

Fonction réelles continues

Les fonctions (ou applications) réelles sont les fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$, définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions de X dans $\mathbb{R}$ est souvent noté $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^X$.

1 CONTINUITÉ EN UN POINT, CONTINUITÉ SUR UN INTERVALLE

Définition 1 : Continuité en un point

Soit f une application réelle définie sur une partie non vide X de $\mathbb{R}$. Soit a un élément de D . On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha, a + \alpha[\subset X$ (On dit aussi que a est intérieur à X).

On dit que f est **continue au point a** si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

On dit que f est **continue à droite (respectivement à gauche) au point a** , s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $[a, a + \alpha[\subset X$ (resp. $]a - \alpha, a] \subset X$) et tel que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad (\text{respectivement} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)).$$

Avec les quantificateurs

En utilisant la définition de limite avec les quantificateurs, on obtient

- f est continue en a , si et seulement si,

$$f \xrightarrow{a} f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

- f est continue à droite en a , si et seulement si,

$$f \xrightarrow{a^+} f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in X, \quad a < x < a + \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

- f est continue à gauche en a , si et seulement si,

$$f \xrightarrow{a^-} f(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in X, \quad a - \alpha < x < a \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Exemple 1

Les fonctions $x \mapsto x^n$ sont continue en $a \in \mathbb{R}$ quelconque. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|x^n - a^n| = |x - a| \cdot \left| \sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k} \right|$$

Faisons la preuve pour $a > 0$. La preuve pour $a < 0$ est la même en faisant attention aux changements de signes. Alors $a - \alpha < x < a + \alpha$. Quitte à prendre α plus petit, on suppose que $a - \alpha, a$ et $a + \alpha$ sont de même signe.

D'où, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$0 < a^k(a-\alpha)^{n-1-k} < a^k x^{n-1-k} < a^k(a+\alpha)^{n-1-k} < a^k(a+1)^{n-1-k}.$$

On peut donc majorer donc $|x^n - a^n| < |x - a| \sum_{k=0}^{n-1} a^k(a+1)^{n-1-k}$.

En prenant $\alpha = \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k(a+1)^{n-1-k} \right)^{-1}$, on obtient la majoration voulue

$$|x^n - a^n| < |x - a| \sum_{k=0}^{n-1} a^k(a+1)^{n-1-k} < \varepsilon.$$

La caractérisation de la limite par la limite à gauche et à droite, nous donne le résultat suivant.

Proposition 1 : Caractérisation de la continuité à l'aide des continuités à gauche/à droite

Soient $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$ un point au voisinage duquel f est définie à gauche et à droite. f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a .

Définition 2

Une application réelle f est dite continue sur

- **un intervalle ouvert** $I =]a, b[$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ si f est continue en tout point de I .
- **un intervalle** $J = [a, b[$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ si f est continue à droite en a et f est continue en tout point de $]a, b[$.
- **un intervalle** $K =]a, b]$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \mathbb{R}$ si f est continue à gauche en b et f est continue en tout point de $]a, b[$.
- **un segment** $[a, b]$, $a < b$, si f est continue en tout point de l'intervalle $]a, b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b .

Exemple 2

Montrer les propositions suivantes.

- ① Toute fonction polynômiale est continue sur $\mathbb{R}$.
- ② Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ③ La fonction $\ln$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- ④ La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2 : Caractérisation séquentielle de la continuité

Soit f une application réelle définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.

La fonction f est continue au point a
si et seulement si
pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a).$$

Preuve.

On utilise la caractérisation séquentielle de la limite sur la définition de continuité. $\square$

Utilisation habituelle de la caractérisation séquentielle

Une conséquence directe est que, pour une fonction **continue**, $f\left(\underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n}_{\text{si la limite existe}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n)$.

Ce résultat est utilisé dans le contexte des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. On peut donc l'utiliser **seulement si** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** vers un réel ℓ et si f est définie et **continue** en ℓ .
Alors $f(\ell) = \ell$.

Exemple 3

Résolvons l'équation fonctionnelle donnée par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Pour $x = y = 0$, la relation donne $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.

