openstax™

Cálc-ulo

volumen 1

Cálculo volumen 1

AUTORES PRINCIPALES

GILBERT STRANG, MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY
EDWIN "JED" HERMAN, UNIVERSITY OF WISCONSIN-STEVENS POINT

openstax™

OpenStax
Rice University
6100 Main Street MS-375
Houston, Texas 77005

Para obtener más información sobre OpenStax, visite https://openstax.org.
Pueden adquirirse copias impresas individuales y pedidos al por mayor a través de nuestro sitio web.

VERSIÓN DE TAPA BLANDA ISBN-13	**978-1-711494-92-0**
VERSIÓN DIGITAL ISBN-13	**978-1-951693-51-0**
AÑO DE PUBLICACIÓN ORIGINAL	**2022**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 CJP 22

OPENSTAX

OpenStax ofrece libros de texto gratuitos, revisados por expertos y con licencia abierta para cursos de introducción a la universidad y del programa Advanced Placement®, así como software didáctico personalizado de bajo costo que apoyan el aprendizaje de los estudiantes. Es una iniciativa de tecnología educativa sin fines de lucro con sede en Rice University (Universidad Rice), que se compromete a brindarle acceso a los estudiantes a las herramientas que necesitan para terminar sus cursos y alcanzar sus objetivos educativos.

RICE UNIVERSITY

OpenStax, OpenStax CNX y OpenStax Tutor son iniciativas de Rice University. Como universidad líder en investigación con un compromiso particular con la educación de pregrado, Rice University aspira a una investigación pionera, una enseñanza insuperable y contribuciones para mejorar nuestro mundo. Su objetivo es cumplir esta misión y cultivar una comunidad diversa de aprendizaje y descubrimiento que forme líderes en todo el ámbito del esfuerzo humano.

RICE

APOYO FILANTRÓPICO

OpenStax agradece a nuestros generosos socios filantrópicos, que apoyan nuestra visión de mejorar las oportunidades educativas para todos los estudiantes. Para ver el impacto de nuestra comunidad de colaboradores y nuestra lista más actualizada de socios, visite openstax.org/impact.

Arnold Ventures
Chan Zuckerberg Initiative
Chegg, Inc.
Arthur and Carlyse Ciocca Charitable Foundation
Digital Promise
Ann and John Doerr
Bill & Melinda Gates Foundation
Girard Foundation
Google Inc.
The William and Flora Hewlett Foundation
The Hewlett-Packard Company
Intel Inc.
Rusty and John Jaggers
The Calvin K. Kazanjian Economics Foundation
Charles Koch Foundation
Leon Lowenstein Foundation, Inc.
The Maxfield Foundation
Burt and Deedee McMurtry
Michelson 20MM Foundation
National Science Foundation
The Open Society Foundations
Jumee Yhu and David E. Park III
Brian D. Patterson USA-International Foundation
The Bill and Stephanie Sick Fund
Steven L. Smith & Diana T. Go
Stand Together
Robin and Sandy Stuart Foundation
The Stuart Family Foundation
Tammy and Guillermo Treviño
Valhalla Charitable Foundation
White Star Education Foundation
Schmidt Futures
William Marsh Rice Universit

Contenido

Prefacio

Bienvenido a *Cálculo volumen 1*, un recurso de OpenStax. Este libro de texto se escribió para aumentar el acceso de los estudiantes a materiales de aprendizaje de alta calidad, manteniendo los más altos estándares de rigor académico a bajo o ningún costo.

Acerca de OpenStax

OpenStax es una organización sin fines de lucro con sede en la Universidad de Rice. Nuestra misión es mejorar el acceso de los estudiantes a la educación. Nuestro primer libro de texto universitario con licencia abierta se publicó en 2012, y desde entonces nuestra biblioteca se ha ampliado a más de 25 libros para cursos universitarios y de Colocación Avanzada (Advanced Placement, AP®) utilizados por cientos de miles de estudiantes. OpenStax Tutor, nuestra herramienta de aprendizaje personalizado de bajo costo, se utiliza en cursos universitarios de todo el país. A través de nuestras asociaciones con fundaciones filantrópicas y nuestra alianza con otras organizaciones de recursos educativos, OpenStax rompe las barreras más comunes para el aprendizaje y otorga poder a los estudiantes e instructores para que triunfen.

Sobre los recursos de OpenStax

Personalización

Cálculo volumen 1 tiene una licencia de Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC-BY-NC-SA), lo que significa que puede distribuir, mezclar y construir sobre el contenido, siempre y cuando proporcione la atribución a OpenStax y sus colaboradores de contenido, no utilice el contenido con fines comerciales y distribuya el contenido conforme la misma licencia CC-BY-NC-SA.

Puesto que nuestros libros tienen licencia abierta, usted es libre de utilizar todo el libro o de elegir las secciones que sean más relevantes para las necesidades de su curso. Siéntase libre de remezclar el contenido asignando a sus estudiantes determinados capítulos y secciones de su programa de estudios, en el orden que usted prefiera. Incluso puede proporcionar un enlace directo en su programa de estudios a las secciones en la vista web de su libro.

Los instructores también tienen la opción de crear una versión personalizada de su libro de OpenStax. La versión personalizada puede ponerse a disposición de los estudiantes en formato impreso o digital de bajo costo a través de la librería de su campus. Visite la página de su libro en OpenStax.org para obtener más información.

Errata

Todos los libros de texto de OpenStax se someten a un riguroso proceso de revisión. Sin embargo, como cualquier libro de texto de nivel profesional, a veces se producen errores. Dado que nuestros libros están en la web, podemos hacer actualizaciones periódicas cuando se considere pedagógicamente necesario. Si tiene una corrección que sugerir, envíela a través del enlace de la página de su libro en OpenStax.org. Los expertos en la materia revisan todas las sugerencias de erratas. OpenStax se compromete a ser transparente en todas las actualizaciones, por lo que también encontrará una lista de los cambios de erratas anteriores en la página de su libro en OpenStax.org.

Formato

Puede acceder a este libro de texto de forma gratuita en vista web o en PDF a través de OpenStax.org, y por un bajo costo en versión impresa.

Sobre *Cálculo volumen 1*

Cálculo está diseñado para el típico curso de cálculo general de dos o tres semestres, incorporando características innovadoras para mejorar el aprendizaje del estudiante. El libro guía a los estudiantes a través de los conceptos básicos del cálculo y les ayuda a entender cómo esos conceptos se aplican a sus vidas y al mundo que les rodea. Debido a la naturaleza integral del material, ofrecemos el libro en tres volúmenes para mayor flexibilidad y eficiencia. El volumen 1 cubre funciones, límites, derivadas e integración.

Cobertura y alcance

Nuestro libro de texto de *Cálculo volumen 1* se adhiere al alcance y la secuencia de la mayoría de los cursos de cálculo general en todo el país. Hemos trabajado para que el cálculo sea interesante y accesible para los estudiantes, pero manteniendo el rigor matemático inherente a la asignatura. Con este objetivo en mente, el contenido de los tres volúmenes de *Cálculo* se han desarrollado y organizado para proporcionar una progresión lógica desde los conceptos fundamentales hasta los más avanzados, con base en lo que los estudiantes ya han aprendido y haciendo hincapié en las conexiones entre los temas y entre la teoría y las aplicaciones. La meta de cada sección es que los estudiantes no solo reconozcan los conceptos, sino que trabajen con estos de forma que les resulten útiles en cursos posteriores y en sus futuras carreras. La organización y las características pedagógicas se desarrollaron y examinaron con los aportes de educadores de matemáticas dedicados al proyecto.

