abierto, y por ende $\mathcal{U} \cup \{\mathbb{C} \setminus A\}$ es un cubrimiento por abiertos de V . Como por el Ejemplo 2.6.3 (c), V es un conjunto compacto, tiene un subcubrimiento finito, es decir, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in J$ tales que $V \subset (\mathbb{C} \setminus A) \cup \bigcup_{j=1}^k U_{\lambda_j}$. En particular, $A \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\lambda_j}$, y por ende A resulta compacto.

Ejemplo 2.6.7. (a) Para $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, los discos cerrados $\overline{D}(z, r)$ son compactos, pues son conjuntos cerrados y acotados.

(b) Los discos abiertos $D(z, r)$ no son compactos por no ser cerrados.

La siguiente proposición es una muy buena herramienta para generar conjuntos compactos.

Proposición 2.6.8. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto. Si $B \subset A$ es cerrado, entonces B es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U} := \{U_\alpha\}_{\lambda \in J}$ un cubrimiento por abiertos de B . Notar que $A \setminus B = A \cap (\mathbb{C} \setminus B)$ y $\mathbb{C} \setminus B$ es abierto, entonces $A \setminus B$ es un abierto de A . Luego, por la Observación 2.4.2 (b), existe un abierto V tal que $A \setminus B = V \cap A$. Como $\mathcal{U} \cup \{V\}$ es un cubrimiento por abiertos de A , por hipótesis, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in J$ tales que $A \subset V \cup \bigcup_{j=1}^k U_{\lambda_j}$. En consecuencia, $B \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\lambda_j}$ y por ende B es compacto.

Proposición 2.6.9. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $\{z_n\} \subset A$. Si A es compacto, entonces $\{z_n\} \subset A$ tiene al menos un punto de acumulación en A .

Demostración. Supongamos que la sucesión $\{z_n\} \subset A$ no tiene un punto de acumulación en A . Entonces para cada $z \in A$ existe $r_z > 0$ tal que $z_n \in D(z, r_z)$ solo para finitos valores de n . Como $\mathcal{U} := \{D(z, r_z)\}_{z \in A}$ es un cubrimiento por abiertos de A y A es compacto, entonces \mathcal{U} tiene un subcubrimiento finito, es decir, existen $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{C}$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^k D(w_j, r_{z_j}) =: V$. Pero entonces $z_n \in V$ solo para finitos valores de n . Luego, si m es mayor que cualquiera de esos valores, $z_m \notin V$, pero como $A \subset V$ se obtiene una contradicción, lo que prueba que la sucesión necesariamente tiene al menos, un punto de acumulación en A .

Observación 2.6.10. La proposición anterior, asegura la existencia de puntos de acumulación para sucesiones en conjuntos compactos y, por lo tanto, la existencia de subsucesiones convergentes. Es importante notar que, sin embargo, la sucesión dada puede no ser convergente. Por ejemplo, si tomamos $z_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Las siguientes tres proposiciones dan propiedades muy útiles que tienen las funciones continuas sobre conjuntos compactos.

Proposición 2.6.11. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U} := \{U_\lambda\}_{\lambda \in J}$ un cubrimiento por abiertos de $f(A)$. Entonces $f(A) \subset \bigcup_{\lambda \in J} U_\lambda$, y por lo tanto $A \subset \bigcup_{\lambda \in J} f^{-1}(U_\lambda)$. Como f es continua, para cada $\lambda \in J$, $f^{-1}(U_\lambda)$ es un abierto de \mathbb{C} y por ende $\mathcal{V} := \{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in J}$ es

un cubrimiento por abiertos de A . Como A es compacto, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in J$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^k f^{-1}(U_{\lambda_j})$. En consecuencia, $f(A) \subset \bigcup_{j=1}^k U_{\lambda_j}$ y así $f(A)$ es compacto.

Definición 2.6.12. Sean $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja y $A \subset \mathbb{C}$. Se dice que f es *uniformemente continua* en A cuando para todo $\epsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que para cada $z, w \in A$,

$$|f(z) - f(w)| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - w| < \delta.$$

Proposición 2.6.13. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si A es compacto, entonces f es uniformemente continua en A .

Demostración. Como f es una función continua, para todo $\epsilon > 0$ y para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $\delta_{z,\epsilon} > 0$ tal que $f(D(z, \delta_{z,\epsilon})) \subset D(f(z), \frac{\epsilon}{2})$. Ya que $\mathcal{U} := \left\{ D\left(z, \frac{\delta_{z,\epsilon}}{2}\right) \right\}_{z \in \mathbb{C}}$ es un cubrimiento por abiertos de A y A es compacto, existen $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ tales que $A \subset \bigcup_{j=1}^k D\left(z_j, \frac{\delta_{z_j,\epsilon}}{2}\right)$.
Sea $\delta := \delta(\epsilon) = \min \left\{ \frac{\delta_{z_j,\epsilon}}{2} : 1 \leq j \leq k \right\}$.

Consideremos $z, w \in A$ tal que $|z - w| < \delta$ y veamos que $|f(z) - f(w)| < \epsilon$. Como $z \in A$, existe $z_l, 1 \leq l \leq k$, tal que $z \in D\left(z_l, \frac{\delta_{z_l,\epsilon}}{2}\right)$. Luego, $f(z) \in D\left(f(z_l), \frac{\epsilon}{2}\right)$. Ahora $|w - z_l| \leq |w - z| + |z - z_l| < \delta + \frac{\delta_{z_l,\epsilon}}{2} < \delta_{z_l,\epsilon}$, entonces $w \in D(z_l, \delta_{z_l,\epsilon})$, y por lo tanto $f(w) \in D\left(f(z_l), \frac{\epsilon}{2}\right)$. Finalmente, conseguimos que $|f(z) - f(w)| \leq |f(z) - f(z_l)| + |f(z_l) - f(w)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Proposición 2.6.14. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que $f(A) \subset \mathbb{R}$. Si A es compacto, entonces existen $z_1, z_2 \in A$ tales que $f(z_1) = \min_{z \in A} f(z)$ y $f(z_2) = \max_{z \in A} f(z)$.

Demostración. Por las Proposiciones 2.6.6 y 2.6.11, $f(A)$ es cerrado y acotado. Como $f(A) \subset \mathbb{R}$ es acotado, existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq f(z) \leq b$, para todo $z \in A$. Sean $m = \inf_{z \in A} f(z)$ y $M = \sup_{z \in A} f(z)$. Claramente, $D(m, r) \cap f(A) \neq \emptyset$ y $D(M, r) \cap f(A) \neq \emptyset$, para todo $r > 0$. Luego, la Proposición 2.1.6 implica que $m, M \in \overline{f(A)}$. Dado que $f(A)$ es cerrado, $m, M \in f(A)$, y por lo tanto existen $z_1, z_2 \in A$ tales que $f(z_1) = m$ y $f(z_2) = M$. Esto completa la prueba.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1. Probar que el conjunto $\{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ es abierto en \mathbb{C} .

Ejercicio 2.2. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto tal que $\overline{D(z, r)} \subset A$. Probar que existe un número $\rho > r$ tal que $D(z, \rho) \subset A$.

Ejercicio 2.3. Probar que el complemento de un conjunto finito de puntos en \mathbb{C} es un conjunto abierto en \mathbb{C} .

Ejercicio 2.4. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos A de \mathbb{C} son abiertos (o no) y cuáles son cerrados (o no).

- (a) $A := \{z : 0 < |z| \leq 1\}$; (b) $A := \{z : |z| < 1\}$;
 (c) $A := \{z : 1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2\}$; (d) $A := \{z : -1 < \operatorname{Re}(z) \leq 2\}$;
 (e) $A := \{z : \operatorname{Im}(z) > 2\}$; (f) $A := \{z : z^n = 1 \text{ para algún entero } n \geq 1\}$.

Ejercicio 2.5. Estudiar la continuidad en $z = i$ de la función f definida por

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+1}{z-i} & \text{si } z \neq i \\ 3i & \text{si } z = i \end{cases}.$$

Ejercicio 2.6. Demostrar que las siguientes funciones son continuas en \mathbb{C} .

- (a) $f(z) = \bar{z}$; (b) $f(z) = |z|$; (c) $f(z) = |z|^{5\sqrt{z^2}}$.

Ejercicio 2.7. Demostrar que si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en $w \in \mathbb{C}$ con $f(w) \neq 0$, entonces existe un entorno de w sobre el cual $f \neq 0$.

Ejercicio 2.8. Probar que si z_0 y w_0 son puntos en \mathbb{C} , entonces se cumple que

- (a) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ si y solo si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$;
 (b) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ si y solo si $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$;
 (c) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ si y solo si $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$.

Ejercicio 2.9. Mostrar que si $|z| > 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{n} = \infty$.

Ejercicio 2.10. Mostrar que si $|z| < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$.

Ejercicio 2.11. Para $|z| \neq 1$, probar que la siguiente función está bien definida.

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n - 1}{z^n + 1}.$$

¿Es posible definir f para $|z| = 1$ de tal manera que f sea continua en \mathbb{C} ?

Ejercicio 2.12. Sea

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^n}{1 + z^n}.$$

- (a) ¿Cuál es el dominio de definición de f ?
- (b) Dar explícitamente los valores de $f(z)$ para algunos puntos del círculo unitario.

Ejercicio 2.13. Sean z_n, z puntos en \mathbb{C} y d la métrica sobre \mathbb{C}_∞ . Mostrar que $|z_n - z| \rightarrow 0$ si y solo si $d(z_n, z) \rightarrow 0$. Además, probar que si $|z_n| \rightarrow \infty$, entonces $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C}_∞ . ¿Es convergente $\{z_n\}$ en \mathbb{C}_∞ ?

Ejercicio 2.14. Supongamos que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy en \mathbb{C} tal que tiene una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ convergente. Demostrar que $\{z_n\}$ es convergente.

Ejercicio 2.15. Cuáles de los siguientes subconjuntos A de \mathbb{C} son conexos.

- (a) $A := \{z : |z| \leq 1\} \cup \{z : |z - 2| < 1\}$;
- (b) $A := [0, 1) \cup \{1 + \frac{1}{n} : n \geq 1\}$;
- (c) $A := \{z : |\operatorname{Re}(z)| \leq 1\}$;
- (d) $A := \{z : |\operatorname{Re}(z)| \geq 1\}$;
- (e) $A := \{z : |z| \leq 5, |\operatorname{Im}(z)| \geq 1\}$.

Ejercicio 2.16. Si $A \in \mathbb{C}$ y $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, mostrar que $\mathbb{C} \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus A)$.

Ejercicio 2.17. Sea $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ una sucesión de conjuntos compactos no vacíos en \mathbb{C} con la propiedad que

$$\operatorname{diam}(A_n) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Mostrar que existe un único punto $w \in \mathbb{C}$ tal que $w \in A_n$ para todo n .

Ejercicio 2.18. Mostrar que la unión de un número finito de conjuntos compactos en \mathbb{C} , es compacta.

Ejercicio 2.19. Estudiar compacidad de los siguientes conjuntos.

- (a) $A := \{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$;
- (b) $A := \{z : |z| \leq 3, |\operatorname{Re}(z)| \geq 1\}$;
- (c) $A := \{z : |\operatorname{Re}(z)| \leq 1\}$;
- (d) $A := \{z : |\operatorname{Re}(z)| \geq 1\}$;

(e) $A := \{z : |z| \leq 5, |\operatorname{Im}(z)| \geq 1\}$.

Ejercicio 2.20. Mostrar que $f(z) = z^2$ es uniformemente continua en $D(0, 1)$.
¿Vale lo mismo para $f(z) = \frac{1}{z}$?

Ejercicio 2.21. Supongamos que $f: A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es uniformemente continua. Mostrar que si $\{z_n\} \subset A$ es una sucesión de Cauchy entonces $\{f(z_n)\}$ también lo es. ¿Vale la misma afirmación si f es solamente continua en A ?

Capítulo **3**

Serie de Potencias

En este capítulo vamos a dar la definición y propiedades básicas de una serie de potencias. Una vez que hemos desarrollado algunas herramientas esenciales sobre la serie de potencias, estaremos listos para conectarlas a los capítulos anteriores. Antes de hacer esto, es necesario dar algunos hechos elementales sobre series infinitas en \mathbb{C} que tienen una gran analogía a series infinitas en \mathbb{R} las cuales deben ser bien conocidas para el lector.

3.1. Series

Sea $\{z_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de números complejos, una *serie* es una expresión formal $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$. La *N-ésima suma parcial* de la serie es definida como

$$S_N := \sum_{n=0}^N z_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_N.$$

Definición 3.1.1. Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es *convergente* si la sucesión de sumas parciales $\{S_N\}_{N \geq 0}$ es convergente, o sea si existe un número complejo S (la suma de la serie) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|S - S_N| < \epsilon, \quad \text{para todo } N \geq N_0.$$

En tal caso se escribe $S = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Si la serie no es convergente, se dice *divergente*.

Definición 3.1.2. Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es *absolutamente convergente* si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Puesto que $|z_N| = |S_N - S_{N-1}| \leq |S - S_N| + |S - S_{N-1}|$, para todo $N \geq 1$, si una serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, lo que provee un criterio necesario para la convergencia. Pero esto no alcanza como es conocido del análisis real.

Un criterio necesario y suficiente para la convergencia de una serie es el llamado Criterio de Cauchy cuya demostración es idéntica que en el caso real.

Proposición 3.1.3 (Criterio de Cauchy). La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo par de números naturales N y M con $M > N \geq N_0$ se tiene

$$\left| \sum_{n=N+1}^M z_n \right| < \epsilon.$$

A continuación mostramos que la convergencia absoluta es más fuerte que la convergencia.

Proposición 3.1.4. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente entonces la serie es convergente.

Demostración. De la convergencia absoluta se desprende que para todo $\epsilon > 0$ existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N_0+1}^{\infty} |z_n| < \epsilon.$$

Si $M > N \geq N_0$ entonces, por la desigualdad triangular,

$$\left| \sum_{n=N+1}^M z_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |z_n| < \epsilon,$$

con lo que la serie es convergente por el criterio de Cauchy.

Definición 3.1.5. Se dice que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es *condicionalmente convergente* si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ es convergente y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ es divergente.

En lo que sigue queremos estudiar series donde los sumandos son funciones de una variable compleja, o sea series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n,$$

donde f_n es una función a valores complejos de una variable compleja en algún subconjunto de \mathbb{C} . Para ello será crucial las nociones de convergencia puntual y de convergencia uniforme.

Definición 3.1.6. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 0}$ de funciones a valores complejos definidas en A se dice que *converge puntualmente* en A si para todo $z \in A$, la sucesión $\{f_n(z)\}_{n \geq 0}$ es convergente. El límite, al que notamos por $f(z)$, define una nueva función f sobre A .

Una serie de funciones $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se dice que *converge puntualmente* en A si la correspondiente sucesión de sumas parciales $F_N = \sum_{n=0}^N f_n$ converge puntualmente en A .

Definición 3.1.7. Sea $A \subset \mathbb{C}$. Una sucesión $\{f_n\}_{n \geq 0}$ de funciones a valores complejos definidas en A se dice que *converge uniformemente* en A a una función f si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$,

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon, \quad \text{para todo } z \in A.$$

Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ se dice que converge uniformemente en A a una función f si la correspondiente sucesión de sumas parciales $F_N = \sum_{n=0}^N f_n$ converge uniformemente en A a f .

El siguiente criterio, llamado *M-test*, es útil para establecer convergencia uniforme.

Proposición 3.1.8 (M-test). Sean $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ una serie convergente de números reales no negativos (o sea: $t_n \geq 0$), $A \subset \mathbb{C}$ y $\{f_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de funciones a valores complejos definidas en A . Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z)| \leq t_n$, para todo $z \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente en A .

Demostración. Por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|f_n(z)| \leq t_n$, para todo $z \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$. Ya que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$ es convergente, por el

por el Criterio de Cauchy, dado $\epsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^M t_n < \epsilon$, para $M > N \geq N_1$. Luego, para todo $z \in A$ y para $M > N \geq \max\{n_0, N_1\}$ se tiene

$$\left| \sum_{n=N+1}^M f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^M |f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^M t_n < \epsilon,$$

y así la convergencia uniforme y la convergencia absoluta de la serie es consecuencia del Criterio de Cauchy.

Entre las series más útiles está la *serie geométrica* cuyos términos se obtienen multiplicando sucesivamente un número complejo por sí mismo, es decir, $z_n = z^n$. La serie geométrica de razón z es entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots \quad (3.1)$$

Observemos que se tiene la identidad

$$(1 - z)(1 + z + \dots + z^N) = (1 - z) \sum_{n=0}^N z^n = 1 - z^{N+1}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo $z \in \mathbb{C}$. Si $z \neq 1$, obtenemos la N -ésima suma parcial de la serie geométrica como

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}. \quad (3.2)$$

Si $|z| < 1$, entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} z^N = 0$ pues $\lim_{N \rightarrow \infty} |z^N| = \lim_{N \rightarrow \infty} |z|^N = 0$. Así de (3.2) deducimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad \text{si } |z| < 1 \quad (\text{Serie Geométrica}). \quad (3.3)$$

Proposición 3.1.9. La serie geométrica (3.1) es:

- (a) Absolutamente convergente en $\{z : |z| < 1\}$ a $(1 - |z|)^{-1}$;
- (b) Divergente en $\{z : |z| \geq 1\}$;
- (c) Uniformemente convergente en $\{z : |z| \leq \rho\}$ a $(1 - z)^{-1}$ si $\rho < 1$;
- (d) Absoluta y uniformemente convergente en $\{z : |z| \leq \rho\}$ a $(1 - |z|)^{-1}$ si $\rho < 1$.

Demostración. (a) Se sigue de reemplazar z por $|z|$ en (3.3).

(b) Si $|z| \geq 1$, entonces $\lim_{N \rightarrow \infty} z^N$ no existe y la fórmula (3.2) indica que la serie es divergente.

(c) Si $|z| \leq \rho < 1$,

$$\left| \frac{1}{1 - z} - \sum_{n=0}^N z^n \right| = \left| \frac{z^{N+1}}{1 - z} \right| = \frac{|z|^{N+1}}{|1 - z|} \leq \frac{\rho^{N+1}}{1 - \rho} \leq \frac{\rho^{N+1}}{1 - \rho},$$

donde hemos usado la desigualdad $|1 - z| \geq 1 - |z|$. Como $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho} = 0$, pues $\rho < 1$, la serie converge uniformemente.

(d) El mismo argumento de arriba, con $|z|$ en lugar de z , se puede repetir para demostrar que la convergencia es absoluta y uniforme si $\rho < 1$.

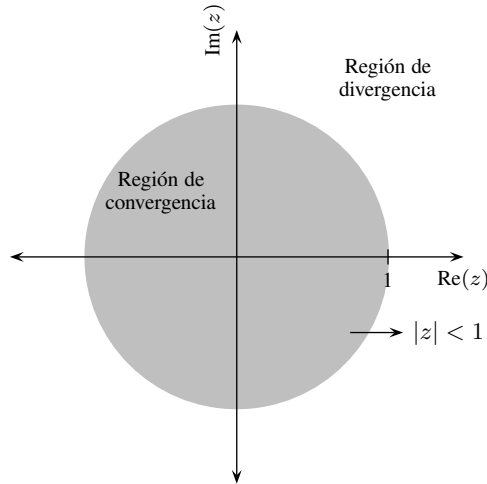


Figura 3.1: Región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

El siguiente resultado se conoce por el nombre de Criterio del Cociente.

Proposición 3.1.10 (Criterio del Cociente). Si $a := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ existe y es finito o bien ∞ , entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente cuando $a < 1$ y diverge cuando $a > 1$.

Demostración. Supongamos que $a < 1$, y sea b tal que $a < b < 1$. Por la existencia del límite, hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$. Entonces, para tales n ,

$$|z_n| = \left| \frac{z_n}{z_{n-1}} \right| \left| \frac{z_{n-1}}{z_{n-2}} \right| \dots \left| \frac{z_{n_0+1}}{z_{n_0}} \right| |z_{n_0}| \leq |z_{n_0}| b^{n-n_0}, \quad (3.4)$$

ya que cada cociente es de módulo menor que b y hay $n - n_0$ de ellos. Ahora, la convergencia absoluta se desprende del M-test ya que $\sum_{n=n_0}^{\infty} b^{n-n_0}$ es una serie geométrica de razón $b < 1$.

Ahora asumimos $a > 1$, y sea b con $1 < b < a$. Por hipótesis, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| > b$ para todo $n \geq n_0$. La misma factorización que en (3.4)

muestra que $|z_n| \geq |z_{n_0}|b^{n-n_0}$ para estos n . Pero entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ no existe ya que $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{n-n_0} = \infty$ al ser $b > 1$. Por ende la serie diverge.

Las propiedades elementales de los límites nos dan los hechos siguientes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{n=0}^{\infty} (z_n + w_n) \quad \text{y} \quad v \sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} v z_n,$$

entendiendo que si las series de la izquierda convergen, las de la derecha también lo hacen y se da la igualdad. Un resultado análogo para productos de series ya no es tan sencillo.

Definición 3.1.11. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ dos series en \mathbb{C} . Llamaremos *producto de Cauchy* de estas series a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k}.$$

La intención es que la serie que acabamos de definir converja al producto de las dos series de partida, pero esto no ocurre necesariamente salvo que al menos una de ellas converge absolutamente, como lo muestra la siguiente afirmación (Ver Ejercicio 3.4).

Teorema 3.1.12. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ dos series convergentes en \mathbb{C} . Si al menos una de las series converge absolutamente, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n z_k w_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} w_n \right).$$

3.2. Series de potencias

El siguiente paso es estudiar las series de potencias. En primer lugar probaremos que la región de convergencia es siempre un disco abierto y quizás algunos de los puntos de su frontera.

Definición 3.2.1. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión en \mathbb{C} . Sea $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función dada por $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ y por convenio $f_0(z) = a_0$. Llamamos *serie de potencias* de coeficientes $\{a_n\}_{n \geq 0}$ y centro z_0 a la serie de funciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n.$$

Suele usarse, y nosotros usaremos por conveniencia, la notación

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

para representar la serie de potencias de coeficientes $\{a_n\}_{n \geq 0}$ y centro z_0 .

Recordemos ahora la definición de límite superior e inferior de una sucesión de números reales.

Sea $\{a_n\}_{n \geq 0}$, definimos

$$\overline{\lim}_n a_n = \inf_{k \geq 0} \sup_{n \geq k} a_n.$$

De la misma manera,

$$\underline{\lim}_n a_n = \sup_{k \geq 0} \inf_{n \geq k} a_n.$$

Para ver algunas caracterizaciones y propiedades que estos satisfacen, véase el Apéndice.

Teorema 3.2.2. Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, definimos el número r , $0 \leq r \leq \infty$, por

$$\frac{1}{r} = \overline{\lim}_n |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad (\text{Cauchy-Hadamard}).$$

Entonces

- (a) la serie converge absolutamente en $\{z : |z - z_0| < r\}$;
- (b) la serie diverge en $\{z : |z - z_0| > r\}$;
- (c) la serie converge uniformemente en $\{z : |z - z_0| \leq \rho\}$ si $0 < \rho < r$.

Además r es el único número real satisfaciendo (a) y (b).

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $z_0 = 0$. Supongamos $|z| < r$ y sea ρ tal que $|z| < \rho < r$. Si $c_k = \sup_{n \geq k} |a_n|^{\frac{1}{n}}$, por hipótesis, $c_k \downarrow \frac{1}{r}$, cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq c_n < \frac{1}{s}$ para todo $n \geq n_0$. Pero $|a_n| < \frac{1}{s^n}$ si $n \geq n_0$, y así

$$|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{s}\right)^n, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Puesto que $\frac{|z|}{s} < 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{s}\right)^n$ es convergente y consecuentemente, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente para $|z| < r$.

Ahora supongamos $0 < \rho < r$ y elegimos s tal que $\rho < s < r$. Dado que $\frac{1}{r} < \frac{1}{s}$, como arriba existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{s}$ para todo $n \geq n_0$. Si $|z| \leq \rho$,

$$|a_n z^n| < \left(\frac{\rho}{s}\right)^n, \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

y $\frac{\rho}{s} < 1$. Así el M-test implica que la serie de potencias converge uniformemente en $\{z : |z| \leq \rho\}$. Esto completa la prueba de las partes (a) y (c).

Para probar (b), sea $|z| > r$ y elegimos s con $|z| > s > r$. Como $\frac{1}{s} < \frac{1}{r}$, de la definición de límite superior, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k \geq 0}$ tal que

$$\frac{1}{s} < |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}, \quad k \geq 0.$$

Se sigue que $|a_{n_k} z^{n_k}| > \left(\frac{|z|}{s}\right)^{n_k}$ para todo $k \geq 0$, y como $\frac{|z|}{s} > 1$, tenemos que los términos $a_n z^n$ no están acotados. Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge.

El número r se llama *radio de convergencia* de la serie de potencias, y el disco $\{z : |z - z_0| < r\}$ se llama *disco de convergencia* de la serie. Tenemos, pues, que una serie de potencias converge absolutamente en un círculo y diverge fuera de ese círculo. En cada punto de la frontera del círculo la serie puede converger absolutamente, condicionalmente o divergir, según los casos.

A la hora de determinar el radio de convergencia de una serie suele ser útil el siguiente caso particular del Criterio de d'Alembert.

Teorema 3.2.3. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ una serie de potencias tal que existe el siguiente límite (posiblemente infinito)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = r,$$

entonces su radio de convergencia es r .

Demostración. Si aplicamos el Criterio del Cociente a la serie, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(z - z_0)^{n+1}|}{|a_n(z - z_0)^n|} = \frac{|z - z_0|}{r}.$$

Si $|z - z_0| < r$, el límite es menor que 1 y la serie es convergente. Si $|z - z_0| > r$ el límite es mayor que 1 y la serie es divergente. Luego, por el Teorema 3.2.2, r es el radio de convergencia.

Ejemplo 3.2.4. (a) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ converge solo en $z = 0$, pues $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

(b) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, pues $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} n + 1 = \infty$.

Recalcamos el siguiente resultado de la teoría de series, cuya demostración queda a cargo del lector (Ver Ejercicio 3.18).

Teorema 3.2.5. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ dos series de potencias con radios de convergencia mayor o igual a $r > 0$. Si $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, entonces las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

tienen radio de convergencia mayor o igual a r y

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n \right), \end{aligned}$$

para $|z - z_0| < r$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales. Probar la siguientes desigualdades.

(a) $\overline{\lim}_n (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_n a_n + \overline{\lim}_n b_n$;

(b) $\underline{\lim}_n (a_n + b_n) \geq \underline{\lim}_n a_n + \underline{\lim}_n b_n$;

(c) $\overline{\lim}_n |a_n b_n| \leq \overline{\lim}_n |a_n| \overline{\lim}_n |b_n|$, si el producto de la derecha no es de la forma $0 \cdot \infty$;

(d) $\underline{\lim}_n |a_n| \underline{\lim}_n |b_n| \leq \underline{\lim}_n |a_n b_n|$.

Ejercicio 3.2. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales positivos. Probar que si $0 < b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y $a = \overline{\lim}_n a_n$, entonces $\overline{\lim}_n a_n b_n = ab$.

Ejercicio 3.3. Si $z \neq w$, probar que $z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1} = \frac{z^n - w^n}{z - w}$.

Ejercicio 3.4. Probar el Teorema 3.1.12.

Ejercicio 3.5. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie absolutamente convergente de suma s . Mostrar que cada reordenamiento de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es también una serie absolutamente convergente y su suma es s .

Ejercicio 3.6. Mostrar que si $|z| < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$.

Ejercicio 3.7. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia r_1 y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ tiene radio de convergencia r_2 , probar que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ tiene radio de convergencia mayor o igual a $r_1 r_2$.

Ejercicio 3.8. Hallar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n$, $a \in \mathbb{C}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^n$, $a \in \mathbb{C}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$, $p > 1$.

Ejercicio 3.9. Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Ejercicio 3.10. Mostrar que la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ converge únicamente cuando $z = 0$.

Ejercicio 3.11. Mostrar que el radio de convergencia de la serie de potencia $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$ es 1. Discutir la convergencia para los valores $z = -1, 1, i$.

Ejercicio 3.12. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n} z^{2n-1}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{2n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$.