Par récurrence immédiate, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.

On passe aux relatifs. Pour $y = -x$, la relation donne $f(0) = f(x) + f(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$.

Alors, pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on écrit $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a alors $f(nx) = -f(px) = -pf(x) = nf(x)$. On passe aux rationnels. Soit $r \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On obtient

$$f(r) = pf(1/q) = \frac{p}{q}qf(1/q) = \frac{p}{q}f(1) = ar.$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite (u_n) telle que $u_n \rightarrow x$ et $u_n \in \mathbb{Q}$.

Par continuité $f(u_n) \rightarrow f(x)$ or puisque $u_n \in \mathbb{Q}$, $f(u_n) = au_n \rightarrow ax$ donc par unicité de la limite

$$f(x) = ax, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

La synthèse est immédiate.

2 OPÉRATION ALGÈBRIQUE SUR LES APPLICATIONS CONTINUES**Proposition 3**

La somme et le produit de deux applications continues, f et g , en un point a sont continues au point a . Si de plus f ne s'annule pas dans un voisinage de a , alors $\frac{1}{f}$ est continue en a .

Preuve. On utilise, pour la démonstration, la caractérisation séquentielle de la continuité.

Soient f et g deux applications réelles continues en un point a de $\mathbb{R}$. Soient (u_n) une suite réelle convergente de limite égale à a . Comme f et g sont continues au point a , alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a).$$

D'après la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = g(a).$$

Par les opérations sur les suites,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f+g)(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(u_n) + g(u_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = f(a) + g(a) = (f+g)(a).$$

Encore par la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = (f+g)(a)$$

et l'application $f+g$ est continue au point a .

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (fg)(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(u_n) \times g(u_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} g(u_n) = f(a) \times g(a) = (fg)(a).$$

Encore par la caractérisation séquentielle de la continuité.,

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = (fg)(a)$$

et l'application fg est continue au point a .

(3) Si de plus f ne s'annule pas dans un voisinage de a , alors la suite $\frac{1}{f(u_n)}$ converge vers $\frac{1}{f(a)}$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a)}$$

et l'application $\frac{1}{f}$ est continue au point a .

□

3 COMPOSITION DE DEUX APPLICATIONS CONTINUES

Proposition 4

Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit f une application réelle définie sur I et telle que $f(I) \subset J$. Soit g une application réelle définie sur J . Soient a un point de I et $b = f(a)$. Si f est continue en a et g est continue en $b = f(a)$, alors l'application composée $g \circ f$ est continue au point a .

Preuve.

(1) Comme f est continue au point a , alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = f(a)$.

(2) Comme g est continue au point $b = f(a)$, alors $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b) = g(f(a))$.

Par la proposition sur la limite de la composition de fonctions,

$$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = (g \circ f)(a)$$

et l'application $g \circ f$ est continue au point a . □

4 PROLONGEMENT PAR CONTINUITÉ

Définition 3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un point de I . Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f admet un **prolongement par continuité en a** si f admet une limite finie ℓ en a . On définit, dans ce cas la fonction $\tilde{f}$ sur I par

$$\forall x \in I, \quad \tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in I \setminus \{a\} \quad \text{et} \quad \tilde{f}(a) = \ell.$$

Cette fonction $\tilde{f}$ est appelée **prolongement par continuité de f en a** .

Exemple 4

- La fonction $x \mapsto x \ln x$ n'est pas définie en 0 mais on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 0 en 0, car $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.
- La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en 0, mais comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on peut la prolonger par continuité en ce point en lui donnant la valeur 1 en 0.
- Pour tout $\alpha > 0$, $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc en posant $0^\alpha = 0$, on prolonge la fonction $x \mapsto x^\alpha$, a priori définie sur $\mathbb{R}_+$, en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

