# Taller de análisis y diseño de algoritmos

## Algoritmos para problemas combinatorios

Francisco Javier Zaragoza Martínez

Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Azcapotzalco
Departamento de Sistemas

Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Posgrado en Optimización

Trimestre 2021 Invierno

# Contenido

Basado en *Principles and Techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng. World Scientific Publishing. 1992.*

# Dos principios básicos de conteo

En un problema de conteo, se desea saber la cardinalidad de algún conjunto finito $A$ cuyos elementos están dados por alguna regla. Más allá de enumerar todos los elementos de $A$, hay algunos principios básicos que nos ayudarán a determinar $|A|$.

## Principio de la suma

Si los elementos de $A$ se pueden distribuir en dos conjuntos disjuntos $A_1$ y $A_2$, entonces $|A| = |A_1| + |A_2|$. De la misma manera, si los elementos de $A$ se pueden distribuir en $k \geq 2$ conjuntos disjuntos $A_1, \ldots, A_k$, entonces $|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|$.

## Principio del producto

Si los elementos de $A$ son todas las parejas $(a_1, a_2)$ con $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$, entonces $|A| = |A_1| \times |A_2|$. De la misma manera, si los elementos de $A$ son todas las secuencias $(a_1, \ldots, a_k)$ de $k \geq 2$ elementos con $a_1 \in A_1, \ldots, a_k \in A_k$, entonces $|A| = \prod_{i=1}^{k} |A_i|$.

Una secuencia $a_1, \ldots, a_n$ de $n$ números es $k$-aria si $a_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Con frecuencia, las secuencias se escriben $(a_1, \ldots, a_n)$ y a $n$ se le llama la longitud de la secuencia.

Si $k = 2$ se dice que la secuencia es binaria, si $k = 3$ se dice ternaria y si $k = 4$ se dice cuaternaria. Por ejemplo, el conjunto de todas las secuencias binarias de longitud 3 es $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.

**Teorema**

*Existen $k^n$ secuencias $k$-arias de longitud $n$.*

**Ejemplo (Divisores positivos de 600)**

Notemos que 600 tiene una única factorización en primos $2^3 3^1 5^2$. Cualquier divisor de 600 deberá ser de la forma $2^a 3^b 5^c$ con $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 1$ y $0 \leq c \leq 2$.

**Teorema**

*Si la factorización única en primos de $n$ es $p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, donde los $p_i$ son primos distintos y los $k_i$ son enteros positivos, entonces $n$ tiene $\prod_{i=1}^{r}(k_i + 1)$ divisores positivos.*

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de $n$ elementos distintos. Para $0 \leq r \leq n$, una $r$-permutación de $A$ es una forma de acomodar cualesquiera $r$ elementos de $A$ en una línea. Si $r = n$, una $r$-permutación se llama simplemente una permutación.

**Ejemplo (3-permutaciones de $\{a, b, c, d\}$)**

Son 24 en total: $abc$, $acb$, $bac$, $bca$, $cab$, $cba$, $abd$, $adb$, $bad$, $bda$, $dab$, $dba$, $acd$, $adc$, $cad$, $cda$, $dac$, $dca$, $bcd$, $bdc$, $cbd$, $cdb$, $dbc$, $dbc$.

**Teorema**

*Existen $P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$ $r$-permutaciones de un conjunto con $n$ elementos. Existen $P_n^n = n!$ permutaciones de un conjunto con $n$ elementos.*

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de $n$ elementos distintos. Una $r$-permutación circular de $A$ es una forma de acomodar cualesquiera $r$ elementos de $A$ en un círculo. Si $r = n$, una $r$-permutación circular se llama simplemente una permutación circular.

**Ejemplo (3-permutaciones circulares de $\{a, b, c, d\}$)**

Son 8 en total: $abc$, $acb$, $abd$, $adb$, $acd$, $adc$, $bcd$, $bdc$.

**Teorema**

*Existen $Q^n_r = \frac{P^n_r}{r} = \frac{n!}{r \cdot (n-r)!}$ $r$-permutaciones circulares de un conjunto con $n$ elementos.*

*Existen $Q^n_n = \frac{P^n_n}{n} = (n-1)!$ permutaciones circulares de un conjunto con $n$ elementos.*

Sea $A$ un conjunto de $n$ elementos distintos. Una combinación de $A$ es simplemente un subconjunto de $A$. Una $r$-combinación de $A$ es un subconjunto de $A$ con $r$ elementos.