Ejercicio 3.13. Encontrar el radio de convergencia de cada una de las siguientes series de potencias y decidir si convergen en algún punto, en todos o en ninguno de los puntos del borde de su disco de convergencia,

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n.$$

Ejercicio 3.14. Mostrar que si $|z| < 1$, entonces

$$\frac{z}{1-z^2} + \frac{z^2}{1-z^4} + \cdots + \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} + \cdots = \frac{z}{1-z}.$$

Ejercicio 3.15. Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ cuando:

$$(a) a_n = (\log n)^2, \quad (b) a_n = \frac{n^2}{4^n + 3n}, \quad (c) a_n = \cos n.$$

Ejercicio 3.16. Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ cuando:

$$(a) a_n = \frac{n}{(3i)^n}, \quad (b) a_n = \cos n - i \sin n, \quad (c) a_n = \frac{\cos n - i \sin n}{n^2}.$$

Ejercicio 3.17. Sea f una serie de potencia centrada en el origen. Probar que f admite una expansión en serie de potencias alrededor de cualquier punto que pertenezca a su disco de convergencia.

Ejercicio 3.18. Probar el Teorema 3.2.5.

Capítulo **4**

Funciones Elementales y Analíticas

El objetivo principal de este capítulo será estudiar el concepto de función analítica, el cual podría decirse, a grandes rasgos, que es el tema principal de estudio del análisis complejo. Para ello estudiaremos el concepto de diferenciabilidad de funciones complejas y luego nos enfocaremos en algunas de las funciones complejas elementales más usuales.

La noción de derivada de una función compleja es definida de manera similar al caso de derivada de una función de una variable real. Sin embargo, existen algunos resultados especialmente interesantes en el caso de diferenciabilidad compleja.

4.1. La derivada

Definición 4.1.1. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z \in A$. Si existe el límite

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w},$$

entonces se dice que f es *diferenciable* (o *derivable*) en z , y se denota por $f'(z)$.

Como vemos, la definición de diferenciabilidad de una función de variable compleja es similar a la definición de derivada de una función de variable real y, como veremos más abajo, ellas comparten varias propiedades análogas. Pero cabe señalar aquí que la diferenciabilidad compleja es más fuerte (o en otras palabras, más rica) que la de diferenciabilidad real. Como veremos más adelante, la existencia de f' implica que las derivadas de todos los órdenes de f existen, esto es, si f' existe, entonces f'' , f''' , \dots , $f^{(n)}$, \dots existen. Pero esto no ocurre en el caso de una función de variable real. Es decir, existen funciones f de variable real x para la cual $f'(x)$ existe pero $f''(x)$ no existe.

Las reglas obtenidas en el cálculo real para derivar la suma de dos funciones, el producto de dos funciones, el cociente de dos funciones, la composición de dos funciones, las potencias, etc. fueron todas obtenidas por métodos algebraicos basados en las propiedades de la suma y la multiplicación. Las mismas demostraciones pueden aplicarse para demostrar los siguientes resultados.

Proposición 4.1.2. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones y $z \in A$. Si f y g son diferenciables en z entonces:

- (a) $(f + \alpha g)'(z) = f'(z) + \alpha g'(z)$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
 (b) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$;
 (c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ si $g(z) \neq 0$.

Ejemplo 4.1.3. Para un número entero n , la derivada de $f(z) = z^n$ es $f'(z) = nz^{n-1}$, con la salvedad de que $z \neq 0$ si n es negativo.

Ejemplo 4.1.4. Las funciones $f(z) = \bar{z}$ y $g(z) = |z|$ no son diferenciables en \mathbb{C} .

Por el Ejemplo 4.1.4 sabemos que la función $f(z) = \bar{z}$ no es diferenciable y no es difícil comprobar que ella es continua en todo el plano complejo. Por lo tanto, podemos ver que la continuidad de una función compleja no implica la diferenciable de esta. La proposición siguiente nos muestra que la recíproca de la afirmación anterior si se cumple.

Proposición 4.1.5. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z \in A$. Si f es diferenciable en z , entonces f es continua en z .

Demostración. Se deja a cargo del lector. Ver Ejercicio 4.1.

Definición 4.1.6. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función. La función f es llamada *analítica* (o *regular*) en A si f es diferenciable en cada punto de A . Si f es analítica en \mathbb{C} , decimos que f es *entera*.

Proposición 4.1.7 (Regla de la Cadena). Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ dos conjuntos abiertos, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones analíticas en A y B , respectivamente, tales que $f(A) \subset B$. Entonces $g \circ f$ es analítica en A y $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$ para todo $z \in A$.

Demostración. Sea $z_0 \in A$ y sea $w_0 = f(z_0)$. Vamos a definir la función $\Phi: B \rightarrow \mathbb{C}$ como sigue

$$\Phi(w) = \begin{cases} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & \text{si } w \neq w_0 \\ 0 & \text{si } w = w_0. \end{cases}$$

Ya que $g'(w_0)$ existe, se puede comprobar que la función Φ es continua. Además, dado que la composición de funciones continuas es continua, tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \Phi(f(z)) = \Phi(f(z_0)) = \Phi(w_0) = 0.$$

Por la definición de la función Φ tenemos que

$$g(w) - g(w_0) = (\Phi(w) + g'(w_0))(w - w_0)$$

para todo $w \in B$. Luego, dado $z \in A$ con $z \neq z_0$ y tomando $w = f(z)$, de la última igualdad nos queda

$$g(f(z)) - g(w_0) = (\Phi(f(z)) + g'(w_0))(f(z) - w_0).$$

Entonces, dividiendo por $z - z_0$ y recordando que $f(z_0) = w_0$, obtenemos que

$$\frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)}{z - z_0} = (\Phi(f(z)) + g'(w_0)) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Cuando $z \rightarrow z_0$, el lado derecho tiende a $(0 + g'(w_0))f'(z_0)$ y por lo tanto obtenemos el resultado buscado.

Utilizando una demostración similar a la de la proposición anterior se puede probar una forma especial de la Regla de la Cadena para funciones complejas: sea $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable, esto es, γ puede ser considerada como una función $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t) + y(t)i$ y donde $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t) + y'(t)i$. Entonces la derivada de la función $f(\gamma(t))$ es $f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.

La siguiente proposición es análoga a un resultado del análisis real el cual afirma que una función cuya derivada es idénticamente cero debe ser constante.

El lector debería notar en el siguiente resultado que la condición de tomar una región y no solo un conjunto abierto es fundamental en la demostración de dicho resultado, lo cual manifiesta la importancia de considerar funciones definidas sobre regiones en lugar de abiertos.

Proposición 4.1.8. Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in A$, entonces f es constante en A .

Demostración. Fijemos $z_0 \in A$ y $w_0 = f(z_0)$. Pongamos $B := \{z \in A : f(z) = w_0\}$. Veamos que $B = A$ mostrando que B es abierto y cerrado en A .

Sea $z \in A$ y $\{z_n\} \subset B$ tal que $\lim z_n = z$. Como $f(z_n) = w_0$ para todo n y f es continua en A , entonces $f(z) = w_0$, es decir, $z \in B$. Así B es cerrado en A .

Ahora, sean $a \in B$ y $\epsilon > 0$ tal que $D(a, \epsilon) \subset A$. Para $z \in D(a, \epsilon)$, definimos $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ por $g(t) = f(tz + (1-t)a)$. Como f es derivable en A , usando la Regla de la Cadena, tenemos que $g'(t) = f'(tz + (1-t)a)(z - a)$ para $t \in [0, 1]$.

Puesto que $tz + (1 - t)a \in A$, por hipótesis $g'(t) = 0$ para $t \in [0, 1]$, es decir g es constante en $[0, 1]$. Finalmente, dado que $f(z) = g(1) = g(0) = f(a) = w_0$, tenemos $z \in B$. Por la arbitrariedad de z conseguimos $D(a, \epsilon) \subset B$ y por ende B es abierto en A .

En orden de definir la analiticidad de una función definida sobre un conjunto arbitrario A del plano complejo, asumiremos siempre que la función está definida sobre un conjunto abierto que contiene al conjunto A .

Definición 4.1.9. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto no abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es analítica en A si f es analítica en un conjunto abierto que contiene a A . Así, diremos que f es *analítica en* z_0 si existe un $r > 0$ tal que f es diferenciable en todo punto de $D(z_0, r)$.

4.2. Las ecuaciones de Cauchy - Riemann

Los resultados en esta sección ponen de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista. Además, veremos la relación que existe entre la derivada (en sentido complejo) de una función compleja f y las derivadas parciales usuales de la parte real e imaginaria de f consideradas como funciones en dos variables reales (x, y) .

Las Proposiciones 4.2.1 y 4.2.2 nos proveen con un criterio muy útil para determinar la existencia o no de la derivada de f en un punto dado y analizar su analiticidad.

Proposición 4.2.1. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función y $z \in A$. Notemos $z = x + iy$, $u(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ y $v(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$. Si f es diferenciable en z , entonces existen las derivadas parciales de u y v en (x, y) y satisfacen las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{y} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y). \quad (4.1)$$

Además,

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iv_y(x, y). \quad (4.2)$$

Demostración. Como f es diferenciable en $z = x + iy$, tomando $w \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{w \rightarrow 0} \frac{u(x + w, y) + iv(x + w, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{w} \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{u(x + w, y) - u(x, y)}{w} + i \frac{v(x + w, y) - v(x, y)}{w} \right) \\ &= u_x(x, y) + iv_x(x, y), \end{aligned}$$

pues el límite existe si y solo si existen los límites de la parte real e imaginaria. Tomando ahora w puramente imaginario, $w = ih$, conseguimos

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x, y + h) + iv(x, y + h) - u(x, y) - iv(x, y)}{ih} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left((-i) \frac{u(x, y + h) - u(x, y)}{h} + \frac{v(x, y + h) - v(x, y)}{h} \right) \\ &= -iu_y(x, y) + v_y(x, y). \end{aligned}$$

Combinando ambas expresiones para $f'(z)$ y considerando la parte real e imaginaria, obtenemos (4.1).

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann (4.1) son necesarias para la diferenciabilidad compleja. Suplementadas con una condición de continuidad, también son suficientes.

Teorema 4.2.2 (Teorema de Cauchy-Riemann). Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $u, v \in C^1(\Omega)$ ¹. Si se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (4.1) en $(x, y) \in \Omega$, entonces $f = u + iv$ es diferenciable en $z = x + iy$, y se tiene (4.2).

Demostración. Sea $(x, y) \in \Omega$ y $z = x + iy$. Con $w = a + ib$, y suponiendo que tanto a como b son tales que $(x + a, y + b) \in \Omega$, tenemos

$$\frac{f(z + w) - f(z)}{w} = \frac{u(x + a, y + b) - u(x, y)}{a + ib} + i \frac{v(x + a, y + b) - v(x, y)}{a + ib}. \quad (4.3)$$

Puesto que por hipótesis las derivadas parciales son continuas, el Teorema de Taylor para funciones de dos variables reales implica que

$$u(x + a, y + b) - u(x, y) = u_x(x, y)a + u_y(x, y)b + g(x, y, a, b)\sqrt{a^2 + b^2},$$

$$v(x + a, y + b) - v(x, y) = v_x(x, y)a + v_y(x, y)b + h(x, y, a, b)\sqrt{a^2 + b^2},$$

donde las funciones g y h satisfacen

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} g(x, y, a, b) = \lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} h(x, y, a, b) = 0.$$

¹En general, decimos que $u \in C^k(\Omega)$, si existen las derivadas parciales de orden k y son continuas en Ω

Por (4.3),

$$\begin{aligned} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} &= \frac{u_x(x,y)a + u_y(x,y)b + g(x,y,a,b)\sqrt{a^2+b^2}}{a+ib} \\ &\quad + i \frac{v_x(x,y)a + v_y(x,y)b + h(x,y,a,b)\sqrt{a^2+b^2}}{a+ib} \\ &= \frac{1}{a+ib} (u_x(x,y)a + iv_y(x,y)b) + \frac{i}{a+ib} (v_x(x,y)a - iv_y(x,y)b) \\ &\quad + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+ib} (g(x,y,a,b) + ih(x,y,a,b)). \end{aligned}$$

Ahora usamos las ecuaciones de Cauchy-Riemann y obtenemos

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} = u_x(x,y) + iv_x(x,y) + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+ib} (g(x,y,a,b) + ih(x,y,a,b)).$$

Como $\left| \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a+ib} \right| = 1$, haciendo $(a,b) \rightarrow (0,0)$, conseguimos la existencia de la derivada en z y la relación (4.2).

Sea $f = u + vi$ una función compleja considerada como una función de varias variables $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, $(x,y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Recordemos del cálculo vectorial que una condición suficiente para que f sea *diferenciable* en $z = (x,y)$, es que las derivadas parciales de u y v respecto de x e y existan y sean continuas en un entorno de z . Del Teorema de Cauchy-Riemann podemos observar que la diferenciabilidad compleja es mucho más fuerte (o rica) que la diferenciabilidad real, dado que las condiciones sobre u y v mencionadas anteriormente, ya no alcanzan para asegurar que f sea diferenciable en z en el sentido complejo, pues también deben verificarse las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ejemplo 4.2.3. Veamos donde es diferenciable y analítica la función $f(z) = x^2 + y^2i$ y en caso que corresponda hallemos su derivada. Observemos que $u(x,y) = x^2$ y $v(x,y) = y^2$, con lo cual sus derivadas parciales $u_x(x,y) = 2x$, $v_y(x,y) = 2y$ y $u_y(x,y) = v_x(x,y) = 0$ son continuas en todos los puntos del plano complejo. Es directo ver que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen si y solo si $x = y$. Entonces, la función f es diferenciable en los puntos $z = x + yi$ para los cuales $x = y$ y por (4.2) tenemos que $f'(z) = 2x$. Por lo tanto, f no es analítica en ningún punto del plano complejo.

También se pueden expresar las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares, lo cual resulta de utilidad para estudiar la regularidad de ciertas funciones complejas. Sea $z = x + yi \neq 0$. Recordemos que podemos escribir $z = re^{\theta i}$ con $r = |z|$ y $\theta = \text{Arg}(z)$. Entonces $x = r \cos(\theta)$ e $y = r \text{sen}(\theta)$. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja definida en un abierto A tal que $0 \notin A$. Luego podemos

expresar a la parte real e imaginaria de $f = u + vi$ tanto en las variables x e y como en r y θ (véase la pág. 23). Supongamos que $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ y que las derivadas parciales de primer orden de u y v con respecto a x e y existen y son continuas en $z_0 \in A$. Utilizando la Regla de la Cadena para funciones de dos variables reales tenemos que las derivadas parciales de primer orden de u y v con respecto a r y θ existen y son continuas en z_0 . Entonces

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dr} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dr} \quad \text{y} \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{d\theta} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{d\theta},$$

y por ende

$$u_r = u_x \cos(\theta) + u_y \sin(\theta) \quad \text{y} \quad u_\theta = -u_x r \sin(\theta) + u_y r \cos(\theta). \quad (4.4)$$

Análogamente, obtenemos que

$$v_r = v_x \cos(\theta) + v_y \sin(\theta) \quad \text{y} \quad v_\theta = -v_x r \sin(\theta) + v_y r \cos(\theta). \quad (4.5)$$

Luego, si f es analítica en z_0 , entonces las derivadas parciales de u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann con respecto a x e y en z_0 , esto es,

$$u_x = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -v_x \quad (4.6)$$

en z_0 . Reemplazando en las ecuaciones (4.5) las ecuaciones (4.6) tenemos que

$$v_r = -u_y \cos(\theta) + u_x \sin(\theta) \quad \text{y} \quad v_\theta = u_y r \sin(\theta) + u_x r \cos(\theta). \quad (4.7)$$

en z_0 . Entonces, de (4.4) y (4.7) obtenemos la *forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$ru_r = v_\theta \quad \text{y} \quad u_\theta = -rv_r. \quad (4.8)$$

en z_0 . Por lo tanto, hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 4.2.4. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ un conjunto abierto y $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones tales que $u, v \in C^1(\Omega)$. Entonces, la función $f(z) = u(r, \theta) + v(r, \theta)i$ es diferenciable en $z_0 = r_0 e^{\theta_0 i}$ si y solo si u y v satisfacen la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (4.8). Además, la derivada $f'(z_0)$ se puede escribir como

$$f'(z_0) = e^{-\theta_0 i} (u_r(r_0, \theta_0) + v_r(r_0, \theta_0)i).$$

Ejemplo 4.2.5. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ definida en $A = \{re^{\theta i} : r > 0 \text{ y } -\pi < \theta < \pi\}$ por $f(z) = \sqrt{r}e^{\theta/2i}$. Determinemos en qué puntos de A es f diferenciable. Como podemos observar fácilmente $f = u + vi$ con $u = \sqrt{r} \cos(\theta/2)$ y $v = \sqrt{r} \sin(\theta/2)$ para todo $z = re^{\theta i} \in A$. Sea $z = re^{\theta i} \in A$. Entonces

$$u_r = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos(\theta/2), \quad u_\theta = -\frac{\sqrt{r}}{2} \sin(\theta/2)$$

y

$$v_r = \frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen}(\theta/2), \quad v_\theta = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos(\theta/2).$$

Luego

$$ru_r = \frac{\sqrt{r}}{2} \cos(\theta/2) = v_\theta \quad \text{y} \quad -rv_r = -\frac{\sqrt{r}}{2} \operatorname{sen}(\theta/2) = u_\theta.$$

Por lo tanto, por la Proposición 4.2.4 tenemos que f es diferenciable en todo punto $z \in A$. Además

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-\theta i} (u_r + v_r i) \\ &= e^{-\theta i} \left(\frac{1}{2\sqrt{r}} \cos(\theta/2) + \frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen}(\theta/2) i \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-\theta i} (\cos(\theta/2) + \operatorname{sen}(\theta/2) i) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-\theta i} e^{(\theta/2) i} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}} e^{-(\theta/2) i}. \end{aligned}$$

4.3. Analiticidad de series de potencias

En esta sección y junto con el Capítulo 6 veremos la estrecha relación que existe entre las funciones analíticas y las series de potencias. En esta sección veremos que toda función definida por una serie de potencias es analítica y luego, más adelante en el Capítulo 6 que toda función analítica admite un desarrollo en serie de potencias.

Proposición 4.3.1. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces:

(a) Para cada $k \geq 1$, la serie de potencias

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n (z - z_0)^{n-k}, \quad (4.9)$$

tiene radio de convergencia R ;

(b) La función f es infinitamente diferenciable en $D(z_0, R)$ y $f^{(k)}(z)$ tiene por serie a (4.9) para todo $k \geq 1$ y $z \in D(z_0, R)$.

(c) Para $n \geq 0$, $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$.

Demostración. Observamos que si (a) es probado para $k = 1$, entonces los casos $k = 2, k = 3$, etc, se siguen análogamente. En efecto, el caso $k = 2$ puede ser obtenido aplicando (a) para $k = 1$ a la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(z - z_0)^n.$$

(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^n = (z - z_0) \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}$$

convergen para los mismos valores de z y, por lo tanto, tienen igual radio de convergencia, R' . La fórmula de Cauchy Hadamard nos dice que el radio de convergencia de la última serie satisface $\frac{1}{R'} = \overline{\lim}_n |na_n|^{\frac{1}{n}}$. Pero $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$. Así, el Ejercicio 3.2 y la hipótesis implican que

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim}_n |na_n|^{\frac{1}{n}} = \overline{\lim}_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}.$$

(b) Sin pérdida de generalidad supongamos $z_0 = 0$. Para $|z| < R$, pongamos

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1} \quad s_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{y} \quad R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k.$$

Sean $\epsilon > 0$, $w \in D(0, R)$ un punto fijo y $r \in \mathbb{R}$ con $|w| < r < R$. Sea $\delta > 0$, arbitrario, tal que $D(w, \delta) \subset D(0, r)$. Si $z \in D(w, \delta)$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) &= \left(\frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right) + (s'_n(w) - g(w)) \\ &\quad + \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Ahora

$$\frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} = \frac{1}{z - w} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z^k - w^k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{z^k - w^k}{z - w}$$

y

$$\left| \frac{z^k - w^k}{z - w} \right| = |z^{k-1} + z^{k-2}w + \dots + zw^{k-2} + w^{k-1}| \leq kr^{k-1}.$$

Luego

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1}.$$

Por lo visto en la parte (a), con $|a_n|$ en lugar de a_n , tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|z^{n-1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|z^n$ tienen igual radio de convergencia. Pero $\overline{\lim}_n |na_n|^{\frac{1}{n}} = R^{-1}$ y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|z^{n-1}$ converge para $|z| < R$. Puesto que $r < R$, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| k r^{k-1}$ converge. Así existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \frac{R_n(z) - R_n(w)}{z - w} \right| < \epsilon/3, \quad \text{para } n \geq n_0. \quad (4.11)$$

También, $\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n(z) = g(z)$, y por ende existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s'_n(z) - g(z)| < \epsilon/3, \quad \text{para todo } n \geq n_1. \quad (4.12)$$

Sea $n = \max\{n_0, n_1\}$. Como $\lim_{z \rightarrow w} \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} = s'_n(w)$, podemos elegir δ^* , $0 < \delta^* < \delta$ satisfaciendo

$$\left| \frac{s_n(z) - s_n(w)}{z - w} - s'_n(w) \right| < \epsilon/3, \quad \text{cuando } |z - w| < \delta^*. \quad (4.13)$$

Luego de (4.10)-(4.13), tenemos

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w) \right| < \epsilon, \quad \text{para } |z - w| < \delta^*.$$

Esto es $f'(w) = g(w)$.

(c) Por una rápida evaluación, conseguimos $f(0) = f^{(0)}(0) = a_0$. Usando (4.9), para $z_0 = 0$, tenemos $f^{(k)}(0) = k!a_k$.

Corolario 4.3.2. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ es analítica en $D(z_0, R)$.

Corolario 4.3.3 (Unicidad de las series de potencias). Si existe $R > 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n,$$

para todo $z \in D(z_0, R)$, entonces $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

4.4. Funciones complejas elementales

Algunas de las funciones elementales más usuales estudiadas en análisis real son por ejemplo la función exponencial e^x , la función logaritmo natural $\ln(x)$, las funciones trigonométricas $\sin(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$, etc. En esta sección estudiaremos el correlato de estas funciones en el caso complejo.

4.4.1. Función exponencial compleja

Recordemos que la representación en serie de potencias de la función exponencial e^x , también denotada por $\exp(x)$, es dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$. Además, sabemos que ella es la única solución a la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x) \quad \text{sujeta a la restricción} \quad f(0) = 1.$$

Luego, una definición adecuada de función exponencial $f(z) = \exp(z)$ para una variable compleja z debería cumplir al menos que:

- si $z = x$ es real, entonces $f(x) = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ y
- $f'(z) = \exp(z)$ y $f(0) = 1$.

Por lo tanto, para definir $\exp(z)$, consideremos la serie de potencias compleja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

por el Teorema 3.2.3, la serie converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Así, la siguiente definición tiene sentido.

Definición 4.4.1. Llamamos *función exponencial compleja* a la función

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Recordemos que en la Sección 1.6 definimos la forma trigonométrica de un número complejo z no nulo utilizando la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, siendo θ un argumento de z . Ahora comprobaremos que efectivamente esta igualdad es válida con respecto a la definición de función exponencial compleja dada.

Sea x un número real cualquiera, por la Definición 4.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned}\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n x^n \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right),\end{aligned}$$

donde podemos reconocer que la suma infinita en el primer paréntesis es la representación en serie de potencias de la función $\cos(x)$ y la suma infinita del segundo paréntesis es la representación en serie de potencias de la función $\sen(x)$. Entonces, nos queda que $\exp(ix) = \cos(x) + i \sen(x) = e^{ix}$, que habíamos definido como la fórmula de Euler. A lo largo del texto usaremos indistintamente la notación $\exp(z)$ o e^z para la función exponencial evaluada en z .

Ahora pasamos a comprobar que la función exponencial compleja tiene las propiedades exigidas y también que cumple con las propiedades esperables de una función exponencial.

Proposición 4.4.2. La función exponencial satisface las siguientes propiedades:

- (a) $\exp'(z) = \exp(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
- (b) Si $a \in \mathbb{C}$, entonces $\exp(z) \exp(a - z) = \exp(a)$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
- (c) $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$;
- (d) $\exp(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
- (e) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, para todo $z \in \mathbb{C}$;
- (f) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z))$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. (a) Por la Proposición 4.3.1, tenemos

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

(b) Para $a \in \mathbb{C}$, sea $g(z) = \exp(z) \exp(a - z)$, entonces

$$g'(z) = \exp(z) \exp(a - z) + \exp(z) (-\exp(a - z)) = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Luego, por la Proposición 4.1.8, g es constante en \mathbb{C} , es decir, existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $g(z) = w$, para todo $z \in \mathbb{C}$. En particular, $\exp(0) = 1$ y así $w = g(0) = \exp(a)$. Luego vale (b).

(c) Es consecuencia de (b) tomando $a = w + z$.

(d) Por (c), $1 = \exp(z) \exp(-z)$, luego $\exp(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$.

(e) Para $z \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \bar{z}^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \bar{z}^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} z^n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{\sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} z^n} = \overline{\exp(z)}.$$

(f) Por (e) y (c), $|\exp(z)|^2 = \exp(z) \overline{\exp(z)} = \exp(z) \exp(\bar{z}) = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2\operatorname{Re}(z))$. Entonces

$$|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re}(z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sea $z = x + yi$ un número complejo no nulo. Por la propiedad (c) de la proposición anterior tenemos que $e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi}$ y usando la fórmula de Euler obtenemos que $e^z = e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$.

4.4.2. Funciones trigonométricas complejas

La extensión de las funciones coseno y seno al plano complejo se pueden hallar, por ejemplo, usando las expresiones

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

ya que los términos de la derecha ya han sido extendidos al plano complejo.

Definición 4.4.3. Se definen las funciones trigonométricas *coseno* y *seno* mediante

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

Dado que las exponenciales son funciones enteras, el coseno y el seno resultan funciones enteras y de la periodicidad de la exponencial se deduce que las funciones coseno y seno complejas siguen siendo funciones 2π -periódicas.

Muchas de las fórmulas satisfechas por el coseno y seno reales son válidas aún en el caso complejo (véase la proposición de abajo). Sin embargo, hay que advertir que a diferencia del caso real, las funciones coseno y seno no son acotadas.

Proposición 4.4.4. Las funciones coseno y seno satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$;

(b) $\cos'(z) = -\operatorname{sen}(z)$;

(c) $\operatorname{sen}'(z) = \cos(z)$.

Demostración. (a) Por la definición de las funciones sen y cos, tenemos que

$$\operatorname{sen}^2(z) + \operatorname{cos}^2(z) = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1.$$

(b) Por la Regla de la Cadena y la Proposición 4.4.2 tenemos que

$$\operatorname{cos}'(z) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen}(z).$$

(c) Por un argumento similar a (b).

Definidos el coseno y el seno, es posible definir las otras funciones trigonométricas a partir de ellas. Por ejemplo,

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\operatorname{cos}(z)},$$

para z complejo y que no anule el coseno.

Recordando también las definiciones del seno y coseno hiperbólico en el caso real, podemos de manera natural considerar la siguiente definición.

Definición 4.4.5. Se definen las funciones trigonométricas de *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* como

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \text{para } z \in \mathbb{C}.$$

Algunas de las propiedades básicas de las funciones seno y coseno hiperbólicos son las siguientes. Dejamos la demostraciones de las mismas a cargo del lector.

Proposición 4.4.6. Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $\operatorname{senh}'(z) = \operatorname{cosh} z;$

(b) $\operatorname{cosh}'(z) = \operatorname{senh} z;$

(c) $\operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen} z;$

(d) $\operatorname{cosh}(iz) = \operatorname{cos} z.$

4.4.3. El logaritmo complejo

El objetivo aquí es extender la función real logaritmo al caso complejo. Esto es, deseamos definir una función compleja f tal que si $z = x$ es real, entonces $f(x) = \ln(x)$. Además, recuerde que la función logaritmo en el caso real puede ser vista como la inversa de la función exponencial, esto es, $\ln(x) = y$ si y solo si $x = e^y$. De la misma forma, queremos que algo similar ocurra en el caso complejo. Pero aquí debemos tener más cuidado porque la función exponencial compleja es periódica (véase el Ejercicio 4.7) y así no puede tener una única inversa. Comenzamos con las siguientes proposiciones, las cuales nos ayudaran a definir la función buscada.

Proposición 4.4.7. Para todo $0 \neq w \in \mathbb{C}$, existen infinitos números complejos z tales que $\exp(z) = w$.

Demostración. Sea w un complejo no nulo. Así tenemos que $w = |w| \exp(i\alpha)$, para cualquier $\alpha \in \arg(w)$. Buscamos $z = x + yi \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(z) = w$. Recordemos que $\exp(z) = \exp(x) \exp(yi)$ y es no nulo. Como $\exp(x) \exp(iy) = |w| \exp(i\alpha)$, entonces

$$x = \ln(|w|) \quad \text{e} \quad y = \alpha + 2n\pi, \quad \text{para algún } n \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $z = \ln(|w|) + i(\alpha + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

La proposición anterior nos muestra que la función exponencial $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es sobreyectiva y no inyectiva². La siguiente proposición nos mostrará en donde debemos restringir a la función exponencial para que sea inyectiva.

