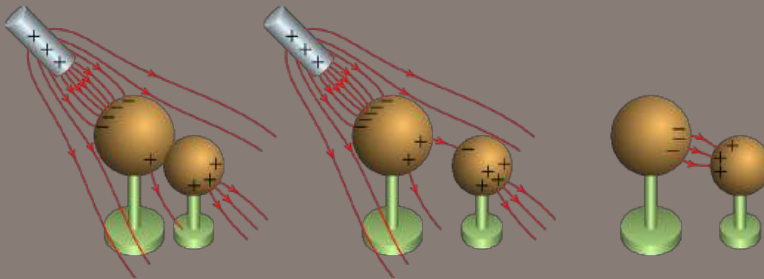
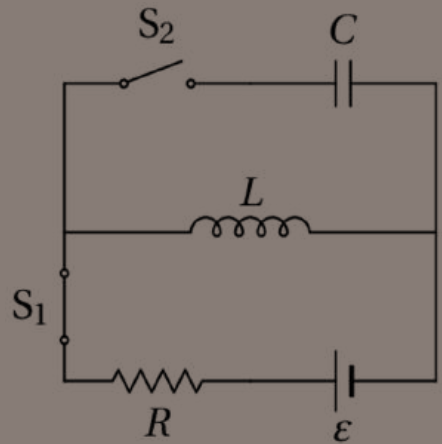
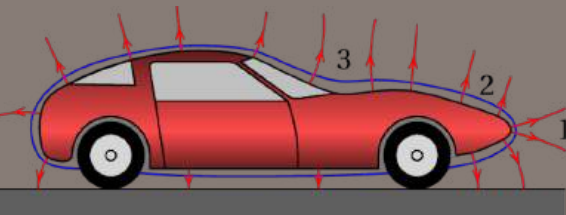
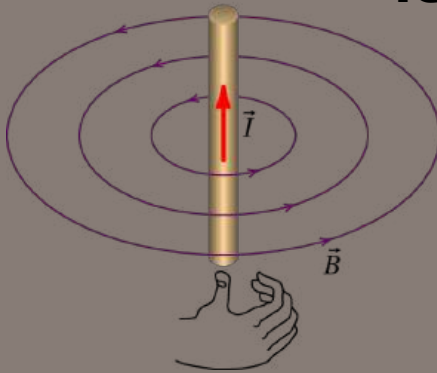


# Eletricidade, Magnetismo e Circuitos

Terceira edição



Jaime E. Villate



# **Eletricidade, Magnetismo e Circuitos**

**Jaime E. Villate**

Faculdade de Engenharia

Universidade do Porto

## **Eletricidade, Magnetismo e Circuitos**

Copyright © 2019, Jaime E. Villate

E-mail: villate@fe.up.pt

A versão mais recente deste livro está disponível em

<http://def.fe.up.pt/eletricidade>

onde pode ser consultado, copiado e reproduzido livremente, respeitando os termos da *Licença Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). Para obter uma cópia desta licença, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>

ou envie uma carta para Creative Commons, 559 Nathan Abbott Way, Stanford, California 94305, USA.

Edição do autor.

ISBN: 978-972-99396-6-2

Terceira edição

Setembro de 2019

# Conteúdo

<b>Prefácio</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de símbolos e notações</b>	<b>xi</b>
<b>1. Campo elétrico</b>	<b>1</b>
1.1. Cargas eletrostáticas . . . . .	2
1.2. Estrutura atômica . . . . .	3
1.3. Eletrização . . . . .	5
1.4. Propriedades da carga . . . . .	6
1.4.1. Quantização da carga . . . . .	7
1.4.2. Conservação da carga . . . . .	7
1.5. Força entre cargas pontuais . . . . .	7
1.6. Campo elétrico . . . . .	10
1.7. Condutores e isoladores . . . . .	12
1.8. Eletrização por indução . . . . .	14
Perguntas . . . . .	16
Problemas . . . . .	18
Respostas . . . . .	20
<b>2. Voltagem e corrente</b>	<b>21</b>
2.1. Potencial eletrostático . . . . .	22
2.2. Pilhas químicas . . . . .	25
2.3. Força eletromotriz . . . . .	27
2.4. Condutores e semicondutores . . . . .	31
2.5. Corrente elétrica . . . . .	35
2.6. Potência elétrica . . . . .	37
2.7. Voltímetros e amperímetros . . . . .	40
Perguntas . . . . .	41
Problemas . . . . .	42
Respostas . . . . .	44

<b>3. Resistência</b>	<b>45</b>
3.1. Características voltagem-corrente . . . . .	46
3.2. Lei de Ohm . . . . .	46
3.3. Característica de uma bateria . . . . .	47
3.4. Código de cores para resistências . . . . .	50
3.5. Resistividade . . . . .	52
3.6. Supercondutividade . . . . .	55
3.7. Associações de resistências . . . . .	57
Perguntas . . . . .	62
Problemas . . . . .	63
Respostas . . . . .	66
<b>4. Capacidade</b>	<b>67</b>
4.1. Capacidade de um condutor isolado . . . . .	68
4.2. Esfera condutora isolada . . . . .	68
4.3. Condensadores . . . . .	70
4.3.1. Condensador esférico . . . . .	73
4.3.2. Condensador plano . . . . .	74
4.3.3. Ultracondensadores . . . . .	76
4.4. Energia elétrica armazenada num condensador . . . . .	79
4.5. Associações de condensadores . . . . .	80
Perguntas . . . . .	83
Problemas . . . . .	84
Respostas . . . . .	86
<b>5. Circuitos de corrente contínua</b>	<b>87</b>
5.1. Diagramas de circuito . . . . .	88
5.2. Leis dos circuitos . . . . .	89
5.3. Método das malhas . . . . .	90
5.4. Princípio de sobreposição . . . . .	95
5.5. Circuitos com condensadores . . . . .	97
Perguntas . . . . .	103
Problemas . . . . .	105
Respostas . . . . .	108
<b>6. Fluxo elétrico</b>	<b>109</b>
6.1. Campo elétrico produzido por cargas pontuais . . . . .	110
6.2. Propriedades das linhas de campo elétrico . . . . .	112
6.3. Fluxo . . . . .	115

6.4. Lei de Gauss . . . . .	118
6.4.1. Campo de um plano . . . . .	122
6.4.2. Campo de um fio retilíneo . . . . .	123
6.4.3. Campo de uma esfera condutora . . . . .	124
Perguntas . . . . .	124
Problemas . . . . .	126
Respostas . . . . .	128
<b>7. Potencial eletrostático</b>	<b>129</b>
7.1. Potencial e campo elétrico . . . . .	130
7.2. Potencial devido a cargas pontuais . . . . .	132
7.3. Superfícies equipotenciais . . . . .	133
7.4. Pontos críticos do potencial . . . . .	135
7.5. Potencial e energia eletrostática . . . . .	137
7.6. Potencial nos condutores . . . . .	137
7.6.1. Potencial de uma esfera condutora . . . . .	140
Perguntas . . . . .	142
Problemas . . . . .	144
Respostas . . . . .	146
<b>8. Campo magnético</b>	<b>147</b>
8.1. Força magnética . . . . .	148
8.2. Força magnética sobre condutores com corrente . . . . .	151
8.3. Momento magnético . . . . .	152
8.4. Força magnética sobre cargas pontuais . . . . .	155
8.5. Campo magnético de um fio com corrente . . . . .	158
8.6. Força entre condutores com corrente . . . . .	162
Perguntas . . . . .	164
Problemas . . . . .	165
Respostas . . . . .	168
<b>9. Indução eletromagnética</b>	<b>169</b>
9.1. Campo elétrico induzido . . . . .	170
9.2. Gerador de Faraday . . . . .	172
9.3. Lei de Faraday . . . . .	173
9.4. Gerador de tensão alternada . . . . .	177
9.5. Indução mútua . . . . .	178
9.6. Indutância . . . . .	179
9.7. Circuitos com indutores . . . . .	180

Perguntas . . . . .	184
Problemas . . . . .	186
Respostas . . . . .	190
<b>10.Processamento de sinais</b>	<b>191</b>
10.1. Sinais . . . . .	192
10.2. Circuito RC . . . . .	192
10.3. Equações diferenciais dos circuitos . . . . .	194
10.4. Unidades de tempo e de frequência . . . . .	196
10.5. Impedância . . . . .	197
10.6. Associações de impedâncias . . . . .	199
10.7. Função de transferência . . . . .	209
Perguntas . . . . .	212
Problemas . . . . .	213
Respostas . . . . .	217
<b>11.Circuitos de corrente alternada</b>	<b>219</b>
11.1. Circuito LC . . . . .	220
11.2. Funções sinusoidais . . . . .	222
11.3. Fasores . . . . .	223
11.4. Tensão alternada . . . . .	226
11.5. Impedância complexa . . . . .	227
11.5.1. Resistências . . . . .	229
11.5.2. Condensadores . . . . .	230
11.5.3. Indutores . . . . .	231
11.6. Potência nos circuitos de corrente alternada . . . . .	234
11.7. Filtros de frequência . . . . .	236
11.8. Ressonância . . . . .	239
Perguntas . . . . .	242
Problemas . . . . .	244
Respostas . . . . .	247
<b>12.Ondas eletromagnéticas e luz</b>	<b>249</b>
12.1. Equações de Maxwell . . . . .	250
12.2. Campos induzidos . . . . .	252
12.3. Campo eletromagnético no vácuo . . . . .	254
12.4. Ondas planas polarizadas . . . . .	257
12.5. Ondas harmônicas . . . . .	260
12.6. Espectro eletromagnético . . . . .	262



12.7. Teoria ondulatória da luz . . . . .	264
12.8. Teoria corpuscular da luz . . . . .	265
12.9. Diodos emissores de luz (LED) . . . . .	268
Perguntas . . . . .	270
Problemas . . . . .	271
Respostas . . . . .	273
<b>A. Constantes e dados numéricos</b>	<b>275</b>
A.1. Prefixos SI . . . . .	275
A.2. Constantes fundamentais . . . . .	275
A.3. Constantes dielétricas e rigidez dielétrica . . . . .	276
A.4. Resistividade e coeficientes de temperatura . . . . .	276
<b>B. Cálculo do campo elétrico</b>	<b>277</b>
B.1. Campo de uma esfera condutora . . . . .	277
B.2. Campo de duas esferas condutoras concêntricas . . . . .	280
<b>C. Transformada de Laplace</b>	<b>283</b>
C.1. Definição . . . . .	283
C.2. Propriedades . . . . .	284
C.2.1. Linearidade . . . . .	284
C.2.2. Derivada da transformada . . . . .	284
C.2.3. Transformada da derivada . . . . .	285
C.2.4. Deslocamento na frequência . . . . .	285
C.2.5. Deslocamento no tempo . . . . .	285
C.3. Transformadas de funções importantes . . . . .	287
C.3.1. Polinômios . . . . .	287
C.3.2. Funções exponenciais . . . . .	287
C.3.3. Funções sinusoidais . . . . .	288
C.3.4. Função impulso unitário . . . . .	288
<b>D. Créditos fotográficos</b>	<b>291</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>293</b>
<b>Índice</b>	<b>295</b>



# Prefácio

O objetivo deste manual é preparar os estudantes para compreender o funcionamento dos dispositivos elétricos e eletrônicos com que são confrontados na sua experiência quotidiana e foi escrito como texto de apoio para a disciplina de Física 2 (EIC0014), do segundo ano do Mestrado Integrado em Engenharia Informática e Computação da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Durante vários anos lecionei um semestre de Eletromagnetismo, para estudantes do segundo ano de Engenharia. Nos últimos anos introduzi algumas alterações no programa, para o enquadrar melhor com os novos programas do Ensino Secundário e os novos planos de estudo dos Mestrados Integrados em Engenharia. Uma abordagem abstrata, baseada no estudo das equações de Maxwell, já não se enquadra nesses novos planos de estudo.

Por outro lado, a mudança rápida na tecnologia faz com que alguns tópicos percam interesse e outros se tornem importantes. Por exemplo, nos primeiros anos em que lecionei eletromagnetismo, dedicava sempre algum tempo a explicar o funcionamento de um tubo de raios catódicos, mas não falava de cristais líquidos nem de LEDs. Nessa época já existiam LED e ecrãs de cristal líquido (LCD), mas não eram conhecidos pela maioria de estudantes, enquanto que qualquer estudante tinha um televisor ou monitor com tubo de raios catódicos. Hoje em dia a situação é bem diferente; é cada vez mais difícil encontrar monitores ou televisores com tubos de raios catódicos, mas estamos rodeados de LCDs e LEDs. Tornou-se mais importante falar de cristais líquidos e díodos emissores de luz do que de tubos de raios catódicos.

Neste livro são utilizados alguns conceitos introduzidos no livro *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos* (Villate, quinta edição, 2019) e o Sistema de Álgebra Computacional (CAS) *Maxima* utilizado nesse livro é utilizado também aqui em alguns capítulos. O livro *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos* não é um pré-requisito para este, mas é útil consultá-lo em algumas secções deste livro em que é referido; é também importante, para quem não esteja

familiarizado com o sistema Maxima, rever o apêndice sobre o assunto nesse livro.

Nos quatro primeiros capítulos é feita uma introdução operativa à eletrostática e à eletricidade. O capítulo 5 é sobre circuitos de corrente contínua. Nos capítulos 6 e 7 sobre o fluxo e o potencial elétrico, é estudado o campo elétrico de forma mais teórica. Os capítulos 8 e 9 são dedicados ao campo magnético e à indução eletromagnética. Os capítulos 10 e 11 são também sobre teoria de circuitos, mas com tensões variáveis; no capítulo 10 é feita uma introdução ao processamento de sinais e no capítulo 11 são estudados os circuitos de corrente alternada e filtros de frequência. Finalmente, no capítulo 12 são estudadas as ondas eletromagnéticas e a dualidade “onda-partícula” da luz.

Nesta terceira edição foram acrescentados mais 7 problemas, o texto sofreu algumas alterações, tentando torná-lo mais fácil de compreender e as figuras foram todas melhoradas usando o software *Asymptote* (<https://asymptote.sourceforge.io>).

Agradeço muito especialmente ao professor João Rui Guedes de Carvalho, da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, pelas sugestões e troca de opiniões sobre o tema e também por ter feito uma revisão muito cuidadosa do livro, apontando várias gralhas e sugerindo alterações para torná-lo mais claro. Agradeço ao colega Luís Martelo os seus comentários e sugestões. Um agradecimento especial também para todos os estudantes que ao longo dos últimos anos têm contribuído com comentários e sugestões; o seu entusiasmo e interesse têm sido fonte de alento para a escrita deste livro; são demasiados para indicar todos os seus nomes aqui. Agradeço também ao colega João Carvalho com quem lecionei eletromagnetismo durante vários anos.

Jaime E. Villate

E-mail: [villate@fe.up.pt](mailto:villate@fe.up.pt)

Porto, dezembro de 2019

# Lista de símbolos e notações

$A, B, \dots$	pontos no espaço, curvas, superfícies e sólidos
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$	fasores
$A, B, \dots a, b, \dots$	unidades
$A, B, \dots a, b, \dots$	variáveis ou módulos de vetores
$\vec{A}, \vec{B}, \dots \vec{a}, \vec{b}, \dots$	vetores
$\hat{A}, \hat{B}, \dots \hat{a}, \hat{b}, \dots$	versores
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	produto escalar entre vetores
$\vec{a} \times \vec{b}$	produto vetorial entre vetores
$\bar{f}$	valor médio da função $f$
$f_{\text{ef}}$	valor eficaz da função periódica $f$
$f_{\text{máx}}$	valor máximo da função sinusoidal $f$
$\frac{df}{dx}, \frac{d^2f}{dx^2}, \dots$	derivadas da função $f$ em ordem a $x$
$\dot{f}, \ddot{f}, \dots$	derivadas da função $f$ em ordem ao tempo
$\tilde{f}$ ou $\mathcal{L}\{f\}$	transformada de Laplace da função $f$
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \dots$	derivadas parciais de uma função de várias variáveis
$a$	aceleração
$A$	área de uma superfície
$A$	ampere (unidade SI de corrente)
$\vec{a}$	vetor aceleração
$\vec{B}$	campo magnético
$C$	capacidade elétrica
$C$	coulomb (unidade SI de carga)
$c$	velocidade da luz
$c$	prefixo centi ( $10^{-2}$ )
$d$	distância
$d$	prefixo deci ( $10^{-1}$ )
$\vec{E}$	campo elétrico
$e$	carga elementar
$e$	número de Euler (base do logaritmo natural)

$E_{\text{máx}}$	rigidez dielétrica
eV	eletrão-volt (unidade de energia)
$\vec{F}$	força
F	farad (unidade SI de capacidade)
$f$	frequência
G	gauss (unidade de campo magnético); prefixo giga ( $10^9$ )
$\vec{g}$	campo gravítico
g	grama (unidade SI de massa)
$H$	função de transferência; função de resposta em frequência
H	henry (unidade SI de indutância)
$h$	constante de Planck
$I$	corrente elétrica
$i$	número imaginário $\sqrt{-1}$
$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$	versores cartesianos segundo os eixos $x$ , $y$ e $z$
J	joule (unidade SI de trabalho e energia)
$K$	constante dielétrica
K	kelvin (unidade SI de temperatura)
$k$	constante de Coulomb
k	prefixo quilo ( $10^3$ )
$k_m$	constante magnética
kg	quilograma (unidade SI de massa)
$L$	indutância; comprimento
$M$	indutância mútua
M	prefixo mega ( $10^6$ )
$m$	massa
m	metro (unidade SI de comprimento)
N	newton (unidade SI de força)
$\hat{n}$	versor normal a uma superfície
n	prefixo nano ( $10^{-9}$ )
$\vec{p}$	quantidade de movimento
$P$	potência
p	prefixo pico ( $10^{-12}$ )
$Q, q$	carga elétrica
$R$	resistência elétrica; raio de uma esfera.
$R, \theta, z$	coordenadas cilíndricas
$\hat{R}, \hat{e}_\theta, \hat{k}$	versores das coordenadas cilíndricas
$\vec{r}$	vetor posição
$r, \theta, \phi$	coordenadas esféricas
$\hat{r}, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi$	versores das coordenadas esféricas

---

$s$	posição na trajetória; domínio da frequência, na transformada de Laplace.
$s$	segundo (unidade SI de tempo)
$T$	período de uma onda sinusoidal; temperatura
$T$	tesla (unidade SI de campo magnético); prefixo tera ( $10^{12}$ )
$t$	tempo
$t_C, t_L$	constantes de tempo
$U_e$	energia potencial elétrica
$U_g$	energia potencial gravítica
$u$	função degrau unitário
$V$	potencial
$V$	volt (unidade SI de potencial)
$\vec{v}$	vetor velocidade
$W$	trabalho
$W$	watt (unidade SI de potência)
$X$	reatância
$x, y, z$	coordenadas cartesianas
$Z$	impedância
$\alpha$	coeficiente de temperatura
$\Delta a$	aumento da variável $a$
$\Delta V$	voltagem
$\delta$	função delta de Dirac
$\varepsilon$	força eletromotriz
$\varepsilon'$	força contra-eletromotriz
$\Phi$	fluxo elétrico
$\Psi$	fluxo magnético
$\varphi$	fase inicial
$\lambda$	carga linear; comprimento de onda
$\mu$	permeabilidade magnética
$\mu$	prefixo micro ( $10^{-6}$ )
$\pi$	relação entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro
$\rho$	carga volúmica; resistividade
$\sigma$	carga superficial
$\vec{\omega}$	velocidade angular
$\omega$	frequência angular
$\Omega$	ohm (unidade SI de resistência)
$^\circ$	grau (unidade de ângulo)
$^\circ\text{C}$	grau Celsius (unidade de temperatura)





# 1. Campo elétrico

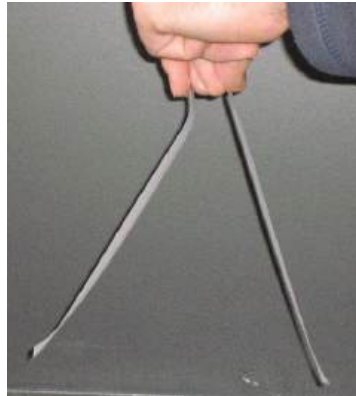


A fotografia mostra um gerador de Wimshurst, inventado na década de 1880. Já no século XVIII existiam máquinas eletrostáticas usadas para gerar cargas eletrostáticas por atrito; a grande inovação de Wimshurst foi a utilização da **indução eletrostática**, permitindo acumular cargas muito mais elevadas por meios mecânicos. Há diversos mecanismos envolvidos no funcionamento do gerador de Wimshurst, que serão estudados nos próximos capítulos: garrafa de Leiden, rigidez dielétrica, etc.

## 1.1. Cargas eletrostáticas

A acumulação de cargas eletrostáticas é um fenómeno que se manifesta frequentemente na experiência quotidiana, especialmente nos dias em que o ar está mais seco. Um exemplo em que surge esse fenómeno é quando se coloca película aderente de plástico sobre uma tigela e se esfrega o plástico sobre a tigela para que fique colado a esta. A ação de esfregar o plástico origina transferência de cargas elétricas entre o plástico e a tigela, ficando ambos com cargas eletrostáticas que produzem força atrativa. Uma folha de acetato também acumula facilmente cargas eletrostáticas, produzindo força atrativa sobre a folha de papel que se costuma colocar debaixo do acetato. Especialmente no verão, sentem-se por vezes choques elétricos quando se toca um objeto metálico, por exemplo, a porta de um automóvel, ou quando se aperta a mão de outra pessoa. O automóvel ou a outra pessoa têm carga eletrostática e o choque elétrico sentido é devido à passagem de alguma dessa carga através do corpo (corrente elétrica).

Basta usar fita-cola para realizar em casa uma experiência para estudar a transferência de cargas eletrostáticas. Pode ser útil também usar dois lápis ou canetas. Corte aproximadamente 20 cm de fita e cole-a à superfície de uma mesa, deixando uma pequena parte fora da mesa para poder descolar a fita da mesa ficando pendurada livremente no ar (evite que a parte livre toque os dedos ou outros objetos; pode ajudar-se de uma caneta para segurá-la num extremo deixando o outro livre).



**Figura 1.1.:** Força elétrica repulsiva.

Enquanto descolou a fita da mesa, algumas cargas elétricas foram transferidas entre a cola e a mesa; a fita ficou com carga eletrostática que manterá enquanto não tocar outros objetos. Repita o mesmo procedimento com um segundo pedaço de fita, usando a mesma mesa. Como os materiais são os mesmos nos dois casos, espera-se que as duas fitas tenham o mesmo tipo de carga. Aproxime as duas fitas, sem se tocarem e observe a força repulsiva entre cargas do mesmo tipo (figura 1.1). Aproxime alguma das

duas fitas de outros objetos sem carga, por exemplo as paredes, de forma que o lado que se aproxima do objeto seja sempre o que não tem cola, para evitar que fique colada. Observe que as fitas com carga são atraídas pelos objetos sem carga.

Deite fora a fita já usada e prepare outros dois pedaços de fita, mas desta vez cole um deles na mesa e o outro sobre o primeiro. Esfregue a fita de cima e descole simultaneamente os dois pedaços da mesa e entre si. Como a cola da fita de cima e o lado sem cola da fita de baixo são dois materiais diferentes, uma das duas superfícies passará carga para a outra, ficando as duas fitas com cargas de tipos diferentes (um com falta de carga e o outro com excesso). Neste caso deve observar-se uma força atrativa entre as duas fitas, tal como na figura 1.2, por terem cargas de tipos diferentes (esta parte da experiência é mais difícil, porque se quando a fita é descolada do rolo já tem carga elétrica as duas fitas já têm no início carga do mesmo tipo, tornando mais difícil conseguir que fiquem com cargas diferentes). Observe também que cada uma das fitas, independentemente do tipo de carga que tiver, é atraída por outros objetos sem carga.

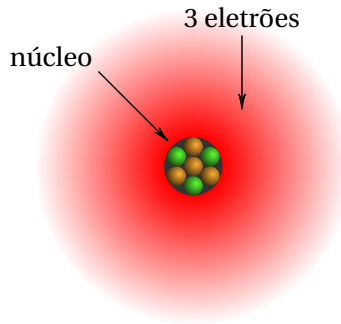


**Figura 1.2.:** Força atrativa entre fitas com cargas de tipos diferentes.

## 1.2. Estrutura atômica

Toda a matéria é formada por átomos. Cada átomo tem um núcleo muito compacto com dois tipos de partículas, **protões** e **neutrões** (figura 1.3), rodeado por uma **nuvem eletrônica** extensa, formada por outro tipo de partículas muito mais pequenas, os **eletrões**.

Entre dois protões ou dois eletrões atua uma força repulsiva chamada **força elétrica**. Entre um protão e um eletrão atua também uma força elétrica, mas atrativa. A intensidade da força entre dois protões, dois eletrões ou um



**Figura 1.3.:** Átomo de lítio com 3 prótons, 4 nêutrons e nuvem de 3 elétrons.

elétron e um próton é a mesma, se a distância entre as partículas é igual nos 3 casos. Nos nêutrons as outras partículas não exercem nunca nenhuma força elétrica.

Conclui-se que existem dois tipos diferentes de carga, a dos prótons e a dos elétrons e que os nêutrons não têm carga.

*A força elétrica atua unicamente entre duas partículas com carga; a força é repulsiva, se as cargas das partículas é do mesmo tipo, ou atrativa se são de tipos diferentes.*

Um átomo neutro (com igual número de prótons e de elétrons) e não polarizado (nuvem eletrônica com centro no núcleo), não produz forças elétricas sobre outras partículas com carga. Admite-se assim que prótons e elétrons são partículas com cargas elétricas de sinal contrário mas de igual valor absoluto, tendo-se convencionado que os elétrons têm carga negativa e os prótons carga positiva. Um conjunto de partículas tem uma carga total igual à soma algébrica das partículas individuais que a constituem.

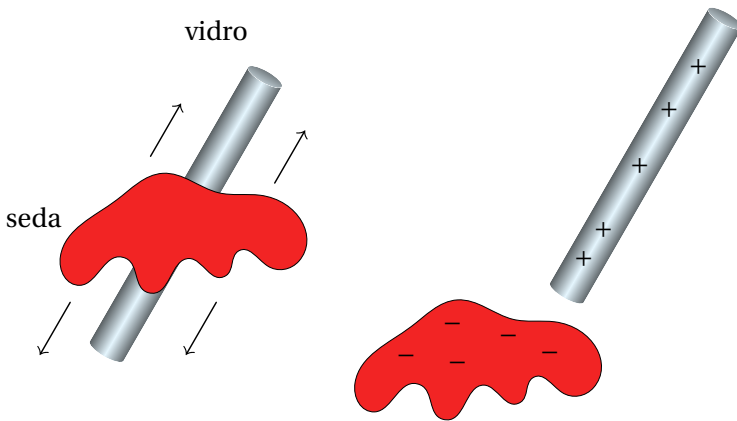
A unidade SI usada para medir carga é o **coulomb**, indicado com a letra C. Os prótons têm todos a mesma carga, chamada **carga elementar**, com o seguinte valor:

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.1)$$

Os elétrons têm também todos a mesma carga, exatamente igual a  $-e$ .

### 1.3. Eletrização

É necessária uma energia muito elevada para conseguir remover um próton, ou um neutrão, do núcleo de um átomo. Isso só acontece no interior das estrelas ou na camada mais externa da atmosfera, onde chocam partículas cósmicas com muita energia, ou nos aceleradores de partículas onde as energias das partículas são suficientemente elevadas. Para extrair um elétron de um átomo neutro é necessária uma energia muito menor, ficando então um **ião** positivo com carga total igual a  $e$ . Um átomo neutro pode também atrair um elétron adicional, ficando então um ião negativo com carga total igual a  $-e$ .



**Figura 1.4.:** Barra de vidro eletrizada esfregando-a com um pano deseda.

Sempre que dois objetos diferentes entram em contacto próximo, há elétrons de um dos objetos que passam para o outro. O objeto que for mais susceptível de perder elétrons fica então eletrizado com carga positiva ( $n$  prótons em excesso) e o objeto que tiver menos tendência para perder os seus elétrons fica com carga igual (em intensidade) mas negativa ( $n$  elétrons em excesso), como no caso da figura 1.4.

Nas experiências com fita-cola descritas no início do capítulo, a cola ajuda a que a mesa e a fita entrem em contacto muito próximo, passando elétrons de uma para a outra. Se a mesa e a fita estão inicialmente descarregadas, após a separação entre elas uma fica com carga negativa e a outra com carga positiva da mesma intensidade. A fricção é também usada como método para eletrizar objetos, por facilitar a passagem de elétrons de um

objeto para outro (figura 1.4).

Os diferentes materiais podem ser ordenados numa **série triboelétrica** (tabela 1.1), em que os materiais no topo da série são mais susceptíveis de ficar com carga positiva e os materiais no fim da série têm maior tendência para ficar com carga negativa.

**Tabela 1.1.:** Série triboelétrica.

---

Pele de coelho
Vidro
Cabelo humano
Lã
Chumbo
Seda
Alumínio
Papel
Madeira
Cobre
Prata
Borracha
Acetato
Esferovite
Vinil (PVC)

---

Por exemplo, se uma barra de vidro for esfregada com um pano de seda, a barra fica carregada positivamente e a seda negativamente, porque o vidro está acima da seda, na série triboelétrica (ver figura 1.4). Mas se a mesma barra de vidro for esfregada com uma pele de coelho, a barra fica com carga negativa e a pele com carga positiva, porque a pele de coelho está acima do vidro na série triboelétrica.

## 1.4. Propriedades da carga

A carga elétrica é uma propriedade intrínseca da matéria, tal como a massa. Uma diferença em relação à massa, é que existem cargas de dois tipos bem como partículas sem carga. Duas propriedades muito importantes da carga elétrica são a sua quantização e a sua conservação.

### 1.4.1. Quantização da carga

Nos aceleradores de partículas são produzidas colisões entre partículas com energias muito elevadas, que dão origem a muitas outras novas partículas, diferentes dos elétrons, prótons e nêutrons. Todas as partículas elementares conhecidas têm sempre uma carga que é um múltiplo inteiro da carga elementar  $e$  ( $1.602 \times 10^{-19}$  C). Assim, a carga de qualquer objeto é sempre um múltiplo inteiro da carga elementar.

Nas experiências de eletrostática, as cargas produzidas correspondem normalmente a um número muito elevado de cargas elementares. Nesse caso é boa aproximação admitir que a carga é uma variável contínua e não discreta.

### 1.4.2. Conservação da carga

Em qualquer processo, a carga total inicial é igual à carga total final. Nos processos de transferência de elétrons entre átomos, esse resultado é óbvio, mas em processos com criação de novas partículas nada indica que tivesse de ser assim. Contudo, em todos os processos observados nos raios cósmicos e nos aceleradores de partículas, há conservação da carga; nos processos em que uma partícula se desintegra dando origem a outras partículas, a soma das cargas de todas as partículas criadas é sempre igual à carga da partícula inicial.

## 1.5. Força entre cargas pontuais

No século XVIII, Benjamin Franklin descobriu que as cargas elétricas distribuídas na superfície de um objeto metálico podem exercer forças elétricas significativas sobre corpos no exterior do objeto, sem no entanto exercerem qualquer força sobre corpos colocados no interior do mesmo.

No século anterior, já Isaac Newton tinha demonstrado de forma matemática que a força gravítica produzida por uma casca oca é nula no seu interior. Esse resultado é consequência da forma como a força gravítica entre partículas diminui em função do quadrado da distância.

Franklin concluiu então que a força elétrica entre partículas com carga deveria ser também proporcional ao inverso do quadrado da distância entre as partículas. Vários anos após o trabalho de Franklin, Charles Cou-

lomb fez experiências para estudar com precisão a intensidade da força eletrostática entre duas cargas pontuais (uma carga pontual é um objeto muito pequeno com carga elétrica).

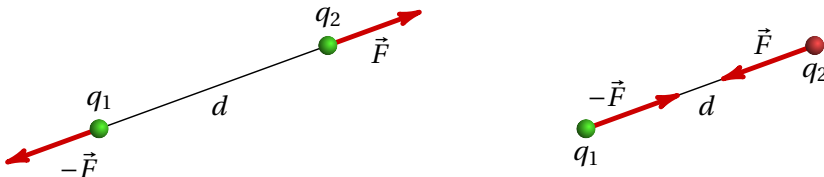
A **lei de Coulomb** estabelece que a linha de ação da força elétrica entre duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$  é a linha que passa pelos seus centros e a sua intensidade ( $F$ ) é diretamente proporcional ao valor absoluto de cada uma das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os seus centros:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{K d^2} \quad (1.2)$$

onde  $d$  é a distância entre as cargas (figura 1.5) e  $q_1$  e  $q_2$  são os valores das duas cargas. A **constante de Coulomb**  $k$  é uma constante universal com o valor:

$$k = 9.0 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \quad (1.3)$$

As forças elétricas exercidas sobre as duas cargas têm a mesma direção e o mesmo módulo  $F$ , mas são em sentidos opostos (forças de ação e reação). Se os sinais das duas cargas são iguais, as forças são repulsivas, como no lado esquerdo da figura 1.5, e os seus sinais são diferentes, as forças são atrativas, como no lado direito da figura 1.5.



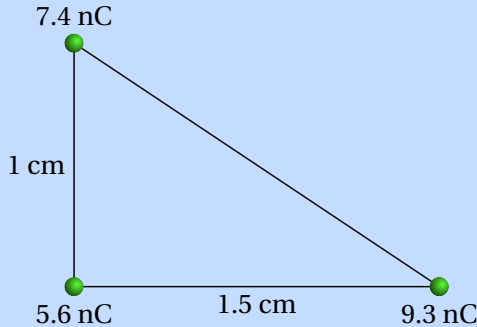
**Figura 1.5.:** Força elétrica entre duas cargas pontuais, do mesmo sinal (esquerda) ou de sinais diferentes (direita).

A constante  $K$  (que não deve ser confundida com  $k$ ), sem unidades, é a **constante dielétrica** do meio existente entre as duas cargas. A constante dielétrica do vácuo é 1 e a constante dielétrica do ar tem um valor muito próximo desse, pelo que, se o ar for o meio existente entre as cargas, se pode eliminar  $K$  da equação. Meios diferentes do ar têm constantes dielétricas com valores superiores à unidade, pelo que a força elétrica entre cargas pontuais é menor em meios diferentes do ar.

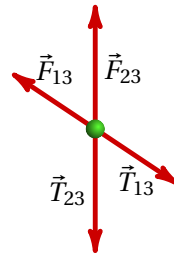


**Exemplo 1.1**

Considere três cargas pontuais positivas ligadas por fios que formam um triângulo retângulo, como mostra a figura. (a) Qual a tensão no fio que liga as cargas de 7.4 nC e 9.3 nC? (b) Se a carga de 5.6 nC fosse retirada, a tensão calculada na alínea *a* aumentava ou diminuía?



**Resolução.** (a) O diagrama de forças sobre a partícula de carga 7.4 nC (designada de partícula número 3) é apresentado na figura à direita, onde  $\vec{F}_{13}$  e  $\vec{F}_{23}$  são as forças eletrostáticas produzidas pelas partículas 1 e 2, de cargas 9.3 nC e 5.6 nC respectivamente, e  $\vec{T}_{13}$  e  $\vec{T}_{23}$  são as tensões nos fios que ligam a partícula 3 a essas duas cargas. Para que a partícula permaneça em equilíbrio é necessário que:



$$F_{13} = T_{13} \quad F_{23} = T_{23}$$

Antes de fazer contas, é conveniente escrever o valor da constante  $k$  nas unidades usadas no problema (nC e cm):

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^6 \mu\text{N} \times 10^4 \text{cm}^2}{10^{18} \text{nC}^2} = 90 \frac{\mu\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}$$

Admitindo que há ar à volta das cargas, a tensão no fio que liga as cargas 1 e 3 é:

$$T_{13} = F_{13} = \frac{k |q_1| |q_3|}{r^2} = \frac{90 \times 7.4 \times 9.3}{1^2 + 1.5^2} \mu\text{N} = 1.9 \text{ mN}$$

(b) O valor da tensão permanecia igual, pois como se mostrou na alínea anterior, neste caso,  $T_{13}$  não depende da força  $F_{23}$  produzida pela partícula de 5.6 nC.

## 1.6. Campo elétrico

Uma forma de interpretar a força eletrostática entre duas partículas com carga consiste em admitir que cada carga elétrica cria à sua volta um campo de forças que atua sobre outras partículas com carga. Se colocarmos uma partícula com carga  $q_0$  num ponto onde existe um **campo elétrico**, o resultado será uma força elétrica  $\vec{F}$  sobre a partícula; o campo elétrico  $\vec{E}$  define-se como a força sobre a partícula, por unidade de carga:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.4)$$

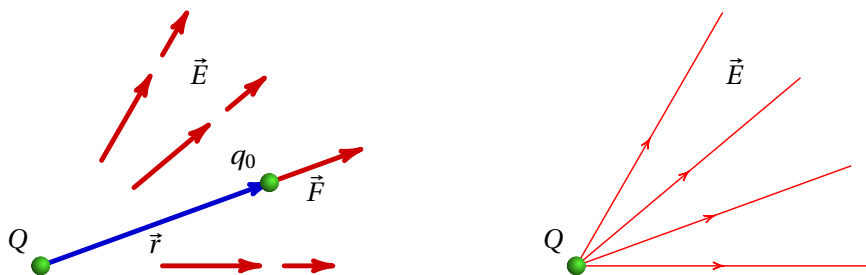
Como tal, o campo elétrico num ponto é igual à força elétrica que sentiria uma carga unitária positiva colocada nesse ponto.

De forma inversa, sabendo que num ponto existe um campo elétrico  $\vec{E}$ , a força elétrica que atua sobre uma partícula com carga  $q$  colocada nesse ponto calcula-se multiplicando a carga pelo campo:  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Basta conhecer o campo para calcular a força; não é necessário saber quais as cargas que deram origem a esse campo. Em unidades SI, o campo elétrico mede-se em newton por coulomb (N/C).

Como vimos, a força elétrica produzida por uma carga pontual positiva  $Q$  sobre uma segunda carga de prova  $q_0$  positiva é sempre uma força repulsiva, cuja intensidade diminui proporcionalmente com o quadrado da distância. Assim, o campo elétrico produzido por uma carga pontual positiva  $Q$  é representado por vetores com direção radial e sentido a afastar-se da carga, como se mostra no lado esquerdo da figura 1.6.

Uma forma mais conveniente de representar esse campo vetorial é através das **linhas de campo**, como no lado direito da figura 1.6. Em cada ponto, a linha de campo que passa por esse ponto aponta na direção do vetor campo elétrico nesse ponto. A intensidade do campo elétrico é maior nas regiões onde as linhas de campo estão mais próximas umas das outras.

Para determinar o valor do campo elétrico produzido pela carga pontual  $Q$  num ponto, coloca-se uma carga de prova  $q_0$  nesse ponto, determina-se



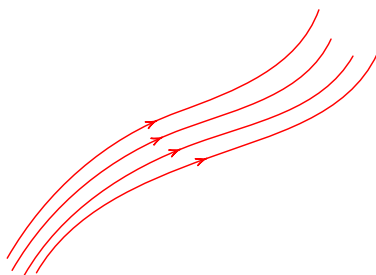
**Figura 1.6.:** Campo elétrico devido a uma carga pontual positiva  $Q$  e representação com linhas de campo.

a força elétrica  $\vec{F}$ , e divide-se pela carga  $q_0$ . Usando a lei de Coulomb, obtém-se o seguinte resultado para o módulo do campo elétrico produzido pela carga  $Q$

$$E = \frac{k|Q|}{K r^2} \quad (1.5)$$

onde  $r$  é a distância do ponto à carga  $Q$ . O sinal da carga  $Q$  indica se o campo é repulsivo ( $Q > 0$ ) ou atrativo ( $Q < 0$ ).

O campo elétrico criado por uma única carga pontual é demasiado fraco para ser observado. Os campos observados experimentalmente são a soma vetorial dos campos criados por muitas cargas pontuais e o campo resultante pode ter linhas de campo curvilíneas como no exemplo da figura 1.7.



**Figura 1.7.:** Exemplo de linhas de campo elétrico.

Para calcular o campo elétrico de cargas não pontuais, a região onde existe carga pode ser dividida em muitas regiões infinitesimalmente pequenas, que possam ser consideradas cargas pontuais, e o campo total é a sobreposição dos campos de todas as cargas infinitesimais. A soma dos campos de várias cargas infinitesimais conduz a um integral. O estudo desse método

para calcular campos encontra-se para além dos objetivos deste livro introdutório, mas no apêndice B ilustra-se o cálculo do campo por integração, num caso concreto que será útil num capítulo seguinte.

### Exemplo 1.2

Num certo ponto, a força sobre uma carga de prova de 5 nC é de  $2 \times 10^{-4}$  N e tem a direção e sentido do eixo dos  $x$ . Calcule o campo elétrico nesse ponto. Qual seria a força exercida sobre um eletrão nesse mesmo ponto?

**Resolução.** A partir da força calcula-se o campo:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{2 \times 10^{-4}}{5} \hat{i} \left( \frac{\text{N}}{\text{nC}} \right) = 4 \times 10^4 \hat{i} \left( \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

A força elétrica sobre um eletrão nesse ponto seria:

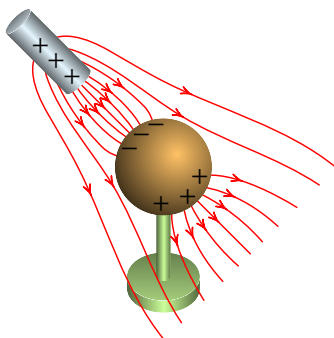
$$\vec{F} = -e\vec{E} = -1.60 \times 10^{-19} \times 4 \times 10^4 \hat{i} = -6.4 \times 10^{-15} \hat{i} \text{ (N)}$$

## 1.7. Condutores e isoladores

Em alguns materiais, como nos metais, o eletrão mais externo de alguns átomos consegue libertar-se do átomo e deslocar-se livremente pelo material; existe assim uma "nuvem" densa de eletrões livres (eletrões de condução), com densidade constante se o material for homogêneo. Esse tipo de material é designado de **condutor**. Um material que não seja condutor diz-se **isolador**; dentro de um isolador, as cargas elétricas não se podem deslocar livremente.

Se um condutor é colocado numa região onde existe campo elétrico, como a nuvem eletrónica de condução tem carga negativa, desloca-se no sentido oposto às linhas de campo. O deslocamento dos eletrões de condução faz surgir carga negativa num extremo (excesso de eletrões) e carga positiva no extremo oposto (falta de eletrões). Se a carga total do condutor é nula, o valor absoluto dessas cargas nos extremos será igual. Essas cargas de sinais opostos nos extremos opostos do condutor produzem um campo elétrico interno, no sentido oposto ao campo externo e quando as cargas acumuladas nos extremos sejam suficientemente elevadas, dentro do condutor os dois campos se anulam e o movimento dos eletrões de condução cessa.

A figura 1.8 mostra uma barra com carga positiva, colocada na proximidade de uma esfera condutora montada num suporte isolador; a nuvem eletrônica de condução na esfera aproxima-se da barra, deixando carga positiva na região mais afastada da barra e a mesma quantidade de carga negativa na região mais próxima da barra. Se o suporte não fosse isolador, entravam no condutor elétrons do suporte e as cargas positivas indicadas na figura desapareciam.

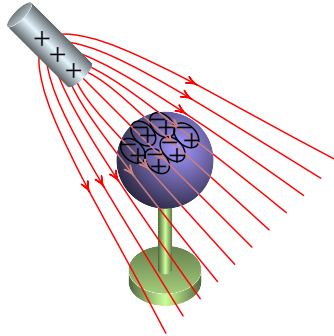


**Figura 1.8.:** Efeito de uma barra com carga sobre uma esfera condutora.

Se a barra tivesse carga negativa, em vez de positiva, as posições das cargas positivas e negativas na esfera seriam trocadas. Uma vez acumuladas cargas de sinais opostos nos extremos da esfera, o campo elétrico total dentro da esfera é nulo; como tal, as linhas de campo não penetram na esfera e os elétrons de condução dentro da esfera não sentem qualquer força elétrica. Nos dois casos (barra com carga positiva ou negativa), as cargas na superfície da esfera mais próxima da barra são atraídas para a barra e essa atração é maior do que a repulsão sobre as cargas na superfície mais afastada da barra. Como tal, qualquer objeto externo com carga de qualquer sinal produz sempre uma força atrativa nos condutores com carga total nula.

Se a mesma experiência é realizada com uma esfera isoladora (figura 1.9), não há acumulação de cargas nos extremos; consequentemente, o campo no interior da esfera não se anula e todas as moléculas dentro dela são **polarizadas**, nomeadamente, a sua própria nuvem eletrônica desloca-se no seu interior, no sentido oposto do campo. Neste caso (barra com carga positiva), a nuvem eletrônica das moléculas deixa de estar centrada no mesmo ponto das cargas positivas, passando a estar centrada num ponto mais próximo da barra; cada molécula torna-se um pequeno **dipolo elétrico**, que é um sistema com carga total nula, mas com as cargas positivas

e negativas em pontos diferentes.



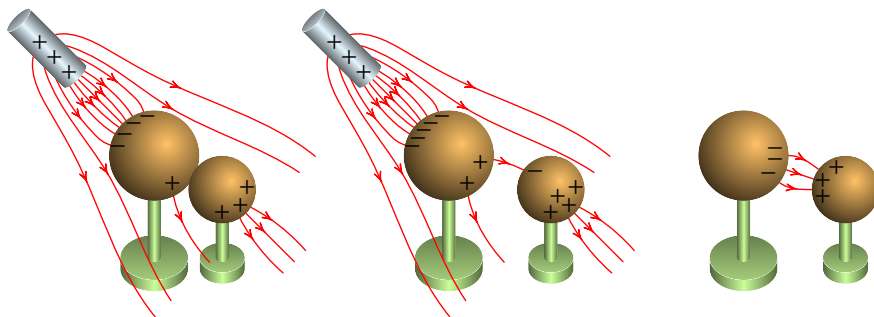
**Figura 1.9.:** Efeito de uma barra com carga sobre uma esfera isoladora.

A figura 1.9 mostra alguns dipolos dentro da esfera. O lado dos dipolos que está mais próximo da barra tem sempre carga de sinal oposto ao da carga na barra. Consequentemente, a força resultante em cada dipolo é atrativa e a sobreposição de todas essas forças faz com que a esfera seja atraída para a barra. Ou seja, um material isolador sem carga é sempre atraído pelos objetos com carga, independentemente do sinal da carga desses objetos.

## 1.8. Eletrização por indução

Um método usado para carregar dois condutores isolados, ficando com cargas idênticas mas de sinais opostos, é o método de carga por indução ilustrado na figura 1.10.

Os dois condutores isolados são colocados em contacto e aproxima-se de um deles um objeto carregado, como indicado na figura 1.10. O campo elétrico produzido pelo objeto carregado induz uma carga de sinal oposto no condutor mais próximo e uma carga do mesmo sinal no condutor mais afastado. Em seguida, mantendo o objeto carregado fixo, separam-se os dois condutores. Finalmente, afasta-se o objeto carregado, ficando os dois condutores com cargas opostas (iguais em valor absoluto se nenhuma das esferas tiver carga inicialmente). Em cada condutor as cargas distribuem-se pela superfície, devido à repulsão entre elas, mas as cargas dos dois condutores já não podem recombinar-se por não existir contacto entre eles.



**Figura 1.10.:** Procedimento usado para carregar dois condutores com cargas iguais mas de sinais opostos.

No gerador de Wimshurst, usa-se esse método para gerar cargas de sinais opostos. Os condutores que entram em contacto são duas pequenas lâminas metálicas diametralmente opostas sobre um disco isolador, quando passam por duas escovas metálicas ligadas a uma barra metálica (figura 1.11). As duas lâminas permanecem em contacto apenas por alguns instantes, devido a que o disco roda.



**Figura 1.11.:** Gerador de Wimshurst.

Se no momento em que duas das lâminas de um disco entram em contacto uma lâmina do disco oposto estiver carregada, essa carga induzirá cargas de sinais opostos nas duas lâminas que entraram em contacto. Essas cargas opostas induzidas em duas regiões do disco induzem também cargas no disco oposto, porque nesse disco também há uma barra que liga temporariamente as lâminas diametralmente opostas.

Em cada disco, após induzirem cargas no disco oposto, as cargas saltam para dois coletores ligados a duas garrafas metálicas; uma das garrafas armazena carga positiva e a outra carga negativa. Quando as cargas acumuladas nas garrafas forem elevadas produz-se uma descarga elétrica entre as pontas de duas barras ligadas às garrafas, ficando descarregadas. Essa descarga elétrica é um pequeno trovão com uma faísca bastante luminosa.

Os dois discos rodam em sentidos opostos; as escovas que estabelecem o contacto entre lâminas e os dois coletores estão colocados de forma a que na rotação de cada disco, cada lâmina passa primeiro frente à escova, onde troca carga com a lâmina na escova oposta, a seguir passa frente a uma das escovas no disco do outro lado, induzindo cargas nas lâminas do disco oposto e logo passa frente ao coletor, ficando descarregada e pronta para reiniciar o ciclo.

A cada ciclo as cargas induzidas aumentam, porque cada lâmina é induzida pelas cargas de várias lâminas no disco oposto. Para iniciar o processo basta com que uma das lâminas tenha adquirido alguma carga, embora seja muito reduzida, a partir do ar ou pela fricção com as escovas. O sinal dessa carga inicial determina qual das garrafas acumula carga positiva e qual negativa.

## Perguntas

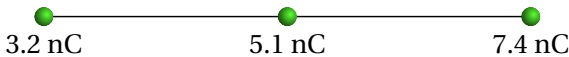
1. Uma barra com carga positiva é colocada perto de uma folha de papel com carga nula. A força que a barra exerce sobre o papel é então:
  - A. Atrativa.
  - B. Repulsiva.
  - C. Nula.
  - D. Atrativa ou repulsiva, conforme a barra seja condutora ou isoladora.
  - E. Atrativa se o papel estiver seco ou nula se estiver húmido.



2. O que distingue um condutor elétrico de um isolador é:
- A. Ter mais eletrões do que protões.
  - B. Ter mais protões do que eletrões.
  - C. Ter mais eletrões do que o isolador.
  - D. Ter moléculas que se deformam mais facilmente.
  - E. Ter algumas partículas com carga livres de se deslocar.
3. Colocam-se três cargas no eixo dos  $x$ :
- $q_1 = -6.0 \mu\text{C}$ , em  $x = -2.0 \text{ m}$ ,  
 $q_2 = +4.0 \mu\text{C}$ , em  $x = 0$ ,  
 $q_3 = -6.0 \mu\text{C}$ , em  $x = +2.0 \text{ m}$ .
- Determine o módulo da força elétrica resultante sobre  $q_3$ .
- A.  $2.4 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - B.  $1.7 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - C. 0
  - D.  $2.7 \times 10^{-2} \text{ N}$
  - E.  $3.4 \times 10^{-2} \text{ N}$
4. Três esferas idênticas e condutoras, isoladas, uma delas com carga  $Q$  e as outras duas sem carga, colocam-se em contacto, cada uma delas tocando as outras duas e a seguir separam-se. Qual das seguintes afirmações é correta?
- A. Todas as esferas ficam sem carga.
  - B. Cada uma delas fica com carga  $Q$ .
  - C. Duas delas ficam com carga  $Q/2$  e outra com carga  $-Q/2$ .
  - D. Cada uma delas fica com carga  $Q/3$ .
  - E. Uma delas fica com carga  $Q$  e outra com carga  $-Q$ .
5. Uma esfera metálica montada num suporte isolador liga-se à terra com um fio condutor e a seguir aproxima-se uma barra de plástico com carga positiva. A ligação da esfera à terra é retirada e a seguir afasta-se a barra de plástico. Com que carga fica a esfera metálica?
- A. Nula.
  - B. Positiva.
  - C. Negativa.
  - D. Diferente de zero, mas não é possível saber o sinal.
  - E. Positiva num extremo e negativa no extremo oposto.

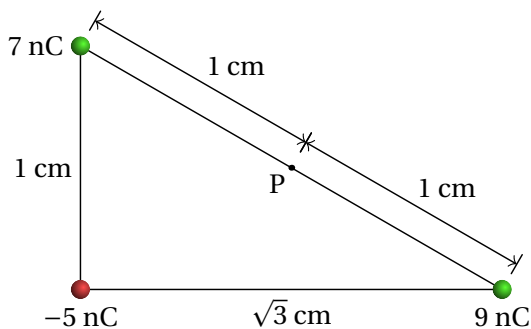
## Problemas

1. Uma lâmina de acetato, eletrizada por fricção, coloca-se 1 cm acima de uma mesa onde há vários quadrados de papel, cada um com 0.5 cm de lado. Observa-se que alguns pedaços de papel saltam, ficando colados ao acetato. Faça uma estimativa da ordem de grandeza da carga do acetato, admitindo que uma carga idêntica e de sinal oposto é induzida em cada pedaço de papel e sabendo que o papel usado tem  $80 \text{ g/m}^2$ .
2. A soma dos valores de duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$  é  $q_1 + q_2 = 10 \text{ } \mu\text{C}$ . Quando estão afastadas 3 m entre si, o módulo da força exercida por cada uma delas sobre a outra é 24 mN. Determine os valores de  $q_1$  e  $q_2$ , se: (a) Ambas cargas são positivas. (b) Uma das cargas é positiva e a outra negativa.
3. Sabendo que num átomo de hidrogénio a distância entre o próton no núcleo e o eletrão é  $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ , determine o módulo do campo elétrico devido ao núcleo, no ponto onde está o eletrão.
4. O campo elétrico na atmosfera terrestre tem intensidade de aproximadamente  $150 \text{ N/C}$  e aponta na direção e sentido do centro da Terra. Calcule a relação entre o peso de um eletrão e o módulo da força elétrica oposta exercida pelo campo elétrico da atmosfera (a massa do eletrão é  $9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$  e admita que a aceleração da gravidade é  $9.8 \text{ m/s}^2$ ).
5. Três cargas pontuais estão ligadas por dois fios isoladores de 2.65 cm cada (ver figura). Calcule a tensão em cada fio.

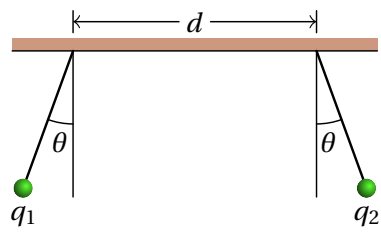


6. Entre duas placas paralelas de cargas opostas existe um campo elétrico uniforme. Um eletrão libertado na superfície da placa carregada negativamente é acelerado uniformemente, a partir do repouso, em direção à placa carregada positivamente (o peso do eletrão pode ser desprezado em comparação com a força elétrica e admite-se que as placas se encontram dentro de um tubo sob vácuo). Sabendo que a distância entre as placas é de 2.0 cm e que o eletrão demora  $15 \text{ } \mu\text{s}$  até bater na outra placa: (a) Determine o módulo do campo elétrico (a massa do eletrão é  $9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ). (b) Qual a velocidade com que o eletrão atinge a placa positiva?

7. Um sistema de três cargas pontuais está em equilíbrio (a força eletrostática resultante sobre cada carga é nula). Se os valores de duas das cargas são  $q$  e  $2q$ , separadas por uma distância  $d$ , determine o valor e a posição da terceira carga.
8. Determine a força elétrica resultante sobre cada uma das cargas representadas na figura e o campo elétrico produzido pelas 3 cargas no ponto P.



9. Duas pequenas esferas condutoras, com cargas  $q_1 = +300 \text{ nC}$  e  $q_2 = +500 \text{ nC}$ , e com a mesma massa  $m$ , são coladas a dois fios, cada um com  $8 \text{ cm}$  de comprimento. Os fios são logo colados numa barra horizontal, em dois pontos a uma distância  $d = 15 \text{ cm}$  entre si. A repulsão eletrostática entre as cargas faz com que os dois fios se inclinem um ângulo  $\theta = 10^\circ$  em relação à vertical. Determine o valor da massa  $m$ .



## Respostas

**Perguntas:** 1. A. 2. E. 3. E. 4. D. 5. C.

### Problemas

- Ordem de grandeza de  $10^{-10}$  C.
- (a)  $6 \mu\text{C}$ , e  $4 \mu\text{C}$  (b)  $12 \mu\text{C}$ , e  $-2 \mu\text{C}$ .
- $5.1 \times 10^{11}$  N/C.
- A força eletrostática é  $2.7 \times 10^{12}$  vezes maior que o peso.
- A tensão no fio do lado esquerdo é  $285 \mu\text{N}$  e no fio do lado direito  $560 \mu\text{N}$ .
- (a)  $1.01 \times 10^{-3}$  N/C (b)  $2.67 \times 10^3$  m/s.
- A terceira carga é  $-0.343 q$  e encontra-se entre as outras duas cargas, a uma distância  $0.414 d$  da carga  $q$ .
- Com origem na carga  $q_1 = -5$  nC, eixo dos  $x$  na direção de  $q_2 = 9$  nC, e eixo dos  $y$  na direção de  $q_3 = 7$  nC, as forças são:  
 $\vec{F}_1 = (1.35 \hat{i} + 3.15 \hat{j})$  mN      $\vec{F}_2 = (-0.12 \hat{i} - 0.71 \hat{j})$  mN  
 $\vec{F}_3 = (-1.23 \hat{i} - 2.44 \hat{j})$  mN  
 O campo em P é:  $(-0.545 \hat{i} - 0.135 \hat{j})$  N/ $\mu\text{C}$
- 24.7 g.

## 2. Voltagem e corrente



Uma forma simples de sentir o efeito da corrente elétrica consiste em colocar uma colher metálica e um pedaço de folha de alumínio em duas partes da língua. Estabelecendo contacto entre a colher e a folha de alumínio, enquanto estão também em contacto com a língua, sente-se um sabor azedo, produzido pela transferência de cargas elétricas entre os metais e a língua. Este fenómeno, descoberto no fim do século XVIII, foi aproveitado por Alessandro Volta, para construir as primeiras pilhas químicas, dando origem ao rápido desenvolvimento da tecnologia elétrica. É importante que o metal da folha seja diferente do metal da colher, que é geralmente de aço ou alguma liga metálica. Na língua existem iões positivos e negativos e um dos metais tem maior tendência para atrair os iões negativos e o outro os iões positivos, criando-se fluxo de cargas através dos dois metais.

## 2.1. Potencial eletrostático

As variáveis (vetoriais) que determinam o estado de uma partícula, são a sua posição  $\vec{r}$  e velocidade  $\vec{v}$ . As componentes destes dois vetores definem um espaço com seis dimensões, chamado **espaço de fase**. Uma partícula com massa  $m$  e carga  $q$ , numa região onde existe um campo gravítico  $\vec{g}$  e um campo elétrico  $\vec{E}$  está sujeita a uma força resultante  $m\vec{g} + q\vec{E}$ . A equação de movimento é:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + d\frac{q}{m}\vec{E} \quad (2.1)$$

em que os campos  $\vec{g}$  e  $\vec{E}$  são funções que dependem da posição  $\vec{r}$  e, portanto, a velocidade também será uma função que depende da posição. Multiplicando, escalarmente, os dois lados da equação de movimento pelo vetor  $d\vec{r}$  e lembrando que a derivada de  $\vec{r}$  em ordem ao tempo é o vetor velocidade  $\vec{v}$ , obtém-se a seguinte equação:

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \left( \vec{g} + \frac{q}{m}\vec{E} \right) \cdot d\vec{r} \quad (2.2)$$

Esta equação permite encontrar a expressão para  $\vec{v}$  em função de  $\vec{r}$  a través do procedimento seguinte: integram-se ambos membros da equação, desde os valores iniciais  $(\vec{r}_0, \vec{v}_0)$  até os valores finais  $(\vec{r}, \vec{v})$ , obtendo-se,

$$\frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}m v_0^2 = m \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{g} \cdot d\vec{r} + q \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.3)$$

A expressão no primeiro membro da equação é o aumento da **energia cinética** da partícula; no segundo membro, para calcular os dois integrais de linha é necessário conhecer as expressões para os campos em função da posição. Se os campos fossem quaisquer campos vetoriais arbitrários, seria necessário também conhecer de antemão a trajetória da partícula, já que os integrais de linha no segundo membro podem produzir diferentes resultados para diferentes percursos de integração. No entanto, neste caso não é necessário conhecer a trajetória, porque os campos gravítico e elétrico são ambos **campos conservativos**, isto é, o integral de linha de um desses campos entre dois pontos conduz sempre ao mesmo resultado, independentemente do percurso de integração.

Por exemplo, a expressão dum campo gravítico uniforme, segundo o eixo dos  $z$ , é  $\vec{g} = -g\hat{k}$  e o integral de linha desse campo, ao longo de qualquer

percurso desde um ponto com coordenada  $z_0$  até outro ponto qualquer com coordenada  $z$ , é igual a:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} -g \hat{k} \cdot d\vec{r} = -g \int_{z_0}^z dz = g(z_0 - z) \quad (2.4)$$

Ou seja, o integral dá o mesmo resultado para qualquer percurso entre esses pontos e, assim sendo, trata-se de um campo conservativo e a energia potencial gravítica de uma partícula de massa  $m$  nesse campo é a função  $U_g = mgz$ . O campo gravítico produzido por várias partículas não é constante, mas também é conservativo, conduzindo a um integral de linha que não depende do percurso seguido e que pode ser escrito como a diferença entre os valores de uma função  $U_g$  (energia potencial gravítica) no ponto inicial e final.

No caso do campo elétrico a situação é análoga; os campos eletrostáticos (campos elétricos que não variam com o tempo) são sempre conservativos e, portanto, para cada campo eletrostático existe uma função da posição,  $V(x, y, z)$ , que permite calcular o integral de linha do campo, sem necessidade de conhecer o percurso de integração:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(x_0, y_0, z_0) - V(x, y, z) \quad (2.5)$$

A função  $V$  chama-se **potencial eletrostático** e a **energia potencial eletrostática** é a expressão:

$$U_e = qV \quad (2.6)$$

Em função das energias potenciais gravítica e eletrostática, a equação 2.2 é a lei da conservação da energia mecânica da partícula:

$$\frac{1}{2} m v^2 + U_e + U_g = \frac{1}{2} m v_0^2 + U_{e0} + U_{g0} \quad (2.7)$$

A unidade SI de potencial elétrico é o joule por coulomb, chamado **volt** e identificado pela letra  $V$ .

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} \quad (2.8)$$

No capítulo sobre carga e força elétrica viu-se que a unidade SI do campo elétrico é o  $\text{N/C}$ , que pode ser escrito como  $\text{J}/(\text{m}\cdot\text{C})$ , pelo que o  $\text{N/C}$  é

equivalente ao  $V/m$ . O campo elétrico pode então ser interpretado como a diferença de potencial por unidade de comprimento.

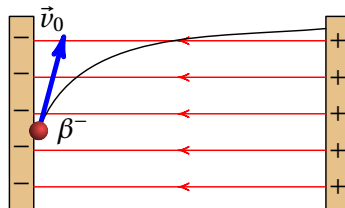
Note-se que, como a carga  $q$  poder ser positiva ou negativa, a energia eletrostática  $U_e$  de uma partícula com carga negativa é maior nos pontos onde o potencial for menor, enquanto que as partículas com carga positiva têm maior energia nos pontos onde o potencial é maior. A equação 2.7 implica então que, dentro de um campo elétrico, as partículas com carga positiva são aceleradas para regiões com menor potencial e as partículas com carga negativa são aceleradas para a regiões com maior potencial.

A lei de conservação da energia mecânica é válida unicamente quando as cargas se deslocam no vácuo. As partículas com carga que dentro de um material, por exemplo, num condutor ou num gás, estão sujeitas a forças dissipativas que fazem diminuir rapidamente a sua energia mecânica.

### Exemplo 2.1

Dentro de um tubo de vácuo há duas lâminas condutoras paralelas. Uma das lâminas é feita dum material radioativo que emite radiação beta (elétrões que saem dos núcleos). Para acelerar as partículas até à outra lâmina, liga-se uma diferença de potencial de 150 V entre as lâminas. Num dado instante é emitida uma partícula beta com velocidade inicial de módulo 300 m/s que é acelerada até a outra lâmina. (a) Calcule o módulo da velocidade com que a partícula beta atinge a segunda lâmina. (b) Se a distância entre as duas lâminas for 5 cm, qual o módulo do campo elétrico médio entre elas?

**Resolução.** Como a carga das partículas é negativa, são aceleradas na direção do potencial mais elevado; assim sendo, a diferença de potencial deve ser ligada de forma a que a lâmina radioativa tenha menor potencial. As cargas negativas também são acelerados no sentido oposto ao campo e, como tal, as linhas de campo elétrico apontam para a lâmina radioativa. Admitindo um campo constante, as linhas de campo são paralelas entre si.





(a) O deslocamento da partícula no vácuo implica conservação da sua energia mecânica. A carga da partícula beta é a carga do elétron,  $-1.602 \times 10^{-19}$  C e a diferença de potencial de 150 V implica uma diferença de energia potencial eletrostática

$$\Delta U_e = 1.602 \times 10^{-19} \times 150 = 2.40 \times 10^{-17} \text{ J} \quad (2.9)$$

Pode parecer pouca energia, mas é um valor muito elevado para um elétron que tem massa  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg. Para gerar a mesma diferença de energia potencial gravítica,  $m g \Delta z$ , de  $10^{-17}$  J entre dois pontos, seria necessário que o elétron descesse uma altura da ordem de  $10^{12}$  metros! Como tal, é possível ignorar a energia potencial gravítica e considerar que o aumento da energia cinética é igual à diminuição da energia potencial eletrostática:

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = 2.40 \times 10^{-17}$$

Substituindo os valores da massa e velocidade inicial, obtém-se o módulo da velocidade final:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 2.40 \times 10^{-17}}{9.11 \times 10^{-31}} + 300^2} = 7.26 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

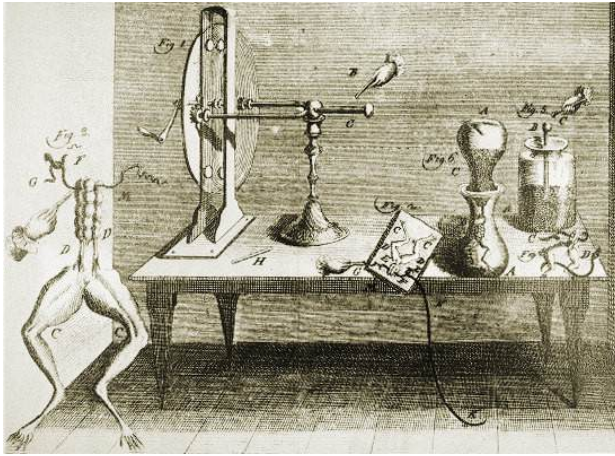
que é um valor elevado, aproximadamente 2.4% da velocidade da luz, mas ainda não o suficiente para que seja necessário usar equações da mecânica relativista. Note-se também que não é necessário saber em que direção foi disparada a partícula. (b) O campo elétrico médio calcula-se admitindo que o mesmo é uniforme. Seguindo um percurso paralelo às linhas de campo, desde a lâmina da direita até à da esquerda, a equação 2.5 permite calcular a intensidade do campo:

$$\int_0^{0.05} E ds = 0.05 E = 150 \quad \Rightarrow \quad E = 3000 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

## 2.2. Pilhas químicas

Uma das descobertas mais importantes na história da eletricidade foi a invenção das pilhas químicas, que permitem fornecer a energia necessária para manter um fluxo constante de cargas num condutor, contrariando as forças dissipativas.

O biólogo italiano Luigi Galvani (1737–1798) fez várias experiências com cargas eletrostáticas e órgãos de animais. A figura 2.1 mostra o laboratório de Galvani, com um gerador eletrostático usado para produzir descargas elétricas nas patas posteriores de uma rã. Enquanto fazia as experiências, Galvani descobriu que quando tocava com uma faca na pata da rã, esta encolhia-se bruscamente, como se a rã estivesse viva, no instante em que era produzida uma descarga elétrica num gerador eletrostático próximo dele (figura 2.1).



**Figura 2.1.:** Laboratório de Luigi Galvani.

Mais tarde, conseguiu o mesmo efeito sem precisar do gerador eletrostático, espetando dois fios de metais diferentes na pata da rã; quando juntava os dois fios, a pata encolhia-se. Galvani atribuiu o efeito a uma eletricidade de origem animal.

O físico italiano Alessandro Volta (1745–1827) demonstrou que a origem da eletricidade observada por Galvani não eram os organismos vivos. Na realidade, o contacto entre dois metais diferentes dentro de qualquer solução química produz uma transferência de cargas elétricas, chamada **corrente elétrica**, que nos seres vivos provoca efeitos como a contração muscular ou o sabor azedo na língua. De facto, o sistema nervoso produz transferências de carga (correntes) que permitem controlar os movimentos musculares e a transferência de cargas entre a língua e os alimentos estimula o sistema nervoso dando origem às sensações de sabor.

Em 1800 Volta construiu a primeira pilha, colocando alternadamente discos de zinco e de cobre, sobrepostos e separados entre si por discos de cartão molhado numa solução ácida. Repetindo a mesma sequência de discos várias vezes, conseguiu produzir fluxos de carga mais elevados e sentir os seus efeitos. Por exemplo, colocando as suas mãos dentro de dois recipientes com água salgada, ligados aos dois terminais da pilha, o choque elétrico nas suas mãos tornava-se doloroso quando a pilha era formada por mais de 20 grupos de discos de cobre e zinco. A figura 2.2 mostra uma das pilhas construídas por Volta.



Figura 2.2.: Pilha de Volta.

## 2.3. Força eletromotriz

Uma pilha química é constituída por duas barras condutoras, chamadas **elétrodos**, embebidas numa substância com iões (**eletrólito**). O eletrólito pode ser líquido ou sólido, desde que tenha iões positivos e negativos; por exemplo, uma solução de água e sal de mesa (cloreto de sódio) em que existem iões de sódio, com carga elétrica positiva, e iões de cloro, com carga elétrica negativa.

No metal dos elétrodos da pilha existe uma nuvem de eletrões de condução e quando se liga outro condutor externo entre eles, os eletrões livres podem deslocar-se transportando carga através do condutor externo. O deslocamento da nuvem eletrónica da origem a acumulação de cargas de sinais opostos nos extremos dos elétrodos que estão dentro do eletrólito e os iões de cargas opostas no eletrólito deslocam-se em sentidos opostos. Os iões positivos, também chamados catiões, são atraídos pelo eléctrodo para o qual a nuvem eletrónica foi deslocada, combinando-se com os eletrões acumulados nesse eléctrodo. Os iões negativos, ou aniões, deslocam-se para o outro eléctrodo, fornecendo os eletrões que estavam em falta devido ao deslocamento da nuvem eletrónica. O eléctrodo para onde são atraídos os iões positivos chama-se **cátodo**, comumente identificado nas pilhas com um sinal positivo e o eléctrodo para onde circulam os iões negativos

do eletrólito chama-se o **ânodo** e é comumente identificado com um sinal negativo.

Para manter o movimento da nuvem eletrônica é necessário que existam iões de sinais opostos no eletrólito e enquanto esse movimento perdura, mais iões desaparecem no eletrólito devido à troca de eletrões com os elétrodos. O fluxo de cargas através dos elétrodos e do condutor que os liga cessará quando a pilha estiver descarregada, isto é, quando a concentração de iões no eletrólito for inferior a um valor mínimo.

Para garantir o funcionamento de uma pilha também é necessário que num dos elétrodos seja mais fácil a passagem de eletrões dos átomos para a nuvem de condução, o que se consegue usando dois metais diferentes para os dois elétrodos. Quando dois metais diferentes são colocados em contacto um com o outro, a nuvem de eletrões de condução tem uma tendência para se deslocar do metal mais eletropositivo (o que cede com maior facilidade os seus eletrões) para o menos eletropositivo. Diferentes materiais condutores podem ser ordenados numa **série galvânica**, em que os metais mais eletropositivos aparecem no topo da lista e os menos eletropositivos na base (a ordem na série depende também do eletrólito usado). A tabela 2.1 mostra a série galvânica para alguns condutores, quando o eletrólito é água de mar.

**Tabela 2.1.:** Série galvânica com eletrólito de água de mar.

---

Magnésio
Zinco
Alumínio
Chumbo
Ferro
Cobre
Tungsténio
Prata
Ouro
Platina
Grafite

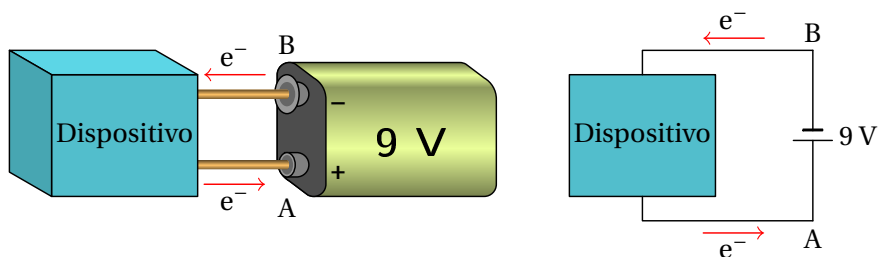
---

O uso da tabela pode ilustrar-se no caso concreto da primeira pilha construída por Volta que usava eletrólito de água salgada. Os dois metais usados para os elétrodos são zinco e cobre e como o zinco está acima do cobre na tabela, quer dizer que os eletrões de condução se deslocam do zinco para

o cobre e os íons positivos do eletrólito são atraídos pelo cobre; como tal, o eletrodo de cobre é o cátodo (+) e o eletrodo de zinco é o ânodo (-).