**Ejemplo (3-combinaciones de $\{a, b, c, d\}$)**

Son 4: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ y $\{b, c, d\}$.

Como una $r$-permutación de $A$ se puede obtener al reacomodar de cualquier forma los $r$ elementos de una $r$-combinación de $A$, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema**

*Existen $C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $r$-combinaciones de un conjunto con $n$ elementos.*

Con frecuencia se escribe $C_r^n$ también como $\binom{n}{r}$.

Suponga que $0 < r < n$. Hay dos tipos de $r$-combinaciones del conjunto $A = \{1, \ldots, n\}$: las que contienen a $n$ y las que no. Las primeras se completan con $(r-1)$-combinaciones de $\{1, \ldots, n-1\}$. Las segundas son $r$-combinaciones de $\{1, \ldots, n-1\}$.

**Teorema**

*Si* $0 < r < n$, *entonces* $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

Esta propiedad da lugar al famoso triángulo de Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} = 1 & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} = 1 & & \binom{1}{1} = 1 & & & \\
 & & \binom{2}{0} = 1 & & \binom{2}{1} = 2 & & \binom{2}{2} = 1 & & \\
 & \binom{3}{0} = 1 & & \binom{3}{1} = 3 & & \binom{3}{2} = 3 & & \binom{3}{3} = 1 & \\
\binom{4}{0} = 1 & & \binom{4}{1} = 4 & & \binom{4}{2} = 6 & & \binom{4}{3} = 4 & & \binom{4}{4} = 1
\end{array}
$$

Sea $A$ un conjunto de $2n$ elementos distintos. Un emparejamiento de $A$ es una partición de los elementos de $A$ en $n$ parejas de elementos.

**Ejemplo (Emparejamientos de $\{a, b, c, d\}$)**

Son 3: $a$ con $b$ y $c$ con $d$, $a$ con $c$ y $b$ con $d$, $a$ con $d$ y $b$ con $c$.

Si $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, sus emparejamientos se pueden construir repitiendo $n$ veces: toma el elemento no emparejado más pequeño y empáréjalo con cualquiera de los sobrantes.

**Teorema**

*Hay* $(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1 = \frac{(2n)!}{n!2^n}$ *emparejamientos de un conjunto con* $2n$ *elementos.*

# Otros dos principios básicos de conteo

En un problema de conteo, se desea saber la cardinalidad de algún conjunto finito $A$ cuyos elementos están dados por alguna regla. A veces podemos saber esto exhibiendo otro conjunto $B$ que tiene la misma cardinalidad. Otras ocasiones es suficiente saber que $A$ no tiene más elementos que $B$.

## Principio de la biyección

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos finitos. Si existe una biyección de $A$ a $B$, entonces $|A| = |B|$.

## Principio de la inyección

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos finitos. Si existe una inyección de $A$ a $B$, entonces $|A| \leq |B|$.

### Ejemplo (Caminos en una rejilla)

En una rejilla de ancho $a$ y altura $b$, la cantidad de caminos que hay de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha (siguiendo la rejilla hacia la derecha o hacia arriba) es igual a la cantidad de secuencias de $a+b$ ceros y unos con $a$ ceros y $b$ unos.

### Ejemplo (Conjunto potencia)

La cantidad de subconjuntos de un conjunto $A$ con $n$ elementos es igual a la cantidad de secuencias de $n$ ceros y unos.

### Ejemplo (Secuencias sin consecutivos)

La cantidad de $r$-combinaciones de $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ sin elementos consecutivos es igual a la cantidad de $r$-combinaciones de $B = \{1, 2, \ldots, n-r+1\}$.

Si $A$ es un conjunto de cardinalidad $n$, entonces evidentemente existen biyecciones de $A$ con los naturales $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Si además $A$ tiene algún orden razonable, entonces esa biyección se puede calcular. En otras palabras, dado $a \in A$ se debe poder encontrar algorítmicamente un único $f(a) \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y viceversa.