Volumen 1

- Capítulo 1: Funciones y gráficos
- Capítulo 2: Límites
- Capítulo 3: Derivadas
- Capítulo 4: Aplicaciones de las derivadas
- Capítulo 5: Integración
- Capítulo 6: Aplicaciones de la integración

Volumen 2

- Capítulo 1: Integración
- Capítulo 2: Aplicaciones de la integración
- Capítulo 3: Técnicas de integración
- Capítulo 4: Introducción a las ecuaciones diferenciales
- Capítulo 5: Secuencias y series
- Capítulo 6: Serie de potencias
- Capítulo 7: Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

Volumen 3

- Capítulo 1: Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares
- Capítulo 2: Vectores en el espacio
- Capítulo 3: Funciones de valores factoriales
- Capítulo 4: Diferenciación de funciones de varias variables
- Capítulo 5: Integración múltiple
- Capítulo 6: Cálculo vectorial
- Capítulo 7: Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Fundamentos pedagógicos

A lo largo del *Cálculo volumen 1* encontrará ejemplos y ejercicios que presentan ideas y técnicas clásicas, así como aplicaciones y métodos modernos. Las derivaciones y explicaciones se fundamentan en años de experiencia en el aula por parte de profesores de cálculo de gran experiencia, que se esfuerzan por lograr un equilibrio de claridad y rigor que ha tenido éxito con sus estudiantes. Las aplicaciones motivadoras abarcan temas importantes de la probabilidad, la biología, la ecología, los negocios y la economía, así como áreas de la física, la química, la ingeniería y la informática. Los **proyectos estudiantiles** de cada capítulo ofrecen a los estudiantes la oportunidad de explorar interesantes aspectos secundarios de las matemáticas puras y aplicadas: desde la determinación de la distancia de seguridad entre la tribuna y la pista en un circuito de Fórmula Uno hasta el cálculo del centro de masa del Skywalk del Gran Cañón o la velocidad límite de un paracaidista. **Las aplicaciones de apertura del capítulo** plantean problemas que se resuelven más adelante, utilizando las ideas tratadas en ese capítulo. Los problemas incluyen la fuerza hidráulica contra la presa Hoover y la comparación de la intensidad relativa de dos terremotos. Las **definiciones, las reglas** y los **teoremas** se destacan a lo largo del texto, incluyendo más de 60 **pruebas** de teoremas.

Evaluaciones que refuerzan los conceptos clave

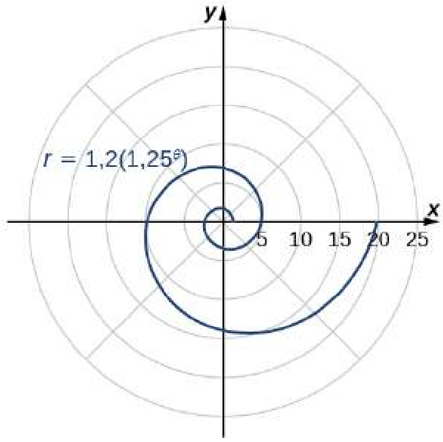
Los **ejemplos** del capítulo guían a los estudiantes a través de los problemas al plantear una pregunta, exponer una solución y luego pedirles a los estudiantes que practiquen la habilidad con una pregunta del Punto de control. Asimismo, el libro incluye evaluaciones al final de cada capítulo para que los estudiantes puedan aplicar lo que han aprendido mediante problemas de práctica. Muchos ejercicios están marcados con una **[T]** para indicar que se pueden resolver con ayuda de la tecnología, lo que incluye calculadoras o sistemas de álgebra computacional (Computer Algebra Systems, CAS). Las respuestas de los ejercicios seleccionados están disponibles en una **Clave de respuestas** al final del libro. El libro también incluye evaluaciones al final de cada capítulo para que los estudiantes puedan aplicar lo que han aprendido mediante problemas de práctica.

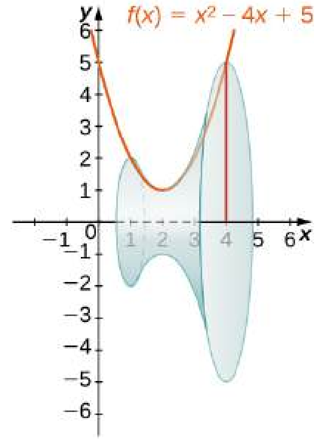
Enfoques trascendentales tempranos o tardíos

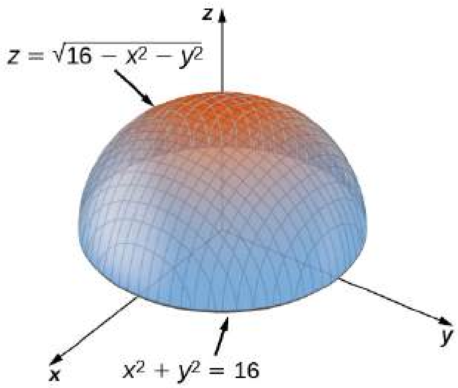
El libro *Cálculo volumen 1* está diseñado para dar cabida a los enfoques trascendentales temprano y tardío del cálculo. Las funciones exponenciales y logarítmicas se introducen de manera informal en el capítulo 1 y se presentan en términos más rigurosos en el capítulo 6. La diferenciación e integración de estas funciones se trata en los capítulos 3-5 para los instructores que quieran incluirlas con otros tipos de funciones. Estos temas, sin embargo, se encuentran en secciones separadas que los instructores que prefieren esperar hasta que se den las definiciones integrales pueden omitir antes de enseñar las derivaciones de cálculo de exponenciales y logaritmos.

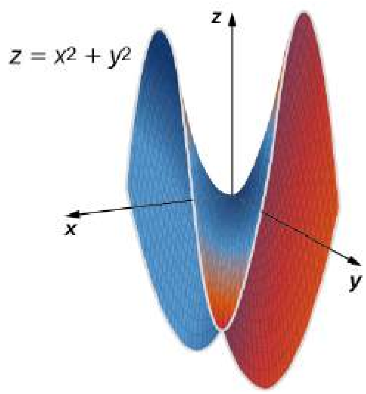
Amplio programa artístico

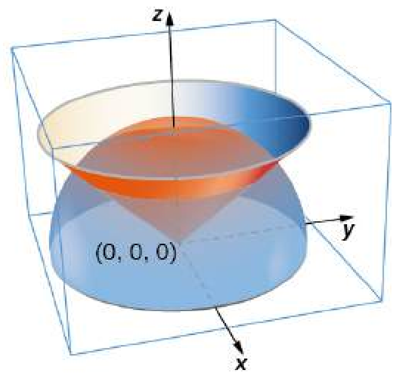
Nuestro programa artístico está diseñado para mejorar la comprensión de los estudiantes de los conceptos a través de ilustraciones, diagramas y fotografías claros y eficaces.











Recursos adicionales

Recursos para estudiantes e instructores

Hemos recopilado recursos adicionales tanto para los estudiantes como para los instructores, lo que incluye guías de inicio, un manual de soluciones para el instructor y diapositivas de PowerPoint. Los recursos para instructores requieren una cuenta de instructor verificada, que puede solicitarse en su inicio de sesión en OpenStax.org. Aproveche estos recursos para complementar su libro de OpenStax.

Centros comunitarios

OpenStax se asocia con el Instituto para el Estudio de la Administración del Conocimiento en la Educación (Institute for the Study of Knowledge Management in Education, ISKME) para ofrecer centros comunitarios en OER Commons, una plataforma para que los instructores compartan recursos creados por la comunidad que apoyan los libros de OpenStax, de forma gratuita. A través de nuestros centros comunitarios, los instructores pueden cargar sus propios materiales o descargar recursos para utilizarlos en sus cursos, lo que incluye anexos adicionales, material didáctico, multimedia y contenido relevante del curso. Animamos a los instructores a que se unan a los centros de los temas más relevantes para su docencia e investigación como una oportunidad tanto para enriquecer sus cursos como para relacionarse con otros profesores.

Para comunicarse con los centros comunitarios (Community Hubs), visite www.oercommons.org/hubs/OpenStax (https://www.oercommons.org/hubs/OpenStax).

Recursos asociados

Los socios de OpenStax son nuestros aliados en la misión de hacer asequible y accesible el material de aprendizaje de alta calidad a los estudiantes e instructores de todo el mundo. Sus herramientas se integran perfectamente con nuestros títulos de OpenStax a un bajo costo. Para acceder a los recursos asociados a su texto, visite la página de su libro en OpenStax.org.

Sobre los autores

Autores principales

Gilbert Strang, Massachusetts Institute of Technology

El Dr. Strang obtuvo su doctorado en la UCLA en 1959 y desde entonces enseña matemáticas en el MIT. Su libro de texto de Cálculo en línea es uno de los once que ha publicado y es la base de la que se ha derivado nuestro producto final, actualizado para el estudiante de hoy. Strang es un matemático condecorado y ex becario Rhodes en la Oxford University.

Edwin "Jed" Herman, University of Wisconsin-Stevens Point
El Dr. Herman se licenció en Matemáticas por el Harvey Mudd College en 1985, obtuvo un máster en Matemáticas por la UCLA en 1987 y un doctorado en Matemáticas por la University of Oregon en 1997. Actualmente es profesor en la University of Wisconsin-Stevens Point. Tiene más de 20 años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas en la universidad, es un mentor de investigación de los estudiantes, tiene experiencia en el desarrollo/diseño de cursos, y también es un ávido diseñador y jugador de juegos de mesa.