A corrosão dos metais no ar ou numa solução líquida também está relacionada com a transferência de elétrons de condução. Os íons negativos de oxigênio passam elétrons para o metal, combinando-se com os átomos do metal na superfície para formar um sal. O processo de galvanização consiste em colocar na superfície de um objeto metálico uma camada de zinco que garante que o movimento dos elétrons de condução será do zinco para o outro metal, servindo o zinco como ânodo que atrai os íons de oxigênio (aniões); o zinco é oxidado enquanto o outro metal (cátodo) permanece protegido da corrosão.

O lado esquerdo da figura 2.3 mostra uma pilha ligada a um circuito e o lado direito mostra o diagrama usado para representar esquematicamente esse conjunto. A pilha representa-se com duas barras paralelas, que lembram os dois discos metálicos na pilha original de Volta, separados por uma pequena região (o eletrólito). Usa-se uma barra mais comprida para representar o cátodo (eletrodo positivo). As setas na figura indicam a direção do movimento dos elétrons de condução, que se deslocam no sentido oposto ao campo elétrico estabelecido pela pilha através dos condutores.



**Figura 2.3.:** Pilha ligada a um dispositivo e representação diagramática do sistema.

Se os elétrons de condução fossem completamente livres, seriam acelerados pela força elétrica no condutor. No entanto, no circuito e nos eletrodos existem forças dissipativas que contrariam o movimento dos elétrons de condução. O trabalho realizado pelas forças dissipativas é igual à energia fornecida pela pilha, através do campo elétrico. Isto é, durante o percurso de cada elétron de condução desde o ânodo até o cátodo, o campo elétrico realiza um trabalho igual à diminuição da energia potencial eletrostática ( $\Delta U_e$ ) desse elétron entre o ânodo e o cátodo. Como a carga dos elétrons é negativa, conclui-se que o potencial no cátodo é maior do que no ânodo, e

a diferença de potencial entre eles é igual a:

$$\varepsilon = \frac{\Delta U_e}{e} \quad (2.10)$$

onde  $e$  é a carga elementar (valor absoluto da carga do elétron). A energia  $\Delta U_e$  fornecida a cada elétron de condução é igual à diferença entre a energia necessária para que um ânodo no eletrólito transfira um elétron ao ânodo e a energia necessária para que o cátodo transfira um elétron a um cátodo do eletrólito.

Essa diferença de energia tem um valor específico para cada par de condutores usados para os eletrodos e para cada eletrólito. Assim sendo, a constante  $\varepsilon$ , com unidades de volt, tem um valor típico para cada tipo de pilha, que depende apenas dos metais e do eletrólito usado, e chama-se **força eletromotriz** da pilha, ou de forma abreviada, f.e.m. O valor da f.e.m. para a maioria das pilhas é entre 1 volt e 4 volt. Na pilha da figura 2.3, o valor da f.e.m. é de 9 V e é obtido colocando no interior da pilha seis pilhas pequenas de 1.5 V, uma a seguir à outra, tal como Volta colocou alternadamente vários discos de zinco, cartão e cobre para obter maior energia; a figura 2.4 mostra um diagrama que ilustra melhor essas seis pilhas em série.



**Figura 2.4.:** Pilhas ligadas em série.

A tabela 2.2 mostra os materiais usados para os eletrodos e o eletrólito em vários tipos de pilhas usadas atualmente e os valores da f.e.m. obtida em cada caso.

Os tipos de pilhas nas três últimas linhas da tabela 2.2 são recarregáveis; ou seja, as reações químicas nos eletrodos são reversíveis. Utilizando uma fonte externa para contrariar o sentido normal do fluxo das cargas, consegue-se diminuir a quantidade dos sais acumulados nos eletrodos, separando-os nos metais originais e os íons do eletrólito e aumentando assim a carga total dos íons do eletrólito e ficando a pilha num estado semelhante ao inicial. Após vários ciclos de carga e descarga, parte dos sais saem separam-se dos eletrodos e passam para o eletrólito torna-se cada vez mais difícil recuperar todo o metal e o eletrólito original, ficando a pilha "viciada". No caso das pilhas de íons de lítio, o cátodo não é um único

**Tabela 2.2.:** Alguns tipos de pilhas usados atualmente.

<b>Tipo</b>	<b>cátodo</b>	<b>ânodo</b>	<b>eletrólito</b>	<b>f.e.m.</b>
seca	C	Zn	MnO <sub>2</sub> / NH <sub>4</sub> Cl	1.5 V
alcalina	C	MnO <sub>2</sub>	KOH	1.5 V
mercúrio	HgO	Zn	NaOH	1.35 V
óxido de prata	Ag <sub>2</sub> O	Zn	NaOH	1.35 V
NiCd	NiO	Cd	KOH	1.2 V
NiMH	NiO	liga metálica	KOH	1.2 V
iões de lítio	Li <sub>2</sub> O / Co	C	Li	3.7 V

bloco sólido, mas são várias partículas em suspensão dentro do próprio eletrólito, evitando-se assim que a pilha fique viciada e permitindo muitos mais ciclos de carga e descarga. Numa pilha não recarregável, a inversão da corrente apenas aquece a pilha, com o perigo de queimá-la ou até fazê-la explodir sem ser recarregada.

Outra característica importante de cada pilha, para além da sua f.e.m., é a sua carga máxima,  $Q_{\text{máx}}$ , que indica a carga total dos iões positivos (igual ao valor absoluto da carga dos iões negativos) no eletrólito, no seu estado inicial, com os elétrodos completamente limpos de sais. A energia máxima que a pilha poderia fornecer, se fosse possível manter o fluxo de cargas nos elétrodos até o eletrólito ficar completamente livre de iões, é

$$U_{\text{máx}} = \varepsilon Q_{\text{máx}} \quad (2.11)$$

## 2.4. Condutores e semicondutores

Num condutor sólido existe uma nuvem muito densa de eletrões de condução que não estão ligados a nenhum átomo em particular, conforme referido no capítulo sobre carga e força elétrica. Os átomos de cobre, por exemplo, têm 29 eletrões à volta do núcleo no seu estado neutro; 28 desses eletrões estão fortemente ligados ao átomo, enquanto que o último eletrão

se encontra numa órbita mais distante do núcleo e sai com facilidade para a nuvem de elétrons de condução.

Um pequeno deslocamento da nuvem de elétrons de condução faz acumular um excesso de cargas negativas numa região e cargas positivas na região oposta. As cargas positivas são átomos com um elétron a menos em relação ao número de prótons. Quando se liga um fio condutor aos eletrodos de uma pilha, a nuvem eletrônica é atraída pelo eletrodo positivo e repelida pelo eletrodo negativo; estabelece-se no condutor um fluxo contínuo de elétrons do eletrodo negativo para o positivo.

Os semicondutores são materiais que não têm cargas de condução, como os isoladores, mas que podem adquirir cargas de condução (passando então a ser condutores) através de diversos mecanismos: aumento da temperatura, incidência de luz, presença de cargas elétricas externas ou existência de impurezas dentro do próprio material.

Atualmente os semicondutores são construídos a partir de silício ou germânio. Os átomos de silício e de germânio têm 4 elétrons de valência. Num cristal de silício ou germânio, os átomos estão colocados numa rede uniforme, como na figura 2.5 e os 4 elétrons de valência ligam cada átomo aos átomos na sua vizinhança.



Figura 2.5.: Cristal FCC.

Já os átomos de arsênio têm 5 elétrons de valência. Se dentro dum cristal de silício forem colocados alguns átomos de arsênio, cada um deles fica ligado aos átomos de silício na rede, por meio de 4 dos seus elétrons de valência e o quinto elétron de valência fica livre e contribui para uma nuvem de elétrons de condução. Obtém-se assim um **semicondutor tipo N**, capaz de conduzir cargas através do material, pelo mesmo mecanismo que nos condutores (nuvem de elétrons de condução).

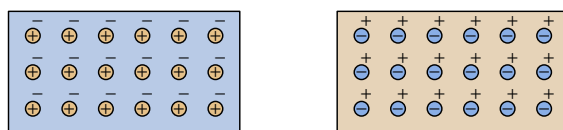
Os átomos de gálio têm três elétrons de valência. Nos **semicondutores tipo P** existem alguns átomos de gálio dentro de um cristal de silício (ou germânio); os 3 elétrons de valência de cada átomo de gálio ligam-no à rede, ficando um **buraco** no átomo de silício que tem um elétron de valência que não está ligado a um elétron de um átomo vizinho.

Os buracos podem ser utilizados também para transportar carga; os elétrons de condução podem deslocar-se para um átomo de gálio na vizi-



nhança, onde exista um desses buracos. Se dois extremos de um semicondutor do tipo P forem ligados aos elétrodos de uma pilha, os buracos na vizinhança do elétrodo negativo são preenchidos com eletrões fornecidos por esse elétrodo, e a seguir podem passar sucessivamente para outros buracos no cristal. Os eletrões deslocam-se no sentido do elétrodo negativo para o positivo, mas deslocam-se apenas entre dois buracos vizinhos. Já os buracos percorrem todo o percurso desde o elétrodo positivo até ao negativo. É um pouco como a circulação de automóveis em hora de ponta, quando há filas compactas; cada automóvel consegue apenas deslocar-se uma pequena distância no sentido do avanço, mas aparecem buracos na fila, que se deslocam rapidamente no sentido oposto.

A figura 2.6 mostra uma forma habitual de representar os dois tipos de semicondutores, N e P, de forma esquemática. Os círculos representam cargas fixas no cristal, que não se podem deslocar e as cargas sem um círculo à volta representam as carga de condução. No semicondutor do tipo N as cargas positivas fixas são os átomos de arsénio, ou de outro elemento com 5 eletrões de valência, colocados dentro do cristal de silício ou outro elemento com 4 eletrões de valência e as cargas de condução são os eletrões cedidos por esse átomos de arsénio. No semicondutor do tipo P as cargas fixas são átomos de um elemento com 3 eletrões de valência e as cargas livres são os buracos que ficam na ligação covalente desses átomos com um dos átomos vizinhos, com 4 eletrões de valência.



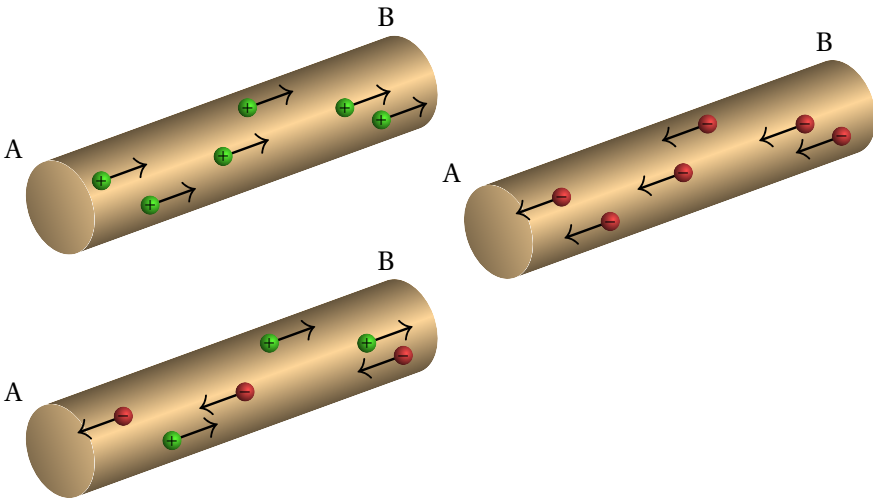
Semicondutor tipo N

Semicondutor tipo P

**Figura 2.6.:** Os dois tipos de semicondutores.

Na figura 2.7 estão representadas 3 barras de materiais diferentes, ligadas entre dois pontos A e B entre os que existe diferença de potencial ( $V_A$  maior que  $V_B$ ). No primeiro caso, trata-se de um semicondutor de tipo P, em que as cargas de condução positiva deslocam-se do ponto A para o ponto B, já que o campo elétrico aponta do ponto com maior potencial (A) para o ponto com menor potencial (B). No segundo caso, um semicondutor de tipo N ou um metal, as cargas de condução negativas deslocam-se de B para A, no sentido oposto ao campo elétrico. Finalmente, existem condutores

com cargas de condução positivas e negativas como, por exemplo, o gás ionizado dentro de uma lâmpada fluorescente.



**Figura 2.7.:** Três condutores diferentes com diferentes tipos de cargas de condução.

Nos três casos ilustrados na figura, a mesma quantidade de energia ( $6e V_A$ ) é retirada da região A e a mesma quantidade de energia ( $6e V_B$ ) passa para a região B. No caso do semicondutor do tipo P, a saída de 6 cargas elementares de A retira energia em A e a entrada dessas cargas em B aumenta a energia em B. No caso da barra semicondutora do tipo N, a energia das cargas que saem de B tem o sinal oposto de  $V_B$  e, por isso, faz aumentar a energia disponível em B; da mesma forma, a entrada das cargas de condução negativas em A faz diminuir a energia disponível em A. No terceiro caso da figura, metade da energia é transferida de A para B pelas cargas de condução positivas e a outra metade é transferida no mesmo sentido pelas cargas de condução negativas.

Observe-se que, na figura 2.7, a energia potencial eletrostática que é retirada do ponto A é maior que a energia que passa para o ponto B, porque  $V_A > V_B$ . A diferença entre essas energias é igual à energia dissipada no condutor; nos dois primeiros casos na figura, essa energia é transferida para o condutor na forma de calor, aquecendo-o, e no terceiro caso, se o condutor for uma lâmpada fluorescente, a parte dessa energia é convertida em luz, e a restante é calor que aquece a lâmpada.

Existem outros mecanismos de condução de cargas elétricas, como em certos detetores de incêndio (figura 2.8). No interior do detetor existe uma câmara de ionização (cilindro preto na figura) onde a passagem de cargas é devida à produção de partículas alfa emitidas por uma substância radioativa. As partículas alfa são núcleos de hélio, com carga igual a duas unidades elementares de carga. As partículas são disparadas para fora da substância radioativa, passando pelo ar à volta da substância, antes de serem recolhidas num eléctrodo no detetor. A presença de fumo introduz partículas sólidas no ar, que travam as partículas alfa, produzindo uma redução do número de partículas recolhidas no eléctrodo, e essa redução do fluxo de cargas faz disparar um sinal de alarme.

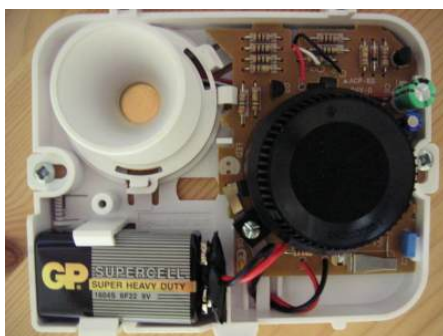


Figura 2.8.: Detetor de incêndios.

## 2.5. Corrente elétrica

A corrente elétrica, representada pela letra  $I$ , é o fluxo das cargas de condução dentro de um material. A intensidade da corrente  $I$  é a taxa de transferência da carga, através de uma secção, por unidade de tempo

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (2.12)$$

onde  $dQ$  é o valor absoluto da carga total que passa pela secção durante um intervalo de tempo  $dt$ . De forma inversa, a carga total que passa através de uma secção de um condutor, desde um instante  $t_1$  até outro instante  $t_2$ ,

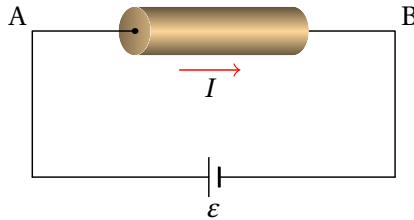
é o integral da corrente  $I$ ,

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I dt \quad (2.13)$$

No sistema internacional de unidades a unidade usada para medir a corrente elétrica é o ampere, designado pela letra A, que equivale à transferência de uma carga de um coulomb cada segundo:

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s} \quad (2.14)$$

A corrente costuma ser representada vetorialmente por  $\vec{I}$ , com módulo igual à intensidade da corrente, direção igual à direção do movimento das cargas de condução e com o mesmo sentido em que é transferida energia. Tal como foi referido, nas três barras condutoras da figura 2.7 há transferência de energia do ponto A para o ponto B e, portanto, a corrente nos três casos é no sentido de A para B, como indica o diagrama da figura 2.9. A corrente em qualquer condutor ou semiconductor de qualquer tipo segue sempre o sentido do campo elétrico, isto é, do ponto com maior potencial para o ponto com menor potencial.

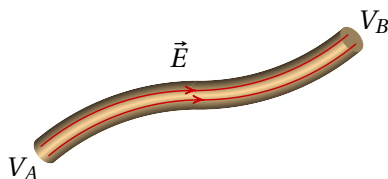


**Figura 2.9.:** Corrente  $I$  numa barra condutora.

Se o condutor não for retilíneo (figura 2.10), as linhas de campo elétrico seguem a direção do condutor, desde o ponto onde o potencial é maior até onde o potencial é menor. A relação entre o campo elétrico no condutor e a diferença de potencial entre os extremos é,

$$\int_A^B E ds = V_A - V_B \quad (2.15)$$

O módulo do campo campo elétrico poderá ser diferente em diferentes partes do percurso no integral de linha do primeiro membro da equação,



**Figura 2.10.:** Campo elétrico num condutor ligado a uma voltagem  $\Delta V$  ( $V_A > V_B$ ).

mas usando o teorema do valor médio obtém-se a seguinte relação para o valor médio do campo no condutor:

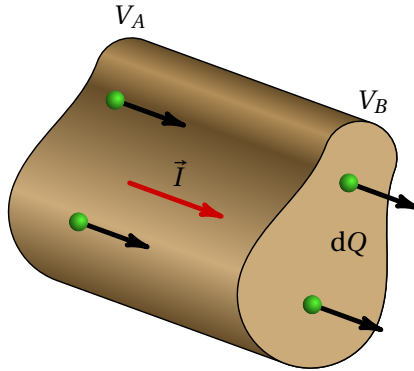
$$\boxed{\bar{E} = \frac{\Delta V}{\Delta s}} \quad (2.16)$$

onde  $\Delta s$  é o comprimento do condutor e  $\Delta V$  a voltagem (diferença de potencial entre os extremos).

Como tal, quanto mais comprido for o fio condutor que liga os pontos A e B, com potenciais fixos  $V_A$  e  $V_B$ , menor será o campo elétrico médio. A intensidade da corrente depende do módulo do campo elétrico e da área da secção transversal do fio; quanto maior for o módulo do campo, mais rápido é o movimento da nuvem de cargas de condução e maior é a corrente; quanto maior for a área da secção transversal, mais grosso é o fio e o movimento da nuvem de cargas de condução produz então uma corrente maior.

## 2.6. Potência elétrica

Como já foi referido, o transporte de cargas de condução num condutor acarreta dissipação de energia, geralmente na forma de calor, fenómeno esse designado de **efeito Joule**. Se num condutor circula corrente estacionária  $I$ , durante um intervalo de tempo  $dt$  entra uma carga  $dQ$  por um extremo do condutor e sai a mesma carga pelo extremo oposto. No condutor da figura 2.11, o sentido da corrente indica que  $V_A$  é maior que  $V_B$ ; se as cargas de condução são positivas, deslocam-se no sentido da corrente, ou seja, entra carga  $dQ$  pelo extremo A e sai carga  $dQ$  pelo extremo B. A energia elétrica da carga que entra é  $V_A dQ$  e a energia da carga que sai é  $V_B dQ$ . Ou seja, as cargas perdem energia elétrica na passagem pelo condutor.



**Figura 2.11.:** Cargas que entram e saem num condutor com corrente, durante um intervalo  $dt$ .

A energia elétrica que as cargas de condução perdem na passagem pelo condutor, durante o intervalo de tempo  $dt$  é

$$dU_e = V_A dQ - V_B dQ = \Delta V dQ \quad (2.17)$$

onde  $\Delta V = V_A - V_B$  é a voltagem no condutor. O valor instantâneo da potência elétrica,  $P$ , dissipada no condutor, obtém-se dividindo  $dU_e$  pelo intervalo de tempo  $dt$ . O resultado obtido é

$$\boxed{P = I \Delta V} \quad (2.18)$$

Essa é a potência dissipada em calor num condutor com voltagem  $\Delta V$  e corrente  $I$ . O resultado foi obtido no caso de um condutor com portadores de cargas positivas, mas é o mesmo resultado que se obtém para qualquer outro condutor com cargas de condução negativas ou cargas de ambos sinais. A partir das definições de volt e ampere, pode-se verificar que o produto dessas duas unidades é igual a joule sobre segundo, que é a unidade SI de potência, o watt (W), igual a um joule sobre segundo.

Para manter a corrente no condutor, é necessário que a mesma potência  $P$ , dissipada no condutor, seja fornecida pela bateria que estabelece a diferença de potencial  $\Delta V$ . Assim, a potência fornecida pela bateria é também  $I \Delta V$ , em que  $\Delta V$  é a diferença de potencial entre os terminais da bateria. Numa bateria "ideal" essa diferença de potencial é igual ao valor da f.e.m. ( $\epsilon$ ) e, como tal, a potência fornecida por uma bateria ideal é:

$$P_\epsilon = I \epsilon \quad (2.19)$$

No próximo capítulo mostra-se que, numa bateria real,  $\Delta V$  é realmente menor que o valor da f.e.m., e diminui em função da corrente.

### Exemplo 2.2

Num condutor, ligado a uma pilha ideal com f.e.m. de 1.5 V, circulam  $10^{16}$  elétrons de condução durante 2 segundos. Calcule: (a) A corrente média; (b) A energia fornecida pela pilha durante esse intervalo; (c) A potência média fornecida pela pilha; (d) Se a carga máxima da pilha for 3 A·h e se fosse possível manter a mesma corrente média até a pilha descarregar totalmente, quanto tempo demoraria a pilha a descarregar?

**Resolução.** (a) A carga transferida é o valor absoluto da carga dos  $10^{16}$  elétrons:

$$\Delta Q = 10^{16} \times 1.602 \times 10^{-19} = 1.602 \times 10^{-3} \text{ C}$$

e a corrente média é:

$$\bar{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{1.602 \times 10^{-3}}{2} = 0.80 \text{ mA}$$

(b) A energia fornecida pela pilha é igual à energia elétrica dissipada no condutor:

$$\Delta U_e = \Delta Q \Delta V = 1.602 \times 10^{-3} \times 1.5 = 2.40 \text{ mJ}$$

(c) A potência média fornecida é igual a essa energia, dividida pelo intervalo de tempo:

$$\bar{P} = \frac{\Delta U_e}{\Delta t} = \frac{2.40 \times 10^{-3}}{2} = 1.20 \text{ mW}$$

(d) O tempo obtém-se dividindo a carga máxima que pode ser transferida, pela corrente média:

$$\Delta t = \frac{\Delta Q_{\text{máx}}}{\bar{I}}$$

substituindo, obtém-se:

$$\Delta t = \frac{3 \text{ A} \cdot \text{h}}{0.80 \times 10^{-3} \text{ A}} = 3750 \text{ h} \approx 156 \text{ dias}$$

## 2.7. Voltímetros e amperímetros

Para medir a diferença de potencial entre dois pontos num dispositivo, basta tocar nesses pontos com os terminais de um **voltímetro**. Se a diferença de potencial não ultrapassa o valor máximo aceite pelo voltímetro, essa operação é bastante segura e muito útil para diagnosticar problemas nos dispositivos.

Para medir a corrente elétrica usa-se um **amperímetro**. Igual que no caso do voltímetro, a corrente a ser medida não deverá ultrapassar o valor máximo aceite pelo amperímetro. O problema neste caso é que um bom amperímetro deverá facilitar a passagem das cargas, para não interferir com o dispositivo onde vai medir-se a corrente. Ou seja, ligando o amperímetro entre dois pontos de um dispositivo, a maioria das cargas passam pelo amperímetro e não pelo dispositivo, já que encontram um percurso mais livre através do amperímetro. Assim sendo, a corrente através do amperímetro pode ser muito elevada, correndo-se o risco de queimá-lo.

Como tal, há que ter maior cuidado no uso de um amperímetro do que um voltímetro. Antes de tocar num dispositivo com os terminais de um amperímetro, é necessário "cortar" o fluxo de carga no ponto onde vai medir-se a corrente e fazer uma ponte com os terminais do amperímetro, entre os dois pontos onde foi aberto o circuito, para garantir que todas as cargas que passem pelo amperímetro têm que passar pelo dispositivo, que foi concebido para limitar o fluxo das cargas. Um **multímetro** combina as funções de voltímetro e amperímetro num único aparelho de medição.



## Perguntas

1. A força eletromotriz de uma pilha química:
  - A. É independente das reações químicas no seu interior.
  - B. Depende do tamanho da pilha.
  - C. Depende da sua carga máxima.
  - D. É independente do tamanho dos elétrodos.
  - E. Nenhuma das outras respostas.
2. Se o custo da energia elétrica fosse de 10 centavos por kilowatt-hora, quanto custaria manter uma torradeira de 660 W a funcionar durante meia hora?
  - A. 15 centavos.
  - B. 12 centavos.
  - C. 6.9 centavos.
  - D. 3.3 centavos.
  - E. 1.7 centavos.
3. A corrente num condutor aumenta linearmente desde um valor inicial de 3 A, em  $t = 0$ , até o valor final 6 A, em  $t = 3$  h. Determine a carga total transportada pelo condutor durante esse intervalo.

A. 48.6 kC	D. 97.2 kC
B. 32.4 kC	E. 16.2 kC
C. 64.8 kC	
4. Uma pilha AA tem uma carga total de 8 A·h. Se for ligada a um dispositivo, produzindo uma corrente média de 50 mA durante 50 horas, com que percentagem da sua carga ficará após as 50 horas?

A. 31%	D. 69%
B. 50%	E. 131%
C. 21%	



4. Uma pilha recarregável de Ni-MH tem f.e.m. de 1.2 V e carga máxima 2300 mA·h. Determine a energia potencial elétrica máxima que essa pilha pode armazenar.



5. Uma calculadora pode funcionar com um adaptador que fornece 40 mA, a 3 V, ou com duas pilhas AA cada uma com 1.5 V e carga máxima de 8 Ah, ligadas em série. Admitindo que a calculadora utiliza a mesma potência quando funciona a pilhas ou com o adaptador, por quanto tempo pode funcionar a pilhas?
6. Numa casa, o fusível do fogão elétrico na caixa de fusíveis é de 30 A. Qual é a potência máxima que pode ter o fogão? (admita diferença de potencial de 230 V).
7. A corrente num cabo varia de acordo com a função  $I = 20 + 3t^2$ , onde  $I$  mede-se em miliampere e  $t$  em segundos. (a) Que carga transporta o cabo desde  $t = 0$  até  $t = 10$  s? (b) Qual o valor da corrente constante que transporta a mesma quantidade de carga no mesmo intervalo de tempo?
8. Num condutor ligado a uma pilha com f.e.m. de 1.5 V, circulam  $9.6 \times 10^{21}$  elétrons de condução durante 2 horas. Determine:
- (a) A intensidade da corrente média.
  - (b) A energia fornecida pela pilha durante esse intervalo.
  - (c) A potência média fornecida pela pilha.
  - (d) Se a carga inicial da pilha era de 3 A·h, com que carga fica após as 2 horas?
9. Para manter a temperatura a 20 °C num quarto, durante um dia de inverno, estima-se ser necessária energia de 132 kJ cada minuto. Se essa energia for fornecida por um aquecedor elétrico, ligado à tensão de 220 V disponível na casa:
- (a) Determine a intensidade da corrente no aquecedor.
  - (b) Se o custo da energia elétrica for de 12 cêntimos por kw·h, qual o custo de manter ligado o aquecedor durante 10 minutos?

## Respostas

**Perguntas:** 1. D. 2. D. 3. A. 4. D. 5. C.

### Problemas

1. 8.80 Mm/s.
2. (a)  $E = 6.4 \times 10^{-16}$  J,  $v = 37.5$  Mm/s. (b) 5 kV/m.
3. (a)  $5.4 \times 10^5$  C. (b) 72%.
4. 9.936 kJ.
5. 200 horas.
6. 6.9 kW.
7. (a) 1.2 C. (b) 120 mA.
8. (a) 214 mA. (b) 2.307 kJ. (c) 320 mW. (d) 2.57 A·h.
9. (a) 10 A. (b) 4.4 centímetros.

### 3. Resistência



"Em termos gerais, os efeitos da corrente no corpo humano são os seguintes:

- com menos do que 0.01 A: sensação de formigueiro ou nada se sente;
- 0.02 A: sensação de dor e fica-se agarrado;
- 0.03 A: perturbações respiratórias;
- 0.07 A: grandes dificuldades respiratórias;
- 0.1 A: morte devido a fibrilação;
- mais do que 0.2 A; não existe fibrilação mas verificam-se queimaduras muito graves e cessa a respiração.

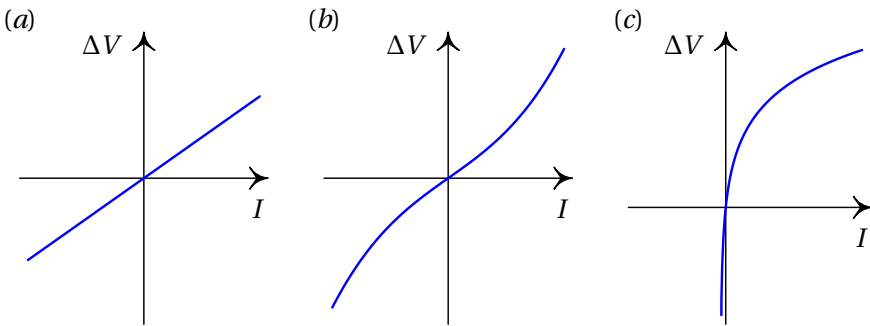
A gama intermédia que vai de 0.1 a 0.2 A é, por estranho que pareça, a que origina a maior parte das mortes nas situações comuns, porque a este nível de intensidade inicia-se a fibrilação do coração, que consiste numa contração muscular espasmódica e incontrolada do coração. A quebra da corrente sanguínea daí resultante origina rapidamente a morte. Acima de 0.2 A o coração simplesmente pára e as medidas normais de primeiros socorros podem restabelecer o seu funcionamento. Mas o único processo para deter a fibrilação é um outro choque elétrico controlado. Por isso, correntes entre 0.1 e 0.2 A são mais mortais do que correntes mais intensas. A intensidade de corrente que passa por uma vítima é geralmente determinada pela resistência da pele que vai de cerca de 1000  $\Omega$  para peles molhadas até 500 000  $\Omega$  para peles secas. A resistência interna é menor do que a da pele, estando compreendida entre 100 e 500  $\Omega$ . Para voltagens superiores a cerca de 240 V, geralmente resulta a perfuração da pele pela corrente."

*O Grande Circo da Física* (Walker, 1975, pp. 463–464).

### 3.1. Caraterísticas voltagem-corrente

A potência elétrica dissipada num dispositivo (por exemplo, numa lâmpada) é igual ao produto da diferença de potencial entre os extremos do elemento pela corrente que o percorre:  $P = I\Delta V$ . Duas lâmpadas diferentes podem dissipar diferentes potências, quando são ligadas à mesma voltagem. Por exemplo, existem lâmpadas pequenas, de 12V, com potências de 1 W e de 2 W; isso indica que para o mesmo valor da diferença de potencial, a corrente na lâmpada de 2 W é o dobro da corrente na lâmpada de 1 W.

Cada dispositivo tem uma curva caraterística que mostra os valores resultantes da corrente,  $I$ , para diferentes valores da diferença de potencial,  $\Delta V$ . A figura 3.1 mostra algumas dessas curvas caraterísticas para três elementos diferentes.



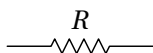
**Figura 3.1.:** Caraterísticas voltagem-corrente de três dispositivos diferentes.

### 3.2. Lei de Ohm

Em alguns condutores (o caso *a* na figura 3.1), designados de **ohmicos**, a curva caraterística é uma reta que passa pela origem. Essa relação linear entre  $I$  e  $\Delta V$  expressa-se matematicamente pela **Lei de Ohm**:

$$\boxed{\Delta V = RI} \quad (3.1)$$

onde  $R$  é uma constante chamada **resistência**, que corresponde ao declive da caraterística voltagem-corrente. Um condutor ohmico designa-se



**Figura 3.2.:** Símbolo de resistência num circuito.

simplesmente por resistência. A figura 3.2 mostra o símbolo usado para representar uma resistência nos circuitos.

Nos elementos não ohmicos ( $b$  e  $c$  na figura 3.1) pode também definir-se a resistência  $R$  pela relação  $\Delta V/I$ , mas observe-se que nesses casos  $R$  não é constante e também não é o declive da caraterística voltagem-corrente, mas sim o declive de uma reta que passa pelo respetivo ponto e pela origem.

No sistema internacional, a unidade usada para medir a resistência é o ohm representado pela letra grega  $\Omega$  (ómega maiúsculo). Uma resistência de 1 ohm é uma resistência em que uma voltagem de 1 volt produz uma corrente de 1 ampere:

$$1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} \quad (3.2)$$

Usando a lei de Ohm, a potência dissipada por efeito Joule numa resistência ( $P = I \Delta V$ ) pode ser escrita em função do valor da resistência:

$$P = R I^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (3.3)$$

a potência dissipada pelo dispositivo depende da voltagem à que for ligado. A potência nominal, indicada pelo fabricante, é a potência que dissipa quando for ligado à diferença de potencial recomendada pelo fabricante. Comparando dispositivos com a mesma voltagem nominal, quanto maior a potencia nominal, menor será a resistência do dispositivo.

### 3.3. Caraterística de uma bateria

No modo normal de funcionamento das baterias ou pilhas, em que a corrente entra na bateria pelo elétrodo negativo e sai pelo elétrodo positivo, a energia elétrica das cargas de condução aumenta quando passam pela bateria; ou seja, a bateria fornece energia elétrica e diz-se que funciona como **gerador**. As reações químicas no eletrólito fornecem potência elétrica  $\varepsilon I$ . Uma parte dessa potência é dissipada em calor dentro da própria bateria, devido à passagem das cargas pelos elétrodos e pelo eletrólito. Se os elétrodos e o eletrólito são condutores ohmicos, com resistência total

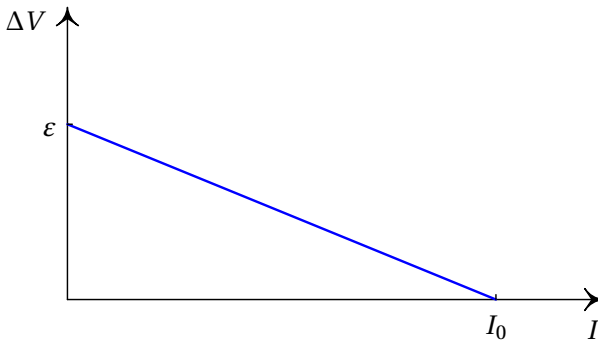


**Figura 3.3.:** Cada eletrodoméstico tem uma potência elétrica nominal.

$r$ , a potência dissipada em calor dentro da bateria é  $r I^2$  e, assim sendo, a potência fornecida pela bateria ao dispositivo ligado entre os elétrodos é  $\varepsilon I - r I^2$ . Como essa potência fornecida ao dispositivo é igual a  $I \Delta V$ , obtém-se então a expressão da caraterística da bateria, no modo normal em que fornece energia a um dispositivo:

$$\Delta V_{\text{gerador}} = \varepsilon - r I \quad (3.4)$$

A figura 3.4 mostra a caraterística do gerador. A ordenada na origem é o valor da f.e.m. e o valor absoluto do declive é a **resistência interna** da bateria,  $r$ . A corrente  $I_0 = \varepsilon / r$  é a corrente máxima que pode fornecer a bateria, quando for ligada em **curto-circuito** (diferença de potencial  $\Delta V$  nula entre os elétrodos).



**Figura 3.4.:** Caraterística voltagem-corrente de uma bateria.

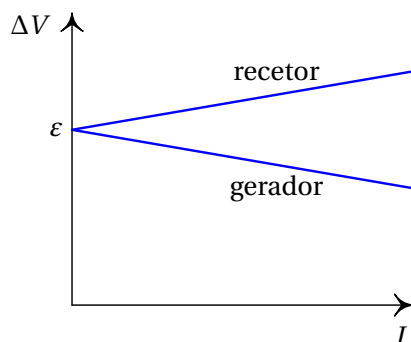
Nas baterias recarregáveis, o sentido normal da corrente pode ser invertido,



ligando outra fonte externa com f.e.m. maior que a da bateria e contrariando a sua polaridade. Nesse caso, a corrente entra na bateria pelo elétrodo positivo e sai pelo elétrodo negativo. As cargas de condução perdem energia elétrica durante a sua passagem pela bateria. A bateria está então a absorver potência elétrica  $I \Delta V$ , que está a ser fornecida pela fonte externa. A bateria passa a funcionar como **recetor**. Uma parte dessa potência absorvida é usada para inverter as reações químicas no eletrólito, aumentando o número de catiões e aniões; essa parte é igual  $\varepsilon I$ . A outra parte da potência absorvida pela bateria é dissipada em calor na resistência interna e é igual a  $r I^2$ . Como tal, a caraterística da bateria, no modo recetor, é

$$\boxed{\Delta V_{\text{recetor}} = \varepsilon + r I} \quad (3.5)$$

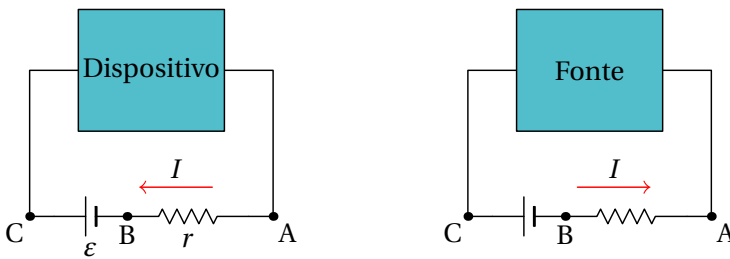
A figura 3.5 mostra as caraterísticas da bateria nos dois modos de funcionamento. Nos dois casos, o valor absoluto do declive é igual à resistência interna  $r$ . A voltagem da bateria só é igual ao valor da sua f.e.m. quando a bateria não está ligada a nenhum dispositivo (corrente nula). Quando a bateria é ligada a um dispositivo, passando corrente através dela, a voltagem da bateria é maior que a f.e.m. no modo de recetor e menor que a f.e.m. no modo de gerador. No modo de gerador, quando a bateria está em curto-circuito (ligam-se os dois terminais da bateria entre si), a voltagem diminui para zero, e toda a energia fornecida pelas reações químicas é dissipada em calor dentro da própria bateria, descarregando-se totalmente, se antes não se queimar pelo calor dissipado.



**Figura 3.5.:** Caraterísticas de uma bateria recarregável nos dois modos de operação.

O diagrama de circuito correspondente deve incluir uma f.e.m. ligada em série a uma resistência  $r$ . Tal como foi referido no capítulo anterior, a barra

mais comprida na f.e.m. representa o eletrodo positivo e a barra mais curta o eletrodo negativo. A figura 3.6 mostra os diagrama de circuito de uma bateria quando está a fornecer energia a um dispositivo (gerador) e da mesma bateria quando está a ser recarregada (recetor) por uma fonte externa. A letra A indica o ânodo e a letra C o cátodo. Por definição, o cátodo é o terminal para onde se deslocam os catiões e o o ânodo o terminal para onde se deslocam os aniões. O sentido da corrente indica o sentido do deslocamento do catiões, ou seja que a corrente vai sempre do ânodo para o cátodo. Como o sentido da corrente é oposto nos dois casos, o cátodo e o ânodo invertem-se nos dois modos de operação.



**Figura 3.6.:** Bateria recarregável operando como gerador ou recetor.

No modo de gerador, a bateria fornece energia ao dispositivo e a carga no eletrólito diminui. O sentido da corrente mostra que o potencial do ponto A é maior do que o do ponto B (figura 3.6); como o potencial de C também é maior que o de B, a voltagem da bateria ( $V_C - V_A$ ) é o valor da f.e.m. menos a diferença de potencial em  $r$ , obtendo-se a equação 3.4. No modo recetor, a bateria absorve energia da fonte externa e a carga no eletrólito aumenta. O sentido da corrente indica que  $V_B$  é maior que  $V_C$  e como o potencial de A é maior que o de B, a voltagem da bateria ( $V_A - V_C$ ) é o valor da f.e.m. mais a diferença de potencial em  $r$ , obtendo-se a equação 3.5.

### 3.4. Código de cores para resistências

As resistências usadas comumente nos circuitos eletrônicos são pequenos cilindros de carbono, com um isolamento cerâmico. No circuito da figura 3.7 todos os cilindros com riscas de cores são resistências. Usam-se 4 riscas de cores para indicar o valor da resistência.

A correspondência entre cores e algarismos é dada na tabela 3.1. Três



**Figura 3.7.:** Circuito impresso (PCB) incluindo algumas resistências.

das riscas estão mais próximas umas das outras; as duas primeiras dessas riscas, contadas a partir do extremo mais próximo do cilindro, representam os dois algarismos de um número inteiro entre 0 e 99. A terceira risca indica a ordem de grandeza desse número, em ohms, usando a mesma relação entre cores e algarismos da tabela acima. A quarta risca, mais afastada das outras três, representa a tolerância (erro relativo) no valor indicado para a resistência.

**Tabela 3.1.:** Código de cores para resistências.

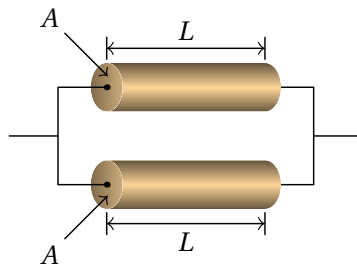
Cor	Algarismo	Tolerância
Preto	0	
Castanho	1	1%
Vermelho	2	2%
Laranja	3	
Amarelo	4	
Verde	5	0.5%
Azul	6	0.25%
Roxo	7	0.1%
Cinza	8	0.05%
Branco	9	
Dourado		5%
Prateado		10%
Nenhuma		20%

Por exemplo, se as cores das 3 riscas mais próximas fossem laranja, preta e azul e a quarta risca for prateada, o valor da resistência seria:  $30 \times 10^6 \Omega$  ( $\pm 3 \times 10^6 \Omega$ ).

### 3.5. Resistividade

A resistência de um condutor ohmico resulta das colisões entre as cargas de condução e os átomos ou iões. As cargas de condução são aceleradas pela força eletrostática, mas devido às colisões acabam por se deslocar a uma velocidade média constante. A resistência é determinada pela relação que existir entre a velocidade média atingida e a diferença de potencial (por unidade de comprimento) que produz o movimento. Os fatores que determinam o valor da resistência são: a natureza do material, o tamanho do condutor e a temperatura.

Para estudar a influência do tamanho do condutor, considerem-se dois cilindros condutores idênticos, de comprimento  $L$  e área transversal  $A$ , cada um com resistência  $R$ , ligados em série (figura 3.8).

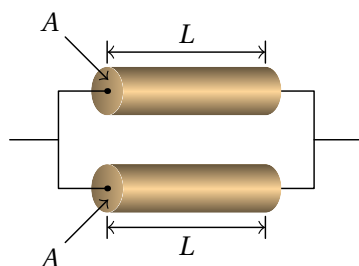


**Figura 3.8.:** Dois cilindros condutores ligados em série.

A combinação em série é equivalente a um único cilindro de comprimento  $2L$  e se a corrente for  $I$ , a diferença de potencial será  $RI + RI$ ; a resistência do sistema é então  $2R$ . A resistência é então diretamente proporcional ao comprimento do condutor.

Se os mesmos dois cilindros condutores fossem ligados em paralelo, como se mostra na figura 3.9, o sistema é agora equivalente a um único condutor de comprimento  $L$  e área transversal  $2A$ . Neste caso, a diferença de potencial é igual em ambos cilindros ( $\Delta V$ ), a corrente em cada cilindro é  $\Delta V/R$  e a corrente total é  $2\Delta V/R$ , que corresponde à corrente num sistema com resistência  $R/2$ . Ou seja, duplicando a área transversal, a resistência diminui a metade, o que significa que a resistência é inversamente proporcional à área da secção transversal do condutor.

Resumindo, a resistência de um condutor com comprimento  $L$  e área

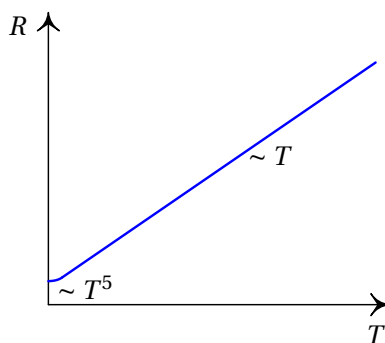


**Figura 3.9.:** Dois cilindros condutores ligados em paralelo.

transversal  $A$  pode ser expressa como

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (3.6)$$

onde a constante de proporcionalidade,  $\rho$ , é a **resistividade** do material, que depende da natureza do material e da temperatura. Nos condutores ôhmicos, a resistência aumenta com a temperatura, de modo quase linear (ver figura 3.10), para temperaturas afastadas do zero absoluto ( $-273\text{ }^\circ\text{C}$ ).



**Figura 3.10.:** Variação da resistência de um condutor em função da temperatura absoluta.

A expressão obtida de forma empírica para a resistência de um condutor em função da temperatura é então

$$R = R_{20} (1 + \alpha_{20}(T - 20)) \quad (3.7)$$

onde  $R_{20}$  é a resistência a  $20\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\alpha_{20}$  é o **coeficiente de temperatura** e  $T$  é a temperatura em graus Celsius. Cada material tem um coeficiente de

temperatura próprio que é medido experimentalmente. Note-se que o declive da reta na figura 3.10 é o produto  $R_{20} \alpha_{20}$  e, como tal, apesar do declive ser quase constante, o valor da constante  $\alpha$  depende da temperatura. A tabela 3.2 mostra os valores da resistividade e do coeficiente de temperatura de alguns materiais a 20 °C. A grafite, que é um semicondutor, tem um coeficiente de temperatura negativo, o que quer dizer que a 20 °C a sua resistência diminui quando a temperatura aumenta.

**Tabela 3.2.:** Resistividade e coeficiente de temperatura de alguns materiais, a 20 °C.

Material	$\rho_{20}$ (nΩ·m)	$\alpha_{20}$ (°C <sup>-1</sup> )
Prata	16	0.0038
Cobre	17	0.0039
Alumínio	28	0.0039
Tungsténio	55	0.0045
Ferro	100	0.0050
Chumbo	220	0.0043
Níquel-crómio	1000	0.0004
Grafite	35000	-0.0005

### Exemplo 3.1

Um fio de cobre de raio 0.0815 cm e comprimento de 40 cm transporta uma corrente de 1 A. Calcule o campo elétrico dentro do fio e a diferença de potencial nos extremos, quando a temperatura for de 30 °C.

**Resolução.** Usando o valor de  $\rho_{20}$  para o cobre (tabela 3.2), a resistência a 20 °C é:

$$R_{20} = \frac{\rho_{20} L}{A} = \frac{17 \times 10^{-9} \times 0.4}{\pi (0.000815)^2} = 3.259 \text{ m}\Omega$$

e usando o valor de  $\alpha_{20}$  do cobre na equação 3.7, obtém-se:

$$R(30 \text{ °C}) = 3.259 (1 + 0.0039 \times (30 - 20)) = 3.386 \text{ m}\Omega$$

A diferença de potencial obtém-se a partir da lei de Ohm:

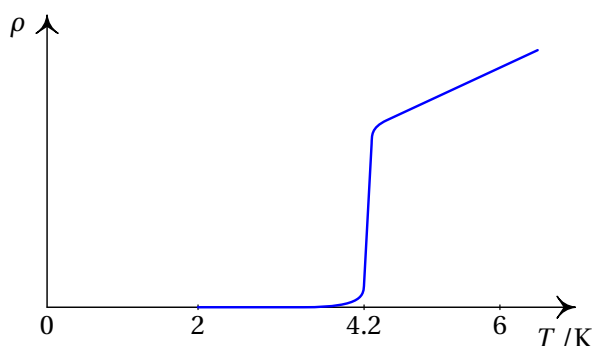
$$\Delta V = I R = 3.386 \text{ mV}$$

Como a secção transversal do fio é constante, o módulo do campo elétrico também deve ser constante e, portanto, pode ser calculado através da expressão para o campo elétrico médio

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{3.386}{0.4} = 8.465 \frac{\text{mV}}{\text{m}}$$

## 3.6. Supercondutividade

Em 1911, o físico holandês Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926) descobriu que a resistividade de alguns condutores diminui drasticamente quando a temperatura se aproxima do zero absoluto ( $-273^\circ\text{C}$ ). O gráfico da figura 3.11 mostra os valores da resistividade do mercúrio, medidos por Onnes perto dos 4 Kelvin ( $-269^\circ\text{C}$ ),

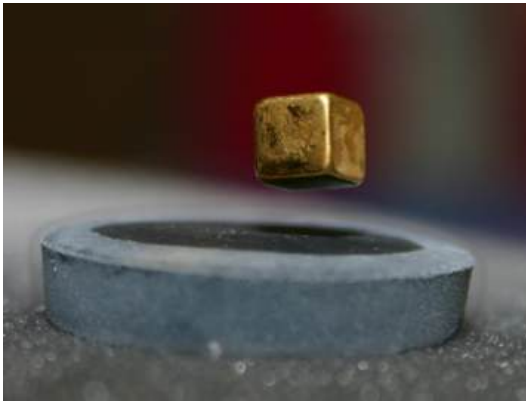


**Figura 3.11.:** Resistividade do mercúrio a baixas temperaturas.

Abaixo da **temperatura crítica** (4.2 K no caso do mercúrio) a resistividade dos supercondutores diminui dum fator de aproximadamente  $10^{12}$ , tornando-se praticamente nula. Isso implica a possibilidade de manter uma corrente a circular no supercondutor, durante alguns anos, sem existirem fontes de voltagem!

Nas experiências de **levitação magnética** coloca-se um íman sobre um material supercondutor (ver figura 3.12). O íman induz no supercondutor correntes elétricas que produzem um campo magnético oposto ao campo do íman; em condições normais, essas correntes desaparecem rapidamente devido a efeitos dissipativos no supercondutor. No entanto, se o sistema for arrefecido até uma temperatura inferior à temperatura crítica

do supercondutor, as correntes persistem e o disco eleva-se no ar devido à repulsão magnética (efeito Meissner).



**Figura 3.12.:** Levitação magnética de um íman cúbico sobre um disco de material supercondutor.

Essas experiências têm a dificuldade de não ser fácil atingir temperaturas tão baixas e mantê-las durante algum tempo. Mas hoje em dia já há materiais com temperaturas críticas muito mais elevadas, embora ainda na ordem dos  $-150\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

O princípio da levitação magnética já está a ser aplicado comercialmente nos comboios **maglev** em Xangai e no Japão (ver figura 3.13). O comboio possui barras supercondutoras em vez de rodas e os carris são substituídos por uma calha onde vários eletro-ímanes produzem campos magnéticos no momento em que o comboio passa perto deles. O campo magnético é usado para produzir a força vertical que faz o comboio levitar, bem como forças horizontais para fazer acelerar ou travar o comboio.

Num comboio tradicional existem dois tipos de atrito nas rodas: atrito estático entre a superfície das rodas e os carris e atrito cinético nos eixos das rodas. Quando são aplicados os travões, a força de atrito estático é oposta à velocidade, mas no resto da viagem aponta no mesmo sentido da velocidade (ou é nula), sendo a força propulsora que permite manter o comboio em movimento; como tal, a força de travagem e a força propulsora estão limitadas ao valor máximo da força de atrito estático, que depende do peso do comboio e do estado dos carris. O atrito cinético é sempre uma força dissipativa que diminui a energia mecânica aquecendo as peças em contacto.





**Figura 3.13.:** O comboio maglev de Xangai.

A levitação magnética permite eliminar as rodas com várias vantagens: as forças propulsoras e de travagem podem ser muito superiores do que nos comboios tradicionais, por não estarem limitadas à força de atrito estático máximo e a eliminação do atrito cinético conduz a uma dissipação de energia mecânica muito inferior do que nos comboios tradicionais (ainda existe a força dissipativa da resistência do ar). Esse tipo de comboios podem alcançar velocidades superiores a 500 km/h.

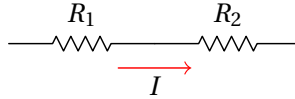
### 3.7. Associações de resistências

A característica voltagem-corrente de um conjunto de várias resistências tem sempre o aspeto da característica de uma única resistência; nomeadamente, é uma reta que passa pela origem. O declive dessa reta é a resistência equivalente. Podem-se usar algumas regras simples para calcular a resistência equivalente, quando as resistências estão ligadas em série ou em paralelo.

Duas resistências estão ligadas em série, quando uma estiver a seguir à outra, sem nenhum outro elemento de circuito no meio, como se mostra na figura 3.14.

Nesse caso, a corrente é a mesma nas duas resistências e a diferença de potencial no sistema é a soma das diferenças de potencial em cada resistência:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = (R_1 + R_2) I \quad (3.8)$$

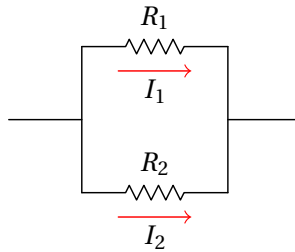


**Figura 3.14.:** Duas resistências ligadas em série.

Como tal, o sistema é equivalente a uma única resistência  $R_s$  com valor igual à soma das duas resistências.

$$\boxed{R_s = R_1 + R_2} \quad (3.9)$$

Diz-se que duas resistências estão ligadas em paralelo, se os dois terminais de ambas as resistências estiverem ligados entre os mesmos pontos, como na figura 3.15.



**Figura 3.15.:** Duas resistências em paralelo.

A diferença de potencial é a mesma nas duas resistências em paralelo e a corrente no sistema é a soma das correntes em cada resistência:

$$I = I_1 + I_2 = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Delta V \quad (3.10)$$

O sistema é então equivalente a uma única resistência  $R_p$  que verifica a equação

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.11)$$

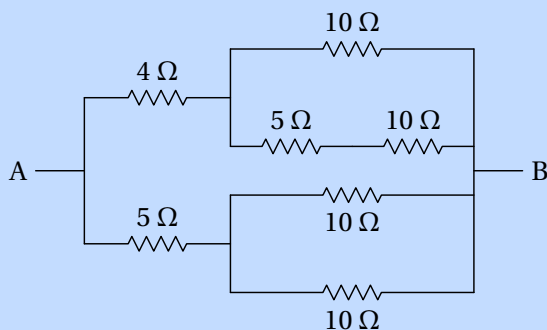
Esta equação pode ser escrita também na forma seguinte:

$$\boxed{R_p = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (3.12)$$

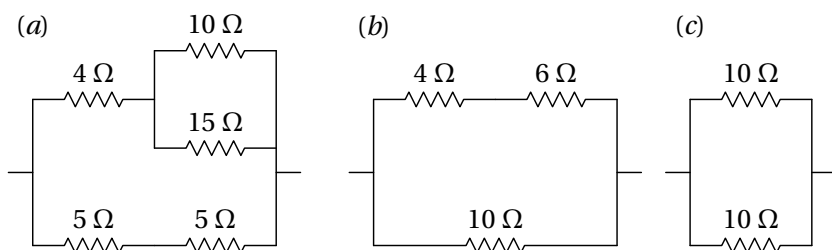
onde foi introduzida a notação  $R_1 \parallel R_2$  que quer dizer “ $R_1$  em paralelo com  $R_2$ ”. É possível simplificar alguns sistemas com várias resistências, substituindo sucessivamente as resistências que se encontram em série ou em paralelo por uma resistência equivalente, até obter uma única resistência equivalente.

### Exemplo 3.2

No circuito da figura, calcule a corrente através de cada uma das resistências, para uma diferença de potencial  $V_A - V_B$  igual a 12 V.



**Resolução.** Substituindo sucessivamente as resistências ligadas em série ou em paralelo, pode simplificar-se o circuito entre A e B em 3 passos:



Note-se que não é necessário reduzir o circuito até ficar com uma única resistência equivalente, pois no passo (c) já se podem calcular as correntes correspondentes a uma diferença de potencial de 12 V em cada resistência; será  $12/10 = 1.2$  A através de cada uma delas.

Uma vez calculadas as correntes e diferenças de potencial em (c), pode-se resolver o circuito da figura (b): nas 3 resistências a corrente é neste caso igual a 1.2 A, pelo que a diferença de potencial na resistência de  $6 \Omega$  é  $6 \times 1.2 = 7.2$  V.

A seguir procede-se a analisar o circuito da figura (a); a corrente nas resistências de  $4 \Omega$  e  $5 \Omega$  é a calculada em (b), nomeadamente,  $1.2 \text{ A}$ . Nas resistências de  $10 \Omega$  e  $15 \Omega$  a diferença de potencial é  $7.2 \text{ V}$ , conforme cálculo feito para a resistência equivalente em paralelo. As correntes nessas duas resistências são então:

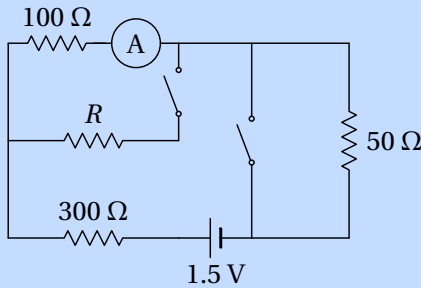
$$I_{10} = 7.2/10 = 0.72 \text{ A} \quad I_{15} = 7.2/15 = 0.48 \text{ A}$$

Finalmente, no circuito original, a corrente na série de resistências de  $5 \Omega$  e  $10 \Omega$  é igual a  $I_{15}$ , enquanto a corrente nas duas resistências de  $10 \Omega$  em paralelo é distribuída por igual, passando  $0.6 \text{ A}$  por cada resistência.

Resumindo, no ponto A entra uma corrente total de  $2.4 \text{ A}$ , passando  $1.2 \text{ A}$  pelas resistências de  $4 \Omega$  e  $5 \Omega$ . Ao ponto B chegam quatro correntes: uma corrente de  $0.72 \text{ A}$  da resistência de  $10 \Omega$  na parte superior, uma corrente de  $0.48 \text{ A}$  que percorre as resistências de  $10 \Omega$  e  $5 \Omega$  em série e duas correntes de  $0.6 \text{ A}$  que passam por cada uma das resistências de  $10 \Omega$  em paralelo. A corrente total que sai em B é  $2.4 \text{ A}$ .

### Exemplo 3.3

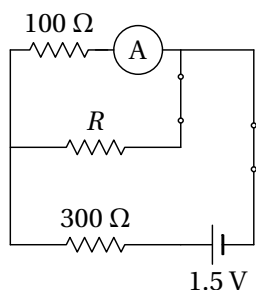
No circuito representado pelo diagrama da figura, a leitura do amperímetro é a mesma quando os dois interruptores estão abertos e quando os dois estão fechados. Calcule a resistência  $R$ .



**Resolução.** Quando os dois interruptores estão abertos, não passa nenhuma corrente pela resistência  $R$  e as 3 resistências de  $300 \Omega$ ,  $100 \Omega$  e  $50 \Omega$  estão em série, porque por elas passa a mesma corrente. Assim, a resistência equivalente é  $450 \Omega$  e a corrente medida no amperímetro é:

$$I_1 = \frac{1.5}{450} = \frac{1}{300} \text{ A}$$

Quando os dois interruptores estão fechados, não passa nenhuma corrente pela resistência de  $50\ \Omega$  e o circuito equivalente é:



Como a leitura do amperímetro é idêntica ao caso anterior, a corrente que passa pela resistência de  $100\ \Omega$  é também  $I_1$  e, portanto, a diferença de potencial nas resistências de  $100\ \Omega$  e  $R$  é:

$$\Delta V_1 = 100 I_1 = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \text{ V}$$

A diferença de potencial e a corrente na resistência de  $300\ \Omega$  são:

$$\Delta V_2 = 1.5 - \Delta V_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \text{ V} \quad I_2 = \frac{\Delta V_2}{300} = \frac{7}{1800} \text{ A}$$

A corrente que passa por  $R$  é então:

$$I_3 = I_2 - I_1 = \frac{7}{1800} - \frac{1}{300} = \frac{1}{1800} \text{ A}$$

e, finalmente, o valor de  $R$  é:

$$R = \frac{\Delta V_1}{I_3} = \frac{1800}{3} = 600\ \Omega$$

## Perguntas

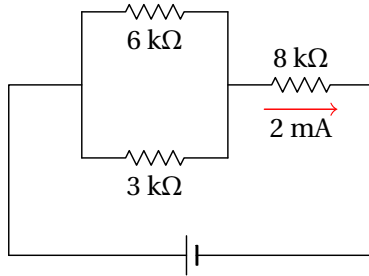
1. A resistência de um condutor metálico é igual a  $6.5 \text{ k}\Omega$ , a  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Quando a temperatura aumenta para  $60 \text{ }^\circ\text{C}$ , a resistência aumenta para  $8 \text{ k}\Omega$ . Calcule o valor do coeficiente de temperatura,  $\alpha_{20}$  (todas as respostas estão em unidades de  $^\circ\text{C}^{-1}$ )
  - A. 0.0049
  - B. 0.0058
  - C. 0.0250
  - D. 0.0115
  - E. 0.0038
2. Aplica-se a mesma diferença de potencial a dois cabos diferentes. O cabo A transporta duas vezes mais corrente do que o cabo B. Se a resistência do cabo B for  $R$ , qual será a resistência do cabo A?
  - A.  $R$
  - B.  $2R$
  - C.  $R/2$
  - D.  $4R$
  - E.  $R/4$
3. Dois fios de cobre 1 e 2 têm o mesmo volume, mas o fio 2 é 20% mais comprido que o fio 1. A razão entre as resistências dos dois fios,  $R_2/R_1$ , é igual a:
  - A. 1.20
  - B. 0.83
  - C. 1.11
  - D. 0.91
  - E. 1.44
4. Duas lâmpadas importadas da América do Sul têm as especificações  $110 \text{ V}$ ,  $75 \text{ W}$ . As duas lâmpadas foram ligadas em série na rede elétrica portuguesa com  $220 \text{ V}$ . Qual das seguintes lâmpadas produz a mesma intensidade luminosa, quando forem ligadas a  $220 \text{ V}$ ?
  - A.  $220 \text{ V}$ ,  $75 \text{ W}$
  - B.  $110 \text{ V}$ ,  $150 \text{ W}$
  - C.  $220 \text{ V}$ ,  $150 \text{ W}$
  - D.  $110 \text{ V}$ ,  $75 \text{ W}$
  - E.  $55 \text{ V}$ ,  $150 \text{ W}$

5. Três aquecedores elétricos idênticos de 1000 W a 100 V (isto é, qualquer um deles dissipa 1000 W a uma voltagem de 100 V) são ligados em série a uma voltagem de 120 V; qual será a potência dissipada pelo sistema?
- A. 0.48 kW
  - B. 1.0 kW
  - C. 1.2 kW
  - D. 3.0 kW
  - E. 3.6 kW

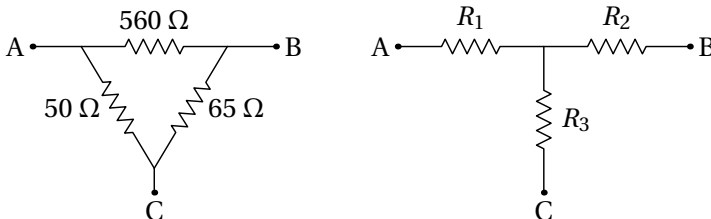
## Problemas

1. A temperatura num dado momento é 12 °C. Quanto deve aumentar a temperatura para que a resistência de um fio de cobre aumente 10%?
2. Um fio condutor de 1 m de comprimento tem uma resistência de 0.3 Ω. O fio é esticado até o seu comprimento aumentar para 2 m. Qual será o novo valor da resistência?
3. A diferença de potencial entre os elétrodos de uma bateria é 3 V quando a bateria é percorrida por uma corrente de 4 A, no sentido do eletrodo negativo para o positivo. Quando a corrente é de 2 A, no sentido oposto, a diferença de potencial aumenta até 12 V. (a) Calcule a resistência interna da bateria. (b) Qual é a f.e.m. da bateria?
4. Determine a corrente máxima que pode fornecer uma pilha com f.e.m. de 1.5 V e resistência interna de 0.2 Ω, e a potência dissipada em calor dentro da própria pilha quando fornece essa corrente máxima.
5. A resistência de uma lâmpada incandescente de 60 W e 230 V, à temperatura ambiente de 20 °C, é  $R = 65 \Omega$ . No entanto, as especificações do fabricante (60 W e 230 V) conduzem a um valor muito mais elevado da resistência. Justifique, calculando a temperatura do filamento de tungstênio quando a lâmpada se encontra acesa.

6. No circuito representado na figura, foi medida a corrente na resistência de  $8\text{ k}\Omega$  e obteve-se o valor de  $2\text{ mA}$ . Use esses dados para calcular o valor da f.e.m. e a diferença de potencial em cada resistência.

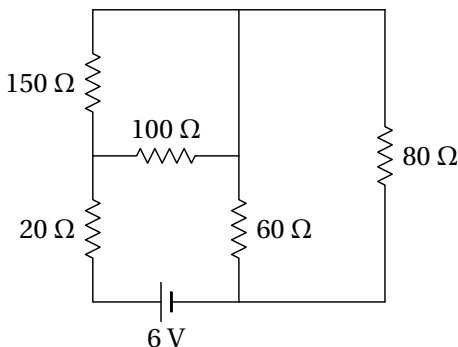


7. Uma bateria tem f.e.m.  $\varepsilon$  e resistência interna  $r$ .
- Determine o valor da resistência  $R$  de um circuito que, quando for ligado a essa bateria, consiga absorver a máxima potência possível.
  - Calcule o valor da potência máxima que a bateria pode fornecer a um circuito, em função de  $\varepsilon$  e  $r$ .
  - Numa fonte de alimentação de um PC, entre os cabos vermelho e preto há uma f.e.m. de  $5\text{ V}$ ; numa fonte de  $400\text{ W}$ , a potência máxima entre esses cabos é de  $125\text{ W}$ . Calcule a resistência interna entre esses cabos.
  - Na alínea anterior, que vantagem haveria em usar uma fonte com maior potência máxima?
8. O circuito do lado esquerdo na figura, com três terminais, vai ser substituído pelo circuito equivalente do lado direito. Calcule os valores que deverão ter  $R_1$ ,  $R_2$ , e  $R_3$  (sugestão: no circuito do lado esquerdo, determine os valores das resistências entre os pontos AB, AC e BC; iguale cada um desses resultados às 3 expressões para essas resistências, no circuito do lado direito, em função das 3 variáveis  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ . Resolva o sistema de 3 equações com 3 variáveis). Diz-se que as 3 resistências estão ligadas em delta, no circuito do lado esquerdo, e em estrela, no circuito do lado direito.





9. Um fio condutor de cobre de 1.29 mm de diâmetro e revestido a borracha pode suportar, com segurança, uma corrente máxima de 6 A. (a) Qual é a diferença de potencial que pode ser aplicada a 40 m deste fio? (admita temperatura ambiente, igual a 20 °C.) (b) Calcule a potência dissipada no fio quando a corrente for 6 A.
10. Um fio de níquel-crômio de 1.8 mm de diâmetro vai ser usado como aquecedor numa caldeira de água que produz 8 g de vapor de água por segundo. A fonte de alimentação fornece voltagem contínua de 220 V. Calcule o comprimento que deve ter o fio. (O calor de evaporação da água é 2257.2 J/g, e use 100 °C para a temperatura de ebulição da água.)
11. Um fio de cobre e um de tungstênio, têm o mesmo diâmetro de 0.1 mm. O fio de cobre tem 32 cm de comprimento e o de tungstênio 10 cm. Calcule a temperatura para a qual a resistência dos dois fios é igual.
12. No circuito da figura, determine a potência dissipada em cada resistência e a potência fornecida pela f.e.m. Verifique que a potência fornecida pela f.e.m. é igual à soma das potências dissipadas em todas as resistências.



## Respostas

**Perguntas: 1. B. 2. C. 3. E. 4. C. 5. A.**

### Problemas

1.  $24.8\text{ }^{\circ}\text{C}$  (ou seja, a temperatura final é  $36.8\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).
2.  $1.2\ \Omega$ .
3. (a)  $1.5\ \Omega$ . (b)  $9\text{ V}$ .
4.  $7.5\text{ A}$  e  $11.25\text{ W}$ .
5. Quando a lâmpada está acesa, a temperatura do filamento de tungstênio é muito mais elevada do que a temperatura ambiente e, portanto, a resistência também é muito mais elevada. A temperatura do filamento é da ordem de  $2812\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
6.  $\varepsilon = 20\text{ V}$ . Nas resistências de  $3\text{ k}\Omega$  e  $6\text{ k}\Omega$ ,  $\Delta V = 4\text{ V}$ ; na resistência de  $8\text{ k}\Omega$ ,  $\Delta V = 16\text{ V}$ .
7. (a)  $R = r$ . (b)  $\varepsilon^2/(4r)$ . (c)  $0.05\ \Omega$ . (d) Reduz-se a diminuição da diferença de potencial quando a corrente aumenta.
8.  $R_1 = 41.48\ \Omega$ ,  $R_2 = 53.93\ \Omega$ ,  $R_3 = 4.81\ \Omega$ .
9. (a)  $3.12\text{ V}$  (b)  $18.7\text{ W}$
10.  $6.6\text{ m}$
11.  $3.0\text{ }^{\circ}\text{C}$
12. Na resistência de  $20\ \Omega$ ,  $55.1\text{ mW}$ . Na resistência de  $100\ \Omega$ ,  $99.2\text{ mW}$ . Na resistência de  $150\ \Omega$ ,  $66.2\text{ mW}$ . Na resistência de  $60\ \Omega$ ,  $54.0\text{ mW}$ . Na resistência de  $80\ \Omega$ ,  $40.5\text{ mW}$ . A f.e.m. fornece  $315\text{ mW}$ .

## 4. Capacidade



Em 1745, o holandês Pieter van Musschenbroek inventou o primeiro **condensador**. Enquanto usava uma garrafa de vidro para isolar uma lâmina metálica no seu interior, descobriu que quando segurava a garrafa na mão, a carga elétrica que conseguia armazenar na lâmina era muito maior do que quando a garrafa estava sobre a mesa. A explicação é que na mão, que é um condutor, são induzidas cargas de sinal contrário que atraem as cargas no metal, permitindo que seja mais fácil introduzir mais cargas do mesmo sinal. Colocando uma segunda lâmina metálica por fora da garrafa, facilita-se a entrada de cargas na garrafa, podendo ser armazenadas cargas muito elevadas. O condensador de van Musschenbroek ficou conhecido como **garrafa de Leiden**, que é a cidade onde trabalhou. Trata-se de uma das invenções mais importantes da história da eletricidade, que permitiu acumular cargas maiores, facilitando a realização de experiências de eletrostática.

## 4.1. Capacidade de um condutor isolado

O potencial num condutor isolado é uniforme em todo o condutor e proporcional à carga total nele. Define-se a **capacidade** do condutor como a razão entre a carga e o potencial na superfície do condutor

$$C = \frac{Q}{V_{\text{sup}}} \quad (4.1)$$

A capacidade não depende da carga nem do potencial, pois os dois aumentam na mesma proporção; a capacidade depende unicamente da forma e tamanho do condutor. O potencial  $V_{\text{sup}}$  é realmente a diferença de potencial entre a superfície do condutor e um ponto no infinito, onde costuma arbitrar-se potencial igual a zero.

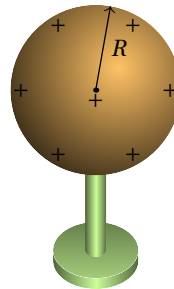
No sistema internacional de unidades, a unidade para medir capacidade elétrica é o farad, em homenagem ao cientista Michael Faraday (1791–1867). O farad, representado pela letra F, é a capacidade de um condutor que, com uma carga de 1 C, tem um potencial de 1 V:

$$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} \quad (4.2)$$

Uma capacidade de 1 F é muito elevada, sendo comum encontrarem-se na prática capacidades da ordem de 1  $\mu\text{F}$ , 1 nF ou 1 pF

## 4.2. Esfera condutora isolada

Numa esfera condutora isolada (figura 4.1), toda a carga se acumula na superfície, de forma uniforme, devido à simetria da esfera. No apêndice B mostra-se como calcular o campo elétrico e o resultado é que, dentro da esfera o campo é nulo e fora dela o campo é idêntico ao campo de uma carga pontual  $Q$  colocada no centro da esfera. O módulo do campo elétrico

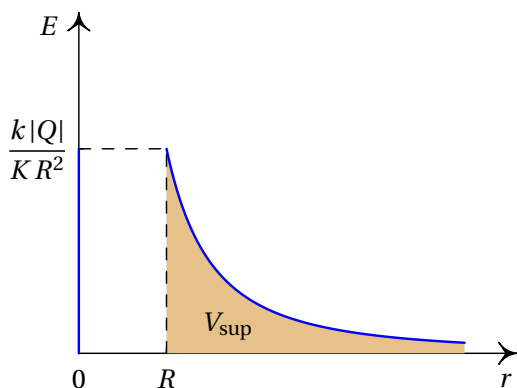


**Figura 4.1.:** Esfera condutora.

num ponto que se encontra a uma distância  $r$  do centro da esfera é:

$$E = \begin{cases} \frac{k|Q|}{K r^2} & , r > R \\ 0 & , r < R \end{cases} \quad (4.3)$$

onde  $k$  é a constante de Coulomb ( $9.00 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$ ) e  $K$  é a constante dielétrica do meio à volta da esfera. A figura 4.2 mostra o gráfico do módulo do campo em função da distância até o centro, no caso em que a carga é positiva.



