



Guía N° 30
Técnicas de Conteo – Permutaciones y Combinaciones

Nombre		
Curso	Fecha	
2° Medio A-B-C	Semana Lunes 9 – Viernes 13 de Noviembre	
Contenidos	Objetivo de Aprendizaje	Habilidades
Técnicas de Conteo Análisis Combinatorio	Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.	Comprender - Aplicar – Calcular

Nota: Esta guía contiene material y contenidos nuevos, cualquier consulta por favor realizarla a tu profesor de asignatura:

Si eres estudiante del 2° Medio A o C, al profesor Mauricio Osorio: mosorio@sanfernandocollege.cl,

Si eres estudiante del 2° Medio B, a la profesora Gloria González: ggonzalez@sanfernandocollege.cl

“La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo”

Nelson Mandela

Técnicas de Conteo

En la guía anterior estudiamos el Principio Multiplicativo y el Principio Aditivo, además del concepto de Factorial de un número Natural. En esta guía estudiaremos los tipos de Permutaciones y Combinaciones posibles como técnicas de conteo.

Permutaciones

En matemáticas, una permutación es la variación del orden o posición de los elementos, estudiaremos tres tipos de permutaciones, la Permutación Simple o Lineal, la Permutación Circular y la Permutación con Repetición.

1. Permutaciones Simples o Lineales:

Son las permutaciones que pueden hacerse con los elementos de un conjunto sin repetirlos. Para determinar el número de permutaciones lineales que se pueden hacer con un conjunto de n elementos, calculamos el factorial de n .

$$P_n = n!$$

Ejemplos:

1. ¿Cuántas palabras distintas se pueden formar, con o sin sentido, con las letras de la palabra GENIAL?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 6 elementos que corresponden a las letras de la palabra GENIAL, por lo tanto, calculamos una permutación simple sobre 6 elementos.

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Por lo tanto, podemos formar 720 palabras, con o sin sentido, utilizando las letras de la palabra GENIAL.

2. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 5 autos en fila en un estacionamiento?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 5 elementos que corresponden a los 5 autos que se ubicarán en fila en el estacionamiento, por lo tanto, calculamos una permutación simple sobre 5 elementos.

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Por lo tanto, se pueden ubicar de 120 maneras distintas 5 autos en fila en un estacionamiento.



2. Permutaciones Circulares:

Son aquellas permutaciones donde los elementos deben ordenarse en círculo, de modo que el primer elemento que se sitúe determina el principio y el fin del orden. Para determinar el número de permutaciones circulares que se pueden hacer con un conjunto de n elementos, calculamos el factorial de $n - 1$.

$$PC_n = (n - 1)!$$

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor de una mesa redonda?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 5 elementos que corresponden a las 5 personas que se sentarán alrededor de la mesa redonda (circular), por lo tanto, calculamos una permutación circular sobre 5 elementos.

$$PC_5 = (5 - 1)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Por lo tanto, 5 personas alrededor de una mesa pueden sentarse de 24 maneras distintas.

2. ¿De cuántas maneras se pueden formar un círculo 7 personas tomadas de las manos?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 7 elementos que corresponden a las 7 personas que formarán un círculo tomadas de las manos, por lo tanto, calculamos una permutación circular sobre 7 elementos.

$$PC_7 = (7 - 1)! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Por lo tanto, 7 personas tomadas de la mano pueden formar un círculo de 720 maneras distintas.

3. Permutación con Repetición

Son aquellas permutaciones donde los elementos del conjunto se pueden repetir, es decir, existe la posibilidad de que uno o más de ellos se encuentren más de una vez en el conjunto. Para determinar el número de permutaciones con repetición con un conjunto de n elementos, de los cuales un elemento se repite $a - veces$, otro elemento se repite $b - veces$, otro elemento se repite $c - veces$, y así sucesivamente, calculamos el factorial de n , dividido entre el producto de los factoriales que representan el número de veces que se repite cada elemento del conjunto.

$$PR_{n}^{a, b, c \dots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}$$

Ejemplos:

1. ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido se pueden formar con las letras de la palabra MATEMÁTICA?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 10 elementos que corresponden a las 10 letras de la palabra MATEMÁTICA, pero si nos fijamos hay elementos del conjunto que se repiten; la letra "M" se repite 2 veces, la letra "A" se repite 3 veces y la letra "T" se repite 2 veces, mientras que las demás letras no se repiten, por lo tanto calculamos una permutación con repetición sobre 10 elementos donde uno de ellos se repite 2 veces, otro se repite 3 veces y otro se repite 2 veces.

$$PR_{10}^{2, 3, 2} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10!}{2 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{10!}{24}$$

Por lo tanto, se pueden escribir $\frac{10!}{24}$ palabras distintas, con o sin sentido, con las letras de la palabra MATEMÁTICA.