5 LES THÉORÈMES DE DE LA CONTINUITÉ

Hors la propriété de propagation de l'inégalité stricte (qui n'est rien de plus que celle des limites appliquée à la continuité) nous allons ranger toutes les dernières propriétés du cours dans un tableau pour les résumer. Soit f une fonction continue sur un intervalle I , de bornes $a, b \in \mathbb{R}$. Notons $J := f(I)$, $f(a) := \lim_a f$ et $f(b) := \lim_b f$, si nécessaire. Par soucis de simplicité, on suppose que $f(a) \leq f(b)$, ce qui n'est pas toujours le cas !

	f fonction continue	f fonction continue et strictement monotone
$I := [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$	TVI : $\forall \lambda \in [f(a), f(b)], \exists c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.	$\forall \lambda \in [f(a), f(b)], \exists ! c \in I$ tel que $f(c) = \lambda$.
	$f(I)$ est un intervalle	$f(I) = [f(a), f(b)]$ + Réciproque continue
$I := [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$	f est bornée et atteint ses bornes sur I	f est bornée, atteint ses bornes sur I et ses bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

On remarquera que si $I := [a, b]$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $J = [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$.

Les preuves des théorèmes reposent pour beaucoup sur le **théorème de la borne supérieure** et le **théorème de Bolzano-Weierstrass** qui seront vu dans d'autres chapitres. Nous feront les preuves une fois ces théorèmes démontrés.

5.1 PROPAGATION DE L'INÉGALITÉ STRICTE

Proposition 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une application réelle définie sur I . Soit $a \in I$. Si f est continue en a et si $f(a) > 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in I, \quad x \in]a - \alpha, a + \alpha[\implies f(x) > 0.$$

Preuve. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}f(a) > 0$. Comme f est continue au point a , par définition

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - a| < \alpha \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

et donc $\boxed{\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad x \in]a - \alpha, a + \alpha[\implies 0 < \frac{1}{2}f(a) < f(x).}$ $\square$

5.2 IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE APPLICATION CONTINUE

Théorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f une fonction réelle, continue sur un segment $[a, b]$, $a < b$ de $\mathbb{R}$. Soit λ un nombre réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe un $c \in [a, b]$ tel que $\lambda = f(c)$.

Preuve. **Par dichotomie - Sans le théorème de la borne supérieure**

On suppose pour simplifier que $f(a) \leq f(b)$.

- On pose $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites, définies par $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right) & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq \lambda \\ \left(\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right) & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda. \end{cases}$$

À partir de l'intervalle $[a_0, b_0] = [a, b]$, on construit donc par récurrence de nouveaux intervalles intéressants plus petits $[a_1, b_1]$, tels que $f(a_1) < \lambda \leq f(b_1)$ et ainsi de suite donc $f(a_n) < \lambda \leq f(b_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- On peut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

- Comme on divise l'intervalle par 2, la taille de l'intervalle $[a_n, b_n]$ est $\frac{b-a}{2^n}$, qui est aussi la distance entre a_n et b_n , soit

$$b_n - a_n. \text{ D'où } \boxed{b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}.$$

- Les deux suites sont donc adjacentes.

Elles ont donc la même limite dans $c \in \mathbb{R}$, soit $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c}.$

- Comme f est continue, d'après la caractérisation séquentielle de la continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n\right) = f(c) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n).$$

Donc en passant à la limite dans $f(a_n) < \lambda \leq f(b_n)$, on obtient $\boxed{f(c) < \lambda \leq f(c) \text{ donc } f(c) = \lambda}.$

□

Preuve. **Avec le théorème de la borne supérieure**

Supposons, par exemple que $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$. On considère l'ensemble

$$E = \{x \in [a, b]; f(x) \leq \lambda\}.$$

Alors $a \in E$. Ainsi E est une partie non vide majorée (par b) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure $c \in [a, b]$. Montrons que $f(c) = \lambda$.

Supposons $f(c) < \lambda$. Alors $c < b$, puisque $c \leq b$ et l'égalité $c = b$ impliquerait $\lambda \leq f(b) = f(c)$ par hypothèse. Posons $\varepsilon = \lambda - f(c) > 0$. Comme f est continue au point c , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]c, c + \alpha[\cap [a, b], f(x) - f(c) < \lambda - f(c).$$

Ce qui montre, par définition de l'ensemble E , que

$$\forall x \in]c, c + \alpha[\cap [a, b], x \in E$$

et donc c n'est pas un majorant de E . Contradiction avec la définition de c . On a donc $f(c) \geq \lambda$.

