

**Resolução de Exame de Matemática –
12ª. Classe
Ano: 2017/ 1ª Época**



Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2017/ 1ª Época**Resoluções****❖ Conceitos básicos****Operações sobre proposições lógicas**

Na lógica matemática estuda-se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição**Conjunção de proposições****Disjunção de proposições****Implicação material****Equivalência material****Expressão algébrica**

Uma expressão algébrica diz-se **irracional** quando a variável aparece sob forma de um radicando.

Repare que a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a variável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponencial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base a , sendo a positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações lineares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ chama-se}$$

determinante proveniente de uma matriz de 3 por 3

1. Resposta:

De acordo com as primeiras leis de De Morgan: A proposição equivalente a $\sim (p \vee q)$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$

2. Resposta:

Sendo p : *O sol brilha* e q : *Não chove*, a tradução simbólica de “Se o sol brilha então não chove” é: $p \Rightarrow q$

3. Resposta:

A expressão $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt[3]{1-x}$ é algébrica irracional, o seu domínio é:

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{R} : 1-x \geq 0 \wedge x^2-1 > 0\} \Rightarrow x^2-1 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x-1 > 0 \wedge x+1 > 0 \vee x-1 < 0 \wedge x+1 < 0 \Leftrightarrow x > 1 \wedge x > -1 \vee x < 1 \wedge x < -1 \\ D &= \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \end{aligned}$$

4. Resposta:

Resolvendo a equação $5^x + 5^{x+1} = 30$, teremos:

$$\begin{aligned} 5^x + 5^{x+1} = 30 &\Leftrightarrow 5^x + 5^x \cdot 5 = 30 \Leftrightarrow (1+5) \cdot 5^x = 30 \Leftrightarrow 6 \cdot 5^x = 30 \Leftrightarrow 5^x = \frac{30}{6} \Leftrightarrow \\ 5^x &= 5 \Leftrightarrow 5^x = 5^1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

5. Resposta:

A equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é biquadrática, vamos resolvê-la e depois somar as suas raízes:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 &\Leftrightarrow x^2 \cdot x^2 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \vee x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 2 \vee x = \pm 1 \\ \{-2, -1, 1, 2\} &\Rightarrow S = -2 + (-1) + 1 + 2 = -3 + 3 = 0 \end{aligned}$$

6. Resposta:

A equação $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ é cúbica, vamos resolvê-la e depois multiplicar as suas raízes entre si:

Vamos procurar uma das suas raízes por método tentativa, por exemplo o número 1, anula o membro à esquerda logo é uma das raízes ($2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$), isso significa que o polinómio $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ é divisível por $x - 1$, vamos explorar a regra de Briot - Ruffin:

	<u>2</u>	<u>-1</u>	<u>-2</u>	<u>1</u>
<u>1</u>				
	2	1	-1	0

O resultado da divisão entre $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ por $x - 1$ é $2x^2 + x - 1$, a equação dada pode ser escrita da seguinte forma: $(2x^2 + x - 1)(x - 1) = 0$ vamos resolver essa equação aplicando a lei de anulamento de produto, assim:



Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama-se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio número se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

Exemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 120$$

Permutação

$$(2x^2 + x - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + x - 1) = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)(x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\vee x + 1 = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \vee x = -1 \vee x = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \vee x_2 = -1 \vee x_3 = 1 \Rightarrow P =$$

$$P = \frac{1}{2} \times (-1) \times 1 = -\frac{1}{2}$$

7. Resposta:

Vamos resolver a inequação $\frac{4x-12}{x-5} < 0$ por auxílio de uma tabela de variação de sinal.

$$\text{Seja } 4x - 12 = 0 \wedge x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \wedge x = 5$$

x	$]-\infty; 3[$	3	$]3; 5[$	5	$]5; +\infty[$
$4x - 12$	—	0	+	8	+
$x - 5$	—	-2	—	0	+
$\frac{4x-12}{x-5}$	+	0	—	ND	+

A fracção $\frac{4x-12}{x-5}$ é menor que zero se e somente se $x \in]3; 5[$,

$$\text{logo } \frac{4x-12}{x-5} < 0 \text{ se } x \in]3; 5[$$

8. Resposta:

$$\text{Vamos calcular o valor de seguinte determinante: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1 \times 1 + 1 \times 0 \times 1 + 1 \times 1 \times 1) - (1 \times 1 \times 0 + 1 \times 0 \times 0 + 1 \times 1 \times 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 0 + 1) - (0 + 0 + 1) = 2 - 1 = 1$$