**Figura 4.2.:** Gráfico do módulo do campo elétrico de uma esfera condutora isolada.

Para calcular  $V_{\text{sup}}$  integra-se a componente tangencial do campo elétrico, desde a superfície da esfera até o infinito, ao longo de qualquer percurso; um percurso que facilita o cálculo é na direção e sentido radial, que é a direção das linhas de campo elétrico:

$$V_{\text{sup}} = \int_R^{\infty} E dr = \frac{kQ}{K} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{kQ}{KR} \quad (4.4)$$

O valor deste integral é também igual à área sombreada na figura 4.2. Usando a expressão obtida para  $V_{\text{sup}}$ , encontra-se a expressão para a capacidade da esfera de raio  $R$ ,

$$C = \frac{Q}{V_{\text{sup}}} = \frac{KR}{k} \quad (4.5)$$

Observe-se que se  $Q$  for negativa,  $|Q|$  deveria ser substituída por  $-Q$  mas o resultado do integral na equação 4.4 é o mesmo porque, nesse caso, o sentido do campo seria oposto ao sentido radial, introduzindo outro sinal negativo. O potencial na superfície, em relação ao infinito, tem sempre o mesmo sinal da carga e, como tal, a capacidade é sempre um número positivo.

Quanto maior for a esfera, maior será a sua capacidade. Já se referiu anteriormente que a capacidade não depende da carga armazenada na esfera, nem do potencial produzido por essa carga. A capacidade depende apenas do tamanho e da forma geométrica do condutor e da constante dielétrica do meio. Neste caso é diretamente proporcional ao raio da esfera e à constante dielétrica do meio.

### 4.3. Condensadores

Na abertura do capítulo mencionou-se a garrafa de Leiden, que foi o primeiro condensador construído na história. Os dois condutores separados por um isolador (neste caso vidro), designam-se de **armaduras**. Quando existem cargas numa das armaduras são induzidas cargas de sinal contrário na outra armadura, o que faz diminuir o potencial de cada armadura em relação ao potencial de referência (a **terra**). A diminuição do potencial do sistema de duas armaduras, comparado com o potencial que teria uma única armadura com a mesma carga, implica uma capacidade muito maior para o condensador em comparação com a capacidade de cada uma das duas armaduras por separado.

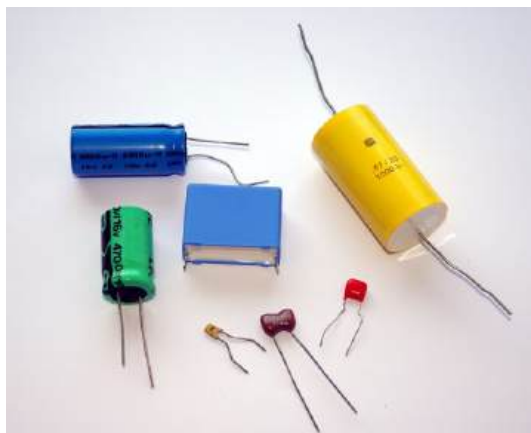
Se uma das armaduras tiver carga  $Q$  a outra tem carga  $-Q$ . Se  $\Delta V$  for a voltagem entre as duas armaduras, define-se a capacidade do condensador,  $C$ , da forma seguinte:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (4.6)$$

Se entre as duas armaduras é colocado um isolador, a constante de coulomb,  $k$ , que entra no cálculo da diferença de potencial  $\Delta V$ , a partir da força, é substituída por  $k/K$ , onde  $K$  é a constante dielétrica do isolador. Como tal, com o isolador a capacidade do condensador aumenta de um fator  $K$ . Assim, na garrafa de Leiden a garrafa de vidro serve de isolador e ajuda a aumentar a capacidade. Como o vidro tem uma constante dielé-

trica de perto de 6, a capacidade com a garrafa de vidro é cerca de 6 vezes a que se obtinha sem vidro entre as armaduras.

Quanto maior a capacidade de um condensador, mais fácil é armazenar cargas nele. Existem vários modelos diferentes de condensadores, com diferentes formas e tamanhos (figura 4.3).



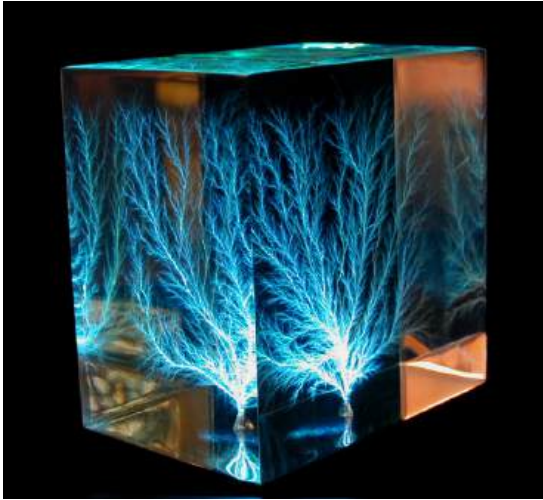
**Figura 4.3.:** Vários tipos diferentes de condensadores.

O isolador entre as armaduras de um condensador também se chama dielétrico. O dielétrico também ajuda a aumentar a diferença de potencial máxima que pode existir entre as armaduras. Cada material isolador tem um valor da **rigidez dielétrica** ( $E_{\text{máx}}$ ) que é o campo elétrico máximo que suporta o dielétrico sem se produzir rutura. A rutura de um dielétrico ocorre quando as suas moléculas ou átomos são deformadas a tal ponto, que algumas delas são ionizadas, formando-se fendas onde o material está queimado e passa a ser condutor por causa dos iões depositados nessa fendas. A figura 4.4 mostra um bloco de acrílico que foi colocado entre duas armaduras com uma voltagem elevada, ultrapassando a rigidez dielétrica do acrílico, produzindo a sua rutura. As fendas onde o dielétrico foi queimado criam as chamadas figuras de Lichtenberg

A diferença de potencial máxima que suporta um condensador com dielétrico de espessura  $d$  sem se queimar é então,

$$\Delta V_{\text{máx}} = E_{\text{máx}} d \quad (4.7)$$

onde  $E_{\text{máx}}$  é a rigidez do dielétrico. Diferentes modelos de condensadores (figura 4.3) têm diferentes capacidades e diferenças de potencial máxi-



**Figura 4.4.:** Bloco de acrílico após a rutura do dielétrico.

mas, conforme o tamanho e o dielétrico utilizado. Em algumas aplicações também é importante que o tempo de resposta do dielétrico seja rápido, já que as cargas não são induzidas nas moléculas do dielétrico de forma instantânea. A tabela 4.1 mostra a constante dielétrica e a rigidez dielétrica de vários materiais isoladores.

**Tabela 4.1.:** Constante e rigidez de alguns dielétricos.

Material	Constante dielétrica, $K$	Rigidez, $E_{\text{máx}}$ (kV/mm)
Água (20 °C)	80	—
Ar seco	1.00059	3
Óleo	2.24	12
Papel	3.7	16
Acrílico	3.4	40
Vidro pirex	5.6	14
Porcelana	7	5.7
Poliéster	2.55	24
Parafina	2.1–2.5	10

A rigidez dielétrica do ar seco é 3 kV/mm. Quando a diferença de potencial entre dois objetos no ar ultrapassa 3000 V por milímetro de afastamento, dá-



se uma descarga elétrica abrupta dos objetos. As forças elétricas elevadas ionizam as moléculas do ar, e a descarga é a passagem de íões positivos e negativos do ar entre os dois objetos.

As nuvens e a terra, que são condutores, atuam como as armaduras de um condensador, sendo o ar o dielétrico. Durante uma trovoada, a humidade do ar faz diminuir a rigidez dielétrica do ar e a diferença de potencial máxima entre as nuvens e a terra diminui, existindo a possibilidade de surgirem descargas elétricas (figura 4.5). Quanto mais perto das nuvens estiverem os objetos apoiados no chão, maior será a probabilidade de serem atingidos por um raio, porque  $\Delta V_{\text{máx}} = E_{\text{máx}} d$  é então menor.



**Figura 4.5.:** Numa trovoada, a humidade do ar facilita as descargas elétricas.

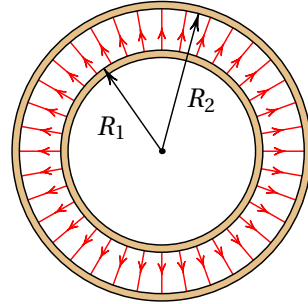
### 4.3.1. Condensador esférico

A figura 4.6 mostra um condensador esférico, formado por duas armaduras esféricas concêntricas, de raios  $R_1$  e  $R_2$ , separadas por um isolador de

constante dielétrica  $K$  que ocupa o espaço entre as duas esferas. A esfera menor está ligada a um fio que passa para fora da esfera maior, sem tocá-la, de forma a poder-se armazenar uma carga  $Q$  numa das esferas e  $-Q$  na outra.

O campo produzido pelas duas esferas condutoras é dado pela expressão obtida no apêndice B, substituindo  $Q_1$  por  $Q$  e  $Q_2$  por  $-Q$  na equação B.14. Como a soma das duas cargas é zero, o campo fora das duas esferas é nulo. O campo elétrico está confinado à região entre as duas esferas, onde existe o dielétrico que as separa. A expressão do campo (admitindo que  $Q$  é positiva) é,

$$E = \begin{cases} \frac{kQ}{K r^2} & , R_1 < r < R_2 \\ 0 & , r < R_1 \text{ ou } r > R_2 \end{cases} \quad (4.8)$$



**Figura 4.6.:** Condensador esférico.

E a diferença de potencial entre as esferas é o integral do campo, no sentido radial, entre as duas esferas:

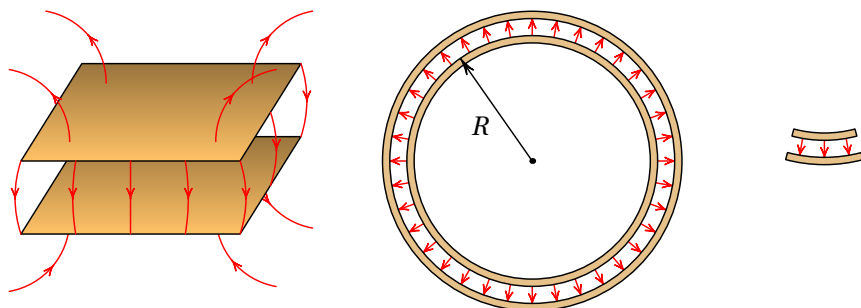
$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} \frac{kQ}{K r^2} dr = \frac{kQ}{K} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4.9)$$

Dividindo a carga,  $Q$ , pela diferença de potencial,  $\Delta V$ , obtém-se a expressão para a capacidade do condensador esférico:

$$C_{\text{esf}} = \frac{K R_1 R_2}{k (R_2 - R_1)} \quad (4.10)$$

### 4.3.2. Condensador plano

Um condensador plano é formado por duas armaduras planas, de área  $A$ , paralelas e separadas por uma distância constante  $d$ , como no lado esquerdo da figura 4.7. Se as armaduras estão suficientemente próximas uma boa aproximação consiste em considerar o condensador plano como uma pequena parte num condensador esférico, com um raio muito grande,



**Figura 4.7.:** Condensador plano, condensador esférico muito grande e uma pequena região que aproxima o condensador plano.

aproximando-se de infinito, e as duas esferas aproximadamente com o mesmo raio, como mostra a figura 4.7.

A carga e a área no condensador esférico muito grande aproximam-se de infinito, mas a relação entre elas, carga superficial, permanece finita. A equação 4.8 para o campo dentro do condensador esférico deve ser escrita em função da carga superficial,  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ , e com  $r$  igual a  $R$  para obter o campo na vizinhança da esfera; o campo dentro do condensador plano e então, aproximadamente:

$$E = \frac{4\pi k\sigma}{K} \quad (4.11)$$

E a diferença de potencial entre as armaduras é igual a

$$\Delta V = \int_0^d \frac{4\pi k\sigma}{K} ds = \frac{4\pi k\sigma d}{K} = \frac{4\pi kQd}{KA} \quad (4.12)$$

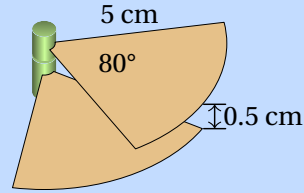
onde  $d$  é a distância entre as armaduras,  $Q$  a carga na armadura positiva e  $A$  a área das armaduras. A partir da equação 4.6 obtém-se a expressão para a capacidade do condensador plano:

$$C_{\text{plano}} = \frac{KA}{4\pi kd} \quad (4.13)$$

A capacidade de um condensador plano é diretamente proporcional à constante dielétrica e à área das armaduras e inversamente proporcional à distância entre elas.

**Exemplo 4.1**

Um condensador variável é constituído por duas placas planas paralelas com forma de setor circular de ângulo  $80^\circ$  e raio 5 cm, que podem rodar à volta de um eixo comum, como mostra a figura. Se a distância entre as placas é 0.5 cm, calcule a capacidade máxima e a capacidade quando uma das placas roda  $30^\circ$  a partir da posição onde a capacidade é máxima.



**Resolução.** A capacidade máxima obtém-se quando as duas placas estão completamente sobrepostas uma acima da outra, de forma que a carga se distribui ao longo de toda a superfície das placas. O ângulo de  $80^\circ$  equivale a uma fração  $80/360$  do círculo completo; portanto, a área das armaduras é:

$$A = \frac{80\pi 5^2}{360} = \frac{50\pi}{9} \text{ cm}^2$$

A capacidade é dada pela expressão 4.13, com a constante dielétrica do ar,  $K = 1$ :

$$C_{\text{máx}} = \frac{0.005\pi}{4\pi \times 9 \times 10^9 \times 9 \times 0.005} = 3.1 \text{ pF}$$

Quando uma das placas roda  $30^\circ$ , a área na qual a carga se distribui, corresponde apenas à área da parte das placas que se encontra sobreposta, ou seja, um setor circular de ângulo  $50^\circ$ . A área é então  $5/8$  da área total das armaduras e a capacidade, sendo diretamente proporcional à área, é  $5/8$  da capacidade máxima:

$$C = \frac{5}{8} C_{\text{máx}} = 1.9 \text{ pF} \quad (4.14)$$

**4.3.3. Ultracondensadores**

Um condensador pode cumprir uma função semelhante à de uma bateria, já que pode ser usado para armazenar cargas que são fornecidas a um circuito. A grande vantagem é que, como não há reações químicas envolvidas, a carga e descarga podem ser feitas muito rapidamente e o condensador

não fica inutilizado após várias cargas e descargas, que é o que acontece a uma bateria recarregável. Imagine por exemplo que em vez de ter que esperar algumas horas para recarregar a bateria do telemóvel, esta ficasse imediatamente recarregada quando fosse ligada à tomada, e que nunca tivesse que trocá-la por uma nova. Isso está cada vez mais perto de ser uma realidade, com o desenvolvimento dos ultracondensadores.

A dificuldade em usar um condensador normal como fonte é que à medida que o condensador descarrega, a diferença de potencial entre as suas armaduras decresce rapidamente. Uma desvantagem ainda maior é que a capacidade de armazenar carga não é tão elevada como nas baterias. Considere-se por exemplo a pilha recarregável no 4 do capítulo 2. O valor da f.e.m. é 1.2 V e a carga máxima armazenada é de 2300 mA·h = 8.28 kC. De acordo com a equação 4.6, seria necessário um condensador de 6.9 kF para armazenar essa carga, com essa diferença de potencial.

Uma capacidade tão elevada era algo impensável, até finais do século passado. Um condensador tradicional, do tamanho dessa pilha, teria uma capacidade da ordem dos  $\mu\text{F}$ . Os condensadores eletrolíticos atinge capacidades superiores, mas ainda aquém dos quilo-farad. Recentemente têm sido produzidos **ultracondensadores**, com capacidades muito mais elevadas, na ordem dos quilo-farad (figura 4.8).



**Figura 4.8.:** Alguns ultracondensadores.

Por exemplo, o ultracondensador cilíndrico situado à frente na figura 4.8, tem uma capacidade de 3000 farads a 2.7 volts. Com esses valores, a carga que se consegue armazenar é de 8.1 kC já muito próximo da carga de uma pilha recarregável. A capacidade elevada também implica que demora muito mais a descarregar quando é ligado a um circuito. Ainda falta reduzir

um pouco o tamanho para que seja competitivo com as atuais baterias de íões de lítio.

Nos ultracondensadores usa-se um meio poroso para substituir uma das armaduras. A área de contacto entre eléctrodos e eletrólito é muito elevada. Os ultracondensadores são já utilizados em combinação com os motores eléctricos dos automóveis que funcionam a hidrogénio com células de combustível (figura 4.9) e que já estão a ser comercializados em alguns países.



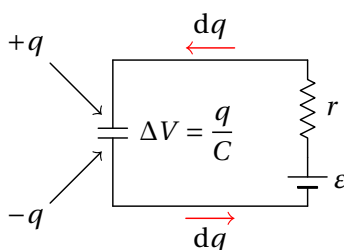
**Figura 4.9.:** Autocarro experimental a hidrogénio da STCP no Porto.

O ultracondensador permite acumular rapidamente as cargas produzidas pelas células de combustível ou pelos travões eletromagnéticos, e essa carga pode ser fornecida rapidamente, nos momentos em que é necessário acelerar. As únicas reações químicas produzidas nesse tipo de veículo é a combinação do hidrogénio com o oxigénio nas células de combustível, que produz vapor de água. Não são libertados gases nocivos para a atmosfera, nem existem baterias a produzir produtos químicos corrosivos.

Os ultracondensadores podem fornecer carga e serem recarregados muito mais rapidamente do que uma bateria e sem sofrer o desgaste que faz com que a bateria tenha um número limitado de ciclos de carga e descarga.

## 4.4. Energia elétrica armazenada num condensador

Para carregar um condensador, é necessário carregar uma das armaduras com carga  $Q$  e a outra com carga  $-Q$ . O processo implica uma transferência de carga  $Q$  de uma armadura para a outra. Essa passagem pode ser feita por ligação de dois cabos nas armaduras e nos terminais de uma bateria (figura 4.10).



**Figura 4.10.:** Passagem da carga de uma armadura para a outra num condensador.

Para determinar a energia fornecida pela bateria nesse processo, imaginemos que a carga total  $Q$  foi transferida em pequenas cargas infinitesimais  $dq$  desde uma das armaduras até a outra, como indica a figura 4.10. Cada vez que uma carga  $dq$  passa da armadura negativa para a positiva, ganha uma energia potencial elétrica

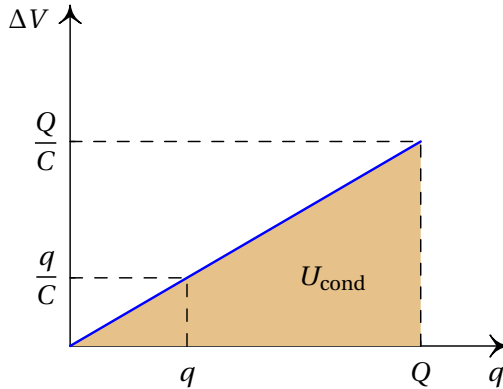
$$dU_e = \Delta V dq = \frac{q}{C} dq \quad (4.15)$$

A energia total armazenada no condensador obtém-se por integração, desde  $q = 0$ , até  $q = Q$  (área sob a reta no gráfico de  $\Delta V$  em função de  $q$ , na figura 4.11). O resultado é:

$$U_{\text{cond}} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (4.16)$$

Usando a equação 4.6, que relaciona a carga e a diferença de potencial em qualquer condensador, a equação anterior pode ser escrita em outras duas formas alternativas:

$$U_{\text{cond}} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \quad (4.17)$$



**Figura 4.11.:** Aumento da voltagem num condensador, em função da carga armazenada.

A carga não é transferida para as armaduras de forma instantânea. Quando se liga um condensador a uma fonte, a carga aumenta gradualmente até uma carga final. O processo de aumento da carga com o tempo denomina-se resposta transitória do condensador; se a resistência entre a fonte e as armaduras do condensador não for muito elevada, a resposta transitória é extremamente rápida e pode-se admitir que a carga no condensador já tem o seu valor final estável. No capítulo sobre processamento de sinais mostra-se como determinar a resposta transitória.

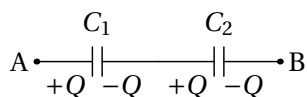
## 4.5. Associações de condensadores

Um sistema de condensadores pode ser substituído por um único condensador equivalente. Nos casos em que os condensadores são ligados em série ou em paralelo, é fácil calcular a capacidade do condensador equivalente.

A figura 4.12 mostra dois condensadores ligados em série, entre os pontos A e B. Se os condensadores estiverem inicialmente descarregados, ao introduzir uma diferença de potencial entre os pontos A e B, circula uma carga  $Q$  que entra pelo ponto a maior potencial (A na figura) e sai pelo ponto a menor potencial. Na região central, que liga as duas armaduras comuns aos dois condensadores, são induzidas cargas  $Q$  e  $-Q$  (a carga total nessa região é nula). Assim, a carga armazenada em cada um dos condensadores



é idêntica.



**Figura 4.12.:** Condensadores em série.

A diferença de potencial entre os pontos A e B é a soma das diferenças de potencial em cada um dos condensadores:

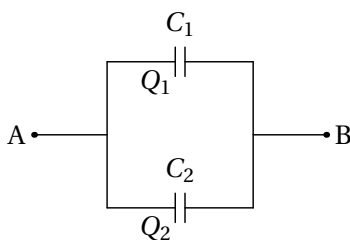
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) Q \quad (4.18)$$

O sistema é então equivalente a um único condensador cuja capacidade satisfaz a equação:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{ou:} \quad \boxed{C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}} \quad (4.19)$$

O valor da carga armazenada no condensador equivalente é o mesmo que em cada um dos condensadores em série.

A figura 4.13 mostra um sistema de dois condensadores ligados em paralelo entre dois pontos A e B. A diferença de potencial é sempre igual nos dois condensadores, e igual à diferença de potencial entre os pontos A e B.



**Figura 4.13.:** Condensadores em paralelo.

Se os condensadores estiverem inicialmente descarregados, no momento em que é introduzida uma diferença de potencial entre os pontos A e B, entra carga positiva nas armaduras que estiverem ligadas ao ponto com maior potencial, e sai a mesma quantidade de carga das armaduras ligadas ao ponto com menor potencial. Mas a quantidade de carga que entra em

cada condensador não tem que ser a mesma; a carga total que entra e sai entre os pontos A e B é:

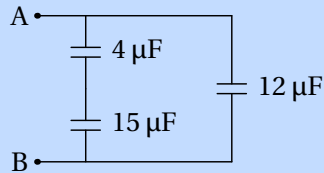
$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \Delta V \quad (4.20)$$

Ou seja, o sistema é equivalente a um único condensador com capacidade igual à soma das capacidades dos dois condensadores:

$$C_p = C_1 + C_2 \quad (4.21)$$

### Exemplo 4.2

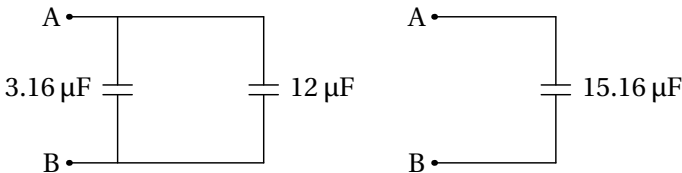
Considere o circuito representado na figura e calcule: (a) A capacidade equivalente entre A e B. (b) A carga armazenada em cada condensador quando a voltagem entre A e B for  $\Delta V = 200$  V. (c) A energia total armazenada no circuito quando  $\Delta V = 200$  V.



**Resolução.** Os condensadores de  $4 \mu\text{F}$  e  $15 \mu\text{F}$  encontram-se em série e, portanto, podem ser substituídos por um só condensador de capacidade:

$$C_{\text{eq}} = \frac{4 \times 15}{4 + 15} \mu\text{F} = 3.16 \mu\text{F}$$

este condensador está ligado em paralelo com o condensador de  $12 \mu\text{F}$ , pelo que a capacidade total é  $15.16 \mu\text{F}$ .



Nos dois condensadores de  $12 \mu\text{F}$  e  $3.16 \mu\text{F}$  a voltagem é a mesma e é igual a  $200$  V; assim sendo, as cargas nesses condensadores são:

$$Q_{12} = 200 \times 12 \times 10^{-6} = 2.4 \text{ mC}$$

$$Q_{3.16} = 200 \times 3.16 \times 10^{-6} = 632 \mu\text{C}$$

As cargas nos condensadores de  $4 \mu\text{F}$  e  $15 \mu\text{F}$  são iguais porque eles estão ligados em série:

$$Q_4 = Q_{15} = 632 \mu\text{C}$$

A energia total armazenada pode ser calculada somando as energias armazenadas em cada um dos condensadores; a resposta deve ser a mesma em qualquer dos circuitos equivalentes. Usando o circuito mais simples, com um só condensador de  $15.16 \mu\text{F}$ , obtém-se:

$$U_t = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} 15.16 \times 10^{-6} \times 200^2 = 0.303 \text{ J}$$

## Perguntas

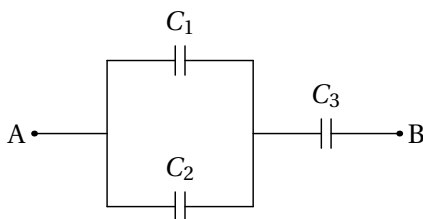
1. A capacidade elétrica de um condutor isolado:
  - A. Diminui se o condutor tiver um dielétrico à sua volta.
  - B. Não depende do seu tamanho.
  - C. Mede-se em unidades de J/C.
  - D. É igual ao trabalho necessário para deslocar uma carga desde o infinito até o condutor.
  - E. É independente da carga acumulada no condutor.
2. Qual deve ser a capacidade de um condensador para que, quando a sua voltagem for de  $9.0 \text{ V}$ , a carga na armadura com carga negativa seja equivalente a  $10^{10}$  elétrons?
  - A.  $14 \text{ nF}$
  - B.  $178 \text{ nF}$
  - C.  $178 \text{ pF}$
  - D.  $14 \text{ pF}$
  - E.  $5.6 \text{ pF}$

3. Qual é a capacidade de um condensador de placas paralelas circulares, com 5 cm de raio, separadas de 1 cm?
- A. 6.9 pF  
B. 22.0 pF  
C. 2.2 pF  
D. 0.22 nF  
E. 0.69 nF
4. Aumentando a carga de um condensador de placas paralelas de  $3 \mu\text{C}$  para  $9 \mu\text{C}$  e aumentando a separação entre as placas de 1 mm para 3 mm, a energia armazenada no condensador varia de um fator
- A. 9  
B. 3  
C. 8  
D. 27  
E. 1/3
5. Num sistema de dois condensadores ligados em paralelo, qual das seguintes afirmações é verdadeira?
- A. A capacidade equivalente é menor que as capacidades dos dois condensadores.  
B. A carga armazenada nos dois condensadores é a mesma.  
C. A carga armazenada será maior no condensador com maior capacidade.  
D. A diferença de potencial será maior no condensador com maior capacidade.  
E. A diferença de potencial será maior no condensador com menor capacidade.

## Problemas

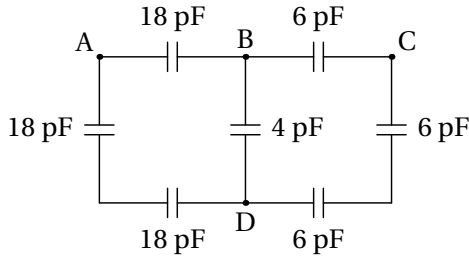
1. Um flash fotográfico típico fornece 2 kW durante aproximadamente 2 ms. Essa energia é obtida descarregando um condensador de  $50 \mu\text{F}$ .
- (a) Até que diferença de potencial deverá ser carregado o condensador?  
(b) Se o condensador fosse substituído por outro de  $250 \mu\text{F}$ , até que diferença de potencial deveria ser carregado? (c) Qual seria a desvantagem em usar o condensador com maior capacidade?

2. (a) Determine a capacidade de uma esfera condutora isolada, com raio de 4.0 cm e rodeada por ar. (b) A esfera da alínea anterior é coberta com uma camada de vidro de 1 mm de espessura e constante dielétrica de 5.6, deixando um orifício para ligar um cabo à esfera, e a camada de vidro é coberta com uma segunda lâmina metálica esférica de raio 4.1 cm, formando-se assim um condensador esférico. Determine a capacidade desse condensador. (c) Qual a relação entre a capacidade do condensador e a da esfera?
3. No sistema de três condensadores apresentado na figura,  $C_1 = 1.2 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4.3 \mu\text{F}$  e  $C_3 = 2.5 \mu\text{F}$ . A voltagem entre os pontos A e B é de 9.0 V. (a) Determine a carga armazenada em cada condensador. (b) Determine a energia total armazenada no sistema.

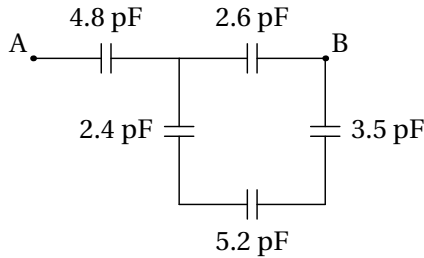


4. Um condensador plano com  $12 \text{ cm}^2$  de área e distanciadas de 1 cm, está totalmente preenchido por dois dielétricos, cada um com espessura igual a 0.5 cm e área igual à das placas. Calcule a capacidade do condensador sabendo que as constantes dos dielétricos são 4.9 e 5.6 (sugestão: admita que o condensador é equivalente a dois condensadores em série, cada um com um dielétrico diferente).
5. Considere um condensador plano, de área  $0.3 \text{ m}^2$  e distanciadas 0.5 cm. Entre as placas encontra-se uma chapa de acrílico com a mesma área e espessura igual a 0.5 cm. O condensador é carregado até a diferença de potencial ser igual a 12 V e, de seguida, é desligado da fonte usada para o carregar. (a) Qual é o trabalho necessário para retirar a chapa de acrílico de entre as placas do condensador? (b) Calcule o potencial de rutura com dielétrico e depois de este ser removido.
6. Dois condensadores de  $10 \mu\text{F}$  e  $20 \mu\text{F}$  ligam-se em série a uma fonte de 1200 V até estarem completamente carregados. (a) Calcule a carga em cada condensador. (b) A fonte é então desligada, ligando-se entre si os dois condensadores (armadura positiva com positiva e negativa com negativa). Calcule a voltagem e a carga final em cada condensador.

7. No circuito da figura, calcule a capacidade equivalente: (a) Entre os pontos B e D. (b) Entre os pontos A e B.



8. Os condensadores no circuito da figura encontram-se inicialmente descarregados. Calcule a carga armazenada no condensador de 2.4 pF quando a voltagem entre os pontos A e B é 5 V.



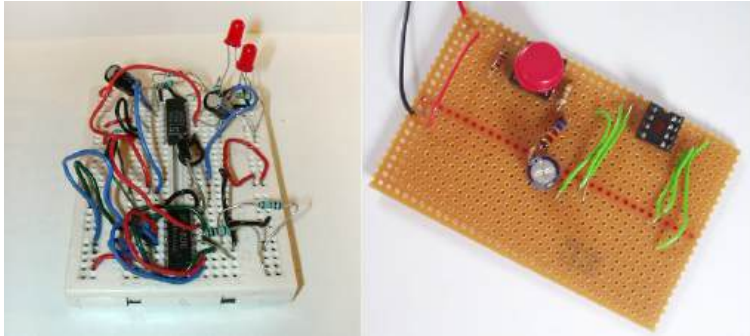
## Respostas

**Perguntas:** 1. E. 2. C. 3. A. 4. D. 5. C.

### Problemas

- (a) 400 V. (b) 179 V. (c) O condensador de maior capacidade ocupa um volume maior.
- (a) 4.44 pF (b) 1.02 nF (c) 229.6
- (a)  $Q_1 = 3.38 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = 12.1 \mu\text{C}$  e  $Q_3 = 15.5 \mu\text{C}$ . (b) 69.6  $\mu\text{J}$
- 5.55 pF
- (a)  $3.12 \times 10^{-7}$  J. (b) Sem dielétrico, 15 kV; com dielétrico 200 kV.
- (a) 8 mC. (b)  $\Delta V = 1600/3$  V,  $Q_1 = 16/3$  mC,  $Q_2 = 32/3$  mC.
- (a) 12 pF. (b) 21.6 pF.
- 3.15 pC.

## 5. Circuitos de corrente contínua

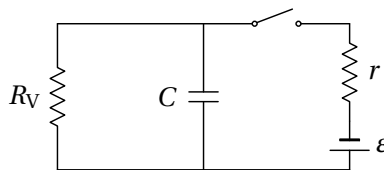


Os elementos de circuitos são produzidos com terminais de tamanho padrão para facilitar a sua montagem. Uma forma de montar circuitos, sem ser preciso soldar (figura à esquerda), é com uma placa de teste (*breadboard*). Para construir circuitos mais duradouros, pode-se usar uma placa de circuito (*stripboard*), que é uma placa de um material isolador com furos e com pistas paralelas de cobre num dos lados (figura à direita); o contacto entre diferentes componentes consegue-se inserindo os terminais em furos que estejam na mesma pista, tal como na placa de teste, mas soldando os terminais sobre o cobre. Também se podem construir circuitos mais compactos, utilizando placas de circuito impresso (PCB). Uma PCB é semelhante a uma placa de circuito, mas as pistas de cobre e os furos são desenhados por medida para cada circuito específico.

## 5.1. Diagramas de circuito

Um circuito de corrente contínua, ou circuito C.C. (em inglês, *Direct Current*, D.C.), é um circuito em que todas as fontes de tensão têm força eletromotriz constante e todas as resistências são constantes. Se no circuito forem ligados condensadores, a corrente poderá variar em função do tempo (resposta transitória do circuito), mas passado algum tempo a carga e tensão nos condensadores atingem valores constantes.

Neste capítulo explica-se como calcular os valores iniciais e finais de correntes e cargas e no capítulo sobre processamento de sinais estuda-se a análise da resposta transitória dos circuitos de corrente contínua. Para analisar circuitos é conveniente usar os diagramas simplificados. Um exemplo de diagrama de circuito é a montagem usada para carregar um condensador e a seguir observar como diminui a diferença de potencial quando o condensador é descarregado através de um voltímetro. O diagrama do circuito é apresentado na figura 5.1. A pilha liga-se ao condensador durante algum tempo, até este ficar carregado e é logo desligada. A ação de ligar e desligar a pilha é representada no diagrama de circuito pelo interruptor, que estará fechado enquanto o condensador é carregado.



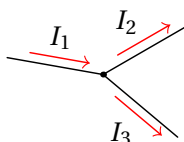
**Figura 5.1.:** Carga e descarga de um condensador.

O voltímetro é representado no diagrama por meio da sua resistência interna  $R_V$ . Geralmente, admite-se que o voltímetro não interfere com o circuito, sendo representado apenas pelas setas com sinais positivo e negativo, que indicam os pontos onde são ligados os terminais positivo e negativo do voltímetro. Neste caso a resistência do voltímetro é importante e, por isso, foi desenhada. Um voltímetro ideal teria uma resistência infinita, que não permitiria que o condensador descarregasse, permanecendo a sua diferença de potencial constante. Num voltímetro real, a carga no condensador produz uma corrente através do voltímetro, que faz diminuir a carga e, conseqüentemente, a diferença de potencial.



## 5.2. Leis dos circuitos

A análise de um circuito consiste em calcular a corrente ou diferença de potencial em cada resistência e a carga ou diferença de potencial em cada condensador. Com essas grandezas pode-se também determinar a potência que está a ser dissipada nas resistências e a energia armazenada nos condensadores. Para analisar os circuitos é conveniente usar duas regras gerais chamadas **leis de Kirchhoff**.



**Figura 5.2.:** Lei das correntes.

A primeira lei, a **lei dos nós** ou lei das correntes, estabelece que em qualquer ponto de um circuito onde há separação da corrente (nó), é igual a soma das correntes que entram no ponto e a soma das correntes que dele saem. Por exemplo, no nó representado na figura 5.2, há uma corrente  $I_1$  a entrar no nó, e duas correntes  $I_2$  e  $I_3$  a sair. A lei das correntes implica:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (5.1)$$

Esta lei é válida sempre que as correntes são estacionárias; nomeadamente, quando a densidade da nuvem de cargas de condução permanece constante dentro do condutor, sem que haja acumulação de cargas em nenhum ponto; nesse caso, toda a carga que entra por um condutor, por unidade de tempo, deverá sair por outros condutores.

A segunda lei designada **lei das malhas**, ou lei das tensões, estabelece que a soma das diferenças de potencial, em qualquer percurso fechado (malha) num circuito, é sempre nula.

Por exemplo, o circuito na figura 5.3 tem três malhas: ABCDEA, BFGDCB e ABFGDEA. A lei das malhas associa uma equação a cada malha. A equação da malha ABCDEA é:

$$V_{B/A} + V_{C/B} + V_{D/C} + V_{E/D} + V_{A/E} = 0 \quad (5.2)$$

Na equação anterior,  $V_{B/A}$  denota o potencial em B, em relação ao potencial em A, ou seja, a voltagem  $V_B - V_A$ . A equação anterior corrobora-se facilmente tendo em conta essa notação.

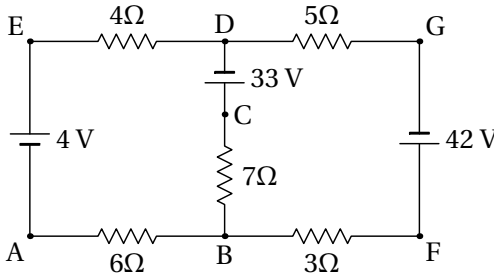


Figura 5.3.: Circuito com duas malhas.

### 5.3. Método das malhas

Nos circuitos com várias resistências estudados no capítulo 3 foi sempre possível substituir as resistências por uma resistência equivalente e calcular a corrente fornecida pela fonte bem como todas as correntes nas resistências.

Nos casos em que há várias fontes ou quando não é possível associar resistências (ou condensadores) em série e em paralelo até obter uma única resistência (ou condensador) equivalente, é útil usar o **método das malhas**. Por exemplo, no circuito da figura 5.4 nenhuma das resistências está em série ou em paralelo com qualquer outra. Como tal, não é possível usar o método do capítulo 3.

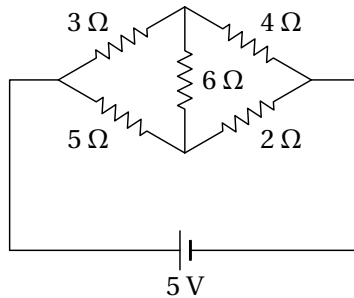
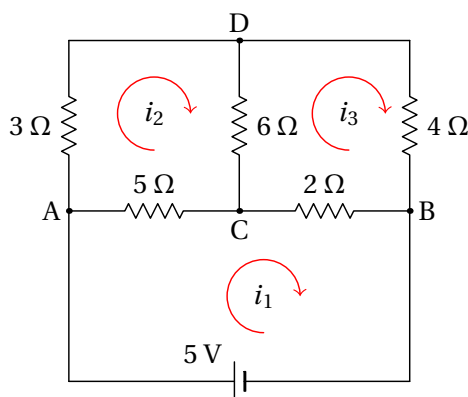


Figura 5.4.: Circuito com resistências que não estão nem em série nem em paralelo.

Usaremos o circuito da figura 5.4 para mostrar o fundamento do método das malhas. Na resolução de problemas não é necessário fazer uma análise como a que segue, pois basta aplicar as regras enunciadas no fim

da secção, para obter a matriz do circuito.

Como se mostra na figura 5.5, começa-se por identificar as 3 malhas do circuito e a cada malha atribui-se uma das 3 **correntes de malha**  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ . Note-se que na figura 5.5, as malhas estão desenhadas com forma retangular, mas são equivalentes à malhas do circuito na figura 5.4. É conveniente escolher o mesmo sentido de rotação para todas as correntes de malha; no caso da figura 5.5, escolheu-se o sentido horário.



**Figura 5.5.:** Correntes de malha no circuito da figura 5.4.

Nos dispositivos que pertencem apenas a uma malha, a corrente é igual à corrente dessa malha. Por exemplo, na figura 5.5, a corrente na resistência de  $3\ \Omega$  é igual a  $i_2$ . Nos dispositivos situados entre duas malhas vizinhas, a corrente é a soma algébrica das correntes nessas duas malhas. Por exemplo, a corrente que na resistência de  $5\ \Omega$  é  $i_1 - i_2$ , do ponto A para o C (ou, de forma equivalente,  $i_2 - i_1$  de C para o A).

Com este método a regra dos nós é garantida em cada nó, e basta aplicar a regra das malhas a cada uma das três malhas para obter 3 equações com as 3 correntes de malha. As diferenças de potencial entre os vários pontos do circuito da figura 5.5, em função das correntes de malha, são as seguintes (unidades SI):

$$\begin{aligned} \Delta V_{C/A} &= -5(i_1 - i_2) & \Delta V_{B/C} &= -2(i_1 - i_3) & \Delta V_{BA} &= 5 \\ \Delta V_{D/A} &= -3 i_2 & \Delta V_{C/D} &= -6(i_2 - i_3) & \Delta V_{B/D} &= -4 i_3 \end{aligned} \quad (5.3)$$

substituindo esses valores, as três equações das malhas são:

$$\Delta V_{C/A} + \Delta V_{B/C} + \Delta V_{A/B} = -5 i_1 + 5 i_2 - 2 i_1 + 2 i_3 + 5 = 0 \quad (5.4)$$

$$\Delta V_{D/A} + \Delta V_{C/D} + \Delta V_{A/C} = -3 i_2 - 6 i_2 + 6 i_3 + 5 i_1 - 5 i_2 = 0 \quad (5.5)$$

$$\Delta V_{B/D} + \Delta V_{C/B} + \Delta V_{D/C} = -4 i_3 + 2 i_1 - 2 i_3 + 6 i_2 - 6 i_3 = 0 \quad (5.6)$$

Agrupando os termos que dependem de cada uma das correntes, pode-se escrever o sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

O sistema matricial 5.7 foi obtido calculando primeiro as diferenças de potencial nas secções do circuito e aplicando a regra das malhas. No entanto, é possível escrever esse sistema imediatamente olhando para o circuito (figura 5.5) e usando as seguintes regras:

- Cada linha da matriz do circuito corresponde a uma das malhas.
- Na linha  $n$ , o número na coluna  $n$  será positivo e igual à soma de todas as resistências que houver na malha  $n$ .
- O número na linha  $n$  e coluna  $m$  (com  $n$  diferente de  $m$ ) será negativo e com valor absoluto igual à soma de todas as resistências que existirem no segmento de circuito que demarca a fronteira entre as malhas  $n$  e  $m$ .
- Cada linha  $n$  na matriz com uma coluna no lado direito da equação 5.7 é igual à soma algébrica de todas as f.e.m. que houver na malha  $n$ . Nessa soma algébrica, são consideradas positivas todas as fontes em que o sentido arbitrado para a corrente passe do elétrodo negativo para o positivo (aumento de potencial) e negativas todas as fontes em que o sentido arbitrado para a corrente passe do elétrodo positivo para o negativo (diminuição de potencial).

A matriz do circuito é sempre simétrica, com os elementos na diagonal positivos e todos os restantes elementos negativos. No exemplo 5.1 as regras acima enunciadas são usadas para escrever diretamente o sistema matricial de equações do circuito.

As 3 correntes de malha são a solução do sistema 5.7, que pode ser obtida por qualquer dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares,

por exemplo, a regra de Cramer:

$$i_1 = \begin{vmatrix} 5 & -5 & -2 \\ 0 & 14 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 1.473 \text{ A} \quad (5.8)$$

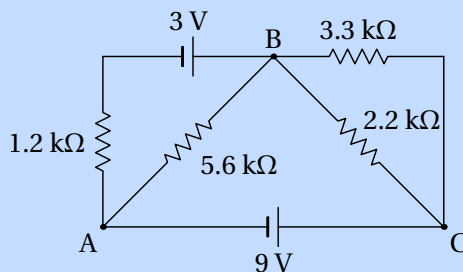
$$i_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & -2 \\ -5 & 0 & -6 \\ -2 & 0 & 12 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 0.804 \text{ A} \quad (5.9)$$

$$i_3 = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 5 \\ -5 & 14 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 7 & -5 & -2 \\ -5 & 14 & -6 \\ -2 & -6 & 12 \end{vmatrix} = 0.647 \text{ A} \quad (5.10)$$

Neste caso, todas as correntes obtidas são positivas, o que indica que o sentido das correntes de malha coincide com os sentidos arbitrados na figura 5.5. A corrente que passa pela fonte é então  $I_{\text{fem}} = 1.473 \text{ mA}$ ; a corrente na resistência de  $3 \Omega$  é  $I_3 = 0.804 \text{ mA}$  e a corrente na resistência de  $4 \Omega$  é  $I_4 = 0.647 \text{ mA}$  (ver figura 5.5). Na resistência de  $5 \Omega$ , entre as malhas 1 e 2, a corrente é  $I_5 = i_1 - i_2 = 0.669 \text{ mA}$ , para a direita, que é o sentido de  $i_1$ , porque  $i_1$  é maior que  $i_2$ . Na resistência de  $2 \Omega$  a corrente é  $I_2 = 0.826 \text{ mA}$ , para a direita, e na resistência de  $6 \Omega$  a corrente é  $I_6 = 0.157 \text{ mA}$ , para baixo porque  $i_2 > i_3$ .

### Exemplo 5.1

No circuito representado no diagrama, calcule: (a) A intensidade e sentido da corrente na resistência de  $5.6 \text{ k}\Omega$ . (b) A diferença de potencial na resistência de  $3.3 \text{ k}\Omega$ . (c) A potência fornecida ou dissipada por cada uma das fontes.

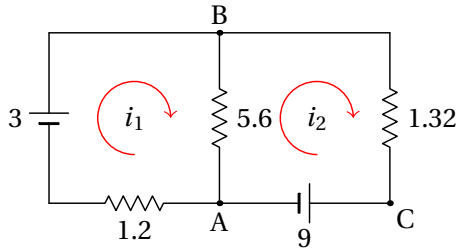


**Resolução.** Começa-se por escolher um sistema consistente de unidades, para poder trabalhar com números, sem ter que escrever unidades em

cada equação. Expressando os valores das resistências em  $k\Omega$  e a diferença de potencial em V, os valores das correntes aparecem em mA.

O circuito tem 3 malhas; no entanto, pode-se reduzir o número de malhas para 2, pois as resistências de  $2.2\ k\Omega$  e  $3.3\ k\Omega$  estão em paralelo e podem ser substituídas por uma única resistência:  $2.2 \parallel 3.3 = (2.2 \times 3.3) / (2.2 + 3.3) = 1.32$ .

O circuito equivalente obtido, com duas correntes de malha, é:



**Figura 5.6.:** Circuito equivalente para o exemplo 5.1.

O sistema matricial correspondente a esse circuito é:

$$\begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Usando o *Maxima*, a solução do sistema é:

```
(%i1) float (solve ([6.8*i1 - 5.6*i2 = 3, -5.6*i1 + 6.92*i2 = -9]));
(%o1)  [[i2 = -2.829, i1 = -1.888]]
```

e os sinais negativos das duas correntes indicam que são no sentido oposto ao sentido que foi arbitrado no diagrama. (a) Na resistência de  $5.6\ k\Omega$  passa a corrente de malha  $1.888$ , no sentido de A para B, e a corrente de malha  $2.829$ , no sentido de B para A. Conseqüentemente, a corrente nessa resistência é  $2.829 - 1.888 = 0.941\ \text{mA}$ , de B para A. (b) A corrente na resistência de  $1.32\ k\Omega$  é igual à segunda corrente de malha,  $2.829\ \text{mA}$ , de C para B. Como tal, a diferença de potencial entre C e B, que é também a diferença de potencial na resistência de  $3.3\ k\Omega$ , é  $1.32 \times 2.829 = 3.73\ \text{V}$  (maior potencial em C do que em B). (c) A corrente que passa pela fonte de  $3\ \text{V}$  é igual à primeira corrente de malha,  $1.888\ \text{mA}$ ; como essa corrente passa do

elétrodo positivo para o negativo, a fonte de 3 V dissipa uma potência de  $1.888 \times 3 = 5.664$  mW. Na fonte de 9 V, a corrente é igual à segunda corrente de malha, 2.829 mA; como essa corrente passa do eletrodo negativo para o positivo, a fonte fornece uma potência de  $2.829 \times 9 = 25.46$  mW.

## 5.4. Princípio de sobreposição

No exemplo 5.1, se cada uma das correntes de malha  $i_1$  e  $i_2$  for separada em duas parcelas,  $i_1 = I_1 + J_1$  e  $i_2 = I_2 + J_2$ , a equação matricial 5.11 pode ser escrita da forma seguinte:

$$\begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0 \\ 0-9 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

E, se as correntes  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $J_1$  e  $J_2$  forem soluções dos dois sistemas:

$$\begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

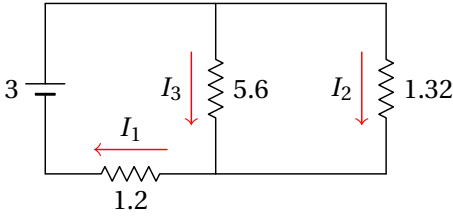
$$\begin{bmatrix} 6.8 & -5.6 \\ -5.6 & 6.92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

ficará garantido que  $i_1$  e  $i_2$  são a solução da equação 5.11. Estes dois sistemas de equações acima correspondem a dois circuitos mais simples do que o circuito original na figura 5.6, em cada um desses circuitos uma das fontes é substituída por um fio com resistência nula. Esses dois novos circuitos são tão simples, que podem ser resolvidos sem recorrer ao método das malhas, como mostra o exemplo seguinte.

### Exemplo 5.2

Resolva novamente o exemplo 5.1, usando o princípio de sobreposição.

**Resolução.** Colocando a fonte de 9 V em curto-circuito na figura 5.6, obtém-se o seguinte circuito:



As correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são as correntes nas três resistências, em unidades de mA. Note-se que essas já são as correntes reais e não correntes de malha. A resistência total entre os terminais da fonte é:

$$(5.6 \parallel 1.32) + 1.2 = 2.2682$$

Como tal, a corrente  $I_1$  é:

$$I_1 = \frac{3}{2.2682} = 1.323$$

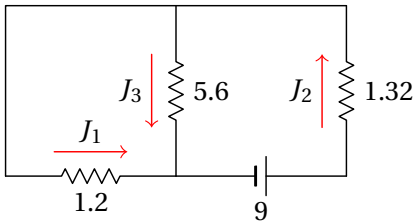
A diferença de potencial no conjunto em paralelo ( $5.6 \parallel 1.32$ ) é

$$\Delta V_2 = \Delta V_3 = \left( \frac{5.6 \times 1.32}{5.6 + 1.32} \right) I_1 = 1.0682 \times 1.323 = 1.413$$

e as outras duas correntes são:

$$I_2 = \frac{1.413}{1.32} = 1.07 \quad I_3 = \frac{1.413}{5.6} = 0.252$$

Colocando a fonte de 3 V em curto-circuito na figura 5.6, obtém-se o seguinte circuito:



As correntes nas três resistências são agora  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$ . Note-se que as correntes  $J_1$  e  $J_2$  têm sentidos opostos aos sentidos de  $I_1$  e  $I_2$ . A resistência total entre os terminais da fonte é:

$$(1.2 \parallel 5.6) + 1.32 = 2.3082$$

e, como tal, a corrente  $J_2$  é:

$$J_2 = \frac{9}{2.3082} = 3.899$$

A diferença de potencial no conjunto em paralelo ( $1.2 \parallel 5.6$ ) é

$$\Delta V_1 = \Delta V_3 = \left( \frac{1.2 \times 5.6}{1.2 + 5.6} \right) J_2 = 0.9882 \times 3.899 = 3.853$$



e as outras duas correntes são:

$$J_1 = \frac{3.853}{1.2} = 3.21 \quad J_3 = \frac{3.853}{5.6} = 0.688$$

Com estes resultados e olhando para os dois diagramas de circuito, pode-se calcular:

$$\begin{aligned} I_{1,2} &= J_1 - I_1 = 3.21 - 1.323 = 1.89 \text{ mA} && \text{(para a direita)} \\ I_{5,6} &= J_2 - I_2 = 3.899 - 1.07 = 2.83 \text{ mA} && \text{(para cima)} \\ I_{1,32} &= I_3 + J_3 = 0.252 + 0.688 = 0.94 \text{ mA} && \text{(para baixo)} \end{aligned}$$

que são os mesmos resultados obtidos usando o método das malhas. O resto da resolução é segue os mesmos passos já feitos quando as correntes foram calculadas pelo método das malhas.

## 5.5. Circuitos com condensadores

A diferença de potencial num condensador é diretamente proporcional à carga armazenada nas suas armaduras. Se ligarmos um condensador, inicialmente sem carga, entre dois pontos de um circuito, a sua diferença de potencial inicial é nula; é como se, nesse instante, fosse feito um curto-circuito entre os dois pontos com um fio de resistência nula. Nos instantes seguintes a diferença de potencial aumenta, à medida que entra carga no condensador; como a diferença de potencial no condensador não pode aumentar indefinidamente, a carga e a tensão atingirão valores finais constantes.

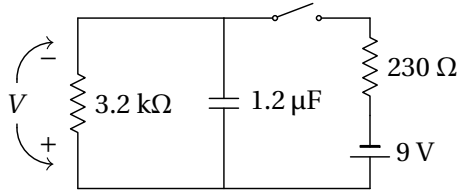
Quando a carga e a tensão no condensador alcançarem os seus valores finais, a corrente no condensador é nula e o condensador pode então ser considerado como um interruptor aberto que não deixa passar corrente. O aumento da carga até ao valor final, no período em que a corrente diminui do valor inicial até zero, constitui a **resposta transitória** à alteração produzida pela ligação da fonte.

A resposta transitória será estudada no capítulo sobre processamento de sinais. No presente capítulo consideram-se apenas os valores iniciais e finais das grandezas elétricas nos circuitos de corrente contínua. Todos os condensadores no circuito podem ser substituídos por fios com resistência nula, no instante inicial  $t = 0$  e por interruptores abertos para calcular os valores finais. O tempo necessário para as cargas atingirem os valores finais é habitualmente muito curto.

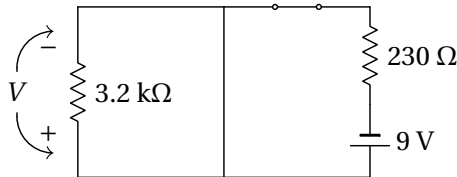
**Exemplo 5.3**

Um condensador de  $1.2 \mu\text{F}$ , inicialmente descarregado, liga-se a uma pilha com f.e.m. de  $9 \text{ V}$  e resistência interna de  $230 \Omega$  e usa-se um voltímetro com resistência interna de  $3.2 \text{ k}\Omega$  para medir a voltagem no condensador. (a) Determine as correntes inicial e final na pilha. (b) Determine o valor da carga final do condensador.

**Resolução.** A ligação do condensador à pilha pode ser representada por um interruptor que está inicialmente aberto. O voltímetro deve ser ligado em paralelo ao condensador e, assim sendo, representa-se por uma resistência de  $3.2 \text{ k}\Omega$  em paralelo com o condensador. O diagrama do circuito é então



(a) No instante inicial, quando se fecha o interruptor, a voltagem do condensador é nula, porque está descarregado, sendo equivalente a um fio com resistência nula; o diagrama equivalente é o seguinte



Note-se que toda a corrente que sai da fonte passa por esse fio e nenhuma corrente passa pelo voltímetro, porque a resistência do fio é nula. Outra forma de explicar este resultado é que como a resistência do fio é nula, a diferença de potencial nele também é nula e como está em paralelo com o voltímetro, a voltagem do voltímetro é nula (está em curto-circuito); a corrente no volímetro é  $\Delta V/R$  e como  $\Delta V$  é nula, a corrente no voltímetro também é nula. A corrente no instante inicial é então igual a (unidades SI)

```
(%i2) I0: float(9/230);
```

```
(%o2)      0.03913
```

Quando o condensador fica completamente carregado, é então equivalente a um interruptor aberto e o circuito equivalente é:



e a corrente final é igual a

```
(%i3) I: float(9/(3200 + 230));
(%o3)      0.002624
```

(b) Como o condensador está ligado em paralelo com o volímetro, a diferença de potencial final entre as suas armaduras é igual à diferença de potencial final na resistência de  $3.2 \Omega$ , que é:

```
(%i4) DV: 3200*I;
(%o4)      8.397
```

e a carga final do condensador é igual a

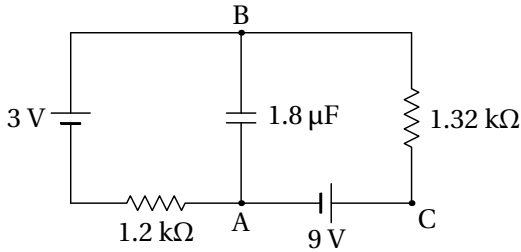
```
(%i5) Q: 1.2e-6*DV;
(%o5)      1.008 × 10-5
```

ou seja,  $Q = 10.076 \mu\text{C}$ . Note-se que os resultados dos comandos do Maxima mostram apenas 4 algarismos significativos, mas internamente está a ser usada uma precisão maior nos cálculos e nos valores armazenados nas variáveis.

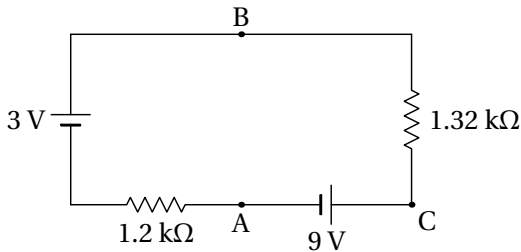
#### Exemplo 5.4

No circuito do exemplo 5.1, se a resistência de  $5.6 \text{ k}\Omega$  for substituída por um condensador de  $1.8 \mu\text{F}$ , qual a carga final desse condensador e qual a sua polaridade?

**Resolução.** O diagrama do circuito é:



Quando a carga alcança o valor final, o condensador atua como interruptor aberto e o circuito equivalente é:



Como tal, o circuito também é equivalente a uma fonte única de 6 V, no mesmo sentido da fonte de 9 V, ligada a uma resistência de 2.52 kΩ. A corrente é então no sentido anti-horário e com intensidade igual a

$$I = \frac{6}{2520}$$

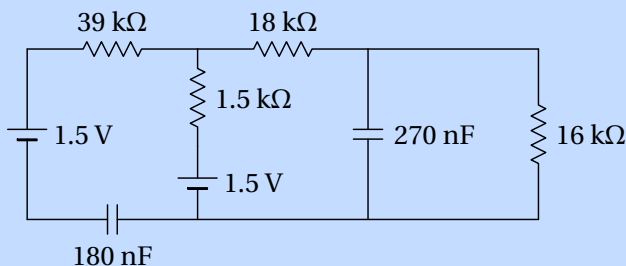
Essa corrente permite calcular a diferença de potencial no condensador (igual à diferença de potencial entre os pontos A e B) e a carga:

```
(%i6) I: float(6/2520);
(%o6)      0.002381
(%i7) DV: 9 - 1320*I;
(%o7)      5.857
(%i8) Q: 1.8e-6*DV;
(%o8)      1.054 × 10-5
```

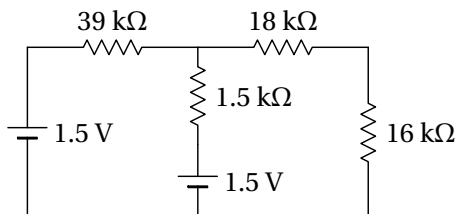
A carga final do condensador é então 10.543 μC e a polaridade é positiva na armadura ligada ao ponto B e negativa na armadura ligada ao ponto A (o cálculo de DV com o comando %i7 foi feito admitindo um potencial de B maior do que o potencial de A).

**Exemplo 5.5**

No circuito representado no diagrama, determine a potência dissipada em cada resistência e a energia armazenada em cada condensador, no estado estacionário.



**Resolução.** Quando o circuito estiver no estado estacionário, os condensadores comportam-se como interruptores abertos e o circuito equivalente é o seguinte



Na resistência de  $39 \text{ k}\Omega$  a corrente é nula (não tem por onde circular) e o circuito tem apenas uma malha, com resistência total  $1.5 + 18 + 16 = 35.5 \text{ k}\Omega$  e corrente igual a

$$I: 1.5/35.5e3;$$

$$4.225 \times 10^{-5}$$

A partir dessa corrente calculam-se a seguir todas as potências dissipadas nas resistências e as energias armazenadas nos condensadores.

- Na resistência de  $39 \text{ k}\Omega$ ,  $P = 0$ , já que a corrente é nula.
- Na resistência de  $18 \text{ k}\Omega$ ,

$$P_{18}: 18e3 * I^2;$$

$$3.214 \times 10^{-5}$$

$$P = 32.136 \mu\text{W}$$

- Na resistência de 16 k $\Omega$ ,

```
(%i11) P16: 16e3*I^2;
(%o11)      2.857 x 10^-5
```

$$P = 28.566 \mu\text{W}$$

- Na resistência de 1.5 k $\Omega$ ,

```
(%i12) P1_5: 1.5e3*I^2;
(%o12)      2.678 x 10^-6
```

$$P = 2.678 \mu\text{W}$$

- No condensador de 270 nF, a diferença de potencial é a mesma que na resistência de 16 k $\Omega$ :

```
(%i13) DV: 16e3*I;
(%o13)      0.6761
(%i14) U270: 270e-9*DV^2/2;
(%o14)      6.17 x 10^-8
```

$$U = 61.702 \text{ nJ}$$

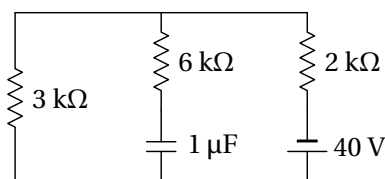
- No condensador de 180 nF, um possível percurso entre os dois pontos onde está ligado passa pela fonte do lado esquerdo, pela resistência de 39 k $\Omega$  (com diferença de potencial nula), pela resistência de 1.5 k $\Omega$  e pela segunda fonte. Como tal,

```
(%i15) DV: 1.5 + 1.5e3*I - 1.5;
(%o15)      0.06338
(%i16) U180: 180e-9*DV^2/2;
(%o16)      3.615 x 10^-10
```

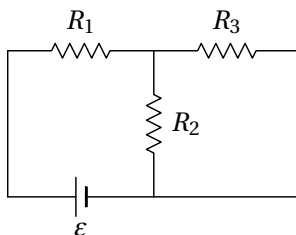
$$U = 0.3615 \text{ nJ}$$

## Perguntas

- Qual dos seguintes princípios físicos está relacionado com a lei dos nós?
  - Conservação da energia.
  - Quantização da carga.
  - Conservação da carga.
  - Conservação da quantidade de movimento.
  - Ação e reação.
- Num condensador dentro de um circuito de corrente contínua, qual das seguintes grandezas tem sempre um valor final nulo?
  - A carga.
  - A diferença de potencial.
  - A corrente.
  - A capacidade.
  - A energia armazenada.
- Uma fonte de voltagem constante foi ligada a um condensador e 3 resistências, como mostra o diagrama. Qual a intensidade da corrente final fornecida pela fonte?

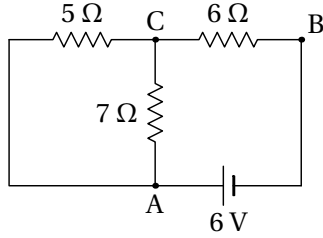


- 5 mA
  - 8 mA
  - 10 mA
  - 20 mA
  - 0
- Se  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os valores absolutos das correntes que circulam pelas resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  no circuito da figura, qual das equações é correta?



- A.  $I_1 + I_2 = I_3$                       D.  $I_1 = I_2$   
 B.  $I_1 + I_3 = I_2$                       E.  $I_2 = I_3$   
 C.  $I_2 + I_3 = I_1$

5. Qual das afirmações seguintes, sobre o potencial nos pontos A, B e C, é correta?

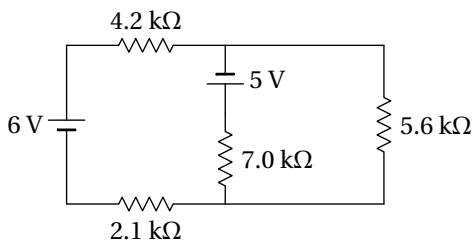


- A.  $V_C > V_B > V_A$                       D.  $V_A > V_C > V_B$   
 B.  $V_C > V_A > V_B$                       E.  $V_B > V_A > V_C$   
 C.  $V_A > V_B > V_C$

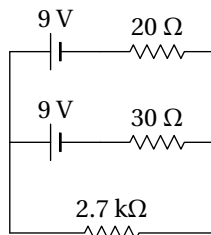


## Problemas

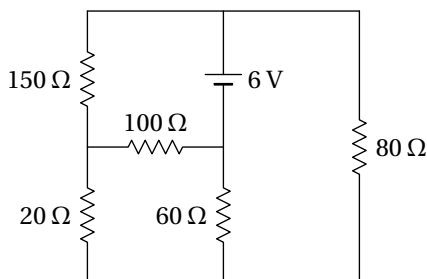
- No circuito da figura, determine quais das fontes de força eletromotriz fornecem ou absorvem energia e calcule a potência fornecida, ou absorvida, por cada uma.



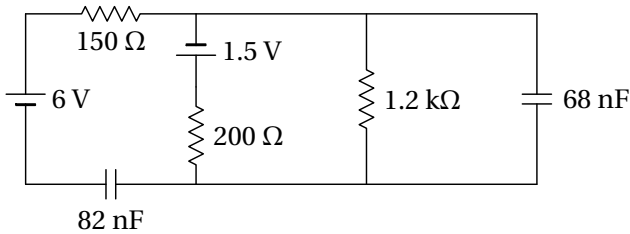
- Duas pilhas com a mesma força eletromotriz de 9 V, têm resistências internas diferentes, porque uma delas está mais gasta. A pilha mais gasta tem resistência interna de  $30 \Omega$ , e a menos gasta tem resistência interna e  $20 \Omega$ . As duas pilhas ligam-se em paralelo a uma resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$ , como mostra o diagrama. (a) Qual das duas pilhas fornece maior potência ao circuito? (b) Calcule a corrente na resistência de  $2.7 \text{ k}\Omega$ .



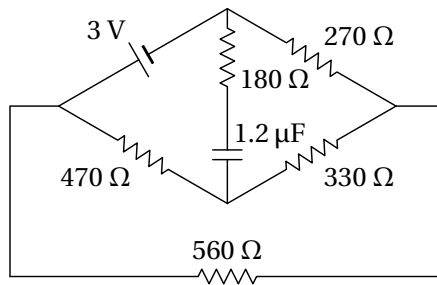
- Se as duas pilhas do problema anterior fossem ligadas em série, e não em paralelo, qual delas forneceria maior potência no circuito? Que inconveniente poderá existir do ponto de vista prático?
- Determine a potência dissipada em cada resistência no circuito e a potência fornecida pela f.e.m. Verifique que a potência fornecida pela f.e.m. é igual à soma das potências dissipadas em todas as resistências.



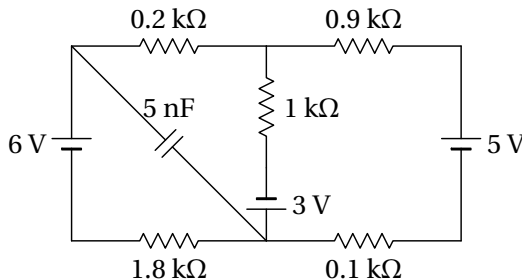
5. No circuito representado no diagrama, os dois condensadores estão inicialmente descarregados. Determine: (a) As correntes iniciais nas resistências e condensadores. (b) As cargas finais nos condensadores, indicando as suas polaridades.



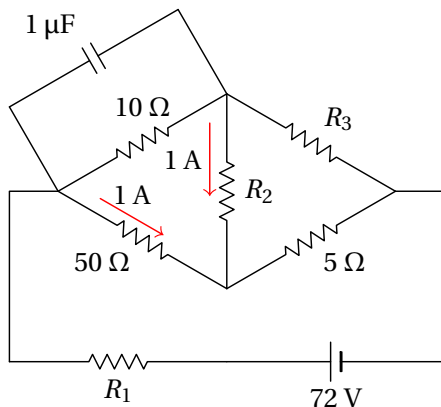
6. (a) Determine a intensidade e sentido da corrente no condensador, no instante inicial em que está descarregado.. (b) Determine a carga final do condensador, indicando a sua polaridade.



7. No problema 4, se a resistência de  $100\ \Omega$  for substituída por um condensador de  $39\ \text{nF}$ , qual a energia final armazenada nesse condensador?
8. No circuito representado no diagrama, determine a carga no condensador, no estado estacionário ( $t \rightarrow \infty$ ).



9. No circuito representado no diagrama, sabendo que no estado estacionário (após muito tempo) a carga no condensador é igual a  $40 \mu\text{C}$  e as correntes na resistência de  $50 \Omega$  e em  $R_2$  são ambas  $1 \text{ A}$ , no sentido indicado, determine os valores de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ .



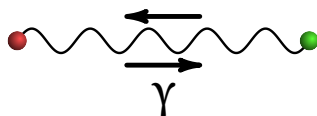
## Respostas

**Perguntas:** 1. C. 2. C. 3. B. 4. C. 5. D.

### Problemas

1. As duas fontes fornecem potência; a f.e.m. de 6 V fornece 5.24 mW, e a f.e.m. de 5 V fornece 3.93 mW.
2. (a) A que tem resistência interna de  $20 \Omega$ . (b) 3.32 mA.
3. A que tem resistência interna menor ( $20 \Omega$ ). O inconveniente é que pode dar-se o caso em que a pilha mais gasta não fornece energia mas dissipa, na sua resistência interna, parte da energia fornecida pela outra pilha.
4. Na resistência de  $20 \Omega$ , 45  $\mu$ W. Na resistência de  $100 \Omega$ , 62.0 mW. Na resistência de  $150 \Omega$ , 82.1 mW. Na resistência de  $60 \Omega$ , 105.8 mW. Na resistência de  $80 \Omega$ , 151.4 mW. A f.e.m. fornece 401.4 mW.
5. Usando subíndices iguais ao valor da resistência ou capacidade, (a)  $I_{1200} = 0$ ,  $I_{200} = 7.5 \text{ mA}$ ,  $I_{150} = I_{82} = 40 \text{ mA}$ ,  $I_{68} = 32.5 \text{ mA}$ . (b)  $I_{150} = 0$ ,  $I_{1200} = I_{200} = 1.07 \text{ mA}$ ,  $Q_{68} = 87.4 \text{ nC}$  (positiva na armadura de baixo e negativa na de cima),  $Q_{82} = 597.4 \text{ nC}$  (positiva na armadura da direita e negativa na da esquerda).
6. (a) 4.78 mA, de baixo para cima. (b) 2.44  $\mu$ C (negativa na armadura de cima e positiva na de baixo).
7. 236.5 nJ.
8. 12 nC.
9.  $R_1 = 2.4 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 6.67 \Omega$ ,

## 6. Fluxo elétrico



A explicação da força entre partículas através da existência de um campo vem desde a época em que foi desenvolvida a teoria da gravitação universal. A dificuldade em aceitar que uma partícula possa afetar outra partícula distante, sem existir nenhum contato entre elas, foi ultrapassada na física clássica com o conceito do campo de força. No caso da força eletrostática, o campo mediador que transmite a força eletrostática foi designado por éter; a luz seria uma onda que se propaga nesse éter. No século XIX foram realizadas inúmeras experiências para detectar a presença do éter, sem qualquer sucesso. No fim do século chegou-se à conclusão de que tal éter não existe. No entanto, o campo elétrico tem existência física, no sentido de que transporta energia e que pode subsistir mesmo após desaparecerem as cargas que o produzem. Na física quântica a interação elétrica é explicada como uma troca de partículas mediadoras da força, que são as mesmas partículas da luz, os fótons; cada carga lança alguns fótons que são absorvidos pela outra carga. Neste capítulo considera-se a teoria clássica que concebe o campo como um fluido invisível que arrasta as cargas elétricas.

## 6.1. Campo elétrico produzido por cargas pontuais

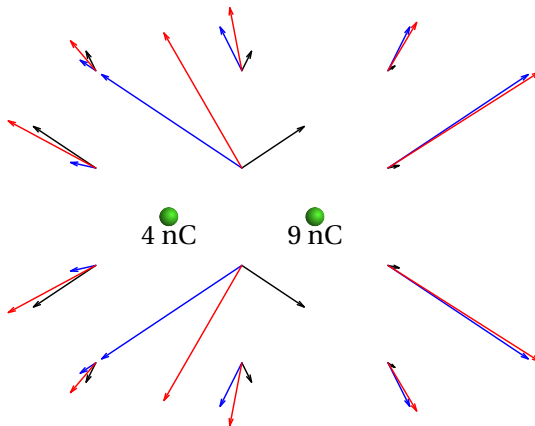
O campo elétrico produzido por uma carga pontual já foi estudado no capítulo 1. A figura 1.6 mostra o campo repulsivo produzido por uma carga positiva.