2. ¿Cuántas palabras distintas, con o sin sentido se pueden formar con las letras de la palabra ELEMENTAL?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 9 elementos que corresponden a las 9 letras de la palabra ELEMENTAL, pero si nos fijamos hay elementos del conjunto que se repiten; la letra "E" se repite 3 veces y la letra "L" se repite 2 veces, mientras que las demás letras no se repiten, por lo tanto calculamos una permutación con repetición sobre 9 elementos donde uno de ellos se repite 3 veces y otro se repite 2 veces.

$$PR_{9}^{3,2} = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = \frac{9!}{6 \cdot 2} = \frac{9!}{12}$$

Por lo tanto, se pueden escribir $\frac{9!}{12}$ palabras distintas, con o sin sentido, con las letras de la palabra ELEMENTAL.

Para comprender de mejor forma las definiciones y ejemplos de los tres tipos de permutaciones estudiados puedes ingresar al siguiente Link:

<https://youtu.be/ZY6MbDEc2JY>

Combinaciones

En matemáticas, una combinación de p elementos de un conjunto de n , representa el número total de formas que tenemos de elegir (combinar) p elementos de un total de n .

1. Combinaciones sin Repetición

Dado un conjunto de n elementos distinguibles, se llama combinación sin repetición de p elementos, con $p < n$, elegidos entre los n , a cualquier subconjunto de p elementos distintos del conjunto completo. El número de combinaciones sin repetición de p elementos elegidos entre los n viene dado por:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n - p)!}$$

Ejemplos:

1. Un estudiante debe responder a seis de las diez preguntas de las que consta un examen. ¿Entre cuántos grupos de preguntas distintas puede elegir?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 10 elementos que representan las 10 preguntas de las que consta el examen, de las cuales nos dicen que el estudiante debe elegir 6, las preguntas, por supuesto, no se deben repetir, por lo tanto, calculamos una combinación sobre 10 elementos de los cuales se eligen 6.

$$C_{10}^6 = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6! (10 - 6)!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$$

Por lo tanto, se pueden hacer 210 combinaciones distintas al elegir 6 preguntas de un total de 10 de un examen, considerando que no se pueden repetir las preguntas.

2. ¿Cuántos grupos de directivas de curso de 3 estudiantes se pueden formar con un total de 10 alumnos?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 10 elementos que representan los 10 estudiantes de los cuales debemos elegir 3 para formar una directiva, por lo tanto, calculamos una combinación sobre 10 elementos de los cuales se eligen 3.



$$C_{10}^3 = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$$

Por lo tanto, se pueden hacer 120 combinaciones de directivas distintas al elegir 3 estudiantes de un total de 10 de alumnos, considerando que no se pueden repetir los alumnos.

2. Combinaciones con Repetición

Dado un conjunto de n elementos distinguibles, se llama combinación con repetición de p elementos, con $p < n$, elegidos entre los n , a cualquier colección de p elementos del conjunto, con repeticiones eventuales de algunos de ellos. El número de combinaciones con repetición de p elementos elegidos entre los n viene dado por:

$$CR_n^p = C_{n+p-1}^p = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p! \cdot (n-1)!}$$

Ejemplos:

1. En una pastelería hay 6 clases diferentes de pastelillos. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 4 pastelillos?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 6 elementos que representan las 6 clases diferentes de pastelillos, nos piden elegir 4 pastelillos y por supuesto, si uno nos gusta lo podemos repetir, por lo tanto, estamos frente a una combinación con repetición. Calculamos el número de combinaciones posibles de la siguiente forma:

$$CR_6^4 = C_{6+4-1}^4 = \binom{6+4-1}{4} = \frac{(6+4-1)!}{4! \cdot (6-1)!} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$$

Por lo tanto, existen 126 combinaciones posibles de elegir 4 pastelillos sabiendo que hay de 6 clases distintas.