Autores colaboradores

Catherine Abbott, Keuka College
Nicoleta Virginia Bila, Fayetteville State University
Sheri J. Boyd, Rollins College
Joyati Debnath, Winona State University
Valeree Falduto, Palm Beach State College
Joseph Lakey, New Mexico State University
Julie Levandosky, Framingham State University
David McCune, William Jewell College
Michelle Merriweather, Bronxville High School
Kirsten R. Messer, Colorado State University - Pueblo
Alfred K. Mulzet, Florida State College at Jacksonville
William Radulovich (retired), Florida State College at Jacksonville
Erica M. Rutter, Arizona State University
David Smith, University of the Virgin Islands
Elaine A. Terry, Saint Joseph’s University
David Torain, Hampton University

Revisores

Marwan A. Abu-Sawwa, Florida State College at Jacksonville
Kenneth J. Bernard, Virginia State University
John Beyers, University of Maryland
Charles Buehrle, Franklin & Marshall College
Matthew Cathey, Wofford College
Michael Cohen, Hofstra University
William DeSalazar, Broward County School System
Murray Eisenberg, University of Massachusetts Amherst
Kristyanna Erickson, Cecil College
Tiernan Fogarty, Oregon Institute of Technology
David French, Tidewater Community College
Marilyn Gloyer, Virginia Commonwealth University
Shawna Haider, Salt Lake Community College
Lance Hemlow, Raritan Valley Community College
Jerry Jared, The Blue Ridge School
Peter Jipsen, Chapman University
David Johnson, Lehigh University
M.R. Khadivi, Jackson State University
Robert J. Krueger, Concordia University
Tor A. Kwembe, Jackson State University
Jean-Marie Magnier, Springfield Technical Community College
Cheryl Chute Miller, SUNY Potsdam
Bagisa Mukherjee, Penn State University, Worthington Scranton Campus
Kasso Okoudjou, University of Maryland College Park
Peter Olszewski, Penn State Erie, The Behrend College
Steven Purtee, Valencia College
Alice Ramos, Bethel College
Doug Shaw, University of Northern Iowa
Hussain Elalaoui-Talibi, Tuskegee University
Jeffrey Taub, Maine Maritime Academy

William Thistleton, SUNY Polytechnic Institute
A. David Trubatch, Montclair State University
Carmen Wright, Jackson State University
Zhenbu Zhang, Jackson State University

1 FUNCIONES Y GRÁFICOS

Figura 1.1 Una parte de la falla de San Andrés en California. En fallas importantes como esta se producen la mayoría de los terremotos más fuertes que han sido registrados (créditos: modificación del trabajo de Robb Hannawacker, National Park Service [NPS]).

Esquema del capítulo

Introducción

Durante los años recientes se han producido grandes terremotos en varios países del mundo. En enero de 2010, un terremoto de magnitud 7,3 sacudió Haití. En marzo de 2011, un terremoto de magnitud 9 sacudió el noreste de Japón. En abril de 2014, un terremoto de 8,2 grados de magnitud sacudió las costas del norte de Chile. ¿Qué significan estos números? En concreto, ¿cómo se compara un terremoto de magnitud 9 con uno de magnitud 8,2? ¿O con uno de 7,3? Más adelante en este capítulo mostraremos cómo se utilizan las funciones logarítmicas para comparar la intensidad relativa de dos terremotos con base en la magnitud de cada uno de ellos (vea el Ejemplo 1.39).

El cálculo es la matemática que describe los cambios en las funciones. En este capítulo repasaremos todas las funciones necesarias para el estudio del cálculo. Definiremos las funciones polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Repasaremos cómo evaluar estas funciones y mostramos las propiedades de sus gráficos. Proporcionaremos ejemplos de ecuaciones con términos que implican estas funciones e ilustramos las técnicas algebraicas necesarias para resolverlas. En resumen, este capítulo sienta las bases para el material que viene. Es esencial estar familiarizado con estas ideas antes de proceder a la introducción formal del cálculo en el siguiente capítulo.

1.1 Repaso de las funciones

Objetivos de aprendizaje

- **1.1.1** Utilizar la notación funcional para evaluar una función.
- **1.1.2** Determinar el dominio y el rango de una función.
- **1.1.3** Dibujar el gráfico de una función.
- **1.1.4** Hallar los ceros de una función.
- **1.1.5** Reconocer una función a partir de una tabla de valores.
- **1.1.6** Crear nuevas funciones a partir de dos o más funciones dadas.
- **1.1.7** Describir las propiedades de simetría de una función.

En esta sección proporcionaremos una definición formal de función y examinaremos varias formas de representar funciones: como tablas, fórmulas y gráficos. Estudiaremos la notación formal y los términos relacionados con las funciones. También definiremos la composición de las funciones y las propiedades de simetría. La mayor parte de este material será un repaso para usted, pero le será útil como referencia práctica para recordar algunas de las técnicas algebraicas útiles para trabajar con funciones.

Funciones

Dados dos conjuntos A y B, un conjunto con elementos que son pares ordenados (x, y), donde x es un elemento de A y y es un elemento de B, es una relación de A hasta B. Una relación de A hasta B define una relación entre esos dos conjuntos. Una función es un tipo especial de relación en la que cada elemento del primer conjunto está relacionado exactamente con un elemento del segundo conjunto. El elemento del primer conjunto se llama *entrada*; el elemento del segundo conjunto se llama *salida*. En matemáticas las funciones se utilizan constantemente para describir las relaciones entre dos conjuntos. Para cualquier función, cuando conocemos la entrada la salida está determinada, por lo que decimos que la salida es una función de la entrada. Por ejemplo, el área de un cuadrado está determinada por la longitud de su lado, por lo que decimos que el área (la salida) es una función de su longitud lateral (la entrada). La velocidad de una pelota lanzada al aire puede describirse como una función de la cantidad de tiempo que la pelota está en el aire. El costo del envío de un paquete es una función del peso del mismo. Dado que las funciones tienen tantos usos, es importante contar con definiciones y terminología precisas para estudiarlas.

Definición

Una **función** f consiste en un conjunto de entradas, un conjunto de salidas y una regla para asignar cada entrada a exactamente una salida. El conjunto de entradas se denomina **dominio** de la función. El conjunto de salidas se denomina **rango** de la función.

Por ejemplo, consideremos la función f, donde el dominio es el conjunto de todos los números reales y la regla es elevar al cuadrado la entrada. Entonces, la entrada $x = 3$ se asigna a la salida $3^2 = 9$. Como todo número real no negativo tiene una raíz cuadrada de valor real, todo número no negativo es un elemento del rango de esta función. Como no hay ningún número real con un cuadrado negativo, los números reales negativos no son elementos del rango. Concluimos que el rango es el conjunto de números reales no negativos.

Para una función general f con dominio D, utilizamos a menudo x para denotar la entrada y y para denotar la salida asociada a x. Al hacerlo, nos referimos a x como **variable independiente** y y como **variable dependiente**, ya que depende de x. Utilizando la notación de funciones, escribimos $y = f(x)$, y leemos esta ecuación como "y es igual a f de x." Para la función cuadrática descrita anteriormente, escribimos $f(x) = x^2$.

El concepto de función se puede visualizar mediante la Figura 1.2, la Figura 1.3 y la Figura 1.4.

Figura 1.2 Una función puede visualizarse como un dispositivo de entrada/salida.

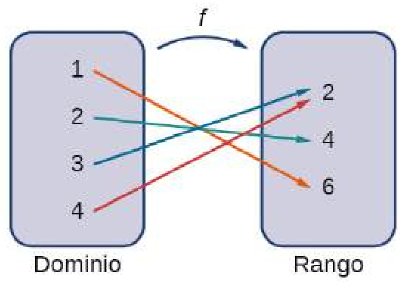


Figura 1.3 Una función asigna cada elemento del dominio a exactamente un elemento del rango. Aunque cada entrada solo puede enviarse a una salida, dos entradas diferentes pueden enviarse a la misma salida.

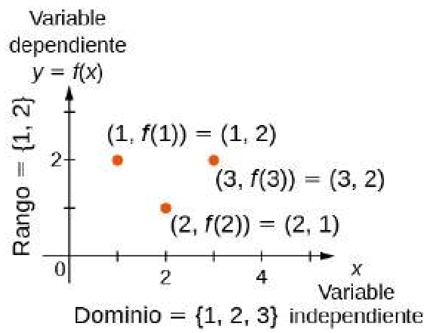


Figura 1.4 En este caso, el gráfico de una función f tiene un dominio de $\{1, 2, 3\}$ y un rango de $\{1, 2\}$. La variable independiente es x y la variable dependiente es y.

MEDIOS

Visite este enlace a la miniaplicación (http://www.openstax.org/l/grapherrors) para ver más sobre gráficos de funciones.

También podemos visualizar una función trazando puntos (x, y) en el plano de coordenadas donde $y = f(x)$. El gráfico de una función es el conjunto de todos estos puntos. Por ejemplo, consideremos la función f, donde el dominio es el conjunto $D = \{1, 2, 3\}$ y la regla es $f(x) = 3 - x$. En la Figura 1.5, trazamos un gráfico de esta función.