Si $f(c) > \lambda$, alors $a < c$, sinon $a = c$ et $f(a) = f(c) \leq \lambda$. Soit $\varepsilon = f(c) - \lambda > 0$. Comme f est continue au point c , il existe $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in]c, c + \alpha[\cap [a, b], \lambda - f(c) < f(x) - f(c)$$

et donc

$$\forall x \in]c, c + \alpha[\cap [a, b], \lambda < f(x).$$

Mais ceci implique que

$$\forall x \in]c, c + \alpha[\cap [a, b], x \notin E.$$

On en déduit que $c - \beta$ est un majorant de E , ce qui contredit la définition de c . On a montré finalement que $f(c) = \lambda$. □

On a maintenant une version améliorée du TVI, pour tout intervalle de $\mathbb{R}$!

Corollaire 5.1

L'image d'un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, par une application continue est un intervalle.

Preuve. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, f une application continue sur I , y et z deux éléments de $f(I)$. Soit $\lambda \in [y, z]$ ou $[z, y]$. Soient a et b dans I tels que $y = f(a)$ et $z = f(b)$. Par le Théorème 1, il existe $c \in [a, b]$ ou $[b, a]$ tel que $\lambda = f(c) \in f(I)$. □

⚠ ATTENTION Il existe des fonctions non continues (discontinues) et qui vérifient la propriété des valeurs intermédiaires.

Exemple 5

On considère l'application f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$f(x) = 2x, \quad \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) = x, \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

f est discontinue au point $\frac{1}{2}$ et $f([0, 1]) = [0, 1]$.

Exemple 6

Le théorème des valeurs intermédiaires est l'arme clé pour montrer l'existence d'un point fixe !

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrons que f admet un point fixe.

Tout à gauche ! Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = f(x) - x$. Un point fixe de f est alors une valeur d'annulation de φ .

φ est continue, $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$ donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, φ s'annule !

Théorème 2 : Théorème des bornes atteintes

Soient $[a, b]$, $a < b$, un segment de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Alors

- ① f est bornée sur $[a, b]$.
- ② f atteint ses bornes sur $[a, b]$.

Preuve.

- ① Montrons que f est bornée sur $[a, b]$. Supposons le contraire. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe $u_n \in [a, b]$ tel que $|f(u_n)| \geq n$. La suite (u_n) est une suite réelle bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ convergente. Soit c la limite de cette sous-suite :

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)}.$$

Donc $c \in [a, b]$. Comme f est continue sur $[a, b]$, alors f est continue au point c :

$$\lim_{y \rightarrow c} f(y) = f(c).$$

D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, la suite $(f(u_{\varphi(n)}))$ converge vers $f(c)$. On en déduit que la suite $(f(u_{\varphi(n)}))$ est bornée. Or ceci est absurde, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |f(u_{\varphi(n)})| \geq \varphi(n) \geq n.$$

Donc f est bornée sur $[a, b]$. Il existe deux nombres réels A et B tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad A \leq f(x) \leq B.$$

- ② L'ensemble $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et bornée, admet une borne inférieure m et une borne supérieure M . Montrons (par exemple) que f atteint sa borne supérieure M . Supposons que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) < M.$$

Soit g l'application définie sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

g est une application continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles, par le premier point, g est bornée sur $[a, b]$. Maintenant, par définition de M , pour tout réel $r > 0$, il existe x dans $[a, b]$ tel que

$$M - \frac{1}{r} < f(x) < M.$$

On en déduit que

$$0 < M - f(x) < \frac{1}{r}$$

et donc

$$\forall r > 0, \exists x \in [a, b], \quad g(x) > r.$$

Ceci montre que l'application g n'est pas majorée sur $[a, b]$. Contradiction. Donc, il existe (au moins) un élément x dans $[a, b]$ tel que $f(x) = M$. On démontre de même que f atteint sa borne inférieure.