A equação 1.5 para o módulo do campo produzido por uma carga pontual pode ser escrita de forma vetorial. Se a carga  $q$  estiver na origem das coordenadas, o resultado obtido é:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{r} \quad (6.1)$$

onde  $r$  é a distância até a origem e  $\hat{r}$  o versor na direção radial, afastando-se da carga. Se a carga for negativa, a equação anterior ainda é válida e o vetor  $\vec{E}$  aponta no sentido oposto de  $\hat{r}$  (campo atrativo). O versor  $\hat{r}$  obtém-se dividindo o vetor de posição  $\vec{r}$  pelo seu módulo,  $r$ . Se a carga não estiver na origem mas numa posição  $\vec{r}_1$ , a equação 6.1 pode ser generalizada, obtendo-se:

$$\vec{E} = \frac{kq(\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (6.2)$$



**Figura 6.1.:** Campos produzidos por duas cargas de 4 nC e 9 nC em alguns pontos, e o campo resultante nesses pontos.

O campo produzido por um sistema de cargas pontuais obtém-se somando vetorialmente os campos produzidos por cada uma das cargas. Por exem-

plo, a figura 6.1 mostra os campos produzidos em alguns pontos por cada uma de duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC, e o campo resultante nesses pontos, igual à soma vetorial dos campos das duas cargas.

A equação 6.2 pode ser generalizada para um sistema de  $n$  cargas pontuais. Em coordenadas cartesianas, se as cargas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  estiverem nos pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  de um plano  $Oxy$  (a generalização para o espaço  $Oxyz$  deverá ser evidente), o resultado é:

$$E_x = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{k q_i (x - x_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{3/2}} \right] \quad (6.3)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{k q_i (y - y_i)}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{3/2}} \right] \quad (6.4)$$

### Exemplo 6.1

Represente, no plano  $Oxy$ , as linhas do campo elétrico produzido por duas cargas de 4 nC e 9 nC afastadas de 1 cm entre si.

**Resolução.** Primeiro escolhe-se um sistema de unidades; medindo as cargas em nC e as distâncias em cm, o valor da constante de coulomb é:

$$k = 90 \frac{\mu\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{nC}^2}$$

Como tal, se o valor  $k = 90$  for usado, as unidades do campo serão  $\mu\text{N}/\text{nC}$ . Arbitrando que a carga de 4 nC está na origem e a carga de 9 nC no ponto  $(1, 0)$  e substituindo nas equações 6.3 e 6.4 obtém-se:

$$E_x = \frac{360x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{810(x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{360y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{810y}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}}$$

Este campo já foi representado em alguns pontos na figura 6.1. Para traçar as linhas de campo elétrico, pode usar-se o programa **plotdf** do *Maxima*.

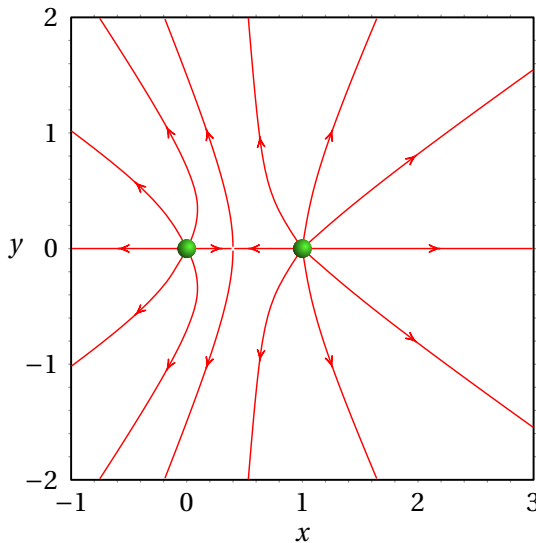
```
(%i1) Ex: 90*4*x/(x^2+y^2)^(3/2) + 90*9*(x-1)/((x-1)^2+y^2)^(3/2);
(%o1) 
$$\frac{360x}{(y^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{810(x-1)}{(y^2 + (x-1)^2)^{3/2}}$$

```

```
(%i2) Ey: 90*4*y/(x^2+y^2)^(3/2) + 90*9*y/((x-1)^2+y^2)^(3/2);
(%o2) 
$$\frac{360y}{(y^2+x^2)^{3/2}} + \frac{810y}{(y^2+(x-1)^2)^{3/2}}$$

(%i3) plotdf ([Ex, Ey], [x, -1, 3], [y, -2, 2], [vectors,"blank"])$
```

A seguir a este último comando é necessário clicar em alguns pontos para obter as linhas de campo que aparecem na figura 6.2. Note-se que a expressão obtida para  $E_y$  é igual a zero em qualquer ponto do eixo dos  $x$  ( $y = 0$ ), com exceção dos pontos onde estão as cargas. Igualando  $y = 0$  e  $E_x = 0$  obtêm-se as coordenadas do ponto onde o campo é nulo,  $x = 0.4$  e  $y = 0$ , que é um ponto de sela como se vê na figura 6.2. Os pontos onde estão as duas cargas positivas são nós repulsivos.



**Figura 6.2.:** Linhas de campo elétrico de duas cargas pontuais de 4 nC e 9 nC colocadas na origem, e no ponto (1, 0).

## 6.2. Propriedades das linhas de campo elétrico

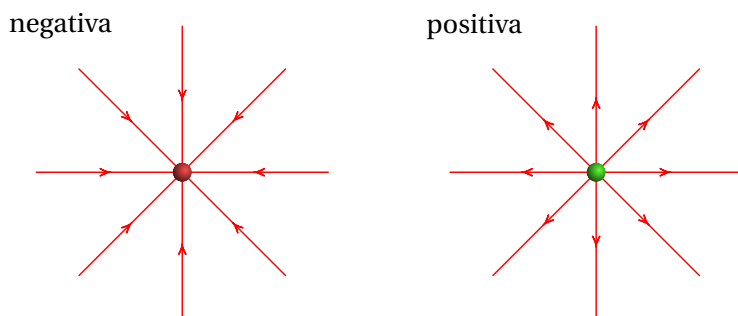
O campo elétrico pode ser representado por vetores que indicam o valor do campo em cada ponto do espaço, como foi feito na figura 6.1. O problema é que o campo varia rapidamente com a distância, o que faz com que os



vetores sejam muito grandes em alguns pontos e muito pequenos noutros. A representação por linhas de campo é mais conveniente. As linhas de campo seguem a direção do campo e em cada ponto dessas linhas, o campo é tangente à linha e no sentido indicado pelas setas.

As linhas de campo elétrico têm várias propriedades:

- Na vizinhança de uma carga pontual positiva há linhas que saem em todas as direções e perto de uma carga negativa há linhas que entram em todas as direções (ver figura 6.3).



**Figura 6.3.:** Linhas de campo elétrico de uma carga pontual negativa (esquerda) ou positiva (direita).

- Duas linhas de campo nunca se cruzam; num ponto de cruzamento o campo teria duas direções diferentes, o que não é possível.
- No próximo capítulo demonstra-se que a matriz jacobiana correspondente ao campo elétrico é sempre simétrica. Isso implica que os valores próprios dessa matriz são sempre reais e nunca complexos. Assim, os únicos pontos de equilíbrio que podem existir num campo elétrico são nós e pontos de sela. Um nó pode ser atrativo ou repulsivo; se for atrativo é um ponto onde existe uma carga pontual negativa e se for repulsivo é um ponto onde existe uma carga pontual positiva. Os pontos de sela são pontos onde o campo é nulo, sem que haja carga nesse ponto.

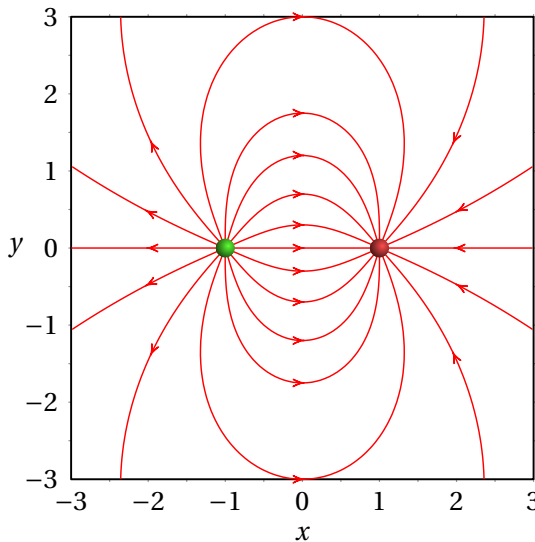
No exemplo apresentado na figura 6.2, existe um ponto de sela em  $(0.4, 0)$ , onde o campo é nulo. Existem duas linhas de campo que terminam nesse ponto de sela e duas linhas de campo que aí começam.

Outro exemplo são as linhas de campo de um **dipolo elétrico**, formado por duas cargas iguais de sinais opostos. Admitindo que as duas cargas estão

localizadas nos pontos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , podem traçar-se as linhas de campo com os seguintes comandos:

```
(%i4) Ex: (x+1)/((x+1)^2+y^2)^(3/2) - (x-1)/((x-1)^2+y^2)^(3/2)$
(%i5) Ey: y/((x+1)^2+y^2)^(3/2) - y/((x-1)^2+y^2)^(3/2)$
(%i6) plotdf ([Ex, Ey], [x, -3, 3], [y, -3, 3], [vectors, "blank"])$
```

O resultado é apresentado na figura 6.4.

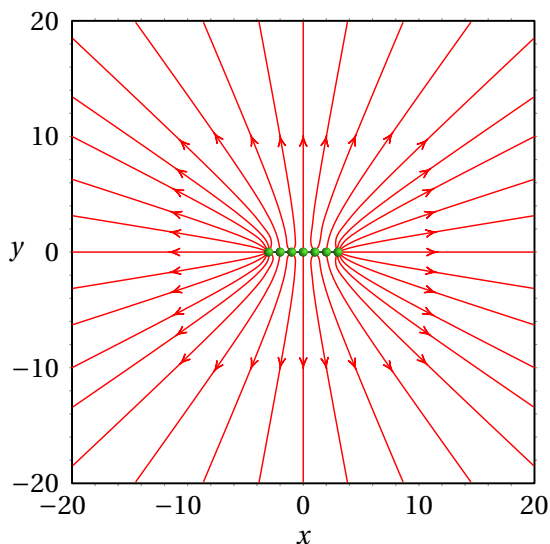


**Figura 6.4.:** Linhas de campo elétrico de um dipolo.

Uma distribuição contínua de cargas pode ser aproximada por uma série de cargas pontuais. Por exemplo, se existirem cargas distribuídas uniformemente no segmento do eixo dos  $x$  entre  $x = -3$  e  $x = 3$ , pode-se imaginar um sistema de cargas pontuais, equidistantes, sobre o segmento entre  $x = -3$  e  $x = 3$ . Os comandos de Maxima para traçar as linhas de campo dessas 7 cargas pontuais são:

```
(%i7) Ex: sum ((x-i)/((x-i)^2+y^2)^(3/2), i, -3, 3)$
(%i8) Ey: sum (y/((x-i)^2+y^2)^(3/2), i, -3, 3)$
(%i9) plotdf ([Ex, Ey], [x,-20,20], [y,-20,20], [vectors, "blank"])$
```

e o gráfico obtido é apresentado na figura 6.5.



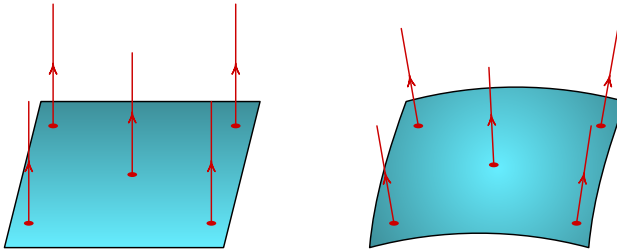
**Figura 6.5.:** Campo elétrico de um sistema de 7 cargas pontuais no eixo dos  $x$ .

### 6.3. Fluxo

O campo elétrico pode ser compreendido melhor usando o conceito de fluxo. Define-se o fluxo elétrico por analogia com um fluido incompressível. No escoamento do fluido, as linhas de campo são tangentes à velocidade do fluido em cada ponto e o fluxo do campo de velocidades é igual ao volume de fluido que passa através da superfície, por unidade de tempo.

Através de uma superfície de área  $A$ , perpendicular à velocidade do fluido e se o módulo da velocidade,  $v$ , for constante em todos os pontos dessa superfície, o volume de fluido que passa através da superfície, por unidade de tempo, é igual a  $vA$ . A figura 6.6 mostra dois exemplos de linhas de campo e em cada caso uma superfícies perpendicular às linhas de campo.

Por analogia com o fluxo do fluido, no caso de uma superfície de área  $A$ , perpendicular às linhas de campo eléctrico, como na figura 6.6, se o módulo  $E$  do campo é constante nessa superfície, define-se o **fluxo eléctrico** através da superfície igual ao produto do módulo do campo vezes a área

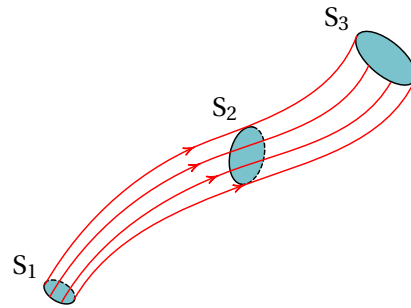


**Figura 6.6.:** Superfícies perpendiculares às linhas de campo.

da superfície:

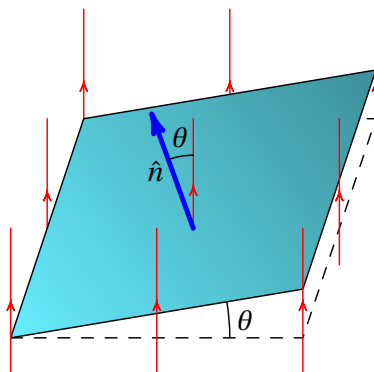
$$\Phi = E A \quad (6.5)$$

O volume delimitado pelas linhas de campo que passam por uma curva fechada, por exemplo, a fronteira da superfície  $S_1$  na figura 6.7, chama-se **tubo de fluxo**. Usando a analogia com o fluido incompressível, se não existem dentro do tubo pontos onde entra ou sai fluido, então o fluxo é o mesmo em todas as seções transversais do tubo, independentemente da curvatura ou inclinação dessas seções. Por exemplo, no tubo de fluxo da figura 6.7, o volume de fluido que passa pelas três superfícies  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$ , por unidade de tempo, deve ser o mesmo e, como tal, o fluxo através dessas superfícies, ou de qualquer outra seção do tubo, é igual.



**Figura 6.7.:** Tubo de fluxo.

Essa propriedade dos tubos de fluxo pode usar-se para calcular o fluxo de um campo elétrico uniforme,  $\vec{E}$ , através de uma superfície plana de área  $A$ , que não seja perpendicular às linhas de campo. O ângulo de inclinação das linhas de campo em relação ao versor normal à superfície,  $\hat{n}$ , é  $\theta$  na figura 6.8. O fluxo através da superfície inclinada é igual ao fluxo através da projeção dessa superfície no plano perpendicular às linhas de campo, ou seja através da superfície a tracejado na figura 6.8, que faz um ângulo  $\theta$  com a superfície inclinada. Os dois fluxos são iguais porque a superfície inclinada e a superfície a tracejado fazem parte do mesmo tubo de fluxo, formado pelas linhas de campo que as atravessam.

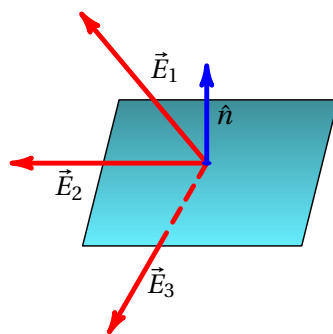


**Figura 6.8.:** Superfície inclinada em relação às linhas de campo.

A área da superfície a tracejado é  $A \cos \theta$ , onde  $\theta$  é ângulo entre o campo e a perpendicular ao plano (figura 6.8). Como essa superfície a tracejado sim é perpendicular às linhas de campo, o fluxo através dela é igual ao módulo do campo vezes a sua área:

$$\Phi = E A \cos \theta = (\vec{E} \cdot \hat{n}) A \quad (6.6)$$

A figura 6.9 mostra três possíveis campos na superfície. O campo  $\vec{E}_1$  faz um ângulo agudo com o versor normal e, por isso, produz fluxo positivo, ou seja, fluxo que passa no mesmo sentido do versor normal. O campo  $\vec{E}_2$  é perpendicular à superfície e, como tal, o seu produto escalar com o versor normal é nulo e esse campo não produz nenhum fluxo. Finalmente, o campo  $\vec{E}_3$  faz um ângulo obtuso com o versor normal, produzindo assim fluxo negativo, ou seja, fluxo no sentido oposto do versor normal.

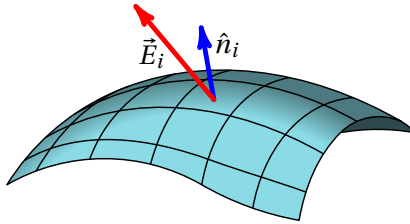


**Figura 6.9.:** Campo e versor normal.

O produto escalar  $\vec{E} \cdot \hat{n}$  é a componente do campo na direção normal à superfície. Como tal, o fluxo elétrico é a componente normal do campo vezes a área da superfície.

No caso de campos não uniformes e superfícies curvas, divide-se a superfície em  $m$  segmentos com áreas  $\Delta A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), como na figura 6.10. Se

o número de segmentos for elevado e cada um deles for suficientemente pequeno, podem ser aproximados por pequenos planos.



**Figura 6.10.:** Superfície dividida em segmentos menores.

No plano infinitesimal de área  $\Delta A_i$  o campo será  $\vec{E}_i$ , aproximadamente constante, de forma que o fluxo  $\Phi_i$  nele é dado pela equação 6.6. O fluxo total na superfície é igual à soma de todos os fluxos nos pequenos planos.

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^m \vec{E}_i \cdot \hat{n}_i \Delta A_i \quad (6.7)$$

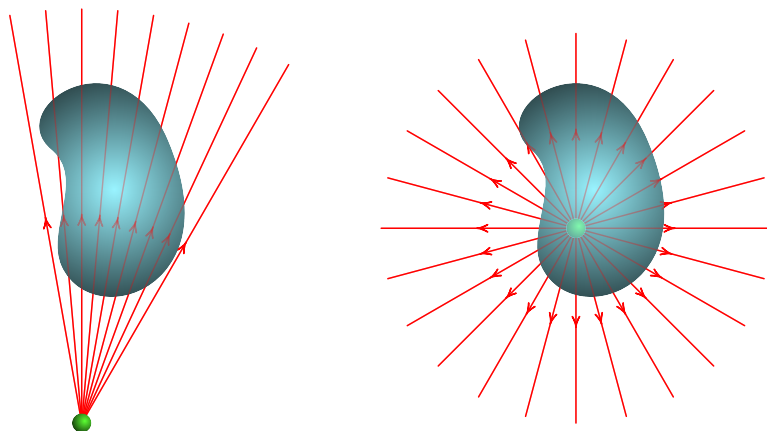
A aproximação torna-se exata no limite em que  $m$  se aproxima de infinito. Essa soma de uma função (neste caso a componente normal do campo) vezes a área da superfície chama-se **integral de superfície**, escrito da forma seguinte:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad (6.8)$$

Nos casos estudados neste capítulo, esse integral de superfície pode ser obtido facilmente, sem ser preciso entrarmos nos pormenores do cálculo de integrais de superfície.

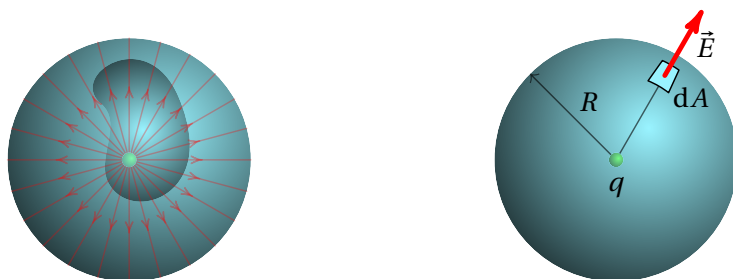
## 6.4. Lei de Gauss

O campo elétrico produzido por uma distribuição de cargas é a sobreposição dos campos produzidos por muitas cargas pontuais. Convém então analisar o fluxo elétrico produzido pelo campo de uma única carga pontual. Em relação a uma superfície  $S$  fechada, a carga pode estar ou fora ou dentro dessa superfície, tal como mostra a figura 6.11. Se a carga estiver fora, apenas algumas linhas de campo atravessam a superfície; se a carga estiver dentro de  $S$ , todas as linhas de campo a atravessam.



**Figura 6.11.:** Carga pontual fora de uma superfície fechada e dentro dela.

Quando a carga pontual está dentro da superfície  $S$ , qualquer esfera com centro na carga também é atravessada por todas as linhas de campo elétrico e, como tal, encontra-se no mesmo tubo de fluxo de  $S$  (figura 6.12). O fluxo elétrico através de  $S$  pode ser determinado calculando o fluxo que atravessa a esfera. No lado direito da figura 6.12 mostra-se o campo num ponto da esfera.



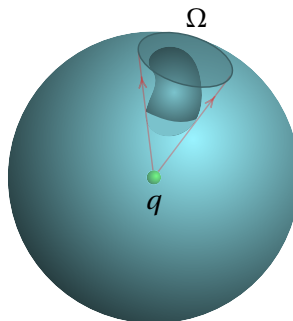
**Figura 6.12.:** Fluxo produzido por uma carga pontual dentro de uma superfície fechada.

Na superfície esférica, o campo é sempre perpendicular e o seu módulo é sempre igual a  $E = k|q|/R^2$ , onde  $R$  é o raio da esfera. Como tal, o fluxo na esfera pode obter-se usando a equação 6.5. A área da esfera é  $4\pi R^2$ , e multiplicando pelo módulo do campo obtém-se o fluxo:

$$\Phi = 4\pi R^2 \left( \frac{k|q|}{R^2} \right) = 4\pi k|q| \quad (6.9)$$

Ou seja que, o fluxo total produzido pela carga pontual  $q$ , através de qualquer superfície fechada em que a carga esteja no interior, é sempre  $4\pi k|q|$ , independentemente do tamanho da superfície. No caso de superfícies fechadas, é habitual calcular-se sempre o fluxo para fora da superfície. Assim sendo, o sinal da carga dá o sinal correto do fluxo na expressão  $4\pi kq$ ; se a carga for positiva há fluxo para fora da superfície, mas se a carga for negativa o fluxo será para dentro dela.

Se a carga está fora de  $S$ , as linhas de campo que atravessam a superfície estão dentro de um ângulo sólido  $\Omega$ , menor que o ângulo total  $4\pi$  da esfera toda (figura 6.13). Se imaginarmos que a carga é uma fonte de luz, esse ângulo sólido é a sombra projetada pela superfície  $S$  numa esfera; uma parte,  $S_1$ , da superfície estará iluminada e a outra parte,  $S_2$ , estará na escuridão. Se  $q$  for positiva, pela superfície  $S_1$  entra fluxo elétrico e esse mesmo fluxo sai todo pela superfície  $S_2$ ; se  $q$  for negativa, o mesmo fluxo que entra por  $S_2$  sai por  $S_1$ . Como tal, o fluxo total através de  $S$  é nulo.



**Figura 6.13.:** Carga pontual fora de uma superfície fechada.

Conclui-se então que o fluxo elétrico devido a uma carga pontual  $q$  é nulo em qualquer superfície fechada, se a carga estiver fora da superfície, e igual a  $4\pi kq$  se a carga estiver dentro da superfície.

Uma distribuição de carga pode ser dividida em várias cargas pontuais  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , e o fluxo total através de uma superfície fechada  $S$  será igual à soma dos  $n$  fluxos produzidos por cada uma das cargas pontuais. As cargas que se encontram no exterior de  $S$  não produzem fluxo, e cada carga  $q_i$  que esteja dentro de  $S$  produz fluxo  $4\pi kq_i$ . Como tal, o fluxo total através da superfície fechada  $S$  é:

$$\Phi(S \text{ fechada}) = 4\pi k q_{\text{int}} \quad (6.10)$$



onde  $q_{\text{int}}$  é a carga total no interior da superfície S. Esta equação chama-se **lei de Gauss**:

*O fluxo elétrico através de qualquer superfície fechada é igual ao valor da carga total no interior da superfície, multiplicado por  $4\pi k$ .*

Se a carga total no interior for positiva, o fluxo é positivo, indicando que há linhas de campo a saírem da superfície. Se a carga total for negativa, o fluxo é negativo porque há linhas de campo a entrar na superfície.

O fluxo elétrico total à volta de uma carga pontual é diretamente proporcional ao valor da carga. Em alguns casos é possível desenhar um número de linhas de campo proporcional à carga, para dar uma ideia mais aproximada do valor do fluxo em diferentes regiões; por exemplo, na figura 6.2 foram desenhadas 8 linhas de campo a saírem da carga de 4 nC, e 18 linhas a saírem da carga de 9 nC.

A lei de Gauss é muito útil para calcular campos elétricos de sistemas com simetria, como se verá nas seções seguintes.

### Exemplo 6.2

Um eletrão encontra-se no centro de um cubo cuja aresta mede 20 nm. Determine o fluxo elétrico através de uma das faces do cubo.

**Resolução.** A superfície total do cubo é fechada e portanto o fluxo através do dele pode calcular-se facilmente usando a lei de Gauss:

$$\Phi = 4\pi k q_{\text{int}}$$

A carga interna  $q_{\text{int}}$  é a carga do eletrão ( $-1.602 \times 10^{-19}$  C). Assim, o fluxo total através do da superfície do cubo é:

$$\Phi = 4\pi \times 9 \times 10^9 \times (-1.602 \times 10^{-19}) = -18.09 \times 10^{-9} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}}$$

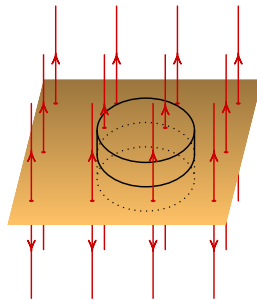
Por simetria, o fluxo através de cada face deve ser o mesmo, pelo que o fluxo numa face é a sexta parte do fluxo total no cubo:  $-3.02 \text{ nN} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ . O sinal negativo do resultado indica que o fluxo é para dentro do cubo.

### 6.4.1. Campo de um plano

Considere-se um plano, com carga distribuída uniformemente. Visto em corte, o plano aparece como um segmento de reta, e as linhas de campo são semelhantes às linhas representadas na figura 6.5.

Nas regiões perto da zona central do plano, as linhas de campo são aproximadamente paralelas entre si. Quanto maior for o plano, maior é a região onde as linhas são aproximadamente paralelas. No caso idealizado de um plano infinito, as linhas são mesmo paralelas e o valor do campo depende apenas da distância ao plano, já que a aparência do plano é a mesma em qualquer ponto.

Para calcular o campo elétrico usando a lei de Gauss, imagine-se um cilindro com a base e o topo paralelos ao plano, como se mostra na figura 6.14.



**Figura 6.14.:** Cilindro imaginário usado para calcular o campo do plano.

As paredes laterais do cilindro não são atravessadas pelo fluxo elétrico, porque o campo é paralelo à superfície. Em cada uma das tampas circulares do cilindro, o campo é perpendicular e tem módulo constante, pois todos os pontos na tampa estão à mesma distância do plano. O fluxo na base e no topo do cilindro é então  $AE$ , em que  $A$  é a área da base do cilindro e o fluxo total através da superfície do cilindro é:

$$\Phi = 2AE \quad (6.11)$$

De acordo com a lei de Gauss, esse fluxo também é igual a:

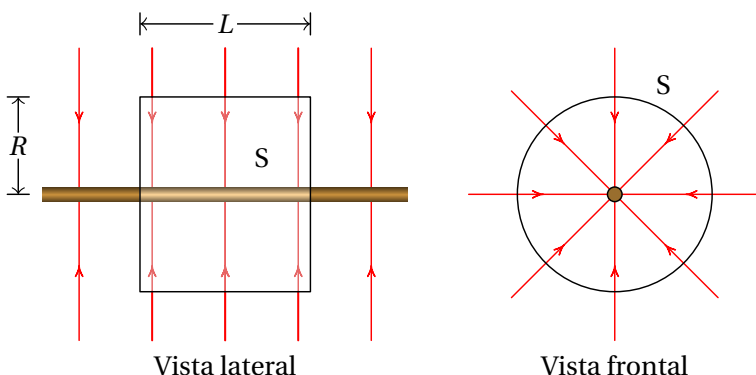
$$\Phi = 4\pi kQ \quad (6.12)$$

onde  $Q$  é a carga na parte do plano que está dentro do cilindro. Igualando as duas últimas equações obtém-se o módulo do campo:

$$E_{\text{plano}} = 2\pi k\sigma \quad (6.13)$$

em que  $\sigma$  é a **carga superficial**, isto é, carga por unidade de área:  $\sigma = Q/A$ .

### 6.4.2. Campo de um fio retilíneo



**Figura 6.15.:** Linhas de campo de um fio retilíneo e superfície cilíndrica usada para calcular o campo.

Considere-se um fio retilíneo muito comprido, com carga distribuída uniformemente. As linhas de campo deverão ter a direção radial. Imaginando uma superfície fechada que é um cilindro de raio  $R$  e altura  $L$ , com eixo sobre o fio, como mostra a figura 6.15, conclui-se que o fluxo é nulo nas tampas circulares do cilindro, pois sobre elas o campo é paralelo à superfície; na parede lateral do cilindro, o campo é perpendicular e com módulo constante. Assim, o fluxo total será:

$$\Phi = 2\pi RLE \quad (6.14)$$

onde  $E$  é o módulo do campo à distância  $R$  do fio. De acordo com a lei de Gauss, esse fluxo dever ser também igual a

$$\Phi = 4\pi kQ \quad (6.15)$$

onde  $Q$  é a carga do fio que está dentro do cilindro  $S$ . Igualando as duas equações anteriores, obtém-se o módulo do campo:

$$E_{\text{fio}} = \frac{2k\lambda}{R} \quad (6.16)$$

em que  $\lambda$  é a **carga linear** (carga por unidade de comprimento):  $\lambda = Q/L$ .

### 6.4.3. Campo de uma esfera condutora

Numa esfera condutora, com carga  $Q$  e raio  $a$ , a força repulsiva entre as cargas do mesmo sinal, faz com que as cargas se distribuam de modo uniforme sobre a superfície da esfera. Existe então simetria esférica e as linhas de campo devem apontar na direção radial.

Para calcular o campo, imagine-se uma esfera de raio  $r$ , concêntrica com a esfera condutora. O campo é perpendicular à superfície e tem módulo constante  $E$ ; como tal, o valor do fluxo elétrico é:

$$\Phi = 4\pi r^2 E \quad (6.17)$$

Como a carga está distribuída na superfície da esfera condutora, no se interior não existe carga e, segundo a lei de Gauss, o fluxo através da esfera de raio  $r$  será nulo, se  $r < a$ , ou igual a  $4\pi kQ$  se  $r > a$ . Em consequência, o campo elétrico é nulo no interior da esfera, e fora dela tem módulo:

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (6.18)$$

que é mesma expressão do campo produzido por uma carga  $Q$  concentrada no centro da esfera. Este é o mesmo resultado encontrado no apêndice B, usando um método mais complicado (integração).

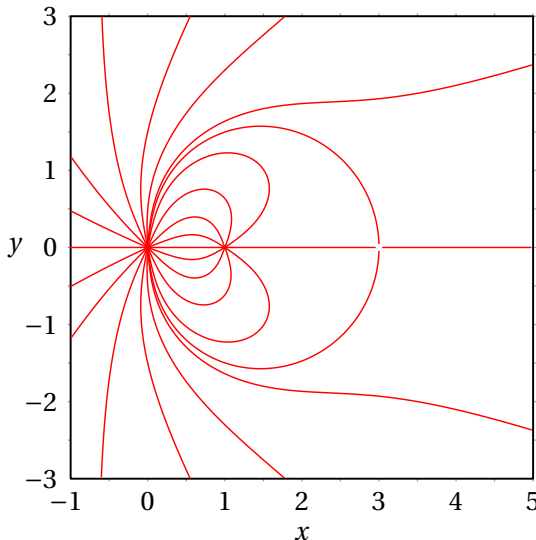
## Perguntas

1. Um plano com  $2500 \text{ cm}^2$  de área tem uma carga total de  $20 \text{ nC}$ , distribuída uniformemente. O módulo do campo elétrico perto do plano é, aproximadamente:
  - A.  $18.1 \text{ mN/C}$
  - B.  $4.52 \text{ kN/C}$
  - C.  $1.81 \text{ N/C}$
  - D.  $45.2 \text{ N/C}$
  - E.  $0.452 \text{ N/C}$

2. Uma esfera condutora de 3 cm de raio, isolada e com carga positiva, produz um campo de módulo  $36 \mu\text{N}/\text{nC}$ , num ponto que se encontra a 1 cm da superfície da esfera. Calcule a carga total da esfera.
- A. 3.6 nC  
B. 0.4 nC  
C. 1.6 nC  
D. 6.4 nC  
E. 1.2 nC
3. Num sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  (em metros), existe uma carga pontual de 2 nC em  $(1,0,0)$ , uma carga pontual de  $-4$  nC em  $(0,2,0)$  e uma carga pontual de 3 nC em  $(0,0,4)$ . Calcule o fluxo elétrico (em unidades SI) através de uma esfera de raio 3 m, com centro na origem.
- A.  $36\pi$   
B.  $72\pi$   
C.  $-72\pi$   
D.  $108\pi$   
E.  $-144\pi$
4. Uma esfera isoladora de raio 1 m tem carga distribuída de forma desconhecida. O fluxo do campo elétrico criado por essa esfera através de uma superfície esférica de raio 4 m, concêntrica com a esfera isoladora, é  $11.3 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$ . Qual é o fluxo do campo elétrico através de uma superfície esférica de raio 2 m concêntrica com a esfera isoladora?
- A.  $45.2 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
B.  $22.6 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
C.  $11.3 \times 10^4 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
D.  $56.5 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$   
E.  $28.2 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$
5. Se numa superfície fechada o campo elétrico aponta para dentro da superfície em todos os pontos, o que é que podemos concluir?
- A. Existe carga positiva dentro da superfície.  
B. Existe carga negativa dentro da superfície.  
C. Não existe nenhuma carga dentro da superfície.  
D. O campo é necessariamente perpendicular à superfície.  
E. O campo é necessariamente paralelo à superfície.

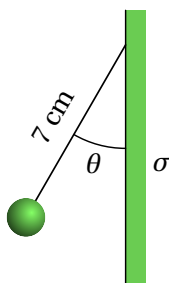
## Problemas

1. Na atmosfera existe um campo elétrico que aponta na vertical, para baixo. A nível do mar, o módulo desse campo, é aproximadamente  $120 \text{ N/C}$  e diminui em função da altura;  $2 \text{ km}$  acima do nível do mar o campo é aproximadamente  $66 \text{ N/C}$ . Que pode concluir acerca do sinal das cargas livres nos dois primeiros quilómetros da atmosfera? Calcule a carga volúmica média nessa região.
2. Uma carga pontual de  $5 \text{ nC}$  encontra-se a  $6 \text{ cm}$  de um fio retilíneo muito comprido, com carga linear constante de  $7 \text{ nC/cm}$ . Calcule a força elétrica sobre o fio (sugestão: calcule melhor a força do fio sobre a carga pontual, que é mais fácil de calcular, e pela lei de ação e reação deverá ter o mesmo módulo).
3. A figura mostra as linhas de campo elétrico de duas partículas carregadas, uma delas na origem, e a outra no ponto  $(1, 0)$ . No ponto  $(3, 0)$  existe um ponto de sela. Sabendo que a carga da partícula na origem é  $18 \text{ nC}$ , calcule a carga da outra partícula.



4. Duas cascas esféricas concêntricas, com raios  $a$  e  $b$ , encontram-se uma dentro da outra ( $a < b$ ). A casca esférica interna, de raio  $a$ , tem uma carga total  $Q$  distribuída uniformemente na sua superfície, e a casca externa tem uma carga  $-Q$ , distribuída uniformemente na sua superfície. Usando a lei de Gauss, calcule o campo elétrico nos pontos dentro da casca interna, entre as duas cascas e por fora da casca externa.

- Uma esfera de raio  $R$  tem uma carga elétrica  $Q$  distribuída uniformemente dentro do seu volume. Usando a lei de Gauss, calcule o módulo do campo elétrico num ponto a uma distância  $r$  do centro da esfera. Considere os casos  $r \geq R$  e  $r < R$ .
- Uma partícula pontual com massa igual a 25 g e carga de 50 nC encontra-se pendurada de um fio de 7 cm que está colado a um plano vertical. O plano vertical tem uma carga superficial constante  $\sigma = 17 \text{ nC/cm}^2$  e pode ser considerado infinito. Calcule o ângulo  $\theta$  que o fio faz com o plano vertical.



- Para simular as cargas num condensador de placas planas paralelas, considere um sistema de 13 cargas de valor +1 nos pontos  $(-6,5)$ ,  $(-5,5)$ , ...,  $(5,5)$  e  $(6,5)$ , e 13 cargas de valor -1 nos pontos  $(-6,-5)$ ,  $(-5,-5)$ , ...,  $(5,-5)$  e  $(6,-5)$ . Usando Maxima, desenhe o campo elétrico e as linhas de campo (o desenho é independente das unidades que sejam usadas; pode admitir  $k = 1$ ).

## Respostas

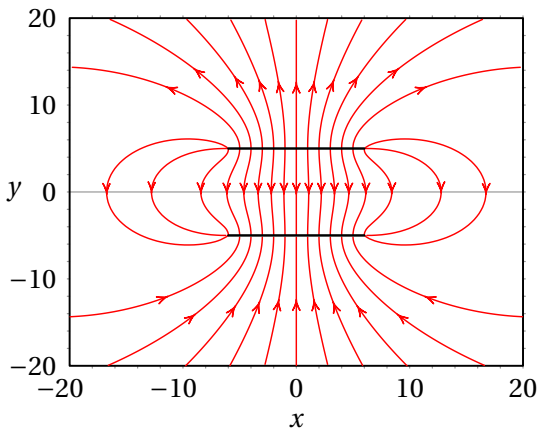
Perguntas: 1. B. 2. D. 3. C. 4. C. 5. B.

### Problemas

1. Existe carga positiva, com carga volúmica média igual a  $2.39 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$ .
2. 1.05 mN
3.  $-8 \text{ nC}$ .
4. Dentro da casca interna e fora da casca externa, o campo é nulo. Entre as duas cascas, o campo é na direção radial e com módulo  $kQ/r^2$ , onde  $r$  é a distância desde o centro das esferas.
5. Se  $r \geq R$ ,  $E = \frac{kQ}{r^2}$ . Se  $r < R$ ,  $E = \frac{kQ}{R^3}r$
6.  $62.99^\circ$
7. O gráfico das linhas de campo pode ser obtido com os seguintes comandos:

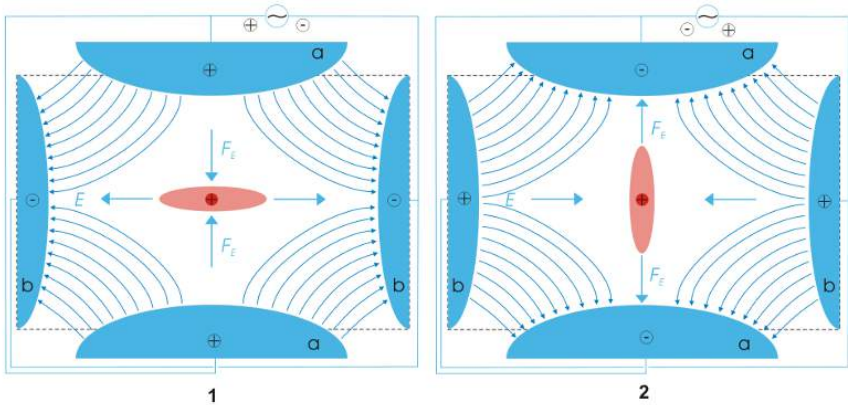
```
(%i1) E: sum([x-i,y-5]/sqrt((x-i)^2+(y-5)^2)^3
          -[x-i,y+5]/sqrt((x-i)^2+(y+5)^2)^3,i,-6,6)$
(%i2) plotdf(E,[x,y],[x,-20,20],[y,-20,20],[vectors,""]);
```

Após traçar algumas curvas, obtém-se o gráfico:





## 7. Potencial eletrostático



Em 1989 Wolfgang Paul recebeu o prêmio Nobel da física pela sua invenção da **armadilha de íons** que permite isolar um íon. Com essa invenção tornou-se possível estudar um átomo isolado, e pôr a física quântica á prova, já que nas experiências anteriores estavam sempre presentes muitos átomos. O princípio de funcionamento da armadilha de íons é muito simples. Usa-se um potencial de quadrupolo, nomeadamente, um sistema em que em dois lados opostos de um quadrado há dois condutores com potenciais positivos e nos outros dois lados há condutores com potenciais negativos, criando-se assim um ponto de sela no centro do quadrado.

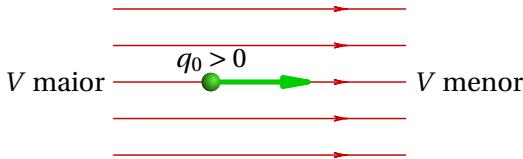
Os íons têm carga positiva e são empurrados para o centro pelos condutores com potencial positivo, e para fora do centro pelos condutores com potencial negativo. O potencial dos condutores é sucessivamente invertido, o que faz com que após algum tempo unicamente o íon que se encontra no centro permaneça nesse ponto de equilíbrio.

## 7.1. Potencial e campo elétrico

A diferença de potencial entre dois pontos separados por um pequeno percurso  $d\vec{r}$  é:

$$\boxed{dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}} \quad (7.1)$$

esta definição implica que o potencial decresce mais rapidamente na direção do campo elétrico e mantém-se constante na direção perpendicular ao campo. Em cada ponto onde o campo não é nulo, existe uma única direção em que o potencial permanece constante; o campo elétrico é perpendicular a essa direção, e aponta no sentido em que  $V$  diminui (figura 7.1). As cargas positivas deslocam-se no sentido em que o potencial decresce, e as cargas negativas deslocam-se no sentido em que o potencial aumenta.



**Figura 7.1.:** O campo elétrico aponta na direção e sentido em que o potencial diminui mais rapidamente.

Se  $E_s$  for a componente do campo na direção do deslocamento vetorial  $d\vec{r}$  e  $ds$  for o módulo desse deslocamento, a equação 7.1 pode ser escrita

$$dV = -E_s ds \quad (7.2)$$

Como tal, a componente do campo elétrico na direção e sentido de um vetor qualquer  $d\vec{r}$  é:

$$\boxed{E_s = -\frac{dV}{ds}} \quad (7.3)$$

onde  $dV$  é calculado na direção do vetor  $d\vec{r}$ . A derivada na expressão anterior é designada **derivada direccional** da função  $V$ , na direção definida por  $d\vec{r}$ .

Em particular, se a direção escolhida for no sentido de um dos 3 eixos cartesianos,  $E_s$  será a componente do campo na direção desse eixo, e a derivada direccional será a derivada parcial em relação à variável associada ao eixo:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (7.4)$$

Para calcular o potencial num ponto, costuma arbitrar-se que o potencial seja nulo no infinito. Assim, o potencial num ponto P obtém-se a partir do integral

$$V = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (7.5)$$

As 3 componentes cartesianas do campo não podem ser 3 funções arbitrárias da posição, já que, a partir das equações 7.4 conclui-se que

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (7.6)$$

que são as condições necessárias e suficientes para garantir que o campo é conservativo. A matriz jacobiana do campo, em função da posição, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

e devido às condições 7.6, essa matriz é simétrica, pelo que só tem valores próprios reais. Como consequência, os pontos de equilíbrio do campo elétrico podem ser pontos de sela ou nós, mas não centros ou focos. No espaço de fase  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ , como o sistema é conservativo, os pontos de equilíbrio podem ser pontos de sela ou centros.

### Exemplo 7.1

O campo elétrico numa região do espaço é dado pela expressão (unidades SI)

$$\vec{E} = 4xy\hat{i} + (2x^2 + 8yz^3)\hat{j} + 12y^2z^2\hat{k}$$

(a) Demonstre que o campo  $\vec{E}$  é conservativo. (b) Calcule o potencial eletrostático (defina  $V = 0$  na origem).

**Resolução.** (a) Para demonstrar que o campo é conservativo, basta calcular as derivadas parciais cruzadas das três componentes do campo e conferir

que são iguais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial y} &= 4x = \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= 0 = \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial z} &= 24yz^2 = \frac{\partial E_z}{\partial y}\end{aligned}$$

(b) O valor do potencial no ponto  $(x, y, z)$  é simétrico do valor do integral de linha do campo, desde a origem (onde se arbitra que  $V = 0$ ) até esse ponto. Como o campo é conservativo, o integral pode ser calculado ao longo de qualquer percurso e o resultado é sempre o mesmo. Escolhe-se um percurso formado pelos três segmentos de reta que unem os pontos  $(0, 0, 0)$ ,  $(x, 0, 0)$ ,  $(x, y, 0)$  e  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned}V(x, y, z) &= - \int_0^x E_x(x, 0, 0) dx - \int_0^y E_y(x, y, 0) dy - \int_0^z E_z(x, y, z) dz \\ &= - \int_0^x 0 dx - 2x^2 \int_0^y dy - 12y^2 \int_0^z z^2 dz \\ &= -2yx^2 - 4y^2z^3\end{aligned}$$

## 7.2. Potencial devido a cargas pontuais

Em duas dimensões, o campo elétrico produzido por um sistema de  $n$  cargas pontuais  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , é dado pela equação 6.3 do capítulo anterior. O potencial é a função de  $x$  e  $y$  com derivadas parciais iguais às duas componentes do campo. Como tal, o potencial é:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{kq_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}} \quad (7.8)$$

onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas da posição da partícula  $i$ .

Esta expressão generalizada a 3 dimensões é:

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{kq_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}} \quad (7.9)$$

em que as coordenadas  $(x_i, y_i, z_i)$  correspondem à posição  $\vec{r}_i$  da partícula número  $i$  com carga  $q_i$ . O denominador na equação 6.3 é a distância  $|\vec{r} - \vec{r}_i|$  da carga  $q_i$  ao ponto onde está a ser calculado o potencial.

### Exemplo 7.2

Uma carga pontual de +1 nC encontra-se na origem, e uma segunda carga de +4 nC encontra-se no ponto  $x = 30$  cm,  $y = 0$ . Encontre a expressão para o potencial no plano  $Oxy$  e represente graficamente essa função de duas variáveis.

**Resolução.** A constante de Coulomb pode ser escrita como:

$$k = 9 \times 10^9 \frac{\text{V} \cdot \text{m}}{\text{C}} = 900 \frac{\text{V} \cdot \text{cm}}{\text{nC}}$$

Na equação 7.9 substitui-se  $k = 900$ , as posições das cargas em cm, os valores das cargas em nC e  $z = 0$ , para obter a expressão do potencial no plano  $Oxy$ , em volts:

$$V(x, y) = \frac{900}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{3600}{\sqrt{(x - 30)^2 + y^2}}$$

Para representar o gráfico dessa função, usam-se os seguintes comandos no *Maxima*:

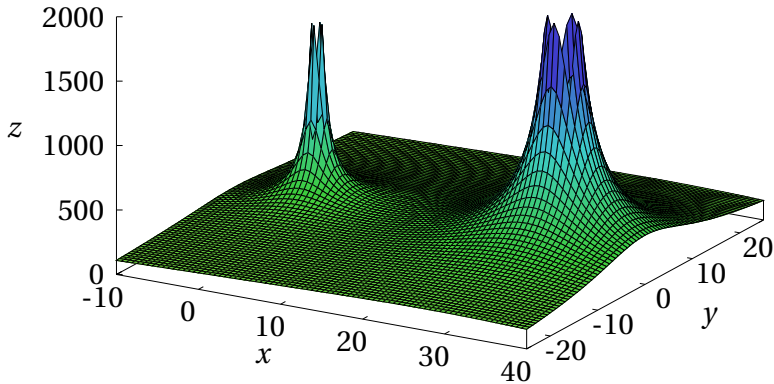
```
(%i1) V: 900/(x^2+y^2)^(1/2) + 3600/((x-30)^2+y^2)^(1/2)$
(%i2) plot3d (V, [x, -10, 40], [y, -25, 25], [z, 0, 2000], [legend, false],
             [grid, 80, 80])$
```

A figura 7.2 mostra o resultado.

A opção  $[z, 0, 2000]$  foi usada para limitar o valor máximo de  $V$  a ser apresentado, já que nos pontos onde se encontram as cargas pontuais positivas o potencial aumenta até infinito.

## 7.3. Superfícies equipotenciais

Outra forma conveniente de representar um potencial como o da figura 7.2, é por meio das **equipotenciais**, que são as curvas de nível, ou seja, as curvas



**Figura 7.2.:** Potencial de duas cargas de +1 nC e +4 nC, no plano  $Oxy$ .

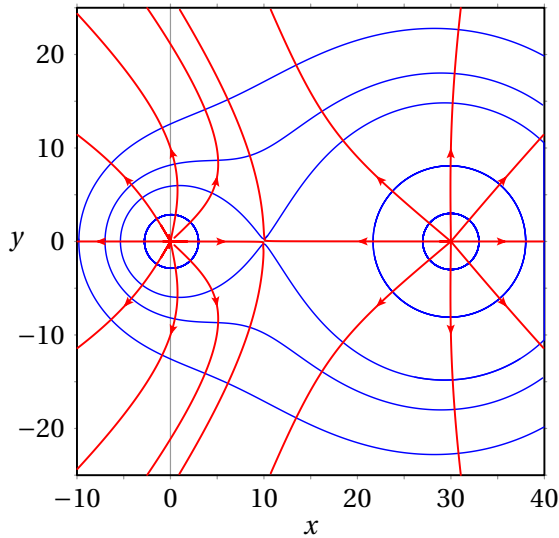
em que em todos os pontos o potencial tem o mesmo valor. No gráfico da figura 7.2 as equipotenciais são a interseção da superfície com diferentes planos paralelos ao plano  $Oxy$ .

O programa `ploteq` do *Maxima* permite obter as curvas equipotenciais correspondentes a um potencial que depende de duas variáveis. Por exemplo, para obter as equipotenciais do potencial já definido em %i 1, basta usar o seguinte comando:

```
(%i3) ploteq (V, [x,-10,40], [y,-25,25], [curves,"blue"])$
```

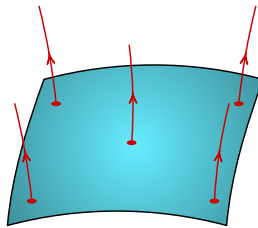
A opção `curves` não é obrigatória e foi usada simplesmente para que as curvas equipotenciais apareçam em azul, e não na cor vermelha por omissão, que tem sido usada para as linhas de campo. Algumas curvas equipotenciais foram traçadas clicando em pontos do gráfico. A seguir entrou-se no menu de configuração, apagou-se o conteúdo do campo `curves` e escreveu-se `red` no campo `fieldlines` para que a seguir, cada vez que se clicar num ponto do gráfico, seja traçada uma linha de campo elétrico (a vermelho). O gráfico obtido mostra-se na figura 7.3.

As figuras 7.2 e 7.3 são duas representações diferentes do mesmo potencial, no plano  $Oxy$ , produzido por duas cargas pontuais. O potencial dessas duas cargas realmente depende de 3 variáveis,  $x$ ,  $y$  e  $z$  e, por isso, as equipotenciais são realmente superfícies no espaço a três dimensões e as curvas apresentadas na figura 7.3 são a intersecção dessas superfícies com o plano  $Oxy$ .



**Figura 7.3.:** Superfícies equipotenciais e linhas de campo de duas cargas pontuais de +1 nC e +4 nC.

Em qualquer direção ao longo de uma superfície equipotencial, em três dimensões, o produto escalar  $\vec{E} \cdot d\vec{r}$  é nulo, já que  $dV = 0$ . Isso implica que o campo elétrico é perpendicular às superfícies equipotenciais (figura 7.4).



**Figura 7.4.:** Superfície equipotencial, e linhas de campo, perpendiculares à superfície.

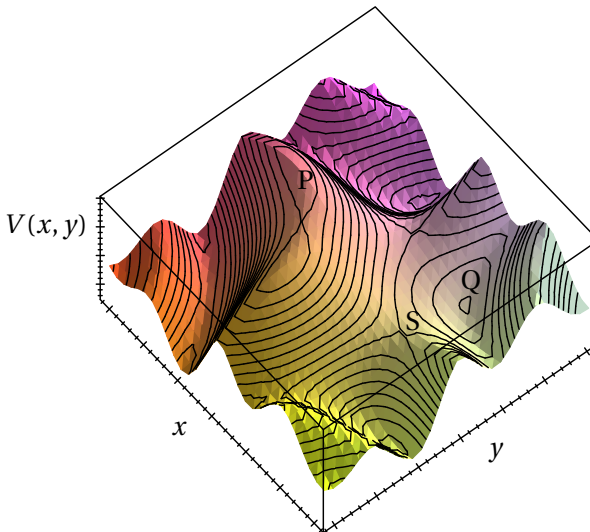
## 7.4. Pontos críticos do potencial

As linhas de campo elétrico apontam na direção e sentido em que o potencial diminui mais rapidamente. Como tal, num ponto onde o potencial é um máximo local, existem linhas a apontar para fora desse ponto (nó

repulsivo); o fluxo numa superfície fechada à volta desse ponto é positivo. Isto implica que na região onde o potencial é máximo deve existir carga positiva.

Num ponto onde o potencial tem um mínimo local, as linhas de campo apontam na direção desse ponto (nó atrativo) e o fluxo numa superfície fechada à volta dele será negativo. Como tal, deve haver carga negativa nesse ponto.

Os máximos e mínimos do potencial podem ser pontos onde o potencial se aproxima de  $+\infty$  ou  $-\infty$ , no caso de cargas pontuais, ou pontos de equilíbrio, onde as derivadas do potencial são todas nulas. Existe um terceiro tipo de ponto crítico, **ponto de sela**, em que o potencial é máximo segundo algumas direções e mínimo segundo outras. Assim sendo, existem direções por onde entram nesse ponto linhas de campo elétrico e outras direções por onde há linhas de campo a sair desse ponto. O fluxo numa superfície fechada à volta do ponto deve ser nulo e, assim, o campo é nulo nesse ponto. Os pontos de sela são pontos de equilíbrio instável.



**Figura 7.5.:** Potencial no plano  $(x, y)$  com vários pontos críticos.

Como nos pontos onde o potencial é máximo ou mínimo há linhas de campo a sair ou a entrar em todas as direções, esses pontos encontram-se no interior de superfícies equipotenciais fechadas, umas dentro das outras, aproximando-se do ponto mínimo ou máximo. Nos pontos de sela



uma superfície equipotencial cruza-se com si própria. No exemplo da figura 7.3 há um ponto de sela, onde uma curva equipotencial se cruza com si própria, e existem duas linhas de campo a terminar nesse ponto e outras duas a partir dele. Nesse ponto de sela o campo elétrico é nulo.

A figura 7.5 mostra outro exemplo de um potencial mais complicado, em função de  $x$  e  $y$ , com vários pontos de sela, máximos e mínimos locais. No ponto P há um máximo local, no ponto Q há um mínimo local e o ponto S é ponto de sela.

## 7.5. Potencial e energia eletrostática

Se uma partícula com carga  $q$  se desloca entre dois pontos com uma diferença de potencial  $\Delta V$  a variação da sua energia potencial eletrostática é:

$$\Delta U_e = q \Delta V \quad (7.10)$$

Como o campo elétrico é conservativo, a energia mecânica conserva-se e a variação de energia potencial implica uma variação de energia cinética.

Quando se trata de partículas elementares com cargas da ordem de grandeza da carga elementar, é habitual utilizar uma unidade de energia designada de **elétron-volt** (eV), que corresponde à energia adquirida por um elétron que se desloca para uma região onde o potencial aumenta de 1 V. Assim, passando para o sistema internacional:

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (7.11)$$

## 7.6. Potencial nos condutores

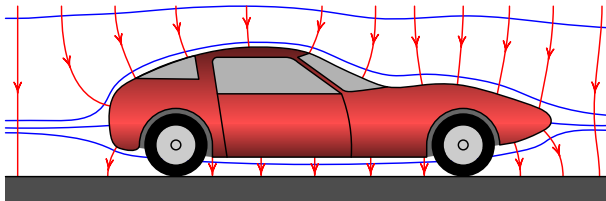
Dentro de um condutor isolado o campo elétrico é nulo. Se assim não fosse, existiria movimento das cargas livres, criando-se um campo interno que contrariava o campo externo; o movimento das cargas livres só pára quando o campo total é nulo. Num metal, o tempo que demoram as cargas livres a redistribuírem-se até o campo interno ficar nulo é muito reduzido, da ordem dos  $10^{-19}$  s.

Como o campo elétrico é nulo dentro do condutor isolado, não existem linhas de campo elétrico, e o potencial em todos os pontos dentro do

condutor é o mesmo. O fluxo em qualquer parte dentro do condutor também é nulo e, assim, de acordo com a lei de Gauss, não pode existir carga em nenhum ponto dentro do condutor. Toda a carga elétrica se acumula na superfície do condutor.

A própria superfície do condutor é uma superfície equipotencial, já que todos os pontos do condutor têm o mesmo potencial e as linhas de campo elétrico fora do condutor são então perpendiculares à sua superfície.

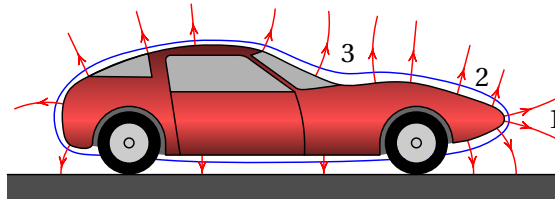
Um exemplo de condutor isolado é um automóvel. A carroçaria metálica é um condutor e os pneus de borracha são isoladores. A superfície da carroçaria é uma superfície equipotencial e a Terra, que também é condutora, é outra superfície equipotencial. Se não existir nenhuma carga elétrica no automóvel, o campo elétrico da atmosfera, que é vertical e para baixo, induzirá cargas negativas na parte superior da carroçaria, e cargas positivas na parte inferior. Algumas linhas de campo terminarão na parte superior da carroçaria, perpendiculares a ela, e outras linhas de campo começarão na parte inferior, também perpendiculares a ela, tal como mostra a figura 7.6. No chão, que tem menor potencial do que o automóvel, as linhas de campo terminam todas na direção vertical.



**Figura 7.6.:** Linhas do campo elétrico da atmosfera e equipotenciais, num automóvel com carga nula.

Se o automóvel estiver carregado, por exemplo, com carga positiva como na figura 7.7, o potencial nele tem um valor máximo local. A superfície da carroçaria é superfície equipotencial e há outras superfícies equipotenciais à sua volta, com valor menor. Há linhas de campo a começar em todos os pontos da superfície da carroçaria, perpendiculares a ela.

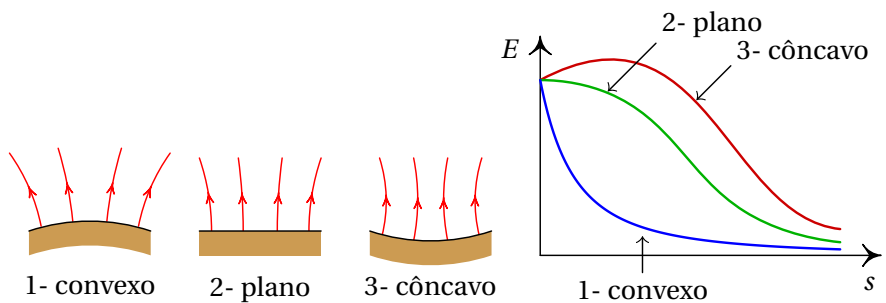
A distribuição de cargas na superfície de um condutor isolado não pode ser uniforme. Por exemplo, no caso do automóvel da figura 7.7, com carga positiva distribuída na sua superfície, admitamos que a carga superficial  $\sigma$  fosse igual em toda a superfície. A lei de Gauss implica que o módulo do campo em cada ponto da superfície é igual a  $4\pi k\sigma$ ; como estamos a



**Figura 7.7.:** Superfícies equipotenciais e linhas de campo de um automóvel com carga positiva.

admitir que a carga superficial  $\sigma$  é constante, então o módulo do campo,  $E$ , seria igual em todas as partes da superfície, em particular nas regiões 1, 2 e 3 indicadas na figura 7.7.

A figura 7.8 mostra as linhas de campo nessas três regiões; na região 1, onde o condutor é convexo, as linhas de campo afastam-se entre si, ou seja, o campo elétrico diminui em função da distância  $s$  desde a superfície. Na região 2, onde o condutor é plano, as linhas de campo são paralelas na vizinhança da superfície, o que implica que o campo permanece constante para  $s$  próxima de zero, mas as linhas acabam por se afastar entre si, fazendo com que  $E$  comece a diminuir em função de  $s$ . Na região 3, onde o condutor é côncavo, as linhas de campo inicialmente aproximam-se entre si, antes de começar a se afastar; isso implica que  $E$  aumenta em função de  $s$  até um valor máximo, e logo começa a diminuir. O gráfico no lado direito da figura 7.8) mostra como seria  $E$ , em função de  $s$ , nessas 3 regiões.

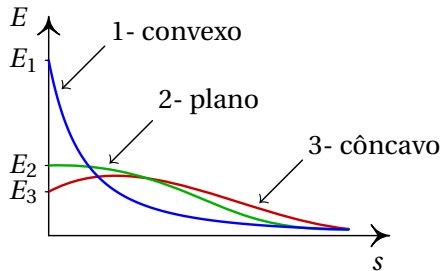


**Figura 7.8.:** Módulo do campo elétrico em função da distância  $s$  a partir da superfície do condutor, em 3 regiões de um condutor, admitindo que a carga superficial é constante.

O potencial em cada uma das 3 regiões do condutor seria a área sobre cada

uma das três curvas no gráfico da figura 7.8 (integral do campo elétrico desde a superfície,  $s = 0$ , até infinito). Como tal, o potencial na região 3, onde o condutor é côncavo, seria maior do que na região 2, onde o condutor é plano, e ainda maior do que na região 1, onde o condutor é convexo.

Mas como o potencial nas três regiões tem de ser igual, conclui-se que o campo na superfície e, portanto, a carga superficial, não pode ser igual nas três regiões. A carga superficial tem de ser maior na região convexa, menor na região plana, e ainda menor na região côncava. Desta forma obtém-se o mesmo valor para o integral do campo elétrico nas 3 regiões, como se mostra na figura 7.9.



**Figura 7.9.:** Gráfico do módulo do campo elétrico em 3 partes diferentes da superfície de um automóvel com carga.

Nas regiões convexas, quanto menor for o raio da curvatura, maior será a carga superficial, e nas regiões côncavas quanto maior for o raio de curvatura, maior será a carga superficial. A carga acumula-se mais nas pontas da superfície do condutor. Esse efeito é o princípio de funcionamento do pára-raios; os raios são atraídos para a ponta do pára-raios, onde há uma maior acumulação de cargas e, portanto, campo elétrico mais forte.

### 7.6.1. Potencial de uma esfera condutora

Numa esfera condutora, as cargas distribuem-se uniformemente na superfície. No capítulo sobre o campo elétrico viu-se que esse tipo de distribuição de carga produz campo nulo no interior da esfera e no exterior, campo é idêntico ao que existiria se toda a carga estivesse concentrada no centro da esfera. Como tal, a expressão do potencial fora da esfera é a mesma do

que para uma carga pontual  $Q$ :

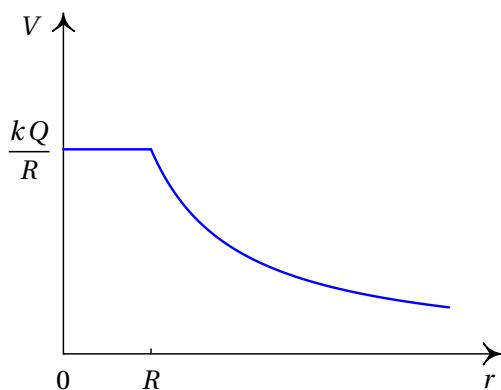
$$V = \frac{kQ}{r} \quad (\text{se: } r \geq R) \quad (7.12)$$

em que  $Q$  é a carga total da esfera, e  $R$  o seu raio.

O campo nulo no interior da esfera implica potencial constante. Como o potencial é função contínua da posição, o potencial no interior da esfera, será igual ao potencial na sua superfície, nomeadamente

$$V = \frac{kQ}{R} \quad (\text{se: } r \leq R) \quad (7.13)$$

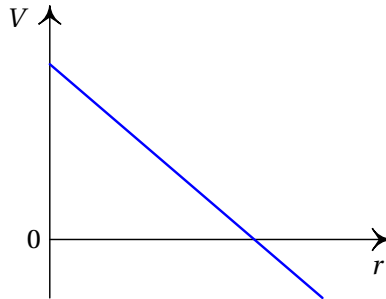
Dentro da esfera ( $r \leq R$ ) o campo é nulo e o potencial é constante. Fora da esfera, o potencial decresce na proporção inversa da distância ao centro (ver figura 7.10).



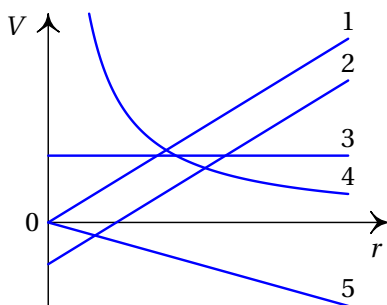
**Figura 7.10.:** Potencial numa esfera condutora carregada.

## Perguntas

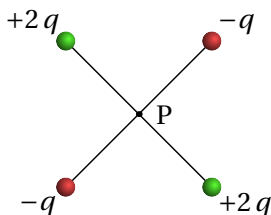
- O potencial produzido por um sistema de duas cargas pontuais,  $Q$  e  $q$ , é nulo num ponto  $P$  (arbitrando potencial nulo a uma distância infinita das cargas). Isso implica que:
  - A força sobre uma carga de prova no ponto  $P$  é nula.
  - $Q$  e  $q$  têm o mesmo sinal.
  - O campo elétrico é nulo no ponto  $P$ .
  - O trabalho total necessário para trazer as cargas  $Q$  e  $q$  até às suas posições é nulo.
  - O trabalho necessário para trazer uma carga desde o infinito até o ponto  $P$  é nulo.
- Uma carga de  $4 \mu\text{C}$  encontra-se dentro de um campo elétrico com módulo igual a  $4 \times 10^5 \text{ N/C}$ . Qual é o trabalho necessário para deslocar essa carga uma distância de 20 cm numa direção a  $60^\circ$  com o campo elétrico?
  - 0.28 J
  - 160 mJ
  - 0.68 J
  - 28 J
  - 16 J
- O potencial elétrico de um sistema, em função da distância ao longo de uma direção dada é representado pelo gráfico:



Qual das cinco funções no gráfico a seguir representa melhor a componente do campo ao longo da mesma direção?



- A. 4  
B. 1  
C. 2
- D. 3  
E. 5
4. Quatro cargas pontuais, com valores  $+2q$  e  $-q$ , encontram-se nos vértices de um quadrado, como mostra a figura. O que é possível afirmar acerca do potencial ( $V$ ) e do módulo do campo ( $E$ ) no centro do quadrado (P)?



- A.  $E \neq 0, V > 0$   
B.  $E = 0, V = 0$   
C.  $E = 0, V > 0$
- D.  $E \neq 0, V < 0$   
E.  $E \neq 0, V \neq 0$
5. Perto de uma carga pontual existe um ponto onde o potencial elétrico produzido pela carga é  $3\text{ V}$  (arbitrando potencial nulo no infinito) e o módulo do campo elétrico da carga é  $200\text{ N/C}$ . Calcule a distância desde a carga até ao ponto.
- A.  $3\text{ m}$   
B.  $3\text{ cm}$   
C.  $1.5\text{ cm}$
- D.  $0.67\text{ cm}$   
E.  $6.7\text{ cm}$

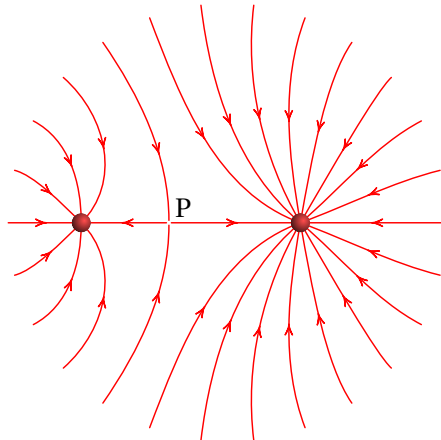
## Problemas

1. O potencial no plano  $Oxy$  é

$$V(x, y) = \frac{1250}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} + 50x$$

Encontre a expressão do campo elétrico em função de  $x$  e  $y$ . Usando Maxima, represente as superfícies equipotenciais e as linhas de campo. Existe algum ponto onde o campo é nulo? A que tipo de sistema corresponde esse potencial?

2. Existe campo elétrico uniforme, com módulo de  $15 \text{ kN/C}$ , entre duas placas paralelas separadas de  $2.0 \text{ cm}$ . Determine a diferença de potencial entre as placas.
3. O potencial elétrico a uma certa distância de uma carga pontual é  $600 \text{ V}$  (arbitrando potencial nulo no infinito) e o valor do campo elétrico é  $200 \text{ N/C}$ . Calcule a distância e o valor da carga.
4. Duas superfícies condutoras esféricas e concêntricas têm raios de  $5 \text{ cm}$  e  $7 \text{ cm}$ . A superfície menor tem uma carga total de  $3 \text{ nC}$  e a carga total na superfície maior é de  $-2 \text{ nC}$ . Calcule a diferença de potencial entre as duas superfícies.
5. A figura representa as linhas de campo elétrico devido a duas cargas pontuais separadas de  $7 \text{ cm}$ . A razão entre os valores das duas cargas é  $4/9$ . (a) Calcule a distância do ponto  $P$  às partículas. (b) Sabendo que a carga da partícula no lado direito é de  $-8 \text{ nC}$ , calcule o potencial no ponto  $P$  (admita  $V = 0$  no infinito).



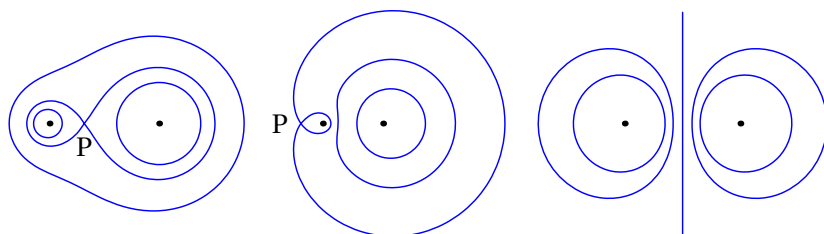


6. As três figuras seguintes representam as superfícies equipotenciais de três sistemas de duas cargas pontuais  $q_1$  e  $q_2$ . Em todos os casos  $q_1 = 3 \text{ nC}$  e a distância entre as duas cargas é 6 cm. Nas figuras (a) e (b), a distância desde o ponto P até a carga  $q_1$  é igual a 2 cm. Determine o valor de  $q_2$  nos três casos.

(a)

(b)

(c)

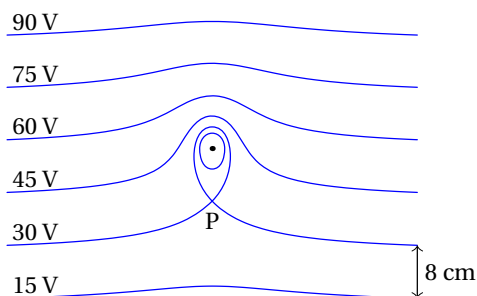


7. O potencial no plano  $Oxy$  é (unidades SI):

$$V = \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{3}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Calcule o campo elétrico em qualquer ponto do plano  $Oxy$ . Usando o Maxima, represente as superfícies equipotenciais e as linhas de campo. Existe algum ponto de campo elétrico nulo?

8. A figura mostra as superfícies equipotenciais devidas a uma carga pontual e a um campo elétrico uniforme  $\vec{E}_{\text{ext}}$ . A grandes distâncias da carga pontual, as superfícies são planos paralelos e a distancia entre dois planos com diferença de potencial de 15 V é de 8 cm. (a) Calcule o módulo e a direção do campo externo  $\vec{E}_{\text{ext}}$ . (b) Diga se a carga pontual é positiva ou negativa e justifique a sua resposta. (c) Qual a direção da força sobre a carga pontual? (d) Se a distância entre a carga pontual e o ponto P é 9 cm, determine o valor da carga pontual.