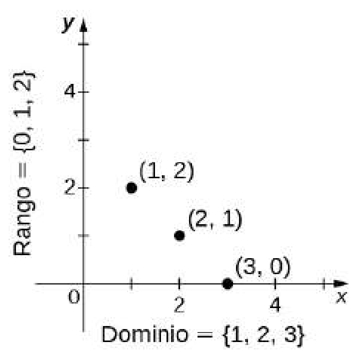


Figura 1.5 Aquí vemos un gráfico de la función f con dominio $\{1, 2, 3\}$ y regla $f(x) = 3 - x$. El gráfico está formado por los puntos $(x, f(x))$ para todo x en el dominio.

Toda función tiene un dominio. Sin embargo, a veces una función se describe mediante una ecuación, como en $f(x) = x^2$, sin que se indique un dominio específico. En este caso, el dominio se toma como el conjunto de todos los números reales x en el que $f(x)$ es un número real. Por ejemplo, como cualquier número real puede ser elevado al cuadrado, si no se especifica ningún otro dominio, consideramos el dominio de $f(x) = x^2$ para ser el conjunto de todos los números reales. Por otro lado, la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$ solo da una salida con sentido si x no es negativo. Por lo tanto, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de los números reales no negativos, a veces llamado *dominio natural*.

Para las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = \sqrt{x}$, los dominios son conjuntos con un número infinito de elementos. Es evidente que no podemos enumerar todos estos elementos. Cuando se describe un conjunto con un número infinito de elementos, suele ser útil utilizar la notación de conjunto o de intervalo. Cuando se utiliza la notación de construcción de conjuntos para describir un subconjunto de todos los números reales, denotado $\mathbb{R}$, escribimos

$$\{x|x \text{ tiene alguna propiedad}\}.$$

Leemos esto como el conjunto de números reales x tal que x tiene alguna propiedad. Por ejemplo, si nos interesamos en el conjunto de números reales que son mayores que uno pero menores que cinco, podríamos denotar este conjunto utilizando la notación de construcción de conjuntos escribiendo

$$\{x|1 < x < 5\}.$$

Un conjunto como éste, que contiene todos los números mayores que a y menores que b, también se puede denotar utilizando la notación intervalo (a, b). Por lo tanto,

$$(1, 5) = \{x|1 < x < 5\}.$$

Los números 1 y 5 se denominan *puntos finales* de este conjunto. Si queremos considerar el conjunto que incluye los puntos finales, lo denotaríamos escribiendo

$$[1, 5] = \{x|1 \leq x \leq 5\}.$$

Podemos utilizar una notación similar si queremos incluir uno de los extremos, pero no el otro. Para denotar el conjunto de los números reales no negativos utilizaremos la notación de construcción de conjuntos

$$\{x|0 \leq x\}.$$

El número más pequeño de este conjunto es el cero, pero este conjunto no tiene un número mayor. Utilizando la notación intervalo, usaríamos el símbolo ∞, que se refiere al infinito positivo, y escribiríamos el conjunto como

$$[0, \infty) = \left\{x \middle| 0 \leq x\right\}.$$

Es importante señalar que ∞ no es un número real. Su uso aquí es simbólico e indica que este conjunto incluye todos los números reales mayores o iguales a cero. Del mismo modo, si quisiéramos describir el conjunto de todos los números no positivos, podríamos escribir

$$(-\infty, 0] = \left\{x \middle| x \leq 0\right\}.$$

Aquí, la notación $-\infty$ se refiere al infinito negativo, e indica que estamos incluyendo todos los números menores o iguales a cero, por muy pequeños que sean. El conjunto

$$(-\infty, \infty) = \left\{x \middle| x \text{ es cualquier número real}\right\}$$

se refiere al conjunto de todos los números reales.

Algunas funciones se definen utilizando diferentes ecuaciones para diferentes partes de su dominio. Este tipo de funciones se conocen como *funciones definidas a trozos*. Por ejemplo, supongamos que queremos definir una función f con un dominio que es el conjunto de todos los números reales tales que $f(x) = 3x + 1$ para $x \geq 2$ y $f(x) = x^2$ por $x < 2$. Denotamos esta función escribiendo

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 2 \\ x^2 & x < 2 \end{cases}.$$

Al evaluar esta función para una entrada x, la ecuación a utilizar depende de si $x \geq 2$ o $x < 2$. Por ejemplo, ya que $5 > 2$, utilizamos el hecho de que $f(x) = 3x + 1$ para $x \geq 2$ y observamos que $f(5) = 3(5) + 1 = 16$. Por otro lado, para $x = -1$, utilizamos el hecho de que $f(x) = x^2$ por $x < 2$ y observamos que $f(-1) = 1$.

EJEMPLO 1.1

Evaluación de funciones

Para la función $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, evaluar

a. $f(-2)$ grandes.

b. $f\left(\sqrt{2}\right)$ grandes.

c. $f(a + h)$

Solución

Sustituya el valor dado de x en la fórmula de $f(x)$.

a. $f(-2) = 3(-2)^2 + 2(-2) - 1 = 12 - 4 - 1 = 7$
b. $f\left(\sqrt{2}\right) = 3\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} - 1 = 6 + 2\sqrt{2} - 1 = 5 + 2\sqrt{2}$
c. $$\begin{aligned} f(a+h) = 3(a+h)^2 + 2(a+h) - 1 &= 3\left(a^2 + 2ah + h^2\right) + 2a + 2h - 1 \\ &= 3a^2 + 6ah + 3h^2 + 2a + 2h - 1 \end{aligned}$$

1.1 Para $f(x) = x^2 - 3x + 5$, evaluar $f(1)$ y $f(a+h)$.

EJEMPLO 1.2

Hallar el dominio y el rango

Para cada una de las siguientes funciones determine el i. dominio y el ii. rango.

a. $f(x) = (x-4)^2 + 5$
b. $f(x) = \sqrt{3x+2} - 1$
c. $f(x) = \frac{3}{x-2}$

Solución

a. Considere $f(x) = (x-4)^2 + 5$.
   i. Ya que $f(x) = (x-4)^2 + 5$ es un número real para cualquier número real x, el dominio de f es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
   ii. Dado que $(x-4)^2 \geq 0$, sabemos que $f(x) = (x-4)^2 + 5 \geq 5$. Por lo tanto, el rango debe ser un subconjunto de $\{y | y \geq 5\}$. Para demostrar que cada elemento de este conjunto está en el rango, tenemos que demostrar que para una determinada y en ese conjunto, hay un número real x tales que $f(x) = (x-4)^2 + 5 = y$. Al resolver esta ecuación para x, notamos que necesitamos x de manera que
   $$(x-4)^2 = y - 5.$$
   Esta ecuación se satisface siempre que exista un número real x de manera que
   $$x - 4 = \pm\sqrt{y-5}.$$
   Ya que $y \geq 5$, la raíz cuadrada está bien definida. Concluimos que para $x = 4 \pm \sqrt{y-5}$, $f(x) = y$, y, por tanto, el rango es $\{y | y \geq 5\}$.

b. Considere $f(x) = \sqrt{3x+2} - 1$.
   i. Para encontrar el dominio de f, necesitamos la expresión $3x + 2 \geq 0$. Al resolver esta desigualdad, concluimos que el dominio es $\{x | x \geq -2/3\}$.
   ii. Para encontrar el rango de f, observamos que dado que $\sqrt{3x+2} \geq 0$, $f(x) = \sqrt{3x+2} - 1 \geq -1$. Por lo tanto, el rango de f debe ser un subconjunto del conjunto $\{y | y \geq -1\}$. Para demostrar que cada elemento de este conjunto está en el rango de f, tenemos que demostrar que para todos las y en este conjunto, existe un número real x en el dominio tal que $f(x) = y$. Supongamos que $y \geq -1$. Entonces, $f(x) = y$ si y solo si
   $$\sqrt{3x+2} - 1 = y.$$
   Al resolver esta ecuación para x, vemos que x debe resolver la ecuación
   $$\sqrt{3x+2} = y + 1.$$
   Ya que $y \geq -1$, tal x puede existir. Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación, tenemos $3x + 2 = (y+1)^2$.
   Por lo tanto, necesitamos
   $$3x = (y+1)^2 - 2,$$

lo que implica

$$x = \frac{1}{3}(y+1)^2 - \frac{2}{3}.$$

Solo tenemos que verificar que x está en el dominio de f. Dado que el dominio de f consiste en todos los números reales mayores o iguales a $-2/3$, y

$$\frac{1}{3}(y+1)^2 - \frac{2}{3} \geq -\frac{2}{3},$$

existe una x en el dominio de f. Concluimos que el rango de f es $\{y|y \geq -1\}$.

c. Considere $f(x) = 3/(x-2)$.
   i. Dado que $3/(x-2)$ se define cuando el denominador es distinto de cero, el dominio es $\{x|x \neq 2\}$.
   ii. Para encontrar el rango de f, necesitamos encontrar los valores de y tales que exista un número real x en el dominio con la propiedad en que

$$\frac{3}{x-2} = y.$$

Al resolver esta ecuación para x, hallamos que

$$x = \frac{3}{y} + 2.$$

Por lo tanto, siempre que $y \neq 0$, existe un número real x en el dominio tal que $f(x) = y$. Entonces, el rango es $\{y|y \neq 0\}$.