2. En una bodega hay cinco tipos diferentes de botellas con bebidas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

Solución: En este caso tenemos un conjunto de 5 elementos que representan las 5 clases diferentes de botellas con bebidas, nos piden elegir 4 botellas y por supuesto, si una bebida nos gusta la podemos repetir, por lo tanto, estamos frente a una combinación con repetición. Calculamos el número de combinaciones posibles de la siguiente forma:

$$CR_5^4 = C_{5+4-1}^4 = \binom{5+4-1}{4} = \frac{(5+4-1)!}{4! \cdot (5-1)!} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

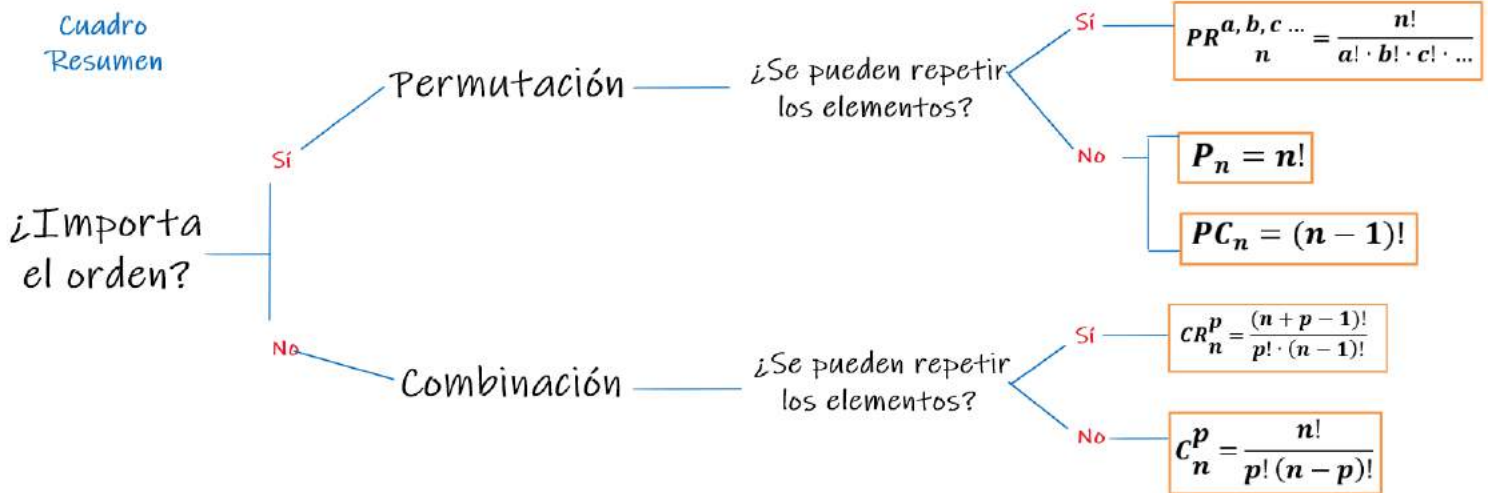
Por lo tanto, existen 70 combinaciones posibles de elegir 4 botellas de bebidas sabiendo que hay de 5 tipos diferentes.

Para comprender de mejor forma las definiciones y ejemplos de los dos tipos de combinaciones estudiados puedes ingresar al siguiente Link:

<https://youtu.be/tbH2O5rJ9q8>



Cuadro
Resumen



Resuelva los siguientes problemas

- Juana, Manuel y Mónica, son los tres finalistas de un concurso de robótica, ¿De cuántas maneras puede quedar el podio de su premiación?
- ¿De cuantas formas pueden ubicarse 6 amigos alrededor de una fogata?
- ¿Cuántas palabras, con o sin sentido, se pueden formar con las letras de la palabra MANZANA?
- Daniela se irá de viaje por una semana, debe elegir para su viaje 7 blusas de las 10 que tiene, ¿cuántas combinaciones de poleras distintas tiene para elegir Daniela?
- En una librería venden libros de 4 géneros literarios distintos, ¿De cuántas formas se pueden elegir 3 libros para comprar?
- Se va a programar un torneo de ajedrez para los 10 integrantes de un club. ¿Cuántos partidos se deben programar si cada integrante jugará con cada uno de los demás sin partidos de revancha?
- En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?
- ¿De cuántas formas se puede preparar una pizza con solo 3 ingredientes, si se cuenta con queso, tomate, carne y palmitos?
- Con 4 frutas diferentes, ¿cuántos jugos surtidos se pueden preparar? Considere que un jugo surtido se prepara con 2 al menos frutas.
- Un club de básquetbol tiene 12 jugadoras, una de ellas es la capitana Teresita. ¿Cuántos equipos diferentes de 5 jugadoras se pueden formar, sabiendo que en todos ellos siempre estará su capitana?
- En una florería hay 7 clases de flores, ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 flores?
- Mariela tiene 7 libros, ¿de cuántas maneras puede acomodar cinco de ellos en un estante?

**Solucionarios
(Solo cantidades)**

1. 6	2. 120	3. 420	4. 120	5. 20	6. 45
7. 1.260	8. 4	9. 11	10. 330	11. 210	12. 2.520

¡Que tengan una muy buena semana!