9. Resposta:

$$\text{Resolvendo a equação } 2\sin\left(\frac{x}{3}\right) = 1, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$2\sin\left(\frac{x}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

10. Resposta:

O valor numérico da expressão $\sin(240^\circ) + 2tg(315^\circ)$, segue:

$$\sin(240^\circ) + 2tg(315^\circ) = -\sin(240^\circ - 180^\circ) + 2(-tg(360^\circ - 315^\circ))$$

A permutação de n elementos tomados p a p , é dado por:

$$P_n = n! \text{ ou}$$

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$$

$$n \equiv p$$

Exemplo:

$$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$p_4 = 24$$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!}, n > p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \dots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elementares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

$$\begin{aligned} &= -\sin(60^\circ) + 2(-\tan(45^\circ)) = -\sin(60^\circ) - 2\tan(45^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2} = \\ &= \frac{-4 - \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

11. Resposta:

A designação correcta de conjunto das abcissas dos pontos cuja distância a -2 é inferior a

$$\frac{3}{2}$$

$$|x - (-2)| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow |x + 2| < \frac{3}{2}$$

12. Resposta:

Vamos resolver a equação modular: $|x - 1| = -4$,

Pela definição do módulo de um número real, a equação $|x - 1| = -4$ é impossível em $\mathbb{R}$.

13. Resposta:

Simplificando a expressão $\frac{p_{n+1} + n!}{p_n}$, teremos:

$$\frac{p_{n+1} + n!}{p_n} = \frac{(n+1)! + n!}{n!} = \frac{(n+1) \times n! + n!}{n!} = \frac{n! \times ((n+1) + 1)}{n!} = n + 1 + 1 = n + 2$$

14. Resposta:

Vamos desenvolver a expressão $(x+k)^8$, assim:

$$(x+k)^8 = C_0^8 x^8 k^0 + C_1^8 x^7 k^1 + C_2^8 x^6 k^2 + C_3^8 x^5 k^3 + C_4^8 x^4 k^4 + C_5^8 x^3 k^5 + C_6^8 x^2 k^6 +$$

$$\text{Repare que o sexto termo é } C_5^8 x^3 k^5$$

15. Resposta:

O número total de comissões formado por homens e mulheres, sendo cada comissão tem 2 elementos é dado por C_2^5 e o número total de comissões formado por apenas mulheres é dado por C_2^3 , foi dito no problema que em cada comissão deve ter pelo menos um homem, isto significa as comissões deve ter um homem ou dois, neste caso temos que retirar a possibilidade de ter comissões formada por duas mulheres, assim:

$$n(CP) = C_2^5 - C_2^3 \Leftrightarrow nCP = \frac{5!}{(5-2)!2!} - \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} - \frac{3 \times 2!}{1! \times 2!} = 10 - 3 = 7$$

o número de comissões possíveis a criar são 7.

16. Resposta:

Vamos representar o espaço amostral deste fenómeno aleatório:

$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$, o evento cair com faces diferentes tem seguinte elementos: $A = \{CK, KC \Rightarrow n(\Omega) = 4 \wedge n(A) = 2\}$, os eventos elementares do espaço amostral Ω são equiprováveis e mutuamente excludentes dois a dois pois é um espaço amostral enumerável e finito, portanto podemos aplicar a definição de Laplace para resolver este problema, assim:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$



$$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)}, n(CF) \geq n(CP)$$

Límite de uma sucessão**Sucessão convergente**

Diz-se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve-se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem p a partir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna-se tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (P.A)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r , tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \times r}{2} \times n$$

Progressão geométrica (P.G)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão geométrica (P.G) se existe um número real r , tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$$k \times \infty = \infty$$

$$\infty^k = \infty$$

17. Resposta:

Vamos determinar o termo geral da sucessão 10; 7; 4; 1; -2;...