Proposición 4.4.8. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $A_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \text{Im}(z) \leq \alpha + 2\pi\}$. Entonces, la función $\exp(z)$ envía el conjunto A_α de manera inyectiva sobre el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in A_\alpha$ y supongamos que $\exp(z_1) = \exp(z_2)$. Luego $\exp(z_1 - z_2) = 1$ y entonces $z_1 - z_2 = 2\pi ni$ (véase el Ejercicio 4.8). Con lo cual, $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ y $\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2) = 2\pi n$. Notemos $y_1 = \text{Im}(z_1)$ e $y_2 = \text{Im}(z_2)$. Como $z_1, z_2 \in A_\alpha$, obtenemos que $|y_1 - y_2| < 2\pi$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $y_1 \geq y_2$. Entonces tenemos que $0 \leq y_1 - y_2 < 2\pi$ e $y_1 - y_2 = 2\pi n$, lo cual implica que $n = 0$ y así $y_1 = y_2$. Por lo tanto $z_1 = z_2$. Ahora sea $w = re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Como ya hemos visto por la Proposición 4.4.7, tomando $z = \ln(r) + i(\theta + 2\pi n)$ con $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $\exp(z) = w$. Pero existe un único n_0 tal que $\alpha < \theta + 2\pi n_0 \leq \alpha + 2\pi$. Entonces, $z = \ln(r) + i(\theta + 2\pi n_0) \in A_\alpha$.

²Una función $f: A \rightarrow B$ es *inyectiva* si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$. Una función f es *sobreyectiva* si para cada $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

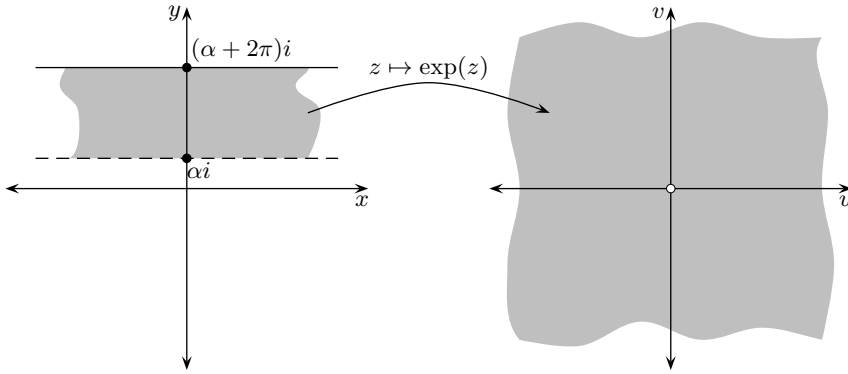


Figura 4.1: $\exp(z)$ como una función inyectiva sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

La proposición anterior nos muestra que podemos definir una función logaritmo si fijamos el argumento. Recordemos que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\arg_\alpha(z)$ denota el único argumento de z que se encuentra en el intervalo $(\alpha, \alpha + 2\pi]$.

Definición 4.4.9. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la función $\text{Log}_\alpha: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es definida por

$$\text{Log}_\alpha(z) = \ln(|z|) + i \arg_\alpha(z).$$

Observemos que se cumple que

$$\exp(\text{Log}_\alpha(z)) = \exp(\ln(|z|)) (\cos(\arg_\alpha(z)) + i \text{sen}(\arg_\alpha(z))) = z.$$

Notemos ahora que Log_α no es continua en

$$S_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \alpha \in \arg(z)\}$$

(véase la Figura 4.2). En efecto, si $z \neq 0$ es tal que $\alpha \in \arg(z)$ entonces podemos acercarnos a z por uno y otro lado de la semirrecta S_α . Consideremos la región G_α formada por el plano complejo sin el rayo que parte de 0 y forma un ángulo α con el semieje real positivo, esto es,

$$G_\alpha := \mathbb{C} \setminus (S_\alpha \cup \{0\}) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \alpha \notin \arg(z)\}$$

(véase la Figura 4.2). Si nos acercamos a z por medio de puntos de G_α con argumentos superiores y cercanos a α , o sea, tomamos una sucesión $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset G_\alpha$ tal que $z_n = |z_n| \exp(i(\alpha + \epsilon_n))$ con $\epsilon_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Log}_\alpha(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(|z_n|) + i(\alpha + \epsilon_n)) = \ln(|z|) + i\alpha.$$

Así, tenemos que $z_n \rightarrow z$ y $\text{Log}_\alpha(z_n) \rightarrow (\ln(|z|) + i\alpha)$, pero $\text{Log}_\alpha(z) = \ln(|z|) + i(\alpha + 2\pi)$, en consecuencia, por la Proposición 2.3.11, Log_α no es continua en $z \in S_\alpha$.

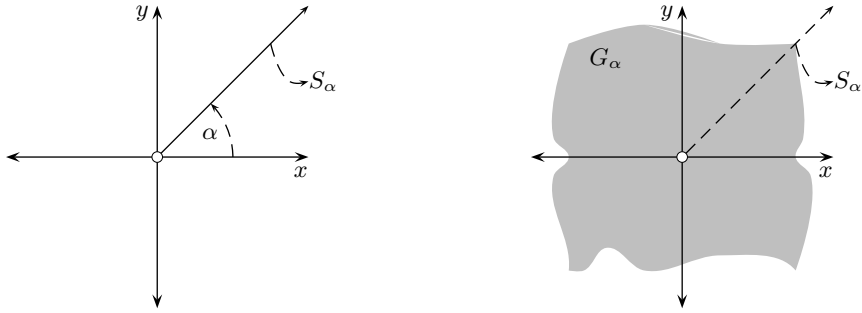


Figura 4.2: El rayo $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \alpha \in \arg(z)\}$ y la región $G_\alpha = \mathbb{C} \setminus S_\alpha$.

Definición 4.4.10. Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que f es una *rama del logaritmo* si cumple que

$$\exp(f(z)) = z. \quad (4.14)$$

Puesto que el argumento \arg_α es continuo en la región G_α , la función $\text{Log}_\alpha: G_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ es una rama del logaritmo y no se puede extender a una función continua sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Además, podemos ver que cada una de las ramas Log_α es en cierto sentido una inversa de la función exponencial. Más precisamente, si $z = x + yi$ es tal que $\alpha < y \leq \alpha + 2\pi$, entonces

$$\text{Log}_\alpha(\exp(z)) = \ln(\exp(x)) + i \arg_\alpha(\exp(z)) = x + iy = z.$$

Llamamos *rama principal del logaritmo* a la función

$$\text{Log}(z) := \text{Log}_{-\pi}(z) = \ln(|z|) + i \text{Arg}(z) = \ln(|z|) + i \arg_{-\pi}(z),$$

definida en la región $G_{-\pi} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \leq 0, \text{Im}(z) = 0\}$ que se obtiene de \mathbb{C} quitando el semieje real no positivo.

Una observación importante es que en general

$$\text{Log}(z_1 z_2) \neq \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2).$$

Por ejemplo, si $z_1 = z_2 = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, entonces $z_1 z_2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i}$ y

$$\text{Log}(z_1 z_2) = -\frac{2\pi}{3}i \neq \frac{4\pi}{3}i = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2).$$

El siguiente resultado parece indicar que todo sucede como en el análisis real. Si una función es invertible y diferenciable, entonces su inversa es diferenciable.

Proposición 4.4.11. Sean $A, B \subset \mathbb{C}$ dos conjuntos abiertos, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ y $g: B \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones continuas tales que $f(A) \subset B$ y $(g \circ f)(z) = z$ para todo $z \in A$.

Si la función g es diferenciable en $f(z_0)$ con $g'(f(z_0)) \neq 0$, entonces f es diferenciable en z_0 y

$$f'(z_0) = \frac{1}{g'(f(z_0))}.$$

Demostración. Sea $0 \neq h \in \mathbb{C}$ tal que $z_0 + h \in A$. Como $g(f(z_0)) = z_0$ y $g(f(z_0 + h)) = z_0 + h$, entonces $f(z_0) \neq f(z_0 + h)$ y

$$1 = \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{h} = \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Luego

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \left(\frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \right)^{-1}.$$

Pero por la continuidad de f y la diferenciable de g en $f(z_0)$, tenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} = g'(f(z_0)).$$

Así, f es diferenciable en z_0 y $f'(z_0) = \frac{1}{g'(f(z_0))}$.

Corolario 4.4.12. Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una rama del logaritmo sobre A . Entonces f es analítica en A y $f'(z) = 1/z$.

Por lo tanto, podemos observar del corolario anterior que todas las ramas del logaritmo $\text{Log}_\alpha: G_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ son analíticas y tienen la misma derivada.

4.4.4. Potencias complejas

Las potencias de la forma z^n , con $n \in \mathbb{Z}$, se pueden definir sin ningún tipo de problema ya que dependen solo de poder multiplicar y dividir en \mathbb{C} (véase la Sección 1.3). En la Sección 1.6 se vio como definir las raíces n -ésimas, o sea potencias de la forma $\frac{1}{n}$. Una complicación puede ser observada en este último caso, y es que la potencia $z^{\frac{1}{n}}$ toma n valores distintos. Para tratar este caso y casos más generales, resulta conveniente dar una definición general de potencia z^a para $a \in \mathbb{C}$. Para esto, el punto de partida es la siguiente propiedad en \mathbb{R} :

$$x^r = e^{\ln(x)r}, \text{ para todo } x > 0 \text{ y } r \in \mathbb{R}.$$

Definición 4.4.13. Dado $a \in \mathbb{C}$, definimos la a -ésima potencia de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, a ser cualquier número complejo β tal que

$$\beta = \exp(aw) \quad \text{con} \quad \exp(w) = z.$$

A tal potencia la denotamos por z^a .

Sabemos que w no es el único que cumple con $\exp(w) = z$, sino que $w = \ln(|z|) + i\gamma$ donde $\gamma \in \arg(z)$ es arbitrario. Por simplicidad, vamos a denotar

$$\log(z) := \ln(|z|) + i \arg(z).$$

Notemos que $\log(z)$ toma infinitos valores distintos, uno para cada $\gamma \in \arg(z)$. Por lo tanto, las a -ésimas potencias de $z \neq 0$ son

$$z^a = \exp(a \log(z)). \tag{4.15}$$

Ejemplo 4.4.14. Para todo $n \in \mathbb{Z}$ se satisface:

$$i^{-2i} = \exp(-2i \log(i)) = \exp(-2i(2n + 1/2)\pi i) = \exp((4n + 1)\pi).$$

La Definición 4.4.13 (y así también la ecuación (4.15)) proporciona efectivamente una definición consistente de z^a en el sentido que si $a = n \in \mathbb{Z}$, entonces $z^n = \exp(n \log(z))$ y si $a = \frac{1}{n}$, entonces $z^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n} \log(z))$. En efecto,

$$\exp(n \log(z)) = (\exp(\log(z)))^n = (\exp(\ln(|z|) + i \arg(z)))^n = z^n$$

y

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right) &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(|z|) + i \frac{1}{n} \arg(z)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(|z|) + i \frac{\text{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right) \\ &= |z|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i \frac{\text{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right) \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Como sabemos, $\exp\left(i \frac{\text{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right)$ tiene valores distintos solo cuando $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ y por lo tanto, de la última igualdad vemos que

$$|z|^{\frac{1}{n}} \exp\left(i \frac{\text{Arg}(z) + 2\pi k}{n}\right)$$

son las n raíces n -ésimas de z .

La ecuación (4.15) es útil también para definir las *ramas* de z^a . Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, una rama de z^a es definida sustituyendo en (4.15) $\log(z)$ por $\text{Log}_\alpha(z)$, esto es, una rama de z^a es

$$z^a = \exp(a \text{Log}_\alpha(z)).$$

Así, la *rama principal* o *valor principal* de z^a es definida a ser

$$z^a = \exp(a \text{Log}_{-\pi}(z)).$$

Ejemplo 4.4.15. $i^i = \exp(i \operatorname{Log}_{-\pi}(i)) = \exp(i(\frac{\pi}{2}i)) = \exp(-\frac{\pi}{2})$.

Proposición 4.4.16. Sea $a \in \mathbb{C}$. Entonces, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la rama $z^a = \exp(a \operatorname{Log}_\alpha(z))$ es analítica en la región $G_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \alpha \notin \arg(z)\}$ y su derivada es $(z^a)' = az^{a-1}$.

Demostración. Es claro que z^a es analítica en G_α ya que es la composición de dos funciones analíticas en G_α . Además,

$$\begin{aligned} (z^a)' &= (\exp(a \operatorname{Log}_\alpha(z)))' = (\exp(a \operatorname{Log}_\alpha(z))) \frac{a}{z} \\ &= a \frac{\exp(a \operatorname{Log}_\alpha(z))}{\exp(\operatorname{Log}_\alpha(z))} = a \exp((a-1) \operatorname{Log}_\alpha(z)) = az^{a-1}. \end{aligned}$$

4.5. Funciones armónicas

Definición 4.5.1. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \in C^2(\Omega)$. Decimos que u es *armónica* en Ω si para todo $(x, y) \in \Omega$ se verifica $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$, o sea u satisface la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$.

Ejemplo 4.5.2. La función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$ es armónica en \mathbb{R}^2 .

Como consecuencia directa de la Proposición 4.2.1 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.5.3. Sean u y v funciones definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tales $u, v \in C^2(\Omega)$. Si $f = u + iv$ es analítica en $A = \{z : z = x + iy, (x, y) \in \Omega\}$, entonces u y v son funciones armónicas en Ω .

Demostración. Por la Proposición 4.2.1, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad \text{y} \quad u_y = -v_x.$$

Por lo tanto, $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, lo que conduce a $\Delta u = 0$. De forma similar vale para v .

Supongamos que u es armónica en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. ¿Existe una función armónica v en Ω tal que $f = u + iv$ es analítica en $A = \{z : z = x + iy, (x, y) \in \Omega\}$? Si existe, se dice que v es una *armónica conjugada* de u .

Teorema 4.5.4 (Regla de Leibniz de derivación bajo la integral). Sean $I \subset \mathbb{R}$, un abierto, y $\alpha, \beta: I \rightarrow [a, b]$ funciones tal que $\alpha, \beta \in C^1(I)$. Si f y f_x son continuas en $I \times [a, b]$, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, t) dt \right) = f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, t) dt.$$

Teorema 4.5.5. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que u es armónica en Ω . Si $\Omega = \mathbb{R}^2$ o Ω es un disco en \mathbb{R}^2 , entonces u tiene una armónica conjugada.

Demostración. Por la Proposición 4.2.2 es suficiente encontrar una función armónica v tal que u y v satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Definimos

$$v(x, y) = \int_0^y u_x(x, t) dt + \phi(x), \quad (4.16)$$

y busquemos ϕ tal que $v_x(x, y) = -u_y(x, y)$. Como $u_{xx} = -u_{yy}$, diferenciando a ambos lados de (4.16) con respecto a x y utilizando la Regla de Leibniz de derivación bajo la integral conseguimos

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= \int_0^y u_{xx}(x, t) dt + \phi'(x) \\ &= - \int_0^y u_{yy}(x, t) dt + \phi'(x) \\ &= -u_y(x, y) + u_y(x, 0) + \phi'(x). \end{aligned}$$

Así, $\phi'(x) = -u_y(x, 0)$ y por ende

$$v(x, y) = \int_0^y u_x(x, t) dt - \int_0^x u_y(s, 0) ds.$$

Puesto que $v_y(x, y) = u_x(x, y)$ y

$$\begin{aligned} v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) &= (-u_{yx}(x, y) + u_{yx}(x, 0) + \phi''(x)) + u_{xy}(x, y) \\ &= -u_{yx}(x, y) + u_{yx}(x, 0) - u_{yx}(x, 0) + u_{xy}(x, y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

la prueba está completa.

Ejemplo 4.5.6. Veamos como obtener, usando el teorema anterior, la armónica conjugada de la función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y$ del Ejemplo 4.5.2. Definimos

$$v(x, y) = \int u_x(x, y) dy + \phi(x) = \int (3x^2 - 3y^2) dy + \phi(x) = 3x^2y - y^3 + \phi(x). \quad (4.17)$$

Ahora calculamos $v_x(x, y) = 6xy + \phi'(x)$. Como se debe cumplir que $v_x = -u_y$, tenemos que

$$6xy + \phi'(x) = -(-6xy + 1) \text{ lo que implica que } \phi'(x) = -1.$$

Entonces, $\phi(x) = -x + c$, donde c es una constante real. Por lo tanto, de (4.17) obtenemos que

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 - x + c.$$

El lector puede ahora verificar que la función $v(x, y)$ es en efecto armónica y armónica conjugada de $u(x, y)$.

4.6. Aplicaciones conformes

4.6.1. Conservación de Ángulos

Una función analítica f aplicará dos segmentos rectilíneos convergentes en un punto c , en dos curvas que se cortarán en $f(c)$. En esta sección probaremos que las rectas tangentes a dichas curvas se cortan según el mismo ángulo que los segmentos rectilíneos si $f'(c) \neq 0$.

Esta propiedad es evidente para funciones lineales. Por ejemplo, $f(z) = z + b$ representa una traslación que mueve cada recta paralelamente a sí misma y así es claro que se conservan los ángulos. Otro ejemplo es $f(z) = az$ donde $a \neq 0$. En efecto, si $|a| = 1$, entonces $a = e^{i\theta}$ y f representa una rotación de centro 0 y ángulo θ . Si $|a| \neq 1$, $a = Re^{i\theta}$, f representa una rotación seguida de una dilatación (si $R > 1$) o de una contracción (si $R < 1$); y de nuevo se conservan los ángulos. Una función lineal $f(z) = az + b$ con $a \neq 0$, es una composición de los dos tipos recién vistos y por lo tanto conserva también los ángulos.

En el caso general, la diferenciabilidad en c significa que se dispone de una aproximación lineal en las proximidades de c , es decir, $f(z) \simeq f(c) + f'(c)(z - c)$. Si $f'(c) \neq 0$, podemos esperar que los ángulos se conserven en las proximidades de c .

Definición 4.6.1. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva suave a trozos³. Diremos que γ tiene tangente en un punto $z = \gamma(t)$, cuando es derivable en t y $\gamma'(t) \neq 0$. A $\gamma'(t)$ se lo llama *vector tangente* a γ en $z = \gamma(t)$.

Definición 4.6.2. Sean $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dos curvas que se cortan en un punto $z = \gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ y que tienen tangente en dicho punto. La diferencia

$$\angle(\gamma_1, \gamma_2, z) := \text{Arg}(\gamma_1'(t)) - \text{Arg}(\gamma_2'(t)),$$

es llamada *el ángulo formado por γ_1 y γ_2 en el punto z* .

Definición 4.6.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que f es *conforme en un punto $z \in A$* si f transforma curvas con tangente en z en curvas con tangente en $w = f(z)$ y conserva ángulos entre curvas que se cortan en z , es decir, si $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ son curvas en A que se cortan en z y que tienen tangente en z , entonces $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ tienen tangente en w y $\angle(\gamma_1, \gamma_2, z) = \angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2, w)$. Se dice que f es *conforme en A* si es conforme en todo punto de A .

A continuación vemos que toda función continua resulta conforme en aquellos puntos donde tiene derivada no nula.

³Ver Definición 5.2.1

Proposición 4.6.4. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, $c \in A$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en c . Supongamos que f es derivable en c con $f'(c) \neq 0$. Entonces f es conforme en c .

Demostración. Sean $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ dos curvas que se cortan en un punto $c = \gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ y que tienen tangente en dicho punto. Pongamos $w = f(c)$, $\beta_1 = f \circ \gamma_1$ y $\beta_2 = f \circ \gamma_2$. Observar que $\beta_1(t) = \beta_2(t) = f(c)$. Por la Regla de la Cadena,

$$\beta'_1(t) = f'(c)\gamma'_1(t) \quad \text{y} \quad \beta'_2(t) = f'(c)\gamma'_2(t).$$

Deducimos que las curvas β_1 y β_2 tienen tangentes en $f(c)$ y

$$\begin{aligned} \angle(\beta_1, \beta_2, w) &= \text{Arg}(\beta'_1(t)) - \text{Arg}(\beta'_2(t)) \\ &= \text{Arg}(f'(c)) + \text{Arg}(\gamma'_1(t)) - (\text{Arg}(f'(c)) + \text{Arg}(\gamma'_2(t))) \\ &= \angle(\gamma_1, \gamma_2, c). \end{aligned}$$

Así, f es conforme en c .

Los ángulos no se conservan en aquellos puntos donde la derivada es cero. Por ejemplo si $f(z) = z^2$, una recta que pasa por el origen y forma con el eje real un ángulo α se transforma por medio de f en una línea recta que forma con el eje real un ángulo 2α . En general, cuando $f'(c) = 0$, el desarrollo de Taylor⁴ de f toma la forma,

$$f(z) - f(c) = (z - c)^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - c)^n \right),$$

donde $k \geq 2$. Utilizando esta ecuación, es fácil ver que los ángulos formados por las curvas que se cortan en c quedan multiplicados por un factor k en la aplicación determinada por f .

4.6.2. Transformaciones de Möbius

Las transformaciones de Möbius son uno de los ejemplos más importantes de las aplicaciones conformes, por lo que les dedicamos esta sección. Son los cocientes no triviales entre polinomios de primer grado.

Definición 4.6.5. Llamaremos *transformaciones de Möbius* a las funciones

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c y d son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

⁴Ver Teorema 6.2.1

Notar que si fuera $ad - bc = 0$ entonces $M(z)$ sería simplemente una constante. El dominio de una transformación de Möbius es \mathbb{C}_∞ si convenimos que

$$M(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} M(z) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C}_\infty, \quad \text{y} \quad M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

Si $M(z) = z + a$, entonces M es llamada una *traslación*; si $M(z) = az$ con $a \in \mathbb{R}^+$, entonces M es una *homotecia*; si $M(z) = e^{i\theta}z$, entonces M es una *rotación* y finalmente, si $M(z) = \frac{1}{z}$, entonces M es llamada *inversión*.

Claramente $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ es una función continua y tiene inversa

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

que, como vemos, es también una transformación de Möbius. Además, son conformes en cada punto $z \neq -\frac{d}{c}$, ya que

$$M'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

Por lo visto, las transformaciones de Möbius resultan ser homeomorfismos de \mathbb{C}_∞ en sí mismo. Un cálculo directo muestra que la composición de dos transformaciones de Möbius es de nuevo una transformación de Möbius, luego estas forman un grupo con la composición de aplicaciones.

Sea $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $M(z) = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}$. Así los coeficientes a, b, c y d no son únicos.

Comenzamos el estudio de estas funciones con una propiedad geométrica.

Teorema 4.6.6. La imagen de una recta o de una circunferencia por una transformación de Möbius es una recta o una circunferencia.

Demostración. El teorema no afirma que la imagen de una recta sea una recta y la imagen de una circunferencia sea una circunferencia, sino que las rectas pueden ser transformadas en circunferencias y viceversa. La circunferencia de centro (a, b) y radio $r > 0$ está formada por los puntos (x, y) que cumplen la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0.$$

Operando y multiplicando por un número real $A \neq 0$ arbitrario queda

$$A(x^2 + y^2) - 2Aax - 2Aby + A(a^2 + b^2 - r^2) = 0,$$

luego las circunferencias son los conjuntos de puntos que cumplen una ecuación del tipo

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0 \text{ con } A \neq 0 \text{ y } B^2 + C^2 - AD > 0, \quad (4.18)$$

ya que $B^2 + C^2 - AD = A^2r^2$. Recíprocamente, es fácil ver que el conjunto de los puntos que cumple la ecuación (4.18) es una circunferencia.

Por otra parte si $A = 0$ la ecuación se reduce a $2Bx + 2Cy + D = 0$ que, admitiendo $(B, C) \neq (0, 0)$, es la ecuación de una recta, y toda recta está formada por los puntos que cumplen una ecuación de este tipo.

En resumen, las circunferencias y las rectas son los conjuntos de puntos (x, y) que cumplen una ecuación del tipo (4.18), donde $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 - AD > 0$ o bien $A = 0$ y $(B, C) \neq (0, 0)$.

Si consideramos $z = x + iy$, entonces (4.18) equivale a

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \quad (4.19)$$

donde $E = B + iC$ y, $A \neq 0$ y $E\bar{E} - AD > 0$, o bien $A = 0$ y $E \neq 0$.

Convendremos en que ∞ pertenece a cualquier recta y no pertenece a ninguna circunferencia, luego una recta es un conjunto de números complejos determinados por una ecuación de tipo (4.19) con $A = 0$ más el punto ∞ y una circunferencia es un conjunto de números complejos determinados por una ecuación de tipo (4.19) con $A \neq 0$ y $E\bar{E} - AD > 0$.

Consideremos en primer lugar la inversión $M(z) = \frac{1}{z}$. El conjunto de los números complejos $z \neq 0$ que cumplen (4.19) se transforma en el conjunto de los números complejos no nulos que cumplen

$$Dz\bar{z} + Ez + \bar{E}z + A = 0.$$

Si $A \neq 0$ y $D \neq 0$ (con lo que $z = 0$ no cumple (4.19)) tenemos que el conjunto inicial era una circunferencia y su imagen también.

Si $A \neq 0$ pero $D = 0$ entonces el conjunto inicial era una circunferencia y el final es una recta. El 0 pertenecía a la circunferencia y su imagen es ∞ , que pertenece a la recta.

Si $A = 0$ y $D \neq 0$ tenemos una recta que no pasa por 0 y se transforma en una circunferencia. El 0 está en la imagen porque es la imagen de ∞ que estaba en la recta.

Finalmente si $A = D = 0$ tenemos una recta que pasa por 0 y que se transforma en otra recta que pasa por 0 (de modo que 0 e ∞ se intercambian).

Así, el teorema es cierto para la función $M(z) = \frac{1}{z}$. Análogamente se puede comprobar que el resultado es válido para $M(z) = z + b$ y $M(z) = az$.

Para el caso general con $c \neq 0$, el resultado sigue de expresar a M como composición de traslaciones, homotecias, rotaciones e inversiones (alguna de estas pueden no estar). En efecto, si

$$M_1(z) = z + \frac{d}{c}, \quad M_2(z) = \frac{1}{z}, \quad M_3(z) = \frac{bc - ad}{c^2}z \quad \text{y} \quad M_4(z) = z + \frac{a}{c},$$

entonces $M = M_4 \circ M_3 \circ M_2 \circ M_1$.

Si $c = 0$,

$$M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Así, si $M_1(z) = \frac{a}{d}z$ y $M_2(z) = z + \frac{b}{d}$ entonces $M = M_2 \circ M_1$ y por ende vale el teorema.

Con más precisión, si M es una transformación de Möbius y $M(z_0) = \infty$, entonces las imágenes de las rectas y circunferencias que pasan por z_0 han de contener a ∞ , luego han de ser rectas, y las imágenes de las rectas y circunferencias que no pasan por z_0 no han de contener a ∞ , luego han de ser circunferencias.

Por otra parte, tanto las rectas como las circunferencias dividen a \mathbb{C}_∞ en dos componentes conexas (dos semiplanos o el interior y exterior de la circunferencia) y es obvio que si una función M transforma una recta o circunferencia A en una recta o circunferencia B , entonces M es un homeomorfismo entre $\mathbb{C}_\infty \setminus A$ y $\mathbb{C}_\infty \setminus B$, luego biyecta sus dos componentes conexas, es decir, si por ejemplo M transforma una recta en una circunferencia, entonces M envía los puntos de uno de los semiplanos definidos por la recta al interior de la circunferencia y los puntos del otro semiplano al exterior.

Teorema 4.6.7. Toda transformación de Möbius M deja fijo al menos a un punto de \mathbb{C}_∞ y si M no es la identidad entonces tiene a lo sumo dos puntos fijos.

Demostración. Sea

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Supongamos primero que $c = 0$ (luego $d \neq 0$, $a \neq 0$). Entonces se cumple $M(\infty) = \infty$, luego M tiene un punto fijo. En \mathbb{C} , la ecuación $M(z) = z$ tiene a lo sumo la solución $\frac{b}{d-a}$ (siempre que $a \neq d$), luego en total hay a lo sumo dos puntos fijos.

Ahora supongamos $c \neq 0$, con lo que $M(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$, luego ∞ no es un punto fijo. Tampoco lo es el punto $-\frac{d}{c}$, pues su imagen es ∞ . Entre los puntos restantes, la ecuación $M(z) = z$ equivale a $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, que tiene una o dos soluciones en \mathbb{C} .

Una consecuencia del teorema anterior es que si una transformación de Möbius tiene tres puntos fijos entonces es la identidad. El teorema siguiente generaliza considerablemente este hecho.