1.2 Halle el dominio y el rango para $f(x) = \sqrt{4-2x} + 5$.

Representación de funciones

Normalmente, una función se representa utilizando una o varias de las siguientes herramientas:

- una tabla,
- un gráfico,
- una fórmula

Podemos identificar una función en cada forma, pero también utilizarlas juntas. Por ejemplo, podemos representar en un gráfico los valores de una tabla o crear una tabla a partir de una fórmula.

Tablas

Las funciones descritas mediante una **tabla de valores** surgen con frecuencia en las aplicaciones del mundo real. Considere el siguiente ejemplo sencillo. Podemos expresar la temperatura de un día determinado en función de la hora. Supongamos que registramos la temperatura cada hora durante un periodo de 24 horas que comienza a medianoche. Entonces, deducimos que nuestra variable de entrada x es el momento después de medianoche, medido en horas, y que la variable de salida y es la temperatura x horas después de la medianoche, medida en grados Fahrenheit. Registramos nuestros datos en la Tabla 1.1.

Horas después de la medianoche	Temperatura $(°F)$	Horas después de la medianoche	Temperatura $(°F)$
0	58	12	84
1	54	13	85
2	53	14	85

Tabla 1.1 Temperatura en función de la hora del día

Horas después de la medianoche	Temperatura $(°F)$	Horas después de la medianoche	Temperatura $(°F)$
3	52	15	83
4	52	16	82
5	55	17	80
6	60	18	77
7	64	19	74
8	72	20	69
9	75	21	65
10	78	22	60
11	80	23	58

Tabla 1.1 Temperatura en función de la hora del día

Podemos ver en la tabla que la temperatura es una función del tiempo, y la temperatura disminuye, luego aumenta y luego vuelve a disminuir. Sin embargo, no podemos obtener una imagen clara del comportamiento de la función sin graficarla.

Gráficos

Dada una función f descrita por una tabla, podemos ofrecer una imagen visual de la función en forma de gráfico. La representación gráfica de las temperaturas que figuran en la Tabla 1.1 puede darnos una mejor idea de su fluctuación a lo largo del día. La Figura 1.6 muestra el gráfico en función de la temperatura.

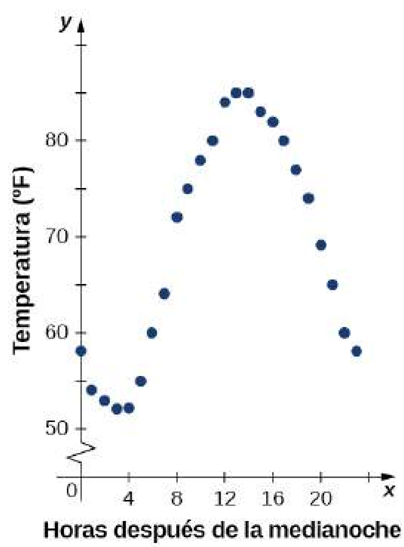


Figura 1.6 El gráfico de los datos de la Tabla 1.1 muestra la temperatura en función del tiempo.

A partir de los puntos trazados en el gráfico en la Figura 1.6 podemos visualizar su forma general. A menudo es útil conectar los puntos del gráfico, lo cual representa los datos de la tabla. En este ejemplo, aunque no podemos llegar a ninguna conclusión definitiva sobre cuál era la temperatura en cualquier momento en el que esta no se registró, dado el número de puntos de datos recogidos y el patrón en estos puntos, es razonable sospechar que las temperaturas en otros momentos siguieron un patrón similar, como podemos ver en la Figura 1.7.

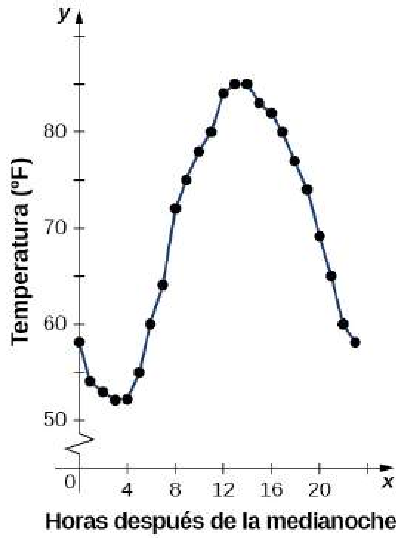


Figura 1.7 La conexión de los puntos en la Figura 1.6 muestra el patrón general de los datos.

Fórmulas algebraicas

A veces los valores de una función no se expresan en forma de una tabla, sino que se nos presentan en una fórmula explícita. Las fórmulas aparecen en muchas aplicaciones. Por ejemplo, el área de un círculo de radio r viene dada por la fórmula $A(r) = \pi r^2$. Cuando se lanza un objeto desde el suelo hacia arriba con una velocidad inicial v_0 pies/s, su altura sobre el suelo desde que se lanza hasta que cae al suelo viene dada por la fórmula $s(t) = -16t^2 + v_0 t$. Cuando P dólares en una cuenta con una tasa de interés anual r compuesto continuamente, la cantidad de dinero después de t años viene dada por la fórmula $A(t) = Pe^{rt}$. Las fórmulas algebraicas son herramientas importantes para calcular los valores de las funciones. Con frecuencia también representamos estas funciones visualmente en forma de gráfico.

Dada una fórmula algebraica para una función f, el gráfico de f es el conjunto de puntos $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f como $f(x)$ está en el rango. Para graficar una función dada por una fórmula, es útil comenzar usando la fórmula para crear una tabla de entradas y salidas. Si el dominio de f consta de un número infinito de valores, no podemos enumerarlos todos, pero como enumerar algunas de las entradas y salidas puede ser muy útil, esta suele ser una buena manera de empezar.

Al crear una tabla de entradas y salidas, normalmente comprobamos si el cero es una salida. Esos valores de x donde $f(x) = 0$ se denominan los **ceros de una función**. Por ejemplo, los ceros de $f(x) = x^2 - 4$ son $x = \pm 2$. Los ceros determinan dónde está el gráfico de f interseca con el eje x, que nos da más información sobre la forma del gráfico de la función. Es posible que gráfico de una función de una función nunca interseque el eje *x*, o puede intersecar múltiples (o incluso infinitas) veces.

Otro punto de interés es la intersección y, si existe. La intersección y viene dada por $(0, f(0))$.

Dado que una función tiene exactamente una salida para cada entrada, el gráfico de una función puede tener, como máximo, una intersección y. Si $x = 0$ está en el dominio de una función f, entonces f tiene exactamente una intersección y. Si $x = 0$ no está en el dominio de f, entonces f no tiene una intersección y. Del mismo modo, para cualquier número real c, si c está en el dominio de f, hay exactamente una salida $f(c)$, y la línea $x = c$ interseca el gráfico de f exactamente una vez. Por otro lado, si c no está en el dominio de f, $f(c)$ no está definida y la línea $x = c$ no interseca el gráfico de f. Esta propiedad se resume en la **prueba de la línea vertical**.

Regla: prueba de la línea vertical

Dada una función f, todas las líneas verticales que se puedan dibujar intersecan el gráfico de f solo una vez. Si cualquier línea vertical interseca un conjunto de puntos más de una vez, entonces ese conjunto no representa una función.

Podemos utilizar esta prueba para determinar si un conjunto de puntos trazados representa el gráfico de una función (Figura 1.8).