Seja: $a_1 = 10$; $a_2 = 7$; $a_3 = 4$; $a_4 = 1$; $a_5 = -2$;

$$a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Rightarrow -2 - 1 = 1 - 4 = 4 - 7 = 7 - 10 = -3$$

A diferença entre $a_{n+1} \wedge a_n$ é constante, logo trata-se de uma progressão aritmética (P.A)

$$d = a_{n+1} - a_n = -3 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$$

$$a_n = 10 + (n-1) \times (-3) \Leftrightarrow a_n = 10 - 3n + 3 \Leftrightarrow a_n = 13 - 3n$$

18. Resposta:

Considerando a sucessão de termo geral $u_n = 3n + 7$

A ordem do termo 52 segue:

$$u_n = 3n + 7, n = ? \Rightarrow u_n = 52 \Leftrightarrow 52 = 3n + 7 \Leftrightarrow$$

$$3n + 7 = 52 \Leftrightarrow 3n = 52 - 7 \Leftrightarrow 3n = 45 \Leftrightarrow n = \frac{45}{3}$$

$$\Rightarrow n = 15$$

19. Resposta:

Considerando a sucessão $a_n = \frac{n}{n+1}$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{n^2 + n + 2n + 2} = \frac{4n+1}{n^2 + 3n + 2} \Rightarrow \frac{4n+1}{n^2 + 3n + 2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo a sucessão é monótona crescente.

20. Resposta:

Dados:

$a_1 = 7 \wedge a_5 = -9$ e a sucessão tem 5 termos, $a_1, a_2, a_3, a_4 \wedge a_5$ pois é uma PA

Podemos fazer o seguinte $a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Leftrightarrow$

$$-9 - (a_1 + (4-1)d) = a_1 + (2-1)d - 7 \Leftrightarrow -9 - (7 + 3d) = 7 + d - 7 \Leftrightarrow -16 - 3d =$$

$$-3d - d = 16 \Leftrightarrow -4d = 16 \Leftrightarrow d = -\frac{16}{4} \Rightarrow d = -4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 7 + (n-1)(-4) \Leftrightarrow a_n = 7 - 4n + 4 \Leftrightarrow a_n = 11 - 4n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \Rightarrow S_5 = \frac{7 + (-9)}{2} \times 5 = \frac{7-9}{2} \times 5 = -1 \times 5 = -5$$

Aqui, o leitor não precisa sofrer por seguir todos estes passos basta apenas aplicar a fórmula da soma de n termos de uma PA

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \Rightarrow S_n = \frac{7 + a_5}{2} \times 5 \Leftrightarrow S_5 = \frac{7 + (-9)}{2} \times 5 = \frac{7-9}{2} \times 5 = -1 \times 5 = -5$$

21. Resposta:

Dada a sucessão de termo geral $a_n = 2^{n-2}$, precisa-se encontrar a soma dos 5 primeiros termos:

$$a_n = 2^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 2^{n-1-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{2^{n-1}}{2} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1}, \text{ Entende-se que}$$



$$\begin{aligned}\infty \times \infty &= \infty \\ k + \infty &= \infty \\ k - \infty &= -\infty \\ \frac{\infty}{k} &= \infty \\ \frac{k}{\infty} &= 0 \\ \frac{\infty}{\infty} &= 0\end{aligned}$$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função $f(x)$ definida no domínio D_f , a , L são números reais. Diz-se se, L é o limite da função $f(x)$ quando x tende para a (a não necessariamente pertencente ao domínio de $f(x)$) sse:

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

• Limites Neperianos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

• Limites trigonométricos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variável real é contínua num ponto de abscissa $x = a$ sse,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Se existir a diferença entre os membros dessa igualdade, a função é descontínua no ponto de abscissa a

$$q = \frac{1}{2} \wedge a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_5 = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{32-1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{32-1}{32} \times \frac{2}{1} = \frac{31}{32}$$

22. Resposta:

Observando atentamente os dois gráficos pode se concluir que $f(x) \leq g(x)$, se $x \in [-1; 2]$

23. Resposta:

O domínio de $g(x) = tg(x)$ é $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$

24. Resposta:

A figura representa uma função injectiva, visto que, traçando varias rectas paralelas, elas intersectarão apenas um ponto do gráfico.