Teorema 4.6.8. Si z_1, z_2, z_3 son tres puntos distintos de \mathbb{C}_∞ y w_1, w_2, w_3 son también distintos entre sí (aunque no necesariamente distintos de los anteriores), entonces existe una única transformación de Möbius M que cumple $M(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.

Demostración. La unicidad es consecuencia del teorema anterior. En efecto, si dos transformaciones M y N cumplen estas condiciones entonces $N^{-1} \circ M$ deja fijos a z_1, z_2, z_3 . Luego es la identidad y por lo tanto $M = N$.

Supongamos que z_1, z_2 y z_3 son finitos y que $w_1 = 0, w_2 = 1$ y $w_3 = \infty$. Para que una transformación

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

cumpla $M(z_1) = 0$ se ha de cumplir que $az_1 + b = 0$, o sea,

$$az + b = a(z - z_1).$$

Del mismo modo, la condición $M(z_3) = \infty$ equivale a $cz_3 + d = 0$, es decir,

$$cz + d = c(z - z_3).$$

Así, $M(z) = \frac{a}{c} \frac{z - z_1}{z - z_3}$. La condición $M(z_2) = 1$ determina el cociente

$$\frac{a}{c} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

y el resultado es

$$M(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)}. \quad (4.20)$$

Es claro que esta transformación cumple lo pedido.

Si uno de los puntos z es infinito es fácil ver que la función que resulta de tomar límites en la expresión anterior cumple lo buscado. Concretamente sirven las funciones

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} && \text{si } z_1 = \infty, \\ M(z) &= \frac{z - z_1}{z - z_3} && \text{si } z_2 = \infty, \\ M(z) &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} && \text{si } z_3 = \infty. \end{aligned} \quad (4.21)$$

En general, podemos obtener dos transformaciones M y N tales que

$$M(z_1) = 0, \quad M(z_2) = 1, \quad M(z_3) = \infty,$$

$$N(w_1) = 0, \quad N(w_2) = 1, \quad N(w_3) = \infty,$$

y entonces $N^{-1} \circ M$ es la transformación buscada.

Definición 4.6.9. Las transformaciones de Möbius M dadas en (4.20) y (4.21), que aplican z_1, z_2 y z_3 en $0, 1$ y ∞ , se llaman *razón doble* de z, z_1, z_2, z_3 y se denotan por (z, z_1, z_2, z_3) .

Teniendo en cuenta que por tres puntos no alineados pasa una única circunferencia es claro que dadas dos rectas/circunferencias existe una transformación de Möbius que transforma una en otra.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1. Demostrar que si f es diferenciable en z , entonces f es continua en z .

Ejercicio 4.2. Determinar en que puntos es diferenciable la función $f(z) = \operatorname{Re}(z)$.

Ejercicio 4.3. Sean A una región y $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$. Si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica, probar que $f^*: A^* \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es también analítica.

Ejercicio 4.4. Probar que $f(z) = |z|^2$ tiene derivada solo en el origen.

Ejercicio 4.5. Probar que $f(z) = \bar{z}$ no es analítica en \mathbb{C} , pero sin embargo es continua.

Ejercicio 4.6. Determinar dónde las siguientes funciones son diferenciables y analíticas, y determinar sus derivadas en los puntos donde sea diferenciable.

(a) $f(z) = e^{-x}e^{-yi}$;

(b) $f(z) = 2x + xy^2i$;

(c) $f(z) = e^xe^{-yi}$;

(d) $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$;

(e) $f(z) = z^2 - \bar{z}^2$.

Ejercicio 4.7. Probar que $\exp(z)$ es periódica; cada periodo es de la forma $2\pi ni$ para algún entero n .

Ejercicio 4.8. Probar que $\exp(z) = 1$ si y solo si $z = 2\pi ni$ para algún entero n .

Ejercicio 4.9. Mostrar que $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(z)\operatorname{sen}(w)$.

Ejercicio 4.10. Sea $z = x + iy$. Probar las siguientes identidades.

(a) $\cos(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$;

(b) $\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$.

Ejercicio 4.11. Hallar para que valores de z se cumplen las siguientes identidades.

- (a) $\cos z = 0$;
- (b) $\operatorname{sen} z = 0$;
- (c) $\operatorname{cosh} z = 0$;
- (d) $\operatorname{senh} z = 0$;
- (e) $\operatorname{sen} z = 10$.

Ejercicio 4.12. Sean $z_n, z \in A = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ tales que $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ y $z = r e^{i\theta}$ donde $-\pi < \theta, \theta_n < \pi$. Probar que si $\lim z_n = z$, entonces $\lim \theta_n = \theta$ y $\lim r_n = r$.

Ejercicio 4.13. Sean $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una rama del logaritmo y $n \in \mathbb{Z}$. Probar que $z^n = \exp(n f(z))$ para todo $z \in A$.

Ejercicio 4.14. Probar que la parte real de la rama principal de la función \sqrt{z} es siempre positiva.

Ejercicio 4.15. Dar la rama principal de $\sqrt{1-z}$.

Ejercicio 4.16. Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Probar que si $f(z)$ es real para todo $z \in A$, entonces f es constante en A .

Ejercicio 4.17. Probar que la función $u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ejercicio 4.18. Encontrar una función armónica conjugada de

$$e^x \cos y + e^y \cos x + xy.$$

Ejercicio 4.19. Demostrar que la función $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$ es analítica en todo el plano complejo y que $f''(z) = -f(z)$.

Ejercicio 4.20. Supongamos que $f(z) = u + iv$ es analítica y que $g(z) = v + iu$ también lo es. Demostrar que u y v deben ser constantes.

Ejercicio 4.21. Encontrar la imagen por la función z^2 de los siguientes conjuntos.

- (a) $\{(x, y) : x^2 - y^2 = c\}, c > 0$;
- (b) $\{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

Ejercicio 4.22. Describir los siguientes conjuntos.

(a) $\{z \in \mathbb{C} : e^z = i\}$; (b) $\{z \in \mathbb{C} : e^z = -1\}$; (c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{sen}(z) = 0\}$.

Ejercicio 4.23. Encontrar la imagen por la función exponencial de los siguientes conjuntos.

(a) $\{z : \operatorname{Re}(z) < 0 \text{ y } |\operatorname{Im}(z)| < \pi\}$; (b) $\{z : |\operatorname{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$.

Ejercicio 4.24. Sea $f(z) = \exp(1/z)$. Determinar la imagen de $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < r\}$ por la función f .

Ejercicio 4.25. Sea $f(z) = \sqrt{z}$. Determinar la imagen de $A = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : z \leq 0\}$ por la función f .

Ejercicio 4.26. Encontrar la imagen por la función $\operatorname{sen}(z)$ del siguiente conjunto: $\{(x, y) : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0\}$.

Ejercicio 4.27. Hallar una transformación Möbius la cual aplica los puntos $z = 0, -i \text{ y } -1$ en $w = i, 1 \text{ y } 0$, respectivamente.

Ejercicio 4.28. Sean $A = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ y $z_0 \in A$. Probar que la transformación $w = e^{i\theta_0} \left(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \right)$ aplica A en $\{z : |z| < 1\}$.

Ejercicio 4.29. Hallar una transformación que aplique $A = \{z : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ en $\{z : |z| \leq 1\}$ de manera que $z = i$ se aplica en $w = 0$, mientras que el punto en el infinito se aplica en $w = -1$.

Ejercicio 4.30. Encontrar la imagen por la función $f(z) = z + \frac{1}{z}$ de los siguientes conjuntos.

(a) $\{z \in \mathbb{R} : z \leq -1\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{R} : z \geq 1\}$;

(c) $\{z : \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Re}(z) \text{ y } z \neq 0\}$.

Ejercicio 4.31. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$. Probar que $T(R^\infty) = R^\infty$ si y solo si se pueden elegir $a, b, c \text{ y } d \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.32. Sean A una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(A)$ es un subconjunto de un círculo. Probar que f es constante en A .

Ejercicio 4.33. Sean $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$. Probar que $S = T$ si y solo si existe un número complejo $\lambda \neq 0$ tal que $\alpha = \lambda a, \beta = \lambda b, \gamma = \lambda c \text{ y } \delta = \lambda d$.

Ejercicio 4.34. Probar que una transformación de Möbius tiene ∞ como único punto fijo si y solo si es una traslación, pero no la identidad.

Ejercicio 4.35. Probar que una transformación de Möbius T satisface $T(0) = \infty$ y $T(\infty) = 0$ si y solo si $T(z) = \frac{a}{z}$, para algún $a \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 4.36. Para $|z| < 1$, definimos f por $f(z) = \exp\left(-i\text{Log}\left[i\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right)$. Probar que f manda de manera conforme $A = \{z : |z| < 1\}$ en un anillo.

Ejercicio 4.37. Manda $A = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} : |z| \leq 1\}$ sobre el disco unidad abierto por una función analítica.

Capítulo **5**

Integración Compleja

Uno de los resultados principales de este Capítulo es el Teorema de Cauchy, el cual es central en el desarrollo del resto de la teoría y sus aplicaciones. Adelantándonos un poco, el Teorema de Cauchy dice que si f es una función analítica sobre un conjunto abierto A y γ es una curva cerrada tal que ella y su interior están contenidas en A , entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Muchos de los resultados que veremos más adelante, como por ejemplo el cálculo de residuos (Sección 7.2), están relacionados de una u otra manera al Teorema de Cauchy.

5.1. Integral sobre intervalos reales

En esta sección daremos por conocida la integral de una función continua (o continua a trozos) sobre un intervalo acotado en \mathbb{R} y extenderemos esta noción hasta poder integrar funciones complejas. Recordemos:

Definición 5.1.1. Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es *continua a trozos* en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si existe una partición de $[a, b]$, digamos $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$, de modo que f es continua en $[t_{j-1}, t_j]$ para cada $j = 1, \dots, n$, los límites laterales a ambos lados existen y son finitos en cada t_j , para $j = 1, \dots, n - 1$ y, además $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)$ y $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t)$ existen y son finitos. Una función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *continua a trozos* si sus partes real e imaginaria lo son.

Definición 5.1.2. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos en $[a, b]$ de modo que f es continua en cada intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ para cada $j = 1, \dots, n$. Se define la

integral de f sobre $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(t)dt,$$

donde cada integral del lado derecho es la integral de una función continua en un intervalo acotado.

La *integral* de una función compleja de una variable real $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ se define a partir de la integral de sus partes real e imaginaria.

Definición 5.1.3. Sea $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continua a trozos. Si $h = u + iv$ con $u = \operatorname{Re}(h)$ y $v = \operatorname{Im}(h)$, se define la *integral* de h sobre $[a, b]$ como

$$\int_a^b h(t)dt := \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt.$$

Proposición 5.1.4. La integral de la Definición 5.1.3 tiene las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad.** Si $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ y $h_1, h_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones continuas a trozos, entonces tenemos que

$$\int_a^b (w_1 h_1(t) + w_2 h_2(t))dt = w_1 \int_a^b h_1(t)dt + w_2 \int_a^b h_2(t)dt.$$

(b) Si h es continua y derivable a trozos en $[a, b]$,

$$\int_a^b h'(t)dt = h(b) - h(a).$$

(c) Si $q: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una biyección con derivada continua nunca nula y $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua a trozos, entonces

$$\int_c^d h(q(t))q'(t)dt = \int_a^b h(t)dt \quad \text{si } q' > 0$$

y

$$\int_c^d h(q(t))q'(t)dt = - \int_a^b h(t)dt \quad \text{si } q' < 0.$$

(d) Si $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es continua a trozos, entonces

$$\left| \int_a^b h(t)dt \right| \leq \int_a^b |h(t)|dt.$$

Demostración. Las demostraciones son consecuencia de la Definición 5.1.3 y los resultados conocidos para integrales de funciones reales.

5.2. Integral sobre curvas

La integral que nos interesa definir más abajo es la integral de una función compleja de una variable compleja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ sobre curvas contenidas en $A \subset \mathbb{C}$. Por esta razón, vamos a comenzar por definir el tipo de curvas con las que vamos a trabajar.

Definición 5.2.1. Llamaremos *curva parametrizada* en el plano complejo \mathbb{C} a toda función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos que una curva parametrizada $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es *suave a trozos* si γ' es continua a trozos en $[a, b]$ y $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, excepto posiblemente en un número finito de puntos. Diremos que γ es *cerrada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

La imagen de una curva parametrizada $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es el conjunto $\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$. Toda curva parametrizada tiene asociada una *orientación*, determinada por la dirección en la cual $\gamma(t)$ va trazando la imagen de γ a medida que t aumenta de a a b (véase la Figura 5.1).

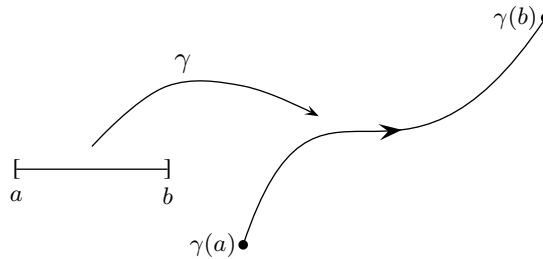


Figura 5.1: Curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Dos curvas parametrizadas $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ se dicen *equivalentes* si existe una función biyectiva con derivada continua $q: [c, d] \rightarrow [a, b]$ tal que $q'(t) > 0$ y $\beta(t) = \gamma(q(t))$ para $t \in [c, d]$. Entonces, tenemos que $\gamma([a, b]) = \beta([c, d])$ y por la condición $q' > 0$ se deduce que γ y β tienen la misma orientación. Por lo tanto, γ y β representan la misma curva. También diremos que β es una *reparametrización* de γ . *De aquí en adelante diremos que γ es una curva, entendiendo que $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una de sus parametrizaciones.* En muchos casos resulta conveniente trabajar con curvas que no se crucen. Para esto se introduce la siguiente definición.

Definición 5.2.2. Se dice que una curva es *simple* si admite una parametrización por medio de una función inyectiva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos también que una curva es *cerrada y simple* si admite una parametrización $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que γ es inyectiva en (a, b) y $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Ejemplo 5.2.3. Un ejemplo sencillo, pero útil, de una curva cerrada y simple es el de una circunferencia. Consideremos la circunferencia $C(z_0, r)$ centrada en un

punto z_0 y de radio r , la cual por definición es el conjunto

$$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

Una parametrización de la circunferencia $C(z_0, r)$ orientada positivamente (en sentido contrario a las manecillas del reloj) es dada por

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}, \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi].$$

Mientras una parametrización de $C(z_0, r)$ orientada negativamente (en sentido de las manecillas del reloj) es

$$\gamma(t) = z_0 + e^{-it}, \quad \text{donde } t \in [0, 2\pi].$$

En lo que sigue, solo vamos a considerar curvas suaves a trozos, razón por la que hablaremos de curvas, sobrentendiendo que se trata de curvas de este tipo.

Observación 5.2.4. Un resultado intuitivamente claro pero difícil de probar en detalle es que toda curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, cerrada y simple, separa el plano \mathbb{C} en dos conjuntos conexos, uno acotado, interior a la trayectoria de γ y el otro no acotado, exterior a la trayectoria de γ . Este resultado se conoce como el *Teorema de Jordan* y muchas veces se llama *curva de Jordan* a una curva cerrada y simple.

Se dice que una curva cerrada y simple está *orientada positivamente* si al recorrerla (en su orientación), su interior queda siempre a la izquierda de la curva.

Definición 5.2.5. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, γ una curva contenida en A con parametrización $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en A . Definimos la *integral de f a lo largo de γ* por

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Notar que $f(\gamma)\gamma'$ es una función continua a trozos en $[a, b]$.

En la definición anterior, la integral de f a lo largo de una curva γ , no depende de la parametrización elegida para γ . Esto es lo que prueba la siguiente proposición.

Proposición 5.2.6. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en A y $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva tal que $\gamma([a, b]) \subset A$. Si $\tilde{\gamma}: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ es otra parametrización de la curva γ (esto es, γ y $\tilde{\gamma}$ son parametrizaciones equivalentes, véase la pág. 87) entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Demostración. Dado que $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\tilde{\gamma}: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ son curvas (parametrizadas) equivalentes, existe una función biyectiva con derivada continua $q: [c, d] \rightarrow [a, b]$ tal que $q' > 0$ y $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(q(t))$ para cada $t \in [c, d]$. Entonces, por la Proposición 5.1.4 (c) con $h = (f \circ \gamma)\gamma'$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz &= \int_c^d f(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'(t) dt = \int_c^d f(\gamma(q(t))) \gamma'(q(t)) q'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.7. Sean $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ y γ el arco de la circunferencia unidad que va de 1 a i en sentido positivo, esto es, en dirección contraria a las manecillas del reloj. Para encontrar el valor de $\int_{\gamma} f(z) dz$ debemos primero elegir una parametrización de γ . Elegimos la usual, $\gamma(t) = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) (-\operatorname{sen}(t) + i \cos(t)) dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \operatorname{sen}(t) dt + i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt \\ &= \left. \frac{1}{2} \cos^2(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + i \left. \left(t + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} + i \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.8. Evaluemos la integral $\int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz$, donde γ es la circunferencia centrada en el punto z_0 y de radio r (orientada positivamente). Tomamos como parametrización de γ a $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Por la Regla de la Cadena tenemos que $\gamma'(t) = ire^{it}$. Entonces,

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z_0} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Si $f = u + iv$ y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, entonces (suponiendo por sencillez que γ es suave en $[a, b]$) tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) (x'(t) + iy'(t)) dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)) dt \\ &\quad + i \int_a^b (u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)) dt \end{aligned}$$

La fórmula anterior puede ser fácilmente recordada escribiendo

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(udy + vdx).$$

Luego,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (vdx + udy). \quad (5.1)$$

Hay dos operaciones básicas que podemos considerar sobre las curvas. La concatenación de dos curvas (que terminan y comienzan adecuadamente) y el cambio de orientación de una curva. La siguiente es la formalización de estas ideas.

Definición 5.2.9. Si $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos curvas con $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, definimos la curva suave a trozos $\gamma_1 + \gamma_2: [a, c] \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c]. \end{cases}$$

Diremos que la curva $\gamma_1 + \gamma_2$ es la *concatenación* de las curvas γ_1 y γ_2 .

Definición 5.2.10. Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva, definimos la curva $-\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mediante $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$ para cada $t \in [a, b]$. Diremos que $-\gamma$ es la *curva opuesta* de γ .

Proposición 5.2.11. La integral de la Definición 5.2.5 satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad.** Si $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva tal que $\gamma([a, b]) \subset A$ y $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ son continuas en el abierto A , entonces

$$\int_{\gamma} (w_1 f(z) + w_2 g(z)) dz = w_1 \int_{\gamma} f(z) dz + w_2 \int_{\gamma} g(z) dz.$$

(b) **Aditividad.** Si $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos curvas con $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en el abierto A con $\gamma_1([a, b]) \subset A$ y $\gamma_2([b, c]) \subset A$, entonces

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

(c) **Regla de Inversión.** Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en el abierto A con $\gamma([a, b]) \subset A$, entonces

$$\int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

- (d) Sean $q: [c, d] \rightarrow [a, b]$ una biyección con derivada continua nunca nula, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ continua en el abierto A con $\gamma([a, b]) \subset A$. Si $\beta = \gamma \circ q$ y $q' < 0$, entonces tenemos que

$$\int_{\beta} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Demostración. Las primeras dos afirmaciones se siguen claramente de las definiciones anteriores.

- (c) Tomando el cambio de variable $s = a + b - t$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(a + b - t))(-\gamma'(a + b - t))dt \\ &= \int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\ &= - \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\ &= - \int_{\gamma} f(z)dz. \end{aligned}$$

- (d) Por la Proposición 5.1.4 (c), conseguimos

$$\begin{aligned} \int_{\beta} f(z)dz &= \int_c^d f(\beta(t))\beta'(t)dt = \int_c^d f(\gamma(q(t)))\gamma'(q(t))q'(t)dt \\ &= - \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = - \int_{\gamma} f(z)dz. \end{aligned}$$

Observación 5.2.12. La curva parametrizada $\beta = \gamma \circ q$ en la condición (d) de la proposición anterior es la misma curva que γ , esto es, $\beta([c, d]) = \gamma([a, b])$. Pero, dado que $q' < 0$, β está orientada en sentido contrario a la orientación de γ . Por lo tanto, las curvas parametrizadas γ y $-\beta$ son equivalentes o en otras palabras, $-\beta$ es una reparametrización de γ .

Definición 5.2.13. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en A y $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva tal que $\gamma([a, b]) \subset A$. Definimos la *integral de f respecto a la longitud de arco* por

$$\int_{\gamma} f(z)|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Notar que si $f(z) = 1$ y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, entonces

$$\int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Esta es la longitud de arco de la curva γ y la denotaremos por $\ell(\gamma) := \int_{\gamma} |dz|$.

Proposición 5.2.14. Sean $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas en el abierto A y $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva tal que $\gamma([a, b]) \subset A$. Entonces, la integral de la Definición 5.2.13 satisface las siguientes propiedades.

(a) **Linealidad.** Si $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, entonces

$$\int_{\gamma} (w_1 f(z) + w_2 g(z)) |dz| = w_1 \int_{\gamma} f(z) |dz| + w_2 \int_{\gamma} g(z) |dz|.$$

(b) **Aditividad.** Si $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2: [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ son dos curvas tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ y $\gamma_1([a, b]) \cup \gamma_2([b, c]) \subset A$, entonces

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) |dz| = \int_{\gamma_1} f(z) |dz| + \int_{\gamma_2} f(z) |dz|.$$

(c) $\int_{-\gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz|$.

(d) **Desigualdad Fundamental.**

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

En particular, si $\max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| = K$, entonces $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq K \ell(\gamma)$.

Demostración. Las primeras tres afirmaciones se siguen claramente de la Definición 5.2.13.

(d) Si $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, la primera desigualdad es trivial. En caso contrario, si $\theta \in \arg \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right)$, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} \int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \right) dt \\ &\leq \left| \int_a^b \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \right) dt \right| \leq \int_a^b \left| \operatorname{Re} \left(e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \right) \right| dt \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f(z)| |dz|. \end{aligned}$$

Finalmente, la segunda desigualdad es consecuencia de la primera.

Los siguientes dos teoremas son útiles a la hora de evaluar ciertas integrales. El primero de ellos, es el análogo del Teorema Fundamental del Cálculo en el análisis real, el cual afirma que la integral de la derivada de una función es la diferencia de los valores de la función en los puntos extremos del intervalo de integración. El segundo teorema da condiciones necesarias y suficientes para que la integral de una función no dependa de la curva elegida que une dos puntos seleccionados.

Teorema 5.2.15 (Teorema Fundamental del Cálculo). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A tal que F' es continua en A . Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva tal que $\gamma([a, b]) \subset A$, entonces se cumple

$$\int_{\gamma} F'(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

En particular, si γ es cerrada se tiene $\int_{\gamma} F'(z)dz = 0$.

Demostración. Es consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} . En efecto,

$$\int_{\gamma} F'(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Observemos que el Teorema 5.2.15 nos asegura que la integral $\int_{\gamma} F'(z)dz$ no depende de la curva que une los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$. Esto es, para todo $z_1, z_2 \in A$, tenemos que $\int_{\gamma} F'(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$ para cualquier elección de la curva γ contenida en A que vaya del punto z_1 al punto z_2 .

Teorema 5.2.16 (Independencia del Camino). Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en A . Las siguientes condiciones son equivalentes

- (a) $\int_{\gamma} f(z)dz$ es independiente del camino, es decir, $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$ para todo par de curvas γ_1 y γ_2 que comienzan en el mismo punto z_1 y terminan en el mismo punto z_2 ;
- (b) $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en A ;
- (c) f admite una *primitiva* en A , es decir, existe una función analítica $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ en A tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$.

Demostración. (a) \Rightarrow (b) Sea γ una curva cerrada en A . Por (a) y por la condición (c) de la Proposición 5.2.11, tenemos que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{-\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Luego (b) sigue inmediatamente.

(b) \Rightarrow (a) Sean γ_1 y γ_2 dos curvas contenidas en A que unen un punto $z_1 \in A$ con otro punto $z_2 \in A$. Entonces $\gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2)$ es una curva cerrada y por (b),

$$0 = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

(c) \Rightarrow (a) Sean γ_1 y γ_2 dos curvas contenidas en A que unen un punto $z_1 \in A$ con otro punto $z_2 \in A$. Por (c), existe $F: A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en A tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$. Así, el Teorema Fundamental del Cálculo implica

$$\int_{\gamma_i} f(z)dz = \int_{\gamma_i} F'(z)dz = F(z_2) - F(z_1), \quad i = 1, 2.$$

(a) \Rightarrow (c) Fijemos (arbitrariamente) un punto $z_0 \in A$. Si z es un punto cualquiera de A , por ser A una región hay una curva γ contenida en A que une z_0 con z . Definimos

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw.$$

Notar que por (a) F no depende de la curva γ en A que utilicemos para unir z_0 con z . Probemos que F es diferenciable en todo punto $z \in A$, con $F'(z) = f(z)$. Sea $\epsilon > 0$, al ser A abierto y f continua en A , existe $\delta > 0$ tal que $|f(w) - f(z)| < \epsilon$, para todo $w \in D(z; \delta) \subset A$. Dado un punto cualquiera $z' \in D(z; \delta)$ distinto de z , sea $L \subset D(z; \delta)$ el segmento que une z con z' . Entonces

$$F(z') - F(z) = \int_{\gamma+L} f(w)dw - \int_{\gamma} f(w)dw = \int_L f(w)dw.$$

Puesto que $f(z)(z' - z) = f(z) \int_L 1dw = \int_L f(z)dw$, conseguimos

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z') - F(z)}{z' - z} - f(z) \right| &= \frac{|F(z') - F(z) - f(z)(z' - z)|}{|z' - z|} \\ &= \frac{|\int_L f(w)dw - \int_L f(z)dw|}{|z' - z|} = \frac{|\int_L (f(w) - f(z))dw|}{|z' - z|} \\ &\leq \frac{\int_L |f(w) - f(z)| |dw|}{|z' - z|} \leq \frac{\epsilon \ell(L)}{|z' - z|} = \epsilon. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.17. Sean $f(z) = e^z$ y γ el segmento recto que une el punto 1 con i . Teniendo en cuenta que la función exponencial e^z es analítica y que $f(z) = e^z$ es la derivada de $F(z) = e^z$, tenemos por el Teorema Fundamental del Cálculo que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} F'(z)dz = F(i) - F(1) = e^i - e^1.$$

Ejemplo 5.2.18. Evaluemos $\int_{\gamma} 4z^3 dz$, donde γ es la porción de la elipse $x^2 + 4y^2 = 1$ que va del punto $z = 1$ al punto $z = i/2$ en sentido positivo. Observando que $4z^3$ es continua y es la derivada de la función analítica $F(z) = z^4$, tenemos por el Teorema Fundamental del Cálculo que $\int_{\gamma} 4z^3 dz = (i/2)^4 - 1^4 = -15/16$.

Ejemplo 5.2.19. Si γ es una curva cerrada, entonces $\int_{\gamma} \cos(z) dz = 0$, porque la función $\cos(z)$ admite una primitiva. La primitiva de $\cos(z)$ es la función analítica $\sin(z)$.

Ejemplo 5.2.20. Consideremos la función $f(z) = \frac{1}{z}$ sobre la región $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. La función f no admite una primitiva en la región $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, porque si consideramos el círculo unidad parametrizado por $\gamma(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i \neq 0.$$

5.3. Teorema de Cauchy

Nos interesa ahora tratar un resultado fundamental de la teoría de variable compleja, conocido como Teorema de Cauchy, o de Cauchy-Goursat. Este resultado dice, en rasgos generales, que si γ es una curva cerrada y f es una función analítica en γ y en su interior, entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Veremos primero un caso un poco restringido pero que puede ser probado muy fácilmente a partir del siguiente Teorema de Green.

Teorema 5.3.1 (Teorema de Green). Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $F = (P; Q): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo continuamente diferenciable¹. Sean γ una curva cerrada, simple y orientada positivamente en Ω y \overline{D} el conjunto formado por la traza de γ junto con su componente conexa interior. Si $\overline{D} \subset \Omega$, entonces

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{\overline{D}} (Q_x - P_y) dx dy.$$

Definición 5.3.2. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y γ una curva cerrada contenida en A . Se dice que γ es *homotópicamente nula en A* si el conjunto formado por la traza de γ junto con su componente conexa interior está contenido en A .

La noción de curva homotópicamente nula es equivalente a que exista una deformación continua de la curva a una curva constante, con la deformación contenida en A . En otros textos, esta última es la definición usual de curva homotópicamente nula (véase Figura 5.3).

¹Véase Mardsen y Tromba, 2004.