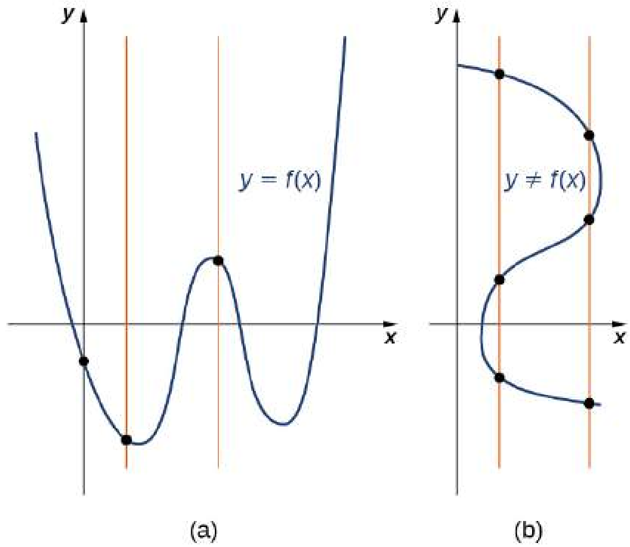


Figura 1.8 (a) El conjunto de puntos trazados representa el gráfico de una función porque cada línea vertical interseca el conjunto de puntos solo una vez. (b) El conjunto de puntos trazados no representa el gráfico de una función porque algunas líneas verticales intersecan el conjunto de puntos más de una vez.

EJEMPLO 1.3

Hallar ceros e intersecciones y de una función

Considere la función $f(x) = -4x + 2$.

a. Halle todos los ceros de f.
b. Halle la intersección y (si la hay).
c. Dibuje un gráfico de f.

Solución

a. Para encontrar los ceros, resuelva $f(x) = -4x + 2 = 0$. Descubrimos que f tiene un cero en $x = 1/2$.
b. La intersección en y viene dada por $(0, f(0)) = (0, 2)$.
c. Dado que f es una función lineal de la forma $f(x) = mx + b$ que pasa por los puntos $(1/2, 0)$ y $(0, 2)$, podemos dibujar el gráfico de f (Figura 1.9).

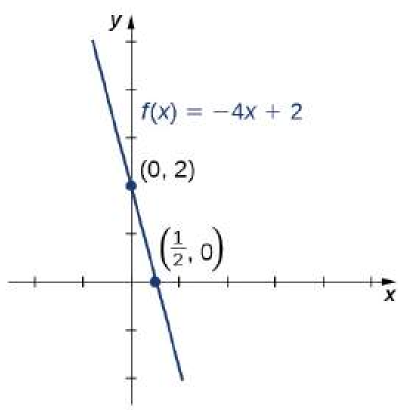


Figura 1.9 La función $f(x) = -4x + 2$ es una línea con una intersección x $(1/2, 0)$ y de y $(0, 2)$.

EJEMPLO 1.4

Uso de ceros e intersecciones y para dibujar un gráfico

Considere la función $f(x) = \sqrt{x + 3} + 1$.

a. Halle todos los ceros de f.
b. Halle la intersección y (si la hay).
c. Dibuje un gráfico de f.

Solución

a. Para encontrar los ceros, resuelva $\sqrt{x+3}+1=0$. Esta ecuación implica $\sqrt{x+3}=-1$. Dado que $\sqrt{x+3}\geq 0$ para todo x, esta ecuación no tiene solución, y por lo tanto f no tiene ceros.
b. La intersección y viene dada por $(0, f(0)) = (0, \sqrt{3}+1)$.
c. Para graficar esta función hacemos una tabla de valores. Dado que necesitamos $x+3\geq 0$, tenemos que elegir los valores de $x\geq -3$. Elegimos valores que facilitan la evaluación de la función raíz cuadrada.

x	-3	-2	1
$f(x)$. grandes.	1	2	3

Tabla 1.2

Al utilizar la tabla y saber que la función es una raíz cuadrada, el gráfico de f debería ser similar al gráfico de $y=\sqrt{x}$, y entonces dibujamos el gráfico (Figura 1.10).

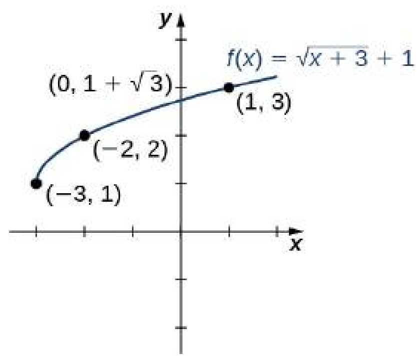


Figura 1.10 El gráfico de $f(x)=\sqrt{x+3}+1$ tiene una intersección y, pero no intersecciones x.

1.3 Halle los ceros de $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$.

EJEMPLO 1.5

Hallar la altura de un objeto en caída libre

Si se deja caer una bola desde una altura de 100 ft, su altura s en el momento t viene dada por la función $s(t) = -16t^2 + 100$, donde s se mide en pies y t se mide en segundos. El dominio se restringe al intervalo $[0, c]$, donde $t=0$ es el momento en el que se deja caer la bola y $t=c$ es el momento en que la bola toca el suelo.

a. Elabore una tabla que muestre la altura $s(t)$ cuando $t = 0, 0{,}5, 1, 1{,}5, 2,$ y $2{,}5$. Con los datos de la tabla, determine el dominio de esta función. Es decir, hallar el momento c cuando la bola toca el suelo.
b. Dibuje un gráfico de s.

Solución

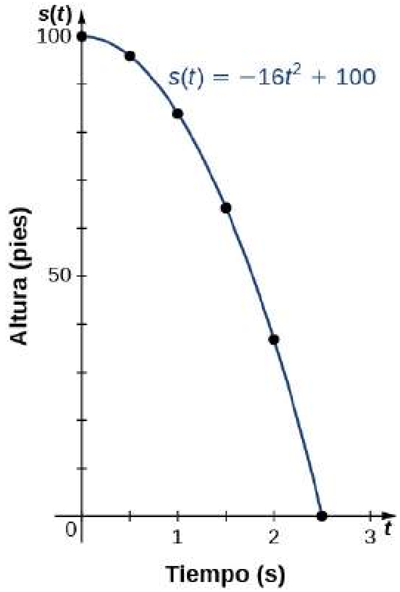
a.

t	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
$s(t)$. grandes.	100	96	84	64	36	0

Tabla 1.3 Altura s en función del tiempo t

Dado que el balón toca el suelo cuando $t = 2{,}5$, el dominio de esta función es el intervalo $[0, 2{,}5]$.

b.



Tenga en cuenta que para esta función y la función $f(x) = -4x + 2$ graficada en la Figura 1.9, los valores de $f(x)$ son cada vez más pequeños ya que x es cada vez más grande. Una función con esta propiedad se denomina decreciente. Por otro lado, para la función $f(x) = \sqrt{x+3} + 1$ graficada en la Figura 1.10, los valores de $f(x)$ se hacen más grandes a medida que los valores de x son cada vez más grandes. Una función con esta propiedad se denomina creciente. Sin embargo, es importante señalar que una función puede ser creciente en algún intervalo o intervalos y decreciente en otro u otros intervalos. Por ejemplo, al utilizar nuestra función de temperatura en la Figura 1.6, podemos ver que la función es decreciente en el intervalo $(0, 4)$, creciente en el intervalo $(4, 14)$, y luego decreciente en el intervalo $(14, 23)$. En la siguiente definición precisamos la idea de que una función aumenta o disminuye en un intervalo determinado.

Definición

Decimos que una función f es **creciente en el intervalo I** si para todas $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ cuando } x_1 < x_2.$$

Decimos que f es estrictamente creciente en el intervalo I si para todas $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ cuando } x_1 < x_2.$$

Decimos que una función f es **decreciente en el intervalo I** si para todas $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_1) \geq f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2.$$

Decimos que una función f es estrictamente decreciente en el intervalo I si para todas $x_1, x_2 \in I$,

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ si } x_1 < x_2.$$

Por ejemplo, la función $f(x) = 3x$ es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ porque $3x_1 < 3x_2$ siempre que $x_1 < x_2$. Por otro lado, la función $f(x) = -x^3$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$ porque $-x_1^3 > -x_2^3$ siempre que $x_1 < x_2$ (Figura 1.11).