Vamos a suponer que $A$ se construye con el principio de la suma, es decir, que se puede partir en casos disjuntos por una decisión. Además, vamos a suponer que $A$ se ordena lexicográficamente por esa decisión. Si hay $d$ decisiones posibles, entonces $A$ se puede partir en $d$ conjuntos disjuntos $A_0, \dots, A_{d-1}$ de modo que $|A| = |A_0| + \cdots + |A_{d-1}|$.

Si $a \in A_i$, entonces antes de $a$ hay al menos $|A_0| + \cdots + |A_{i-1}|$ y basta averiguar (recursivamente) en qué orden está $a \in A_i$. Este proceso se simplifica mucho cuando $|A_0| = \cdots = |A_{d-1}|$, pues en este caso $a \in A_i$ si y sólo si $\left\lfloor \frac{f(a)}{|A_0|} \right\rfloor = i$.

# Biyecciones con los naturales

## Cadenas binarias en orden lexicográfico

Sea $A_k$ el conjunto de todas las cadenas de $k$ bits. Observa que $|A_k| = 2^k$, por lo que se debe poder dar alguna biyección de $A_k$ con $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$. Supongamos que $A_k$ está en orden lexicográfico (para $k = 3$ se tiene $A_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$). Observa que cada elemento de $A_k$ se obtiene de elegir un 0 o un 1 al principio, etc.

1. ¿Qué orden $f(101)$ le toca a 101? Como comienza con 1, va después de los $2^2$ que empiezan con 0. Como sigue con 0, va con el grupo de los que siguen con 0. Como termina con 1, va después del $2^0$ que termina con 0. Sumando los resultados $2^2 + 0 + 2^0 = 4 + 0 + 1 = 5$, obtenemos que $f(101) = 5$.
2. ¿Qué elemento $a \in A_3$ cumple $f(a) = 3$? Como $f(a) < 2^2$, entonces $a$ debe comenzar con 0. Como $f(a) - 0 \geq 2^1$, entonces $a$ debe seguir con un 1. Como $f(a) - (0 + 2^1) \geq 2^0$, entonces $a$ debe terminar con un 1. Es decir, $a = 011$.

Nota que cada decisión es el resultado de una división entre una potencia de 2.

# Biyecciones con los naturales

## Permutaciones en orden lexicográfico

Sea $A_k$ el conjunto de las permutaciones de $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Observa que $|A_k| = k!$, por lo que se debe poder dar alguna biyección de $A_k$ con $\{0, 1, \ldots, k!-1\}$. Supón que $A_k$ está en orden lexicográfico (para $k = 4$ se tiene $A_4 = \{0123, 0132, 0213, \ldots, 3210\}$). Observa que cada elemento de $A_k$ se obtiene de elegir 0, 1, 2 o 3 al principio, etc.

1. ¿Qué orden $f(2301)$ le toca a 2301? Comienza con 2: va después de los $2 \times 3!$ que comienzan con 0 o 1. Sigue con 3: va después de los $2 \times 2!$ que siguen con 0 o 1. Sigue con 0: va con el grupo de los que siguen con 0. Termina con 1: va con el grupo de los que terminan con 1. Sumando $f(2301) = 2 \times 3! + 2 \times 2! + 0 + 0 = 16$.
2. ¿Qué elemento $a \in A_4$ cumple $f(a) = 20$? Como $f(a) \geq 3 \times 3!$, entonces $a$ debe comenzar con 3. Como $f(a) - (3 \times 3!) \geq 1 \times 2!$, entonces $a$ debe seguir con 1. Como $f(a) - (3 \times 3! + 1 \times 2!) < 1!$, entonces $a$ debe seguir con 0. Como $f(a) - (3 \times 3! + 1 \times 2! + 0) < 0!$, entonces $a$ debe terminar con 2. Así, $a = 3102$.

Nota que cada decisión es el resultado de una división entre un factorial.

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de $n$ elementos distintos. Para $0 \leq r \leq n$, una $r$-permutación con repeticiones de $A$ es una forma de acomodar cualesquiera $r$ elementos de $A$, no necesariamente distintos, en una línea.