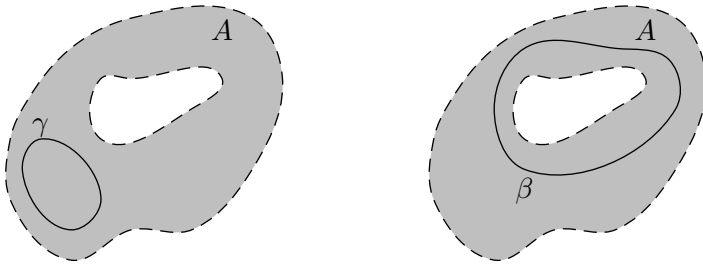


Figura 5.2: γ es homotópicamente nula en A y β no es homotópicamente nula en A .

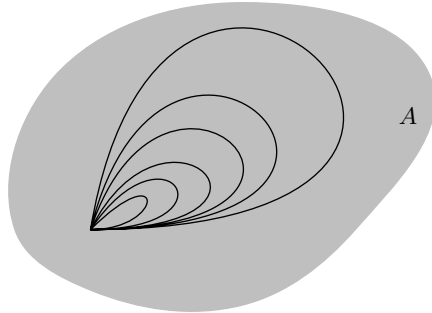


Figura 5.3: Curva homotópicamente nula

Teorema 5.3.3 (Versión preliminar del Teorema de Cauchy). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A tal que f' es continua en A . Si γ es una curva cerrada, simple, orientada positivamente y homotópicamente nula en A , entonces $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Demostración. Supongamos que $f = u + iv$ y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Entonces, por (5.1) y aplicando el Teorema de Green, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma} (udx - vdy) + i \int_{\gamma} (vdx + udy) \\ &= \iint_{\overline{D}} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{\overline{D}} (u_x - v_y) dx dy, \end{aligned}$$

donde $\overline{D} \subset A$ es el conjunto formado por la traza de γ junto con su componente conexa interior. Ahora bien, siendo f analítica en A , valen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ en A , y por lo tanto los integrandos se anulan idénticamente en A . Así, $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

El Teorema 5.3.3 impone que, más allá de ser analítica en A , la función f debe tener derivada continua allí. Este requerimiento proviene del método de demostración (el Teorema de Green) y puede ser eliminada.

Lema 5.3.4 (Lema Integral de Goursat). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Si T es un triángulo contenido en A , entonces

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0$$

donde ∂T es la frontera de T en cualquiera de las dos orientaciones.

Demostración. Dado un triángulo T , consideremos una partición de este en cuatro triángulos T_j , $1 \leq j \leq 4$, construidos trazando los segmentos que unen los puntos medios de cada lado de T , (véase la Figura 5.4). Recordar que $\ell(\partial T)$ es la longitud (perímetro) del triángulo T . Observar que

$$\begin{aligned} \ell(\partial T_j) &= \frac{1}{2}\ell(\partial T), \quad 1 \leq j \leq 4, \quad \text{y} \\ \max_{z,w \in T} |z - w| &\leq \ell(\partial T), \quad \text{para todo triángulo } T. \end{aligned} \tag{5.2}$$

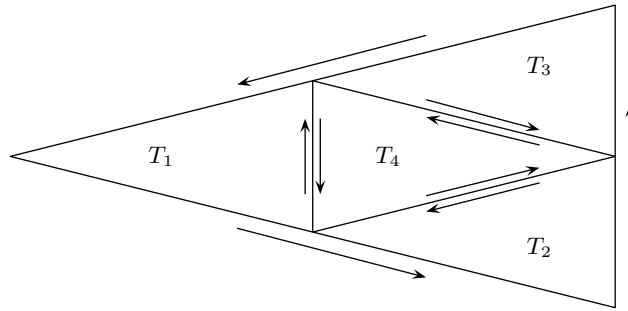


Figura 5.4: Partición de T en T_1, T_2, T_3 y T_4 .

Consideremos para cada triángulo T_j de la partición, la misma orientación que tiene T . Dado que los lados de los triángulos T_j interiores a T son recorridos dos veces, una en sentido contrario a la otra, la propiedad aditiva de la integral implica que

$$\int_{\partial T} f(z)dz = \sum_{j=1}^4 \int_{\partial T_j} f(z)dz.$$

Claramente, existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, tal que $\left| \int_{\partial T_i} f(z)dz \right| \geq \left| \int_{\partial T_j} f(z)dz \right|$ para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Llamemos $T^1 := T_i$. Por lo tanto

$$\left| \int_{\partial T} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T^1} f(z)dz \right|. \tag{5.3}$$

Repitiendo indefinidamente el proceso anterior, obtenemos una sucesión de triángulos encajados $T^0 := T \supset T^1 \supset \dots \supset T^n \supset T^{n+1} \supset \dots$ (véase la Figura 5.5),

tales que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\ell(\partial T^n) = \frac{1}{2^n} \ell(\partial T) \quad \text{y} \quad \left| \int_{\partial T^n} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right|. \quad (5.4)$$

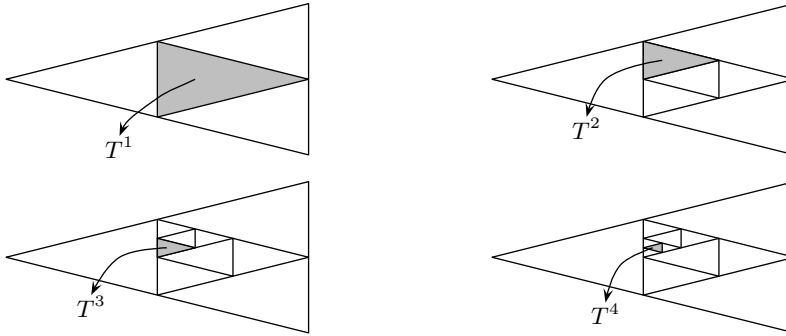


Figura 5.5: La sucesión $T = T^0 \supset T^1 \supset T^2 \supset T^3 \supset T^4 \supset \dots$

Por el Teorema de Encaje de Cantor para conjuntos compactos², existe $z_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n$. Como f es analítica en A , existe $f'(z_0)$ y, por lo tanto, la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

es continua en A y

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g(z)(z - z_0), \quad z \in A.$$

Ya que las funciones $f(z_0)$ y $f'(z_0)(z - z_0)$ admiten primitivas en todo \mathbb{C} , por el Teorema Fundamental del Cálculo sus integrales a lo largo de cualquier curva cerrada son nulas. Así, integrando sobre ∂T^n miembro a miembro en la última igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial T^n} f(z) dz &= \int_{\partial T^n} f(z_0) dz + \int_{\partial T^n} f'(z_0)(z - z_0) dz + \int_{\partial T^n} g(z)(z - z_0) dz \\ &= \int_{\partial T^n} g(z)(z - z_0) dz. \end{aligned} \quad (5.5)$$

² Véase Stein y Shakarchi, 2010.

Teniendo en cuenta, (5.2), (5.4) y la Desigualdad Fundamental,

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial T^n} f(z) dz \right| = 4^n \left| \int_{\partial T^n} g(z)(z - z_0) dz \right| \\
 &\leq 4^n \max_{z \in \partial T^n} |g(z)(z - z_0)| \ell(\partial T^n) \leq 4^n \max_{z \in \partial T^n} |g(z)| \ell(\partial T^n)^2 \\
 &\leq 4^n \max_{z \in \partial T^n} |g(z)| \left(\frac{\ell(\partial T)}{2^n} \right)^2 \\
 &= \ell(\partial T)^2 \max_{z \in \partial T^n} |g(z)|.
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Finalmente, dado $\epsilon > 0$ arbitrario, por la continuidad de g en z_0 , existe un $\delta > 0$ tal que $g(D(z_0, \delta)) \subset D(0, \epsilon)$. Por otra parte, como el diámetro de los triángulos T^n tiende a 0 y $z_0 \in T^n$ para todo n , existe un n_0 tal que $T^n \subset D(z_0, \delta)$ si $n \geq n_0$. En consecuencia, $|g(z)| < \epsilon$ para todo $z \in T^n$ y para todo $n \geq n_0$. Luego, de (5.6)

$$\left| \int_{\partial T} f(z) dz \right| < \epsilon \ell(\partial T)^2,$$

lo que prueba que $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$.

Teorema 5.3.5 (Teorema de Cauchy-Goursat). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Si γ es una curva cerrada y homotópicamente nula en A , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Se hará la demostración en tres partes; en primer lugar, considerando polígonos simples; en segundo lugar, considerando curvas cerradas y simples; y por último considerando curvas cerradas no simples.

(a) Sea P un polígono simple de n vértices contenido en A . Una triangulación interior de P es una subdivisión de P en regiones triangulares de interiores disjuntos cuyos vértices son exclusivamente vértices de P . Dos vértices u y v de P determinan una diagonal interna de P si el segmento abierto \overline{uv} está contenido en el interior de P . En una triangulación de P los lados de cada triángulo son o bien lados de P o bien diagonales internas. Todo polígono de $n > 3$ vértices admite una diagonal interna y todo polígono simple admite una triangulación. Además, toda triangulación de un polígono de n vértices tiene $n - 2$ triángulos y $n - 3$ diagonales internas. Existen diversos algoritmos de triangulación (Algoritmo triangulación Mehlhorn, Algoritmo de partición Hertel-Mehlhorn, etc). Considerando la orientación de P y de los triángulos inducida por un orden de los vértices y,

teniendo en cuenta la propiedad aditiva de las integrales, se obtiene

$$\int_P f(z)dz = \sum_{j=1}^{n-2} \int_{\partial T_j} f(z)dz,$$

ya que se integra dos veces sobre los lados interiores al polígono y con orientaciones contrarias. Ahora, aplicando el Lema Integral de Goursat, conseguimos $\int_P f(z)dz = 0$.

(b) Sea γ una curva cerrada, simple y homotópicamente nula en A . La prueba requiere un poco de topología. La primera afirmación es que para algún $\rho > 0$, la versión ρ -engrasada de la curva γ vive en la región A , esto es, existe $\rho > 0$ tal que

$$\bigcup_{z \in \gamma} \overline{D(z, \rho)} \subset A. \tag{5.7}$$

En efecto, si $A = \mathbb{C}$, esto es obvio. Supongamos $\mathbb{C} \setminus A \neq \emptyset$ y definimos la función $d: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$d(z) = d(z, \mathbb{C} \setminus A) = \inf\{|z - w| : w \in \mathbb{C} \setminus A\}.$$

Como d es continua y γ es compacto, d alcanza un mínimo el cual es positivo. Luego, si $2\rho = \min_{z \in \gamma} d(z)$, entonces

$$|z - w| \geq 2\rho, \quad \text{para todo } z \in \gamma \text{ y para todo } w \in \mathbb{C} \setminus A,$$

y por lo tanto (5.7) se satisface.

Ahora llamemos R a la cinta $R := \bigcup_{z \in \gamma} \overline{D(z, \rho)} \subset A$, véase la Figura 5.6. Claramente, $\gamma \subset R$.

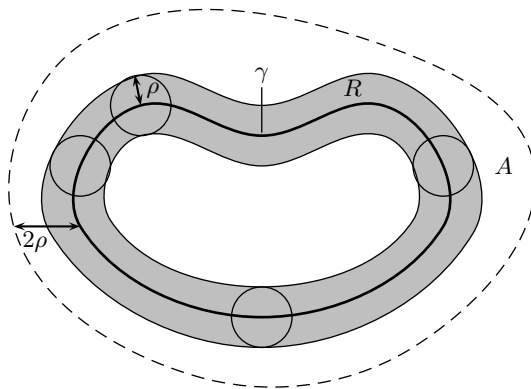


Figura 5.6: Construcción de la cinta R conteniendo a γ y contenida en A

Como R es un conjunto compacto y f es continua en A , f es uniformemente continua en R . Así, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $|z - w| < \delta_0$, entonces

$$|f(z) - f(w)| < \frac{\epsilon}{2\ell(\gamma)}.$$

Sea $0 < \delta < \min\{\delta_0, \rho\}$ y consideremos una partición de γ en n arcos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ tal que $\ell(\gamma_j) < \delta$, para $1 \leq j \leq n$. Notemos z_j y z_{j+1} a los extremos de γ_j . Consideremos también el polígono P formado por los segmentos $P_j = \overline{z_j z_{j+1}}$. Como la distancia entre dos vértices consecutivos de P es menor que δ , tenemos que el polígono P está contenido en R (véase la Figura 5.7). Por consiguiente (a) implica

$$\int_P f(z) dz = 0. \quad (5.8)$$

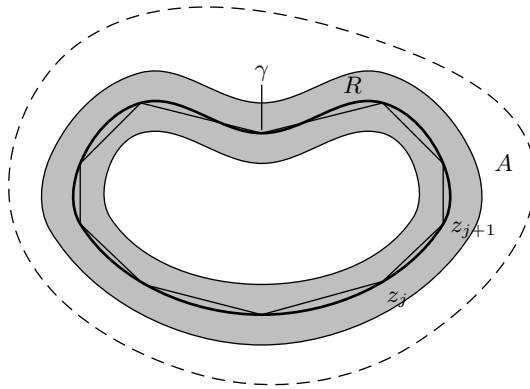


Figura 5.7: Polígono P aproximando a γ .

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, $\int_{\gamma_j} f(z) dz = \int_{P_j} f(z) dz = f(z_j)(z_{j+1} - z_j)$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_j} f(z) dz - \int_{P_j} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma_j} (f(z) - f(z_j)) dz - \int_{P_j} (f(z) - f(z_j)) dz \right| \\ &\leq \left| \int_{\gamma_j} (f(z) - f(z_j)) dz \right| + \left| \int_{P_j} (f(z) - f(z_j)) dz \right| \\ &\leq \max_{z \in \gamma_j} |f(z) - f(z_j)| \ell(\gamma_j) + \max_{z \in P_j} |f(z) - f(z_j)| \ell(P_j) \\ &< \frac{\epsilon}{2\ell(\gamma)} (\ell(\gamma_j) + \ell(P_j)) \leq \frac{\epsilon}{\ell(\gamma)} \ell(\gamma_j). \end{aligned}$$

y de (5.8),

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_P f(z) dz \right| = \left| \sum_{j=1}^n \left(\int_{\gamma_j} f(z) dz - \int_{P_j} f(z) dz \right) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{\gamma_j} f(z) dz - \int_{P_j} f(z) dz \right| < \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon}{\ell(\gamma)} \ell(\gamma_j) = \epsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, dado que se ha tomado $\epsilon > 0$ arbitrario.

(c) Sea γ una curva cerrada, no simple y homotópicamente nula en A , pero que se intersecta consigo misma un número finito de veces. Se descompone a γ en curvas cerradas simples (ver la Figura 5.8) y se aplica el resultado de (b) a cada una de las curvas de la descomposición.

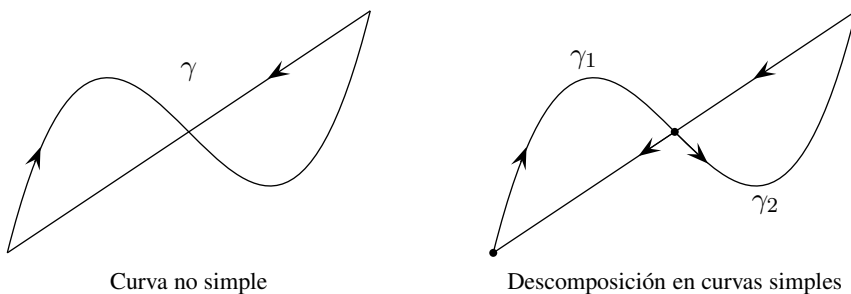


Figura 5.8: Descomposición de curvas cerradas no simples en curvas cerradas simples.

Como la integral sobre la curva original es la suma de las integrales sobre las curvas simples, se obtiene el resultado deseado.

Observación 5.3.6. Los resultados de los Teoremas 5.3.3 y 5.3.5 se pueden extender al caso más general en que las curvas cerradas γ son rectificables³ (véase [4, Sección 6 del Capítulo IV]).

Definición 5.3.7. Se dice que una región $A \subset \mathbb{C}$ es *simplemente conexa* si toda curva cerrada contenida en A es homotópicamente nula en A .

Ejemplo 5.3.8. (1) El plano \mathbb{C} , un disco (abierto) y un semiplano, son regiones simplemente conexas.

(2) Una corona circular y una circunferencia no son regiones simplemente conexas.

³Una curva, no necesariamente suave a trozos, es rectificable si tiene longitud finita.

De una manera muy inocente, podemos decir que una región es simplemente conexa si no tiene agujeros en su interior, por lo que cualquier curva cerrada contenida en la región tiene su interior también contenido en ella.

Corolario 5.3.9. Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Si γ es una curva cerrada en A , entonces $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Veamos como se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat para probar la existencia de ramas del logaritmo en regiones simplemente conexas.

Proposición 5.3.10. Sea A una región simplemente conexa tal que $0 \notin A$. Sean $z_0 \in A$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(w_0) = z_0$. Para cualquier curva γ contenida en A que une z_0 con un punto $z \in A$, el número

$$f_{z_0 w_0}(z) = w_0 + \int_{\gamma} \frac{dw}{w} \tag{5.9}$$

no depende de γ y la función $f_{z_0 w_0}: A \rightarrow \mathbb{C}$ definida por (5.9) define una rama del logaritmo sobre A .

Demostración. La analiticidad de $f(z) = \frac{1}{z}$ en A y el Corolario 5.3.9 indican, por el Teorema 5.2.16, que $f_{z_0 w_0}$ es independiente del camino que une z_0 a z . De nuevo por el Teorema 5.2.16, tenemos que f tiene una primitiva F en A y por ende $f_{z_0 w_0}(z) = w_0 + F(z) - F(z_0)$. Sea

$$g(z) = z \exp(-f_{z_0 w_0}(z)).$$

Entonces, $g'(z) = \exp(-f_{z_0 w_0}(z)) - z \exp(-f_{z_0 w_0}(z)) \frac{1}{z} = 0$ para todo $z \in A$. Por la Proposición 4.1.8, $c = g(z) = z \exp(-f_{z_0 w_0}(z))$, para toda $z \in A$. Puesto que c no puede ser 0 ya que $0 \notin A$ y $\exp(w) \neq 0$, entonces $\exp(f_{z_0 w_0}(z)) = \frac{z}{c}$. Pero $\frac{z_0}{c} = \exp(f_{z_0 w_0}(z_0)) = \exp(w_0) = z_0$ y por ende $c = 1$. Finalmente, como F es analítica, entonces $f_{z_0 w_0}$ es analítica y la prueba está completa.

Observación 5.3.11. Cabe observar que la rama no es única ya que depende de la elección de z_0 . Además, notar que si A es la región simplemente conexa $G_{-\pi}$ y $z_0 = 1$, entonces $w_0 = 0$ y $f_{z_0 w_0}$ es la rama principal del logaritmo. Para esto, usar el camino de integración γ como se muestra en la Figura 5.9.

Una consecuencia del Teorema 5.3.5 es el siguiente resultado que relaciona el valor de la integral sobre distintas curvas.

Teorema 5.3.12. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y γ una curva cerrada, simple y homotópicamente nula en A con orientación positiva. Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ curvas cerradas, simples, orientadas positivamente e interiores a γ y cuyos interiores no

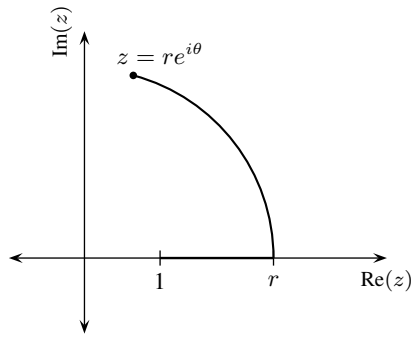


Figura 5.9: Camino de integración para la rama principal del logaritmo.

tienen puntos en común (véase la Figura 5.10 (a)). Si f es una función analítica en el abierto A excepto en puntos interiores a cada $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

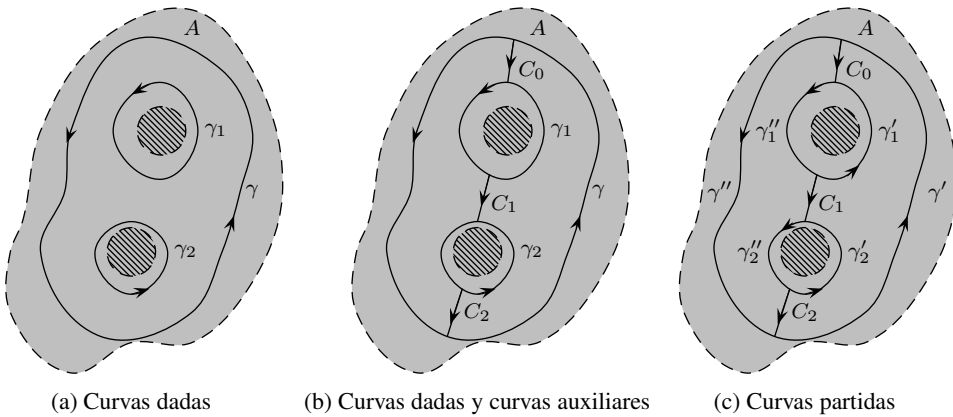


Figura 5.10: Curvas del Teorema 5.3.12.

Demostración. Comenzamos por definir curvas simples C_0, \dots, C_n tales que todas están contenidas entre γ y las γ_j , sin cortar ninguna de ellas salvo en los extremos. La orientación se elige de modo de que las conexiones ocurran como se describe a continuación: C_0 conecta γ con γ_1 , C_1 conecta γ_1 con γ_2 , y así siguiendo hasta C_n que conecta γ_n con γ . El resultado se muestra en la Figura 5.10 (b). Luego, usando los puntos de intersección de γ con C_0 y C_n se separa γ como $\gamma = \gamma' + \gamma''$. De modo análogo, todas las $\gamma_j = \gamma'_j + \gamma''_j$, para $j = 1, \dots, n$. La situación resultante se ve en la Figura 5.10 (c). Ahora se definen las curvas cerradas

$$\Gamma' := \gamma' + C_0 + (-\gamma'_1) + \dots + (-\gamma'_n) + C_n,$$

y

$$\Gamma'' := \gamma'' + (-C_n) + (-\gamma_n'') + \cdots + (-\gamma_1'') + (-C_0).$$

Resulta que Γ' y Γ'' son homotópicamente nulas en un abierto en el cual f es analítica y así, por el Teorema 5.3.5, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma'} f(z)dz + \int_{\Gamma''} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma' + \gamma''} f(z)dz + \sum_{j=1}^n \int_{(-\gamma_j') \# (-\gamma_j'')} f(z)dz + \sum_{j=1}^n \left(\int_{C_j} f(z)dz + \int_{\underline{C_j}} f(z)dz \right) \\ &= \int_{\gamma' + \gamma''} f(z)dz + \sum_{j=1}^n \int_{(-\gamma_j')} f(z)dz + \sum_{j=1}^n \left(\int_{C_j} f(z)dz - \int_{C_j} f(z)dz \right) \\ &= \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)dz \end{aligned}$$

que es lo buscado.

Ahora vamos a enunciar el siguiente resultado, el cual sigue inmediatamente del Teorema 5.3.12, que suele conocerse como el *Principio de Deformación de Caminos*. Muy frecuentemente deseamos evaluar una integral $\int_{\gamma} f dz$ donde la función f no es necesariamente analítica en el interior de γ y con lo cual su integral a lo largo de γ puede no ser cero. Por ejemplo, si $f(z) = \frac{1}{z}$ y γ es el círculo unidad, entonces f no es analítica en el punto $z = 0$ y $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$. Para estudiar este tipo de funciones es importante poder reemplazar la curva γ por una β donde sea más sencillo calcular su integral. Es decir, queremos poder calcular $\int_{\beta} f dz$ en lugar de $\int_{\gamma} f dz$ donde β sea una curva convenientemente elegida.

Corolario 5.3.13 (Principio de Deformación de Caminos). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, γ_1 y γ_2 curvas cerradas, simples y orientadas positivamente, con γ_1 homotópicamente nula en A y γ_2 contenida en el interior de γ_1 (véase la Figura 5.11). Si f es una función analítica en la región A salvo, eventualmente, en algún subconjunto del interior de γ_2 , entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Ejemplo 5.3.14. Determinar el valor de la integral $\int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz$ donde γ es la elipse $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ recorrida en sentido positivo. Primero observamos que no podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat (Teorema 5.3.5) porque la función $\frac{z}{z-1}$ no es analítica en el punto $z = 1$. Pero, por el Principio de Deformación de

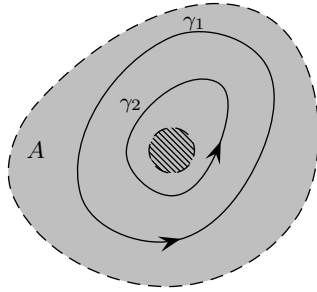


Figura 5.11: Principio de deformación de caminos.

Caminos (Corolario 5.3.13), podemos considerar alguna otra curva cerrada simple β interior a γ con la que nos resulte más sencillo trabajar. Tomemos $\beta(t) = 1 + e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces tenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz = \int_{\beta} \frac{z}{z-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}}{e^{it}} e^{it} i dt = \int_0^{2\pi} (1 + e^{it}) i dt = 2\pi i.$$

El siguiente resultado es una pequeña generalización del Teorema 5.3.5 para el caso en que la función puede tener finitas singularidades en A , donde el comportamiento está controlado.

Teorema 5.3.15 (Teorema de Cauchy Generalizado). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y f analítica en $A \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ y tal que $\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)f(z) = 0$, para $j = 1, \dots, n$.

Si γ es una curva cerrada y homotópicamente nula en A que no pasa por ningún z_j con $j = 1, \dots, n$, entonces $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Demostración. Supongamos, para simplificar, que γ es simple. Si no lo fuera, se la descompone en curvas cerradas simples y se aplica el resultado a cada curva de la descomposición. También se puede suponer que todos los z_j están en el interior de γ ya que sólo estos cuentan a la hora de evaluar $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Por ser A abierto, es posible tomar un radio $r > 0$ de modo que

- (I) $\overline{D(z_j, r)} \subset A$ para todo $j = 1, \dots, n$;
- (II) $\overline{D(z_j, r)} \cap \overline{D(z_k, r)} = \emptyset$, para todo j, k distintos;
- (III) $\overline{D(z_j, r)} \cap \gamma = \emptyset$, para todo j .

Definimos las curvas $\gamma_j(t) := z_j + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Observar que γ_j parametriza positivamente el borde de $\overline{D(z_j, r)}$, para cada j , por lo que las curvas γ_j no se intersecan y no intersecan a γ , estando todas contenidas en el interior de γ . Como f es analítica en $A \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, el Teorema 5.3.12 implica que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz. \tag{5.10}$$

Por otro lado, como $\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)f(z) = 0$, para $j = 1, \dots, n$, dado $\epsilon > 0$, existe $r' > 0$ tal que $|(z - z_j)f(z)| < \epsilon$ si $z \in D(z_j, r')$. Haciendo $r < r'$, si fuese necesario, tenemos

$$\left| \int_{\gamma_j} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} f(z_j + re^{it}) r i e^{it} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \underbrace{|f(z_j + re^{it})r|}_{< \epsilon} dt < 2\pi\epsilon.$$

Luego, de (5.10) conseguimos

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{\gamma_j} f(z) dz \right| < 2\pi n\epsilon.$$

Ahora como $\epsilon > 0$ es arbitrario, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

5.4. Índice de una curva cerrada

Definición 5.4.1. Sean γ una curva cerrada suave a trozos y $a \notin \gamma$. Definimos el *índice de a respecto a γ* mediante

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}.$$

Sea $\gamma: [0, 2n\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ la curva dada por $\gamma(t) = a + re^{it}$. Es claro que γ es una circunferencia de centro a y radio $r > 0$ recorrida n veces en sentido contrario de las manecillas del reloj y

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2n\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = n.$$

Análogamente, si γ es la circunferencia de centro a y radio $r > 0$ recorrida n veces en sentido de las manecillas del reloj,

$$n(\gamma, a) = -n.$$

Esto sugiere que $n(\gamma, a)$ es el número de vueltas que da la curva alrededor de a .

Observación 5.4.2. Si z_0 es un punto exterior a cualquier curva cerrada simple γ , entonces $\frac{1}{z - z_0}$ es analítica en $A = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ y γ es homóticamente nula en A . Entonces por el Teorema de Cauchy-Goursat, $n(\gamma, z_0) = 0$.

Proposición 5.4.3. Sean γ una curva cerrada suave a trozos y $z_0 \notin \gamma$. Entonces $n(\gamma, z_0)$ es un número entero.