□

Attention à toutes les hypothèses

- ① $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x$. f est continue, mais non bornée. Cela tient à ce que l'intervalle $[0, +\infty[$ n'est pas borné.
- ② $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$, si $x \in]0, 1]$ et $f(0) = 0$. f n'est pas bornée. Cela tient à ce que f n'est pas continue en 0.
- ③ $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x$. f est continue et bornée. Sa borne supérieure 2 n'est pas atteinte. Cela tient à ce que l'intervalle $[0, 1[$ n'est pas fermé.

Exemple 7

Montrons que la fonction $x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 + e^x}$ possède un minimum sur $]0, 1]$.

On pourrait sans doute étudier les variations de f , mais on préfère éviter les calculs. Prolongée par continuité en 0 par la valeur 0, f est continue donc possède un minimum sur le segment $[0, 1]$, d'après le théorème précédent. Ce minimum est en fait atteint sur $]0, 1[$ car f est strictement négative sur $]0, 1[$ et $f(0) = 0$.

Exemple 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$. Montrons que f admet un minimum absolu.

Posons $M = f(0) + 1$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \leq A, f(x) \geq M \quad \text{et} \quad \forall x \geq B, f(x) \geq M.$$

On a $A \leq 0 \leq B$ car $f(0) < M$.

Sur $[A, B]$, f admet un minimum en un point $a \in [A, B]$ car continue sur un segment.

On a $f(a) \leq f(0)$ car $0 \in [A, B]$ donc $f(a) \leq M$.

Pour tout $x \in [A, B]$, on a $f(x) \geq f(a)$ et pour tout $x \in]-\infty, A] \cup [B, +\infty[$, $f(x) \geq M \geq f(a)$.

Ainsi f admet un minimum absolu en a .

Norme infinie d'une fonction bornée

Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On appelle norme infinie de f sur D et on note $\|f\|_\infty$, ou $\|f\|_{\infty, X}$ en cas d'ambiguïté, le réel $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

La norme infini a les propriétés suivantes, pour toutes fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ bornées et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$,
- $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$,
- $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Théorème 3 : Théorème de la bijection continue

Toute application réelle continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. Si f^{-1} est la réciproque de f , alors f^{-1} est continue, strictement monotone sur J et de même sens de monotonie que f .

Preuve. f est monotone donc, pour tout $x \in I$, donc si les bornes de I sont $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} \lim_{a^+} f &< f(x) < \lim_{b^-} f, \quad \text{si } f \text{ est croissante,} \\ \lim_{a^+} f &> f(x) > \lim_{b^-} f, \quad \text{si } f \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

Donc la borne supérieure de f est $\max\{\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\}$ et la borne inférieure de f est $\min\{\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\}$.

Montrons que f est une bijection. Soit $y \in J = [\min\{\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\}, \max\{\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f\}] = f(I)$. D'après le théorème 1 (TVI), il existe un $x \in I$, tel que $f(x) = y$. Supposons, par l'absurde, que x n'est pas unique. Alors il existe un élément $x' \in I$ tel que $f(x') = y$ et $(x' > x \text{ ou } x > x')$. Par strict monotonie de f on a donc $f(x') > f(x)$ ou $f(x) > f(x')$, donc $f(x) \neq f(x')$, ce qui est absurde puisque $f(x) = y = f(x')$.

Par conséquent, x' n'existe pas et donc tout $y \in J$ admet un unique antécédant dans I . Donc f est une bijection de I sur J . Posons $f^{-1} : J \rightarrow I$ la réciproque de f . On rappelle que f^{-1} est définie en associant à tout $y \in J$ son unique antécédant dans I .

Soit $b \in J$. **Montrons que f^{-1} est continue en b .** Pour cela, prenons une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $J \setminus \{b\}$ qui tend vers b . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = f^{-1}(b_n) \in I$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc, d'après la théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut y extraire une suite convergente. Notons la $(a_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et sa limite a . Par continuité de f , et la caractérisation séquentielle de la limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{\phi(n)}) = f(a) .$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_{\phi(n)}) = b_{\phi(n)}$. Donc $(b_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$, mais aussi vers b car c'est une sous suite de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par unicité de la limite, $b = f(a)$.