# Respostas

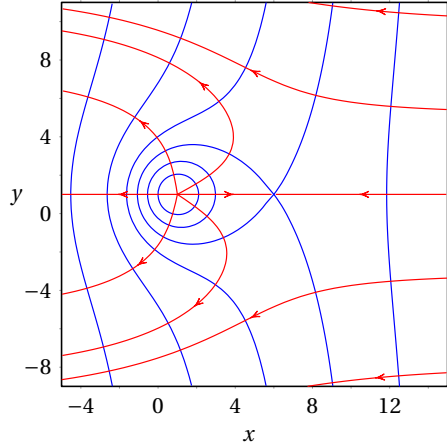
Perguntas: 1. E. 2. B. 3. D. 4. C. 5. C.

## Problemas

$$1. E_x = \frac{1250(x-1)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2]^{3/2}} - 50$$

$$E_y = \frac{1250(y-1)}{[(x-1)^2 + (y-1)^2]^{3/2}}$$

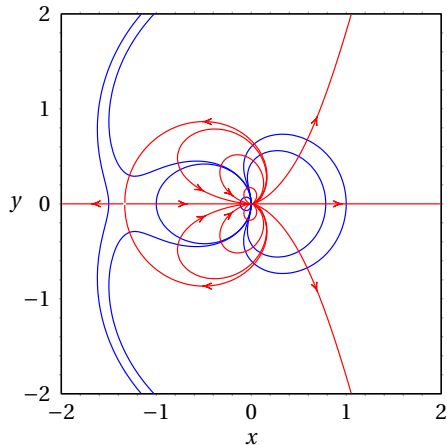
O campo é nulo no ponto (6, 1). Trata-se do potencial de uma carga pontual positiva, no ponto (1, 1), dentro de um campo externo uniforme  $\vec{E} = -50 \hat{i}$ .



- 2. 0.3 kV.
- 3. 3 m, 200 nC
- 4. 154.3 V
- 5. (a) 4.2 cm e 2.8 cm. (b) -2857 V
- 6. (a) 12 nC (b) -48 nC (c) -3 nC
- 7.  $E_x = \frac{3x^3 + 3xy^2 + 4x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$

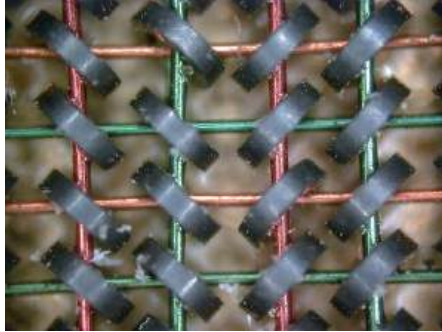
$$E_y = \frac{3y(x^2 + y^2 + 2x)}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

O campo é nulo no ponto (x, y) = (-4/3, 0)



- 8. (a) 187.5 V/m, para baixo (b) negativa (c) para cima (d) -0.169 nC

## 8. Campo magnético



As primeiras memórias de computador que foram construídas, consistiam numa quadrícula de fios de cobre, com pequenos anéis de material ferromagnético em cada interseção entre dois fios. Fazendo passar uma corrente por dois fios perpendiculares, consegue-se magnetizar o anel que está na interseção entre os dois fios; nos outros anéis, a corrente de um único fio não é suficiente para os magnetizar. O estado de magnetização de um anel pode ser detetado pois produz interferências na corrente nos fios que passam pelo anel. Para apagar uma posição na memória (desmagnetizar um dos anéis), faz-se passar corrente nos dois fios correspondentes, em sentido oposto ao sentido usado para magnetizar o anel. O sistema na fotografia está ampliado; os 16 anéis que se mostram permitem armazenar apenas 2 bytes, e fazem parte de uma memória com capacidade total de 4 quilobytes. Hoje em dia usam-se outras técnicas que permitem obter capacidades um milhão de vezes superior (gigabytes), num espaço muito menor.

## 8.1. Força magnética

A força magnética é também um tipo de força que atua a distância, sem necessidade de um meio nem de contacto, tal como a força gravítica e a força elétrica. Pode ser atrativa ou repulsiva, o que fez com que fosse confundida com a força elétrica desde a época dos gregos em que já eram conhecidas essas duas forças, até 1600, quando William Gilbert a identificou como uma força diferente da elétrica.

Na Grécia antiga, as rochas extraídas das minas da região da Magnésia eram ímanes naturais que deram origem ao termo magnetismo. Um íman tem sempre um polo norte e um polo sul. Aproximando dos polos opostos dois ímanes, surge uma força atrativa entre eles; entre polos semelhantes a força é repulsiva.

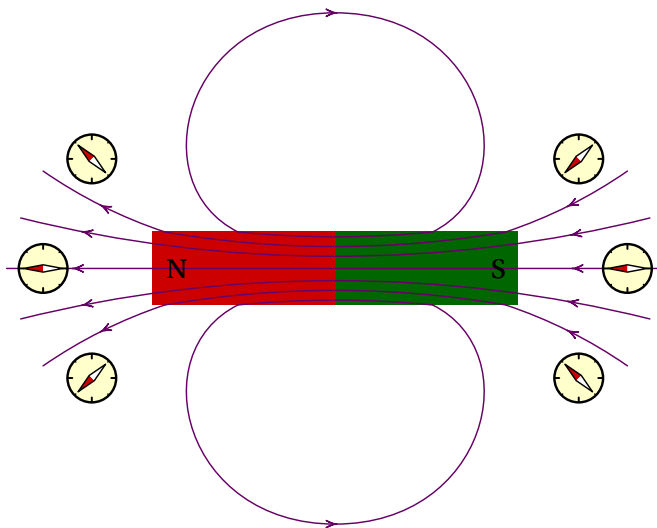
Um íman cria um campo magnético à sua volta. O campo pode ser detetado com a agulha de uma bússola, que é também um pequeno íman. A figura 8.1 mostra um íman em forma de barra retangular; o polo norte do íman costuma ser pintado de vermelho. Aproximando uma bússola dos polos do íman, consegue-se ver a direção das linhas de campo magnético; por convenção, as linhas de campo são no sentido em que aponta o polo norte da bússola; em cada ponto define-se um vetor de campo magnético,  $\vec{B}$ , com o sentido e direção da orientação da bússola.

As linhas de campo saem do polo norte e entram no polo sul; são semelhantes às linhas de campo elétrico de um dipolo elétrico, mas a diferença é que as linhas de campo magnético não terminam no polo sul, nem começam no polo norte, mas são linhas fechadas que passam pelos dois polos (figura 8.1).

Partindo um íman em vários pedaços menores, em cada pedaço aparecem um polo norte e um polo sul. É impossível obter um íman com unicamente um polo norte sul (não existem monopolos magnéticos). Essa é a maior diferença em relação ao campo elétrico, onde podem existir cargas positivas ou negativas por separado.

No caso do campo elétrico, viu-se que através de uma superfície fechada dentro da qual existe unicamente uma carga pontual (monopolo elétrico), o fluxo é diferente de zero e tem o mesmo sinal da carga. O teorema da divergência implica que no ponto onde se encontra a carga pontual, a **divergência** do campo elétrico,

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (8.1)$$



**Figura 8.1.:** Linhas de campo de um ímã retangular, na direção em que aponta a bússola.

tem o mesmo sinal da carga.

No caso do campo magnético, a inexistência de monopolos magnéticos implica que a divergência do campo magnético é nula em qualquer ponto:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (8.2)$$

A divergência de um campo vetorial é igual ao traço da sua matriz jacobiana, que no caso do campo magnético é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

e o traço é igual à soma dos valores próprios da matriz. Como o traço é nulo, os valores próprios não podem ser todos números reais positivos ou negativos e fica excluída a possibilidade de existirem nós ou focos no campo magnético, isto é, não há pontos onde as linhas de campo convergem em todas as direções, nem pontos onde as linhas de campo saem em todas as direções.

Nos pontos de equilíbrio do campo magnético, o valor nulo do traço da matriz jacobiana implica que os valores próprios só podem ser 3 números reais com sinais diferentes ou um valor próprio nulo e os outros dois imaginários e mutuamente complexos conjugados. Como tal, os pontos de equilíbrio do campo magnético podem ser apenas centros ou pontos de sela.

Por exemplo, num íman retangular como o da figura 8.1 as linhas de campo abrem-se fora de cada polo, curvando-se para passar pelo outro polo; isso implica que o campo decresce rapidamente perto dos polos. Uma forma de conseguir que as linhas de campo não se abram tanto, para obter um campo mais forte, consiste em dobrar a barra em forma de ferradura, para que os dois polos fiquem mais próximos (ver figura 8.2).



**Figura 8.2.:** Íman em forma de ferradura. O polo norte está pintado de vermelho.

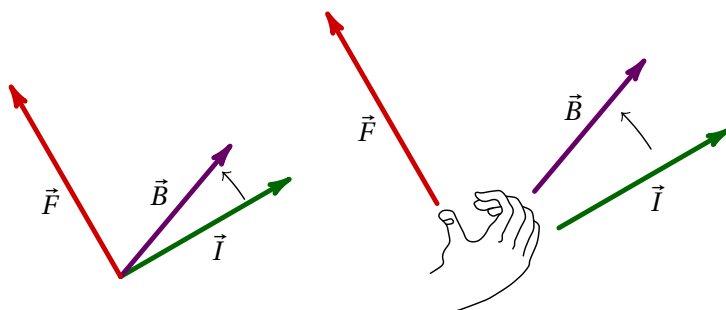
A própria Terra é também um íman natural e, por isso, a bússola aponta na direção do polo norte geográfico. As linhas do campo magnético terrestre têm o sentido do polo sul geográfico para o polo norte geográfico. Como tal, o polo norte geográfico é, de facto, o polo sul magnético da Terra, e o polo sul geográfico é o polo norte magnético.

Os materiais que podem ser magnetizados, formando um íman, chamam-se **ferromagnéticos**; a maior parte das substâncias são **diamagnéticas** e não podem ser magnetizadas nem interagem com o campo magnético de forma apreciável, excepto se este for muito forte, sentindo então uma força repulsiva. Existem também substâncias ditas **paramagnéticas** que são ligeiramente atraídas pelos ímanes (os materiais ferromagnéticos são atraídos com maior força).

## 8.2. Força magnética sobre condutores com corrente

Um campo magnético também pode ser detetado com um fio com corrente. O campo magnético produz uma força sobre o fio, diretamente proporcional à corrente. A força magnética sobre um pequeno segmento de fio depende também da orientação do fio em relação ao campo magnético; se o fio for paralelo ao campo magnético, a força é nula, e se o fio for perpendicular ao campo, a força é máxima. O módulo da força também é diretamente proporcional ao comprimento do pedaço de fio. A constante de proporcionalidade define o módulo do campo magnético,  $B$ .

A direção da força é sempre perpendicular ao campo magnético e perpendicular ao fio. O sentido da força segue a regra da mão direita entre o sentido da corrente e o sentido do campo magnético, ou seja, colocando a mão direita sobre o plano da corrente e do campo magnético, como se mostra na figura 8.3, de forma que os dedos rodem desde a corrente até o campo, o polegar indica o sentido da força.



**Figura 8.3.:** A força magnética é no sentido da regra da mão direita desde a corrente até o campo magnético.

Usando vetores, a expressão da força magnética é a seguinte

$$\Delta \vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} \Delta s \quad (8.4)$$

em que  $\vec{I}$  é o vetor que representa a corrente, na direção tangente ao fio e  $\Delta s$  é o comprimento do segmento de fio.

No caso geral, tem que se integrar a equação 8.4 para obter a força total sobre um fio. No caso particular de um fio retilíneo, com comprimento  $L$ ,

num campo magnético uniforme, a força resultante é:

$$\vec{F} = L \vec{I} \times \vec{B} \quad (8.5)$$

A equação 8.4 permite concluir que, no sistema internacional de unidades, a unidade do campo magnético é  $N/(m \cdot A)$ . Essa unidade é o **tesla**, identificado pela letra T. Um campo magnético de 1 T é bastante forte. Uma unidade menor, usada com frequência, é o gauss, identificado com a letra G:

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T} \quad (8.6)$$

o módulo do campo magnético terrestre, na superfície da Terra, encontra-se entre 0.3 G e 0.6 G, consoante o local.

### 8.3. Momento magnético

A força resultante sobre a agulha de uma bússola, devida ao campo magnético da Terra, é quase nula, já que sobre os dois polos magnéticos atuam forças opostas da mesma grandeza. No entanto, se a agulha não estiver alinhada com as linhas do campo magnético terrestre, essas duas forças constituem um **binário** com momento resultante que se observa facilmente através da rotação da agulha. Qualquer íman, em particular a agulha da bússola, tem um **momento magnético**,  $\vec{m}$  que é um vetor orientado do seu polo sul para o seu polo norte. Um campo magnético externo  $\vec{B}$  uniforme produz sobre o íman um binário  $\vec{M}$ , igual ao produto vetorial entre o momento magnético do íman e o campo externo:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (8.7)$$

O momento magnético  $\vec{m}$  aponta do polo sul para o polo norte do íman e o momento do binário é no sentido que faz rodar  $\vec{m}$  até apontar no sentido do campo externo  $\vec{B}$ .

O momento do binário produzido pelo campo magnético é o princípio usado nos motores elétricos (figura 8.4). O motor tem uma bobina, que pode rodar à volta de um eixo, dentro de um campo magnético produzido por ímanes fixos. A bobina é um fio condutor enrolado em várias voltas e cada volta completa do fio na bobina designa-se de **espira**.



No caso de uma espira plana, percorrida por uma corrente  $I$ , dentro de um campo externo uniforme  $\vec{B}$ , pode-se mostrar que o momento do binário resultante sobre a espira satisfaz a equação 8.7, sendo o momento magnético da espira igual a:

$$\vec{m} = AI\vec{e}_n \quad (8.8)$$

onde  $A$  é a área plana delimitada pela espira e  $\vec{e}_n$  o versor perpendicular à espira, no sentido definido pela regra da mão direita, como mostra a figura 8.5: o polegar da mão direita define o sentido de  $\vec{m}$ , quando os outros quatro dedos apontam no sentido da corrente na espira.

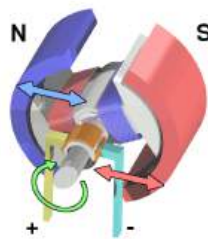


Figura 8.4.: Motor elétrico.

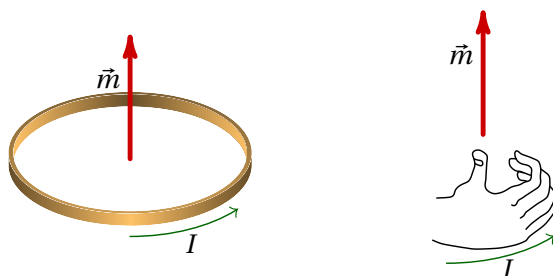


Figura 8.5.: Definição do momento magnético de uma espira.

O momento magnético de uma bobina é a soma dos momentos magnéticos de todas as suas espiras. Se a bobina tiver  $N$  espiras, todas com a mesma área  $A$ , o seu momento magnético é  $\vec{m} = NIA\vec{e}_n$ .

A equação 8.7 pode ser generalizada ao caso em que o campo magnético não é uniforme, dividindo a espira em pequenos pedaços com momento magnético infinitesimal  $d\vec{m}$  e admitindo que o campo em cada espira infinitesimal é constante; a soma de todas as contribuições conduz ao momento do binário total igual ao integral de  $d\vec{m} \times \vec{B}$  na superfície delimitada pela espira.

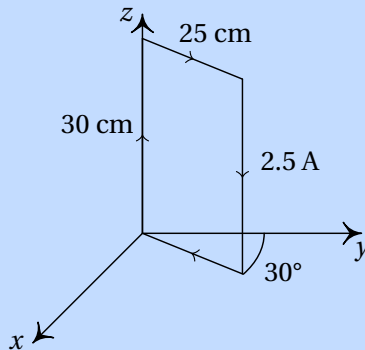
Num motor, os dois terminais da bobina ligam-se a um comutador que roda juntamente com a bobina. Na figura 8.4 pode-se ver o comutador (cilindro com dois setores metálicos independentes) a fazer contato com os dois terminais + e - ligados a uma f.e.m. externa. Quando a bobina roda, chega até uma posição em que o segmento do comutador que estava em

contato com o terminal positivo passa a estar em contato com o terminal negativo e vice-versa, invertendo-se o sentido da corrente na bobina.

O comutador é colocado de forma a que, quando o momento magnético da bobina estiver na direção e sentido do campo magnético do íman (da esquerda para a direita, na figura 8.4), o sentido da corrente seja invertido, fazendo com que o ângulo entre o momento magnético e o campo passe de  $0^\circ$  para  $180^\circ$ . Como tal, a bobina roda constantemente, porque o momento do binário magnético tende sempre a diminuir esse ângulo até  $0^\circ$ .

### Exemplo 8.1

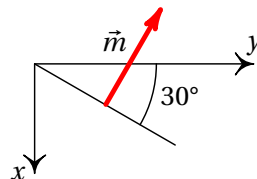
Uma espira retangular com lados de 25 cm e 30 cm, transporta uma corrente de 2.5 A, no sentido indicado na figura. A espira encontra-se num plano vertical que faz um ângulo de  $30^\circ$  com o plano  $Oyz$  e existe um campo magnético uniforme  $\vec{B} = 0.2 \hat{j}$  (SI). Calcule o momento do binário produzido pelo campo magnético sobre a espira e diga em que sentido rodará a espira.



**Resolução.** A área da espira é:

$$A = 0.25 \times 0.30 = 0.075 \text{ m}^2$$

Usando a regra da mão direita, vê-se que o momento magnético  $\vec{m}$  da espira é paralelo ao plano  $Oxy$  com o sentido indicado na figura ao lado.



O versor normal é portanto:

$$\vec{e}_n = -\sin 60^\circ \hat{i} + \cos 60^\circ \hat{j} = -0.866 \hat{i} + 0.5 \hat{j}$$

e o momento magnético da espira é:

$$\vec{m} = 0.075 \times 2.5 (-0.866 \hat{i} + 0.5 \hat{j}) = (-0.162 \hat{i} + 0.0938 \hat{j}) \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

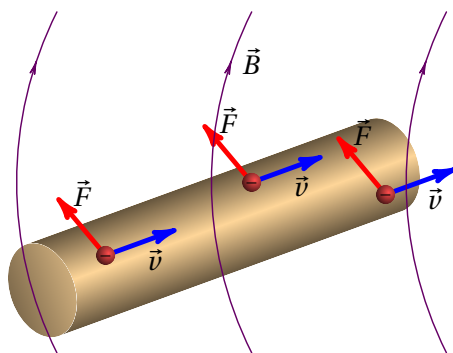
O momento do binário é igual ao produto vetorial entre o momento magnético da espira e o campo magnético:

$$\vec{M} = (-0.162 \hat{i} + 0.0938 \hat{j}) \times (0.2 \hat{j}) = -32.4 \hat{k} \text{ (mN} \cdot \text{m)}$$

A espira roda até o seu momento magnético apontar na direção e sentido do campo magnético. Consequentemente, a bobina roda à volta dum eixo paralelo ao eixo dos  $z$ , que passa pelo seu centro de massa, de forma a que o ângulo inicial de  $30^\circ$  aumente até  $90^\circ$ .

## 8.4. Força magnética sobre cargas pontuais

A força produzida pelo campo magnético sobre um fio com corrente é o resultado das forças que atuam sobre cada uma das cargas de condução, devido ao seu movimento (figura 8.6).



**Figura 8.6.:** Força magnética sobre as cargas de condução, num condutor com corrente.

Quando não há corrente, a velocidade média das cargas de condução é nula e a força magnética resultante também é nula. Quando a corrente aumenta no condutor, a velocidade média das cargas de condução aumenta em proporção direta à corrente e a força sobre cada carga de condução também aumenta em proporção direta. A força magnética sobre cada carga de

condução e, de forma geral, a força magnética sobre qualquer partícula com carga  $q$  é dada pela equação:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (8.9)$$

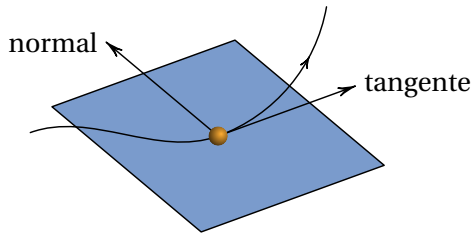
em que  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula e  $\vec{B}$  é o campo magnético no ponto onde se encontra a partícula. Como tal, a força magnética é diretamente proporcional ao módulo da velocidade da partícula e à sua carga. Se a velocidade for paralela ao campo, a força é nula, e se a velocidade for perpendicular ao campo, a força tem intensidade máxima.

A força magnética é perpendicular à velocidade da partícula e perpendicular ao campo. O sentido da força determina-se usando a regra da mão direita, tal como foi feito na figura 8.3 para um fio com corrente, mas tendo em conta que o vetor corrente  $\vec{I}$  é no mesmo sentido da velocidade da partícula, se a sua carga for positiva, ou no sentido oposto, se a sua carga for negativa.

Numa região onde existe um campo elétrico,  $\vec{E}$ , e um campo magnético,  $\vec{B}$ , a força sobre uma partícula com carga  $q$  e velocidade  $\vec{v}$  é

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (8.10)$$

Em geral, a força resultante pode ter componentes nas direções tangencial e normal (ver figura 8.7). A força magnética é sempre no plano perpendicular à direção tangencial. Qualquer mudança de energia cinética é devida ao campo elétrico já que o campo magnético não realiza trabalho, por produzir sempre uma força perpendicular ao deslocamento.

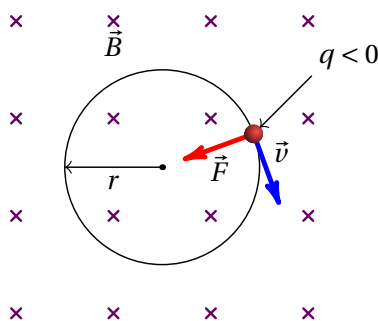


**Figura 8.7.:** Direções tangencial e normal à trajetória de uma partícula.

As linhas de campo de um campo magnético uniforme são retas paralelas e é habitual desenhá-las equidistantes entre si, para indicar a uniformidade do campo. Se o campo uniforme for perpendicular à folha, a intersecção

de cada linha de campo com o plano da folha será representada ou com um ponto ou com um x. Um ponto representa uma linha de campo que aponta para cá da folha e um x corresponde a uma linha de campo que aponta para lá da folha; por exemplo, na figura 8.8 está representado um campo magnético uniforme, perpendicular à folha e apontando para lá da folha.

Considere-se uma partícula com carga  $q$ , que se desloca num campo magnético uniforme, não havendo outras forças presentes (figura 8.8). Se a velocidade inicial da partícula for perpendicular ao campo, o módulo da força magnética é  $q v B$ .



**Figura 8.8.:** Carga pontual num campo  $\vec{B}$  uniforme e para lá da folha.

Como em cada instante a força é perpendicular à velocidade, e o módulo da velocidade permanece constante (a força magnética não altera a energia cinética), o resultado é um movimento circular uniforme em que a força centrípeta,  $m v^2 / r$  é a força magnética  $q v B$ . O raio da trajetória e a velocidade angular do movimento são então:

$$\boxed{r = \frac{m v}{q B} \quad \omega = \frac{q B}{m}} \quad (8.11)$$

As partículas com carga negativa rodam em sentido oposto às partículas com carga positiva e no caso da figura 8.8, a carga da partícula é negativa. Se a velocidade inicial não for perpendicular ao campo, a componente da velocidade no sentido do campo permanece constante, enquanto que a componente perpendicular roda, com a velocidade angular dada pela equação 8.11. A sobreposição do deslocamento uniforme, na direção do campo, com o movimento circular uniforme no plano perpendicular, produz um movimento **helicoidal** que segue as linhas de campo magnético.

O raio da hélice é menor nas regiões onde o campo é mais forte e as linhas de campo estão mais próximas umas das outras.

Um campo elétrico uniforme e um campo magnético uniforme, perpendiculares entre si, servem para selecionar partículas com uma determinada velocidade, como no dispositivo da figura 8.9, chamado **filtro de velocidades**. Na figura 8.9 o campo elétrico aponta para cima, e o campo magnético aponta para cá da folha.

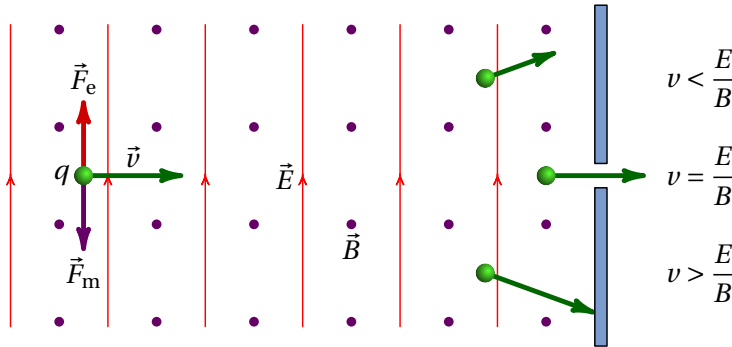


Figura 8.9.: Filtro de velocidades.

Uma partícula com carga positiva  $q$  e velocidade para a direita fica sujeita a uma força elétrica  $q\vec{E}$  para cima, e uma força magnética de módulo  $qvB$ , para baixo. Consequentemente, a força resultante é nula se o módulo da velocidade for exatamente igual a

$$v = \frac{E}{B} \quad (8.12)$$

Coloca-se uma barreira no filtro, de maneira que unicamente as partículas que se deslocam em linha reta (com velocidade  $E/B$ ) logrem ultrapassar a barreira.

## 8.5. Campo magnético de um fio com corrente

O campo magnético produz forças sobre os condutores com corrente e os condutores com corrente também produzem campos magnéticos. Um cabo condutor que transporta corrente produz linhas de campo magnético à sua volta. O campo produzido por um condutor com corrente pode ser

calculado por meio da lei de Biot-Savart, que não é estudada aqui. No caso do campo elétrico, viu-se que para alguns casos simples pode usar-se a lei de Gauss para calcular o campo. A lei análoga à lei de Gauss, para o campo magnético, é a **lei de Ampère** que estabelece que

*O integral de linha do campo magnético, em qualquer curva fechada, é proporcional à corrente elétrica total em todos os condutores que atravessam o interior da curva.*

A expressão matemática da lei de Ampère é

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{\text{int}} \quad (8.13)$$

onde  $C$  é uma curva fechada no espaço,  $k_m$  é uma **constante magnética** e  $I_{\text{int}}$  é a corrente total de todos os condutores que atravessam o interior de  $C$ . Para calcular a corrente total  $I_{\text{int}}$ , somam-se as correntes em todos os condutores que cortam a superfície no interior de  $C$ , atribuindo sinal positivo às correntes que passam no sentido da regra da mão direita, em relação à direção em que é percorrida a curva  $C$  no integral e sinal negativo para as correntes no sentido oposto.

O valor da constante magnética é

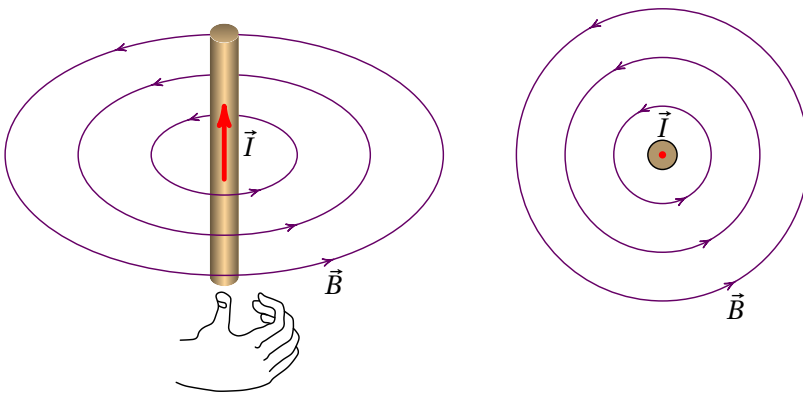
$$k_m = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \quad (8.14)$$

em unidades de G-cm/A, o valor da constante é 0.1. A equação 8.13 é válida no vácuo; Num meio diamagnético,  $k_m$  deve ser substituída por  $\mu/(4\pi)$ , onde  $\mu$  é a **permeabilidade magnética** do meio.

Um caso em que a lei de Ampère é útil para calcular o campo, é o de um fio retilíneo, muito comprido. Considere-se uma curva  $C$  que é uma circunferência de raio  $r$ , perpendicular ao fio, com centro no eixo do fio. Dada a simetria do sistema, as linhas de campo ou têm a direção radial, ou são tangentes à circunferência  $C$ ; se tivessem a direção radial, o integral de linha do campo ao longo de  $C$  seria nulo, o que não é possível, de acordo com a lei de Ampère, pois a corrente total através de  $C$  não é nula.

Como tal, as linhas de campo magnético do fio têm de ser circunferências perpendiculares ao fio e com centro no eixo do fio, como se mostra na figura 8.10. O sentido do campo deve seguir a regra da mão direita, em relação à corrente corrente, para que o integral de linha de  $\vec{B}$  tenha o mesmo sinal da corrente. Ou seja, colocando o polegar da mão direita

no sentido da corrente, os outros dedos indicam o sentido das linhas de campo magnético.



**Figura 8.10.:** Campo magnético de um fio retilíneo com corrente.

Como o campo magnético é tangente à curva  $C$  e tem módulo constante, o integral de linha do campo é:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = B \oint_C ds = 2\pi r B \quad (8.15)$$

De acordo com a lei de Ampère, o integral tem de ser igual a  $4\pi k_m I$ , o que implica que o campo magnético ao longo da curva  $C$  deve ter módulo

$$B_{\text{fio reto}} = \frac{2 k_m I}{r} \quad (8.16)$$

onde  $r$  é a distância desde o eixo do fio ao ponto onde se calcula o campo.

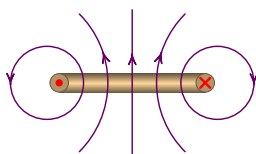
O campo magnético de um sistema com várias correntes obtém-se somando vetorialmente os campos produzidos por cada corrente. Para um sistema de  $n$  fios paralelos, a equação 8.16 conduz à seguinte expressão para as componentes do campo, no plano perpendicular aos fios:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{-2 k_m I_i (y - y_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right] \hat{i} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{2 k_m I_i (x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} \right] \hat{j} \quad (8.17)$$

onde  $I_i$  é a corrente no fio número  $i$ , com sinal positivo se for no sentido positivo do eixo dos  $z$ , ou sinal negativo no caso contrário e  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas do ponto onde o fio número  $i$  corta o plano  $Oxy$ .



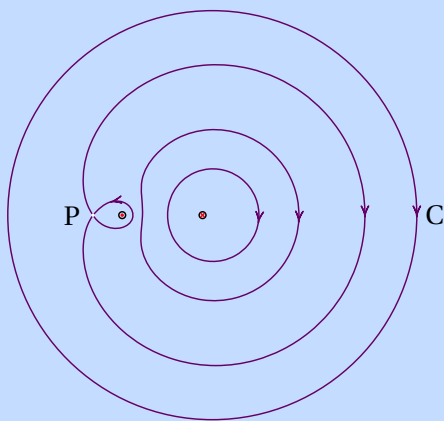
Quando o fio não é retilíneo, deixa de haver simetria e a lei de Ampère não permite calcular o campo magnético; no entanto, as linhas de campo são parecidas com as linhas do fio retilíneo. Por exemplo, a figura 8.11 mostra as linhas de campo de uma espira circular com corrente, no plano que contém o eixo da espira; as linhas de campo magnético neste exemplo são parecidas com as obtidas com dois fios perpendiculares à folha, com correntes de sentidos opostos.



**Figura 8.11.:** Campo magnético produzido por uma espira com corrente.

### Exemplo 8.2

A figura representa as linhas de campo magnético de dois fios retilíneos (perpendiculares à folha) com correntes  $I_1$  e  $I_2$ . A corrente no fio do lado esquerdo é  $I_1 = 3$  A. Sabendo que a distância entre os dois fios é 6 cm e a distância entre o fio do lado esquerdo e o ponto P é de 2 cm, calcule o integral de linha do campo magnético,  $\oint_C \text{vec}B \cdot d\vec{r}$ , ao longo da circunferência C indicada na figura.



**Resolução.** O integral do campo magnético, em qualquer percurso fechado,

pode ser calculado pela lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_C$$

A corrente total  $I_C$  através da circunferência  $C$  é igual a  $I_2 - I_1$ , já que o desenho das de campo permite concluir que  $I_2$  é no sentido positivo de  $C$  (para lá da folha) e  $I_1$  é no sentido oposto. Para calcular  $I_1$  recorre-se ao facto de o campo total ser nulo no ponto  $P$ ; isso implica que no ponto  $P$  os campos produzidos pelos dois fios têm o mesmo módulo. Como o módulo do campo de cada fio é diretamente proporcional à corrente e inversamente proporcional à distância, e como as distâncias dos fios até  $P$  são 2 cm e 8 cm, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{I_1}{2} = \frac{I_2}{8}$$

e, portanto,  $I_2$  é igual a 12 A e  $I_C = 9$  A. Admitindo que não existe qualquer meio à volta dos fios, usa-se a constante  $k_m$  na lei de Ampère e obtém-se:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi \times 10^{-7} \times 9 = 11.3 \frac{\mu\text{N}}{\text{A}}$$

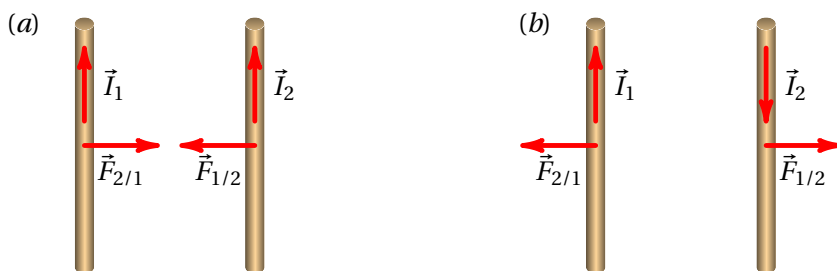
## 8.6. Força entre condutores com corrente

Cada condutor com corrente cria um campo magnético que produz forças magnéticas sobre outros condutores com corrente. Como tal, entre dois condutores com corrente existem forças magnéticas. Calculando o sentido do campo produzido por cada condutor e o sentido da força que esse campo exerce sobre o segundo condutor, conclui-se que:

*A força magnética entre dois fios retilíneos e paralelos percorridos por correntes é atrativa, se as correntes têm o mesmo sentido, ou repulsiva, se as correntes têm sentidos opostos.*

A figura 8.12 mostra os dois casos em que as correntes têm o mesmo sentido (a) ou sentidos opostos (b).

Se ambos fios, retilíneos e paralelos, têm o mesmo comprimento  $L$ , muito maior que a distância  $r$  entre eles, o campo de cada um pode ser calculado pela equação obtida na secção anterior para o campo magnético de um fio



**Figura 8.12.:** Forças magnéticas entre dois fios com corrente.

retilíneo; por exemplo, o campo do fio 1 nos pontos onde se encontra o fio 2 tem módulo:

$$B_1 = \frac{2 k_m I_1}{r} \quad (8.18)$$

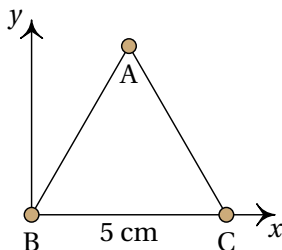
e a força que esse campo exerce sobre o fio 2 obtém-se a partir do produto vetorial  $\vec{I}_2 \times \vec{B}_1 L$ . Como tal, o módulo da força magnética entre os dois fios é

$$F_{1/2} = F_{2/1} = \frac{2 k_m L I_1 I_2}{r} \quad (8.19)$$

## Perguntas

- Dois fios retilíneos e paralelos, afastados 6 cm entre si, transportam correntes de 190 mA, em sentidos opostos. Determine o módulo do campo magnético num ponto P, na linha central, a 3 cm de cada fio.
  - 1.25  $\mu\text{T}$
  - 0
  - 3  $\mu\text{T}$
  - 2.5  $\mu\text{T}$
  - 1.5  $\mu\text{T}$
- Se o campo magnético aponta para norte, qual a direção da força magnética sobre uma partícula com carga positiva que se desloca para o este?
  - Para cima.
  - Para o oeste.
  - Para o sul.
  - Para baixo.
  - Para o leste.
- Uma partícula alfa é formada por dois prótons e dois neutrões. Se uma partícula alfa se desloca com velocidade igual a  $6.15 \times 10^5$  m/s, numa direção perpendicular a um campo magnético com módulo  $B = 0.27$  T, qual o valor da força magnética sobre a partícula?
  - $5.3 \times 10^{-14}$  N
  - $3.3 \times 10^5$  N
  - $2.7 \times 10^{-14}$  N
  - zero
  - $4.8 \times 10^5$  N
- Um segmento retilíneo de fio condutor que transporta uma corrente  $I$ , encontra-se numa região onde existe campo magnético uniforme, não nulo. Se a força magnética sobre o fio é nula, qual das seguintes afirmações é verdadeira?
  - O campo é paralelo ao fio.
  - O campo é perpendicular ao fio.
  - O campo é variável.
  - É uma situação impossível.
  - O campo é conservativo.

5. A figura mostra três fios retilíneos, compridos, paralelos e perpendiculares à folha, todos com corrente da mesma intensidade, 2 mA, e do mesmo sentido (para cá da folha). A distância entre quaisquer dois fios vizinhos é 5 cm. Determine o ângulo que a força magnética sobre o fio B faz com o semieixo positivo dos  $x$ .

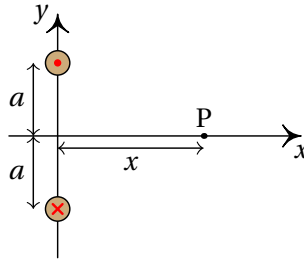


- |               |               |
|---------------|---------------|
| A. $27^\circ$ | D. $45^\circ$ |
| B. $60^\circ$ | E. $30^\circ$ |
| C. $90^\circ$ |               |

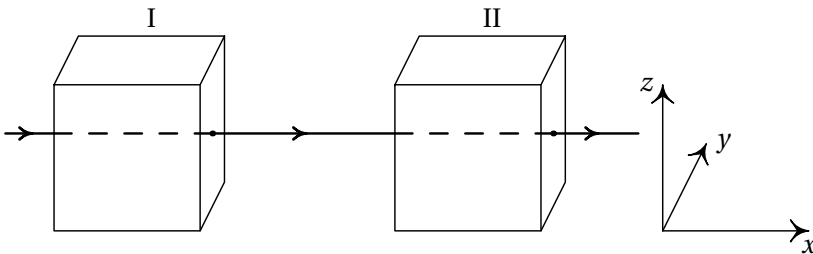
## Problemas

- Um próton "navega" na atmosfera solar, a uma velocidade de  $0.15c$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo ( $2.998 \times 10^8$  m/s). O próton atravessa um campo magnético uniforme de 0.12 T, formando um ângulo de  $25^\circ$  com a sua velocidade. Calcule o raio do cilindro que envolve a órbita helicoidal do próton (a massa de um próton é  $1.67 \times 10^{-27}$  kg e admita que com a velocidade  $0.15c$  os efeitos relativistas são desprezáveis).
- Considere dois fios de cobre, retilíneos e paralelos, de 60 cm de comprimento, distanciados de 9 cm e com raios de 2 mm e 3 mm. Calcule o valor da força magnética entre os fios quando cada um deles for ligado a uma f.e.m. de 1.5 V. (Use o valor da resistividade do cobre à temperatura ambiente:  $17 \text{ n}\Omega \cdot \text{m}$ .)
- A figura mostra dois fios compridos e paralelos, no plano perpendicular a eles. A intensidade da corrente em cada fio é a mesma,  $I$ , mas com sentidos opostos, como indicam o ponto e o  $x$  nos dois fios. (a) Represente graficamente os vetores de campo magnético devido a cada fio e o campo magnético resultante no ponto P. (b) Deduza a expressão para

o módulo do campo de magnético em qualquer ponto P sobre o eixo  $x$ , em função da distância  $x$  de P à origem.

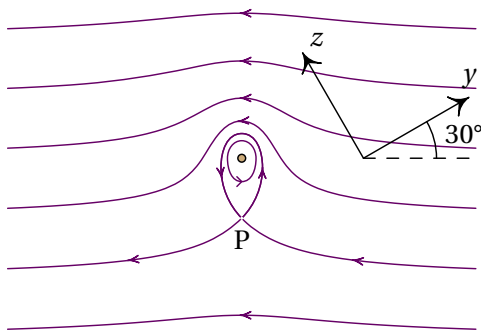


4. Um feixe de prótons desloca-se com velocidade constante  $\vec{v}$ , segundo o eixo dos  $x$ , atravessando duas regiões, I e II, caracterizadas do seguinte modo: em I, existe um campo magnético,  $\vec{B}_1$  e em II, coexistem um campo magnético,  $\vec{B}_2$ , e um campo elétrico,  $\vec{E} = E\hat{j}$ . Todos os campos são uniformes nas regiões em que foram definidos e anulam-se fora delas. O peso dos prótons não é significativo. Quais as condições a que devem obedecer os campos  $\vec{B}_1$  e  $\vec{B}_2$  para que o feixe não sofra qualquer perturbação no seu movimento, enquanto atravessa duas regiões? Se em vez de prótons, fosse um feixe de elétrons, as condições estabelecidas manter-se-iam?

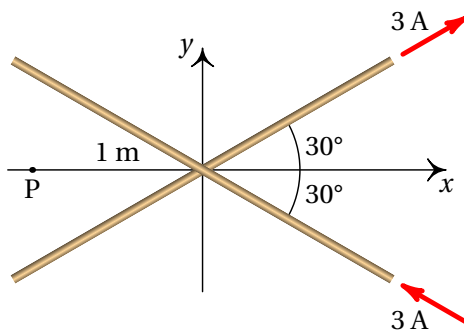


5. Num filtro de velocidades há campos elétrico e magnético uniformes e perpendiculares, e as partículas entram com velocidade perpendicular aos dois campos. O módulo do campo magnético é 0.1 T e o do campo elétrico 0.2 MV/m. (a) Qual a velocidade das partículas à saída do filtro? (partículas que não são desviadas na sua passagem pelo filtro.) (b) Qual a energia dum próton à saída do filtro? (c) Qual a energia de um elétron à saída do filtro? (a massa de um próton é  $1.67 \times 10^{-27}$  kg e a de um elétron  $9.11 \times 10^{-31}$  kg).
6. Calcule a intensidade máxima do momento do binário magnético que atua sobre uma bobina circular de 400 espiras de raio 0.1 cm, percorrida por uma corrente de 92 mA, num campo magnético uniforme de 0.3 T.

7. A figura mostra as linhas de campo magnético de um fio com corrente, dentro de um campo magnético uniforme  $\vec{B}_{\text{ext}}$ ; o fio é perpendicular à folha e os eixos  $y$  e  $z$  foram escolhidos sobre o plano da folha. (a) Escreva o versor do campo externo, usando o sistema de eixos dado. (b) Escreva o versor da corrente no fio. (c) Determine as componentes do versor da força sobre o fio. (d) Considerando que  $I = 0.5 \text{ A}$  e se o valor da força sobre o fio, por unidade de comprimento, é  $2 \times 10^{-5} \text{ N/m}$ , calcule a distância até ao ponto P.



8. Os dois fios representados na figura são muito compridos, paralelos à folha e cada um transporta uma corrente de 3 A. Um dos fios está no plano  $Oxy$  e o outro está num plano paralelo ao plano  $Oxy$  mas com  $z = 5 \text{ cm}$ . Calcule o campo magnético total no ponto P com coordenadas  $x = -1 \text{ m}$ ,  $y = z = 0$ .

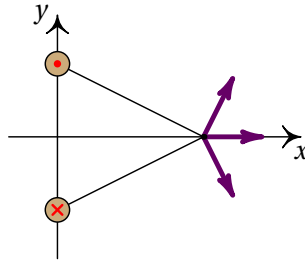


## Respostas

Perguntas: 1. D. 2. A. 3. A. 4. A. 5. E.

### Problemas

1. 1.65 m
2. 10.25 N
3. (a)



$$(b) B = \frac{4k_m I a}{x^2 + a^2}.$$

4.  $\vec{B}_1 = B_1 \hat{i}$ ,  $\vec{B}_2 = B_{2x} \hat{i} + (E/v) \hat{k}$ , onde  $B_1$ ,  $B_{2x}$  e  $E$  podem ser quaisquer funções, não necessariamente constantes. As condições obtidas são as mesmas, seja a carga das partículas positiva ou negativa.
5. (a)  $2 \times 10^6$  m/s. (b)  $3.34 \times 10^{-15}$  J. (c)  $1.82 \times 10^{-18}$  J.
6.  $3.47 \times 10^{-5}$  N·m
7. (a)  $-(\sqrt{3}/2) \hat{j} + (1/2) \hat{k}$ . (b)  $\hat{i}$ . (c)  $-(1/2) \hat{j} - (\sqrt{3}/2) \hat{k}$ . (d) 2.5 mm.
8.  $(-59.4 \hat{i} - 102.9 \hat{j} + 2388.1 \hat{k})$  nT.



## 9. Indução eletromagnética



A energia eólica é uma das fontes de energia renováveis que estão a ser utilizadas para reduzir a contaminação produzida pelos combustíveis fósseis. Portugal é um dos países em que a energia de origem eólica corresponde a uma maior percentagem da energia elétrica total, com aproximadamente 9%. Independentemente do tipo de combustível ou fonte de energia usada para gerar energia elétrica, em quase todos os casos é gerada energia mecânica de rotação que é logo usada para gerar eletricidade. O princípio que permite transformar a energia mecânica de rotação em eletricidade é a indução eletromagnética. Viu-se no capítulo anterior que quando circula corrente por uma bobina que está dentro de um campo magnético, esta tem uma tendência a rodar; a indução eletromagnética é o efeito inverso: numa bobina que se faz rodar dentro de um campo magnético é induzida uma corrente elétrica.

### 9.1. Campo elétrico induzido

Considere-se uma barra condutora em movimento num campo magnético uniforme,  $\vec{B}$ , como na figura 9.1. Sobre cada partícula com carga  $q$  do condutor atua a força magnética

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B} \tag{9.1}$$

Essa força faz deslocar as cargas de condução no condutor e na situação da figura 9.1, acumular-se-á carga positiva em P e negativa em Q, qualquer que for o sinal das cargas de condução. Contudo, se o problema for analisado do ponto de vista do referencial que se desloca com o condutor (figura 9.2), este está em repouso e, portanto, não há força magnética sobre as cargas. Como se explica então o movimento das cargas na barra?

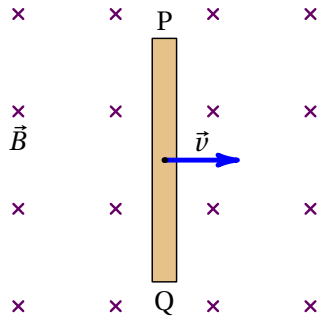


Figura 9.1.: Condutor num campo magnético.

O problema é que a equação 9.1 não pode ser válida em qualquer referencial, porque a velocidade  $\vec{v}$  é diferente em diferentes referenciais inerciais, mas a segunda lei de Newton implica que a força deve ser a mesma em qualquer referencial inercial.

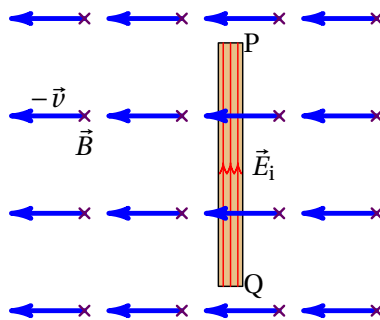


Figura 9.2.: Campo elétrico induzido,  $\vec{E}_i$ .

A equação 9.1 é correta apenas no referencial em que o campo magnético é estático (não muda com o tempo). A solução do problema é que os campos elétrico e magnético não são independentes, e a força 9.1 é apenas uma parte da equação geral para a força eletromagnética, que deverá dar o

mesmo resultado em qualquer referencial inercial:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9.2)$$

No referencial que se desloca com a barra (ver figura 9.2),  $\vec{v} \times \vec{B}$  é nulo, porque a velocidade da barra é nula. Mas o movimento das linhas de campo magnético, com velocidade  $-\vec{v}$ , produz campo elétrico **induzido**,  $\vec{E}_i$ , e força  $q\vec{E}_i$ . Comparando com a força obtida no referencial em que o campo magnético é estático e não há campo elétrico (equação 9.1), conclui-se que o campo induzido é:

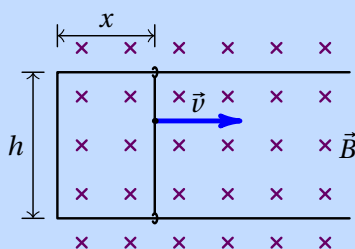
$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B} \quad (9.3)$$

É como se no condutor existisse uma f.e.m. induzida, igual à diferença de potencial entre os seus extremos. Sendo  $l$  o comprimento da barra, a f.e.m. induzida é:

$$\varepsilon_i = l|\vec{v} \times \vec{B}| \quad (9.4)$$

### Exemplo 9.1

Uma barra condutora desliza sobre dois trilhos metálicos horizontais, unidos numa extremidade como, na figura. A distância  $h$  é igual a 3.3 cm e no instante  $t = 0$  a barra encontra-se a uma distância  $x = 2.2$  cm da extremidade dos trilhos. Para  $t > 0$  a velocidade da barra é uniforme com módulo  $v = 3.5$  cm/s e no sentido indicado na figura, permanecendo sempre em contacto com os trilhos de forma que possa circular corrente por eles e pela barra. (a) Sabendo que os trilhos e a barra são fios cilíndricos de cobre com diâmetro de 1.2 mm, calcule a resistência total do circuito em função de  $t$ , para  $t > 0$  (admita que a temperatura é 20 °C). (b) Se existir um campo magnético externo, constante e uniforme, com módulo  $B = 36$  G, no sentido indicado na figura, calcule a corrente no circuito em função do tempo, para  $t > 0$ .



**Resolução.** (a) O circuito neste caso é um retângulo com arestas  $x$  e  $h$ . O comprimento total do fio que constitui o circuito é

$$L = 2x + 2h$$

A distância  $x$  aumenta com o tempo  $t$  segundo a equação:

$$x = x_0 + vt$$

onde  $x_0 = 2.2$  cm e  $v = 3.5$  cm/s. A área da secção transversal do fio é  $A = \pi r^2$ , onde  $r = 0.06$  cm é o raio do fio. A resistividade do cobre a  $20^\circ\text{C}$  é  $\rho = 17 \times 10^{-7} \Omega \cdot \text{cm}$  e a resistência do fio que forma o circuito é

$$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{2\rho(h + x_0 + vt)}{\pi r^2} = \frac{34 \times 10^{-7}(5.5 + 3.5t)}{\pi \times 0.06^2} = 1.65 + 1.05t$$

em m $\Omega$ , se  $t$  for medido em segundos. (b) Na barra em movimento existe uma f.e.m. induzida:

$$\varepsilon_i = h |\vec{v} \times \vec{B}| = Bvh$$

e a intensidade da corrente no circuito é

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{Bvh}{R}$$

que em unidades SI, dá:

$$I = \frac{36 \times 10^{-4} \times 3.5 \times 10^{-2} \times 3.3 \times 10^{-2}}{(1.65 + 1.05t) \times 10^{-3}} = \frac{4.16}{1.65 + 1.05t}$$

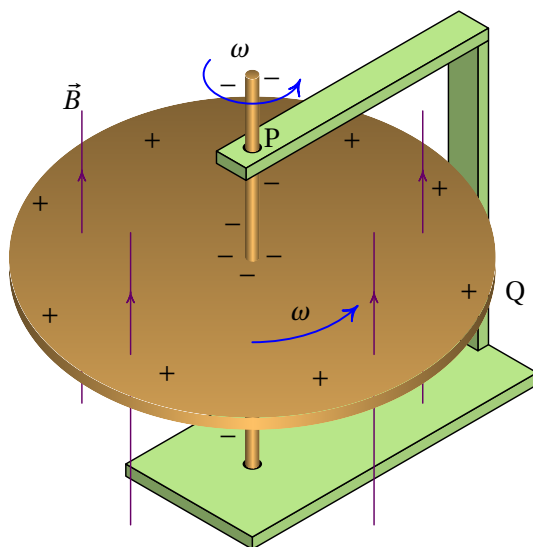
em mA.

## 9.2. Gerador de Faraday

Um tipo de gerador de tensão contínua, inventado por Faraday, consiste num disco condutor, de raio  $R$ , que roda com velocidade angular  $\omega$  dentro de um campo magnético perpendicular a ele (figura 9.3).

No referencial que roda com o disco, existe um campo elétrico induzido na direção radial, com módulo igual a

$$E_i = B\omega r \quad (9.5)$$



**Figura 9.3.:** Gerador de Faraday.

A diferença de potencial entre os pontos P e Q na figura 9.3 é

$$V_Q - V_P = \int_0^R E_i dr = \frac{1}{2} B \omega R^2 \quad (9.6)$$

e colocando duas escovas condutoras em contato com os pontos P e Q obtém-se uma fonte de força eletromotriz.

### 9.3. Lei de Faraday

A equação 9.3 para o campo elétrico induzido não só se aplica a condutores em movimento, como a qualquer referencial que se desloque com velocidade  $\vec{v}$  em relação a um sistema onde as linhas de campo aparecem como fixas no espaço. Do ponto de vista desse referencial, as linhas de campo deslocam-se com velocidade  $-\vec{v}$  e sempre que houver alteração das linhas de campo magnético, surgirá campo elétrico induzido.

Outra situação em que há alteração das linhas de campo magnético é quando o campo magnético é variável, dando origem a um campo elétrico induzido. Uma expressão geral que inclui quer as situações em que o

referencial se desloca em relação ao campo, quer as de campo magnético variável, é a **lei de Faraday**:

*Numa espira condutora  $C$ , sempre que o fluxo magnético  $\Psi$  através da superfície delimitada por  $C$  varia, surge uma força eletromotriz induzida ao longo da espira, igual à derivada do fluxo em ordem ao tempo.*

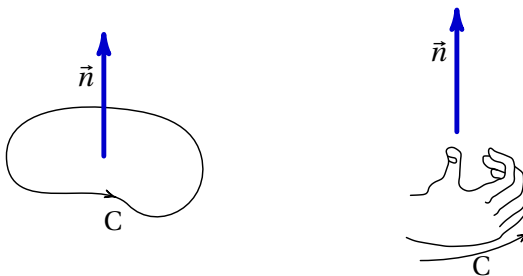
$$\boxed{\varepsilon_i = - \frac{d\Psi}{dt}} \quad (9.7)$$

O **fluxo magnético**  $\Psi$ , através da superfície  $S$  delimitada pela espira, define-se de forma análoga ao fluxo do campo elétrico. Se o campo for uniforme sobre o plano da espira, com módulo constante  $B$  e formando um ângulo  $\theta$  com o versor perpendicular à espira, o fluxo magnético é

$$\boxed{\Psi = AB \cos \theta} \quad (9.8)$$

onde  $A$  é a área da espira. Se o campo não for uniforme, é preciso dividir a espira em pequenos elementos diferenciais e somar todos os fluxos infinitesimais, obtendo-se um integral de superfície.

O versor perpendicular à espira,  $\hat{n}$ , pode ser escolhido a apontar para qualquer dos dois lados da superfície; o versor que for escolhido, define o sentido positivo da corrente na espira, usando a regra da mão direita (figura 9.4). O sinal obtido no lado direito da equação 9.7 indica o sentido do campo induzido na espira, tendo em conta que o sentido positivo é o que segue a regra da mão direita em relação ao versor  $\hat{n}$ .

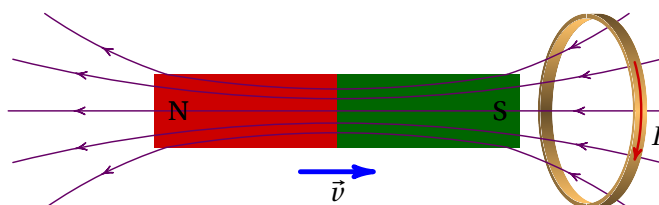


**Figura 9.4.:** Definição do versor normal a uma curva plana.

O sentido do campo induzido pode também ser determinado pela **lei de Lenz**:

*A força eletromotriz e o campo induzido são sempre no sentido que produz um campo magnético induzido que contraria a variação do fluxo magnético externo.*

Tal como no caso do campo elétrico (nas regiões onde não há cargas) ou do escoamento de um fluido incompressível, o fluxo é o mesmo através de todas as superfícies atravessadas pelas mesmas linhas de campo. As linhas de campo magnético que passam pela periferia de uma secção conexas de uma superfície delimitam uma região do espaço que é um tubo de fluxo magnético constante.



**Figura 9.5.:** Ímã em movimento junto de uma espira condutora.

Um exemplo de aplicação da lei de Faraday é o caso de um ímã que se aproxima de um anel condutor, com velocidade  $v$ . O movimento do ímã implica variação do fluxo magnético através do anel.

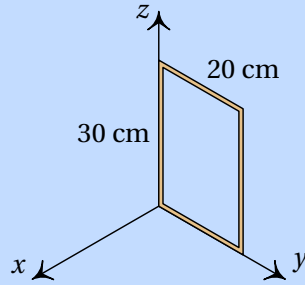
Na situação representada na figura 9.5, o fluxo magnético no anel é no sentido da esquerda para a direita e está a aumentar. Aparece então corrente induzida no anel, dando origem a fluxo magnético da direita para a esquerda, que contraria o aumento do fluxo externo. Como tal, o campo magnético induzido aponta para a esquerda, o que implica que a corrente e a f.e.m. induzidas no anel são no sentido indicado na figura. É como se tivesse sido ligada uma pilha no anel.

### Exemplo 9.2

Uma espira condutora retangular com lados de 20 cm e 30 cm encontra-se sobre o plano  $Oyz$ , com um vértice na origem, como mostra a figura. A partir do instante  $t = 0$  aparece na região onde se encontra a espira um campo magnético variável com componentes (unidades SI):

$$B_x = 6t^2 - 4 \quad B_y = 5t^3 \quad B_z = 0$$

(a) Calcule a f.e.m. induzida na espira, em função do tempo  $t$ , a partir do instante  $t = 0$ . (b) Diga (justificando) qual é o sentido da corrente induzida na espira.



**Resolução.** (a) Como o campo é uniforme pode-se usar a equação 9.8. A espira é perpendicular ao eixo dos  $x$  e pode-se escolher o versor normal à espira igual a  $\hat{i}$ ; assim sendo, o produto  $B \cos \theta$  será a componente  $x$  do campo  $\vec{B}$  e o fluxo magnético através da espira é

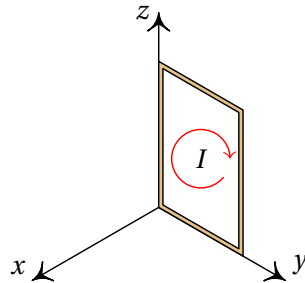
$$\Psi = \Delta y \Delta z B_x = 0.06 (6 t^2 - 4)$$

A f.e.m. induzida calcula-se usando a lei de Faraday

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -0.72 t$$

(em volts, se  $t$  for dado em segundos).

(b) Como  $t$  é positivo, o valor de  $\varepsilon_i$  calculado na alínea anterior é sempre negativo. Isso quer dizer que a corrente induzida é no sentido oposto do sentido usado para definir o versor normal à espira. A escolha de  $\hat{n} = \hat{i}$  implica que se está a percorrer a espira no sentido anti-horário, vista desde o semieixo positivo dos  $x$ . A corrente induzida é então no sentido dos ponteiros do relógio, como mostra a figura ao lado.

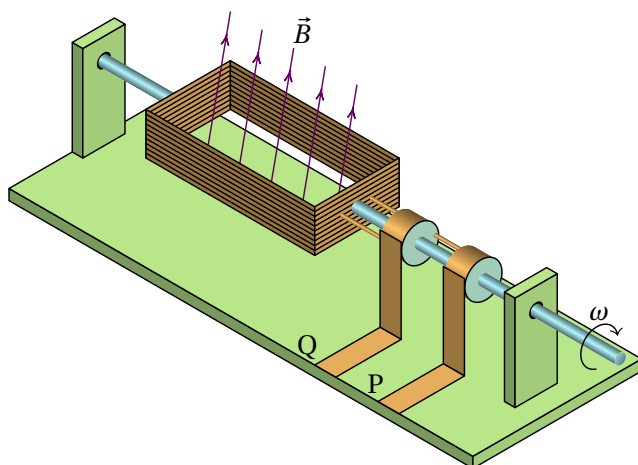


Outra forma de obter o sentido da corrente consiste em observar que o campo  $B_x$  inicialmente aponta no sentido negativo do eixo dos  $x$ , mas está sempre a aumentar no sentido positivo do eixo dos  $x$ . O campo induzido deve contrariar esse aumento, apontando no sentido negativo do eixo dos  $x$ . Pela regra da mão direita, um campo magnético induzido no sentido negativo do eixo dos  $x$  implica corrente induzida em sentido dos ponteiros do relógio.



## 9.4. Gerador de tensão alternada

Um gerador de tensão alternada (figura 9.6), consiste numa bobina que se faz rodar dentro de um campo magnético; o fio onde começa a bobina está soldado a um anél condutor e o fim do fio, depois de ser enrolado na bobina, solda-se a outro anél condutor; esses dois anéis mantêm o contato com duas escovas, P e Q, enquanto a bobina roda, de forma que  $V_P - V_Q$  é igual à diferença de potencial  $\Delta V$  na bobina.



**Figura 9.6.:** Gerador de tensão alternada.

O fluxo magnético através da bobina é:

$$\Psi = N B A \cos \theta \quad (9.9)$$

onde  $N$  é o número de espiras,  $B$  o campo magnético médio,  $A$  a área de cada espira, e  $\theta$  o ângulo médio entre o campo e a normal à bobina.

Se a bobina roda com velocidade angular constante,  $\omega$ , o ângulo  $\theta$ , em função do tempo, é dado por  $\omega t + \theta_0$ . Como tal, a derivada do fluxo magnético em ordem ao tempo é

$$\Delta V = V_{\text{máx}} \sin(\omega t + \theta_0) \quad (9.10)$$

onde  $V_{\text{máx}} = N B A \omega$ . A expressão 9.10 dá a diferença de potencial entre as duas escovas condutoras, em função do tempo e é designada **tensão alternada**. A diferença de potencial oscila entre um valor máximo  $V_{\text{máx}}$  positivo e um valor mínimo negativo  $-V_{\text{máx}}$ . A frequência da tensão alternada,  $f = \omega / (2\pi)$ , é o número de oscilações por unidade de tempo.

O gerador de tensão alternada, também chamado alternador, usa-se para gerar energia elétrica a partir de energia mecânica. A fonte da energia mecânica, que faz rodar a bobina, pode ser o vento, nas centrais de energia eólica, a corrente de água, nas centrais hidroelétricas, o fluxo de vapor de água evaporada por combustão de carvão, o movimento do motor, no alternador usado para recarregar a bateria num automóvel, etc.

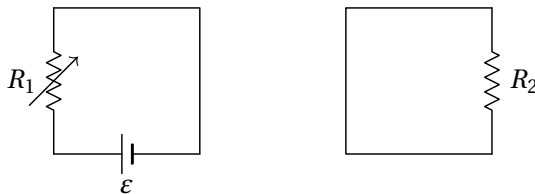
É importante regular a velocidade de rotação da bobina, de forma a manter uma velocidade angular constante, para que a tensão elétrica produzida tenha uma frequência constante. É por isso que as asas num moinho de vento de uma estação eólica rodam lentamente e com velocidade angular constante. Existe um mecanismo mecânico usado para regular essa velocidade.

## 9.5. Indução mútua

Num circuito a corrente dá origem a campo magnético e, portanto, a fluxo magnético. Como tal, qualquer variação da corrente dá origem a uma força eletromotriz induzida no circuito.

Por exemplo, quando se fecha um interruptor num circuito de corrente contínua, a corrente não aumenta instantaneamente de zero até um valor final, devido à indutância do circuito. A tendência da corrente para aumentar bruscamente é contrariada por uma corrente induzida oposta, que impõe o aumento da corrente de forma gradual. Igualmente, quando se abre o interruptor, a corrente não passa a ser nula de forma instantânea mas sim gradual.

Imaginem-se dois circuitos, lado a lado (figura 9.7). No primeiro circuito há uma fonte de tensão que produz corrente e uma resistência variável que permite alterar a intensidade dessa corrente. No segundo circuito não há nenhuma fonte de tensão.



**Figura 9.7.:** Indutância mútua entre dois circuitos.

A corrente no circuito 1 (lado esquerdo) origina fluxo magnético através do circuito 2, diretamente proporcional à corrente  $I_1$  que produz esse campo magnético:

$$\Phi_2 = -M I_1 \quad (9.11)$$

onde  $M$  é uma constante chamada **indutância mútua**, que depende da forma dos circuitos e da distância entre eles.

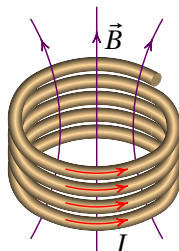
A variação da corrente no circuito 1 induz força eletromotriz no circuito 2:

$$\varepsilon_2 = M \frac{d I_1}{d t} \quad (9.12)$$

No sistema internacional, a unidade da indutância (V·s/A) é o **henry**, representado pela letra H, em homenagem ao físico Joseph Henry (1797–1878).

## 9.6. Indutância

A corrente numa bobina produz campo magnético que atravessa as espiras da bobina, como mostra a figura 9.8. Como tal, a bobina produz fluxo magnético através de si própria e qualquer alteração da corrente na bobina dá origem a variação desse fluxo, produzindo força eletromotriz induzida na bobina, que contraria a alteração da corrente.



**Figura 9.8.:** Campo magnético produzido pela corrente numa bobina.

O campo magnético produzido pela bobina é diretamente proporcional à corrente. Como tal, o fluxo magnético produzido pela bobina sobre si própria é proporcional à corrente:

$$\Psi = L I \quad (9.13)$$

e a constante  $L$  é a indutância da bobina. A f.e.m. autoinduzida na própria bobina é:

$$\boxed{\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt}} \quad (9.14)$$

Quanto maior for a área das espiras na bobina, maior é a sua indutância. Quanto maior for o número de espiras,  $n$ , na bobina, maior será também a área atravessada pelas linhas de campo e maior será também o próprio campo magnético. Como tal, a indutância de uma bobina com  $n$  espiras é diretamente proporcional a  $n^2$ . A indutância da bobina é  $n^2$  vezes a indutância de cada uma das suas espiras por separado:

$$L_{\text{bobina}} = n^2 L_{\text{espira}} \quad (9.15)$$

Todos os dispositivos têm indutância, mas geralmente essa indutância tem valor muito baixo que pode ser ignorado, exceto no caso das bobinas, usadas nos circuitos quando é necessário ter indutância não desprezável. A f.e.m. autoinduzida 9.14 num dispositivo, representa-se num circuito de alguma das duas formas indicadas na figura 9.9. O símbolo usado no lado direito chama-se **indutor**, e em relação aos sinais usados na figura, a voltagem no indutor é: (o sinal positivo é devido à troca dos sinais em relação ao diagrama do lado esquerdo)

$$\Delta V = L \frac{dI}{dt} \quad (9.16)$$



**Figura 9.9.:** Diagrama de circuito de um indutor.

Tal como a indutância mútua, a indutância  $L$  mede-se em henrys no sistema internacional de unidades.

## 9.7. Circuitos com indutores

Num circuito de corrente contínua, com fontes de tensão contínua, as correntes atingem o estado estacionário em que permanecem constantes. No estado estacionário, a equação 9.16 implica que em todos os indutores

no circuito a voltagem é nula, mas a corrente pode ter qualquer valor. Isso implica que, no estado estacionário, os indutores podem ser considerados curtos-circuitos (fios com resistência nula).

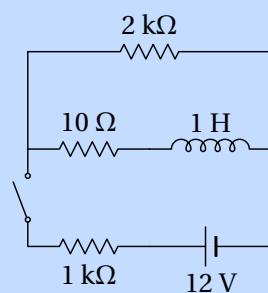
Em qualquer instante em que se altera o estado estacionário, por ligar ou desligar alguma fonte, ou por abrir ou fechar algum interruptor, a corrente nos indutores não muda de forma instantânea porque, de acordo com a equação 9.16, qualquer aumento instantâneo da corrente implica voltagem infinita, que é impossível. A corrente nos indutores varia sempre de forma contínua, enquanto que nas resistências, condensadores e fontes pode ser descontínua nos instantes em que se altera o estado estacionário. Mas a derivada da corrente nos indutores nesses instantes não é nula, devido à alteração introduzida no circuito. Como tal, a voltagem pode ter qualquer valor nesses instantes, e a corrente mantém o mesmo valor que tinha no estado estacionário.

Conclui-se então que em qualquer instante  $t_0$  em que é feita alguma mudança repentina no circuito, a voltagem num indutor pode ter qualquer valor, mas a corrente deverá ter o mesmo valor  $I_0$  que tinha imediatamente antes da mudança ter acontecido. Se no instante  $t_0$  em que se altera o estado estacionário do circuito a corrente no indutor é nula, o indutor é equivalente a um interruptor aberto, onde a corrente é nula, mas a voltagem pode ter qualquer valor.

Após o instante  $t_0$  em que há uma alteração repentina do circuito, as correntes nos indutores mudam gradualmente (resposta transitória), . Mas como não podem mudar indefinidamente, o circuito volta a atingir o estado estacionário em que as correntes nos indutores têm valores finais constantes. Para calcular esses valores finais das correntes, os indutores podem ser substituídos por curtos-circuitos (estado estacionário).

### Exemplo 9.3

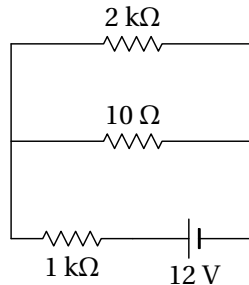
Uma bobina com resistência de  $10\ \Omega$  e indutância de  $1\ \text{H}$  é ligada a duas resistências e a uma fonte de  $12\ \text{V}$ , como indica o diagrama. Encontre a corrente na resistência de  $2\ \text{k}\Omega$ , no instante em que se fecha o interruptor e muito tempo após esse instante inicial. Determine a razão entre as correntes inicial e final nessa resistência.



**Resolução.** Como antes de ser fechado o interruptor não passa corrente pelo indutor, no instante inicial o indutor é equivalente a um interruptor aberto, ou seja, não circula corrente pela resistência de  $10 \Omega$  e é como se essa resistência e o indutor não existissem. Ignorando esses dois elementos, o circuito corresponde a uma única malha com a fonte e as duas resistências de  $1 \text{ k}\Omega$  e  $2 \text{ k}\Omega$  em série. Nessas condições, a corrente inicial nessas duas resistências é

$$I_0 = \frac{12}{3000} = 4 \text{ mA}$$

Para calcular a corrente final, substitui-se o indutor por um curto-circuito:



as resistências de  $2 \text{ k}\Omega$  e  $10 \Omega$  estão em paralelo, podendo ser substituídas por uma única resistência com valor  $2000 \parallel 10 = 2/201 \text{ k}\Omega$ , que fica em série com a resistência de  $1 \text{ k}\Omega$  e a resistência equivalente entre os terminais da fonte é

$$R = 1 + \frac{2}{201} = \frac{203}{201} \text{ k}\Omega$$

a corrente final que sai da fonte é  $12/R = 2412/203 \text{ mA}$  e a diferença de potencial na resistência de  $2 \text{ k}\Omega$  é

$$\Delta V = \left( \frac{2}{201} \right) \left( \frac{2412}{203} \right) = \frac{24}{203} \text{ V}$$

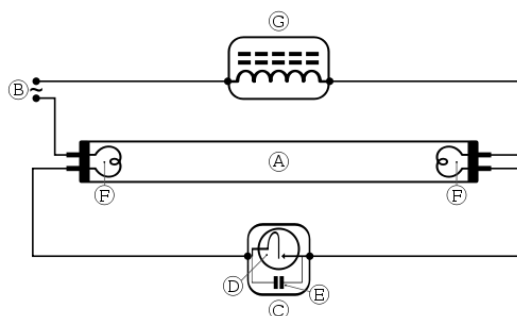
a corrente final na resistência de  $2 \text{ k}\Omega$  é:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{(24/203)}{2000} = \frac{12}{203} \text{ mA}$$

A razão entre as correntes inicial e final é:

$$\frac{I_0}{I} = \frac{4}{(12/203)} = \frac{203}{3} = 67.67$$

O exemplo anterior mostra uma das propriedades importantes dos indutores que os torna muito úteis como **balastros**, dispositivos em que a corrente inicial é elevada mas a corrente final é muito menor. Os balastros são usados nas lâmpadas fluorescentes em que é necessária uma corrente elevada quando a lâmpada é ligada, para garantir a ionização do gás dentro do tubo tornando-se condutor; após a ionização do gás, se a corrente mantivesse o valor inicial elevado, a lâmpada queimava-se.



**Figura 9.10.:** Diagrama de circuito de uma lâmpada fluorescente.

A figura 9.10 mostra o circuito usado numa lâmpada fluorescente, inventado por Nikola Tesla (1856–1943). Neste caso a fonte de alimentação é de tensão alternada. O balastro é a bobina G; como a sua resistência interna costuma ser baixa, foi ignorada no diagrama e as barras paralelas a tracejado representam um núcleo de material ferromagnético colocado dentro da bobina para aumentar a sua indutância. Inicialmente, o gás dentro do tubo A é isolador, porque não está ionizado; a corrente passa pelos dois filamentos F, que aquecem o gás, facilitando a produção de iões.