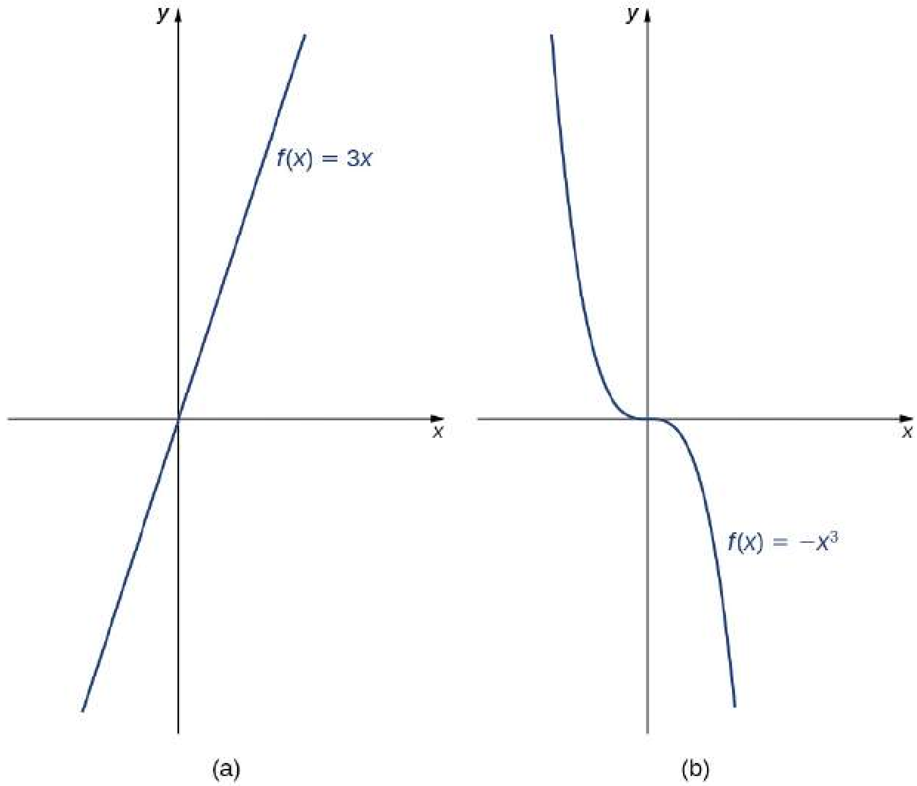


Figura 1.11 (a) La función $f(x) = 3x$ es creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. (b) La función $f(x) = -x^3$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Combinación de funciones

Ya revisamos las características básicas de las funciones y podemos ver qué ocurre con estas propiedades cuando combinamos funciones de diferentes maneras, utilizando operaciones matemáticas básicas para crear nuevas funciones. Por ejemplo, si el costo para una empresa por la fabricación de x artículos se describe mediante la función $C(x)$ y los ingresos creados por la venta de x artículos se describe mediante la función $R(x)$, luego el beneficio de la fabricación y venta de x se define como $P(x) = R(x) - C(x)$. Al utilizar la diferencia entre dos funciones, creamos una nueva función.

De manera alternativa podemos crear una nueva función componiendo dos funciones. Por ejemplo, dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x + 1$, la función compuesta $f \circ g$ se define de forma que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (3x+1)^2.$$

La función compuesta $g \circ f$ se define de forma que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 1 = 3x^2 + 1.$$

Tenga en cuenta que estas dos nuevas funciones son diferentes entre sí.

Combinación de funciones con operadores matemáticos

Para combinar funciones utilizando operadores matemáticos, simplemente escribimos las funciones con el operador y simplificamos. Dadas dos funciones f y g, podemos definir cuatro funciones nuevas:

$$\begin{array}{ll}
(f+g)(x) = f(x) + g(x) & \text{Suma} \\
(f-g)(x) = f(x) - g(x) & \text{Diferencia} \\
(f \,.\, g)(x) = f(x)\,g(x) & \text{Producto} \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ para } g(x) \neq 0 & \text{Cociente}
\end{array}$$

EJEMPLO 1.6

Combinación de funciones mediante operaciones matemáticas

Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 - 1$, halle cada una de las siguientes funciones y enuncie su dominio.

a. $(f + g)(x)$ grandes.
b. $(f - g)(x)$ grandes.
c. $(f \cdot g)(x)$ grandes.
d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Solución

a. $(f + g)(x) = (2x - 3) + (x^2 - 1) = x^2 + 2x - 4$. El dominio de esta función es el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$.
b. $(f - g)(x) = (2x - 3) - (x^2 - 1) = -x^2 + 2x - 2$. El dominio de esta función es el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$.
c. $(f \cdot g)(x) = (2x - 3)(x^2 - 1) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$. El dominio de esta función es el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$.
d. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x-3}{x^2-1}$. El dominio de esta función es $\{x | x \neq \pm 1\}$.

1.4 Para $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 5$, halle $(f/g)(x)$ e indique su dominio.

Composición de funciones

Cuando componemos funciones, tomamos una función de una función. Por ejemplo, supongamos que la temperatura T en un día determinado se describe en función del tiempo t (medido en horas después de la medianoche) como en la Tabla 1.1. Supongamos que el costo C, para calentar o enfriar un edificio por 1 hora, puede describirse en función de la temperatura T. Al combinar estas dos funciones, podemos describir el costo de calefacción o refrigeración de un edificio en función del tiempo, evaluando $C(T(t))$. Definimos una nueva función, que se denota $C \circ T$, y que se define tal que $(C \circ T)(t) = C(T(t))$ para todos los t en el dominio de T. Esta nueva función se denomina función compuesta. Observamos que como el costo es una función de la temperatura y la temperatura es una función del tiempo, tiene sentido definir esta nueva función $(C \circ T)(t)$. No tiene sentido considerar $(T \circ C)(t)$, porque la temperatura no es una función del costo.

Definición

Considere la función f con dominio A y rango B, y la función g con dominio D y rango E. Si B es un subconjunto de D, entonces la **función compuesta** $(g \circ f)(x)$ es la función con dominio A tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{1.1}$$

Una función compuesta $g \circ f$ puede verse en dos pasos. En primer lugar, la función f asigna cada entrada x en el dominio de f a su salida $f(x)$ en el rango de f. En segundo lugar, puesto que el rango de f es un subconjunto del dominio de g, la salida $f(x)$ es un elemento del dominio de g, y por lo tanto se asigna a una salida $g(f(x))$ en el rango de g. En la Figura 1.12, vemos una imagen de una función compuesta.

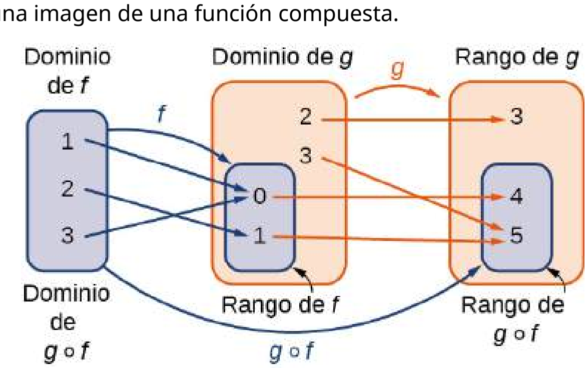


Figura 1.12 Para la función compuesta $g \circ f$, tenemos $(g \circ f)(1) = 4$, $(g \circ f)(2) = 5$, y $(g \circ f)(3) = 4$.

EJEMPLO 1.7

Composición de funciones definidas por fórmulas

Considere las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 1/x$.

a. Halle $(g \circ f)(x)$ e indique su dominio y rango.
b. Evalúe $(g \circ f)(4), (g \circ f)(-1/2)$.
c. Halle $(f \circ g)(x)$ e indique su dominio y rango.
d. Evalúe $(f \circ g)(4), (f \circ g)(-1/2)$.

Solución

a. Podemos hallar la fórmula para $(g \circ f)(x)$ de dos maneras diferentes. Podríamos escribir

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Como alternativa, podríamos escribir

$$(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Dado que $x^2 + 1 \neq 0$ para todos los números reales x, el dominio de $(g \circ f)(x)$ es el conjunto de todos los números reales. Dado que $0 < 1/\left(x^2 + 1\right) \leq 1$, el rango es, como máximo, el intervalo $(0, 1]$. Para demostrar que el rango es todo este intervalo, suponemos que $y = 1/\left(x^2 + 1\right)$ y resolver esta ecuación para x para demostrar que para todas las y en el intervalo $(0, 1]$, existe un número real x de manera que $y = 1/\left(x^2 + 1\right)$. Al resolver esta ecuación para x, vemos que $x^2 + 1 = 1/y$, lo que implica que

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{y} - 1}.$$

Si y esté en el intervalo $(0, 1]$, la expresión bajo el radical es no negativa, y por tanto existe un número real x de manera que $1/\left(x^2 + 1\right) = y$. Concluimos que el rango de $g \circ f$ es el intervalo $(0, 1]$.

b. $(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(4^2 + 1) = g(17) = \frac{1}{17}$

$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = g\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{4}{5}$

c. Podemos hallar una fórmula para $(f \circ g)(x)$ de dos maneras. Podríamos escribir

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1.$$

Como alternativa, podríamos escribir

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1.$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números reales x tal que $x \neq 0$. Para hallar el rango de f, necesitamos hallar todos los valores y para el que existe un número real $x \neq 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1 = y.$$

Al resolver esta ecuación para x, notamos que necesitamos x para satisfacer

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 = y - 1,$$

que se simplifica a

$$\frac{1}{x} = \pm\sqrt{y - 1}.$$

Finalmente, obtenemos

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{y-1}}.$$

Dado que $1/\sqrt{y-1}$ es un número real si y solo si $y > 1$, el rango de f es el conjunto $\{y|y > 1\}$.

d. $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}$
$(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

En el Ejemplo 1.7 podemos ver que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. En términos generales, esto nos dice que el orden en que componemos las funciones es importante.

