

SEMAINE DU 9/2 AU 15/2

ESPACES VECTORIELS

Les étudiants connaissent seulement la notion d'application linéaire comme application $f : E \rightarrow F$ telle que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$, vue dans le cours des structures algébriques. Vous pouvez donc l'utiliser dans les exercices.

- ① Rappels du cours sur les structures algébriques : Espaces vectoriels, sous-espace vectoriels, espace vectoriel produit, Combinaison linéaire (CL), Partie stable par CL, intersection de sous-espace vectoriels
- ② **Espace engendré par une partie.** Définition par intersection des sous-espaces vectoriels qui contiennent X , Notation $\text{Vect}(X)$, Caractérisation, Croissance pour l'inclusion, Enlever un vecteur lié à X ne change pas l'espace engendré, Remplacement d'un vecteur dans $\text{Vect}(X)$, Lien avec le pivot de Gauss
- ③ **Somme de sous-espaces vectoriels.** Définition, Caractérisation par le plus petit sous-espace vectoriel qui contient X , Lien avec $\text{Vect}(X)$, Somme directe et Caractérisation, Supplémentaire et caractérisation
- ④ **Familles de vecteurs libres/liées.** Définitions, Lien "liée $\Leftrightarrow$ un vecteur est CL des autres vecteurs de la famille", "Lemme de la base incomplète" (Si $p + 1$ vecteurs sont tous combinaison linéaire de p vecteurs, alors la première famille est liée.), Conséquence de l'ajout d'un vecteur à une famille libre,
- ⑤ **Familles de vecteurs génératrices.** Définitions, propriétés des parties génératrices (globalement celles de Vect).
- ⑥ **Bases.** Définition, équivalent à libre maximale, génératrice minimale ou existence d'une décomposition unique, Définition d'une bijection (isomorphisme) à partir de 2 bases. Les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont à connaître.
- ⑦ **Espace de dimension finie** Définition, Théorème d'existence d'une base, de la base extraite et de la base incomplète, Définition de la dimension, Isomorphisme entre tous les espaces de dimension n . Les dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ doivent être connues. dimension d'un sous-espace vectoriel, d'un produit cartésien, Formule de Grassman. Caractérisation du supplémentaire par la dimension. Notion de droite/plan vectoriel(le). Equivalence entre base, libre, et génératrice pour une famille de cardinal $\dim E$.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Caractérisation de la somme directe
- ② Montrer que "Base $\Leftrightarrow$ Décomposition unique $\Leftrightarrow$ Libre maximale"
- ③ Montrer que "Base $\Leftrightarrow$ Génératrice minimale"

- ④ Savoir démontrer que deux sous espaces vectoriels sont supplémentaires. L'examinateur pourra choisir l'exemple qu'il voudra parmi

- (a) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ et $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{array} \right\}$ dans $\mathbb{R}^3$
- (b) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, dans $\mathbb{R}^4$
- (c) $F = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ -b & -a \end{pmatrix} \right\}$ et $G = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ -b & -2a+b \end{pmatrix} \right\}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (d) $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2 + 1) \mid P\}$ et $G = \mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$
- (e) $F = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\}$ et $G = \{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

BONNES VACANCES

Code pour colleurs

- (a) $\$F=\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2 y+z=0\right\}$
 et $\$G=\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2 x+y+3 z=0 \\ x-2 y-z=0 \end{array}\right\}$ dans $\mathbb{R}^3$
- (b) $\$F=\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0\right\}$
 et $\$G=\{(2 a,-a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, dans $\mathbb{R}^4$
- (c) $\$F=\left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} a & 2 a+b \\ -b & -a \end{array}\right\}$
 et $\$G=\left\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \begin{array}{l} a & 3 a+b \\ -b & -2 a+b \end{array}\right\}$
 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (d) $\$F=\{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X^2+1) \mid P\}$ et $\$G=\mathbb{R}_1[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$
- (e) $\$F=\left\{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2 n}=0\right\}$
 et $\$G=\left\{u \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2 n}=u_{2 n+1}\right\}$
 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.