Dentro do arrancador C, há uma lâmina metálica curva, que com a passagem da corrente é aquecida e dilata, mudando a sua curvatura. Isso faz com que o interruptor em D seja aberto, deixando de passar corrente pelos filamentos e arrancador, mas passando através do tubo A, onde o gás já foi ionizado.

Um outro efeito da bobina G é que no instante em que o interruptor D é aberto, a corrente não cai imediatamente para zero; continuam a acumular-se cargas nos dois terminais do interruptor aberto, criando-se um campo elevado que pode produzir faíscas. Para evitar essas faíscas, que podem queimar o metal, liga-se um condensador E, em paralelo, que acumula cargas de forma segura.



**Figura 9.11.:** Circuito de lâmpada.

As atuais lâmpadas economizadoras de energia são também lâmpadas fluorescentes, em versão reduzida. As funções do balastro e o arrancador são garantidas por um pequeno circuito dentro da lâmpada, como pode ser visto na figura 9.11.

## Perguntas

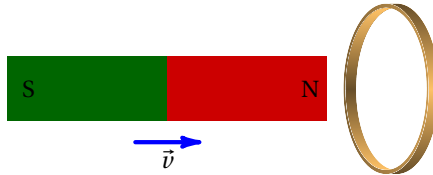
- Quando um comboio com motor elétrico sobe um trajeto com declive, consome potência elétrica proveniente de uma central elétrica. No seu modo mais eficiente de operação, nos trajetos em que o comboio desce:
  - Deve consumir ainda maior potência.
  - Pode gerar potência elétrica sendo alimentada de volta para a central.
  - Não consome nem gera potência elétrica.
  - Consome a mesma quantidade de potência.
  - Nenhuma das anteriores.
- Uma barra condutora, com 25 cm de comprimento, desloca-se com velocidade uniforme de 12 m/s, num plano perpendicular a um campo magnético uniforme de 80 G. Calcule a diferença de potencial induzida nos extremos da barra.
  - 240 V
  - 0.24 V
  - 0.024 V
  - 0.384 V
  - 3.84 kV



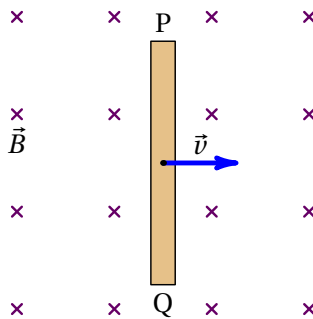


## Problemas

1. Um ímã desloca-se a velocidade constante sobre o eixo de uma espira, como mostra a figura. (a) Represente num gráfico, em forma qualitativa, o fluxo magnético  $\Psi$  através da espira em função do tempo  $t$ . Indique o instante  $t_1$  em que o ímã está a meio da travessia da espira. (b) Represente o gráfico da corrente  $I$  na espira em função do tempo.



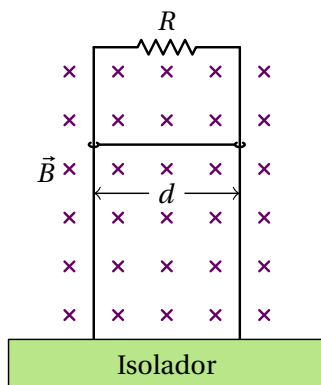
2. Uma barra metálica de comprimento  $l = 9$  cm desloca-se com velocidade constante  $v = 18$  cm/s, numa região onde há campo magnético uniforme com intensidade  $B = 3.5$  G, perpendicular à barra (ver figura). Determine a diferença de potencial  $V_P - V_Q$ .



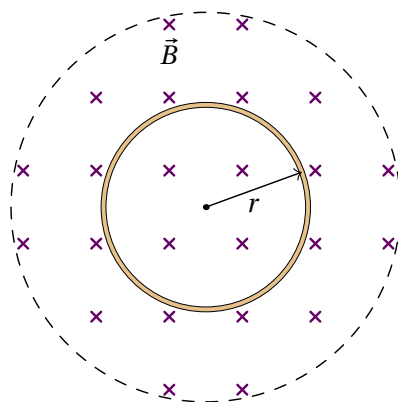
3. O comprimento total entre as pontas das asas de um avião Boeing 747 é 60 m. O avião voa a 800 km/h e com altura constante, na direção sul-norte, numa região onde o campo magnético terrestre faz um ângulo de  $60^\circ$  com a vertical e a sua intensidade é 0.5 G. Calcule a diferença de potencial induzida entre as pontas das asas.
4. O plano de uma espira quadrada de cobre, com 4 cm de lado, está na posição horizontal. Coloca-se um eletro-ímã em forma de barra na posição vertical, acima do plano da bobina e com o seu polo norte mais próximo da espira mas um pouco afastado do seu centro, de tal forma que as linhas de campo magnético atravessam a espira formando um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical. Calcule a f.e.m. induzida média na espira, enquanto a intensidade do campo magnético do eletro-ímã,

na superfície da espira, varia desde zero até um valor final de 0.5 T, num intervalo de 200 ms. Qual o sentido da corrente induzida na espira?

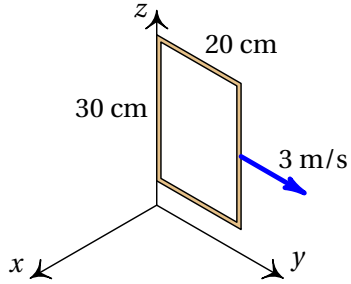
5. A figura mostra uma barra condutora de comprimento  $d$  e massa  $m$  que desliza sobre dois trilhos metálicos verticais, dentro de um campo magnético  $\vec{B}$  uniforme. A resistência elétrica dos trilhos e da barra são desprezáveis comparadas com  $R$ . A barra mantém sempre o contato com os trilhos, permitindo que circule corrente pela resistência  $R$ , mas o atrito é desprezável, assim como o efeito da resistência do ar na barra. Quando a barra começa a cair livremente, o seu movimento é inicialmente acelerado mas rapidamente atinge uma velocidade constante  $v$ . Calcule o valor dessa velocidade limite  $v$ .



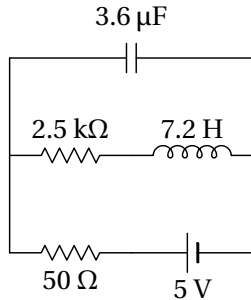
6. No interior da circunferência a tracejado na figura existe um campo magnético que aponta para lá da folha e com módulo que depende do tempo  $t$  segundo a expressão  $0.6e^{-t/15}$  (unidades SI). Determine a intensidade, direção e sentido do campo elétrico induzido dentro do anel condutor de raio  $r = 9$  cm.



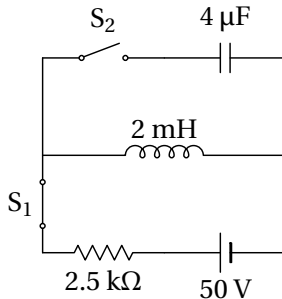
7. Uma espira condutora retangular, paralela ao plano  $Oyz$ , desloca-se com velocidade constante  $\vec{v} = 3 \hat{j}$  (m/s) dentro de uma região onde existe um campo magnético com componentes:  $B_x = (6 - y)$  (SI) e  $B_y = B_z = 0$ . Calcule a f.e.m. induzida na espira, em função do tempo  $t$ , a partir do instante  $t = 0$  em que a espira se encontra na posição da figura, com um lado ao longo do eixo dos  $z$ .



8. No circuito da figura, calcule as correntes iniciais no indutor e no condensador, a corrente final no indutor e a carga final no condensador.

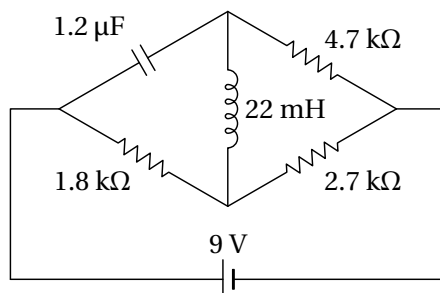


9. (a) No circuito da figura, o interruptor  $S_1$  tem estado fechado durante muito tempo e o interruptor  $S_2$  aberto; determine a corrente no indutor. (b) A seguir, abre-se o interruptor  $S_1$  e simultaneamente fecha-se o interruptor  $S_2$ ; nesse preciso instante, a corrente no indutor deve ter o mesmo valor calculado na alínea anterior. Explique qualitativamente o que acontece com a corrente no indutor e a carga no condensador a partir desse instante.

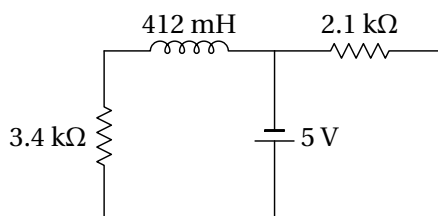


10. No circuito representado no diagrama, a fonte foi ligada no instante

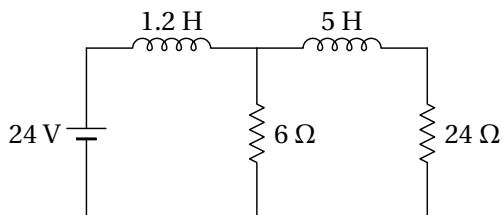
$t = 0$ , quando o condensador estava descarregado e não havia corrente no indutor. Determine as correntes em cada resistência em  $t = 0$  e quando o circuito atingir o estado estacionário.



11. No circuito representado no diagrama, a fonte foi ligada no instante  $t = 0$ , quando não havia corrente no indutor. (a) Determine a voltagem na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$  em  $t = 0$ . (b) Determine o valor da derivada voltagem na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$ , em  $t = 0$ . (c) Determine a voltagem na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$ , quando o circuito atingir o estado estacionário.



12. A fonte no circuito do diagrama foi ligada no instante  $t = 0$ , quando a corrente nos dois indutores era nula. (a) Determine a diferença de potencial em cada um dos dois indutores, no instante  $t = 0$ . (b) Encontre o valor da derivada da corrente em cada indutor, em  $t = 0$ . (c) Determine a intensidade da corrente em cada indutor, após o circuito atingir o estado estacionário.



## Respostas

**Perguntas:** 1. B. 2. C. 3. E. 4. E. 5. C.

### Problemas

- O fluxo aumenta até um valor máximo, decresce até um valor mínimo local em  $t_1$ , volta a aumentar até o valor máximo e a seguir diminui monotonicamente. A corrente troca de sentido 3 vezes, nos 3 pontos onde o fluxo é máximo ou mínimo. Enquanto o anel se aproxima desde longe a corrente aumenta desde zero, e quando o anel já está a afastar-se longe do íman, a corrente decresce até zero.
- $5.67 \times 10^{-6} \text{ V}$ .
- 0.33 V.
- 3.5 mV. Vista de cima, a corrente na espira tem sentido anti-horário.
- $v = \frac{mgR}{B^2 d^2}$ .
- $E_i = 0.0018 e^{-t/15}$ , na direção tangente ao anel e no sentido horário.
- 0.18 V, no sentido anti-horário visto desde a esquerda.
- Inicialmente, 100 mA no condensador e 0 no indutor. No fim, 1.96 mA no indutor e 17.6  $\mu\text{C}$  no condensador.
- (a) 20 mA. (b) A corrente diminui enquanto a carga aumenta; quando a corrente decresce até zero, a carga atinge um valor máximo e nesse momento, o condensador começa a descarregar, surgindo uma corrente que aumenta, no sentido contrário à corrente inicial. Quando a carga diminui até zero, a corrente é máxima e com a mesma intensidade inicial. O ciclo repete-se indefinidamente, pois não existe nenhuma resistência que dissipe energia.
- Em  $t = 0$ , 1.91 mA na resistência de 4.7 k $\Omega$ , e 2.0 mA nas resistências de 1.8 k $\Omega$  e 2.7 k $\Omega$ . No estado estacionário, 2.56 mA na resistência de 1.8 k $\Omega$ , 0.93 mA na resistência de 4.7 k $\Omega$ , e 1.63 mA na resistência de 2.7 k $\Omega$ .
- (a) 0. (b) 41.26 kV/s. (c) 5 V.
- (a) 24 V no indutor de 1.2 H, e 0 no indutor de 5 H. (b) 20 A/s no indutor de 1.2 H, e 0 no indutor de 5 H. (c) 5 A no indutor de 1.2 H, e 1 A no indutor de 5 H.

## 10. Processamento de sinais



Um sintetizador é um instrumento musical baseado no processamento de sinais eléctricos. É produzida uma tensão eléctrica oscilatória que é logo processada passando por vários filtros que alteram a forma da função que representa a tensão em função do tempo. O sinal de saída é alimentado num altifalante produzindo o som desejado. A fotografia mostra um sintetizador Moog, modelo Minimoog, de 1970.

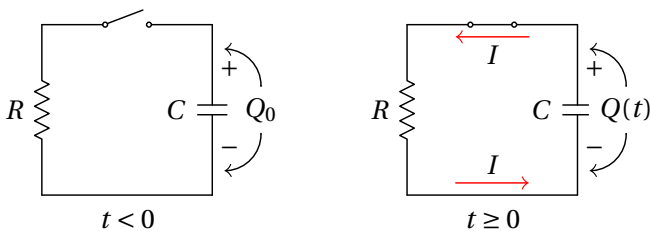
## 10.1. Sinais

Uma aplicação importante dos circuitos elétricos é no processamento de sinais. Os sinais a processar são tensões ou correntes elétricas variáveis em função do tempo. Esses sinais podem ser produzidos, por exemplo, num microfone ou em transdutores de diversos tipos, usados para medir pressões, temperaturas ou outras propriedades físicas. O sinal elétrico produzido pelo transdutor constitui uma fonte de tensão ou corrente variável no circuito elétrico usado para o seu processamento.

Neste capítulo designa-se por **sinal** qualquer grandeza que varie em função do tempo em alguma parte de um circuito. Por exemplo, uma tensão  $V(t)$ , uma corrente  $I(t)$  ou a carga  $Q(t)$  num condensador. Utiliza-se um til para indicar transformadas de Laplace correspondentes, nomeadamente,  $\tilde{V}(s)$ ,  $\tilde{I}(s)$  e  $\tilde{Q}(s)$ . Quando é óbvio que se está a falar de sinal, por vezes escreve-se apenas  $V$  e  $\tilde{V}$ , ficando implícito que são funções que dependem do tempo  $t$  e da frequência  $s$  (o apêndice C apresenta um sumário sobre a transformada de Laplace).

## 10.2. Circuito RC

A figura 10.1 mostra o diagrama de circuito para um condensador, com carga inicial  $Q_0$ , que é descarregado por ligação a uma resistência  $R$ . Esse circuito é designado de circuito RC.



**Figura 10.1.:** Descarga de um condensador.

O instante  $t = 0$  em que o condensador é ligado à resistência corresponde ao instante em que é fechado o interruptor no diagrama de circuito da figura 10.1. Quando o condensador começa a descarregar, a corrente é igual à taxa de diminuição da carga no condensador,  $-dQ/dt$ .



Em qualquer instante  $t \geq 0$ , a corrente e a diferença de potencial no condensador são iguais à corrente  $I$  e à diferença de potencial  $IR$  na resistência, respetivamente:

$$-\frac{dQ}{dt} = I \quad \frac{Q}{C} = IR \quad (10.1)$$

Combinando estas duas equações obtém-se uma equação diferencial para a carga em função do tempo,

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \quad (t \geq 0) \quad (10.2)$$

Calculando a transformada de Laplace (apêndice C) de ambos os membros da equação obtém-se

$$s\tilde{Q} - Q_0 = -\frac{\tilde{Q}}{RC} \quad (10.3)$$

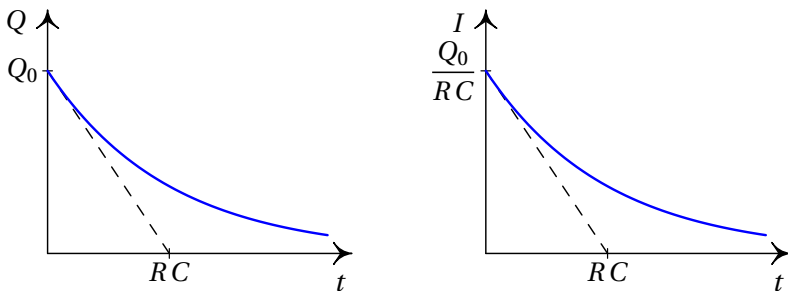
e segue-se que

$$\tilde{Q} = \frac{Q_0}{s + \frac{1}{RC}} \quad (10.4)$$

A transformada inversa desta equação dá a carga em função do tempo no circuito RC:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)} \quad (10.5)$$

Constata-se que a carga no condensador decresce de forma exponencial. A corrente obtém-se dividindo a carga por  $RC$  e, portanto, decresce também de forma exponencial. Os gráficos da carga e da corrente, em função do tempo, são apresentados na figura 10.2.



**Figura 10.2.:** Carga e corrente no circuito RC.

A constante  $t_C = RC$ , com unidades de tempo, chama-se **constante de tempo**. É o tempo que demoraria a descarregar o condensador se a corrente mantivesse o seu valor inicial  $Q_0/t_C$ . A constante de tempo  $t_C$  é

também igual ao intervalo de tempo em que a carga e a corrente diminuem até  $1/e$  (ou seja, 37%) dos seus valores iniciais. Quanto maior é a constante de tempo, mais lenta é a diminuição da carga e da corrente no circuito RC.

### 10.3. Equações diferenciais dos circuitos

Considere-se um circuito onde existe uma fonte com tensão variável  $V_e(t)$ , que constitui o **signal de entrada**. Interessa calcular a tensão  $V(t)$  produzida em algum elemento do circuito; essa tensão  $V(t)$  considera-se o **signal de saída** do circuito.

Para facilitar a análise, admite-se que o sinal de entrada  $V_e(t)$  só aparece a partir de um instante arbitrado  $t = 0$ , tal que para  $t < 0$  o sistema se encontra em equilíbrio estável. No final desta secção explica-se o que isso quer dizer.

O primeiro exemplo considerado é o **circuito RLC** da figura 10.3, onde o sinal de saída é a tensão no condensador. Os símbolos + e - não implicam tensões positivas ou negativas; indicam apenas que  $V_e(t)$  (ou  $V(t)$ ) é o potencial no ponto designado +, subtraído do potencial no ponto designado -.

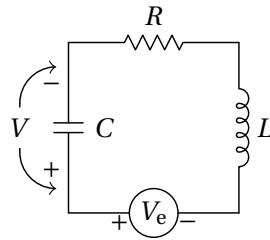


Figura 10.3.: Circuito RLC.

Se  $I(t)$  for a corrente no circuito, as diferenças de potencial na resistência e no indutor são:

$$V_R(t) = RI(t) \quad V_L(t) = L\dot{I}(t) \quad (10.6)$$

onde  $\dot{I}(t)$  é a derivada de  $I(t)$  em ordem a  $t$ .

No condensador, a diferença de potencial é o sinal de saída  $V(t)$ , que é diretamente proporcional à carga no condensador

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (10.7)$$

Por aplicação da regra da malha ao circuito da figura 10.3 obtém-se

$$L\dot{I} + RI + V = V_e \quad (10.8)$$

Como a corrente  $I$  é igual à derivada da carga  $Q$  no condensador, derivando a equação 10.7 obtém-se:

$$I = C \dot{V} \quad (10.9)$$

onde  $\dot{V}$  é a derivada de  $V(t)$ . Derivando novamente obtém-se

$$\dot{I} = C \ddot{V} \quad (10.10)$$

Finalmente, substituindo 10.9 e 10.10 na equação 10.8 obtém-se a equação que permite calcular o sinal de saída  $V$  a partir do sinal de entrada  $V_e$ :

$$LC \ddot{V} + RC \dot{V} + V = V_e \quad (10.11)$$

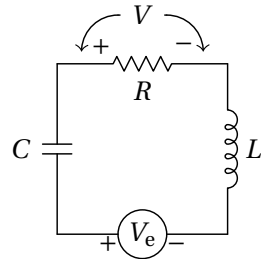
Para um sinal de entrada conhecido,  $V_e(t)$ , e valores conhecidos de  $R$ ,  $C$  e  $L$ , a equação diferencial 10.11 pode ser resolvida para obter o sinal de saída  $V(t)$ .

O segundo exemplo corresponde ao mesmo circuito RLC da figura 10.3, mas com tensão de saída na resistência (figura 10.4). A tensão de saída verifica a lei de Ohm

$$V = RI \quad (10.12)$$

E aplicando a regra das malhas obtém-se

$$L \dot{I} + V + \frac{Q}{C} = V_e \quad (10.13)$$



**Figura 10.4.:** Circuito RLC.

Derivando ambos os membros da equação anterior, substituindo  $I$  em função de  $V$  (usando a equação 10.12) e lembrando que a derivada da carga no condensador é igual à corrente  $I$ , obtém-se a equação diferencial para este circuito:

$$\frac{L}{R} \ddot{V} + \dot{V} + \frac{1}{RC} V = \dot{V}_e \quad (10.14)$$

O último exemplo analisado nesta secção é, mais uma vez, o mesmo circuito RLC, mas em que o sinal de saída é a diferença de potencial no indutor (figura 10.5).

Neste caso a tensão de saída verifica a equação

$$V = L \dot{I} \quad (10.15)$$

Derivando a equação da malha duas vezes e substituindo  $\dot{I}$  em função de  $V$  (usando a equação anterior), obtém-se a equação diferencial para o circuito na figura 10.5:

$$\ddot{V} + \frac{R}{L} \dot{V} + \frac{1}{LC} V = \ddot{V}_e \quad (10.16)$$

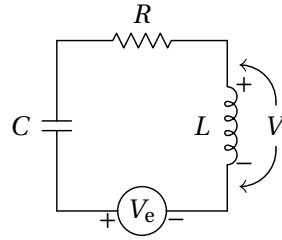


Figura 10.5.: Circuito RLC.

Para cada possível sinal de entrada,  $V_e(t)$ , as equações diferenciais dos 3 exemplos considerados (equações 10.11, 10.14 e 10.16) são equações diferenciais lineares, não homogêneas, com coeficientes constantes. Qualquer outro circuito mais complicado, formado por fontes, resistências, condensadores e indutores, conduz ao mesmo tipo de equação diferencial.

Em  $t < 0$  o sinal de entrada é nulo e a equação diferencial linear torna-se homogênea. Todas as equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes podem ser escritas na forma de um sistema dinâmico autônomo e linear, como se mostra no livro *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos* (Villate, 2015, capítulo 9). Como tal, o sistema dinâmico tem um único ponto de equilíbrio com  $V = \dot{V} = 0$  (se a equação for de segunda ordem; já se for de terceira ordem,  $V = \dot{V} = \ddot{V} = 0$ , etc).

Na prática, a resistência  $R$  de cada elemento num circuito nunca é exatamente nula mas sim um valor positivo, o que faz com que o sistema dinâmico seja dissipativo e o ponto de equilíbrio seja estável (atrativo). Como tal, admite-se que em  $t < 0$  o sistema evolui para o estado de equilíbrio estável e no limite  $t \rightarrow 0^-$  o circuito está no estado estacionário em que o sinal de saída e a sua derivada são ambos nulos ( $V = \dot{V} = 0$ ). Ou seja, admite-se que todas as cargas e correntes no circuito são nulas no instante inicial ( $t \rightarrow 0^-$ ).

## 10.4. Unidades de tempo e de frequência

A frequência tem unidades de inverso do tempo. A unidade SI de frequência é o hertz, em homenagem a Heinrich R. Hertz (1857–1894), representado pelo símbolo Hz e equivalente a  $s^{-1}$ . Na secção 10.2 viu-se que o comportamento de um circuito RC depende de uma única constante própria do

sistema, com unidades de tempo:

$$t_C = RC \quad (10.17)$$

Como tal, conclui-se então que o termo  $RC\dot{V}$  na equação 10.11 tem unidades de voltagem, já que  $\dot{V}$  tem unidades de voltagem sobre tempo; de facto, para que a equação seja válida, todos os termos nos dois membros da equação devem ter as mesmas unidades, neste caso voltagem.

Já na equação 10.14, o segundo membro da equação tem unidades de voltagem sobre tempo e observando o primeiro termo do primeiro membro da equação, conclui-se que  $L/R$  tem unidades de tempo, pois as unidades de  $\ddot{V}$  são voltagem sobre tempo ao quadrado. Define-se então uma segunda constante de tempo:

$$t_L = \frac{L}{R} \quad (10.18)$$

A constante  $LC$  que aparece na equação 10.16 é igual ao produto das duas constantes de tempo ( $t_C t_L$ ) e como tal, tem unidades de tempo ao quadrado. Todos os termos da equação 10.16 têm unidades de voltagem sobre tempo ao quadrado.

As equações 10.17 e 10.18 permitem definir o sistema de unidades mais conveniente num circuito determinado. Por exemplo, se as resistências no circuito fossem da ordem dos  $k\Omega$  e as capacidades da ordem dos  $nF$ , a unidade de tempo mais conveniente seria o  $\mu s$  (produto entre  $k\Omega$  e  $nF$ ), a unidade de indutância mais conveniente seria então o  $mH$  (produto entre  $\mu s$  e  $k\Omega$ ) e a unidade de frequência mais conveniente seria  $MHz$  (inverso de  $\mu s$ ). Com os valores das resistências em  $k\Omega$ , capacidades em  $nF$ , indutâncias em  $mH$ , tempos em  $\mu s$  e frequências em  $MHz$ , podem-se ignorar as unidades e trabalhar com números de ordens de grandeza semelhantes.

## 10.5. Impedância

As equações dos circuitos com condensadores e indutores são sempre equações diferenciais, como se viu nos exemplos da secção 10.3. No entanto, como essas equações são lineares e de coeficientes constantes, as correspondentes transformadas de Laplace são sempre equações algébricas em função de um parâmetro  $s$  com unidades de frequência.

É muito mais fácil encontrar diretamente a equação algébrica do circuito, em função do parâmetro  $s$ , resolvê-la para encontrar a transformada de Laplace do sinal de saída e a seguir calcular a transformada de Laplace inversa para determinar o sinal de saída em ordem ao tempo. Para encontrar a equação do circuito no domínio da frequência  $s$ , é necessário saber a relação que existe entre corrente e tensão no domínio da frequência, para cada tipo de elemento no circuito e aplicar a lei dos nós e a lei das malhas.

Como já foi referido, nos circuitos dissipativos pode sempre admitir-se que no instante inicial  $t = 0$ , o sinal de entrada  $V_e(t)$  e o sinal de saída  $V(t)$  são nulos. Assim sendo, as transformadas de Laplace de  $\dot{V}_e$  e  $\dot{V}$  são  $s\tilde{V}_e(s)$  e  $s\tilde{V}(s)$ , onde  $\tilde{V}_e$  e  $\tilde{V}$  são as transformadas dos sinais de entrada e saída. Como as derivadas dos sinais também são inicialmente nulas, as transformadas de  $\ddot{V}_e$  e  $\ddot{V}$  são  $s^2\tilde{V}_e(s)$  e  $s^2\tilde{V}(s)$ .

Numa resistência, a lei de Ohm define a relação entre os sinais da tensão e da corrente

$$V(t) = R I(t) \quad (10.19)$$

e aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação obtém-se:

$$\tilde{V} = R \tilde{I} \quad (10.20)$$

Num indutor, a relação entre a tensão e a corrente é

$$V(t) = L \frac{dI(t)}{dt} \quad (10.21)$$

Como se está a admitir que a tensão e a corrente são nulas em  $t < 0$ , usando a propriedade da transformada de Laplace da derivada obtém-se a equação:

$$\tilde{V} = L s \tilde{I} \quad (10.22)$$

que é semelhante à lei de Ohm 10.20 para as resistências, exceto que em vez de  $R$  se tem uma função  $Z(s)$  que depende da frequência:

$$Z(s) = L s \quad (10.23)$$

Num condensador, a diferença de potencial é diretamente proporcional à carga acumulada:

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (10.24)$$

e a condição de cargas e correntes nulas em  $t < 0$  implica que a carga num instante  $t > 0$  é igual ao integral da corrente, desde  $t = 0$  até  $t$ :

$$V(t) = \frac{1}{C} \int_0^t I(u) \, du \quad (10.25)$$

Usando a propriedade da transformada de Laplace do integral, obtém-se:

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{sC} \quad (10.26)$$

Mais uma vez, obteve-se uma relação semelhante à lei de Ohm, mas em que o valor da resistência  $R$  é substituído por uma função que depende da frequência:

$$Z(s) = \frac{1}{sC} \quad (10.27)$$

Conclui-se então que, no domínio da frequência, as resistências, indutores e condensadores verificam todos uma **lei de Ohm generalizada**:

$$\boxed{\tilde{V}(s) = Z(s) \tilde{I}(s)} \quad (10.28)$$

onde a função  $Z(s)$  denominada **impedância generalizada**, é dada por:

$$Z = \begin{cases} R & \text{(resistências)} \\ Ls & \text{(indutores)} \\ \frac{1}{Cs} & \text{(condensadores)} \end{cases} \quad (10.29)$$

Note-se que a impedância dos indutores aumenta quando a frequência  $s$  aumenta, a impedância dos condensadores diminui com o aumento da frequência, e a impedância das resistências é constante, qualquer que seja a frequência.

## 10.6. Associações de impedâncias

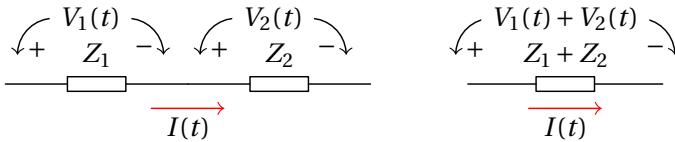
Na secção 3.7 encontrou-se o valor da resistência equivalente para duas resistências ligadas em série ou em paralelo. No processo de demonstração teve-se em conta que nas resistências em série a corrente é a mesma mas a diferença de potencial total é igual à soma das diferenças de potencial, nas

resistências em paralelo a diferença de potencial é a mesma mas a corrente total é soma das correntes nas resistências e que em cada resistência a tensão  $\Delta V$  é diretamente proporcional à corrente  $I$ .

As mesmas condições são válidas no caso de combinações de resistências, indutores ou condensadores em série ou em paralelo, no domínio da frequência onde a transformada de Laplace da tensão ( $\tilde{V}$ ) é diretamente proporcional à transformada de Laplace da corrente ( $\tilde{I}$ ) em qualquer um desses dispositivos (basta repetir o mesmo raciocínio da secção 3.7 substituindo  $\Delta V$  por  $\tilde{V}$ ,  $I$  por  $\tilde{I}$  e  $R$  por  $Z$ ).

Como tal, as regras para obter a impedância equivalente de combinações de resistências, indutores ou condensadores, ligados em série ou em paralelo, são idênticas às regras para obter a resistência equivalente de resistências em série ou em paralelo. No caso de dois dispositivos em série (figura 10.6, a impedância equivalente é igual à soma das impedâncias dos dois dispositivos:

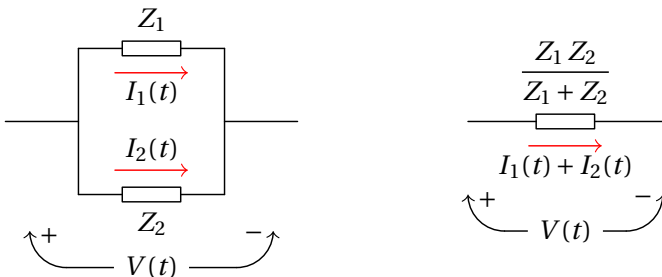
$$Z_s = Z_1 + Z_2 \tag{10.30}$$



**Figura 10.6.:** Impedâncias em série e sistema equivalente.

No caso de dois dispositivos em paralelo (figura 10.7), a impedância equivalente é:

$$Z_p = Z_1 \parallel Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{10.31}$$



**Figura 10.7.:** Impedâncias em paralelo e sistema equivalente.

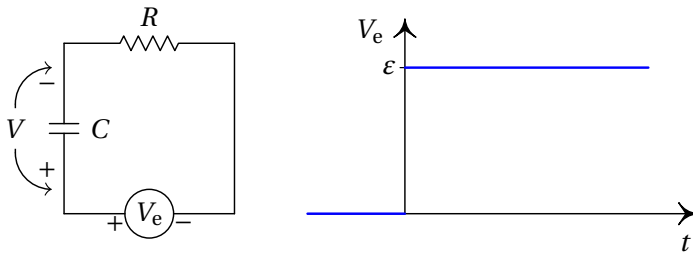


**Exemplo 10.1**

Liga-se um condensador a uma fonte de tensão contínua para o carregar. Descreva a variação da carga e da corrente no condensador, em função do tempo (resposta transitória).

**Resolução.** A fonte de tensão contínua, com f.e.m.  $\varepsilon$ , ligada num instante arbitrário  $t = 0$ , pode ser considerada como um sinal de entrada  $V_e = \varepsilon u(t)$ , onde  $u(t)$  é a função **degrau unitário** (ver apêndice C). A transformada de Laplace de  $V_e$  é então  $\tilde{V}_e = \varepsilon/s$ .

O lado esquerdo da figura seguinte mostra o diagrama do circuito, onde  $R$  representa a soma da resistência interna da fonte com a resistência dos fios usados para ligar a fonte ao condensador, e no lado direito mostra-se o gráfico de  $V_e = \varepsilon u(t)$



A impedância total do circuito é a soma das impedâncias da resistência e do condensador, já que estão em série

$$Z_t = R + \frac{1}{Cs}$$

e, pela lei de Ohm generalizada, a transformada da corrente no circuito é:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\varepsilon}{Rs + \frac{1}{C}}$$

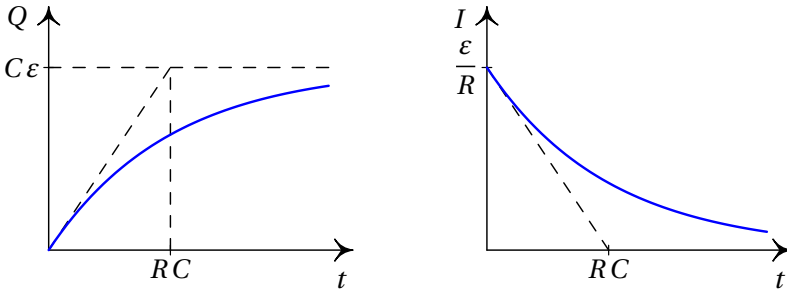
A transformada de Laplace da tensão no condensador é igual à impedância do condensador vezes  $\tilde{I}$ :

$$\tilde{V} = \frac{\tilde{I}}{Cs} = \frac{\varepsilon}{s(RCs + 1)} \varepsilon \left( \frac{1}{s} - \frac{RC}{RCs + 1} \right)$$

A tensão no condensador, em função do tempo, é a transformada de Laplace inversa

$$V(t) = \varepsilon(1 - e^{-t/(RC)}) \tag{10.32}$$

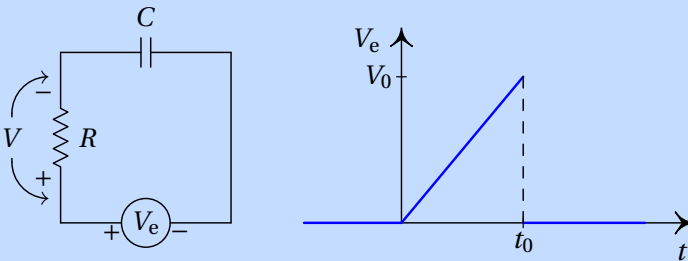
A carga em função do tempo  $Q(t)$  obtém-se multiplicando a expressão anterior por  $C$  e a figura 10.8 mostra os gráficos da carga e da corrente ( $dQ/dt$ ) em função do tempo. A carga aumenta de forma exponencial, desde zero até o valor máximo  $C\varepsilon$ . Substituindo um condensador por um interruptor aberto (aproximação para  $t \rightarrow \infty$ ), verifica-se que o valor assintótico da tensão no condensador é  $\varepsilon$  e a carga aproxima-se assintoticamente de  $C\varepsilon$ .



**Figura 10.8.:** Gráficos do período transitório da carga e corrente num condensador a ser carregado com uma fonte de tensão contínua.

**Exemplo 10.2**

No circuito da figura, determine o sinal de saída  $V(t)$ , quando o sinal de entrada  $V_e(t)$  é o sinal triangular representado no gráfico.



**Resolução.** A impedância equivalente e a transformada da corrente são

iguais às do exemplo anterior:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}_e}{R + \frac{1}{Cs}}$$

Mas como a tensão de saída é agora medida na resistência, vem:

$$\tilde{V} = R\tilde{I} = \frac{RCs\tilde{V}_e}{RCs+1} \quad (10.33)$$

Usando a função degrau unitário, o sinal de entrada escreve-se:

$$V_e = \frac{V_0 t}{t_0} (u(t) - u(t - t_0))$$

e é útil escrevê-la da forma equivalente:

$$V_e = \frac{V_0}{t_0} (t u(t) - t_0 u(t - t_0) - (t - t_0) u(t - t_0))$$

Aplicando agora a propriedade de deslocamento no tempo da transformada de Laplace, obtém-se a transformada de Laplace do sinal triangular de entrada:

$$\tilde{V}_e = \frac{V_0}{t_0} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{t_0 e^{-t_0 s}}{s} - \frac{e^{-t_0 s}}{s^2} \right)$$

e substituindo  $\tilde{V}_e$  na equação 10.33 obtém-se

$$\tilde{V} = \frac{V_0}{t_0} \left( \frac{RC}{s(RCs+1)} - \frac{RC t_0 e^{-t_0 s}}{RCs+1} - \frac{RC e^{-t_0 s}}{s(RCs+1)} \right)$$

Para calcular a transformada inversa, começa-se por ignorar os fatores exponenciais e calcular as transformadas inversas seguintes

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{RC}{RCs+1} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right\} = e^{-t/(RC)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{RC}{s(RCs+1)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + \frac{1}{RC}} \right\} = RC (1 - e^{-t/(RC)})$$

em que foi usada expansão em frações parciais no segundo caso. Usando esses dois resultados, a transformada inversa de  $\tilde{V}$  pode escrever-se da forma seguinte:

$$V(t) = \frac{V_0 RC}{t_0} (1 - e^{-t/(RC)}) - V_0 u(t - t_0) e^{-(t-t_0)/(RC)} - \frac{V_0 RC}{t_0} u(t - t_0) (1 - e^{-(t-t_0)/(RC)}) \quad (10.34)$$

Este exemplo pode ser resolvido também usando o programa *Maxima*. Começa-se por definir o sinal de entrada (para maior clareza usam-se maiúsculas para as funções do tempo,  $V_e$ ,  $V$ ,  $I$  e minúsculas para as suas transformadas de Laplace,  $v_e$ ,  $v$ ,  $i$ )

```
(%i1) Ve: V0*t*(1 - unit_step(t - t0)) / t0$
```

Para calcular a transformada de Laplace usa-se a função `laplace`, à qual devem ser dados 3 argumentos: a função, a variável usada para o tempo e a variável usada para a frequência.

```
(%i2) ve: laplace (Ve, t, s);
```

```
(%o2) 
$$-\frac{e^{-s t_0} V_0}{s^2 t_0} - \frac{e^{-s t_0} V_0}{s} + \frac{V_0}{s^2 t_0}$$

```

A impedância total e a transformada da corrente no circuito são:

```
(%i3) Zt: R + 1/(C*s)$
```

```
(%i4) i: ve/Zt$
```

A transformada do sinal de saída é a tensão na resistência, no domínio da frequência:

```
(%i5) v: expand (R*i);
```

```
(%o5) 
$$-\frac{R V_0}{s^2 t_0 e^{s t_0} R + \frac{s t_0 e^{s t_0}}{C}} - \frac{R V_0}{s e^{s t_0} R + \frac{e^{s t_0}}{C}} + \frac{R V_0}{s^2 t_0 R + \frac{s t_0}{C}}$$

```

o comando `expand` foi usado para separar os 3 termos na expressão. Neste momento devia ser possível calcular diretamente a transformada inversa de  $v_e$ , usando a função `ilt` do Maxima, mas atualmente (versão 5.43 do Maxima) a função `ilt` não está completamente implementada e não consegue calcular transformadas inversas de funções com termos exponenciais. Para essas funções, pode-se ignorar a função exponencial, calcular a transformada inversa e a seguir deslocá-la no tempo, usando a propriedade do deslocamento no tempo da transformada de Laplace (equação C.13 do apêndice C).

A separação dos 3 termos, eliminando as funções exponenciais nos dois primeiros termos, pode ser feita da forma seguinte:

```
(%i6) v1: ratsimp (exp(s*t0)*part(v,1));
```

```
(%o6)      - CRV0
            s^2 t0 CR + s t0
(%i7) v2: ratsimp (exp(s*t0)*part(v,2));
(%o7)      - CRV0
            s CR + 1
(%i8) v3: part(v,3);
(%o8)      RV0
            s^2 t0 R + s t0 / C
```

e podem-se calcular as correspondentes transformadas inversas de Laplace

```
(%i9) V1: ilt (v1, s, t)$
(%i10) V2: ilt (v2, s, t)$
(%i11) V3: ilt (v3, s, t)$
```

Finalmente, pela propriedade de deslocamento no tempo (equação C.13) obtém-se  $V(t)$

```
(%i12) V: subst (t=t - t0, ratsimp(V1+V2))*unit_step(t - t0) + V3;
(%o12)  u(t - t0) e^{-t/C R} \left( (C R - t_0) e^{t_0/C R} - C R e^{t/C R} \right) V_0 - \frac{C R e^{-t/C R} V_0}{t_0} + \frac{C R V_0}{t_0}
```

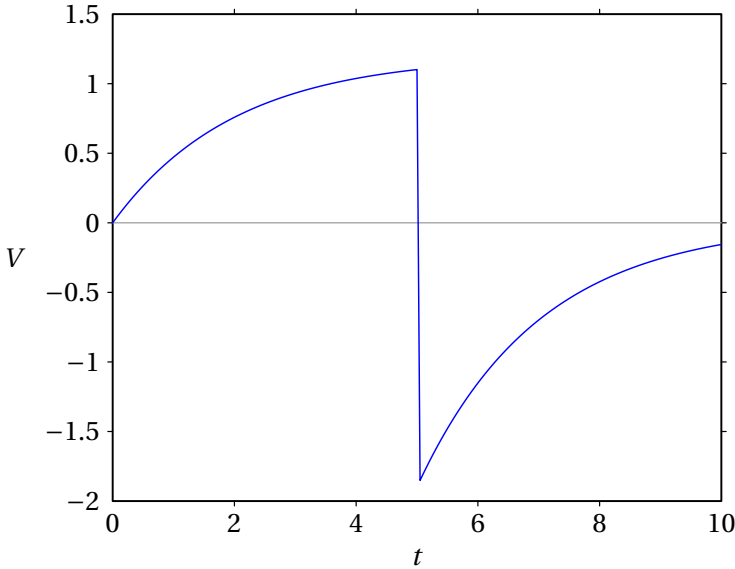
esta expressão é equivalente à já obtida na equação 10.34. A vantagem de utilizar o Maxima é que se pode usar este resultado, por exemplo, para representar o gráfico do sinal de saída, dando valores numéricos aos parâmetros.

Por exemplo, com os parâmetros  $t_0 = 5$ ,  $R = 2$ ,  $C = 1$  e  $V_0 = 3$  o gráfico obtém-se com o comando:

```
(%i13) plot2d(subst([t0=5,R=2,C=1,V0=3],V),[t,0,10],[ylabel,"V"])$
```

A figura 10.9 mostra o gráfico obtido para o sinal de saída.

A descontinuidade em  $t = 5$  deve-se a que entre  $t = 0$  e  $t = 5$  a fonte alimenta tanto o condensador como a resistência, passando o condensador a ser elemento ativo no circuito e alimentando a resistência, a partir do instante em que a tensão da fonte desaparece, em  $t = 5$ . O sentido da corrente inverte-se assim em  $t = 5$ , dando origem à mudança abrupta no sinal da tensão de saída.



**Figura 10.9.:** Sinal de saída no exemplo 10.2 com:  $t_0 = 5$ ,  $R = 2$ ,  $C = 1$  e  $V_0 = 3$ .

Outra função do Maxima que é bastante útil para calcular integrais e transformadas inversas é `partfrac`, para obter expansões em frações parciais. É necessário dar dois argumentos a essa função: a expressão a ser expandida e a variável nessa expressão. Por exemplo, a expansão:

$$\frac{RC}{s(RCs+1)} = \frac{RC}{s} - \frac{R^2C^2}{RCs+1}$$

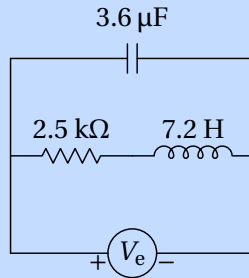
usada no exemplo anterior para obter o resultado 10.34, podia ser obtida com o comando:

```
(%i14) partfrac (R*C/(s*(R*C*s + 1)), s);
(%o14)      CR      C^2R^2
            s      sCR+1
```

### Exemplo 10.3

No circuito da figura, calcule as transformadas de Laplace das tensões e correntes em cada um dos 3 dispositivos, em função da transformada da tensão de entrada,  $\tilde{V}_e$ . Encontre as expressões para essas tensões e correntes, em função do tempo, no caso particular em que a entrada é

uma fonte ideal de tensão contínua com f.e.m.  $\varepsilon$ .

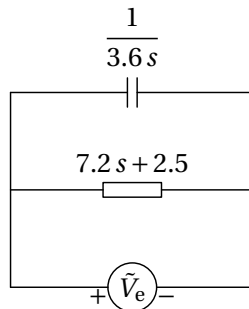


**Resolução.** Convém começar pela escolha de um sistema de unidades que facilite os cálculos numéricos. Para todas as impedâncias (resistências) usam-se  $\text{k}\Omega$  e para as capacidades  $\mu\text{F}$ ; isso implica usar ms como unidade de tempo e H como unidade de indutância. Usando V para as tensões, as correntes estarão em mA.

Com esse sistema de unidades, as impedâncias do condensador, da resistência e do indutor são:  $1/(3.6 \text{ s})$ ,  $2.5$  e  $7.2 \text{ s}$  onde  $s$  é medida em kHz. A resistência e o indutor estão em série e podem ser combinados numa única impedância com valor:

$$7.2 \text{ s} + 2.5 = 7.2 \left( s + \frac{1}{2.88} \right)$$

Note-se que a última simplificação é uma questão de gosto, para trabalhar com constantes de tempo e neste caso  $2.88 = 7.2/2.5$  é a constante de tempo para esse segmento do circuito. O circuito original é então equivalente ao seguinte circuito com dois elementos em paralelo:



Nos dois elementos em paralelo a tensão é a mesma, igual à tensão  $V_e$ .

Como tal, a transformada da corrente que passa através do condensador é

$$\tilde{I}_C = \frac{\tilde{V}_e}{Z_C} = 3.6 s \tilde{V}_e$$

e a transformada da corrente através da resistência e do condensador é

$$\tilde{I}_R = \tilde{I}_L = \frac{\tilde{V}_e}{Z_{RL}} = \frac{\tilde{V}_e}{7.2 s + 2.5}$$

As transformadas das tensões na resistência e no indutor são:

$$\tilde{V}_R = R \tilde{I}_R = \frac{2.5 \tilde{V}_e}{7.2 s + 2.5} \quad \tilde{V}_L = Z_L \tilde{I}_R = \frac{7.2 s \tilde{V}_e}{7.2 s + 2.5}$$

No caso em que a fonte é de tensão contínua,  $V_e = \varepsilon$ , e portanto,

$$\tilde{V}_e = \varepsilon / s$$

No condensador,

$$V_C = V_e = \varepsilon \quad \tilde{I}_C = 3.6 \varepsilon \quad \Rightarrow \quad I_C = 3.6 \varepsilon \delta(t)$$

onde  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac (impulso unitário). Refira-se que a corrente é infinita em  $t = 0$  e nula em outros instantes, mas o integral da corrente é igual à carga armazenada no condensador,  $3.6 \varepsilon$ . Esta solução é apenas uma aproximação, admitindo que a resistência das armaduras do condensador é nula; na realidade essas armaduras têm uma pequena resistência  $r$ , a tensão não aumenta instantaneamente até  $\varepsilon$  mas demorará um tempo pequeno da ordem de  $rC$  e a corrente não será realmente infinita, mas sim muito elevada num pequeno intervalo de tempo da ordem de  $rC$ .

Na resistência:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_R &= \frac{\varepsilon}{s(7.2s + 2.5)} & \Rightarrow & \quad I_R = 0.4 \varepsilon (1 - e^{-t/2.88}) \\ V_R &= 2.5 I_R & \Rightarrow & \quad V_R = \varepsilon (1 - e^{-t/2.88}) \end{aligned}$$

ou seja, a tensão aumenta exponencialmente desde zero até  $\varepsilon$  e a corrente aumenta exponencialmente desde zero até  $0.4 \varepsilon$ .

No indutor:

$$I_L = I_R = 0.4 \varepsilon (1 - e^{-t/2.88}) \quad V_L = \varepsilon - V_R = \varepsilon e^{-t/2.88}$$



e conclui-se que a tensão decresce exponencialmente desde  $\varepsilon$  até 0 e a corrente aumenta exponencialmente desde 0 até  $0.4\varepsilon$ .

Os resultados obtidos no exemplo anterior, no caso em que a tensão de entrada é contínua, podem ser corroborados tendo em conta que, para tensões constantes, após um tempo suficientemente elevado, um condensador comporta-se como um circuito aberto (impedância infinita porque a frequência é nula) e um indutor como um curto circuito (impedância nula porque a frequência é nula).

Como tal, a corrente no condensador deve-se aproximar de 0 e a tensão de  $\varepsilon$ . No indutor e na resistência a corrente deve-se aproximar-se de  $0.4\varepsilon$ ; a tensão na resistência aproxima-se de  $\varepsilon$  e no indutor tende para 0.

## 10.7. Função de transferência

As equações diferenciais dos circuitos com fontes, resistências, condensadores e indutores são sempre lineares. Se em  $t < 0$  todas as tensões e correntes são nulas, a transformada de Laplace da equação do circuito fica igual a um polinómio  $P(s)$ , vezes a transformada do sinal de saída  $\tilde{V}(s)$ , igual a outro polinómio  $Q(s)$ , vezes a transformada do sinal de entrada  $\tilde{V}_e(s)$ :

$$P(s)\tilde{V}(s) = Q(s)\tilde{V}_e(s) \quad (10.35)$$

A expressão geral para a transformada do sinal de saída é então

$$\boxed{\tilde{V}(s) = H(s)\tilde{V}_e(s)} \quad (10.36)$$

onde a função:

$$H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (10.37)$$

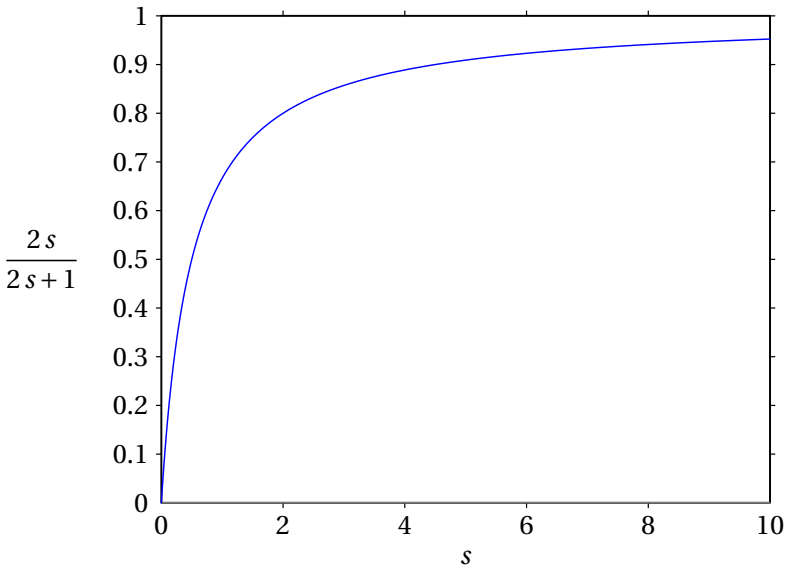
chama-se **função de transferência**. Refira-se que a função  $P(s)$  no denominador é o **polinómio característico** da respetiva equação diferencial homogénea. Como tal, os valores próprios da equação homogénea são pontos onde a função de transferência  $H$  é singular (infinita).

O conhecimento da função de transferência de um circuito permite calcular a saída para diferentes sinais de entrada, por simples multiplicação de  $H$  pelas transformadas de Laplace dos sinais de entrada,  $\tilde{V}_e$ , seguida do cálculo das transformadas inversas.

Por exemplo, no caso do circuito do exemplo 10.2, a função de transferência é obtida calculando  $\tilde{V}/\tilde{V}_e$  na equação 10.33

$$H(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} \quad (10.38)$$

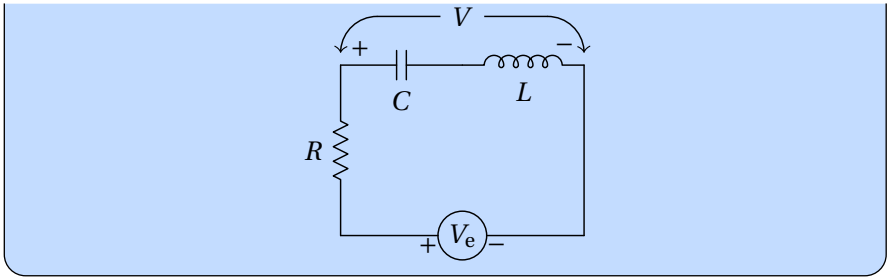
Quando a frequência  $s$  é igual a  $1/(RC)$  esta função de transferência é igual a 0.5. Se a frequência for menor que  $1/(RC)$ ,  $H$  aproxima-se de 0 e se  $s$  for maior que  $1/(RC)$ ,  $H$  aproxima-se de 1. Isso quer dizer que as frequências menores que a frequência de corte,  $1/(RC)$ , serão atenuadas, enquanto que as frequências elevadas não sofrem muita atenuação, razão pela qual o circuito do exemplo 10.2 é denominado **filtro passa-alto**. A figura 10.10 mostra o gráfico desta função de transferência, no caso específico em que  $RC$  é igual a 2 unidades de tempo.



**Figura 10.10.:** Função de transferência de um filtro passa-alto com  $RC = 2$ .

#### Exemplo 10.4

Encontre a função de transferência e a equação diferencial do circuito representado no diagrama.



**Resolução.** A impedância total do segmento onde está a ser medida a tensão  $V$  é:

$$Z_{LC} = \frac{1}{Cs} + Ls = \frac{Ls^2 + \frac{1}{C}}{s}$$

e a impedância total do circuito é  $Z_{LC} + R$ . A transformada da corrente no circuito é então

$$\tilde{I} = \frac{s\tilde{V}_e}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}$$

A transformada da tensão de saída é igual ao produto da impedância à saída pela transformada da corrente

$$\tilde{V} = Z_{LC}\tilde{I} = \left( \frac{Ls^2 + \frac{1}{C}}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \right) \tilde{V}_e$$

e a função de transferência é:

$$H = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

O denominador de  $H$  é o polinómio caraterístico da equação do circuito e o numerador, multiplicado por  $\tilde{V}_e$ , é a transformada do segundo membro dessa equação; como tal, a equação diferencial do circuito é:

$$\ddot{V} + \frac{R}{L}\dot{V} + \frac{V}{LC} = \ddot{V}_e + \frac{V_e}{LC}$$

## Perguntas

1. A equação diferencial de um circuito é:  $3\ddot{V} - 2\dot{V} + V = 2\dot{V}_e$ . Qual das seguintes funções representa a função de transferência desse circuito?

A.  $\frac{2}{3s^2 - 2s + 1}$

D.  $\frac{-2}{3s^2 - 2s + 1}$

B.  $\frac{2s}{3s^2 - 2s + 1}$

E.  $\frac{2s}{s^2 - 2s + 3}$

C.  $\frac{2}{s^2 - 2s + 3}$

2. A função de transferência de um filtro é:  $H(s) = \frac{s+10}{2-s}$ . Determine a expressão do sinal de saída  $V(t)$  quando o sinal de entrada é  $V_e(t) = e^{-t}$ .

A.  $3e^t - 4e^{2t}$

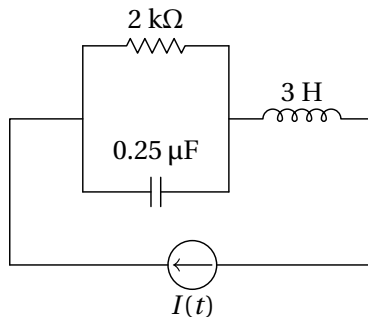
D.  $3e^{-t} - 4e^{2t}$

B.  $e^{-t} - 4e^{-2t}$

E.  $3e^t - 2e^{-2t}$

C.  $4e^{-t} - 3e^{-2t}$

3. No circuito do diagrama, a expressão da corrente fornecida pela fonte é  $I(t) = e^{-2t}$  (em mA se o tempo estiver em ms). Encontre a expressão da corrente através da resistência em função do tempo.



A.  $(2+t)e^{-2t}$

D.  $2te^{-2t}$

B.  $2e^{-2t}$

E.  $0.5e^{-2t}$

C.  $e^{-2t}$

4. Uma resistência com valor  $R$ , um condensador com capacidade  $C$  e um indutor com indutância  $L$  estão ligados em paralelo entre dois pontos de um circuito. Determine a impedância equivalente desse sistema em paralelo.

A.  $\frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + R}$

D.  $\frac{RLCs^2 + Ls + R}{RLs}$

B.  $\frac{RLs}{LCs^2 + RCs + 1}$

E.  $\frac{LCs^2 + RCs + 1}{RLs}$

C.  $\frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs}$

5. Quando a entrada num circuito é a tensão contínua  $V_e = 5$ , a saída é  $2.5(1 - e^{-2t})$ . Se no mesmo circuito a entrada for  $5e^{-t}$  qual será a saída?

A.  $2.5e^{-t}(1 - e^{-2t})$

D.  $5e^{-t}(1 - e^{-t})$

B.  $5e^{-t}(1 - e^{-2t})$

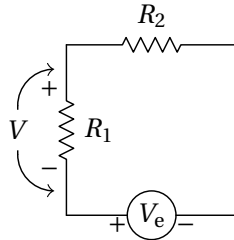
E.  $2.5(1 - e^{-2(t+1)})$

C.  $2.5e^{-t}(1 - e^{-t})$

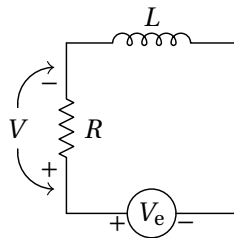
## Problemas

- Um condensador de  $50 \mu\text{F}$  é carregado usando uma fonte com f.e.m. de  $6 \text{ V}$  e resistência interna de  $350 \Omega$ , através de uma resistência de  $100 \text{ k}\Omega$ .
  - Calcule a corrente inicial no instante  $t = 0$  em que é ligada a fonte.
  - Num instante  $t_1 > 0$ , a corrente é de  $20 \mu\text{A}$ ; calcule as diferenças de potencial no condensador e na resistência nesse instante.
  - Calcule a carga armazenada no condensador em  $t_1$ .
  - Calcule o valor de  $t_1$ .
- A memória RAM de um computador funciona com uma fonte de alimentação de  $5 \text{ V}$ , extraindo uma corrente de  $80 \text{ mA}$ . O conteúdo da memória é apagado se a tensão de alimentação diminuir abaixo de  $3 \text{ V}$ . Para proteger os dados na memória em caso de cortes na fonte de alimentação, liga-se um condensador de  $1 \text{ F}$  aos terminais da fonte de alimentação. Faça uma estimativa do tempo que o condensador pode manter os dados na memória. Admita que a única resistência no circuito é a da memória RAM.

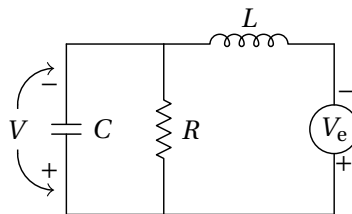
3. Uma resistência de  $3\text{ k}\Omega$  e um condensador de  $5\text{ nF}$  estão ligados em série a uma fonte com tensão  $V_e(t) = 2 - 2t$ , entre  $t = 0$  e  $t = 4$ , e  $V_e(t) = 0$  nos outros instantes ( $t$  medido em  $\mu\text{s}$  e  $V_e$  em V). Calcule a corrente no circuito em  $t > 0$ .
4. O circuito na figura é um **atenuador inversor** (observe a posição dos sinais positivo e negativo da saída). (a) Encontre a equação do circuito. (b) Calcule a função de transferência. (c) Explique a designação de atenuador inversor.



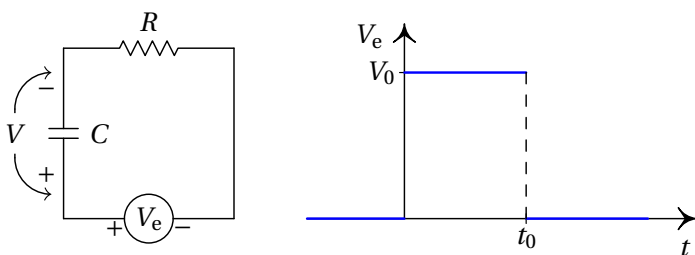
5. No circuito  $LR$  da figura: (a) Encontre a função de transferência. (b) Calcule a tensão  $V(t)$  no caso em que o sinal de entrada é uma fonte de tensão contínua com força eletromotriz  $V_e = \varepsilon$ . (c) Represente o gráfico do sinal  $V(t)$  calculado na alínea anterior.



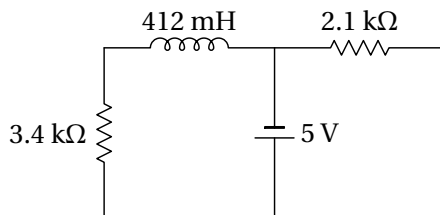
6. No circuito da figura: (a) Calcule a impedância total, em função de  $s$ . (b) Calcule a transformada da corrente que passa pelo indutor. (c) Encontre a função de transferência, se a tensão de saída for medida no condensador. (d) Determine a equação diferencial para a tensão de saída.



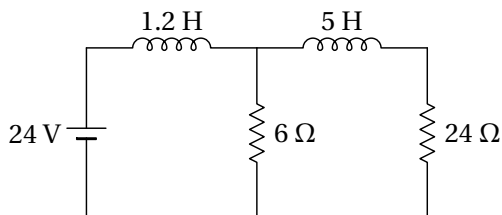
7. O circuito na figura é denominado **filtro passa-baixo**. Escreva a equação que relaciona o sinal de saída com o sinal de entrada. Encontre a função de transferência do sistema e determine o sinal de saída quando o sinal de entrada é o indicado no lado direito da figura. Explique porque se designa este circuito de filtro passa-baixo.



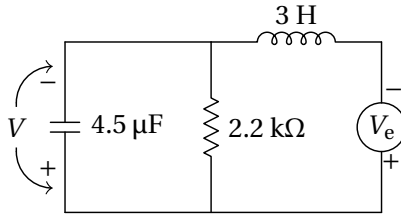
8. No circuito representado no diagrama, a fonte foi ligada no instante  $t = 0$ , quando não havia corrente no indutor. Determine a expressão da voltagem na resistência de  $3.4 \text{ k}\Omega$ , em função do tempo  $t$ . Com a expressão obtida, confirme as respostas dadas para o 11 no capítulo 9.



9. A fonte no circuito do diagrama foi ligada no instante  $t = 0$ , quando a corrente nos dois indutores era nula. Encontre as expressões das correntes nos dois indutores em função do tempo. Com as expressões obtidas, confirme as respostas dadas para o 12 no capítulo 9.



10. A figura mostra o diagrama de circuito de um filtro. O sinal de entrada é  $V_e$  e o sinal de saída é  $V$ . Encontre a função de transferência do filtro e a equação diferencial que permite calcular  $V(t)$  para um sinal de entrada  $V_e(t)$  dado.





## Respostas

**Perguntas:** 1. B. 2. D. 3. D. 4. A. 5. D.

### Problemas

1. (a)  $59.79 \mu\text{A}$ . (b)  $3.993 \text{ V}$  no condensador e  $2.0 \text{ V}$  na resistência. (c)  $0.200 \text{ mC}$ . (d)  $5.495 \text{ s}$ .

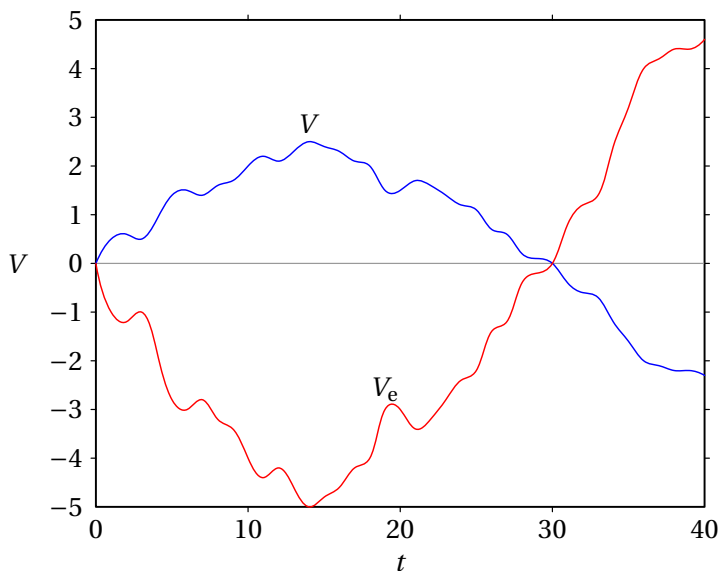
2.  $32 \text{ s}$ .

$$3. I(t) = \frac{32}{3} e^{-t/15} - 10 + u(t-4) (10 - 8 e^{-(t-4)/15})$$

(em mA, se  $t$  estiver em segundos).

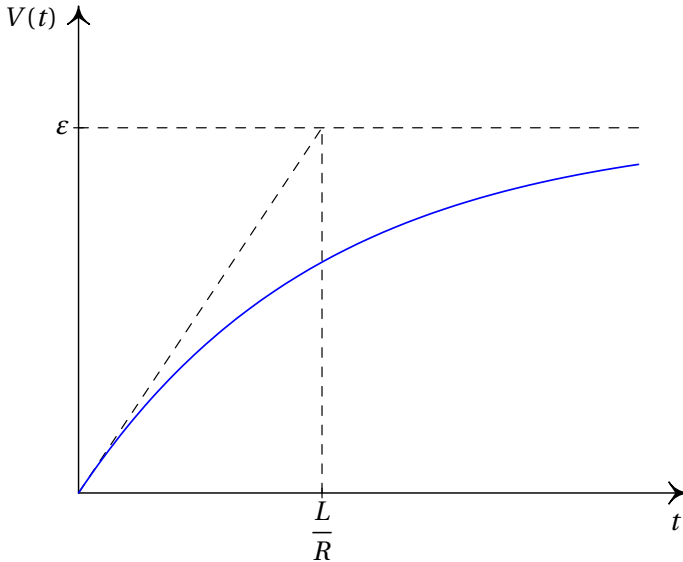
$$4. (a) V(t) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_e(t). \quad (b) -\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

(c) O sinal de saída tem sempre a mesma forma do sinal de entrada, mas multiplicado por uma constante negativa, com valor absoluto menor que 1, como no exemplo do gráfico seguinte:



$$5. (a) \frac{R}{Ls + R} \quad (b) \varepsilon (1 - e^{-Rt/L})$$

(c) O gráfico é o seguinte:



6. (a)  $\frac{RLCs^2 + Ls + R}{RCs + 1}$  (b)  $\frac{(RCs + 1)\tilde{V}_e}{RLCs^2 + Ls + R}$   
 (c)  $\frac{R}{RLCs^2 + Ls + R}$  (d)  $LC\ddot{V} + \frac{L}{R}\dot{V} + V = V_e$

7. Equação:  $RC\dot{V} + V = V_e$

Função de transferência:  $\frac{1}{RCs + 1}$

Saída:  $V_0(1 - e^{-t/(RC)} - u(t - t_0)(1 - e^{-(t-t_0)/(RC)}))$

Chama-se passa-baixo, porque  $H$  é 1 para frequências baixas ( $s \rightarrow 0$ ) e nula para frequências altas ( $s \rightarrow \infty$ ).

8. Em unidades SI,  $V(t) = 5(1 - e^{-8252.4t})$

9. No indutor de 1.2 H,  $I(t) = 5 - 4e^{-3t} - e^{-8t}$  (SI). No indutor de 5 H,  $I(t) = 1 - \frac{8}{5}e^{-3t} + \frac{3}{5}e^{-8t}$  (SI)

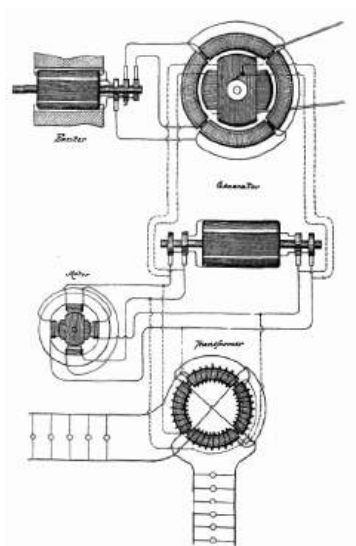
10. Função de transferência (com  $s$  em kHz e voltagens em volts):

$$H(s) = \frac{2.2}{29.7s^2 + 3s + 2.2}$$

Equação diferencial (voltagens em volts e tempo em milisegundos):

$$29.7\ddot{V} + 3\dot{V} + 2.2V = 2.2V_e$$

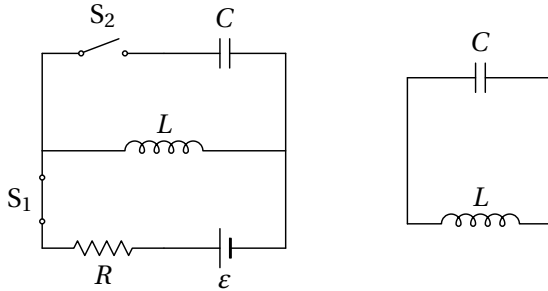
## 11. Circuitos de corrente alternada



No fim da década de 1880 viveu-se nos Estados Unidos da América um período conhecido como a *Guerra das Correntes*. Nessa época já existia uma rede elétrica pública, usada principalmente para alimentar lâmpadas incandescentes e motores elétricos. A exploração dessa rede elétrica revertia grandes benefícios a Thomas A. Edison que tinha obtido várias patentes pela invenção da lâmpada e de vários dispositivos para gerar corrente contínua. Outras pessoas tentaram entrar nesse novo negócio milionário com as suas inovações; George Westinghouse, que já tinha tido sucesso comercial com as suas próprias patentes, contratou Nicola Tesla, um cientista brilhante, imigrante da Croácia. Tesla obteve uma patente pelo dispositivo esquematizado acima, utilizado para produzir e distribuir corrente alternada. A guerra das correntes acabaria por ser ganha pelo sistema de corrente alternada de Tesla e Westinghouse; uma das principais vantagens sobre o sistema de corrente contínua de Edison é a facilidade de poder aumentar ou diminuir a tensão por meio de transformadores.

## 11.1. Circuito LC

No circuito do lado esquerdo da figura 11.1, o interruptor  $S_1$  está fechado (há muito tempo) e o interruptor  $S_2$  aberto. Num instante,  $t = 0$ , abre-se o interruptor  $S_1$  e, simultaneamente, fecha-se o interruptor  $S_2$ . Como tal, em  $t \geq 0$  o circuito equivalente é o representado no lado direito da figura 11.1, denominado circuito LC.



**Figura 11.1.:** Circuito LC, em  $t < 0$  (esquerda) e circuito equivalente em  $t \geq 0$  (direita), com  $S_1$  aberto e  $S_2$  fechado.

A impedância do condensador é  $1/(Cs)$  e a do indutor  $Ls$ . A transformada da voltagem no indutor,  $\tilde{V}$ , não é simplesmente  $Z\tilde{I}$ , porque no instante  $t = 0$  a corrente que o percorre não é nula. No domínio do tempo, a relação entre a voltagem e a corrente no indutor é,

$$V = L \frac{dI}{dt} \quad (11.1)$$

e a transformada de Laplace é então:

$$\tilde{V} = L(s\tilde{I} - I_0) \quad (11.2)$$

No condensador não há que acrescentar nenhum termo adicional, porque a sua carga inicial é nula; a transformada da voltagem no condensador é  $Z\tilde{I} = \tilde{I}/(Cs)$ . A lei das malhas conduz à equação:

$$L(s\tilde{I} - I_0) + \frac{\tilde{I}}{Cs} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2\tilde{I} - sI_0 = -\frac{\tilde{I}}{LC} \quad (11.3)$$

Esta equação algébrica é a transformada de Laplace da equação diferencial (observe-se que  $I'_0 = 0$ , porque o circuito está no estado estacionário no

instante em  $t = 0$ ):

$$I'' = -\frac{I}{LC} \quad (11.4)$$

que é a equação de um **oscilador harmónico simples**. O polinómio característico dessa equação linear tem duas raízes imaginários  $\pm i\sqrt{1/(LC)}$  e a solução da equação é

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) \quad (11.5)$$

em que  $\omega$  é a frequência angular do circuito,

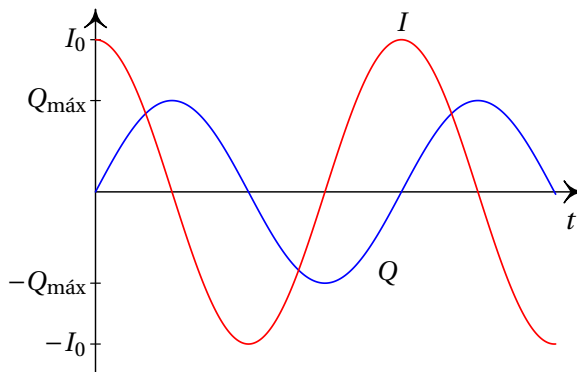
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (11.6)$$

A carga no condensador, em função do tempo, é

$$Q(t) = C \Delta V = -CL \frac{dI}{dt} = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (11.7)$$

e como tal, a corrente e a carga oscilam com frequência  $f = \omega/(2\pi)$ , desfasadas  $180^\circ$ , de forma que quando uma delas é nula, a outra tem o seu valor absoluto máximo (figura 11.2).