Demostración. Supongamos por simplicidad que γ es suave en $[a, b]$ y definimos

$$h(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

Entonces $n(\gamma, z_0) = \frac{h(b)}{2\pi i}$. Por otra parte, como el integrando es continuo, ya que el denominador no se anula, h es derivable en $[a, b]$ y

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

Luego, $\frac{d}{dt} (\exp(-h(t))(\gamma(t) - z_0)) = 0$, para todo $t \in [a, b]$. Por lo tanto, tenemos que $\exp(-h(t))(\gamma(t) - z_0)$ es constante en $[a, b]$, de donde se deduce que

$$\gamma(a) - z_0 = \exp(-h(b))(\gamma(b) - z_0) = \exp(-h(b))(\gamma(a) - z_0).$$

Así $\exp(-h(b)) = 1$ y en consecuencia $h(b) = 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$. Así, $n(\gamma, z_0) = n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5.5. La representación integral de Cauchy

Ahora usaremos el Teorema de Cauchy-Goursat para hallar una representación integral para el valor de una función analítica en el interior de una curva cerrada simple.

Teorema 5.5.1 (Fórmula Integral de Cauchy). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A y γ una curva cerrada y homotópicamente nula en A . Si $a \notin \gamma$, entonces

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Demostración. La función $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{si } z = a, \end{cases}$$

es analítica en $A \setminus \{a\}$, ya que $g'(z) = \frac{f'(z)(z-a)-f(z)+f(a)}{(z-a)^2}$ si $z \neq a$. Además $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)g(z) = \lim_{z \rightarrow a} (f(z) - f(a)) = 0$. Por el Teorema de Cauchy Generalizado,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) 2\pi i n(\gamma, a). \end{aligned}$$

Considerando el caso especial en la Fórmula Integral de Cauchy cuando γ es una curva cerrada simple y a está en el interior de la curva γ obtenemos

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

pues $n(\gamma, a) = 1$. Con lo cual podemos observar que los valores de una función analítica f en los puntos del interior de una curva cerrada simple γ quedan completamente determinados por los valores de la función f sobre la curva γ .

La Fórmula Integral de Cauchy, junto con la observación anterior, es también de mucha utilidad para evaluar integrales.

Consideremos por ejemplo la integral $\int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz$ del Ejemplo 5.3.14. Entonces, por la Fórmula Integral de Cauchy tenemos que $\int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz = 2\pi i f(1)$ donde $f(z) = z$ y así $\int_{\gamma} \frac{z}{z-1} dz = 2\pi i$.

El siguiente teorema es una extensión de la Fórmula Integral de Cauchy para las derivadas de una función analítica f .

Teorema 5.5.2 (Fórmula de Cauchy para Derivadas). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Entonces f es infinitamente diferenciable en A . Además, si $\gamma : [c, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva cerrada y homotópicamente nula en A y $a \notin \gamma$, se satisface

$$n(\gamma, a) f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Consideremos la integral de tipo Cauchy

$$G(w) = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z-w} dz,$$

donde g es una función continua sobre γ y $w \notin \gamma$. Demostraremos que G es infinita veces derivable en todo punto $w \notin \gamma$ siendo

$$G^{(k)}(w) = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-w)^{k+1}} dz.$$

La demostración es por inducción, aunque nosotros solo probaremos en detalle el caso $k = 1$. Para ello, sean $a \notin \gamma$,

$$2\delta = \min_{t \in [c, b]} |\gamma(t) - a| > 0, \quad \text{y} \quad M = \max_{t \in [c, b]} |g(\gamma(t))|.$$

Notar que $\delta > 0$, y por la continuidad de γ y $g \circ \gamma$ en $[c, b]$, $M < \infty$. Si $w \in D(a, \delta)$ con $w \neq a$, tenemos

$$\frac{G(w) - G(a)}{w - a} = \int_{\gamma} \frac{1}{w - a} \left(\frac{1}{z - w} - \frac{1}{z - a} \right) g(z) dz.$$

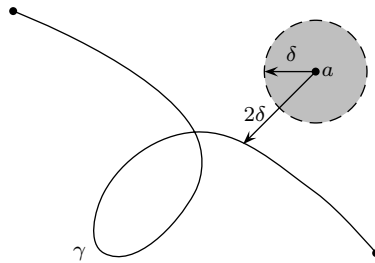


Figura 5.12: Integral tipo Cauchy.

Pero

$$\frac{1}{w-a} \left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-a} \right) = \frac{1}{(z-w)(z-a)} = \frac{1}{(z-a)^2} \frac{z-a}{z-w} = \frac{1}{(z-a)^2} \left(1 + \frac{w-a}{z-w} \right).$$

Por lo tanto, dado que $|z-w| > \delta$ para todo $z \in \gamma$,

$$\left| \frac{G(w) - G(a)}{w-a} - \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-a)^2} dz \right| = |w-a| \left| \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-a)^2(z-w)} dz \right| \leq |w-a| \frac{M \ell(\gamma)}{4\delta^3}.$$

De aquí, si $w \rightarrow a$, resulta que G es diferenciable en a y

$$G'(a) = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-a)^2} dz.$$

En particular, si $g(z) = \frac{1}{2\pi i}$, entonces $G(w) = n(\gamma, w)$; por lo que la función $n(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{Z}$, es continua en cualquier entorno $D(a, r)$ de a que no corte a γ . Así, $n(\gamma, \cdot)$ es constante en dicho entorno y por lo tanto $n(\gamma, w) = n(\gamma, a)$ para todo $w \in D(a, r)$.

Ahora, si

$$F(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz,$$

la Fórmula Integral de Cauchy implica

$$F(w) = n(\gamma, w)f(w) = n(\gamma, a)f(w), \quad w \in D(a, r).$$

En consecuencia,

$$n(\gamma, w)f'(w) = n(\gamma, a)f'(w) = F'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz.$$

Observación 5.5.3. A partir del teorema anterior se prueba fácilmente que si f es analítica en un conjunto cualquiera A entonces f es infinitamente diferenciable en todo punto de A . Además, considerando el caso especial cuando γ es una

curva cerrada simple y a se encuentra en el interior de γ obtenemos las siguientes representaciones integrales de Cauchy

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz,$$

pues $n(\gamma, a) = 1$. Con lo cual, nos permitirá en muchas ocasiones evaluar de una manera más sencilla ciertas integrales.

Ejemplo 5.5.4. Determinemos el valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-4)(z+1)^4} dz, \quad \text{donde } \gamma(t) = 1 + \frac{5}{2}e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Podemos considerar esta integral como $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z+1)^4} dz$ donde $f(z) = \frac{1}{z-4}$. Como f es analítica dentro y sobre la curva γ y $z = -1$ es un punto interior de γ . Entonces, podemos aplicar la Fórmula de Cauchy para Derivadas para obtener

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-4)(z+1)^4} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(-1) = -\frac{2\pi i}{5^4}.$$

Ejemplo 5.5.5. Determinemos el valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z-1)}$$

donde γ es el círculo con centro en el origen y radio 2, $\gamma(t) = 2e^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$. Aquí no podemos aplicar directamente la Fórmula de Cauchy para Derivadas ya que dentro de la curva tenemos dos puntos $z = 0$ y $z = 1$ donde el integrando no es analítica. Para poder resolver esto, primero dividimos la curva γ en dos curvas cerradas γ_1 y γ_2 introduciendo una nueva curva que separa los puntos $z = 0$ y $z = 1$ como en la Figura 5.13. Si integramos sobre estos dos nuevos caminos γ_1 y γ_2 orientados positivamente, las dos contribuciones a lo largo de la nueva curva deberán cancelarse una con otra. Así hemos pasado de una integral, en la cual hay dos singularidades dentro de la curva de integración, a la suma de dos integrales, cada una de las cuales ahora tiene solo una singularidad dentro de su curva de integración y estas ahora sí las podemos calcular usando la Fórmula de Cauchy para Derivadas. En efecto, si $f_1(z) = \frac{1}{z-1}$ y $f_2(z) = \frac{1}{z^2}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2(z-1)} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2(z-1)} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2(z-1)} = \int_{\gamma_1} \frac{f_1(z)}{z^2} dz + \int_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{z-1} dz \\ &= 2\pi i f_1'(0) + 2\pi i f_2(1) = 2\pi i - 2\pi i = 0. \end{aligned}$$

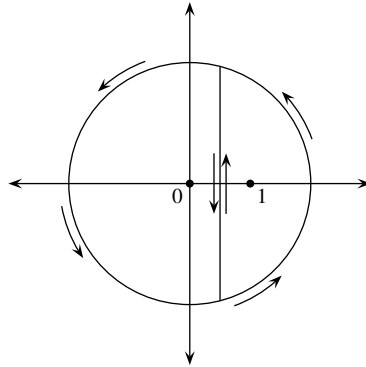


Figura 5.13: Curva del Ejemplo 5.5.5

5.6. Consecuencias del Teorema de Cauchy

En esta sección presentamos cuatro resultados importantes que se derivan del Teorema de Cauchy.

Teorema 5.6.1 (Desigualdad de Cauchy). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, $a \in A$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Supongamos que $\overline{D(a, R)} \subset A$. Si $M = \max_{|z-a|=R} |f(z)|$, entonces

$$|f^{(k)}(a)| \leq \frac{k!}{R^k} M, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Demostración. Sea $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = a + Re^{it}$. Entonces γ es homotópicamente nula en A y como $n(\gamma, a) = 1$, la Fórmula Integral de Cauchy para la k -ésima derivada implica

$$|f^{(k)}(a)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z-a|^{k+1}} |dz| \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}} 2\pi R = \frac{k!}{R^k} M.$$

Teorema 5.6.2 (Teorema de Liouville). Si $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función entera y $|f|$ es acotada en \mathbb{C} , entonces f es constante.

Demostración. La hipótesis implica que existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Sean $R > 0$ y $z \in \mathbb{C}$, arbitrarios. Como $\overline{D(z, R)} \subset \mathbb{C}$, entonces la Desigualdad de Cauchy para la derivada primera implica

$$|f'(z)| < \frac{M}{R}.$$

De la arbitrariedad de R , se sigue obviamente que $f'(z) = 0$. De aquí, $f' = 0$ en \mathbb{C} . Pero \mathbb{C} es una región y consecuentemente f es constante en \mathbb{C} .

Teorema 5.6.3 (Teorema de Morera). Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región, y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda curva cerrada contenida en A . Entonces f es analítica en A .

Demostración. El Teorema 5.2.16 (Independencia del Camino) implica que existe $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica en A tal que $F' = f$ en A . Como F es analítica en A , por el Teorema 5.5.2, es infinitamente diferenciable en A , y por lo tanto existe f' y $f'(z) = F''(z)$ para todo $z \in A$.

Teorema 5.6.4 (Teorema Fundamental del Álgebra). Todo polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ con coeficientes complejos y de grado $n \geq 1$ ($a_n \neq 0$) tiene n raíces z_1, \dots, z_n contando multiplicidades.

Demostración. Supongamos que P no tiene ninguna raíz. Entonces la función $f = \frac{1}{P}$ es entera. Observar que

$$|P(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right), \quad z \neq 0.$$

Como $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{|a_j|}{|z|^{n-j}} = 0$ para cada $1 \leq j \leq n-1$ y dado que $\frac{|a_n|}{2^n} > 0$, existe $K > 1$ tal que si $|z| > K$, entonces

$$\frac{|a_j|}{|z|^{n-j}} < \frac{|a_n|}{2^n}, \quad \text{para todo } 0 \leq j \leq n-1.$$

Por lo tanto, si $|z| > K$,

$$|P(z)| > \frac{|a_n|}{2} |z|^n > \frac{|a_n|}{2} > 0.$$

Por otra parte, al ser $\overline{D(0, K)}$ un conjunto compacto, existe $M > 0$ tal que $|P(z)| > M > 0$ si $|z| \leq K$. Notar que $M > 0$, pues por hipótesis, $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por consiguiente, hemos probado que

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < \max \left\{ \frac{2}{|a_n|}, \frac{1}{M} \right\}, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Por el Teorema de Liouville, f es constante y por consiguiente P lo es, una contradicción ya que $a_n \neq 0$ y $n \geq 1$. Luego P tiene una raíz z_1 y

$$P(z) = a_n(z - z_1)P_1(z),$$

donde P_1 es un polinomio de grado $n-1$ con coeficiente principal igual a 1. Aplicando el mismo argumento a P_1 obtenemos una raíz z_2 de P_1 y

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)P_2(z),$$

donde P_2 tiene grado $n-2$ con coeficiente principal igual a 1. Repitiendo este procedimiento llegamos a una $(n-1)$ -ésima raíz z_{n-1} donde el polinomio P_{n-1} es de grado 1, $P_{n-1}(z) = z - z_{n-1}$. Esto completa la prueba.

5.7. Principio del módulo máximo

El siguiente resultado muestra que el valor de una función f en $a \in \mathbb{C}$ es la media de los valores de f en el círculo de centro a y radio r .

Teorema 5.7.1 (Propiedad del valor medio). Si f es una función analítica en el disco cerrado $\overline{D}(a, r)$, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Demostración. Por hipótesis f es analítica en un conjunto abierto A que contiene a $\overline{D}(a, r)$. Afirmamos que existe $\rho > r$ tal que $D(a, \rho) \subset A$. En efecto si $A = \mathbb{C}$, esto es obvio. Supongamos que $\mathbb{C} \setminus A \neq \emptyset$ y consideremos la función $d: \overline{D}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$d(z) = \inf\{|z - w| : w \in \mathbb{C} \setminus A\} = d(z, \mathbb{C} \setminus A).$$

Como d es continua y $\overline{D}(a, r)$ es un conjunto compacto, d alcanza un mínimo el cual es positivo. Luego, si $0 < 2s = \min_{|z-a| \leq r} d(z)$, entonces

$$|z - w| \geq 2s, \quad \text{para todo } w \in \overline{D}(a, r) \text{ y para todo } z \in \mathbb{C} \setminus A.$$

Definimos $\rho = r + s$. Sea $z \in D(a, \rho)$ y supongamos que $z \in \mathbb{C} \setminus A$. Tomando

$$w := \frac{r}{|z - a|} z + \left(1 - \frac{r}{|z - a|}\right) a \in \overline{D}(a, r),$$

conseguimos $2s \leq |z - w| = |z - a| - r < \rho - r = s$, una contradicción. Así $D(a, \rho) \subset A$.

Ahora, como el disco abierto $D(a, \rho)$ es una región y la circunferencia γ de centro a y radio r (orientada positivamente) es homotópicamente nula en $D(a, \rho)$, la Fórmula Integral de Cauchy implica

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Teorema 5.7.2 (Principio del Módulo Máximo Local). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Si $|f|$ tiene un máximo relativo en $a \in A$, entonces f es constante en un entorno de a .

Demostración. Por hipótesis, existe $R > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq |f(a)|, \quad \text{para todo } z \in D := D(a, R) \subset A.$$

Vamos a probar, en primer lugar, que $|f|$ es constante en D . Para ello, supongamos que existe $z_0 = a + re^{it_0} \in D$ tal que $|f(z_0)| < |f(a)|$. Por la continuidad de f en D , existen $\epsilon > 0$ y $0 < \delta \leq \pi$ tales que

$$|f(a + re^{it})| < |f(a)| - \epsilon, \quad |t - t_0| < \delta.$$

En efecto, al ser $|f(a)| - |f(z_0)| > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(z_0)| < |f(a)| - 2\epsilon$, y por continuidad de $g(t) = f(a + re^{it})$ en $t = t_0$ existe $0 < \delta \leq \pi$ tal que $|f(a + re^{it}) - f(a + re^{it_0})| < \epsilon$ si $|t - t_0| < \delta$. Para estos valores de t se cumple $|f(a + re^{it})| \leq |f(a + re^{it_0})| + \epsilon = |f(z_0)| + \epsilon < |f(a)| - 2\epsilon + \epsilon = |f(a)| - \epsilon$. Aplicando ahora la Propiedad del valor medio obtenemos,

$$\begin{aligned} |f(a)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t_0-\pi}^{t_0+\pi} f(a + re^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t_0-\pi}^{t_0-\delta} f(a + re^{it}) dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f(a + re^{it}) dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{t_0+\delta}^{t_0+\pi} f(a + re^{it}) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} (|f(a)|(\pi - \delta) + (|f(a)| - \epsilon)2\delta + |f(a)|(\pi - \delta)) \\ &= |f(a)| - \frac{\delta\epsilon}{\pi} < |f(a)|, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Esto demuestra que $|f|$ es constante en D , lo cual implica que f es también constante en D .

Corolario 5.7.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Si $|f|$ alcanza un máximo absoluto en A , entonces f es constante en A .

Demostración. Supongamos que $|f|$ alcanza un máximo absoluto en $z_0 \in A$, y sea

$$B = \{z \in A : f(z) = f(z_0)\}.$$

Notar que $B \neq \emptyset$, y al ser f continua en A , B es un conjunto cerrado y así es cerrado respecto de A . Afirmamos también que B es abierto en A . En efecto, si $z \in B$, como $|f(z)| = |f(z_0)| = \max_{z \in A} |f(z)|$, el Principio del módulo máximo local implica que existe un entorno U de z tal que f es constante en U . Así, $z \in U \subset B$. Como B es simultáneamente abierto y cerrado respecto de A , no vacío y A conexo, se tiene que $B = A$, es decir $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in A$.

Teorema 5.7.4 (Principio del Módulo Máximo Global). Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región acotada y $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A y continua en ∂A . Si $M = \max_{z \in \partial A} |f(z)|$, entonces se satisface,

(a) $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in A$;

(b) Si $|f(a)| = M$ para algún $a \in A$, entonces f es constante en A .

Demostración. En primer lugar $M \in \mathbb{R}$ existe, al ser ∂A cerrada y acotada (por ser A acotada) y $|f|$ continua en ∂A . En segundo lugar, (b) es consecuencia de (a) y del Corolario 5.7.3. Para probar (a) notar que la función $|f|$ también es continua en el compacto $\overline{A} = A \cup \partial A$, de forma que alcanza un máximo en \overline{A} . Si dicho máximo se alcanza en ∂A , entonces (a) se cumple por definición de máximo. Si, por el contrario, el máximo de $|f|$ en A se alcanza en un punto $z_0 \in A$, el Corolario 5.7.3 implica que $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in A$. Por continuidad, $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in A$, es decir, f es constante en A . En consecuencia, (a) es trivial.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1. Completar la demostración de la Proposición 5.1.4.

Ejercicio 5.2. Evaluar las siguientes integrales.

(a) $\int_{\gamma} \frac{sen(z)}{z^3} dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

(b) $\int_{\gamma} \frac{\log(z)}{z^n} dz$, donde $\gamma(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $n \geq 0$.

Ejercicio 5.3. Evaluar las siguientes integrales:

a) $\int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz$, donde n es un entero positivo y $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

b) $\int_{\gamma} \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^n} dz$, donde n es un entero positivo y $\gamma(t) = \frac{1}{2} + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;

c) $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+1} dz$, donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 5.4. Calcular $\int_{\gamma} \frac{z^2+1}{z(z^2+4)} dz$, donde $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, para todos los valores posibles de r .

Ejercicio 5.5. Completar la demostración de la Proposición 5.2.11.

Ejercicio 5.6. Completar la demostración de la Proposición 5.2.14.

Ejercicio 5.7. Sean P un polinomio de grado n y $R > 0$ suficientemente grande de modo tal que P no se anula en $\{z : |z| \geq R\}$. Si $\gamma(t) = Re^{it}$ con $0 \leq t \leq 2\pi$, probar que $\int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = 2\pi ni$.

Ejercicio 5.8. Sean $D_{\pm}(\pm 1, \frac{1}{2})$, $A = D(0, 3) \setminus (D_+ \cup D_-)$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ curvas cuyas trazas son $|z - 1| = 1$, $|z + 1| = 1$ y $|z| = 2$ respectivamente. Orientarlas de modo que $n(\gamma_1, w) + n(\gamma_2, w) + n(\gamma_3, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus A$.

Ejercicio 5.9. Sea γ una curva cerrada suave a trozos en \mathbb{C} y $a \notin \gamma$. Probar que para $n \geq 2$, se cumple que $\int_{\gamma} \frac{1}{(z-a)^n} dz = 0$.

Ejercicio 5.10. Sea $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Encontrar, para todos los números naturales, el valor de la siguiente integral $\int_{\gamma} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$.

Ejercicio 5.11. Evaluar la integral $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1}$ donde $\gamma(t) = 2|\cos(2t)|e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

Ejercicio 5.12. Sean $\gamma(t) = te^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ y $\gamma(t) = 4\pi - t$ para $2\pi \leq t \leq 4\pi$. Evaluar $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$.

Ejercicio 5.13. Sean $A = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, $a \neq b$ y γ la curva de la Figura 5.14. Mostrar que $n(\gamma, a) = n(\gamma, b) = 0$.

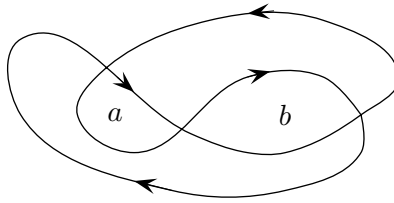


Figura 5.14: Curva del Ejercicio 5.13

Ejercicio 5.14. Fijemos $w = re^{it} \neq 0$. Sea γ una curva suave a trozos en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ de 1 a w . Probar que existe un entero k tal que $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \text{Log}(r) + i(\theta + 2k\pi)$.

Ejercicio 5.15. Sean A un abierto y γ una curva suave a trozos en A tal que $n(\gamma, w) = 0$ para todo $w \in \mathbb{C} \setminus A$. Sea $r = d(\{\gamma\}, \partial A)$ y $H = \{z \in \mathbb{C} : n(\gamma, z) = 0\}$. Mostrar que $\{z : d(z, \partial A) < \frac{r}{2}\} \subset H$.

Ejercicio 5.16. Mostrar que la cinta R definida en la demostración del Teorema 5.3.5 es un conjunto compacto.

Ejercicio 5.17. Completar la demostración del Teorema 5.5.2.

Ejercicio 5.18. Sea f una función entera. Supongamos que existe una constante M , un $R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $|f(z)| \leq M|z|^n$, para $|z| > R$. Probar que f es un polinomio de grado menor o igual que n .

Ejercicio 5.19. Sea f una función analítica en $A = D(0, 1)$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para $Z \in A$. Probar que $|f'(0)| \leq 1$.

Ejercicio 5.20. Sea $U: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica tal que $U(z) \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que U es constante.

Ejercicio 5.21. Sean A una región y f una función analítica en A . Supongamos que existe un $a \in A$ tal que $|f(a)| \leq |f(z)|$ para todo $z \in A$. Entonces $f(a) = 0$ o f es constante.

Capítulo **6**

Series de Taylor y de Laurent

El objetivo de la primera parte de este capítulo es desarrollar un resultado fundamental que afirma que toda función analítica f admite localmente una expansión en serie de potencias en cada punto del dominio A donde vive. Como veremos, esta serie será llamada la serie de Taylor de f centrada en un punto $z_0 \in A$.

En la segunda parte del capítulo, aprenderemos acerca de las series de Laurent, que son una generalización de las series de Taylor, en el sentido de que son series de potencias donde las potencias enteras negativas de los términos también ocurren en la expansión. Esto será útil para estudiar las funciones que son analíticas en dominios más generales como por ejemplo los anillos. Las series de Laurent también serán una herramienta fundamental para clasificar las singularidades aisladas de una función analítica y poder caracterizarlas.

6.1. Series de funciones. Convergencia

En esta sección introducimos algunos resultados de convergencia de sucesiones de funciones a valores complejos que serán necesarios para las secciones subsiguientes.

Lema 6.1.1. Sean $A \subset \mathbb{C}$ y $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, funciones continuas en A . Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en A y γ es una curva contenida en A , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

En particular, si $g_k: A \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, son continuas en A y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente en A , entonces

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z) \right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} g_k(z) dz.$$

Demostración. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in A$ y $n \geq N$. Además, f es continua al ser uniforme la convergencia de f_n a f . Entonces para $n \geq N$ se tiene

$$\left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - f(z)| |dz| \leq \epsilon \ell(\gamma).$$

Ahora sean $F_n = \sum_{k=1}^n g_k$ y $F = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$. La segunda parte sigue de la primera usando que $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente a F en A .

Teorema 6.1.2 (Teorema de la Convergencia Analítica). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, funciones analíticas en A . Supongamos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en cada disco cerrado contenido en A . Entonces f es analítica en A , y $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f' en cada disco cerrado contenido en A .

Demostración. En primer lugar, por ser uniforme la convergencia de f_n a f en discos cerrados contenidos en A , f es continua en cada disco cerrado contenido en A , y por tanto es continua en A . Sean $D(a, r) \subset A$ y γ una curva cerrada contenida en $D(a, r)$. Entonces f es continua en $D(a, r)$, y por el Lema 6.1.1 y el Corolario 5.3.9,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz = 0.$$

Por el Teorema de Morera tenemos que f es analítica en $D(a, r)$, y por lo tanto en A .

Para probar que $\{f'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f' en $\overline{D(a, r)}$, notar que, como en el Teorema 5.7.1, existe $\rho > r$ tal que $D(a, \rho) \subset A$. Dados $r < R < \rho$ y $\epsilon > 0$, por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(w) - f(w)| < \epsilon$ para todo $w \in \overline{D(a, R)}$ y $n \geq N$. Sea $z \in \overline{D(a, r)}$ y γ la circunferencia de centro a y radio R , orientada positivamente. Como f es analítica en la región $D(a, \rho)$, por la Fórmula Integral de Cauchy para la derivada primera tenemos que

$$|f'_n(z) - f'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^2} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{(R - r)^2} 2\pi R = \frac{\epsilon R}{(R - r)^2},$$

para todo $z \in \overline{D(a, r)}$ y $n \geq N$.

Corolario 6.1.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $g_k: A \rightarrow \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, funciones analíticas en A . Supongamos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a g en cada disco cerrado contenido en A . Entonces g es analítica en A , y $\sum_{k=1}^{\infty} g'_k$ converge uniformemente a g' en cada disco cerrado contenido en A .

Notar que,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k \right)' = g' = \sum_{k=1}^{\infty} g'_k, \quad \text{en } A,$$

en otras palabras, la serie se puede derivar término a término en A .

6.2. Series de Taylor

El teorema central de esta sección establece que toda función analítica admite una expansión en serie de potencias cuyo términos están definidos a partir de las sucesivas derivadas de la función. Aquí cabe recordar que ya hemos visto (Teorema 5.5.2) que toda función analítica en una región es infinitamente derivable. Esto está en contraste con el hecho de que existen funciones de una variable real las cuales son infinitamente diferenciables y no pueden ser expandidas en una serie de potencias. Esto es otro ejemplo que muestra que la condición de ser analítica en el caso complejo es más fuerte que la de ser derivable en el caso real.

Teorema 6.2.1 (Teorema de Taylor). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A . Sea $z_0 \in A$ y supongamos que $D(z_0, r) \subset A$. Entonces f admite el desarrollo en *serie de Taylor*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, r). \quad (6.1)$$

Demostración. Sean $0 < \rho < R < r$, y fijemos $z \in D(z_0, \rho)$, $z \neq z_0$. Si γ es la circunferencia de centro z_0 y radio R , orientada positivamente, se tiene por la Fórmula Integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (6.2)$$

Por otra parte, si $w \in \gamma$, entonces $|z - z_0| < \rho < R = |w - z_0|$, y por ende

$$\begin{aligned} \frac{f(w)}{w - z} &= \frac{f(w)}{w - z_0 + z_0 - z} = \frac{f(w)}{w - z_0} \frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)} \\ &= \frac{f(w)}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Como f es analítica en γ , está acotada en γ , por lo que

$$\left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \right| = \left| \frac{f(w)}{w - z_0} \right| \left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right|^n < \frac{M}{R} \left| \frac{\rho}{R} \right|^n, \quad w \in \gamma, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dado que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{R} \left| \frac{\rho}{R} \right|^n = \frac{M}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{R}\right)} = \frac{M}{R - \rho},$$

(6.3) y el M-Test implica que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

converge uniformemente a $\frac{f(w)}{w-z}$ para $w \in \gamma$. Entonces, de (6.2), el Lema 6.1.1 y la Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas, tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n dw \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

para $z \in D(z_0, \rho)$, con $0 < \rho < r$, arbitrario, es decir para todo $z \in D(z_0, r)$.

Corolario 6.2.2. El radio de convergencia de la serie de Taylor (6.1) de una función f analítica en A es mayor o igual que la distancia de z_0 a la frontera de A .