**Ejemplo (2-permutaciones de $\{a, b, c\}$)**

Son 9 en total: $aa$, $ab$, $ac$, $ba$, $bb$, $bc$, $ca$, $cb$, $cc$.

**Teorema**

*Existen $n^r$ $r$-permutaciones con repeticiones de un conjunto con $n$ elementos.*

Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto de $n$ elementos distintos. Suponga que se tienen $r_1$ objetos de tipo $a_1$, $r_2$ objetos de tipo $a_2$, ..., $r_n$ objetos de tipo $a_n$. ¿Cuántas permutaciones distintas existen de estos objetos?

**Ejemplo (Permutaciones de $a, a, b, c$)**

Son 12 en total: *aabc*, *aacb*, *abac*, *abca*, *acab*, *acba*, *baac*, *baca*, *bcaa*, *caab*, *caba*, *cbaa*.

**Teorema**

*Existen* $\frac{(r_1+r_2+\cdots+r_n)!}{r_1!r_2!\cdots r_n!}$ *permutaciones distintas.*

Un caso especial que ya encontramos antes es cuando $n = 2$. ¿Cuál?

## Tamaño de las cuentas

Nota que 12! es el factorial más grande que cabe en un `int`, mientras que 20! es el factorial más grande que cabe en un `long long`. En otras palabras, no es buena idea depender de que se pueden calcular para trabajar con ellos.

En muchos problemas de conteo, el enunciado dirá algo como *calcule la respuesta módulo algún entero* $M$. Aquí vale la pena recordar que si la respuesta se calcula con sumas y productos, entonces es suficiente calcular las respuestas intermedias módulo $M$ (en lugar de `a=b+c` calcula `a=(b+c)%M` y en lugar de `a=b*c` calcula `a=(b*c)%M`). Si $M = 2^{32}$ o $M = 2^{64}$, ocurrirá automáticamente si usas los tipos `unsigned int` o `unsigned long long`.

En algunos otros problemas $M$ será un número primo. Esto generalmente indica que la cuenta implica alguna división como `a=b/c`. En este caso lo que se debe hacer es calcular el inverso $d$ de $c$ módulo $M$ y entonces `a=(b*d)%M`.

## Contenido

Basado en *Principles and Techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng. World Scientific Publishing. 1992.*

Hemos definido $C_r^n = \binom{n}{r}$ como la cantidad de subconjuntos de $r$ elementos de un conjunto de $n$ elementos. Definiremos adicionalmente que $C_r^n = 0$ si $r > n$ o si $r < 0$.

## Teorema

1. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
2. $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$ *si* $r \geq 1$.
3. $\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$ *si* $r \geq 1$.
4. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.
5. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.

# Coeficientes binomiales

La razón por la cual los números $C_r^n$ se llaman coeficientes binomiales es porque aparecen en la expansión de la expresión binomial $(x+y)^n$.

**Teorema (del binomio de Newton)**

*Para cualquier entero $n \geq 0$ se cumple que*

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r.$$

Una prueba de esto es que el coeficiente de $x^{n-r}y^r$ se obtiene de contar de cuántas formas se puede elegir $n-r$ veces $x$ y $r$ veces $y$ al multiplicar los $n$ factores de $(x+y)^n$.

Con $x = y = 1$ se obtiene $2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$.

Con $x = 1$, $y = -1$ se obtiene $0 = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r}$. Es decir $\sum_{r \text{ par}} \binom{n}{r} = \sum_{r \text{ impar}} \binom{n}{r}$.

Con $x = 1$ se obtiene $(1 + y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} y^r$. Derivando con respecto a $y$ se obtiene $n(1 + y)^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r \binom{n}{r} y^{r-1}$. Con $y = 1$ se obtiene $n2^{n-1} = \sum_{r=1}^{n} r \binom{n}{r}$.

De manera similar $n(n + 1)2^{n-2} = \sum_{r=1}^{n} r^2 \binom{n}{r}$ y $n^2(n + 3)2^{n-3} = \sum_{r=1}^{n} r^3 \binom{n}{r}$.