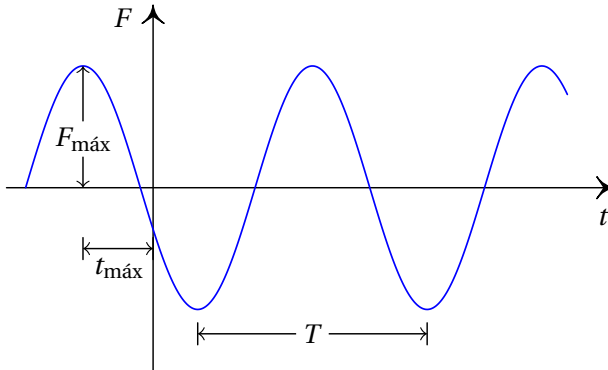
A corrente 11.5 chama-se **corrente alternada** e a carga 11.7 é uma carga alternada. No capítulo sobre indução eletromagnética estudou-se também um gerador que produz tensão alternada (equação 9.10). Em geral, uma função alternada é uma função periódica com valor médio igual a zero; a carga e a corrente no circuito LC, assim como a tensão do gerador de tensão alternada, são 3 exemplos particulares em que a função alternada é ou seno ou cosseno.



**Figura 11.2.:** Corrente e carga no circuito LC ( $Q_{\text{máx}} = I_0/\omega$ ).

## 11.2. Funções sinusoidais

Uma **função sinusoidal**  $F(t)$  é uma função alternada que oscila entre dois valores  $-F_{\text{máx}}$  e  $F_{\text{máx}}$  e tem a mesma forma da função seno ou cosseno, como mostra a figura 11.3. Basta saber os valores das 3 distâncias  $T$ ,  $F_{\text{máx}}$  e  $t_{\text{máx}}$  referidas na figura, para caracterizar cada uma dessas funções.



**Figura 11.3.:** Função sinusoidal com período  $T$  e valor máximo  $F_{\text{máx}}$ .

O intervalo  $T$  entre dois máximos ou dois mínimos consecutivos é o **período** da função e o seu inverso,  $f = 1/T$ , é a **frequência**.

Designando por  $t_{\text{máx}}$  o valor absoluto da coordenada  $t$  onde a função atinge o seu valor máximo  $F_{\text{máx}}$ , pela última vez antes de  $t = 0$ , define-se a **fase** da função como:

$$\varphi = 2\pi \left( \frac{t_{\text{máx}}}{T} \right) \quad (11.8)$$

Uma função sinusoidal também pode ser caracterizada pelo seu valor máximo  $F_{\text{máx}}$  (chamado amplitude), a sua fase  $\varphi$  e a sua frequência angular:  $\omega$ , definida por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (11.9)$$

As funções sinusoidais têm todas a forma geral:

$$F(t) = F_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.10)$$

Note-se que é possível representar a mesma função de várias formas. Pode-se substituir o cosseno por seno e subtrair  $\pi/2$  à fase, sem alterar o resultado.

Pode-se também inverter os sinais da frequência angular e da fase, simultaneamente, e ainda somar ou subtrair qualquer múltiplo de  $2\pi$  à fase. No entanto, para facilitar a caracterização dessas funções, usaremos apenas a função cosseno, frequências angulares positivas e fases no intervalo  $[0, 2\pi[$ . Essas 3 escolhas, embora arbitrárias, são habituais.

Duas funções sinusoidais que não tenham o mesmo valor máximo, fase e frequência angular, são necessariamente diferentes. E duas funções sinusoidais com a mesma frequência angular terão, necessariamente, a mesma frequência e o mesmo período.

### 11.3. Fasores

As funções sinusoidais com a forma 11.10 podem ainda ser escritas usando a fórmula de Euler e a função  $\text{Re}(z)$  que extrai a parte real de um número complexo  $z$ :

$$F_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}(F_{\text{máx}} e^{i(\omega t + \varphi)}) = \text{Re}(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t}) \quad (11.11)$$

Esta forma facilita a identificação de uma propriedade importante na soma de duas funções sinusoidais com diferentes valores máximos e fases, mas com a mesma frequência:

$$\begin{aligned} \text{Re}(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t}) + \text{Re}(G_{\text{máx}} e^{i\phi} e^{i\omega t}) &= \\ \text{Re}(F_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t} + G_{\text{máx}} e^{i\phi} e^{i\omega t}) &= \\ \text{Re}((F_{\text{máx}} e^{i\varphi} + G_{\text{máx}} e^{i\phi}) e^{i\omega t}) & \end{aligned} \quad (11.12)$$

Ou seja, a soma de duas funções sinusoidais com a mesma frequência é também uma função sinusoidal com a mesma frequência.

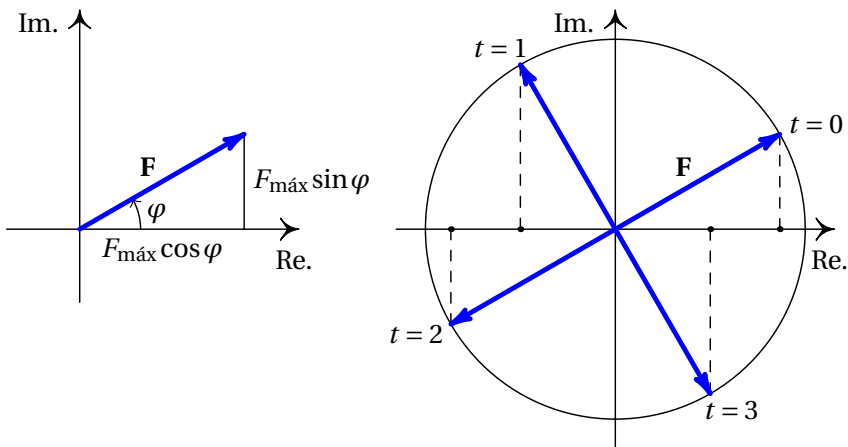
Quando se trabalha com várias funções sinusoidais, todas com a mesma frequência, podem-se admitir implicitamente a função  $\text{Re}()$  e a parte que depende do tempo,  $e^{i\omega t}$ , representando cada função pelos números complexos que multiplicam essa exponencial:

$$\mathbf{F} = F_{\text{máx}} e^{i\varphi}, \quad \mathbf{G} = G_{\text{máx}} e^{i\phi}, \quad \mathbf{H} = H_{\text{máx}} e^{i\psi} \dots \quad (11.13)$$

Essas expressões complexas que definem o valor máximo e a fase das funções sinusoidais são denominadas **fasores**. O uso de letras negritas

é porque estes objetos têm algumas das propriedades dos vetores e dos números complexos, mas não são realmente nem vetores nem números complexos.

Mais concretamente, a soma de duas funções sinusoidais com a mesma frequência é outra função sinusoidal da mesma frequência, e o respetivo fasor é obtido somando os números complexos ou os vetores que representam os fasores das funções somadas (ver exemplo abaixo). No entanto, como o produto entre duas funções sinusoidais com a mesma frequência é igual a uma função constante mais uma função sinusoidal com o dobro da frequência, o produto entre fasores não pode ser definido pelo simples produto entre números complexos nem pelo produto entre vetores (na secção 11.6 explica-se como obter o produto entre funções sinusoidais). Como tal, os fasores são outro tipo de objetos diferentes dos números complexos e dos vetores.



**Figura 11.4.:** Representação gráfica de um fasor  $\mathbf{F}$ .

Outra forma útil de representar os fasores consiste em escrever o valor máximo e a fase separados pelo símbolo de ângulo:  $\mathbf{F} = F_{\text{máx}} \angle \varphi$ . É também útil a representação vetorial no plano, em que em  $t = 0$  o fasor é um vetor desde a origem até o ponto  $(F_{\text{máx}} \cos(\varphi), F_{\text{máx}} \sin(\varphi))$ , como mostra a figura 11.4. Em  $t > 0$ , esse vetor roda um ângulo igual a  $\omega t$ , terminando no ponto  $(F_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi), F_{\text{máx}} \sin(\omega t + \varphi))$ . Ou seja, o vetor que representa o fasor no plano roda no sentido anti-horário, com velocidade angular constante  $\omega$ . O valor da função sinusoidal (parte real) é a projeção desse vetor no eixo horizontal. Enquanto o vetor roda no plano, o valor da função



oscila entre  $F_{\text{máx}}$  e  $-F_{\text{máx}}$ .

**Exemplo 11.1**

Num nó num circuito de corrente alternada entram duas correntes e saem outras duas correntes. Sabendo que as expressões das correntes que entram são  $\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$  e  $2\sqrt{2} \cos(\omega t + \pi/4)$ , e uma das correntes que sai é  $(3 - \sqrt{3}) \cos(\omega t)$ , calcule a outra corrente que sai, indicando o seu valor máximo e a sua fase.

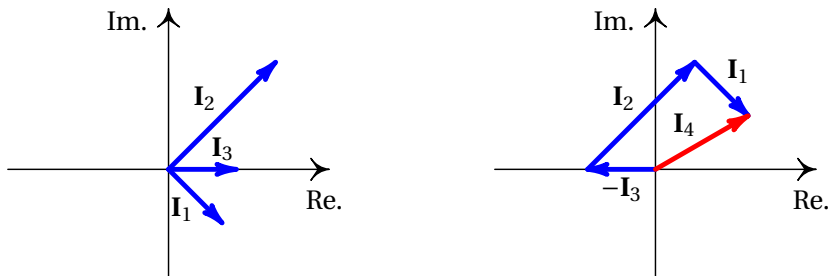
**Resolução.** Em termos matemáticos, o que está a ser pedido é o cálculo de

$$\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - (3 - \sqrt{3}) \cos(\omega t)$$

de forma a obter uma única função cosseno.

Começando por escrever os fasores das 3 correntes, no caso da primeira corrente é necessário subtrair  $\pi/2$  à fase, para substituir o seno por cosseno. O fasor da quarta corrente é a soma dos dois primeiros fasores, subtraído do terceiro:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_4 &= \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_3 \\ &= \left(\sqrt{2} \angle -\frac{\pi}{4}\right) + \left(2\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}\right) - (3 - \sqrt{3}) \angle 0 \end{aligned}$$



**Figura 11.5.:** Soma de fasores.

A seguir, calculam-se as partes real e imaginária de cada fasor, tarefa que é facilitada usando a representação gráfica (lado esquerdo na figura 11.5).

O fasor da quarta corrente é então:

$$\mathbf{I}_4 = (1 - i) + (2 + i2) - (3 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} + i$$

O valor máximo desse fasor é a hipotenusa do triângulo retângulo com catetos de  $\sqrt{3}$  e 1 unidades, nomeadamente  $I_{\text{máx}} = 2$ . A fase é o ângulo oposto ao cateto de comprimento 1 nesse triângulo retângulo,  $\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = \pi/6$ . O resultado obtido é:

$$I_4 = 2 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

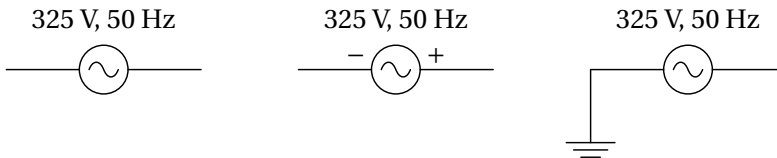
Embora os fasores não sejam verdadeiros vetores, somam-se exatamente como se fossem vetores, somando coordenadas, ou geometricamente, como no lado direito da figura 11.5.

## 11.4. Tensão alternada

Uma tensão alternada é um sinal sinusoidal dado por:

$$V = V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (11.14)$$

Nos diagramas de circuito, uma fonte ideal de tensão alternada representa-se pelo símbolo indicado na figura 11.6. Junto do símbolo indica-se a tensão máxima e pode também indicar-se a frequência ou a fase. Os valores apresentados na figura são os que estão em uso na rede elétrica pública da União Europeia: frequência  $f$  de 50 Hz e tensão máxima de 325 V.



**Figura 11.6.:** Três formas de representar uma fonte ideal de tensão alternada com tensão máxima de 325 V e frequência de 50 Hz.

Se no diagrama identificam-se os terminais com os sinais + e -, isso querará dizer que a expressão dada para a tensão na fonte representa a diferença de potencial entre o terminal identificado com o sinal + e o terminal com o sinal -. Observe-se que essa diferença de potencial muda de sinal periodicamente e em alguns intervalos o potencial no terminal - passa a ser maior do que no terminal +. Por vezes utiliza-se também uma ligação à terra e, nesse caso, não é necessário indicar sinais mas admite-se que a expressão

dada para a tensão da fonte é a diferença de potencial do terminal que não está ligado à terra menos o potencial na terra, que costuma ser arbitrado igual a zero.

## 11.5. Impedância complexa

Se todas as fontes de tensão num circuito forem fontes de tensão alternada com a mesma frequência, em qualquer parte do circuito a tensão é também alternada, com a mesma frequência, já que a regra das malhas garante que a tensão é igual à soma das outras tensões na mesma malha, com sinal oposto e conclui-se que se a tensão em algum segmento da malha é sinusoidal, a tensão em qualquer outro segmento também será sinusoidal e com a mesma frequência.

No capítulo anterior deduziu-se a lei de Ohm generalizada para as transformadas de Laplace da tensão e da corrente (equação 10.28):

$$\tilde{V}(s) = Z(s) \tilde{I}(s) \quad (11.15)$$

Como  $V$  é uma função sinusoidal, a sua transformada de Laplace é (ver o apêndice C):

$$\tilde{V}(s) = \frac{\mathbf{V}}{s - i\omega} \quad (11.16)$$

com tal,

$$\tilde{I}(s) = \frac{\mathbf{V}}{(s - i\omega) Z(s)} \quad (11.17)$$

Admitindo que  $Z(i\omega)$  não é igual a zero, a expansão em frações parciais da expressão no segundo membro deve incluir um termo com denominador  $(s - i\omega)$

$$\tilde{I}(s) = \frac{\mathbf{I}}{s - i\omega} + \tilde{I}_{\text{trans}}(s) \quad (11.18)$$

em que o termo  $\tilde{I}_{\text{trans}}$  é a corrente transitória, que não tem nenhum fator  $(s - i\omega)$  no denominador.

Substituindo essa expressão e a transformada da tensão na lei de Ohm generalizada, obtém-se:

$$\frac{\mathbf{V}}{s - i\omega} = Z(s) \left( \frac{\mathbf{I}}{s - i\omega} + \tilde{I}_{\text{trans}} \right) \quad (11.19)$$

Multiplicando ambos os membros da equação por  $(s - i\omega)$  e substituindo  $s$  por  $i\omega$  obtém-se:

$$\boxed{\mathbf{V} = Z(i\omega)\mathbf{I}} \quad (11.20)$$

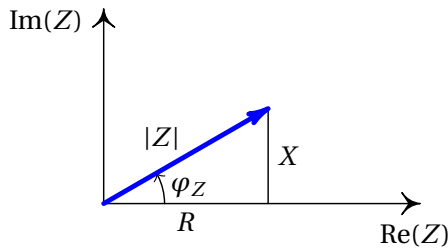
Ou seja, os fasores da tensão e da corrente também verificam a lei de Ohm generalizada, com a frequência real  $s$  substituída por uma frequência imaginária  $i\omega$ , o que conduz a uma **impedância complexa**  $Z(i\omega)$ . Alguns autores preferem chamar  $Z(i\omega)$  simplesmente impedância; também pode-se usar a notação  $Z(\omega)$ , em vez de  $Z(i\omega)$ , mas  $Z(i\omega)$  mostra em forma explícita a sua relação com a impedância generalizada  $Z(s)$ .

A impedância complexa  $Z(i\omega)$  é uma função complexa que pode ser dividida nas suas partes real e imaginária:

$$\boxed{Z(i\omega) = R(\omega) + iX(\omega)} \quad (11.21)$$

sendo a função real  $R(\omega)$  designada de **resistência** e a função real  $X(\omega)$  designada de **reatância**. A resistência é sempre positiva, independentemente da frequência angular  $\omega$ , enquanto que a reatância pode ser positiva para algumas frequências (**reatância indutiva**) e negativa para outras frequências (**reatância capacitiva**).

Para um determinado valor de  $\omega$ , o módulo  $|Z|$  e fase  $\varphi_Z$  da impedância complexa  $Z(i\omega)$  podem ser calculados usando a representação gráfica de  $R + iX$  no plano complexo, obtendo-se o **triângulo de impedância** apresentado na figura 11.7. Como  $R$  não pode ter valores negativos, o ângulo  $\varphi_Z$  situa-se sempre entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  radianos.



**Figura 11.7.:** Triângulo de impedância, com a resistência  $R$  e a reatância  $X$  nos catetos.

Note-se que a impedância complexa  $Z(i\omega)$  não é um fasor mas sim um número complexo ordinário, que pode ser multiplicada e somada a outras impedâncias usando as regras do produto e a adição de números

complexos. Também se pode multiplicar ou dividir um fasor por várias impedâncias e o resultado é outro fasor com a mesma frequência.

Se os fasores da tensão e da corrente forem  $V_{\text{máx}} \angle \varphi_V$  e  $I_{\text{máx}} \angle \varphi_I$ , a lei de Ohm para fasores (equação 11.20) resulta em:

$$V_{\text{máx}} \angle \varphi_V = (|Z| I_{\text{máx}}) \angle (\varphi_Z + \varphi_I) \quad (11.22)$$

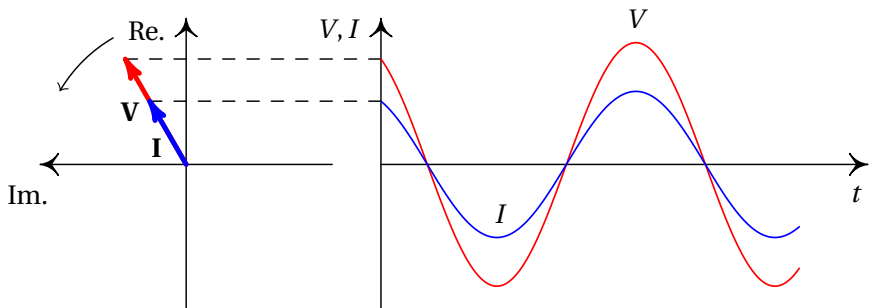
podendo-se portanto separar a equação complexa 11.20 em duas equações reais:

$$V_{\text{máx}} = |Z| I_{\text{máx}} \quad \varphi_V = \varphi_Z + \varphi_I \quad (11.23)$$

### 11.5.1. Resistências

Numa resistência, a impedância generalizada é independente da frequência e igual a  $R$ ; como tal, o módulo da impedância complexa é  $|Z| = R$  e a sua fase é nula  $\varphi_Z = 0$ . As equações 11.23 indicam que as fases de  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{I}$  são iguais e os seus valores máximos verificam a relação,

$$V_{\text{máx}} = R I_{\text{máx}} \quad (11.24)$$



**Figura 11.8.:** Fasores da tensão e da corrente numa resistência.

Os vetores no lado esquerdo da figura 11.8 são os fasores no instante  $t = 0$ , mas como os dois vetores rodam com a mesma velocidade angular, estarão sempre na mesma direção e sentido em qualquer instante. Imaginando esses dois vetores a rodar no sentido anti-horário, com a mesma velocidade angular, as suas projeções no eixo real (tensão e corrente em função do tempo) são as funções apresentadas no lado direito da figura. Diz-se que a tensão e a corrente estão **em fase**: os dois vetores têm sempre a mesma direção e sentido, de forma que ambas as funções atingem os respectivos valores máximo e mínimo em simultâneo.

### 11.5.2. Condensadores

Nos condensadores, a impedância generalizada é  $1/(C s)$  e a impedância complexa é então:

$$Z(i\omega) = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -\frac{\pi}{2} \quad (11.25)$$

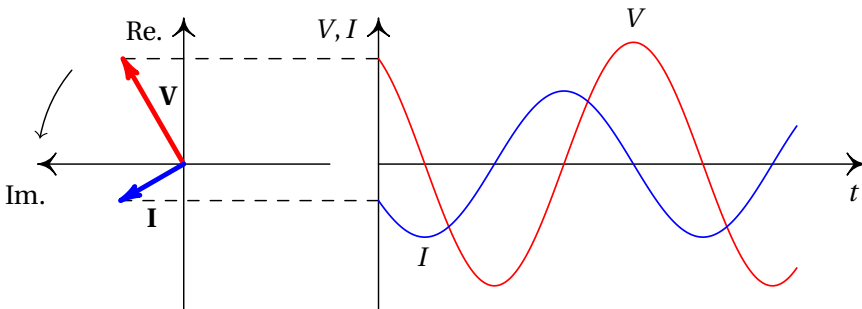
Em particular, a reatância de um condensador é negativa e inversamente proporcional à frequência angular,

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (11.26)$$

sendo a sua resistência nula.

Aplicando as equações 11.23 obtém-se

$$\mathbf{I} = V_{\text{máx}} \omega C \angle (\varphi_V + \pi/2)$$



**Figura 11.9.:** Fasores da tensão e da corrente num condensador.

Ou seja, a fase da corrente é  $\pi/2$  maior que a da tensão. Na representação vetorial dos fasores, no lado esquerdo da figura 11.9, a corrente é perpendicular à tensão e está adiantada em relação ao sentido de rotação anti-horário. Os vetores estão nas posições em que estão os fasores em  $t = 0$ ; enquanto esses vetores rodam no sentido anti-horário, com velocidade angular constante, a projeção no eixo das abcissas produz as funções representadas no lado direito da figura. Como os dois vetores rodam com a mesma velocidade angular, são perpendiculares em qualquer instante. O desfasamento de  $\pi/2$  entre a corrente e a tensão também observa-se nos gráficos do lado direito, pelo facto de  $I(t)$  ter valor máximo ou mínimo cada vez que  $V(t)$  é nula. E o facto de ser a corrente a que está adiantada

em relação à tensão descobre-se observando dois máximos (ou mínimos), das duas funções  $I(t)$  e  $V(t)$ , que estejam próximos entre si. O máximo de  $I(t)$  ocorre sempre antes do que o máximo de  $V(t)$ .

### 11.5.3. Indutores

Nos indutores a impedância generalizada é  $Ls$ , sendo a impedância complexa:

$$Z(i\omega) = i\omega L = \omega L \angle \pi/2 \quad (11.27)$$

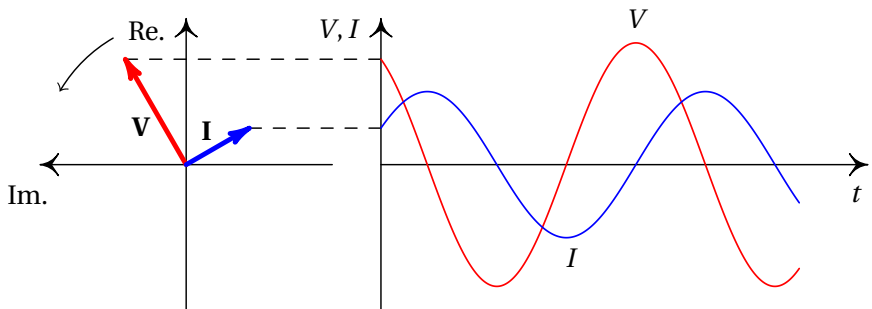
A reatância de um indutor é positiva e diretamente proporcional à frequência angular:

$$\boxed{X_L = \omega L} \quad (11.28)$$

sendo a sua resistência nula.

Pelas equações 11.23 conclui-se que a fase da corrente é  $\pi/2$  menor que a da tensão. Na representação gráfica dos fasores (lado esquerdo da figura 11.10) o fasor da corrente é perpendicular ao da tensão e está atrasado, em relação ao sentido da rotação. Como os dois vetores rodam com a mesma velocidade angular, em qualquer outro instante também são perpendiculares.

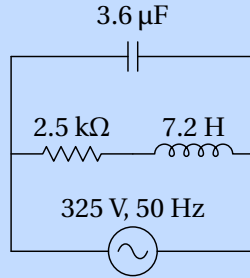
As projeções no eixo real quando os vetores rodam no sentido anti-horário conduzem às duas funções representadas no lado direito da figura. O atraso em  $\pi/2$  do fasor da corrente é visível no gráfico das funções, porque olhando para os valores máximos dessas duas funções, que estão mais próximos entre si, primeiro ocorre o máximo de  $V(t)$  e a seguir o de  $I(t)$ .



**Figura 11.10.:** Fasores da tensão e da corrente num indutor.

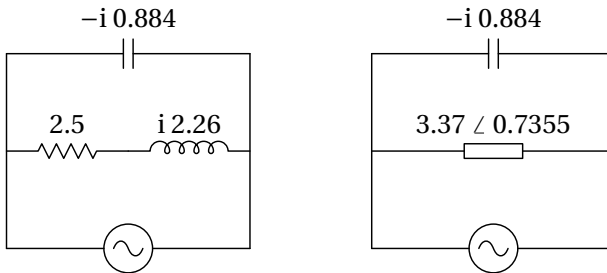
**Exemplo 11.2**

Cacule a tensão e corrente instantâneas em todos os elementos do circuito representado no diagrama.



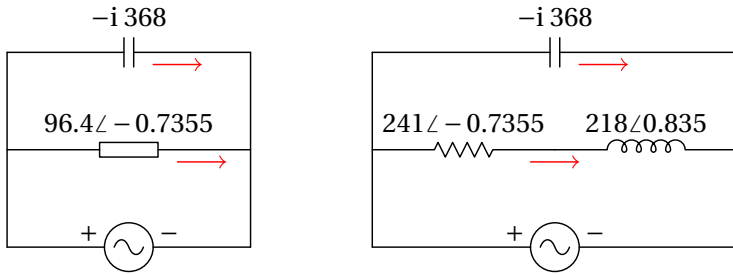
**Resolução.** Este circuito é o mesmo que já foi analisado no exemplo 10.3 do capítulo anterior. Usando o mesmo sistema de unidades tem-se: impedância em  $k\Omega$ , capacidade em  $\mu F$ , indutância em H, tempo em ms, frequência em kHz, tensão em V e corrente em mA. A frequência angular da fonte é:  $\omega = 2 \times \pi \times 50 \text{ Hz}$ , mas como deve ser convertida para kHz, tem o valor  $\pi/10$ .

A impedância da resistência é 2.5, a do condensador  $10/(3.6\pi) \angle -\pi/2 = 0.884 \angle -\pi/2$  e a do indutor é  $7.2\pi/10 \angle \pi/2 = 2.26 \angle \pi/2$ . Como a resistência está em série com o indutor, podem ser substituídos por um único elemento com impedância igual à soma das impedâncias:



Como os dois elementos no circuito simplificado estão em paralelo, o fasor da tensão é o mesmo para os dois e igual ao fasor da fonte:  $325 \angle 0$ . Dividindo esse fasor pelas impedâncias dos dois elementos calculam-se as correntes correspondentes. Em seguida, multiplicando o fasor da segunda corrente pelas impedâncias da resistência e do indutor, calculam-se os fasores das tensões:





A partir dos fasores podem-se exprimir as tensões e correntes instantâneas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{C:} & V = 325 \cos(0.1 \pi t) & I = 368 \cos(0.1 \pi t + \pi/2) \\
 \text{R:} & V = 241 \cos(0.1 \pi t - 0.735) & I = 96.4 \cos(0.1 \pi t - 0.735) \\
 \text{L:} & V = 218 \cos(0.1 \pi t + 0.835) & I = 96.4 \cos(0.1 \pi t - 0.735)
 \end{array}$$

Interessa mostrar a resolução deste exemplo usando o Maxima. As impedâncias do condensador, resistência e indutor representam-se por  $z_1$ ,  $z_2$  e  $z_3$ , respetivamente e  $z_4$  representa a impedância da associação em série da resistência com o indutor em série. Para obter maior precisão numérica, escrevem-se os valores dados no enunciado na forma de números racionais:

```
(%i1) s: %i*pi/10$
(%i2) z1: 10/36/s$
(%i3) z2: 5/2$
(%i4) z3: 72*s/10$
(%i5) z4: z2 + z3$
```

Os fasores da tensão e a corrente no condensador são:

```
(%i6) V1: 325$
(%i7) I1: V1/z1$
```

A corrente máxima e a fase são o módulo e a fase do número complexo  $I1$ , que no Maxima são obtidos com as funções `cabs` e `carg` (`cabs` quer dizer *complex absolute value* e `carg` *complex argument*. O módulo e a fase de um número complexo também costumam chamarem-se valor absoluto e argumento.)

```
(%i8) float(cabs(I1));
(%o8)      367.6
(%i9) carg(I1);
(%o9)       $\frac{\pi}{2}$ 
```

Os fasores da corrente e as tensões na resistência e no indutor são:

```
(%i10) I4: V1/z4$
(%i11) float(cabs(I4));
(%o11)      96.4
(%i12) float(carg(I4));
(%o12)      -0.7354
(%i13) V2: I4*z2$
(%i14) float(cabs(V2));
(%o14)      241.0
(%i15) float(carg(V2));
(%o15)      -0.7354
(%i16) V3: I4*z3$
(%i17) float(cabs(V3));
(%o17)      218.0
(%i18) float(carg(V3));
(%o18)      0.8353
```

## 11.6. Potência nos circuitos de corrente alternada

Em qualquer ponto de um circuito de corrente alternada, a corrente é uma função sinusoidal; em cada período de oscilação, a mudança de sinal da função sinusoidal indica que o sentido da corrente muda. O integral da

função, em cada período é nulo, o quer dizer que a carga total transferida é nula; durante metade do período há transporte de carga num sentido e no meio período seguinte a mesma carga é transportada no sentido oposto.

Não há transferência efetiva de carga nos circuitos de corrente alternada. As cargas de condução simplesmente oscilam à volta de uma posição de equilíbrio. Apesar de não haver transferência efetiva de cargas, há dissipação efetiva de energia elétrica, pois a oscilação das cargas é contrariada pela resistência dos condutores e há efeito Joule, independentemente do sentido da corrente.

Em qualquer dispositivo passivo num circuito com fonte de tensão alternada, a tensão e a corrente são funções sinusoidais com a mesma frequência da fonte, após uma possível resposta transitória inicial:

$$V(t) = V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_V) \quad I(t) = I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (11.29)$$

A **potência instantânea**,  $P(t)$ , é a potência no dispositivo em qualquer instante  $t$

$$P(t) = V(t) I(t) = V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi_V) \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (11.30)$$

Usando uma relação trigonométrica para o produto de dois cossenos e o facto de ser  $(\varphi_V - \varphi_I) = \varphi_Z$  (equação 11.23), conclui-se que a expressão anterior é equivalente a:

$$P(t) = \frac{1}{2} V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} [\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_Z)] \quad (11.31)$$

Note-se que o primeiro cosseno dentro dos parêntesis retos em 11.31 é uma função sinusoidal, com frequência igual ao dobro da frequência da fonte, enquanto o segundo cosseno é uma função constante. Ou seja, o produto das duas funções sinusoidais ( $V$  e  $I$ ) com a mesma frequência não conduz outra função sinusoidal com a mesma frequência, mas a uma função sinusoidal com o dobro da frequência, deslocada no eixo das ordenadas.

A potência instantânea 11.31 pode ser positiva ou negativa em alguns intervalos e nula em alguns instantes, dependendo do valor da constante  $\cos(\varphi_Z)$ , chamada **fator de potência**. Como  $\varphi_Z$  está entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ , o fator de potência situa-se entre 0 e 1.

Se a reatância for nula (dispositivo resistivo) e a fase da impedância ( $\varphi_Z$ ) é nulo, o fator de potência é igual a 1 e a potência instantânea é sempre

positiva, indicando que o dispositivo está sempre a dissipar energia. Já se a resistência for nula (dispositivo reativo), a fase da impedância é  $\pm\pi/2$ , o fator de potência é nulo e os intervalos em que a potência instantânea é positiva (dissipação de energia) são do mesmo comprimento que os intervalos em que é negativa (fornecimento de energia); a potência média é nula.

No caso geral, em que o fator de potência é maior que 0 e menor que 1, os intervalos em que há dissipação de energia são mais compridos do que os intervalos em que há fornecimento de energia e, em média, o circuito dissipa energia.

O valor médio da potência,  $\bar{P}$ , calcula-se integrando a função 11.31 durante um período e dividindo pelo valor do período. O integral do primeiro termo é nulo, durante um período, enquanto que o valor médio do termo constante é igual a si próprio. Consequentemente, a **potência média** é:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos \varphi_Z \quad (11.32)$$

e tem valor positivo ou nulo, indicando que, em média o dispositivo passivo não pode fornecer energia. É também habitual definir a **tensão eficaz** e a **corrente eficaz**:

$$V_{\text{ef}} = \frac{V_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \quad I_{\text{ef}} = \frac{I_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \quad (11.33)$$

e como tal, a potência média é igual ao produto da tensão e corrente eficazes e o fator de potência:

$$\bar{P} = V_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi_z$$

A tensão máxima de 325 V usada na União Europeia corresponde a uma tensão eficaz de 230 V. No continente americano usa-se tensão máxima de 170 V, a 60 Hz, que corresponde a uma tensão eficaz de 120 V.

## 11.7. Filtros de frequência

A equação 10.36, obtida no capítulo anterior, é válida para qualquer sinal de entrada. Para um sinal de entrada  $V_e$  sinusoidal, usando a expressão para a transformada de Laplace das funções sinusoidais (apêndice C) obtém-se,

$$\tilde{V}(s) = \frac{\mathbf{V}_e H(s)}{s - i\omega} \quad (11.34)$$

Se  $H(i\omega)$  tiver um valor finito, a expansão de  $\tilde{V}$  em frações parciais conduz a

$$\tilde{V}(s) = \frac{\mathbf{V}}{s - i\omega} + \tilde{V}_{\text{trans}}(s) \quad (11.35)$$

onde  $\mathbf{V}$  é um número complexo, que corresponde ao fasor da saída (após a resposta transitória), e o termo  $\tilde{V}_{\text{trans}}$  é a transformada da tensão de resposta transitória, que não tem o fator  $(s - i\omega)$  no denominador.

Substituindo essa expansão na equação 11.34, obtém-se:

$$\frac{\mathbf{V}}{s - i\omega} + \tilde{V}_{\text{trans}}(s) = \frac{\mathbf{V}_e H(s)}{s - i\omega} \quad (11.36)$$

Multiplicando ambos os membros da equação por  $(s - i\omega)$  e substituindo  $s$  por  $i\omega$  obtém-se:

$$\boxed{\mathbf{V} = H(i\omega) \mathbf{V}_e} \quad (11.37)$$

onde a função  $H(i\omega)$  é uma função complexa, de variável real  $\omega$ , chamada função de **resposta em frequência**. Como tal, se a tensão de entrada for a tensão alternada  $V_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)$ , a tensão de saída será

$$V = V_{\text{máx}} |H(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \varphi_H) \quad (11.38)$$

onde  $|H(i\omega)|$  e  $\varphi_H$  são o módulo e a fase da função complexa  $H(i\omega)$ .

Por exemplo, no caso do filtro passa-alto, mostrou-se no capítulo anterior que a função de transferência é (equação 10.38):

$$H(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} \quad (11.39)$$

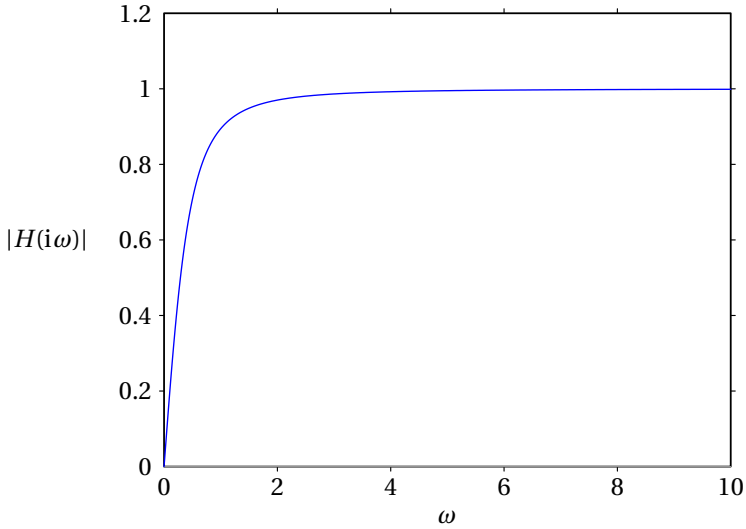
A função de resposta em frequência é então:

$$H(i\omega) = \frac{iRC\omega}{1 + iRC\omega} \quad (11.40)$$

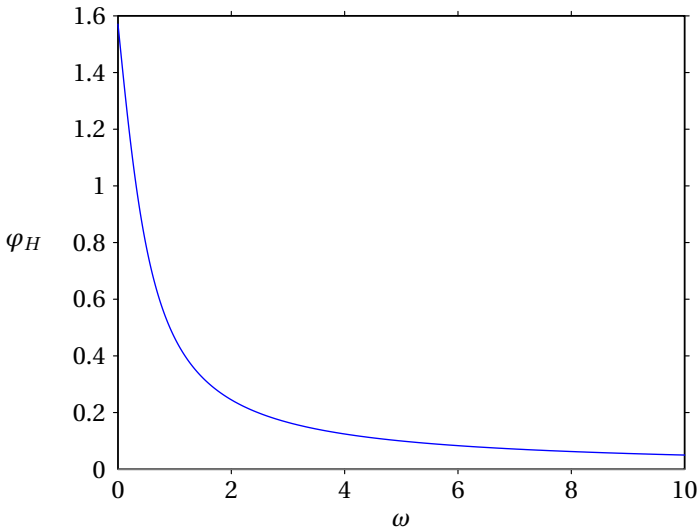
e o seu módulo e fase são:

$$|H(i\omega)| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \quad \varphi_H = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega) \quad (11.41)$$

A figura 11.11 mostra o módulo da função de resposta em frequência num filtro passa-alto com frequência angular de corte,  $1/(RC)$ , igual a 0.5 e a figura 11.12 mostra a fase dessa função. Note-se que quando a frequência



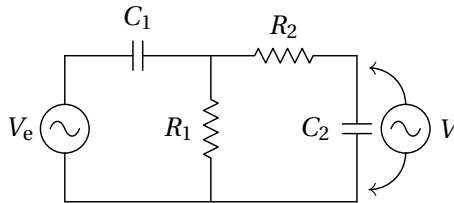
**Figura 11.11.:** Módulo da função de resposta em frequência num filtro passa-alto com frequência angular de corte  $\omega_c = 0.5$  unidades.



**Figura 11.12.:** Fase da função de resposta em frequência num filtro passa-alto com frequência angular de corte  $\omega_c = 0.5$  unidades.

angular for igual à frequência de corte  $\omega_c = 1/(RC)$ ,  $H(i\omega)$  terá módulo  $1/\sqrt{2} = 0.707$  e fase igual a  $\pi/4$ .

Vários filtros podem ser combinados de forma sequencial, e a função de resposta é o produto das funções de todos os filtros na sequência. Por exemplo, o filtro **passa-banda** da figura 11.13 é a combinação de um filtro passa-alto, com frequência angular de corte  $\omega_1 = 1/(R_1 C_1)$  e um filtro passa-baixo, com frequência angular de corte  $\omega_2 = 1/(R_2 C_2)$ .



**Figura 11.13.:** Filtro passa-banda.,

A função de resposta em frequência desse filtro é a seguinte (problema 11):

$$H(i\omega) = \frac{i\omega_2\omega}{\omega_1\omega_2 + \omega^2 + i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_1/g)\omega} \quad (11.42)$$

onde  $g = R_2/R_1$ , chamada **ganho**, é uma constante sem unidades. O módulo dessa função,  $|H(i\omega)|$ , é nulo em  $\omega = 0$  e  $\omega \rightarrow \infty$ , e tem um valor máximo  $\omega_2/(\omega_1 + \omega_2 + \omega_1/g)$ , quando a frequência angular  $\omega$  for igual à média geométrica das duas frequências de corte:  $\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$ .

Um filtro ideal deveria ter uma função de resposta nula, para as frequências que se pretende eliminar, e 1 nas outras frequências. Com circuitos mais complicados conseguem-se obter filtros com comportamento mais próximo do ideal. Outro fator a ter em conta é a resposta transitória, que tem sido ignorada por ser nula após algum tempo, mas num filtro de boa qualidade é necessário garantir que a resposta transitória desaparece o mais rapidamente possível.

## 11.8. Ressonância

Quando um circuito com condensadores e indutores é ligado a diferentes fontes com a mesma tensão máxima  $V_{\text{máx}}$ , mas com diferentes frequências,

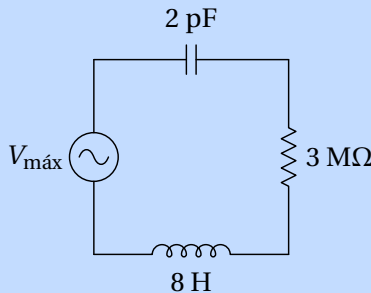
a potência absorvida pelo circuito varia em função da frequência. Normalmente, existe uma **frequência de ressonância** tal que a potência dissipada pelo circuito é máxima. Se a frequência da fonte é igual à frequência de ressonância do circuito, diz-se que o circuito está em **ressonância** com a fonte.

No caso particular do circuito RLC, com uma resistência, um indutor e um condensador em série, a reatância equivalente  $X$  é função contínua da frequência  $f$ . Quando  $f$  se aproxima de infinito ou de zero, o valor absoluto da reatância aproxima-se de infinito. Como tal, a corrente nos 3 dispositivos é nula. A frequência de ressonância é a frequência que faz com que a reatância seja nula e o módulo da impedância seja mínimo. Isso implica que o ângulo da impedância ( $\varphi$ ) será nulo e o fator de potência ( $\cos \varphi$ ) igual a 1. A corrente máxima e a potência média em função de  $f$  são ambas máximas e a tensão e a corrente estão em fase.

A frequência (ou frequências) de ressonância é um valor característico de cada circuito. Nos circuitos em que os indutores e condensadores não estão em série, a frequência de ressonância pode surgir quando a reatância não é nula, com fator de potência diferente de 1, ou seja corrente desfasada da voltagem.

### Exemplo 11.3

Calcule a frequência de ressonância do circuito e a potência média máxima que pode fornecer a este circuito uma fonte com tensão máxima  $V_{\text{máx}}$ .



**Resolução.** Com a resistência em  $M\Omega$  e a capacidade em  $pF$ , convém usar  $\mu s$  para a unidade de tempo e, portanto,  $MHz$  para a frequência e  $H$  para a indutância.



A impedância total do circuito é a soma das 3 impedâncias:

$$Z = 3 + i8\omega - \frac{i}{2\omega} = 3 + i\left(8\omega - \frac{1}{2\omega}\right)$$

Observe-se que a parte real da impedância equivalente não depende da frequência, porque o condensador e o indutor estão em série e, como tal, o valor mínimo do módulo da impedância obtém-se quando a parte imaginária seja igual a zero:

$$8\omega - \frac{1}{2\omega} = 0 \implies \omega = \frac{1}{4} \implies f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.0398$$

No sistema de unidades usado, a frequência de ressonância é 0.0398 MHz, igual a 39.8 kHz.

Se a fonte tivesse essa frequência, a impedância equivalente seria real,  $Z = 3 \text{ M}\Omega$ , e a corrente máxima teria o valor  $I_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}/3$  ( $\mu\text{A}$ , se  $V_{\text{máx}}$  estiver em volts). A potência média máxima é  $\bar{P} = V_{\text{máx}} I_{\text{máx}}/2 = V_{\text{máx}}^2/6$  ( $\mu\text{W}$ , se  $V_{\text{máx}}$  estiver em volts).

No circuito do exemplo anterior, a tensão de entrada carrega e descarrega o condensador. Inicialmente, a carga no condensador oscila com a frequência de oscilação da tensão na fonte; mas quando a carga no condensador é elevada, a diferença de potencial do condensador pode contrariar a tensão da fonte, impedindo a entrada de mais carga.

A situação é semelhante a uma massa pendurada de uma mola elástica, na qual atua outra força externa que tenta manter a massa oscilando para cima e para baixo. Se a força externa não oscila com a uma frequência igual à frequência própria de oscilação da mola elástica, há momentos em que a força externa está a tentar fazer subir a massa, enquanto a mola elástica faz força no sentido oposto.

No caso do circuito, se a fonte não existisse mas o condensador tivesse uma carga inicial, começaria a descarregar, produzindo corrente. No momento em que o condensador descarrega completamente, o indutor faz com que a corrente persista por alguns instantes, recarregando o condensador com cargas de sinais opostos à carga inicial. O ciclo repete-se, com uma frequência própria do circuito. No entanto, a resistência faz com que a carga do condensador seja menor em cada ciclo, até desaparecer (equilíbrio está-

vel). Existe ressonância quando a fonte oscila com a frequência própria do circuito.

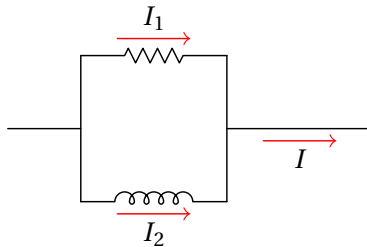
Se a resistência fosse nula, quando a frequência da fonte fosse a frequência de ressonância,  $Z$  seria nula e aparentemente  $I_{\text{máx}} = V_{\text{máx}}/Z$  seria infinita. No entanto, a corrente não aumenta instantaneamente até esse valor, mas sim gradualmente, com as oscilações da carga no condensador. Quando essa carga máxima se torna muito elevada, há rutura do dielétrico no condensador ou a corrente elevada queima o indutor.

## Perguntas

1. As expressões das correntes no segmento de circuito representado no diagrama são

$$I_1(t) = \cos(\omega t + 2\pi/3) \quad I_2(t) = \sqrt{3} \cos(\omega t + \pi/6)$$

Encontre a expressão para  $I(t)$ .

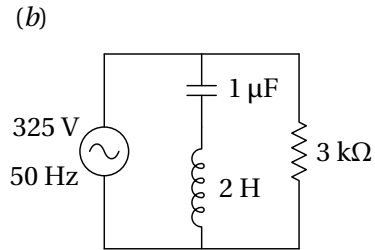
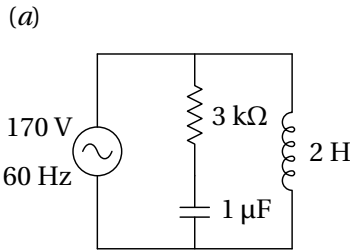


- A.  $3 \cos(\omega t - \pi/2)$                       D.  $\sqrt{3} \cos(\omega t + \pi/2)$   
 B.  $2 \cos(\omega t - \pi/3)$                       E.  $2 \cos(\omega t + \pi/3)$   
 C.  $3 \cos(\omega t + \pi/2)$

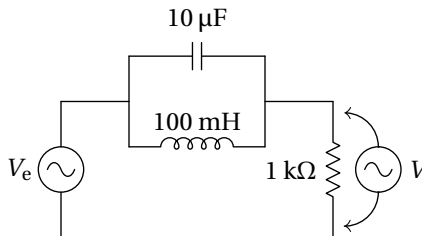
2. Um condensador de  $2.73 \mu\text{F}$  e uma resistência de  $1166 \Omega$  estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada com frequência de 50 Hz e tensão máxima de 325 V. Calcule a corrente eficaz na resistência.
- A. 247 mA  
B. 139 mA  
C. 99 mA  
D. 212 mA  
E. 170 mA
3. Um condensador de  $2.73 \mu\text{F}$  e uma resistência de  $1166 \Omega$  estão ligados em série a uma fonte de tensão alternada de 50 Hz. Pode-se concluir então que a tensão da fonte está:
- A. Adiantada  $90^\circ$  em relação à corrente.  
B. Adiantada  $45^\circ$  em relação à corrente.  
C. Atrasada  $90^\circ$  em relação à corrente.  
D. Atrasada  $45^\circ$  em relação à corrente.  
E. Em fase com a corrente.
4. Qual das afirmações seguintes é verdadeira, em relação a uma bobina de 2 mH e um condensador de 5 pF?
- A. O valor absoluto da reatância da bobina é menor.  
B. O valor absoluto da reatância do condensador é menor.  
C. Se a corrente for contínua, o valor absoluto da reatância da bobina é menor.  
D. Se a corrente for contínua, o valor absoluto da reatância do condensador é menor.  
E. Se a corrente for contínua, a reatância dos dois dispositivos é nula.
5. Num circuito RLC de corrente alternada, em série, quando a reatância equivalente for nula, qual das seguintes afirmações é verdadeira:
- A. A impedância é nula.  
B. O fator de potência é nulo.  
C. O ângulo de defasamento é nulo.  
D. A corrente é nula.  
E. A tensão é nula.

## Problemas

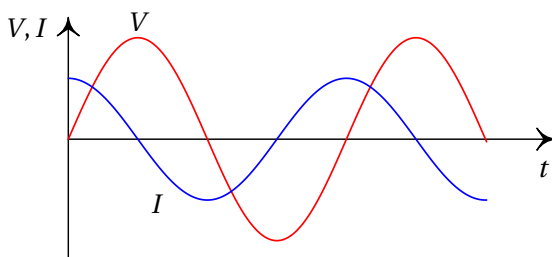
1. Sabendo que o fasor representado na figura 11.4 é  $\mathbf{F} = 5.2 \angle 30^\circ$ , determine a expressão para a função sinusoidal,  $F(t)$ , representada por esse fasor.
2. A resistência de uma bobina é  $150 \Omega$  e a sua indutância é  $1.4 \text{ H}$ . A bobina é ligada à rede elétrica com tensão máxima  $325 \text{ V}$  e frequência de  $50 \text{ Hz}$ . Encontre a expressão para a corrente na bobina em função do tempo  $t$ .
3. Uma bobina, com indutância de  $36 \text{ mH}$  e resistência de  $40 \Omega$ , liga-se em paralelo com um condensador de  $32 \text{ nF}$  e com uma fonte de tensão alternada  $V(t) = 345 \cos(150\pi t)$  (em volts, e o tempo  $t$  em segundos). Calcule: (a) A corrente máxima na bobina. (b) A corrente eficaz no condensador. (c) As potências médias dissipadas na bobina e no condensador.
4. Demonstre que a transformada inversa da equação 11.3 conduz à corrente alternada indicada na equação 11.5.
5. No 9 do capítulo 9, determine a frequência do circuito e os valores máximos da corrente e da carga.
6. Nos dois circuitos representados na figura, calcule a corrente e a tensão em todos os elementos do circuito.



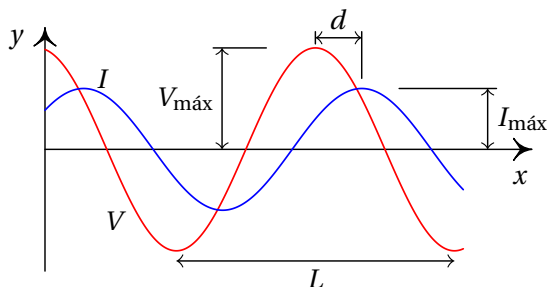
7. A figura mostra um filtro **rejeita-banda** que atenua as frequências angulares próximas de  $1 \text{ kHz}$ . (a) Determine a função de resposta em frequência,  $H(i\omega)$ , do circuito. (b) Mostre que para  $\omega = 1 \text{ kHz}$ ,  $H(i\omega)$  é igual a zero. (c) Calcule o módulo de  $H(i\omega)$  e trace o seu gráfico para  $\omega$  entre  $0$  e  $2 \text{ kHz}$ .



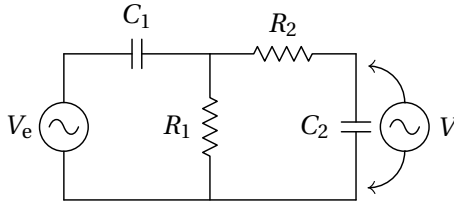
8. Num segmento de um circuito de corrente alternada a tensão em função do tempo é dada pela expressão  $24 \cos(\pi t/10 + 1.5)$  (em volt, com  $t$  em milissegundos) e a corrente é  $8 \cos(\pi t/10 + 2.0)$  ( $\mu\text{A}$ , com  $t$  em ms). (a) Calcule a resistência e reatância desse segmento. (b) O segmento do circuito avariou e pretende-se substituí-lo com resistências, condensadores ou indutores, mas o orçamento só permite comprar dois dispositivos. Quais dispositivos deviam ser comprados, com que valores, e como deviam ser ligados no circuito?
9. A figura mostra a tensão e a corrente num condensador. A corrente é produzida pela tensão: se não houver tensão elétrica, não há corrente. Como se explica então que no instante  $t = 0$  a corrente seja diferente de zero, sendo a tensão nula?



10. A figura mostra o ecrã de um osciloscópio onde aparecem a tensão e a corrente num elemento de um circuito. As distâncias  $L$  e  $d$  foram medidas diretamente no ecrã, obtendo-se os valores  $L = 6 \text{ cm}$ ,  $d = 1 \text{ cm}$ . O osciloscópio também permite determinar que a tensão máxima é  $V_{\text{máx}} = 36 \text{ V}$  e a corrente máxima é  $I_{\text{máx}} = 12 \text{ mA}$ . Com esses dados, calcule a parte real e a parte imaginária da impedância do elemento do circuito.



11. Considere o filtro passa-banda:



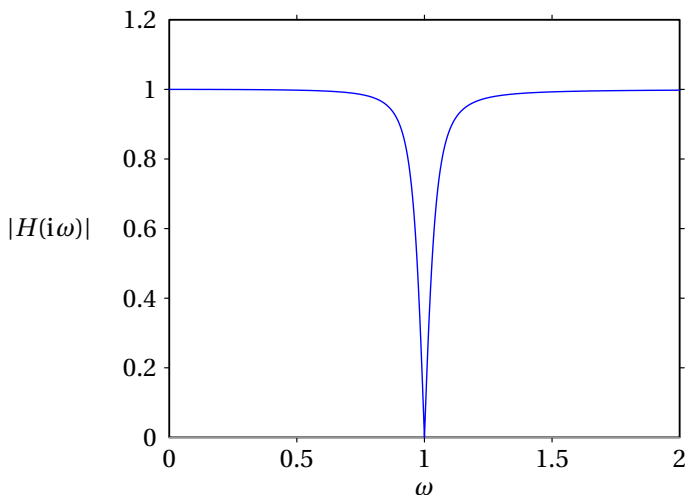
(a) Demonstre que a função de resposta em frequência é a expressão na equação 11.42, onde  $g = R_2/R_1$ ,  $\omega_1 = 1/(R_1 C_1)$  e  $\omega_2 = 1/(R_2 C_2)$  (sugestão: encontre primeiro a função de transferência  $H(s)$ , usando as expressões  $z_1 = R_1 \omega_1/s$  e  $z_2 = R_2 \omega_2/s$  para as impedâncias dos dois condensadores). (b) Determine o valor máximo de  $|H(i\omega)|$  e a frequência angular  $\omega$  em que essa função é máxima. (c) Trace o gráfico de  $|H(i\omega)|$ , com  $\omega$ , entre 0 e 3 kHz, no caso em que  $C_1 = 6 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 1 \mu\text{F}$ ,  $R_1 = 6 \text{ k}\Omega$  e  $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$

## Respostas

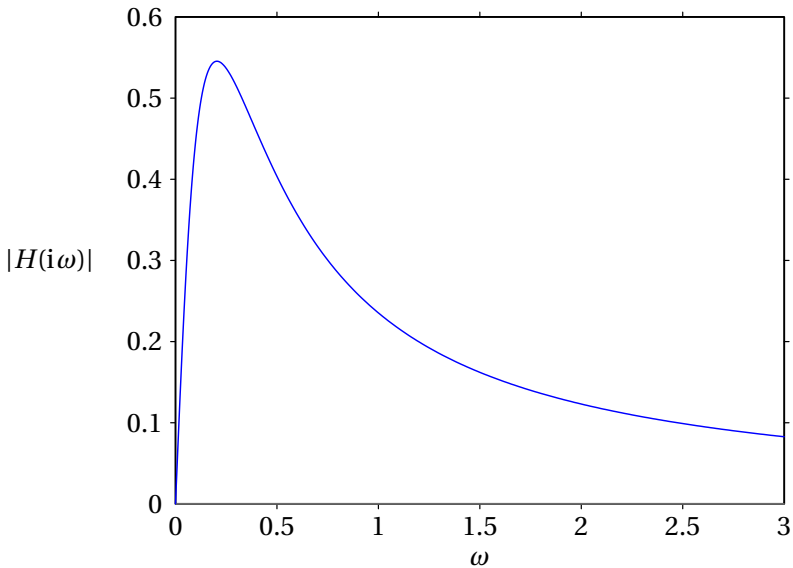
**Perguntas:** 1. E. 2. B. 3. D. 4. C. 5. C.

### Problemas

- $F(t) = 5.2 \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$
- $I(t) = 0.669 \sin(314.16 t - 1.2421)$  A.
- (a) 7.94 A. (b) 3.68 mA (c) 1.261 kW na bobina e 0 no condensador.
- A expressão para a transformada da corrente é  $\tilde{I} = \frac{I_0 s}{s^2 + \omega^2} = \operatorname{Re}\left(\frac{I_0}{s - i\omega}\right)$ , onde  $\omega = \sqrt{1/(LC)}$  e a transformada inversa é a expressão 11.5.
- $f = 1.779$  kHz,  $I_{\text{máx}} = 20$  mA,  $Q_{\text{máx}} = 1.789$   $\mu$ C.
- (a) Tensões em V, correntes em mA, tempo em ms.  
 Condensador:  $V = 113 \cos(0.378 t - 0.847)$   $I = 2.5 \cos(0.378 t + 0.724)$   
 Resistência:  $V = 127 \cos(0.378 t + 0.724)$   $I = 42.5 \cos(0.378 t + 0.724)$   
 Indutor:  $V = 170 \cos(0.378 t)$   $I = 225 \cos(0.378 t - \pi/2)$   
 (b) Tensões em V, correntes em mA, tempo em ms.  
 Condensador:  $V = 405 \cos(0.314 t)$   $I = 127 \cos(0.314 t + \pi/2)$   
 Resistência:  $V = 325 \cos(0.314 t)$   $I = 108 \cos(0.314 t)$   
 Indutor:  $V = 79.9 \cos(0.314 t + \pi)$   $I = 127 \cos(0.314 t + \pi/2)$
- (a)  $H(i\omega) = \frac{10\omega^2 - 10}{10\omega^2 - 10 - i\omega}$  (c)  $|H(i\omega)| = \frac{|\omega^2 - 1|}{\sqrt{\omega^4 - 1.99\omega^2 + 1}}$



8. (a) resistência  $2.63 \text{ M}\Omega$  e reatância  $-1.44 \text{ M}\Omega$ . (b) Uma resistência de  $2.63 \text{ M}\Omega$  e um condensador de  $2.21 \text{ nF}$ , ligados em série.
9. A tensão e corrente apresentadas no gráfico apenas poderão ter essas formas sinusoidais algum tempo após ter sido ligada a fonte, quando a resposta transitória já tiver desaparecido. Se a fonte de tensão fosse ligada apenas no instante  $t = 0$ , a corrente não poderia ter nesse instante um valor diferente de zero; em vez da função sinusoidal no gráfico, teríamos uma função que parte de zero e se aproxima gradualmente da função sinusoidal (resposta transitória mais resposta sinusoidal).
10.  $z = (1.5 + i2.598) \text{ k}\Omega$
11. (b)  $|H(i\omega)|_{\text{máx}} = \omega_2 / (\omega_1 + \omega_2 + \omega_1 / g)$ ,  $\omega_{\text{máx}} = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$ .  
 (c) O gráfico é o seguinte:





## 12. Ondas eletromagnéticas e luz



Os díodos emissores de luz (LED) são muito usados atualmente em aparelhos eletrônicos. Um LED produz luz de forma muito eficiente, com um consumo elétrico de apenas alguns miliwatt. São construídos em diferentes formas, tamanhos e cores. Cada algarismo num écran numérico é obtido com um conjunto de 8 LED; para obter cada um dos números acendem-se as combinações de LED necessárias.

Um LED é construído com cristais semicondutores e tem um tempo de duração muito elevado. A luz que produz tem uma cor própria que não muda com a corrente ou as condições de operação.

## 12.1. Equações de Maxwell

As equações básicas que permitem calcular o campo eletromagnético são conhecidas como equações de Maxwell. Uma forma suficiente de definir os dois campos, elétrico e magnético, em qualquer ponto do espaço, consiste em descrever o fluxo desses campos em qualquer superfície fechada e o integral de linha em qualquer curva fechada. São necessárias então quatro equações, uma para o fluxo do campo elétrico,  $\Phi$ , outra para o fluxo do campo magnético,  $\Psi$ , e duas mais para os integrais de linha dos dois campos.

Essas quatro equações já foram introduzidas ao longo dos capítulos anteriores e vão ser reescritas aqui. A primeira equação de Maxwell é a lei de Gauss, que relaciona o fluxo do campo elétrico numa superfície fechada com as cargas no seu interior:

$$\Phi(\text{Sup. fechada}) = 4\pi k q_{\text{int}} \quad (12.1)$$

No caso do campo magnético, como não existem monopolos magnéticos, o fluxo através de qualquer superfície fechada é nulo.

$$\Psi(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.2)$$

Esta é a segunda equação de Maxwell.

A terceira equação de Maxwell é a equação que define o integral de linha do campo elétrico em qualquer curva fechada  $C$ . Essa equação é a lei de Faraday, introduzida no capítulo 9.

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (12.3)$$

em que o integral no primeiro membro corresponde à f.e.m. induzida na curva  $C$  fechado. O fluxo magnético no segundo membro da equação é o fluxo através da superfície delimitada pela curva  $C$ .

A quarta equação, que define o integral de linha do campo magnético em qualquer curva fechada  $C$ , é a lei de Ampère, já estudada no capítulo sobre o campo magnético:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4\pi k_m I_{\text{int}} \quad (12.4)$$

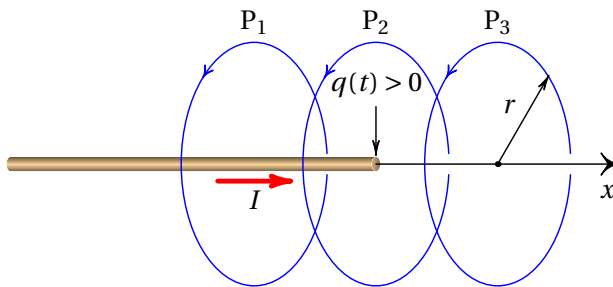
mas Maxwell reparou que esta equação só poderia ser válida no caso em que não existam campos elétricos variáveis.

No capítulo sobre indução eletromagnética viu-se que os campos elétrico e magnético são diferentes em diferentes referenciais inerciais, e utilizou-se a invariância da força eletromagnética para calcular o campo elétrico induzido num referencial em que o campo magnético não é estático. De igual modo, num referencial em que o campo elétrico não é estático, deve aparecer um campo magnético induzido.

Na equação 12.4 falta um termo que dependa da variação do campo elétrico e que corresponda ao integral de linha do campo magnético induzido.

Considere-se o exemplo de um fio retilíneo sobre o semieixo negativo dos  $x$ , que se estende desde  $-\infty$  até a origem (figura 12.1). Se durante alguns instantes existe no fio uma corrente  $I$ , no sentido positivo do eixo dos  $x$ , há acumulação de cargas positivas na origem; se  $q = f(t)$  representa a carga acumulada na origem no instante  $t$ , a derivada dessa função em ordem ao tempo é igual à corrente:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (12.5)$$

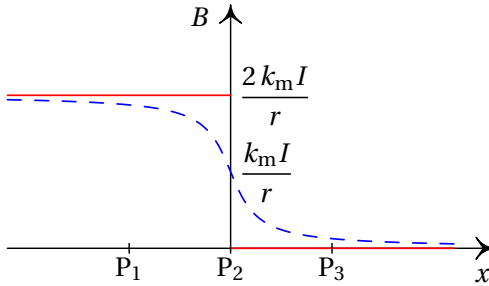


**Figura 12.1.:** Fio retilíneo, no eixo dos  $x$ , desde  $-\infty$  até a origem.

Para calcular o módulo do campo magnético em três pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , que se encontram a uma distância  $r$  do eixo dos  $x$ , considerem-se 3 circunferências de raio  $r$ , perpendiculares ao eixo dos  $x$ , com centro no eixo e orientadas no sentido indicado na figura 12.1. Aplicando a lei de Ampère a essas 3 circunferências, conclui-se que o módulo do campo magnético no ponto  $P_1$  é  $2k_m I/r$  e nos pontos  $P_2$  e  $P_3$  é nulo.

A linha contínua no gráfico 12.2 mostra o módulo do campo magnético obtido usando a lei de Ampère para todos os pontos a uma distância  $r$  do

eixo dos  $x$ . Em  $P_2$  ( $x = 0$ ) existe uma descontinuidade; o campo passa de  $2 k_m I/r$  para zero. A curva a tracejado é o resultado mais realista esperado: o campo decresce gradualmente até zero.



**Figura 12.2.:** Campo  $B$  na figura 12.1.

Para obter a curva a tracejado na figura 12.2 é necessário incluir no segundo membro da equação 12.4 um termo adicional que é nulo longe da origem e na vizinhança da origem aproxima-se de  $-2 \pi k_m I$ , se  $x$  for negativo, ou  $2 \pi k_m I$ , se  $x$  for positivo.

A carga  $q$  na origem produz fluxo elétrico  $\Phi$  negativo através do interior da circunferência que passa por  $P_1$  e positivo através do interior da circunferência que passa por  $P_3$ . Quando os pontos  $P_1$  e  $P_3$  se aproximam de  $P_2$ , o fluxo elétrico nessas duas circunferências é  $-2 \pi k q$  e  $2 \pi k q$  respectivamente. Como tal, a derivada do fluxo elétrico em ordem ao tempo passa de  $-2 \pi k I$  para  $2 \pi k I$  e o termo que falta no segundo membro da equação 12.4 é:

$$\frac{k_m}{k} \frac{d\Phi}{dt} \tag{12.6}$$

Incluindo esse termo na equação 12.4, obtém-se a quarta equação de Maxwell:

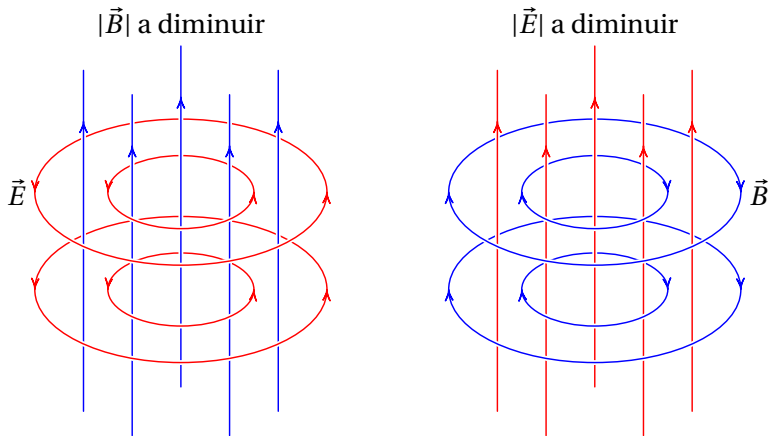
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 4 \pi k_m I_{int} + \frac{k_m}{k} \frac{d\Phi}{dt} \tag{12.7}$$

## 12.2. Campos induzidos

Um campo magnético variável no tempo induz um campo elétrico, e um campo elétrico variável induz um campo magnético. Um exemplo é o

campo magnético uniforme do 6 no capítulo 9; a variação do campo em função do tempo induz um campo elétrico com linhas de campo circulares.

O campo elétrico induzido é proporcional à derivada do fluxo magnético e o campo magnético induzido é proporcional à derivada do fluxo elétrico. Quando um campo é uniforme, o fluxo através de uma superfície é maior se a superfície for perpendicular ao campo; isso implica que o campo induzido é perpendicular ao campo variável.



**Figura 12.3.:** Campo elétrico induzido por um campo magnético uniforme de intensidade variável (esquerda) e campo magnético induzido por um campo elétrico uniforme de intensidade variável (direita).

A figura 12.3 mostra o campo elétrico induzido por um campo magnético uniforme mas variável, e o campo magnético induzido por um campo elétrico uniforme e variável. No primeiro caso, devido ao sinal negativo no lado direito da equação 12.3, o campo elétrico induzido tem sentido oposto ao obtido com a regra da mão direita em relação à derivada do campo magnético; como o campo magnético está a diminuir, a derivada do campo aponta para baixo e a regra da mão direita indica rotação no sentido horário; portanto, as linhas do campo induzido estão orientadas no sentido anti-horário.

O sinal positivo do último termo na equação 12.7 implica que as linhas do campo magnético induzido seguem a regra da mão direita em relação ao aumento do campo elétrico. No caso do campo elétrico variável no lado direito da figura 12.3, como o campo está a diminuir, a derivada do campo

elétrico aponta para baixo e a regra da mão direita indica que o campo magnético induzido é no sentido horário.

### 12.3. Campo eletromagnético no vácuo

No vácuo, não podem haver cargas ou correntes, pois não há matéria, mas pode haver campos elétricos e magnéticos. Nesse caso, as quatro equações de Maxwell tomam a forma,

$$\Phi(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.8)$$

$$\Psi(\text{Sup. fechada}) = 0 \quad (12.9)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Psi}{dt} \quad (12.10)$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{k_m}{k} \frac{d\Phi}{dt} \quad (12.11)$$

O único parâmetro nessas equações é a constante  $k_m/k$ . No sistema internacional de unidades, o valor dessa constante é:

$$\frac{k_m}{k} = \frac{10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}}{9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}} = \frac{1}{9 \times 10^{16}} \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \quad (12.12)$$

que é exatamente igual ao inverso do quadrado da velocidade da luz no vácuo,  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$$\boxed{\frac{k_m}{k} = \frac{1}{c^2}} \quad (12.13)$$

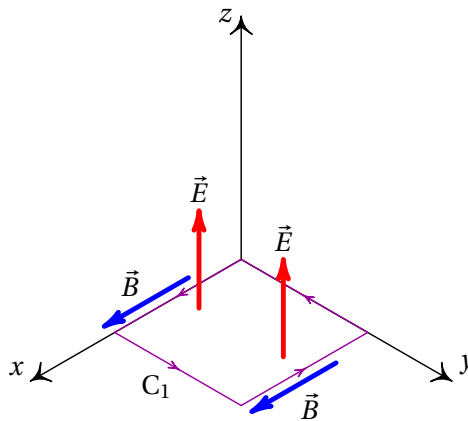
Maxwell foi o primeiro a descobrir esta relação entre as constantes elétrica e magnética e a velocidade da luz, a meados do século XIX, quando o valor da velocidade da luz no vácuo já era conhecido com muita precisão, mas ninguém suspeitava que existisse qualquer relação entre o eletromagnetismo e a luz. Maxwell concluiu então que a luz deve ser uma onda eletromagnética, composta por campos elétrico e magnético que se podem propagar no vácuo.

Para investigar as soluções das equações 12.8, 12.9, 12.10 e 12.11, admita-se que numa região existem campos elétrico e magnético que são soluções

dessas equações; cada um dos campos é induzido pela variação do outro. Se os campos forem uniformes nessa região, já se viu que devem ser perpendiculares entre si. Pode-se fixar a origem num ponto onde existem campo elétrico e magnético e escolher os eixo dos  $x$  e dos  $z$  a apontar nas direções e sentidos do campo  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$  nesse ponto, respetivamente.

Aplique-se a equação 12.11 num percurso retangular infinitesimal  $C_1$ , perpendicular ao eixo dos  $z$ , com lados  $\Delta x$  e  $\Delta y$  e um vértice na origem, orientado como indica a figura 12.4. O fluxo elétrico através do interior de  $C_1$  é:

$$\Phi_e = E \Delta x \Delta y \quad (12.14)$$



**Figura 12.4.:** Fluxo elétrico e integral de linha do campo magnético num retângulo no plano  $Oxy$ .

Estando o campo magnético na direção e sentido do eixo dos  $x$ , o integral de linha do campo magnético ao longo de  $C_1$  é:

$$\int_{C_1} B_t ds = B(y) \Delta x - B(y + \Delta y) \Delta x \quad (12.15)$$

e substituindo 12.14 e 12.15 na equação 12.11, obtém-se:

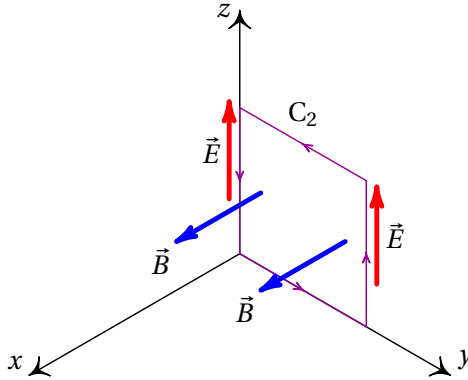
$$B(y) \Delta x - B(y + \Delta y) \Delta x = \frac{1}{c^2} \Delta x \Delta y \frac{\partial E}{\partial t} \quad (12.16)$$

Dividindo os dois membros dessa equação por  $\Delta x \Delta y$  e calculando o limite  $\Delta y \rightarrow 0$ , obtém-se no primeiro membro a derivada parcial de  $B$  em ordem

a  $y$ , com sinal negativo:

$$-\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (12.17)$$

Em seguida, aplique-se a equação 12.10 num percurso retangular infinitesimal  $C_2$ , perpendicular ao eixo dos  $x$ , com lados  $\Delta y$  e  $\Delta z$  e um vértice na origem, orientado no sentido que mostra a figura 12.5.