On a donc montré que la suite extraite de terme général $a_{\phi(n)} = f^{-1}(b_{\phi(n)})$ converge vers $a = f^{-1}(b)$. Nous allons montrer que $f^{-1}(b_n)$ n'a en fait qu'une valeur d'adhérence et donc qu'elle converge vers celle ci.

Par l'absurde, supposons qu'il existe une autre valeur d'adhérence $f^{-1}(b') \neq f^{-1}(b)$. Alors il existe une suite extraite $(f^{-1}(b_{\delta(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(b_{\delta(n)}) = f^{-1}(b') .$$

Alors, par continuité de f , la suite de terme général $f \circ f^{-1}(b_{\delta(n)}) = b_{\delta(n)}$ converge vers $f \circ f^{-1}(b') = b' \neq b$, ce qui est absurde.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(b_n) = f^{-1}(b) ,$$

ce qui prouve que f^{-1} est continue.

Il reste la monotonie de f^{-1} . Supposons que f est strictement croissante. Le cas décroissante est similaire. Soit $x, y \in J$ tel que $x < y$. Par bijectivité de f , il existe $a, b \in I$, tel que $f(a) = x$ et $f(b) = y$. On a $a < b$ car sinon, $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$, ce qui est absurde. Donc

$$f^{-1}(x) = a < b = f^{-1}(y) ,$$

donc f^{-1} est strictement croissante. $\square$

Réciproque du TVI monotone

On a même une réciproque du TVI dans le cas où f est strictement monotone. On ne le montrera pas ici car le résultat est hors programme, mais il existe !

Soient a et b deux nombres réels, $a < b$, et f une application strictement monotone sur l'intervalle $I = [a, b]$. Si l'image $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur $[a, b]$.

Exemple 9

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que $\lim_{+\infty} f = \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, \ell[$ et $\lim_{\ell^-} f^{-1} = +\infty$.

En effet, le TVI strictement monotone garantit la bijectivité de f de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, \ell[$. Ensuite, f^{-1} étant croissante, le théorème de la limite monotone nous assure l'existence de la limite $\lim_{y \rightarrow \ell^-} f^{-1}(y)$, notons-la L .

Enfin, par composition, on a $f^{-1}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$ et $f^{-1}(f(x)) = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $L = +\infty$, par unicité de la limite.

Exemple 10

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante.

Montrons que f est continue si, et seulement si, $f(]a, b[) =]\lim_a f, \lim_b f[$

($\Rightarrow$) Supposons f continue.

Puisque f est continue et strictement croissante, f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $] \lim_a f, \lim_b f[$ d'où le résultat.

($\Leftarrow$) Supposons $f(]a, b[) =]\lim_a f, \lim_b f[$.

Soit $x_0 \in]a, b[$. On a $\lim_a f < f(x_0) < \lim_b f$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, soit $y^+ \in]f(x_0), f(x_0) + \varepsilon] \cap \lim_a f, \lim_b f[$.

Il existe $x^+ \in]a, b[$ tel que $f(x^+) = y^+$. Soit $y^- \in [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) \cap \lim_a f, \lim_b f[$. Il existe $x^- \in]a, b[$ tel que $f(x^-) = y^-$.

Puisque f est croissante, $x^- < x_0 < x^+$. Posons $\alpha = \min(x^+ - x_0, x_0 - x^-) > 0$.

Pour tout $x \in]a, b[$, si $|x - x_0| \leq \alpha$ alors $x^- \leq x \leq x^+$ donc $y^- \leq f(x) \leq y^+$ d'où $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Ainsi f est continue en x_0 puis f continue sur $]a, b[$.

6 FONCTIONS COMPLEXES CONTINUES SUR $\mathbb{R}$

Proposition 6

Soient $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D$. La fonction f est continue en a (respectivement sur X) si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont.

Exemple 11

La fonction $t \mapsto e^{it}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car les fonctions sinus et cosinus le sont.