Ejemplo 6.2.3. Determinemos la expansión en series de potencias de Taylor de la función $f(z) = \cos(z)$ alrededor del punto $z_0 = 0$. Sabemos que $f(z) = \cos(z) = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$. Entonces las sucesivas derivadas de f en z y en 0 son

$$\begin{aligned} f(z) &= \cos(z), & f(0) &= 1 \\ f'(z) &= \frac{1}{2}(ie^{zi} - ie^{-zi}), & f'(0) &= 0, \\ f''(z) &= \frac{1}{2}(i^2 e^{zi} + i^2 e^{-zi}), & f''(0) &= -1, \\ f^{(3)}(z) &= \frac{1}{2}(i^3 e^{zi} - i^3 e^{-zi}), & f^{(3)}(0) &= 0, \\ f^{(4)}(z) &= \frac{1}{2}(i^4 e^{zi} + i^4 e^{-zi}), & f^{(4)}(0) &= 1, \\ f^{(5)}(z) &= \frac{1}{2}(i^5 e^{zi} - i^5 e^{-zi}), & f^{(5)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Podemos ver claramente que $f^{(2n)}(0) = i^{2n} = (-1)^n$ y $f^{(2n+1)}(0) = 0$, para $n = 0, 1, 2, \dots$. Entonces, por (6.1) tenemos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

y donde esta representación es válida en todo el plano complejo ya que la función $f(z) = \cos(z)$ es entera.

En el ejemplo anterior las derivadas de orden superior de la función coseno se obtuvieron de forma sencilla, pero en muchos otros casos obtener las derivadas superiores de una función específica puede resultar un trabajo muy tedioso y complicado. Una forma más sencilla y elegante para encontrar la representación en series de potencias de Taylor de una función analítica f es buscar una serie de potencias convergente que represente a f . Si por algún método y/o análisis podemos determinar que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ y la serie converge para algún radio $R > 0$, entonces por el Corolario 4.3.3 tenemos que esa debe ser la representación de f en serie de potencias de Taylor.

Ejemplo 6.2.4. Encontramos la serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$ para $f(z) = \frac{1}{z^2+2}$ y calculemos su radio de convergencia. Recordemos de (3.3) (ver pág. 44) que ya hemos determinado la serie de potencia de Taylor de la función $\frac{1}{1-z}$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{para } |z| < 1.$$

Expresemos la función f como

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - (-z^2/2)} \right).$$

Ahora reemplazamos z por $-z^2/2$ en la serie geométrica y obtenemos:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - (-z^2/2)} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{2n},$$

para $|-z^2/2| < 1$, esto es, para $|z| < \sqrt{2}$. Entonces, el radio de convergencia de la serie anterior es mayor o igual a $\sqrt{2}$. Notamos que $|z| < \sqrt{2}$ es el mayor disco posible centrado en $z_0 = 0$ donde la función f es analítica, ya que la regularidad falla en $z = \sqrt{2}i$.

En el siguiente ejemplo ilustramos otra técnica para hallar la representación de Taylor de una función analítica.

Ejemplo 6.2.5. Consideremos la función $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$. Podemos escribir a f como $f(z) = e^z \cdot \frac{1}{1-z}$. Conocemos las representaciones en series de Taylor de las funciones e^z y $\frac{1}{1-z}$:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad \text{y} \quad \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

donde la primera representación es válida en todo el plano complejo y la segunda en $|z| < 1$. Entonces, por el Teorema 3.2.5, obtenemos la serie para el producto

formal de las dos series, la cual debe converger en $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= 1 + (z + z) + \left(\frac{z^2}{2} + z^2 + z^2\right) + \left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^3}{2} + z^3 + z^3\right) + \dots \end{aligned}$$

El término general de la serie anterior no tiene una forma simple, así que la dejamos expresada en los primeros términos. El lector puede comprobar que este método es un poco más rápido que computar las sucesivas derivadas $f^{(n)}$ de f .

6.3. Principio de prolongación analítica

En esta sección mostraremos un resultado fundamental en la teoría de funciones de una variable compleja y que refleja otra gran diferencia con las funciones de variable real. Es conocido como el principio de prolongación analítica y afirma que toda función analítica en una región A queda determinada por sus valores en cualquier conjunto que tenga un punto de acumulación en A . Este hecho es un importante teorema de unicidad que puede ser usado de la siguiente manera: Si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica que se anula en un abierto, $U \subset A$, pudiendo éste ser arbitrariamente pequeño, entonces f debe anularse en todo A .

Definición 6.3.1. Sean $A \subset \mathbb{C}$, $a \in A$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica en A tal que $f(a) = 0$. Entonces decimos que f tiene un cero de orden k en a si existe una función analítica $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = (z - a)^k g(z)$ con $g(a) \neq 0$.

Teorema 6.3.2 (Principio de Prolongación Analítica). Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

- (a) $f \equiv 0$;
- (b) Existe un punto $a \in A$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geq 0$;
- (c) $\{z \in A : f(z) = 0\}$ tiene un punto de acumulación en A .

Demostración. La implicación (a) \Rightarrow (c) es obvia.

(c) \Rightarrow (b) Sean $a \in A$ un punto de acumulación de $Z = \{z \in A : f(z) = 0\}$ y $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset A$. Puesto que f es continua y a es un punto de acumulación de Z , tenemos que $f(a) = 0$. Supongamos que existe un $k \geq 1$ tal que $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$ y $f^{(k)}(a) \neq 0$. Por el Teorema de Taylor,

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n = (z - a)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} (z - a)^n, \quad z \in D(a, r).$$

Denotemos $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} (z-a)^n$. Entonces $g(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$ y

$$f(z) = (z-a)^k g(z), \quad z \in D(a, r).$$

Por el Corolario 4.3.2, g es analítica en $D(a, r)$ pues es una serie de potencias convergente en $D(a, r)$. Luego, existe ρ , $0 < \rho < r$, tal que $g(z) \neq 0$ para $|z-a| < \rho$. Como a es un punto de acumulación de Z , existe $b \in \mathbb{C}$ con $f(b) = 0$ y $0 < |b-a| < \rho$. En consecuencia, $0 = f(b) = (b-a)^k g(b)$ y así $g(b) = 0$, una contradicción.

(b) \Rightarrow (a) Sea $B = \{z \in A : f^{(n)}(z) = 0, \text{ para todo } n \geq 0\}$. Por hipótesis $B \neq \emptyset$. Veamos que B es un abierto y un cerrado de A , luego por la conexidad de A , tendremos que $A = B$ y así $f \equiv 0$.

Para ver que B es un cerrado de A , sean $z \in \overline{B} \cap A$ y $\{z_k\} \subset B$ tal que $z = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$. Como $f^{(n)}$ es continua, $f^{(n)}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n)}(z_k) = 0$, y por ende $z \in B$. Así $\overline{B} \cap A = B$ y entonces B es un cerrado de A .

Para ver que es un abierto de A , sean $a \in B$ y $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset A$. Puesto que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geq 0$, tenemos por el Teorema de Taylor que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = 0, \quad z \in D(a, r).$$

Consecuentemente, $D(a, r) \subset B$, o sea B es un abierto de A .

Corolario 6.3.3. Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica no idénticamente nula. Entonces, para cada $a \in A$ tal que $f(a) = 0$, existen $m \in \mathbb{N}$ y una función analítica $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in A$.

Demostración. Sea $m = \max\{k \in \mathbb{N} : f(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0, f^{(k)}(a) \neq 0\}$. Usando el método de prueba del teorema anterior, existen $r > 0$ y una función analítica $g: D(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $g(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$ y

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \text{para todo } z \in D(a, r).$$

Definimos

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} f(z) & \text{si } z \neq a \\ \frac{f^{(m)}(a)}{m!} & \text{si } z = a. \end{cases}$$

Por lo visto, g es analítica en $D(a, r)$. Como g es claramente analítica en $A \setminus D(a, r)$, la prueba está completa.

El siguiente resultado muestra que los ceros de una función analítica no nula son aislados.

Corolario 6.3.4. Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región, $a \in A$ y $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica no constante tal que $f(a) = 0$. Entonces existe $r > 0$ tal que $D(a, r) \subset A$ y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a, r) \setminus \{a\}$.

Demostración. Por el Corolario 6.3.3, tenemos que $f(z) = (z - a)^m g(z)$ para un $m \in \mathbb{N}$ y una función analítica g en A tal que $g(a) \neq 0$. Como g es analítica en A , y así continua, y $g(a) \neq 0$, tenemos que existe un $r > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a, r) \subset A$. Entonces, claramente $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a, r) \setminus \{a\}$.

6.4. Series de Laurent

En la Sección 6.2 probamos que toda función analítica f en un entorno $D(z_0, r)$ tiene una representación en serie de potencias alrededor del punto z_0 . Pero ¿qué sucede, por ejemplo, si deseamos obtener una representación en serie de potencias (de algún tipo) alrededor de $z = 0$ de la función $\frac{1}{z}$? Como vemos, no podemos usar el Teorema de Taylor para hallar una representación en serie de Taylor alrededor de $z_0 = 0$ en ningún disco $D(0, r)$, pues la función $\frac{1}{z}$ no es analítica en $z = 0$. Pero, como ya sabemos, esta función igualmente tiene un comportamiento bastante bueno ya que es analítica en todo anillo de la forma $A(0, 0, R)$.

El objetivo de esta sección es probar que toda función analítica en un anillo $A(z_0, R_1, R_2)$, con $R_1 < R_2$, admite una representación en series de potencias positivas y negativas (Teorema 6.4.1).

Una serie de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}$$

es una serie de potencias en la variable $w = (z - z_0)^{-1}$. Por lo tanto, existe $0 \leq R \leq \infty$ tal que la serie converge absolutamente a una función analítica si $|z - z_0| > R$ y diverge si $|z - z_0| < R$, siendo la convergencia de la serie absoluta y uniforme en el complemento de cualquier disco $D(z_0, \rho)$ con $\rho > R$.

Consideremos ahora la expresión

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \quad (6.4)$$

La primera serie convergerá absolutamente en un disco $D(z_0, R_2)$, y la segunda para $|z - z_0| > R_1$. Por lo tanto, f estará definida y será analítica en el anillo

$$A(z_0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\},$$

siempre y cuando sea $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Además, por los resultados sobre series de potencias, la convergencia de ambas series es absoluta y uniforme en

todo subanillo cerrado contenido en $A(z_0, R_1, R_2)$. Una serie del tipo (6.4) se denomina *Serie de Laurent* centrada en z_0 .

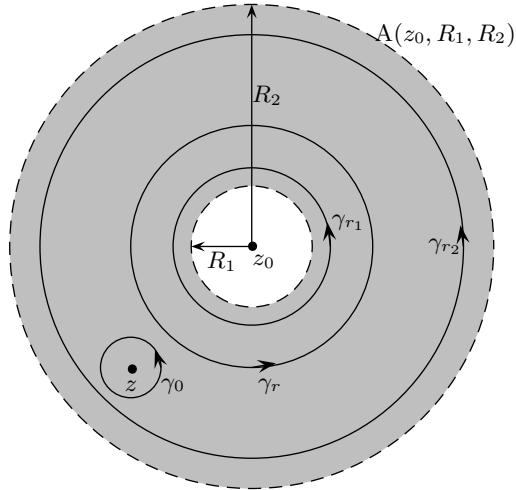


Figura 6.1: Teorema de Laurent

Teorema 6.4.1 (Teorema de Laurent). Sea f una función analítica en el anillo $A(z_0, R_1, R_2)$, con $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Si γ_r es una circunferencia orientada positivamente de centro z_0 y radio r tal que $R_1 < r < R_2$ y definimos

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.5)$$

entonces f admite el siguiente desarrollo en series de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \quad (6.6)$$

La serie del miembro derecho converge absoluta y uniformemente en cada subanillo cerrado contenido en $A(z_0, R_1, R_2)$. Más aún, este desarrollo es único.

Demostración. Sea $C = A(z_0, r_1, r_2)$ con $R_1 < r_1 < r < r_2 < R_2$, de modo que el anillo cerrado \overline{C} está contenido en $A(z_0, R_1, R_2)$. Sea $z \in C$ y γ_0 una circunferencia centrada en z , orientada positivamente y contenida en $A(z_0, r_1, r_2)$ (véase la Figura 6.1).

Observar que $\frac{f(w)}{w-z}$ es analítica en $A(z_0, R_1, R_2)$ excepto en el conjunto $\overline{D(z_0, R_1)} \cup \{z\}$ interiores a las curvas γ_{r_1} y γ_0 . Entonces por el Teorema 5.3.12 vale que

$$\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw + \int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (6.7)$$

A continuación, evaluaremos cada una de las tres integrales. Si $w \in \gamma_{r_2}$, resulta que $\left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{r_2} < 1$. Por lo tanto, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n$ converge uniformemente a $\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}}$ en γ_{r_2} y

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z_0 - (z-z_0)} dw = \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0) \left(1 - \frac{z-z_0}{w-z_0} \right)} dw \\ &= \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n dw. \end{aligned}$$

Como el coeficiente $\frac{f(w)}{w-z_0}$ en la integral es una función continua sobre γ_{r_2} , la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n,$$

obtenida al conmutar el coeficiente con la sumatoria, sigue convergiendo uniformemente a $\frac{f(w)}{w-z}$ en γ_{r_2} . Por lo tanto, es posible intercambiar la sumatoria con la integral para obtener

$$\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n. \quad (6.8)$$

De un modo similar, tomando ahora en cuenta que la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n$ converge uniformemente a $\frac{1}{1 - \frac{w-z_0}{z-z_0}}$ en γ_{r_1} , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z_0 - (z-z_0)} dw = \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(z-z_0) \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} - 1 \right)} dw \\ &= - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0} \right)^n dw \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n}} dw \right) (z-z_0)^{-(n+1)} \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Por último, usando la Fórmula Integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z} dw = 2\pi i f(z). \quad (6.10)$$

Volviendo a (6.7), por (6.8)-(6.10), obtenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n. \quad (6.11)$$

Como $\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}$ es analítica en $D(z_0, R_2)$, salvo en $\overline{D(z_0, R_1)}$ interior a la curva γ_r , el Principio de Deformación de Caminos implica que

$$\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n \geq 0. \quad (6.12)$$

Similarmente tenemos

$$\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw, \quad n < 0. \quad (6.13)$$

Así, de (6.11)-(6.13) se obtiene (6.6).

Para probar la unicidad de la expansión (6.6), supongamos que

$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ converge absoluta y uniformemente en cada subanillo cerrado contenido en $A(z_0, R_1, R_2)$. Así,

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^{k-n-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{-k}}{(z-z_0)^{k+n+1}},$$

converge uniformemente en γ_r , y por lo tanto el Lema 6.1.1 implica

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_{\gamma_r} (z-z_0)^{k-n-1} dz + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \int_{\gamma_r} \frac{1}{(z-z_0)^{k+n+1}} dz.$$

Es fácil ver que si m es un número entero, $\int_{\gamma_r} (z-z_0)^m dz = 0$ si $m \neq -1$ y es igual a $2\pi i$ si $m = -1$. En consecuencia, para $n \geq 0$,

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i b_n.$$

Similarmente, si $n \leq -1$, entonces

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i b_{-n}.$$

De esta manera, los coeficientes b_k coinciden con los dados en la fórmula (6.5).

Podemos observar que, a diferencia de la representación en series de Taylor, no es práctico obtener de manera directa los coeficientes a_k con $k \in \mathbb{Z}$ con la fórmula (6.5). En los siguientes ejemplos mostraremos un par de técnicas sencillas para obtener la representación en series de Laurent de ciertas funciones.

Ejemplo 6.4.2. Encontramos la representación en serie de Laurent de la función $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ alrededor de $z_0 = 1$. Usando fracciones parciales podemos escribir a f como

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} = \frac{1/2}{1-z} + \frac{1/2}{1+z}.$$

Primero notamos que la función en el término izquierdo de la igualdad anterior ya se encuentra en forma de serie de Laurent, $\frac{1/2}{1-z} = -\frac{1}{2} \cdot (z-1)^{-1}$, y la representación es válida en $|z-1| > 0$. Para la función en el término derecho utilizamos lo que sabemos de la serie geométrica

$$\begin{aligned} \frac{1/2}{1+z} &= \frac{1/2}{2 - (-(z-1))} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - (-(z-1)/2)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{2} \right)^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (z-1)^n \end{aligned}$$

para $|\frac{z-1}{2}| < 1$ y así la representación anterior es válida en $|z-1| < 2$. Entonces, obtenemos que

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} = -\frac{1}{2}(z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (z-1)^n$$

en el anillo $0 < |z-1| < 2$. Por la unicidad, tenemos que esta es la representación en serie de Laurent de la función f en el anillo $A(1, 0, 2)$.

Ejemplo 6.4.3. Sea $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z^3}\right)$. Para hallar una representación en serie de Laurent de f alrededor de $z_0 = 0$, utilizamos la representación en serie de Taylor de la función coseno,

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ahora reemplazamos z por $\frac{1}{z^3}$ en la igualdad anterior para obtener

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{1}{z^3}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1}{z^3}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{6n}} \\ &= 1 - \frac{1}{2z^6} + \frac{1}{4!z^{12}} - \frac{1}{6!z^{18}} + \cdots \end{aligned}$$

en la región $|z| > 0$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.1. Dar la expresión en serie de potencia de $\text{Log}(z)$ alrededor de $z = i$ y encontrar su radio de convergencia.

Ejercicio 6.2. Dar la expresión en serie de potencia de \sqrt{z} alrededor de $z = 1$ y encontrar su radio de convergencia.

Ejercicio 6.3. Encontrar la serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor del punto indicado y determinar el radio de convergencia.

$$(a) f(z) = \frac{1}{z^2 + 4} \text{ en } z_0 = 0; \quad (b) f(z) = \frac{1}{z} \text{ en } z_0 = 1.$$

Ejercicio 6.4. (a) Encontrar la expresión en serie de $\frac{e^z - 1}{z}$ alrededor de $z = 0$ y determinar el radio de convergencia.

(b) Considerar $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ y sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ su expresión en serie de potencia alrededor de $z = 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia?

(c) Mostrar que $0 = a_0 + \binom{n+1}{1} a_1 + \cdots + \binom{n+1}{n} a_n$;

(d) Usando el hecho que $f(z) + \frac{1}{2}z$ es una función par, mostrar que $a_n = 0$ para n impar y $n > 1$. Los números $B_{2n} = (-1)^{n-1} a_{2n}$ son llamados números de Bernoulli para $n \geq 1$.

Ejercicio 6.5. Sea $f(z) = \text{Log}(z)$, la rama principal del logaritmo definida en el abierto $A = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \leq 0, \text{Im}(z) = 0\}$, y $z_0 = -1 + i$. Probar que el radio de convergencia de la serie de Taylor de f es estrictamente mayor que la distancia de z_0 a la frontera de A .

Ejercicio 6.6. Encontrar todas las funciones enteras tales que $f(z) = e^z$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6.7. Sean A una región y f, g funciones analíticas en A tales que $f(z)g(z) = 0$, para todo $z \in A$. Probar que alguna de las dos es la función idénticamente nula.

Ejercicio 6.8. Dar la expansión en fracciones parciales de

$$r(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 + z + 1)(z - 1)^2}.$$

Ejercicio 6.9. Determinar la serie de Laurent para la función $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ en el anillo $A(i, 0, 2)$.

Ejercicio 6.10. Dar la serie de Laurent en cada uno de los siguientes anillos para $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$.

$$(a) A(0, 0, 1); \quad (b) A(0, 1, 2); \quad (c) A(0, 2, \infty).$$

Capítulo **7**

Singularidades

En este capítulo veremos cómo pueden usarse las series de Laurent para clasificar las singularidades aisladas de una función analítica y poder caracterizarlas. Asimismo, veremos una aplicación del teorema de Cauchy llamado Teorema de los Residuos que permite calcular integrales de la forma $\int_{\gamma} f(z)dz$ sobre curvas γ que rodean singularidades aisladas de f . En particular, esto permitirá evaluar algunas integrales reales impropias clásicas.

7.1. Clasificación de singularidades

En los capítulos anteriores hemos estudiado distintas propiedades de las funciones analíticas. Por lo tanto, hemos puesto especial interés en los puntos en los que una función es diferenciable. En esta sección estaremos interesados en estudiar el comportamiento de las funciones en los puntos en que no son diferenciables en el sentido complejo. En particular, nos concentraremos en puntos donde la función no es diferenciable, pero sí lo es en un entorno de cada uno de ellos.

Definición 7.1.1. Una *singularidad aislada* de una función f es un punto z_0 tal que f es analítica en todos los puntos de algún entorno de z_0 salvo en z_0 . En tal caso f admite un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

en $A(z_0, 0, \rho)$. Se dice que la singularidad aislada z_0 es:

- (1) *evitable* si $a_n = 0$ para todo $n < 0$;
- (2) *un polo de orden m* ($m \in \mathbb{N}$) si $a_{-m} \neq 0$ pero $a_n = 0$ para todo $n < -m$;

(3) *esencial* si $a_n \neq 0$ para un número infinito de valores negativos de n .

La serie $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$ se denomina *parte principal* del desarrollo de Laurent de f en z_0 y el *residuo* de f en z_0 es definido a ser $Res(f, z_0) := a_{-1}$, el cual será importante en la siguiente sección.

Si la singularidad z_0 es evitable, se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

en un entorno de z_0 salvo para $z = z_0$. La serie infinita del miembro derecho de la igualdad converge uniformemente en todo el entorno y define una función analítica $g(z)$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo z en el entorno exceptuando z_0 . De aquí el nombre de evitable, ya que reemplazando f por g tenemos una función analítica idéntica salvo en z_0 .

Los siguientes resultados dan una caracterización de los distintos tipos de singularidades aisladas, en términos del comportamiento de la función cerca de la singularidad.

Proposición 7.1.2. Sea f una función analítica en $A(z_0, 0, \rho)$. Entonces z_0 es una singularidad evitable si y solo si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

Demostración. Supongamos que z_0 es una singularidad evitable. Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in A(z_0, 0, \rho),$$

y por ende $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

Recíprocamente, si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0$, dado $\epsilon > 0$, existe δ , $0 < \delta < \min\{1, \rho\}$, tal que $|(z - z_0)f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$. Tomando la circunferencia γ_r de centro z_0 y radio $r < \delta$, orientada positivamente, por (6.5) tenemos

$$a_{-n} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} \epsilon r^{n-2} (2\pi r) = \epsilon r^{n-1} \leq \epsilon,$$

y de la arbitrariedad de ϵ , obtenemos $a_{-n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 7.1.3. Sea f una función analítica en $A(z_0, 0, \rho)$. Entonces z_0 es un polo de orden m si y solo si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$, y es finito.

Demostración. Supongamos que z_0 es un polo de orden m . Entonces

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \text{con } a_{-m} \neq 0,$$

y por ende $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0$.

Recíprocamente, si $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = L$, dado $\epsilon > 0$, existe δ , $0 < \delta < \min\{1, \rho\}$, tal que $|(z - z_0)^m f(z)| < \epsilon + |L| := M$ para todo $z \in D(z_0, \delta)$. Tomando la circunferencia γ_r de centro z_0 y radio $r < \delta$, orientada positivamente, por (6.5) tenemos

$$a_{-n} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)(z - z_0)^{n-1} dz, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m + 1.$$

Luego,

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi} M r^{n-m-1} (2\pi r) = M r^{n-m},$$

y tomando límite para $r \rightarrow 0^+$, se concluye que $a_{-n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > m$. Más aún, reescribiendo, $f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, se tiene que

$$0 \neq L = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} = a_{-m}.$$

Observación 7.1.4. Si f tiene un polo de orden m en z_0 , entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty. \quad (7.1)$$

En efecto, como $\lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} = a_{-m} \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} \right| \geq \frac{|a_{-m}|}{2}, \quad \text{para todo } z \in D(z_0, \delta).$$

Luego,

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \right| = \frac{1}{|z - z_0|^m} \left| \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n+m} \right| \geq \frac{|a_{-m}|}{2|z - z_0|^m},$$

para todo $z \in D(z_0, \delta)$. En consecuencia, (7.1) vale.

El siguiente ejemplo muestra que (7.1) no se cumple si f tiene una singularidad esencial en z_0 .

Ejemplo 7.1.5. Sean $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ y $z_n = \frac{1}{2n\pi i}$. Entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ y $f(z_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El comportamiento de una función en una singularidad esencial es muy complejo, como lo veremos en el próximo teorema. Comenzamos primero con un lema auxiliar.

Lema 7.1.6. Sea f una función analítica en $A(z_0, 0, \rho)$. Entonces $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ si y solo si existen $m \in \mathbb{N}$, $r < \rho$ y una función analítica $g: D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad z \neq z_0, \quad \text{y} \quad g(z_0) \neq 0. \quad (7.2)$$

Demostración. Si f admite la representación indicada, claramente $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

Veamos la suficiencia de esta representación. Por hipótesis $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$, así existe R , $0 < R < \rho$, tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in A(z_0, 0, R)$. La función $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ es analítica en $A(z_0, 0, R)$ y $\lim_{z \rightarrow z_0} h(z) = 0$, con lo cual z_0 es una singularidad evitable de h y la función $\tilde{h}: D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in A(z_0, 0, R) \\ 0 & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

es analítica en $D(z_0, R)$. Como $\tilde{h}(z_0) = 0$, el Corolario 6.3.3 implica que existen $m \in \mathbb{N}$ y una función analítica $q: D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $q(z_0) \neq 0$ y

$$\tilde{h}(z) = (z - z_0)^m q(z) \quad \text{para todo } z \in D(z_0, R).$$

Sea ahora $r < R$ tal que $q(z) \neq 0$ para $z \in D(z_0, r)$. Como $\frac{1}{q}$ es analítica en $D(z_0, r)$ y $(z - z_0)^m f(z) = \frac{1}{q(z)}$, para $z \in A(z_0, 0, r)$, se concluye que la función $g: D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g = \frac{1}{q}$ es analítica y satisface (7.2).

Para singularidades esenciales, tenemos ahora la siguiente caracterización en términos de los valores de la función.

Teorema 7.1.7 (Teorema de Casorati-Weierstrass). Sea f una función analítica en el disco punteado $A(z_0, 0, \rho)$. Entonces z_0 es una singularidad esencial si y solo si para cada $\delta > 0$, $f(A(z_0, 0, \delta)) = \mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos que z_0 es una singularidad esencial. Debemos mostrar que si $c \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$, entonces para cada $\delta > 0$, se satisface que $f(A(z_0, 0, \delta)) \cap D(c, \epsilon) \neq \emptyset$, es decir, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$ y $|f(z) - c| < \epsilon$. Asumimos que esto es falso. Entonces existen $c \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$ y $0 < \delta \leq \rho$, tal que $|f(z) - c| \geq \epsilon$ para cada $z \in A(z_0, 0, \delta)$. Así, $\lim_{z \rightarrow z_0} |(z - z_0)^{-1}(f(z) - c)| = \infty$ y por el Lema 7.1.6, existe $m \in \mathbb{N}$, $r < \delta$ y una función analítica $g: D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(z - z_0)^{-1}(f(z) - c) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, \quad z \neq z_0, \quad \text{y} \quad g(z_0) \neq 0.$$

Luego, $f(z) = c + \frac{g(z)}{(z - z_0)^{m-1}}$ para $z \in A(z_0, 0, r)$ y por ende z_0 es evitable si $m = 1$ o un polo si $m > 1$. Esto contradice la hipótesis.

Recíprocamente, si se cumple la condición está claro que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)|$ no existe ni es ∞ , con lo cual la singularidad no es ni evitable ni un polo.

El Teorema de Casorati-Weierstrass dice que la imagen de cualquier bola alrededor de una singularidad esencial es densa en \mathbb{C} , o sea que se pueden encontrar puntos de dicha imagen tan cerca de cualquier número complejo como se desee. Este resultado, ya de por sí sorprendente, puede ser mejorado, como muestra el siguiente teorema, cuya demostración se omite por escapar a los objetivos del presente curso.

Teorema 7.1.8 (Teorema de Picard). Sea z_0 una singularidad esencial de f . Entonces para cualquier $\delta > 0$, $f(A(z_0, 0, \delta))$ es igual a \mathbb{C} salvo, a lo sumo, un punto.

7.2. Residuos

La inspiración de esta sección, es dar respuesta a la siguiente pregunta: Si f tiene una singularidad aislada en $z = a$, ¿Cuáles son los posibles valores de $\int_{\gamma} f(z) dz$ cuando γ es una curva cerrada homotópicamente nula y que no pasa por a ? Si la singularidad es evitable, entonces claramente la integral valdrá cero. Si $z = a$ es un polo o una singularidad esencial el resultado no siempre es cero, pero podemos hallarla aunque con cierta dificultad.