**Figura 12.5.:** Fluxo magnético e integral de linha do campo elétrico num retângulo no plano  $Oyz$ .

O fluxo magnético através do interior de  $C_2$  é  $B \Delta y \Delta z$ , e o integral de linha do campo elétrico ao longo de  $C_2$  é  $E(y + \Delta y) \Delta z - E(y) \Delta z$ . Substituindo na equação 12.9 obtém-se:

$$E(y + \Delta y) \Delta z - E(y) \Delta z = -\Delta y \Delta z \frac{\partial B}{\partial t} \quad (12.18)$$

e dividindo ambos os membros por  $\Delta y \Delta z$  e calculando o limite  $\Delta y \rightarrow 0$ , o primeiro membro fica igual à derivada parcial de  $E$  em função de  $y$ :

$$\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (12.19)$$

Derivando a equação 12.17 em ordem a  $t$  e a equação 12.19 em ordem a  $y$  e combinando as duas equações, pode-se obter uma equação em que figura unicamente o campo elétrico:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}} \quad (12.20)$$



Também se pode obter uma equação apenas para o campo magnético, derivando a equação 12.17 em ordem a  $y$  e a equação 12.19 em ordem a  $t$  e combinando os resultados:

$$\boxed{\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}} \quad (12.21)$$

As equações 12.20 e 12.21 são a mesma equação, designada de **equação de onda**.

## 12.4. Ondas planas polarizadas

As soluções das equações 12.20 ou 12.21 podem ser obtidas num outro sistema de coordenadas em que a equação assume uma forma mais simples. A componente  $E$  do campo elétrico, na equação 12.20, é uma função que depende de  $y$  e de  $t$ . Fazendo uma mudança para duas **variáveis características**  $r$  e  $s$  definidas por:

$$r = y + ct \quad s = y - ct \quad (12.22)$$

e usando a regra de derivação de funções compostas, calculam-se as derivadas parciais de  $E$ , em função de  $r$  e  $s$ , substituindo-as na equação 12.20 para obter:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r \partial s} = 0 \quad (12.23)$$

É fácil ver que para verificar essa equação, uma das duas derivadas parciais de  $E$ , em ordem a  $r$  ou em ordem a  $s$ , deve ser nula. Isto é, o campo  $E$  deve ser uma função  $f(r)$  que depende apenas de  $r$ , ou uma função  $g(s)$  que depende apenas de  $s$ . Em função das variáveis  $y$  e  $t$ , a função  $E$  pode ter uma das duas formas:

$$E = f(y + ct) \quad E = g(y - ct) \quad (12.24)$$

ou qualquer combinação linear desses dois tipos de funções. Quaisquer funções  $f$  ou  $g$  conduzem a soluções particulares da equação de onda.

Para cada valor de  $t$ , a função  $f(y + ct)$  é idêntica à função  $f(y)$ , em  $t = 0$ , mas deslocada no sentido negativo do eixo dos  $y$  de uma distância igual a  $ct$ . Assim sendo, o campo  $E = f(y + ct)$  descreve uma onda que se

propaga no sentido negativo do eixo dos  $y$ , com velocidade  $c$ . Uma análise semelhante mostra que  $E = g(y - ct)$  descreve uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos  $y$ , com velocidade  $c$ .

O campo magnético  $B$ , que também verifica a equação de onda, também deve ter uma forma semelhante à equação 12.24, mas não pode ser independente da solução obtida para  $E$ , devido às relações 12.17 e 12.19. Substituindo as soluções 12.24 na equação 12.17, obtém-se as soluções correspondentes para o campo magnético:

$$B = -\frac{1}{c} f(y + ct) \quad B = \frac{1}{c} g(y - ct) \quad (12.25)$$

O fator  $c$  no denominador indica que a intensidade do campo magnético numa onda eletromagnética é muito menor que a intensidade do campo elétrico. Os sinais obtidos nestas expressões para  $B$  indicam que os campos indicados nas figuras 12.4 e 12.5 correspondem a uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo dos  $y$  e se a onda se propaga no sentido negativo do eixo dos  $y$ , o campo magnético tem o sentido oposto ao que foi indicado nas figuras 12.4 e 12.5.

Conclui-se que existem duas famílias de soluções das equações de onda eletromagnética. A primeira família corresponde a ondas que se propagam no sentido positivo do eixo dos  $y$  com campos elétrico e magnético dados pelas seguintes expressões:

$$\vec{E} = g(y - ct) \hat{k} \quad (12.26)$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} g(y - ct) \hat{i} \quad (12.27)$$

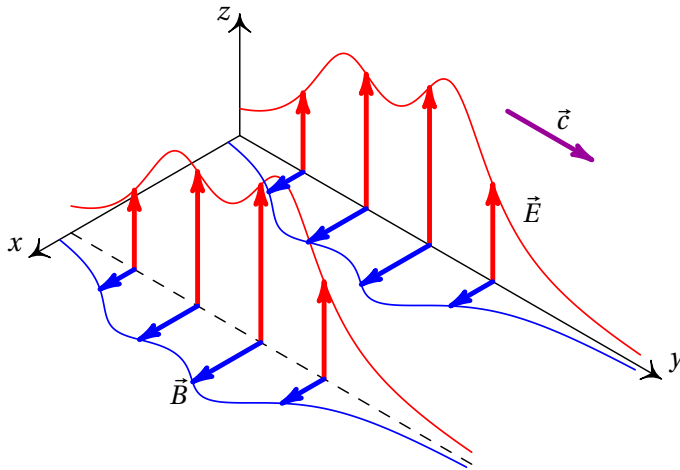
em que  $g$  pode ser qualquer função contínua de uma variável,  $g(s)$ . A figura 12.6 mostra uma dessas soluções.

A segunda família de soluções são ondas eletromagnéticas que se propagam no sentido negativo do eixo dos  $y$ , e com campos que verificam as expressões:

$$\vec{E} = f(y + ct) \hat{k} \quad (12.28)$$

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} f(y + ct) \hat{i} \quad (12.29)$$

onde  $f$  é qualquer função contínua de uma variável,  $f(r)$ .



**Figura 12.6.:** Onda eletromagnética plana polarizada, com velocidade no sentido positivo do eixo dos  $y$ .

Estas soluções foram obtidas admitindo que as direções dos campos elétrico e magnético são iguais em todo o espaço e esse tipo de onda eletromagnética chama-se **onda plana polarizada**. Lembre-se que a direção do campo magnético é necessariamente perpendicular ao campo elétrico. A direção de propagação da onda é perpendicular à direção do campo elétrico e à direção do campo magnético e é sempre no sentido do produto vetorial ( $\vec{E} \times \vec{B}$ ); nomeadamente, seguindo a regra da mão direita de  $\vec{E}$  para  $\vec{B}$ .

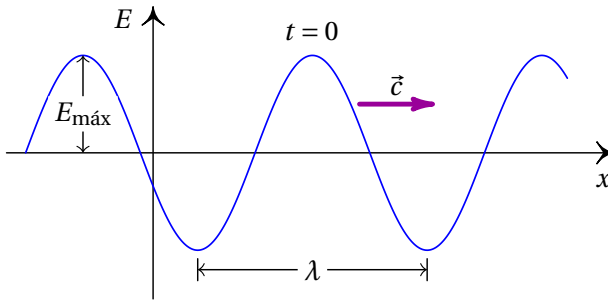
A direção de polarização é, por definição, a direção do campo elétrico. O campo magnético da onda é muito mais fraco do que o campo elétrico. O módulo da velocidade de todas as ondas eletromagnéticas no vácuo é sempre a constante  $c$ .

As ondas planas polarizadas, que se propagam na direção do eixo dos  $x$  ou dos  $z$ , têm formas semelhantes às equações 12.26 ou 12.28, com  $y$  substituído pela coordenada correspondente à direção de propagação, o versor  $\hat{k}$  substituído pelo versor na direção de polarização e  $\hat{i}$  substituído pelo versor perpendicular às direções de propagação e de polarização, seguindo a regra da mão direita do versor de propagação para o versor de polarização.

## 12.5. Ondas harmônicas

Uma onda harmônica é uma onda com a forma de uma função sinusoidal, como na figura 12.7, no caso de uma onda que se desloca no sentido positivo do eixo dos  $x$ .

A distância  $\lambda$  entre dois pontos consecutivos onde o campo e a sua derivada têm o mesmo valor, é designada por **comprimento de onda** (por exemplo, a distância entre dois máximos ou mínimos consecutivos). O valor máximo do módulo do campo,  $E_{\text{máx}}$ , é a sua **amplitude**, o valor máximo.



**Figura 12.7.:** Onda harmônica.

O tempo que a onda demora a percorrer um comprimento de onda designa-se por **período**,  $T$ . O inverso do período é a **frequência**  $f = 1/T$ , que indica o número de comprimentos de onda que passam por um ponto, por unidade de tempo. No sistema SI a unidade da frequência é o hertz,  $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

No caso de uma onda eletromagnética no vácuo, a velocidade de propagação é  $c$  e observa-se a relação:

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (12.30)$$

A equação da função representada na figura 12.7 é:

$$E(x) = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \quad (12.31)$$

onde a constante  $\varphi$  é a **fase inicial**. Essa função representa a forma da onda num instante inicial, que se pode tomar como  $t = 0$ . Para obter a

função de onda num instante diferente, substitui-se  $x$  por  $x - ct$ , já que a onda se propaga no sentido positivo do eixo dos  $x$ , com velocidade  $c$

$$E(x, t) = E_{\text{máx}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \varphi\right) \quad (12.32)$$

e usando a relação entre a velocidade e o período, pode-se escrever

$$E(x, t) = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi\right) \quad (12.33)$$

Para  $x = 0$ , obtém-se a equação que descreve o campo elétrico na origem, em função do tempo:

$$E(x) = -E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) \quad (12.34)$$

e vê-se que o campo elétrico na origem é uma função sinusoidal com período  $T$  e amplitude  $E_{\text{máx}}$ . O campo noutros pontos tem exatamente a mesma forma sinusoidal, mas com diferentes valores da constante de fase.

### Exemplo 12.1

Uma onda eletromagnética plana propaga-se no vácuo, no sentido negativo do eixo dos  $z$ . Num dado instante  $t = 0$  o campo elétrico é  $\vec{E} = 34 \sin(3,25 \times 10^8 z) \hat{i}$ , onde  $z$  é medido em metros e o campo é medido em N/C. Escreva a função que define o campo magnético em qualquer ponto e em qualquer instante.

**Resolução.** A função que define o campo elétrico em  $t = 0$  indica que se trata de uma onda harmónica polarizada na direção do versor  $\hat{i}$ . O campo elétrico de uma onda harmónica plana, polarizada segundo  $\hat{i}$ , que se propaga no sentido negativo do eixo  $z$ , é:

$$\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin\left(2\pi\left(\frac{z}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) + \varphi\right) \hat{i}$$

Substituindo  $t = 0$  e comparando com o campo dado no enunciado, conclui-se que:

$$\varphi = 0 \qquad \frac{2\pi}{\lambda} = 3,25 \times 10^8 \qquad E_{\text{máx}} = 34$$

e  $\lambda/T$  deve ser igual à velocidade da luz no vácuo que em unidades SI é  $3 \times 10^8$ . Assim,  $2\pi/T = 9.75 \times 10^{16}$  e o campo elétrico em qualquer ponto e em qualquer instante é:

$$\vec{E} = 34 \sin(3.25 \times 10^8 z + 9.75 \times 10^{16} t) \hat{i}$$

O módulo do campo  $\vec{B}$  é igual ao módulo do campo elétrico, dividido pela velocidade da luz; o sentido de  $\vec{B}$  deve garantir que o produto vetorial  $\vec{E} \times \vec{B}$  seja na direção de propagação ( $-\hat{k}$ ) e portanto:

$$\vec{B} = -1.13 \times 10^{-7} \sin(3.25 \times 10^8 z + 9.75 \times 10^{16} t) \hat{j}$$

## 12.6. Espectro eletromagnético

O comprimento de onda,  $\lambda$ , e a frequência,  $f$ , de uma onda harmónica não podem variar independentemente, pois estão relacionados por  $\lambda f = c$ . Dada a frequência ou o comprimento de onda, é possível classificar a onda dentro do **espectro eletromagnético** e determinar as suas propriedades. O valor máximo dos campos determina a intensidade, mas não a classificação no espectro.

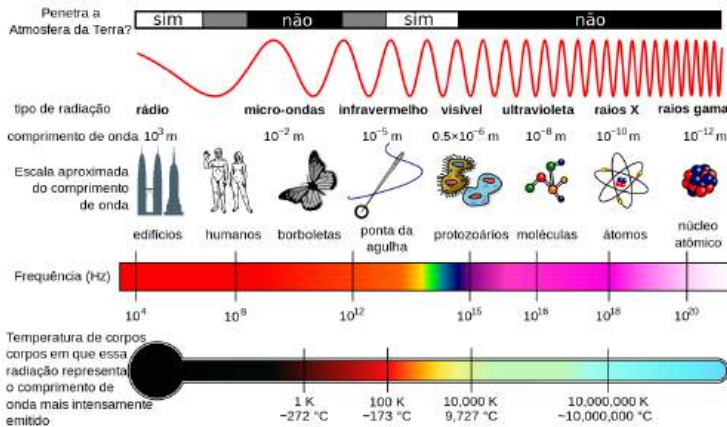
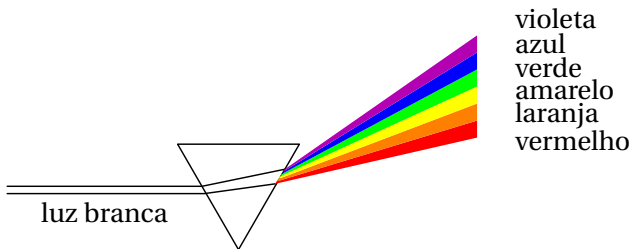


Figura 12.8.: Espectro eletromagnético.

Em princípio, podem existir ondas eletromagnéticas com qualquer valor de  $\lambda$  entre 0 e  $\infty$ . Alguns exemplos de ondas eletromagnéticas são as ondas de rádio e de comunicações móveis, as ondas usadas num forno

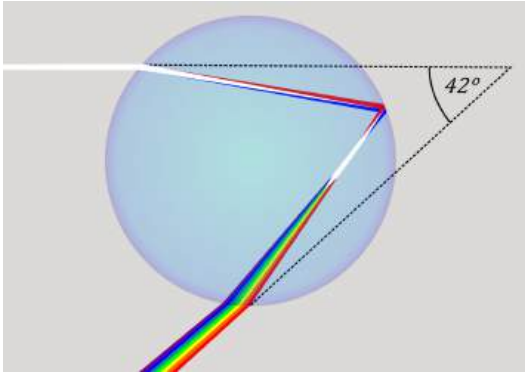
de microondas para aquecer os alimentos e a luz visível. O que distingue entre essas ondas é a frequência respectiva, ou de forma equivalente, o comprimento de onda. A figura 12.8 mostra o espectro eletromagnético identificando algumas das ondas comuns.

Usualmente, a radiação eletromagnética produzida por um sistema não tem uma frequência única  $f$ , como no caso das ondas harmônicas, mas é uma sobreposição de ondas harmônicas com uma distribuição de frequências. Por exemplo, a luz solar tem um espectro contínuo de frequências na banda visível; a mistura das várias cores faz parecer a luz branca mas fazendo passar essa luz através de um prisma (figura 12.9), consegue-se ver o espectro das várias cores (diferentes frequências).



**Figura 12.9.:** Dispersão da luz num prisma.

Dentro de um meio diferente do vácuo, a constante de Coulomb  $k$  na equação 12.13 deve ser dividida pela constante dielétrica  $K$  do meio. Isso conduz a uma velocidade da luz menor do que no vácuo. A constante dielétrica é maior quanto maior a frequência; como tal, a cor que se propaga mais lentamente no prisma (violeta) sofre um maior desvio, como mostra a figura 12.9. O arco-íris é outra manifestação desse mesmo fenômeno (**dispersão** da luz). A luz do Sol atravessa gotas de água nas nuvens e é refletida, como se mostra na figura 12.10; se não houvesse dispersão, veríamos um ponto de luz intensa, refletida, na direção oposta a onde está o Sol. A dispersão da luz dentro das gotas de água faz com que esse ponto de luz refletida se torne num anel, com um ângulo de aproximadamente  $42^\circ$ , à volta desse ponto. Como a dispersão das diferentes cores é diferente, em vez de um anel são criados vários anéis. A cor que sofre maior dispersão (violeta) acaba por ficar no anel mais próximo do centro, porque a reflexão na superfície interna da gota inverte a ordem das cores.



**Figura 12.10.:** Dispersão e reflexão da luz numa gota de água.

## 12.7. Teoria ondulatória da luz

Existem vários fenômenos que corroboram que a luz é uma onda; por exemplo, a interferência, difração e polarização. Alguns cristais têm a propriedade de polarizar a luz: só deixam passar uma parte da luz incidente. Colocando um segundo filtro polarizador a seguir ao primeiro e rodando um dos filtros, existe uma posição para a qual não passa nenhuma luz (figura 12.11).

Observando com um filtro polarizador a luz refletida numa superfície e rodando o filtro, existe uma posição em que não se consegue ver a luz refletida.

Normalmente a luz é uma sobreposição de ondas com campos que oscilam em diferentes direções. Num filtro polarizador as moléculas estão orientadas numa direção determinada, o eixo do polarizador, e só deixam passar a luz polarizada nessa direção (direção do campo elétrico).

A luz refletida numa superfície é polarizada na direção tangente à superfície. Um filtro polarizador com o seu eixo perpendicular a essa superfície não deixa passar nenhuma luz. Uma forma de saber se as lentes nuns óculos de sol estão polarizadas ou não, consiste em olhar para um reflexo e rodar a lente; se estiver polarizada, deverá existir um ângulo em que os reflexos desaparecem.

Os cristais líquidos têm a propriedade de orientar as suas moléculas numa direção, quando são atravessados pela corrente elétrica, tornando-se polarizadores. Esse é o princípio usado nos ecrãs LCD (*Liquid Crystal Display*)





**Figura 12.11.:** Dois filtros polarizadores com os eixos paralelos (acima) e com os eixos perpendiculares (abaixo).

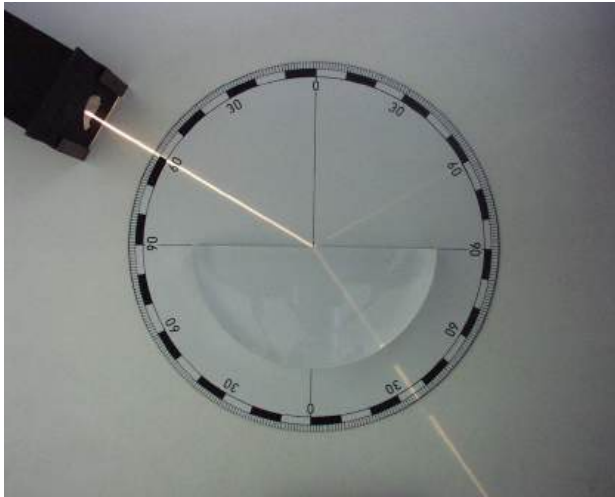
de calculadoras, telemóveis e televisores. A luz que sai do ecrã é polarizada com um filtro polarizador e a seguir, passa por pontos onde existem vários cristais líquidos, com correntes elétricas consegue-se controlar os pontos onde os cristais são polarizados perpendicularmente ao primeiro polarizador, impedindo a luz de passar.

## 12.8. Teoria corpuscular da luz

Antes de Maxwell ter proposto que a luz é uma onda eletromagnética, na década de 1860, havia um debate agitado na comunidade científica, entre os que defendiam a teoria corpuscular proposta e os que defendiam a teoria ondulatória da luz. Newton no século XVII, acreditava na teoria corpuscular e o seu contemporâneo Huygens (1629–1695) defendia a teoria ondulatória.

A figura 12.12 mostra um raio de luz que sai de uma fonte de luz e incide na superfície de um semicírculo de vidro. O ângulo que o raio incidente faz com a perpendicular à superfície do vidro é de  $60^\circ$ ; o raio incidente separa-se num raio refletido que também faz um ângulo de  $60^\circ$  com a

perpendicular à superfície e um raio refratado que entra no vidro e faz um ângulo de  $35^\circ$  com a perpendicular.



**Figura 12.12.:** Raios de luz incidente (esquerda acima), refletido (direita acima) e refratado (abaixo) num semicírculo de vidro.

Segundo a teoria corpuscular, a luz é formada por pequenas partículas que saem da fonte e se deslocam em linha reta. Assim explica-se facilmente a existência de raios de luz, que se deslocam em linha reta. A teoria corpuscular explica com sucesso a igualdade dos ângulos dos raios incidente e refletido com a perpendicular à superfície porque é o mesmo que acontece quando são disparadas partículas contra uma superfície rígida. Consegue também explicar a diferença entre os ângulos dos raios incidentes e refratado com a perpendicular, admitindo que os corpúsculos de luz se deslocam com velocidade diferente no ar e no vidro.

A teoria ondulatória da luz também consegue explicar a criação de feixes de luz, embora o argumento não seja tão intuitivo como no caso da teoria corpuscular. As ondas também verificam as leis da reflexão e da refração, mas no caso da refração há uma diferença importante entre as previsões das duas teorias. Quando a luz passa do ar para o vidro, como na figura 12.12, o ângulo do raio refratado com a perpendicular é menor que o ângulo entre o raio incidente e a normal. Segundo a teoria corpuscular, isso implica velocidade da luz maior no vidro do que no ar, enquanto que na teoria ondulatória implica velocidade das ondas de luz menor no vidro

do que no ar.

Na época de Newton e Huygens não era fácil medir a diferença da velocidade da luz no vidro e no ar e o prestígio de Newton fez com que fosse dada maior credibilidade à teoria corpuscular do que à teoria ondulatória. Hoje em dia sabe-se que a velocidade da luz no vidro é de facto menor do que no ar, como prevê a teoria ondulatória. A teoria eletromagnética de Maxwell acabou com o debate, ficando estabelecido, sem lugar a dúvida, que a luz é uma onda eletromagnética.

No entanto, no fim do século XIX foi descoberto o **efeito fotoelétrico**, que não pode ser explicado com a teoria ondulatória. Einstein explicou esse efeito em 1905, através da teoria dos fotões: a luz é formada por partículas designadas de **fotões**. Cada fotão transporta uma energia igual a:

$$U = hf \quad (12.35)$$

em que  $f$  é a frequência da luz associada ao fotão e  $h$  é a constante de Planck:

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (12.36)$$

Ou seja, a energia de uma onda eletromagnética não pode ter um valor qualquer, mas apenas múltiplos inteiros do **quantum** de energia  $hf$ , já que o número de fotões tem de ser um número inteiro.

Numa onda clássica, a energia pode ser absorvida de forma contínua; nomeadamente, a onda pode transferir qualquer parte da sua energia a um sistema. No caso de uma onda quântica, como as ondas eletromagnéticas, a transferência de energia a um sistema só pode ser feita por absorção de alguns fotões; a energia transferida é a soma das energias desses fotões e, portanto, deve ser um múltiplo inteiro do quantum de energia  $hf$ .

Hoje em dia acredita-se que os fotões ou qualquer outra partícula têm também uma natureza ondulatória. A energia de um fotão e das outras partículas é produzida ou absorvida em quantidades discretas, mas é transportada de um ponto para outro na forma de uma onda. Todas as formas de matéria e energia apresentam propriedades de onda e de partícula. Esse fenómeno, designado de **dualidade onda-partícula**, é a base da física quântica.

## 12.9. Díodos emissores de luz (LED)

Os **díodos emissores de luz** (LED) são dispositivos com um cátodo e um ânodo, identificados como mostra a figura 12.13. Ligando uma diferença de potencial superior a um valor mínimo, com o ânodo a maior potencial que o cátodo, o LED produz luz monocromática. A imagem de abertura deste capítulo mostra vários tipos de LED. Quando o potencial do ânodo for menor que o potencial do cátodo, o LED não deixa passar corrente e não acende.



**Figura 12.13.:** LED e diagrama de circuito correspondente. O cátodo costuma ser um fio mais curto e estar perto de uma zona onde a cobertura plástica é plana.

A energia elétrica que os portadores de carga perdem na passagem da interface entre os dois semicondutores é transformada em luz. Essa energia corresponde à diferença entre dois níveis de energia no semicondutor e tem um valor específico próprio dos semicondutores usados no LED.

Como se viu, a energia que transporta cada fóton é dada pela equação 12.35 como tal, os fótons emitidos no LED têm todos aproximadamente a mesma frequência, igual à diferença entre os níveis de energia dos elétrons nos dois eletrodos do LED, dividida pela constante de Planck; isso implica que a luz do LED é monocromática. Assim, a cor da luz emitida pelo LED depende do semicondutor usado. A tabela 12.1 mostra as cores próprias de alguns semicondutores.

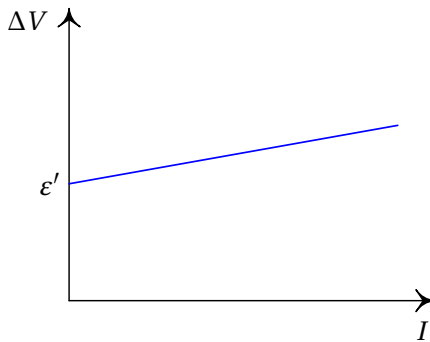
Quando circula corrente pelo LED, cada carga de condução que atravessa a interface no LED perde a energia correspondente à de um fóton. Assim, a curva característica do LED é semelhante à característica de um recetor, com ordenada na origem positiva, e declive constante positivo (figura 12.14).

A força contra-eletromotriz do LED,  $\mathcal{E}'$  (ordenada na origem da característica tensão-corrente), é a energia por unidade de carga, que as cargas de condução perdem na passagem pelo LED e é convertida em luz.

Assim, a energia que cada elétron perde quando atravessa a interface entre os dois semicondutores é igual a:  $e\mathcal{E}'$ . Essa energia é a energia do fóton que

**Tabela 12.1.:** Cores associadas a alguns semicondutores usados atualmente.

Semicondutor	Cor da luz	$\lambda$
Arsenieto de gálio e alumínio	Infravermelha	880 nm
Arsenieto de gálio e alumínio	Vermelha	645 nm
Fosfato de alumínio, índio e gálio	Amarela	595 nm
Fosfato de gálio	Verde	565 nm
Nitreto de gálio	Azul	430 nm

**Figura 12.14.:** Característica tensão-corrente de um LED.

é emitido:

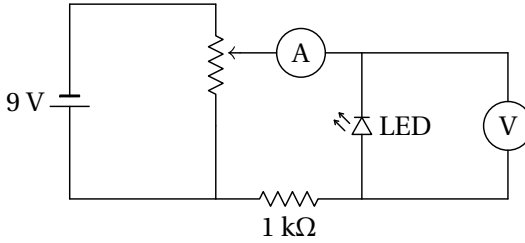
$$e\varepsilon' = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (12.37)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz e  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz emitida.

Resolvendo a equação 12.37 em ordem a  $h$  obtém-se:

$$h = \frac{e\varepsilon'\lambda}{c} \quad (12.38)$$

Esta equação é útil para medir experimentalmente o valor da constante de Planck, a partir da característica tensão-corrente de um LED usando a montagem experimental apresentada na figura 12.15, por exemplo.



**Figura 12.15.:** Circuito usado para determinar a característica de um LED.

A resistência de  $1\text{ k}\Omega$  é usada para evitar que a corrente no LED ultrapasse alguns miliampere e não queime o LED; se o LED estiver ligado no sentido correto, deve produzir luz. Com os valores medidos da diferença de potencial em função da corrente traça-se a curva característica do LED, que pode ser ajustada por uma reta. A ordenada na origem dessa reta ( $\epsilon'$ ) e o valor do comprimento de onda próprio do LED (tabela 12.1) permitem obter o valor da constante de Planck a partir da equação 12.38.

## Perguntas

- Qual das afirmações é verdadeira para uma onda eletromagnética no vácuo? Quanto menor for o período:
  - Menor é o comprimento de onda.
  - Maior é a velocidade.
  - Menor é a amplitude.
  - Maior é a amplitude.
  - Nenhuma das outras respostas.
- Qual dos seguintes fenômenos é uma prova a favor da teoria ondulatória da luz, contra a teoria corpuscular?
 

A. Refração da luz.	D. Polarização da luz.
B. Efeito fotoelétrico.	E. O arco íris.
C. Reflexão da luz.	

3. Uma onda eletromagnética harmónica tem frequência de 2.0 GHz. Calcule o comprimento de onda.
- A. 30 m  
B. 15 cm  
C. 6.67 m  
D. 150 m  
E. 3.0 m
4. Que tipo de radiação é uma onda eletromagnética com comprimento de onda de 1 cm?
- A. Luz visível.  
B. Raios gama.  
C. Onda de rádio.  
D. Microonda.  
E. Raios X.
5. Uma onda eletromagnética propaga-se no sentido positivo do eixo dos  $z$ . Num certo ponto e num certo instante, o campo elétrico da onda aponta na direção e sentido positivo do eixo dos  $y$ . Em que direção e sentido aponta o campo magnético nesse mesmo ponto e no mesmo instante?
- A. No sentido positivo do eixo dos  $y$ .  
B. No sentido negativo do eixo dos  $y$ .  
C. No sentido positivo do eixo dos  $x$ .  
D. No sentido negativo do eixo dos  $x$ .  
E. No sentido negativo do eixo dos  $z$ .

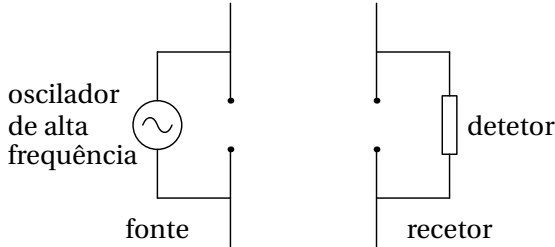
## Problemas

1. Uma onda eletromagnética propaga-se no vácuo, no sentido positivo do eixo dos  $x$ . No instante  $t = 0$ , o campo elétrico em função de  $x$  é dado pela função (unidades SI)

$$E = \frac{50}{x^2 + 2}$$

Calcule o campo no ponto  $x = 50$  m, no instante  $t = 0.2$   $\mu$ s.

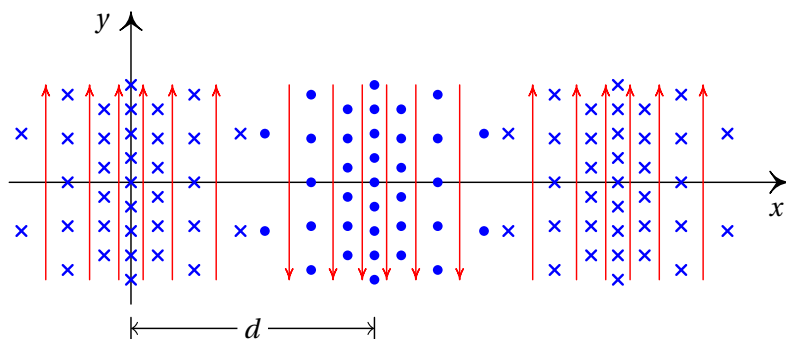
2. Em 1886 Heinrich Hertz conseguiu produzir e detectar ondas de rádio, pela primeira vez, com o aparelho no diagrama. Hertz observou que não se detetava nenhuma onda quando se colocava uma placa metálica entre a fonte e o recetor; explique porque. Também descobriu que não era detetada nenhuma onda se o recetor fosse rodado  $90^\circ$  em relação à linha que une a fonte e o recetor; explique porquê.



3. Considere uma onda eletromagnética plana, polarizada na direção do eixo dos  $x$ , que se propaga no vácuo na direção positiva do eixo dos  $y$ , com frequência de 12 MHz e amplitude  $E_{\text{máx}} = 0.008 \text{ V/m}$ . (a) calcule o período e o comprimento de onda. (b) Escreva uma expressão para  $\vec{E}(t)$  e para  $\vec{B}(t)$ .
4. Uma onda eletromagnética plana propaga-se no vácuo no sentido negativo do eixo dos  $x$ . Num dado instante  $t = 0$  o campo elétrico é  $\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin(2.25 \times 10^7 x) \hat{k}$ , com  $x$  em metros. (a) Calcule o comprimento de onda. (b) Calcule a frequência. (c) Diga qual é a direção de polarização da onda.
5. Uma lâmina metálica muito extensa encontra-se sobre o plano  $Oxy$ . A lâmina é ligada a uma fonte variável que produz um campo elétrico uniforme no plano  $Oxy$ , mas variável no tempo segundo a equação:  $\vec{E} = E_{\text{máx}} \sin(\omega t) \hat{i}$ , onde  $E_{\text{máx}}$  e  $\omega$  são constantes. O campo elétrico na lâmina origina uma onda eletromagnética plana. Escreva as funções que representam os campos elétrico e magnético dessa onda, em função do tempo e da posição.
6. Usando a equação 12.17, demonstre que se o campo elétrico for  $E = f(y + ct)$ , o campo magnético é  $B = -f(y + ct)/c$  e se o campo elétrico for  $E = g(y - ct)$ , o campo magnético é  $B = g(y - ct)/c$ .
7. A figura representa o campo eletromagnético de uma onda plana de 420 MHz, no instante  $t = 0$ . As linhas de campo verticais representam o campo elétrico e as linhas perpendiculares à folha de papel são as linhas do campo magnético. Calcule a distância  $d$  e escreva o vetor do



campo magnético em função do tempo e da coordenada  $x$ .



8. Calcule a energia, em joules e em elétron-volts, dos fótons na luz laranja, com comprimento de onda de 616 nm.
9. Determine o comprimento de onda de um fóton com energia igual a 2.00 eV. A que tipo de radiação corresponde esse fóton?

## Respostas

**Perguntas:** 1. A. 2. D. 3. B. 4. D. 5. D.

### Problemas

1. 490 mV/m.
2. O campo elétrico na placa metálica é nulo, o que implica que as ondas não passam de um lado para o outro. O recetor só deteta ondas polarizadas na direção da linha entre as duas esferas no detetor; as ondas produzidas pela fonte estão polarizadas na direção da linha entre as duas esferas na fonte.
3. (a)  $P = 83.33$  ns,  $\lambda = 25$  m  
 (b)  $\vec{E} = 0.008 \cos(0.2513 y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi) \hat{i}$   
 $\vec{B} = -2.67 \times 10^{-11} \cos(0.2513 y - 75.40 \times 10^6 t + \varphi) \hat{k}$ .
4. (a) 279 nm. (b)  $1.074 \times 10^{15}$  Hz. (c) O eixo dos  $z$
5. As expressões dos campos são:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{\text{máx}} \sin(\omega t - \frac{\omega}{c} z) \hat{i}, & z \geq 0 \\ E_{\text{máx}} \sin(\omega t + \frac{\omega}{c} z) \hat{i}, & z \leq 0 \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t - \frac{\omega}{c} z) \hat{j}, & z \geq 0 \\ -\frac{E_{\text{máx}}}{c} \sin(\omega t + \frac{\omega}{c} z) \hat{j}, & z \leq 0 \end{cases}$$

6. A derivada de  $f(y + ct)$  em ordem a  $t$  é  $c f'(y + ct)$ . Substituindo na equação 12.17 conclui-se que a derivada de  $B$  é função de  $y$  e igual a  $-f'(y + ct)/c$ . Como a derivada de  $f(y + ct)$  em ordem a  $y$  é  $f'(y + ct)$ , então  $B$  é igual a  $-f(y + ct)/c$ .

A derivada de  $g(y - ct)$  em ordem a  $t$  é  $-c g'(y - ct)$ . Substituindo na equação 12.17 conclui-se que a derivada de  $B$  em ordem a  $y$  é igual a  $g'(y - ct)/c$ . Como a derivada de  $g(y - ct)$  em ordem a  $y$  é  $g'(y - ct)$ , então  $B$  é igual a  $g(y - ct)/c$ .

7.  $d = 35.7$  cm,  $\vec{B} = -B_{\text{máx}} \cos(2\pi(4.2 \times 10^8 t + 1.40 x)) \hat{k}$  ( $t$  em segundos,  $x$  em metros)
8.  $3.23 \times 10^{-19}$  J, 2.02 eV.
9. 620 nm. Trata-se de luz visível de cor laranja-vermelha.

# A. Constantes e dados numéricos

## A.1. Prefixos SI

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
$10^{18}$	exa	E	$10^{-1}$	deci	d
$10^{15}$	peta	P	$10^{-2}$	centi	c
$10^{12}$	tera	T	$10^{-3}$	mili	m
$10^9$	giga	G	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^6$	mega	M	$10^{-9}$	nano	n
$10^3$	quilo	k	$10^{-12}$	pico	p
$10^2$	heto	h	$10^{-15}$	femto	f
$10^1$	deca	da	$10^{-18}$	ato	a

## A.2. Constantes fundamentais

Constante	Símbolo	Valor	Unidades
Constante de Coulomb	$k$	$9 \times 10^9$	m/F
Constante magnetostática	$k_m$	$10^{-7}$	N/A <sup>2</sup>
Velocidade da luz no vácuo	$c$	$2.998 \times 10^8$	m/s
Constante de Planck	$h$	$6.626 \times 10^{-34}$	J·s
Carga elementar	$e$	$1.602 \times 10^{-19}$	C
Massa do eletrão	$m_e$	$9.109 \times 10^{-31}$	kg
Massa do prótão	$m_p$	$1.673 \times 10^{-27}$	kg

### A.3. Constantes dielétricas e rigidez dielétrica

Material	Constante dielétrica, $K$	Rigidez, $E_{\text{máx}}$ (kV/mm)
Água (20 °C)	80	—
Ar seco	1.00059	3
Óleo	2.24	12
Papel	3.7	16
Acrílico	3.4	40
Vidro pirex	5.6	14
Porcelana	7	5.7
Poliéster	2.55	24
Parafina	2.1–2.5	10

### A.4. Resistividade e coeficientes de temperatura

Material	$\rho_{20}$ (n $\Omega$ ·m)	$\alpha_{20}$ (°C <sup>-1</sup> )
Prata	16	0.0038
Cobre	17	0.0039
Alumínio	28	0.0039
Tungsténio	55	0.0045
Ferro	100	0.0050
Chumbo	220	0.0043
Níquel-crómio	1000	0.0004
Grafite	35000	-0.0005

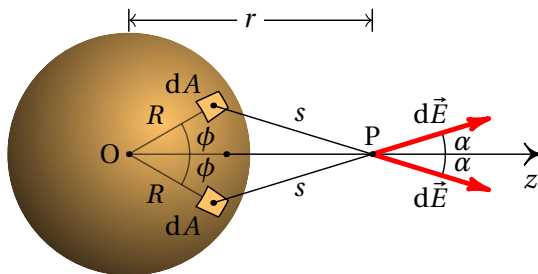
# B. Cálculo do campo elétrico

## B.1. Campo de uma esfera condutora

Numa esfera condutora isolada, a carga distribui-se uniformemente na superfície. Se o raio da esfera é  $R$  e a carga total  $Q$ , então a densidade superficial de carga é constante e igual à carga total dividida pela área da superfície da esfera

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (\text{B.1})$$

Para calcular o campo elétrico num ponto  $P$  qualquer, que está a uma distância  $r$  do centro da esfera, é conveniente definir o eixo dos  $z$  com origem  $O$  no centro da esfera e passando pelo ponto  $P$ , como se mostra na figura B.1



**Figura B.1.:** Esfera condutora com carga.

Divide-se a superfície da esfera em muitos pedaços infinitesimalmente pequenos, calcula-se o campo produzido por cada pedaço no ponto  $P$  e o campo total é a sobreposição de todos esses campos. A figura B.1 mostra duas partes infinitesimais da superfície da esfera, ambas com área  $dA$ , em dois pontos que estão à mesma distância  $s$  de  $P$ , de forma que os segmentos desde esses pontos até  $P$  estão no mesmo plano com o eixo dos  $z$ . Um desses pontos tem coordenadas polares  $(R, \theta, \phi)$ , e o outro  $(R, \theta + \pi, \phi)$ ,

onde  $\phi$  é o ângulo indicado na figura. O ângulo  $\theta$  mede-se no plano  $xy$ , perpendicular ao eixo dos  $z$

O elemento infinitesimal de área,  $dA$ , determina-se multiplicando os comprimentos dos dois arcos obtidos quando os dois ângulos,  $\phi$  e  $\theta$ , aumentam infinitesimalmente em  $d\phi$  e  $d\theta$ . O aumento do ângulo  $\phi$  produz um arco de comprimento  $R d\phi$ , e o aumento do ângulo  $\theta$  produz um arco que, projetado no plano  $xy$ , tem raio  $R \sin(\phi)$  e ângulo  $d\theta$ . Como tal, o elemento infinitesimal de área na superfície da esfera é

$$dA = R^2 \sin(\phi) d\theta d\phi \quad (\text{B.2})$$

A carga infinitesimal nessa região obtém-se multiplicando essa área pela carga superficial (equação B.1)

$$dq = \frac{Q}{4\pi} \sin(\phi) d\theta d\phi \quad (\text{B.3})$$

Essa carga infinitesimal pode ser considerada uma carga pontual e, assim sendo, o módulo do campo que ela produz no ponto P é dado pela expressão do campo para uma carga pontual (equação 1.5)

$$dE = \frac{k|Q|}{4\pi K s^2} \sin(\phi) d\theta d\phi \quad (\text{B.4})$$

onde  $s$  é a distância desde a região infinitesimal na superfície da esfera, até o ponto P. Os campos produzidos pelas duas regiões infinitesimais mostradas na figura B.1 têm o mesmo módulo  $dE$  (equação B.4) e fazem o mesmo ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo  $z$ , mas nos dois lados opostos do eixo dos  $z$ . Como tal, as componentes desses dois campos perpendiculares ao eixo dos  $z$  anulam-se, ficando apenas a soma das componentes paralelas ao eixo dos  $z$ . Conclui-se então que o campo total deverá ser na direção do eixo dos  $z$  e para o calcular basta integrar a componente  $\cos(\alpha) dE$ , do campo produzido pela região infinitesimal no  $(R, \theta, \phi)$ , em ordem a  $\theta$  e a  $\phi$ , com os limites necessários para incluir todos os pontos da superfície:

$$E = \int_{\text{sup. esfera}} \cos(\alpha) dE = \frac{k|Q|}{4\pi K} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\alpha) \sin(\phi)}{s^2} d\theta d\phi \quad (\text{B.5})$$

Como  $s$  e  $\alpha$  dependem de  $\phi$  mas não dependem de  $\theta$ , o integral em ordem a  $\theta$  é simplesmente igual a  $2\pi$

$$E = \frac{k|Q|}{2K} \int_0^\pi \frac{\cos(\alpha) \sin(\phi)}{s^2} d\phi \quad (\text{B.6})$$

Este integral é mais simples de calcular expressando os dois ângulos  $\phi$  e  $\alpha$  em função da distância  $s$ , usando o teorema do cosseno aplicado ao triângulo de lados  $r$ ,  $R$  e  $s$  na figura B.1

$$R^2 = s^2 + r^2 - 2sr \cos(\alpha) \quad (\text{B.7})$$

$$s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\phi) \quad (\text{B.8})$$

A expressão para  $\alpha$  obtém-se a partir da equação B.7

$$\cos(\alpha) = \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2sr} \quad (\text{B.9})$$

Lembre-se que  $R$  e  $r$  são constantes para todos os segmentos da superfície esférica. A expressão para  $\sin(\phi) d\phi$  obtém-se derivando a equação B.8

$$\sin(\phi) d\phi = \frac{s}{Rr} ds \quad (\text{B.10})$$

Substituindo as expressões B.9 e B.10 na equação B.6 obtém-se

$$E = \frac{k|Q|}{4KRr^2} \int_{s_{\min}}^{s_{\max}} \left( 1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2} \right) ds \quad (\text{B.11})$$

Onde  $s_{\min}$  e  $s_{\max}$  são os valores mínimo e máximo da distância  $s$ , em  $\phi = 0$  e  $\phi = \pi$ . O resultado do integral é

$$E = \frac{k|Q|}{4KRr^2} (s_{\max} - s_{\min}) \left( 1 + \frac{r^2 - R^2}{s_{\max} s_{\min}} \right) \quad (\text{B.12})$$

É necessário considerar dois casos diferentes, quando o ponto P está dentro ou fora da esfera. Quando o ponto P está dentro da esfera,  $s_{\min} = R - r$ ,  $s_{\max} = R + r$  e, como tal,  $s_{\max} s_{\min} = R^2 - r^2$  e

$$1 + \frac{r^2 - R^2}{s_{\max} s_{\min}} = 1 + \frac{d^2 - R^2}{R^2 - r^2} = 0$$

Ou seja, o campo elétrico em qualquer ponto dentro da esfera é nulo. Fora da esfera,  $s_{\min} = r - R$ ,  $s_{\max} = r + R$  e

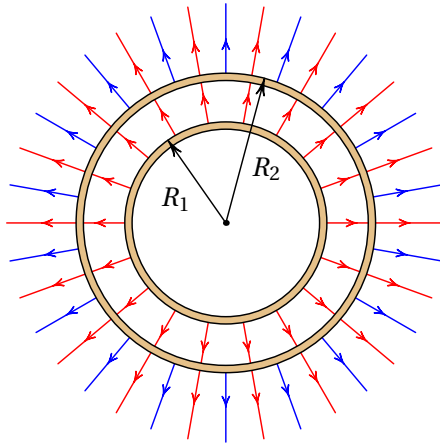
$$E = \frac{k|Q|}{4KRr^2} (2R) \left( 1 + \frac{r^2 - R^2}{r^2 - R^2} \right) = \frac{k|Q|}{Kr^2}$$

Que é o mesmo campo produzido por uma carga pontual  $Q$  colocada no centro da esfera. Resumindo, o campo da esfera condutora é na direção radial, atrativo se  $Q < 0$  ou repulsivo se  $Q > 0$  e com módulo igual a

$$E = \begin{cases} \frac{k|Q|}{K r^2} & , r > R \\ 0 & , r < R \end{cases} \quad (\text{B.13})$$

## B.2. Campo de duas esferas condutoras concêntricas

A figura B.2 mostra duas esferas condutoras concêntricas isoladas, de raios  $R_1$  e  $R_2$ . A esfera de raio  $R_1$  tem carga total  $Q_1$ , a esfera de raio  $R_2$  tem carga total  $Q_2$  e  $R_1 < R_2$ . O campo de cada uma das esferas é dado pela expressão obtida na secção anterior e o campo total é a soma desses dois campos.



**Figura B.2.:** Esferas condutoras concêntricas com carga.

No interior da esfera menor, o campo é nulo porque todos os pontos nessa região encontram-se no interior das duas esferas e as esferas condutoras não produzem campo no seu interior. Nos pontos que estão entre as duas esferas, o campo é igual ao campo da esfera menor, porque esses pontos estão no interior da esfera maior, onde esta não produz nenhum campo. Nos pontos fora das duas esferas, o campo total é igual à soma dos campos das duas esferas, ou à sua diferença, segundo  $Q_1$  e  $Q_2$  tenham o mesmo sinal ou sinais opostos.



A expressão para o módulo do campo total a uma distância  $r$  do centro das esferas é então

$$E = \begin{cases} \frac{k|Q_1 + Q_2|}{K r^2} & , r > R_2 \\ \frac{k|Q_1|}{K r^2} & , R_1 < r < R_2 \\ 0 & , r < R_1 \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

O campo é sempre na direção radial. Entre as duas esferas, o campo aponta no sentido radial se  $Q_1$  é positiva, ou no sentido oposto se  $Q_1$  é negativa. Fora das duas esferas, o campo é repulsivo se  $Q_1 + Q_2$  é positiva, ou atrativo se  $Q_1 + Q_2$  é negativa.

As expressões obtidas neste apêndice para o campo da esfera condutora e das duas esferas concêntricas podem ser obtidas mais facilmente usando a lei de Gauss, como se explica no capítulo 6. No entanto, o método usado neste apêndice é mais geral e permite obter campos de distribuições de carga mais complicadas. O problema é que os integrais obtidos podem não ter solução analítica, tendo de ser calculados de forma numérica.



# C. Transformada de Laplace

## C.1. Definição

Neste apêndice apresenta-se apenas um sumário sobre a transformada de Laplace. Um estudo mais completo do tema encontra-se nos livros de matemática para engenharia ou nos livros sobre equações diferenciais, por exemplo: *An Introduction to Differential Equations and their Applications* (Farlow, 1994).

Define-se a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  como o integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (\text{C.1})$$

Note-se que o resultado desse integral já não depende de  $t$  mas sim do parâmetro  $s$ , que se admite ser um número real.

Neste livro, para representar a transformada de Laplace, utiliza-se um til por cima da letra que representa a função. Por exemplo,  $\tilde{g}(s)$  é a função obtida por aplicação da transformada de Laplace à função  $g(t)$ .

A variável  $s$  tem unidades de inverso do tempo, ou seja unidades de frequência, já que o expoente  $st$  é adimensional. Comot al,  $g(t)$  e  $\tilde{g}(s)$  costumam ser designadas de representações da função no **domínio do tempo** e no **domínio da frequência**, respetivamente.

Tal como no caso da derivação, uma forma rápida de calcular a transformada de uma função é por meio de algumas regras simples que se vão obter nas secções seguintes. A transformada inversa de uma função  $\tilde{f}(s)$  é a função  $f(t)$  cuja transformada de Laplace é igual a  $\tilde{f}(s)$ .

Para que a transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  exista, é necessário que  $f(t)$  observe as duas propriedades seguintes:

1. A função tem de ser **parcelarmente contínua**, isto é,  $f(t)$  pode ter alguns pontos isolados onde é descontínua, mas é necessariamente con-

tínua em cada intervalo entre dois pontos de descontinuidade.

2. A função  $f(t)$  deve ser de **ordem exponencial**: existe um número real  $a$  tal que o limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t)| e^{-at} \quad (\text{C.2})$$

existe. O domínio da respetiva transformada de Laplace  $\tilde{f}(s)$  é  $s > a$ .

Note-se que no cálculo da transformada de Laplace não interessa a forma como a função seja definida em  $t \leq 0$ . Isto prende-se com o intervalo de integração usado na definição da transformada. É possível usar outros intervalos diferentes, mas o intervalo  $t > 0$  é particularmente útil nos problemas físicos estudados neste livro, em que unicamente interessa a evolução de um sistema físico a partir de um instante inicial  $t = 0$ .

## C.2. Propriedades

### C.2.1. Linearidade

Para quaisquer duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  e duas constantes  $a$  e  $b$ , verifica-se:

$$\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a \tilde{f}(s) + b \tilde{g}(s) \quad (\text{C.3})$$

e a transformada inversa também é um operador linear:

$$\mathcal{L}^{-1}\{a \tilde{f}(s) + b \tilde{g}(s)\} = a f(t) + b g(t) \quad (\text{C.4})$$

### C.2.2. Derivada da transformada

A derivada da transformada de  $f(t)$ , em ordem à frequência  $s$  é,

$$\frac{d\tilde{f}}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\} \quad (\text{C.5})$$

e derivando sucessivamente  $n$  vezes conclui-se que

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n \tilde{f}}{ds^n} \quad (\text{C.6})$$

### C.2.3. Transformada da derivada

A transformada da derivada de  $f(t)$  em ordem ao tempo está relacionada com a própria transformada de  $f(t)$ . Integrando por partes o integral que define a transformada, obtém-se:

$$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^{\infty} f' e^{-st} dt = f e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f e^{-st} dt \quad (\text{C.7})$$

o último integral é a transformada de  $f(t)$  e, no primeiro termo, o limite de  $f e^{-st}$  quando  $t$  tende para infinito é zero, já que  $f(t)$  é uma função de ordem exponencial. Como tal, obtém-se a seguinte relação:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f'\} = s \tilde{f} - f(0)} \quad (\text{C.8})$$

A transformada de derivadas de ordem superior calcula-se aplicando a mesma propriedade várias vezes sucessivas; por exemplo, a transformada da segunda derivada é igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''\} &= s \mathcal{L}\{f'\} - f'(0) = s (s \tilde{f} - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 \tilde{f} - s f(0) - f'(0) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

### C.2.4. Deslocamento na frequência

A transformada do produto entre uma função exponencial e outra função qualquer é:

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} f e^{(a-s)t} dt = \tilde{f}(s-a)} \quad (\text{C.10})$$

Nomeadamente, quando se multiplica uma função por  $e^{at}$ , no domínio do tempo, a sua representação no domínio das frequências desloca-se  $a$  unidades no sentido positivo do eixo da frequência  $s$ .

### C.2.5. Deslocamento no tempo

Define-se a função **degrau unitário**, ou função de Heaviside, como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & , t \leq a \\ 1 & , t > a \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Como tal, o produto,

$$u(t-a)f(t-a) \tag{C.12}$$

é a função  $f(t)$  deslocada uma distância  $a$  no sentido positivo do eixo do tempo  $t$ , sendo nula para  $t < a$ . Calculando a transformada de Laplace desse produto obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(r)e^{-s(r+a)} dr = e^{-as} \int_0^\infty f(r)e^{-sr} dr \end{aligned}$$

e conclui-se que:

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}\tilde{f}(s)} \tag{C.13}$$

Isto é, quando a função é deslocada  $a$  unidades no sentido positivo do tempo  $t$ , a sua representação no domínio da frequência fica multiplicada por  $e^{-as}$ .

Note-se que no caso particular  $a = 0$ , esta propriedade implica que a transformada de  $u(t)f(t)$  é idêntica à transformada de  $f(t)$ ; o produto  $u(t)f(t)$  simplesmente torna o resultado nulo para  $t \leq 0$  deixando a função igual para  $t > 0$  e como já foi dito, no cálculo da transformada de Laplace apenas interessa a definição da função em  $t > 0$ .

Esta propriedade é muito útil para calcular as transformadas de Laplace de funções com descontinuidades. Uma outra forma equivalente é

$$\boxed{\mathcal{L}\{u(t-a)f(t)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}} \tag{C.14}$$

## C.3. Transformadas de funções importantes

### C.3.1. Polinômios

A transformada de  $t^p$ , onde  $p$  é qualquer número real, pode ser simplificada usando a mudança de variável  $u = s t$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^p\} &= \int_0^{\infty} t^p e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^p e^{-u} \frac{du}{s} \\ &= s^{-(p+1)} \int_0^{\infty} u^p e^{-u} du\end{aligned}\quad (\text{C.15})$$

e este último integral é a **função gama** de  $p + 1$ ; como tal, a transformada de  $t^p$  é

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \quad (\text{C.16})$$

em particular, quando  $p$  é um número inteiro positivo  $n$ , a função gama de  $n + 1$  é igual ao fatorial de  $n$  e obtém-se:

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{C.17})$$

e para  $n = 0$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad (\text{C.18})$$

### C.3.2. Funções exponenciais

Aplicando a propriedade de deslocamento na frequência  $s$ , com  $f(t) = 1$  e tendo em conta que  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ , obtém-se a transformada da função exponencial,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad (\text{C.19})$$

e como a derivada de  $1/(s-a)$  é  $-1/(s-a)^2$ , usando a propriedade da derivada da transformada conclui-se:

$$\mathcal{L}\{t e^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2} \quad (\text{C.20})$$

O mesmo resultado pode ser obtido a partir da transformada de  $t$  e usando a propriedade de deslocamento em  $s$ .

### C.3.3. Funções sinusoidais

Para calcular a transformada de Laplace das funções sinusoidais é conveniente usar a fórmula de Euler:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}(f_{\text{máx}} e^{i(\omega t + \varphi)}) \\ &= \text{Re}(f_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t}) \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

onde  $\text{Re}\{z\}$  é a função que dá a parte real do número complexo  $z$ . Com tal, a transformada de Laplace da função sinusoidal  $f(t)$  é:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s) &= \mathcal{L}\{\text{Re}(f_{\text{máx}} e^{i\varphi} e^{i\omega t})\} \\ &= \text{Re}(f_{\text{máx}} e^{i\varphi} \mathcal{L}\{e^{i\omega t}\}) = \text{Re}\left(\frac{f_{\text{máx}} e^{i\varphi}}{s - i\omega}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Por simplicidade, costuma-se omitir a função  $\text{Re}$ , ficando implícito que só interessa a parte real. Definindo o **fasor**  $\mathbf{F}$  da função sinusoidal  $f(t)$  como o produto  $f_{\text{máx}} e^{i\varphi}$ , a transformada de Laplace da função sinusoidal é então:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)\} = \frac{\mathbf{F}}{s - i\omega}} \quad (\text{C.23})$$

onde  $\mathbf{F}$  é o respetivo fasor. Como  $\sin x = \text{Re}(-ie^{ix})$ , conclui-se também que:

$$\boxed{\mathcal{L}\{f_{\text{máx}} \sin(\omega t + \varphi)\} = \frac{-i\mathbf{F}}{s - i\omega}} \quad (\text{C.24})$$

### C.3.4. Função impulso unitário

A função **impulso unitário**, ou função delta de Dirac,  $\delta(t - a)$ , é a derivada da função degrau unitário  $u(t - a)$ . Note-se que não é realmente uma função, porque em  $t = a$  a função  $u(t - a)$  é descontínua e a sua derivada não existe.

Pode interpretar-se  $\delta(t - a)$  usando uma função degrau unitário contínua, que não muda abruptamente de 0 para 1 em  $t = a$ , mas sim aumentando



gradualmente de 0 para 1 num pequeno intervalo que inclui  $t = a$ ; como tal,  $\delta(t - a)$  é nula excepto nesse pequeno intervalo em que o degrau unitário passa de 0 para 1, e a área total sob  $\delta(t - a)$  deve ser igual a 1. No limite em que o comprimento desse intervalo se aproxima de zero, o valor de  $\delta(t - a)$  aproxima-se de infinito, em  $t = a$ , e de zero em qualquer outro valor de  $t \neq a$ .

Uma função  $f(t)$ , contínua em  $a$ , verifica a propriedade seguinte:

$$\int_{-\infty}^t f(z) \delta(z - a) dz = \begin{cases} 0 & , t \leq a \\ f(a) & , t > a \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

A transformada da função impulso unitário é a transformada da derivada da função degrau unitário. Aplicando a propriedade da transformada da derivada, obtém-se:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}} \quad (\text{C.26})$$

As propriedades da transformada de Laplace e as transformadas das funções calculadas nas secções anteriores encontram-se resumidas na tabela C.1.

**Tabela C.1.:** Propriedades da transformada de Laplace.

Função	Transformada
$f(t)$	$\tilde{f}(s)$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{at} f(t)$	$\tilde{f}(s-a)$
$f'(t)$	$s\tilde{f}(s) - f(0)$
$\int_0^t f(z) dz$	$\frac{1}{s}\tilde{f}(s)$
$t f(t)$	$-\frac{d\tilde{f}}{ds}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \tilde{f}(r) dr$
$u(t-a) f(t-a)$	$e^{-as} \tilde{f}(s)$
$u(t-a) f(t)$	$e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$
$\delta(t-a)$	$e^{-as}$
$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$a\tilde{f}(as)$
$f_{\text{máx}} \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{\mathbf{F}}{s-i\omega}$
$f_{\text{máx}} \sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{-i\mathbf{F}}{s-i\omega}$

## D. Créditos fotográficos

A maior parte das fotografias e figuras neste manual são originais e são distribuídas com a *Licença Creative Commons Atribuição-Partilha* (versão 3.0). As restantes figuras têm todas licenças livres. A principal fonte dessas figuras foi o arquivo da Wikimedia Commons (<http://commons.wikimedia.org>). A lista de autores e licenças é:

- Figura 1.1. Autor: DJIndica (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Figura 1.2. Autor: DJIndica (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Figura de abertura do capítulo 2. Autor: Dr. Mauel (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Figura 2.1. Autor: Dr. Mauel (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Figura 2.2. Autor: GuidoB (Wikimedia Commons), GFDL.
- Figura 2.8. Autor: Alby (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Figura de abertura do capítulo 3. Autor: Duesentrieb (Wikimedia Commons), GFDL.
- Figura 3.3. Autor: Tumi-1983 (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Figura 3.7. Autor: Chtaube commonswiki. Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike.
- Figura 3.12. Autor: Peter Nussbaumer. Licença: GFDL.
- Figura 3.13. Autor: Yosemite (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Figura 4.4. Autor: Bert Hickman. Licença: Creative Commons Attribution.
- Figura 4.5. Autor: Mircea Madau. Domínio público.
- Figura 4.7. Autor: Maxwell Technologies. Licença: GFDL.

- Figura 4.8. Autor: Gil Monteiro. Reproduzida com autorização do autor.
- Figuras de abertura do capítulo 5. Autores: LukeSurl (Wikimedia Commons) e Alexander Jones. Licenças: GFDL e domínio público.
- Figura de abertura do capítulo 7. Autor: Arian Kriesch Akriesch. Licença: Creative Commons.
- Figura 8.4. Autor: Wapcaplet (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Figura de abertura do capítulo 9. Autor: Willtron (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Figura 9.10. Autor: Inkwina (Wikimedia Commons). Domínio público.
- Figura 9.11. Autor: Anton (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Figura de abertura do capítulo 10. Autor: glacial23 (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Figura de abertura do capítulo 11. Autor: Nikola Tesla. Domínio público.
- Figura de abertura do capítulo 12. Autor: Afrank99 (Wikimedia Commons). Licença: Creative Commons.
- Figura 12.8. Autor: Inductiveload (Wikimedia Commons). Licença: GFDL.
- Figura 12.10. Autor: KES47. Domínio público.
- Figura 12.12. Autor: Zátonyi Sándor. Licença: Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0.

# Bibliografia

- Adams, S. & Allday, J. (2000). *Advanced Physics*. Oxford, UK: Oxford University Press.
- Alonso, M. & Finn, E. J. (1999). *Física*. Reading, MA, USA: Addison-Wesley,
- Bessonov, L. (1977). *Electricidade Aplicada para Engenheiros*. Porto, Portugal: Lopes da Silva Editora.
- Blinchikoff, H. J. & Zverev, A. I. (2001). *Filtering in the Time and Frequency Domains*. Atlanta, GA, USA: Noble Publishing.
- Brito, L., Fiolhais, M. & Providência C. (1999). *Campo Electromagnético*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.
- Edwards, C. H. & Penney, D. E (2004). *Differential Equations. Computing and Modeling (3ª edição)*. New Jersey, USA: Pearson Education, Inc.
- Farlow, S. J (1994). *An Introduction to Differential Equations and their Applications*. Singapore: McGraw-Hill.
- Feynman, P. R., Leighton, R. B. & Sands M. (1964). *The Feynman Lectures on Physics, vol. II*, Reading, MA, USA: Addison-Wesley.
- Gerthsen, C., Kneser & Vogel, H. (1998). *Física (2ª edição)*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Hecht, E. (1991). *Óptica*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.
- (1994). *Physics*. Pacific Grove, CA, USA: Brooks/Cole.
- Henriques, A. B. & Romão, J. C. (2006). *Eletromagnetismo*. Lisboa, Portugal: IST Press.
- Lévy-Leblond, J. M. & Butoli A. (1991). *A Electricidade e o Magnetismo em Perguntas*. Lisboa, Portugal: Gradiva.
- Maciel, N., Villate, J. E., Azevedo, C. & Barbosa, F. M. (2009). *Eu e a Física 12*. Porto, Portugal: Porto Editora.
- Mendiratta, Sushil K. (1984). *Introdução ao Electromagnetismo*. Lisboa, Portugal: Fundação Calouste Gulbenkian.

- Purcell, E. M. (1962). *Electricity and Magnetism, Berkeley Physics Course, vol. 2*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Scherz, P. & Monk, S. (2013). *Practical Electronics for Inventors (3ª edição)*. New York, NY, USA: McGraw-Hill.
- Tipler, P. A. & Mosca, G. (2004). *Physics (5ª edição)*. New York, NY, USA: W. H. Freeman and Co.
- Villate, J. E. (1999). *Electromagnetismo*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.
- (2019). *Dinâmica e Sistemas Dinâmicos (5ª edição)*. Porto, Portugal: Edição do autor. Disponível em <http://def.fe.up.pt/dinamica>
- Walker, J. (1975). *O Grande Circo da Física*. Lisboa, Portugal: Gradiva.

# Índice

## A

alternador, 178  
Ampère, André-Marie, 159  
amperímetro, 40  
ampere (unidade), 36  
amplitude, 222, 260  
ânodo, 28, 50  
armadilha de iões, 129  
armadura, 70  
atenuador, 214

## B

balastro, 183  
bateria, 47  
binário magnético, 152  
Biot, Jean-Baptiste, 159  
buraco, 32

## C

cátodo, 27, 50  
código de cores, 50  
cabs (Maxima), 233  
campo  
    conservativo, 22  
    elétrico, 10  
    na atmosfera, 18  
capacidade, 68  
caraterísticas, 257  
carg (Maxima), 233  
carga, 4

conservação, 7  
    elementar, 4  
    induzida, 67  
    linear, 123  
    máxima, 31  
    pontual, 8  
    quantização, 7  
    superficial, 123  
centro, 150  
circuito  
    impresso, 51, 87  
    LC, 188, 220  
    RC, 192  
    RLC, 194  
coeficiente  
    de temperatura, 53  
comprimento de onda, 260  
condensador, 67  
    em paralelo, 81  
    em série, 80  
    plano, 74  
    variável, 76  
condutor, 12  
conservação  
    da energia mecânica, 23  
constante  
    de Coulomb, 8  
    de tempo, 193  
    dielétrica, 8, 70  
    magnética, 159

- corrente, 26  
  alternada, 221  
  de malha, 91  
  eficaz, 236  
  estacionária, 89  
  induzida, 55  
  intensidade, 35  
  transitória, 227
- Coulomb, Charles, 8  
coulomb (unidade), 4  
Cramer, Gabriel, 93  
curto-circuito, 48  
curves (Maxima), 134
- D**  
Díodo Emissor de Luz, 268  
derivada direccional, 130  
detetor  
  de incêndios, 35  
diamagnetismo, 150  
dielétrico, 71  
dipolo elétrico, 13, 113  
Dirac, Paul Adrien Maurice, 288  
dispersão, 263  
divergência, 148
- E**  
Edison, Thomas Alva, 219  
efeito  
  fotoelétrico, 267  
  Joule, 37  
  Meissner, 56  
elétrodo, 27  
eletrólito, 27  
elétrão, 3  
  de condução, 12  
elétrão-volt, 137  
eletrização  
  por fricção, 5  
  por indução, 14
- energia  
  cinética, 22  
  potencial eletrostática, 23
- equação  
  de onda, 257
- equipotenciais, 133  
espaço de fase, 22  
espira, 152  
Euler, Leonhard, 223, 288  
expand (Maxima), 204
- F**  
f.e.m., 30  
  autoinduzida, 180  
  induzida, 171  
Faraday, Michael, 68, 174  
farad (unidade), 68  
fase, 222  
  inicial, 260  
fasor, 223, 288  
fator de potência, 235  
ferromagnetismo, 150  
filtro  
  de velocidades, 158  
  passa-alto, 210  
  passa-baixo, 215  
  passa-banda, 239  
  rejeita-banda, 244  
fluxo  
  elétrico, 115  
  magnético, 174  
força  
  elétrica, 3  
  magnética, 148  
fotão, 267  
Franklin, Benjamin, 7  
frequência, 177, 222, 260  
  angular, 221



- de ressonância, 240
- de corte, 237
- função
  - alternada, 221
  - degrau unitário, 201, 285
  - delta de Dirac, 288
  - de Heaviside, 285
  - de transferência, 209
  - exponencial, 287
  - gama, 287
  - impulso unitário, 288
  - resposta em frequência, 237
  - sinusoidal, 222, 288
- G**
- Galvani, Luigi, 26
- ganho, 239
- garrafa de Leiden, 67
- Gauss, Karl F., 121
- gerador, 47
  - de Faraday, 172
  - de tensão alternada, 177
  - de Wimshurst, 1
- Gilbert, William, 148
- H**
- Heaviside, Oliver, 285
- Henry, Joseph, 179
- henry (unidade), 179
- Hertz, Heinrich Rudolph, 196, 272
- hertz (unidade), 196, 260
- Huygens, Christiaan, 265
- I**
- ião, 5
- ilt (Maxima), 204
- íman, 55
- impedância
  - complexa, 228
  - generalizada, 199
- impulso unitário, 208
- indução
  - eletromagnética, 169
  - eletrostática, 1
- indutância, 180
  - mútua, 179
- indutor, 180
- inversor, 214
- isolador, 12
- J**
- Joule, James, 37
- joule (unidade), 23
- K**
- Kamerlingh Onnes, Heike, 55
- Kirchhoff, Gustav Robert, 89
- L**
- lâmpada
  - economizadora, 184
  - fluorescente, 34
- Laplace, Pierre Simon, 283
- laplace (Maxima), 204
- LCD, 264
- LED, 268
- lei
  - das malhas, 89
  - de Ampère, 159
  - de Biot-Savart, 159
  - de Coulomb, 8
  - de Faraday, 174
  - de Gauss, 121
  - de Kirchhoff, 89
  - de Lenz, 174
  - de Ohm, 46, 195
  - de Ohm generalizada, 199
  - dos nós, 89
- Lenz, Heinrich, 174

- levitação
  - magnética, 55
- Lichtenberg, Georg Christoph, 71
- linhas de campo, 10
- Liquid Crystal Display, 264
- luz
  - solar, 263
- M**
- maglev, 56
- malha, 89
- massa, 6
- matriz
  - jacobiana, 149
- Maxwell, James Clerk, 250
- Meissner, Walther, 56
- mercúrio
  - resistividade, 55
- momento
  - magnético, 152
- movimento
  - helicoidal, 157
- multímetro, 40
- N**
- nó, 89, 149
- neutrão, 3
- Newton, Isaac, 7, 265
- nuvem eletrônica, 3
- O**
- Ohm, Georg, 46
- ohmico (material), 46
- ohm (unidade), 47
- onda
  - eletromagnética, 258
  - harmônica, 262
  - plana, 259
  - polarizada, 259
- oscilador
  - harmônico, 221
- P**
- pára-raios, 140
- paramagnetismo, 150
- partfrac (Maxima), 206
- Paul, Wolfgang, 129
- período, 222, 260
- permeabilidade magnética, 159
- pilha, 27, 47
  - recarregável, 30
- pilhas
  - em série, 30
- Planck, Max, 267
- plotdf (Maxima), 111
- ploteq (Maxima), 134
- polarização, 13, 264
- polinômio característico, 209
- ponto de sela, 136, 150
- potência
  - instantânea, 235
  - média, 236
- potencial
  - eletrostático, 23
- protão, 3
- R**
- raios
  - X, 42
- reatância, 228
  - capacitiva, 228
  - indutiva, 228
- recetor, 49
- regra da mão direita
  - campo, 159
  - campo induzido, 253
  - corrente, 159
  - força, 151
  - momento, 153

velocidade da onda, 259  
versor normal, 174  
regra de Cramer, 93  
resistência, 46, 228  
em paralelo, 58  
em série, 57  
equivalente, 57  
interna, 48  
resistividade, 53  
resposta  
transitória, 80, 97, 181, 201  
ressonância, 240  
rigidez dielétrica, 71

**S**

série  
galvânica, 28  
triboelétrica, 6  
Savart, Felix, 159  
semicondutor, 32  
tipo N, 32  
tipo P, 32  
sinal, 192  
de entrada, 194  
de saída, 194  
supercondutividade, 55  
a alta temperatura, 56

**T**

temperatura  
crítica, 55  
tensão  
alternada, 177, 226  
eficaz, 236  
terra, 70  
Tesla, Nikola, 183, 219  
tesla (unidade), 152  
trabalho, 29  
transformada de Laplace, 283

triângulo de impedância, 228  
tubo de fluxo, 116

**U**

ultracondensador, 77

**V**

van Musschenbroek, Pieter, 67  
voltímetro, 40  
Volta, Alessandro, 21  
volt (unidade), 23

**W**

Watt, James, 38  
watt (unidade), 38  
Westinghouse, George, 219  
Wimshurst, James, 1





Livro de texto destinado a estudantes de Ciências e Engenharia. Introdução ao eletromagnetismo com ênfase nos circuitos e sistemas e sinais. O sistema de álgebra computacional Maxima é usado para visualizar campos e calcular transformadas de Laplace.

Este livro pode ser consultado e descarregado livremente no sítio:

<http://def.fe.up.pt/eletricidade>

© 2019. Jaime E. Villate  
Creative Commons Attribution Sharealike

ISBN 978-972-99396-6-2



9 789729 939662