25. Resposta:

A afirmação verdadeira é $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq 4$

26. Resposta:

Vamos calcular o valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^5(x+8)^7}{(x-1)^{10}(x+3)^2} = \frac{(2 \cdot \infty - 1)^5(\infty + 8)^7}{(\infty - 1)^{10}(\infty + 3)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, vamos

levantar a indeterminação:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^5(x+8)^7}{(x-1)^{10}(x+3)^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(x\left(2 - \frac{1}{x}\right)\right)^5 \left(x\left(1 + \frac{8}{x}\right)\right)^7}{\left(x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)^{10} \left(x\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 \times \left(2 - \frac{1}{x}\right)^5 \times x^7 \times \left(1 + \frac{8}{x}\right)^7}{x^{10} \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{10} \times x^2 \times \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{12} \times \left(2 - \frac{1}{x}\right)^5 \times \left(1 + \frac{8}{x}\right)^7}{x^{12} \times \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{10} \times \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{x}\right)^5 \times \left(1 + \frac{8}{x}\right)^7}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{10} \times \left(1 + \frac{3}{x}\right)^2} \\ &= \frac{\left(2 - \frac{1}{\infty}\right)^5 \times \left(1 + \frac{8}{\infty}\right)^7}{\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)^{10} \times \left(1 + \frac{3}{\infty}\right)^2} = \frac{(2-0)^5 \times (1+0)^7}{(1-0)^{10} \times (1+0)^2} = \frac{(2)^5 \times (1)^7}{(1)^{10} \times (1)^2} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

27. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 - 12}{x^4 + 5x^3 + 6}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 - 12}{x^4 + 5x^3 + 6} = \frac{0^3 + 3 \times 0^2 - 12}{0^4 + 5 \times 0^3 + 6} = \frac{-12}{6} = -2$$

28. Resposta:



Cálculo diferencial

- Definição da derivada de uma função**

Dada uma função $F(x)$ definida no domínio D_F , sendo a abscissa de um ponto P , tal que $a \in D_F$. A derivada da função $F(x)$ no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a-h} \text{ ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-h} = f'(x)$$

A função $f(x)$ chama-se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata**Função constante**

$$f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0$$

Função potência

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Função polinomial**Função composta**

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \Rightarrow$$

$$f'(x) = (a_0 x^n)' + (a_1 x^{n-1})' + \dots + (a_n)'$$

Derivada da soma

$$f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

Função afim

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$$

Função produto

$$f(x) = u \times v \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

Função quociente

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Função composta

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1}u'$$

Derivada da função exponencial**Função exponencial de base e**

$$f(x) = e^u \Rightarrow f'(x) = u'e^u$$

Função exponencial de base a

$$f(x) = a^u \Rightarrow f'(x) = u'a^u \ln(a)$$

Derivada da função logarítmica**Função logarítmica de base e**

$$\text{Calculando o valor de } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$$

Baseando no limite *euleriano* $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$ teremos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

29. Resposta:

A função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+2)}$ tem ponto de descontinuidade eliminável no ponto de abscissa $x=1$, veja:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+2)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x+2} \wedge \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2}{3}$$

30. Resposta:

Consideremos a função real de variável real que se segue:

$$f(x) = \begin{cases} k, & \text{se } x = -3 \\ \frac{x^2 - 9}{x + 3}, & \text{se } x \neq -3 \end{cases} \text{ o valor de } k \text{ para que a função } f(x) \text{ seja continua em}$$

$x = -3$ segue:

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3), \text{ neste caso para } f(-3) = k, \text{ a}$$

condição $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ equivale afirmar que existem o limite de $f(x)$ no ponto de abscissa $x = -3$, então podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -3-3 = -6 \Rightarrow f(-3) = -6 \therefore k = -6$$

31. Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada da função $f(x) = \text{ctg}(x)$;

$$f(x) = \text{ctg}(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x'}{\sin^2 x} \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

32. Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada da função $f(x) = x^2 e^x$;

$$f'(x) = (x^2 e^x)' \Leftrightarrow f'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (2x + x^2)$$

33. Resposta:

Dada a função $f(x) = 2x^3 + x^2 - x$, vamos determinar a primeira derivada desta função:

$$f'(x) = (2x^3 + x^2 - x)' \Leftrightarrow f'(x) = 2.3x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = 6x^2 + 2x - 1,$$

vamos determinar a segunda derivada,

$$f''(x) = (6x^2 + 2x - 1)' \Leftrightarrow f''(x) = 2.6x + 2.1 - 0 \Leftrightarrow f''(x) = 12x + 2$$



$$f(x) = \ln(u) \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Função logarítmica de base a

$$f(x) = \log_a(a) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{u'}{u \ln(a)}$$

Derivada da função trigonométrica

Função seno

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)$$

$$f(x) = \sin(u) \Rightarrow f'(x) = u' \cos(u)$$

Função co-seno

$$f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

$$f(x) = \cos(u) \Rightarrow f'(x) = -u' \sin(u)$$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$.

- Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$
- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento c do domínio de uma função f é um ponto crítico de f se então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra

Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Onde

34. Resposta:

A função $f(x) = \frac{x-3}{x^2+2x-8}$ não é derivável nos pontos de abcissas A função

$$x = -4 \wedge x = 2,$$

veja

a

seguir:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2+2x-8} \Leftrightarrow f(x) = \frac{x-3}{(x+4)(x-2)}, \text{ com } x \neq -4 \wedge x \neq 2$$

35. Resposta:

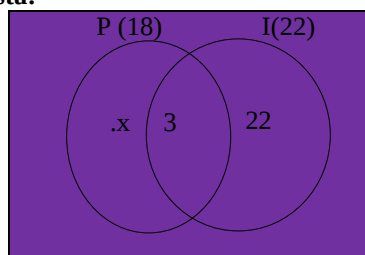
Fazendo um estudo rigoroso do gráfico dado aceita se que $f(0) < 0$

- **Somente para Secção de Letras**

36. Resposta:

Todos nós sabemos não é verdade afirmar que $Z^+ \cup Z_0^- = \mathbb{R}$

37. Resposta:



$$n(U) = 40$$

$$n(I) = ?$$

$$\Rightarrow n(I) - 3 = 22 \Leftrightarrow$$

$$n(I) = 22 + 3$$

$$n(I) = 25$$

São 25 pessoas que falam inglês.

38. Resposta:

$$\frac{P(x)}{x-2} = x^2 + 2x + 9 \wedge R(x) = 25$$

Isso significa que $P(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 9) + 25$

$$P(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 9) + 25 \Leftrightarrow p(x) = x^3 + 2x^2 + 9x - 2x^2 - 4x - 18 + 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(x) = x^3 + 5x + 7$$

39. Resposta:

A função $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ é **par** porque objectos simétricos do mesmo domínio correspondem a mesma imagem.

40. Resposta:

Observando atentamente o gráfico da função dada conclui-se que o contradomínio da função é dado pelo conjunto $x \in]-\infty; 4]$

- **Somente Para Secção de Ciências**

36. Resposta:

Dado o ponto $P(3;2)$ e a equação da recta $4x-3y+9=0$

De uma forma geral a distância entre um ponto e uma recta no plano é dada pela equação

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow d(P, r) = \frac{|4 \times 3 - 3 \times 2 + 9|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|12 - 6 + 9|}{\sqrt{25}} = \frac{|15|}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

37. Resposta:

Vamos determinar a expressão analítica da inversa da função $f(x) = 3 \times \log_2(1-x)$



$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau n e um binómio linear $x - a$.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjuntos

Reunião de conjuntos
Intersecção de conjuntos
Diferença de conjuntos
Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto $P(x_0, y_0)$ e recta r :
 $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta r representada por $d(P, r)$ é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ com } cx+d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$
Exemplo:

$3 + 4i \wedge 3 - 4i$ são dois números complexos conjugados.

Primitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$$\int (k) dx = kx + c$$

$$f(x) = 3 \times \log_2(1-x) \Rightarrow y = 3 \times \log_2(1-x) \Leftrightarrow \frac{y}{3} = \log_2(1-x) \Leftrightarrow 1-x = 2^{\frac{y}{3}}$$

$$\Leftrightarrow -x = 2^{\frac{y}{3}} - 1 \Leftrightarrow x = 1 - 2^{\frac{y}{3}} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 1 - 2^{\frac{x}{3}}$$

38. Resposta:

Vamos determinar o domínio da função $g(x) = \log_2|x|$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 0\} \quad , \quad \text{vamos resolver analiticamente a inequação modular}$$

$$|x| > 0 \Rightarrow x > 0 \vee x < 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

39. Resposta:

Vamos resolver a equação $x^2 + 4 = 0$ em conjunto de números complexos:

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 \times (-1)} = \pm\sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \pm 2i \Rightarrow x_1$$

40. Resposta:

Vamos encontrar a primitiva :

$$\int (x^4 + 3x^2 + 1) dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + 3 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + 1 \times \frac{x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$\Leftrightarrow \int (x^4 + 3x^2 + 1) dx = \frac{x^5}{5} + 3 \times \frac{x^3}{3} + 1 \times \frac{x^1}{1} + C$$

$$\Leftrightarrow \int (x^4 + 3x^2 + 1) dx = \frac{x^5}{5} + x^3 + x + C$$

FIM