Expandiendo las expresiones $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ y obteniendo el coeficiente de $x^r$ en ambos lados, se obtiene:

**Teorema (Identidad de Vandermonde)**

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}.$$

Un caso especial es cuando $m = n = r$ en el que se obtiene

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

No es difícil convencerse de que las siguientes dos identidades se cumplen. Para la primera basta notar que $\binom{r}{r} = \binom{r+1}{r+1}$ y para la segunda basta notar que $\binom{r}{0} = \binom{r+1}{0}$.

**Teorema**

1. $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ *si* $n \geq r$.
2. $\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \cdots + \binom{r+n}{n} = \binom{r+n+1}{n}$.

Cuando estos coeficientes binomiales se dibujan sobre el triángulo de Pascal, uno puede tal vez imaginarse porqué a veces se les llaman las identidades del palo de hockey.

El matemático belga Eugene Charles Catalan se hizo la siguiente pregunta: ¿De cuántas formas distintas se pueden poner $n$ parejas de paréntesis en el producto $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$? No se permite poner paréntesis vacíos $()$ ni tampoco paréntesis innecesarios $((z))$.

### Ejemplo

Para $n = 0$ sólo hay una forma $x_1$. Para $n = 1$ sólo hay una forma $(x_1 x_2)$. Para $n = 2$ hay dos formas distintas $((x_1 x_2)x_3)$ y $(x_1(x_2 x_3))$. Para $n = 3$ hay cinco formas distintas $(((x_1 x_2)x_3)x_4)$, $((x_1(x_2 x_3))x_4)$, $((x_1 x_2)(x_3 x_4))$, $(x_1((x_2 x_3)x_4))$ y $(x_1(x_2(x_3 x_4)))$.

Las respuestas $1, 1, 2, 5, 14, 42, \ldots$ son los llamados números de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

## Contenido

Basado en *Principles and Techniques in Combinatorics. Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng. World Scientific Publishing. 1992.*

Si uno tiene $n$ cajas y desea guardar $n+1$ objetos en esas cajas, entonces forzosamente alguna de las cajas deberá contener más de un objeto. De una forma más general.

### Teorema (Principio de las casillas)

*Sean $k$ y $n$ dos enteros positivos. Si se distribuyen $nk+1$ objetos en $n$ casillas, entonces alguna casilla contendrá al menos $k+1$ objetos.*

También se le llama principio de la pichonera o principio de Dirichlet.

### Teorema (Variante)

*Sean $k_1, k_2, \ldots k_n \geq 1$ con $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Si se distribuyen $m+1$ objetos en $n$ casillas numeradas del 1 al $n$, entonces alguna casilla $i$ contendrá al menos $k_i + 1$ objetos.*

# El principio de inclusión y exclusión

El principio de la suma básicamente dice que si $A$ y $B$ son dos conjuntos finitos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$), entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$. Si $A$ y $B$ no son disjuntos, entonces $|A| + |B|$ cuenta dos veces los elementos de $A \cap B$, por lo tanto $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

## Teorema (Principio de inclusión y exclusión)

*Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Entonces $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ es igual a*

$$\sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|,$$

*donde todos los índices de las sumatorias están en intervalo de 1 a $n$.*

# Encuentros y desencuentros

¿De cuántas formas $D_n$ se pueden colocar $n$ cartas numeradas del 1 al $n$ en $n$ posiciones numeradas del 1 al $n$ de modo que ninguna carta $i$ se encuentre en la posición $i$? A esto se le llama una permutación sin puntos fijos o un desencuentro (*derangement* en inglés).

## Ejemplo

Para $n = 1$ no hay forma. Para $n = 2$ hay una forma $(2, 1)$. Para $n = 3$ hay dos formas $(2, 3, 1)$ y $(3, 1, 2)$. Para $n = 4$ hay nueve formas.

## Teorema (Cantidad de desencuentros)

$D_n = n!(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!})$. *Además* $D_n \approx \frac{n!}{e} \approx 0.367n!$

Se puede probar que $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ y que $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$. También es posible usar esto para calcular cuántas permutaciones hay con $k$ puntos fijos.

Muchos problemas de conteo se pueden plantear de una forma más sencilla con una combinación de divide y vencerás y el principio de la suma.