Teorema 7.2.1 (Teorema de los residuos). Sean $A \subset \mathbb{C}$ una región, z_1, \dots, z_n puntos distintos en A y γ un curva en A homotópicamente nula en A tal que ningún z_j esta en γ . Si f es analítica en $A \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n n(\gamma, z_k) \text{Res}(f, z_k).$$

Demostración. Por el Teorema de Laurent, para cada $i = 1, \dots, n$, hay un anillo $A(z_i, 0, \epsilon_i)$ de z_i en el que es válido el desarrollo

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_i)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_i)^k}. \quad (7.3)$$

La primera serie convergerá absolutamente en un disco $D(z_i, \epsilon_i) \subset A$, y la parte principal en $A \setminus \{z_i\}$. Por lo tanto, f será analítica en el anillo $A(z_i, 0, \epsilon_i) \subset A$. Además, por los resultados sobre series de potencias, la parte principal converge absoluta y uniformemente en la intersección de A con el exterior de todo disco abierto centrado en z_i . Denotemos

$$f_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_i)^k, \quad S_i(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_i)^k} \quad \text{y} \quad g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^n S_k(z).$$

Claramente, g es analítica en $A \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$, y además los puntos z_i son singularidades evitables de g . En efecto, para cada $i = 1, \dots, n$, tenemos

$$g(z) = f_i(z) + S_i(x) - \sum_{k=1}^n S_k(z) = f_i(z) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n S_k(z), \quad 0 < |z - z_i| < \epsilon_i.$$

Definiendo $g(z_i) = \lim_{z \rightarrow z_i} g(z)$, la función g es analítica en A , y por el Teorema de Cauchy, $\int_{\gamma} g(z) dz = 0$. De aquí,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} S_k(z) dz. \quad (7.4)$$

Consideremos, ahora la integral $\int_{\gamma} S_k(z) dz$, para $1 \leq k \leq n$. Como $\mathbb{C} \setminus \gamma$ es abierto, existe $\delta_k > 0$ tal que $D(z_k, \delta_k) \cap \gamma = \emptyset$. Por lo tanto, la parte principal S_k es uniformemente convergente en γ , lo que nos permite, por el Lema 6.1.1, intercambiar la sumatoria con la integral para obtener,

$$\int_{\gamma} S_k(z) dz = \int_{\gamma} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{-j}}{(z - z_k)^j} \right) dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma} \frac{a_{-j}}{(z - z_k)^j} dz.$$

Para $j \neq 1$, $\frac{1}{(z - z_k)^j}$ admite una primitiva $\frac{1}{(1-j)(z - z_k)^{j-1}}$, y por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_{\gamma} \frac{a_{-j}}{(z - z_k)^j} dz = 0, \quad j \neq 1.$$

Por otro lado, de la definición de índice, $\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_k} dz = 2\pi i n(\gamma, z_k)$. Luego,

$$\int_{\gamma} S_k(z) dz = a_{-1} 2\pi i n(\gamma, z_k) = 2\pi i n(\gamma, z_k) \text{Res}(f, z_k). \quad (7.5)$$

Finalmente, (7.4) y (7.5) completan la prueba.

El teorema de los residuos es una espada de doble filo. Si podemos calcular el residuo de una función, podemos calcular cierta integral de línea y viceversa. Con mayor frecuencia, sin embargo, esto es usado como un medio para calcular integrales de línea. En este camino necesitamos un método que nos permite calcular el residuo de un polo de una función.

Proposición 7.2.2. Si f tiene un polo de orden m en $z = a$ y $g(z) = (z - a)^m f(z)$, entonces

$$Res(f, a) = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}.$$

En particular, si $z = a$ es un polo simple, $Res(f, a) = g(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$.

Demostración. Por la Proposición 7.1.3 tenemos, $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) \neq 0$, y es finito. Luego, $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^{m+1} f(z) = 0$ y de la Proposición 7.1.2, g tiene una singularidad evitable en $z = a$. Sean $g(a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z)$ y $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k$, con $a_k = \frac{g^{(k)}(a)}{k!}$, la expansión en serie de potencias de g alrededor de a . Por lo tanto

$$f(z) = \frac{a_0}{(z - a)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{(z - a)} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - a)^k,$$

en un entorno reducido de a , y en consecuencia $Res(f, a) = a_{m-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$.

Ejemplo 7.2.3. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

Sea $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$. Como el integrando f es una función continua en \mathbb{R} , $0 \leq f(x) < \frac{1}{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ existe, entonces la integral en cuestión también existe y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x^2}{1+x^4} dx. \tag{7.6}$$

Para $R > 0$ definimos la curva $\gamma_R := C_R + S_R$, donde C_R es la semicircunferencia de radio R centrada en 0 que va desde R hasta $-R$ pasando por iR , y S_R es el segmento de recta que va desde $-R$ hasta R , (véase la Figura 7.1).

La función f es analítica con polos simples en

$$z_k = \exp\left(i\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right)\right), \quad k = 0, \dots, 3$$

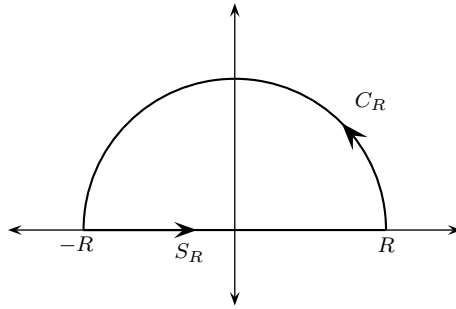


Figura 7.1: Curva del Ejemplo 7.2.3

(las raíces cuartas de -1). Entonces, si $R > 1$, por el Teorema de los Residuos,

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 2\pi i (Res(f, z_0) + Res(f, z_1)). \quad (7.7)$$

De la Proposición 7.2.2,

$$\begin{aligned} Res(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \frac{z_0^2}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} \\ &= \frac{1 - i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$Res(f, z_1) = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right).$$

Luego, de (7.7) tenemos

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz = 2\pi i \left(\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) + \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi,$$

y por la aditividad de la integral de línea,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \pi = \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{S_R} f(z) dz. \quad (7.8)$$

Vamos a evaluar cada una de las integrales de la derecha.

Dado que, para todo $z \in C_R$ y $R > 1$,

$$\frac{|z|^2}{|z^4 + 1|} \leq \frac{|z|^2}{||z^4| - 1|} = \frac{R^2}{R^4 - 1},$$

entonces

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} \frac{|z|^2}{|z^4 + 1|} |dz| \leq \frac{R^2}{R^4 - 1} \int_{C_R} |dz| = \frac{\pi R^3}{R^4 - 1},$$

y consecuentemente

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0. \quad (7.9)$$

Por otro lado, parametrizando S_R por $z(x) = x$, para $x \in [-R, R]$, conseguimos

$$\int_{S_R} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{x^2}{x^4 + 1} dx,$$

y por ende de (7.6),

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx. \quad (7.10)$$

Finalmente, por (7.9) y (7.10) y tomando límite para $R \rightarrow \infty$ en (7.8), concluimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi.$$

Ejemplo 7.2.4. Mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

La función $f(z) = \frac{\exp(iz)}{z}$ tiene un polo simple en $z_0 = 0$. Si $0 < r < R$, sea γ la curva cerrada como se muestra en la figura 7.2.

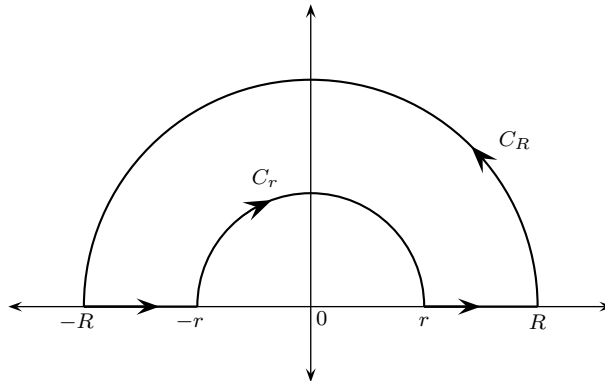


Figura 7.2: Curva del Ejemplo 7.2.4

Sean C_R y C_r los semicírculos de R a $-R$ y de $-r$ a r , respectivamente. Por el Teorema de Cauchy $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, y por la aditividad de la integral,

$$0 = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{\exp(iz)}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r} \frac{\exp(iz)}{z} dz.$$

Reemplazando x por $-x$ en la tercera integral y asociando con la primera, conseguimos

$$0 = \int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{C_R} \frac{\exp(iz)}{z} dz + \int_{C_r} \frac{\exp(iz)}{z} dz.$$

Pero, $\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, entonces

$$2i \int_r^R \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = - \int_{C_R} \frac{\exp(iz)}{z} dz - \int_{C_r} \frac{\exp(iz)}{z} dz. \quad (7.11)$$

Parametrizando C_R por $z(\theta) = Re^{i\theta}$, para $\theta \in [0, \pi]$, tenemos

$$\left| \int_{C_R} \frac{\exp(iz)}{z} dz \right| = \left| i \int_0^\pi \exp(iRe^{i\theta}) d\theta \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta, \quad (7.12)$$

pues $|\exp(iz)| = |\exp(-\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z)i)| = |e^{-\operatorname{Im}(z)}| |e^{\operatorname{Re}(z)i}| = e^{-\operatorname{Im}(z)}$, para $z \in \mathbb{C}$.

Sea $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$. Puesto que $\max_{\theta \in [0, \pi]} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} = 1$ y $\max_{\theta \in [\epsilon, \pi - \epsilon]} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} = e^{-R \operatorname{sen}(\epsilon)}$, tenemos

$$\int_0^\pi e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \leq 2\epsilon + \int_\epsilon^{\pi - \epsilon} e^{-R \operatorname{sen}(\theta)} d\theta \leq 2\epsilon + \pi e^{-R \operatorname{sen}(\epsilon)}.$$

Luego de (7.12) obtenemos $\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{C_R} \frac{\exp(iz)}{z} dz \right| \leq 2\epsilon$. Como ϵ es arbitrario, conseguimos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\exp(iz)}{z} dz = 0. \quad (7.13)$$

Puesto que $\frac{\exp(iz)-1}{z}$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, existe una constante $M > 0$ tal que $\left| \frac{\exp(iz)-1}{z} \right| \leq M$ para $|z| \leq 1$. De aquí,

$$\left| \int_{C_r} \frac{\exp(iz) - 1}{z} dz \right| \leq r\pi M,$$

y por ende, $\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{C_r} \frac{\exp(iz)-1}{z} dz = 0$. Pero, $\int_{C_r} \frac{1}{z} dz = -\pi i$, para cada r , así

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{C_r} \frac{\exp(iz)}{z} dz = -\pi i. \quad (7.14)$$

Finalmente, por (7.13) y (7.14) y tomando límite para $r \rightarrow 0^+$ y $R \rightarrow \infty$ en (7.11), concluimos

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 7.2.5. Mostrar que para $a > 1$,

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + \cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Si $z = e^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$, entonces $\bar{z} = \frac{1}{z}$, y así

$$2e^{i\theta}(a + \cos(\theta)) = 2z \left(a + \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \right) = 2az + z \left(z + \frac{1}{z} \right) = z^2 + 2az + 1.$$

Por lo tanto

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + \cos(\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{a + \cos(\theta)} d\theta = -i \int_\gamma \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz, \quad (7.15)$$

donde γ es la circunferencia $|z| = 1$. Observar que $\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ y $\beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}$ son polos simples de $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1}$, donde $|\alpha| < 1$ y $|\beta| > 1$, pues $a > 1$. Por el Teorema de los Residuos,

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2 + 2az + 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{2\pi i}{\alpha - \beta} = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Combinando esto con (7.15), conseguimos

$$\int_0^\pi \frac{1}{a + \cos(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.1. Cada una de las siguientes funciones tiene una singularidad en $z = 0$. Decir en cada caso que tipo de singularidad es. Si es una singularidad evitable, dar $f(0)$ para extender f analíticamente; si es polo dar la parte singular de f ; y si es esencial, determinar $f(\{z : 0 < z < \delta\})$ para δ suficientemente pequeño.

(a) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$;

(d) $f(z) = \frac{\log(z+1)}{z^2}$;

(b) $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$;

(e) $f(z) = z^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$;

(c) $f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z}$;

(f) $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$.

Ejercicio 7.2. Sean p y q dos funciones analíticas en z_0 y $p(z_0) \neq 0$. Entonces $\frac{p(z)}{q(z)}$ tiene un polo de orden m en z_0 si y solo si q tiene un cero de orden m en z_0 .

Ejercicio 7.3. Sea f una función analítica en A tal que tiene un cero de multiplicidad k en el punto $z = a \in A$. Probar que el residuo de $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = a$.

Ejercicio 7.4. Demostrar que $f(z) = \tan(z)$ es analítica en \mathbb{C} , salvo en los polos simples $z_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Dar la parte singular de f en cada punto.

Ejercicio 7.5. Probar que si $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es meromorfa, es decir analítica salvo en los polos, entonces los polos de f no pueden tener un punto de acumulación en A .

Ejercicio 7.6. Supongamos que f tiene un polo simple en a y g es analítica en un entorno conteniendo a a . Probar que $\text{Res}(fg, a) = g(a)\text{Res}(f, a)$.

Ejercicio 7.7. Encontrar los residuos de las siguientes funciones en el punto indicado.

$$(a) f(z) = \frac{z}{z^2 - 1} \text{ en } z = 1; \quad (c) f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \text{ en } z = 0;$$

$$(b) f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2} \text{ en } z = 0; \quad (d) f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) \text{ en } z = 0.$$

Ejercicio 7.8. Encontrar todos los puntos singulares de las siguientes funciones y computar los residuos en esos puntos.

$$(a) \frac{1}{z^3(z+4)}; \quad (b) \frac{1}{z^3-3}; \quad (c) \frac{1}{e^z-1}.$$

Ejercicio 7.9. Calcular las siguientes integrales.

$$(a) \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1} dx;$$

$$(b) \int_0^\infty \frac{\cos(x)-1}{x^2} dx;$$

$$(c) \int_0^n \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos(\theta)+a^2} d\theta \text{ donde } a^2 < 1 \text{ y } a \neq 0.$$

Ejercicio 7.10. Verificar las siguientes igualdades.

$$(a) \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3} \text{ si } a > 0;$$

$$(b) \int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{4} \text{ si } a > 0.$$

Límites superiores e inferiores de sucesiones reales

A.1. Definición y propiedades

A menudo es útil agregar dos puntos extras a \mathbb{R} , a saber, $\infty (= +\infty)$ y $-\infty$, para formar el sistema de números reales extendido $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, y así extender el orden usual sobre \mathbb{R} , declarando que $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. La completación de \mathbb{R} puede entonces ser establecida como sigue: Todo subconjunto A de $\overline{\mathbb{R}}$ admite un supremo (la menor de las cotas superiores) y un ínfimo (la mayor de las cotas inferiores), denotados por $\sup A$ y $\inf A$, respectivamente. Si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, escribimos

$$\text{máx}(x_1, \dots, x_n) = \sup A, \quad \text{mín}(x_1, \dots, x_n) = \inf A.$$

De esta manera podemos afirmar que toda sucesión $\{x_n\}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ tiene un *límite superior* y un *límite inferior*,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{k \geq 1} \left(\sup_{n \geq k} x_n \right) \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{k \geq 1} \left(\inf_{n \geq k} x_n \right).$$

Muchas veces, se usa la notación $\overline{\lim}_n x_n$ en lugar de $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ y $\underline{\lim}_n x_n$ en lugar de $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Notar que si definimos dos nuevas sucesiones en $\overline{\mathbb{R}}$, a saber, $\{b_k\}$ y $\{c_k\}$, mediante las reglas,

$$b_k := \sup_{n \geq k} x_n \quad \text{y} \quad c_k := \inf_{n \geq k} x_n,$$

las mismas resultan ser decreciente y creciente, respectivamente.

Esto asegura la existencia de sus límites en el sentido ordinario y en consecuencia podemos definir el límite superior y el límite inferior de $\{x_n\}$, de la siguiente manera,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k, \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k.$$

Se puede probar que siempre existe una subsucesión de $\{x_n\}$ cuyo límite es igual al límite superior de $\{x_n\}$. Más aún, el límite superior de una sucesión es el mayor de los límites de sus subsucesiones. Análogamente, se cumple que el límite inferior de $\{x_n\}$, es el menor de los límites de sus subsucesiones.

Ejemplo A.1.1. La sucesión $x_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ tiene como puntos de acumulación a los puntos $-1, 0, 1$. En consecuencia, usando la observación de arriba, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$.

Algunas propiedades que se desprenden inmediatamente de la definición son

- (a) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- (b) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- (c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n) = \lambda \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} (\lambda x_n) = \lambda \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, cuando $\lambda > 0$.

A continuación vamos a enunciar un teorema de caracterización de los límites superior e inferior de una sucesión, y que muchas veces se usa como criterio para determinar la existencia de los mismos.

Teorema A.1.2. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ y sea $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces $\rho = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, si ρ satisface las dos condiciones siguientes:

- (a) Para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \rho + \epsilon\}$ es finito;
- (b) Para cada $\epsilon > 0$, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > \rho - \epsilon\}$ es infinito.

La proposición (a) implica que el conjunto $\{x_1, x_2, \dots\}$ está acotado superiormente. En caso contrario definimos $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Si el conjunto está acotado superiormente pero en cambio no lo está inferiormente y si $\{x_n\}$ carece de límite superior finito, entonces definimos $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Una afirmación análoga es válida para el límite inferior de una sucesión.

Notar que no puede existir más que un número ρ que satisfaga simultáneamente (a) y (b). El límite inferior de $\{x_n\}$ se puede definir también de la siguiente manera:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = - \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \text{en donde} \quad y_n = -x_n \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \dots$$

Luego, la ecuación $\alpha = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ es equivalente a establecer que, para cada $\epsilon > 0$,

el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha - \epsilon\}$ es finito,

mientras que

el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < \alpha + \epsilon\}$ es infinito.

Observar que existe un único α satisfaciendo las dos condiciones anteriores. La relación que existe entre ambos límites viene dada por la desigualdad

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

En el caso que éstos sean finitos y coincidan, entonces la sucesión $\{x_n\}$ es convergente en \mathbb{R} y se satisface '

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Esto es claro, pues el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - \rho| > \epsilon\}$ es finito, para todo $\epsilon > 0$. Recíprocamente, si una sucesión es convergente en \mathbb{R} , entonces su límite superior existe, es finito y coincide con el límite de la sucesión, sin embargo una sucesión puede tener un límite superior finito sin que sea convergente como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo A.1.3. Usemos el Teorema A.1.2 para probar que el límite superior de la sucesión $x_n = (-1)^n$ es 1. En efecto, la condición (a) se cumple, ya que, para $\epsilon > 0$, todos los $x_n = (-1)^n$ se encuentran situados a la izquierda de $1 + \epsilon$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > 1 + \epsilon\}$ es finito. Por otro lado, la condición (b) se satisface, pues para todo n par, $x_n > 1 - \epsilon$, cualquiera sea $\epsilon > 0$.

El siguiente teorema da otra caracterización que a veces es más fácil de aplicar. Esta versión también explica mejor por qué describimos esta noción como "lím sup" y "lím inf".

Teorema A.1.4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$. Entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+2}, \dots\}, \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_n, x_{n+2}, \dots\}.$$

Demostración. Nosotros sólo probaremos la afirmación para el límite superior pues lo establecido para el límite inferior puede ser probado análogamente. Sea $y_n = \sup\{x_n, x_{n+2}, \dots\}$. Entonces $x_n \leq y_n$ para todo n y así, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$. Pero como $\{y_n\}$ es una sucesión decreciente, se tiene que $\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Por lo tanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+2}, \dots\}.$$

Veamos ahora el recíproco de la desigualdad anterior. Si $\limsup x_n = \infty$ entonces $\{x_n\}$ no está acotada y por lo cual, para todo n , $\sup_{n \rightarrow \infty} \{x_n, x_{n+2}, \dots\} = \infty$. En consecuencia, es claro que $\limsup x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_n, x_{n+2}, \dots\}$. Ahora, supongamos $\rho := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n < \infty$. Entonces, dado cualquier número β mayor que ρ , de la definición de límite superior, se deduce que existe un entero N tal que $x_n < \beta$, para cada $n \geq N$. De allí, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_n, x_{n+2}, \dots\} \leq \beta$. Si elegimos el ínfimo de los β que satisfacen la desigualdad anterior podemos concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{x_n, x_{n+2}, \dots\} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Esto completa la prueba.

Ejemplo A.1.5. (a) Si $x_n = (-1)^n n$ entonces $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

(b) Si $x_n = (-1)^n + n$ entonces $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Índice de figuras

1.1.	El plano complejo.	15
1.2.	Suma geométrica de números complejos.	16
1.3.	Opuesto de un número complejo.	17
1.4.	Diferencia de números complejos.	18
1.5.	Conjugado de un número complejo.	19
1.6.	Módulo y argumento de un número complejo.	19
1.7.	Producto de números complejos.	22
1.8.	Raíces quintas de $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$	23
1.9.	Semiplano H_0	23
1.10.	Discos y anillos	24
1.11.	Proyección estereográfica.	25
2.1.	Conjunto abierto.	31
2.2.	Puntos de acumulación.	32
2.3.	Función compleja $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = w_0$	38
2.4.	Representación gráfica del límite.	39
2.5.	Ejemplo de conjuntos conexos y no conexos.	44
2.6.	Conjunto conexo pero no arco-conexo.	47
3.1.	Región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$	61
4.1.	$\exp(z)$ como una función inyectiva sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$	86
4.2.	El rayo $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \alpha \in \arg(z)\}$ y la región $G_\alpha = \mathbb{C} \setminus S_\alpha$	87
5.1.	Curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$	107
5.2.	γ es homotópicamente nula en A y β no es homotópicamente nula en A	116
5.3.	Curva homotópicamente nula	116
5.4.	Partición de T en T_1, T_2, T_3 y T_4	117
5.5.	La sucesión $T = T^0 \supset T^1 \supset T^2 \supset T^3 \supset T^4 \supset \dots$	118
5.6.	Construcción de la cinta R conteniendo a γ y contenida en A	120
5.7.	Polígono P aproximando a γ	121

5.8. Descomposición de curvas cerradas no simples en curvas cerradas simples	122
5.9. Camino de integración para la rama principal del logaritmo.	124
5.10. Curvas del Teorema 5.3.12.	124
5.11. Principio de deformación de caminos.	126
5.12. Integral tipo Cauchy.	130
5.13. Curva del Ejemplo 5.5.5	132
5.14. Curva del Ejercicio 5.13	137
6.1. Teorema de Laurent	149
7.1. Curva del Ejemplo 7.2.3	164
7.2. Curva del Ejemplo 7.2.4	165

Índice alfabético

Ángulo entre dos curvas, 92

Anillo, 24

Camino, 46

Cero de orden k , 146

Conjunto

abierto, 31

acotado, 49

arco-conexo, 46

cerrado, 32

clausura, 32

compacto, 49

conexo, 44

frontera, 34

Criterio

de d'Alembert, 64

de Cauchy, 58

del cociente, 61

M-test, 59

Cubrimiento, 48

Curva

cerrada, 107

concatenación, 110

de Jordan, 108

homotópicamente nula, 115

índice de, 127

opuesta, 110

orientación, 107

orientación positiva, 108

parametrizaciones equivalentes, 107

parametrizada, 107

simple, 107

suave a trozos, 107

Desigualdad

de Cauchy, 132

de Cauchy-Schwarz, 19

fundamental, 112

triangular, 19

Disco

abierto, 24

cerrado, 24

punteado, 24

Ecuaciones de Cauchy-Riemann, 74

forma polar, 77

Fórmula

de Cauchy para Derivadas, 129

integral de Cauchy, 128

de Cauchy-Hadamard, 63

de Euler, 21

Función

analítica, 72

armónica, 90

armónica conjugada, 90

compleja, 37

conforme, 92

conforme en un punto, 92

continua, 41

continua a trozos, 105

diferenciable, 71

- entera, 72
 - exponencial, 81
 - límite, 38
 - logaritmo, 86
 - primitiva, 113
 - rama del logaritmo, 87
 - rama principal de una potencia, 89
 - rama principal del logaritmo, 87
 - regular, 72
 - trigonométrica compleja, 83
 - uniformemente continua, 51
- Homotecia, 94
- Integral
- función compleja de variable real, 106
 - respecto a la longitud de arco, 111
 - sobre una curva, 108
- Inversión, 94
- Límite
- inferior, 171
 - superior, 171
- Lema
- integral de Goursat, 117
- Ley del paralelogramo, 27
- Número complejo, 14
- neutro para el producto, 17
 - ángulo principal, 20
 - argumento, 20
 - conjugado, 17
 - forma binómica, 14
 - forma polar, 21
 - forma trigonométrica, 21
 - imaginario puro, 14
 - inverso, 17
 - módulo, 18
 - neutro para la suma, 16
 - parte imaginaria, 14
 - parte real, 14
 - potencia compleja, 88
 - potencias, 17
 - producto, 16
 - raíces n -ésimas, 21
 - simétrico, 16
 - suma, 15
- Plano complejo extendido, 25
- Principio
- de deformación de caminos, 125
 - del módulo máximo global, 135
 - del Módulo Máximo Local, 134
 - de prolongación analítica, 146
- Propiedad del valor medio, 134
- Proyección estereográfica, 26
- Punto
- aislado, 32
 - de acumulación, 32
- Región, 46
- simplemente conexa, 122
- Regla
- de la Cadena, 72
 - de Leibniz, 90
- Residuo, 158
- Rotación, 94
- Serie, 57
- condicionalmente convergente, 58
 - absolutamente convergente, 57
 - convergente, 57
 - de Laurent, 149
 - parte principal, 158
 - de potencias, 62
 - de Taylor, 143
 - disco de convergencia, 64
 - divergente, 57
 - geométrica, 60

- producto de Cauchy, 62
- radio de convergencia, 64
- Serie de funciones
 - convergencia puntual, 59
 - convergencia uniforme, 59
- Singularidad aislada, 157
 - esencial, 158
 - evitable, 157
 - polo de orden m , 157
- Subconjuntos separados, 45
- Subcubrimiento finito, 48
- Sucesión, 34
 - convergente, 34
 - de Cauchy, 37
 - divergente, 34
- Sucesión de funciones
 - convergencia puntual, 59
 - convergencia uniforme, 59
- Tangente en un punto, 92
- Teorema
 - de Bolzano, 46
 - de Casorati-Weierstrass, 160
 - de Cauchy Generalizado, 126
 - de Cauchy-Goursat, 119
 - de Cauchy-Riemann, 75
 - de Green, 115
 - de Jordan, 108
 - de la convergencia analítica, 142
 - de Laurent, 149
 - de Liouville, 132
 - de los residuos, 161
 - de Morera, 133
 - de Picard, 161
 - de Taylor, 143
 - fundamental del Álgebra, 133
 - Fundamental del Cálculo, 113
 - independencia del camino, 113
- Transformación de Möbius, 93
 - razón doble, 97
- Traslación, 94
- Trayectoria , *véase* camino
- Vector tangente, 92

Índice de símbolos

$\operatorname{Re}(z)$	parte real de z	14
$\operatorname{Im}(z)$	parte imaginaria de z	14
\bar{z}	conjugado del número complejo z	17
$ z $	módulo del número complejo z	18
$\arg_{\alpha}(z)$	único argumento de z en $(\alpha, \alpha + 2\pi]$	20
$D(w, r)$	disco abierto de centro w y radio r	24
$\overline{D(w, r)}$	disco cerrado de centro w y radio r	24
$A(w, s, r)$	anillo con centro w y radios s y r	24
A'	el conjunto de puntos de acumulación	32
\bar{A}	la clausura del conjunto A	32
∂A	frontera del conjunto A	34
$\{z_n\}$	sucesión de números complejos	34
$f'(z)$	derivada de la función $f(z)$	71
$\angle(\gamma_1, \gamma_2, z)$	ángulo formado por γ_1 y γ_2 en z	92
$\int_{\gamma} f(z) dz$	integral de f sobre una curva	108
$\int_{\gamma} f(z) dz $	integral de f resp. a la long. de arco	111
$\ell(\gamma)$	longitud de arco de γ	112
$n(\gamma, a)$	índice de a respecto a una curva γ	127
$\operatorname{Res}(f, z)$	residuo de f en z	158

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L. V. *Complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] Apostol, T. M. *Análisis Matemático*, Reverté S.A., España, 1979.
- [3] Brown J. W., Churchill, R. V. *Variable compleja y aplicaciones*, Mc Graw Hill, Mexico, 2005.
- [4] Conway, J. B. *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [5] Marsden, J. E., Hoffman, M. J. *Basic complex analysis*, W.H. Freeman, New York, 1999.
- [6] Marsden, J. E., Tromba, A. J. *Cálculo Vectorial*, Addison Wesley, Madrid, 2004.
- [7] Raggio, G. A. *Notas de análisis complejo*, Trabajos de Matemática, Serie C, 34/06, FaMAF-UNC, 2006.
- [8] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, London, 1987.
- [9] Sasane, S. M., Sasane, A. *A friendly approach to complex analysis*, World scientific Publishing, USA, 2014.
- [10] Spivak, M. *Cálculo infinitesimal*, Vol. II, Reverté S.A., España, 2005.
- [11] Shakarchi, R. *Problems and solutions for complex analysis*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [12] Stein, E. M., Shakarchi, R. *Complex analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 2010.



UNLPam

Santa Rosa, La Pampa, octubre de 2018.