**Ejemplo (Cubrir rectángulos de $1 \times n$)**

¿De cuántas formas $A_n$ se puede cubrir un rectángulo de $1 \times n$ con rectángulos de $1 \times 1$ y $1 \times 2$? Nota que $A_0 = A_1 = 1$. Por otro lado, si $n \geq 2$, entonces se puede comenzar con un rectángulo de $1 \times 1$ o con un rectángulo de $1 \times 2$. Por lo tanto $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$.

**Ejemplo (Números de Catalan)**

Si pensamos que el último producto que se lleva a cabo es $(x_1 \cdots x_i) \times (x_{i+1} \cdots x_{n+1})$, entonces obtenemos que $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$.

Las identidades que se obtienen así se llaman relaciones de recurrencia. Es fácil (pero lento) calcular estos valores usando recursión o programación dinámica directamente.

Una relación de recurrencia lineal de la forma $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_r a_{n-r} = 0$ se llama homogenea y le corresponde el polinomio característico $c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \cdots + c_r$. Lo siguiente tal vez te sonará familiar de tu curso de ecuaciones diferenciales.

### Teorema

*Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son las r raíces distintas del polinomio característico, entonces la solución es $a_n = A_1\alpha_1^n + \cdots + A_r\alpha_r^n$, con $A_1, \ldots, A_r$ constantes que dependen de los valores iniciales.*

### Ejemplo

Si $a_0 = a_1 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, entonces el polinomio característico es $x^2 - x - 1$, sus raíces son $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Los valores de $A_1$ y $A_2$ se obtienen de resolver el sistema lineal $A_1 + A_2 = a_0$ y $A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 = a_1$.

En ocasiones nos aparece no una, sino varias relaciones de recurrencia que nos llevan a la solución de un problema. Con frecuencia podremos despejar y sustituir.

### Ejemplo (Ranas brincando en un octágono)

Considere un octágono $ABCDEFGH$. Una rana comienza en $A$. Desde cualquier vértice (excepto $E$) puede saltar a cualquiera de los dos vértices adyacentes. Cuando llega a $E$ se detiene. ¿De cuántas formas distintas $a_n$ puede llegar la rana de $A$ a $E$ en $n$ saltos?

Obviamente $a_n = 0$ si $n$ es impar. Sea $b_k = a_{2k}$ y sea $c_k$ la cantidad de formas distintas en las que la rana puede llegar de $C$ a $E$ en $2k$ saltos. Nota que $b_k = 2(b_{k-1} + c_{k-1})$ y que $c_k = 2c_{k-1} + b_{k-1}$ (piensa en los primeros dos saltos de la rana). Despejando $c_{k-1} = \frac{1}{2}b_k - b_{k-1}$ y sustituyendo $[\frac{1}{2}b_{k+1} - b_k] = 2[\frac{1}{2}b_k - b_{k-1}] + b_{k-1}$, es decir, $b_{k+1} - 4b_k + 2b_{k-1} = 0$. El polinomio característico es $x^2 - 4x + 2$ con raíces $\alpha_1 = 2 + \sqrt{2}$ y $\alpha_1 = 2 - \sqrt{2}$, de lo que fácilmente se obtiene $a_{2n} = b_n$.

La relación $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$ define a los números de Fibonacci. Estos aparecen frecuentemente como solución de problemas.

### Teorema (Propiedades de los números de Fibonacci)

1. $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.
2. $\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n}$.
3. $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$.
4. $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.
5. $F_{m+n-1} = F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1}$.
6. $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.
7. $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$.
8. $F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_n(F_n + 2F_{n-1})$.

Los números de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ también aparecen con frecuencia.

**Palabras de Dyck** Hay $C_n$ cadenas binarias con $n$ ceros y $n$ unos tales que ningún prefijo tiene más unos que ceros.

**Paréntesis** Hay $C_n$ formas de aparear $n$ parejas de paréntesis que abren y cierran.

**Árboles binarios** Hay $C_n$ árboles binarios enraizados con $n+1$ hojas.

**Árboles planos** Hay $C_n$ árboles planos con $n+1$ vértices.

**Caminos** Hay $C_n$ caminos de $(0,0)$ a $(n,n)$ que siguen la rejilla entera hacia arriba o la derecha y no cruzan la recta $x = y$.

**Triangulaciones** Hay $C_n$ triangulaciones de un polígono convexo con $n+2$ vértices.