1.5 Supongamos que $f(x) = 2 - 5x$. Supongamos que $g(x) = \sqrt{x}$. Halle $(f \circ g)(x)$.

EJEMPLO 1.8

Composición de funciones definidas por tablas

Considere las funciones f y g descritas por la Tabla 1.4 y la Tabla 1.5.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$.	0	4	2	4	-2	0	-2	4

Tabla 1.4

x	-4	-2	0	2	4
$g(x)$.	1	0	3	0	5

Tabla 1.5

a. Evalúe $(g \circ f)(3), (g \circ f)(0)$.
b. Indique el dominio y el rango de $(g \circ f)(x)$.
c. Evalúe $(f \circ f)(3), (f \circ f)(1)$.
d. Indique el dominio y el rango de $(f \circ f)(x)$.

Solución

a. $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(-2) = 0$
$(g \circ f)(0) = g(4) = 5$
b. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Dado que el rango de f es el conjunto $\{-2, 0, 2, 4\}$, el rango de $g \circ f$ es el conjunto $\{0, 3, 5\}$.
c. $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(-2) = 4$
$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(-2) = 4$
d. El dominio de $f \circ f$ es el conjunto $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Dado que el rango de f es el conjunto $\{-2, 0, 2, 4\}$, el rango de $f \circ f$ es el conjunto $\{0, 4\}$.

EJEMPLO 1.9

Aplicación que implica una función compuesta

Una tienda anuncia una venta de $20\ \%$ de descuento en toda la mercancía. Caroline tiene un cupón que le da derecho a un descuento adicional del $15\ \%$ en cualquier artículo, incluido los que están de rebaja. Si Caroline decide comprar un artículo con un precio original de x dólares, ¿cuánto acabará pagando si aplica su cupón al precio de venta? Resuelva este problema utilizando una función compuesta.

Solución

Dado que el precio de venta es del $20\ \%$ de descuento del precio original, si un artículo cuesta x dólares, su precio de venta viene dado por $f\,(x) = 0{,}80x$. Dado que el cupón da derecho a un $15\ \%$ de descuento en cualquier artículo, si un artículo cuesta y dólares, el precio, después de aplicar el cupón, viene dado por $g(y) = 0{,}85y$. Por lo tanto si el precio original es de x dólares, su precio de venta será de $f(x) = 0{,}80x$ y luego su precio definitivo después del cupón será $g(f(x)) = 0{,}85(0{,}80x) = 0{,}68x$.

1.6 Si los artículos están a la venta por $10\ \%$ de descuento de su precio original y un cliente tiene un cupón para un descuento adicional de $30\ \%$, ¿cuál será el precio definitivo de un artículo que originalmente cuesta x dólares, después de aplicar el cupón al precio de venta?

Simetría de las funciones

Los gráficos de ciertas funciones tienen propiedades de simetría que nos ayudan a entender la función y la forma de su gráfico. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ que se muestra en la Figura 1.13(a). Si tomamos la parte de la curva que se encuentra a la derecha del eje y y la volteamos sobre el eje *y*, queda exactamente encima de la curva a la izquierda del eje *y*. En este caso, decimos que la función tiene **simetría en torno al eje *y***. Por otro lado, la función $f(x) = x^3 - 4x$ que se muestra en la Figura 1.13(b). Si tomamos el gráfico y lo giramos $180°$ sobre el origen, el nuevo gráfico tendrá exactamente el mismo aspecto. En este caso, decimos que la función tiene **simetría respecto al origen**.

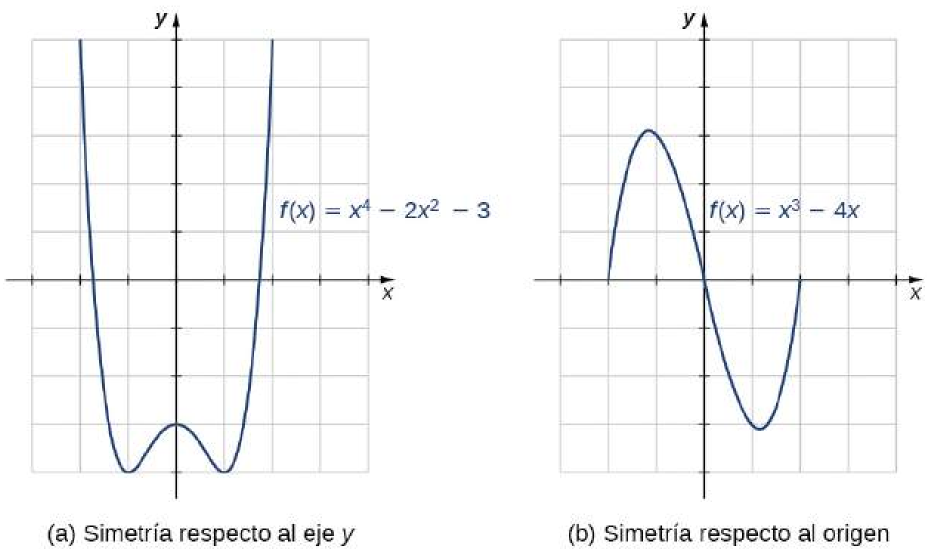


Figura 1.13 (a) Un gráfico que es simétrico respecto al eje y. (b) Un gráfico que es simétrico respecto al origen.

Si nos dan el gráfico de una función, es fácil ver si aquel tiene una de estas propiedades de simetría. Pero sin un gráfico, ¿cómo podemos determinar algebraicamente si una función f presenta simetría? Observando de nuevo la Figura 1.14, vemos que ya que f es simétrico respecto al eje y, si el punto (x, y) esté en el gráfico, el punto $(-x, y)$ está en el gráfico. En otras palabras, $f\,(-x) = f\,(x)$. Si una función f tiene esa propiedad, decimos que f es una función par, que tiene simetría en torno al eje *y*. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es par porque

$$f\,(-x) = (-x)^2 = x^2 = f\,(x)\,.$$

En cambio, si volvemos a mirar la Figura 1.14, si una función f es simétrica respecto al origen, entonces siempre que el punto (x, y) esté en el gráfico, el punto $(-x, -y)$ también está en el gráfico. En otras palabras, $f(-x) = -f(x)$. Si f tiene esa propiedad, decimos que f es una función impar, que tiene simetría respecto al origen. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Definición

Si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el dominio de f, entonces f es una **función par**. Una función par es simétrica con respecto al y.

Si los valores de $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f, entonces f es una **función impar**. Una función impar es simétrica respecto al origen.

EJEMPLO 1.10

Funciones pares e impares

Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de las dos.

a. $f(x) = -5x^4 + 7x^2 - 2$
b. $f(x) = 2x^5 - 4x + 5$
c. $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$

Solución

Para determinar si una función es par o impar, evaluamos $f(-x)$ y la comparamos con $f(x)$ y $-f(x)$.

a. $f(-x) = -5(-x)^4 + 7(-x)^2 - 2 = -5x^4 + 7x^2 - 2 = f(x)$. Por lo tanto, f es par.
b. $f(-x) = 2(-x)^5 - 4(-x) + 5 = -2x^5 + 4x + 5$. Ahora, $f(-x) \neq f(x)$. Además, si observamos que $-f(x) = -2x^5 + 4x - 5$, vemos que $f(-x) \neq -f(x)$. Por lo tanto, f no es ni par ni impar.
c. $f(-x) = 3(-x)/((-x)^2 + 1\} = -3x/(x^2 + 1) = -[3x/(x^2 + 1)] = -f(x)$. Por lo tanto, f es impar.

1.7 Determine si $f(x) = 4x^3 - 5x$ es par, impar o ninguna de las dos.

Una función simétrica que aparece con frecuencia es la **función de valor absoluto**, que se escribe como $|x|$. La función de valor absoluto se define como

$$f(x) = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}. \tag{1.2}$$

Algunos estudiantes describen esta función afirmando que "convierte todo en positivo" Por la definición de la función de valor absoluto, vemos que si $x < 0$, entonces $|x| = -x > 0$, y si $x > 0$, entonces $|x| = x > 0$. Sin embargo, para $x = 0, |x| = 0$. Por lo tanto es más exacto decir que para todas las entradas diferentes a cero la salida es positiva, pero si $x = 0$, la salida $|x| = 0$. Concluimos que el rango de la función de valor absoluto es $\{y|y \geq 0\}$. En la Figura 1.14 vemos que la función de valor absoluto es simétrica con respecto al eje y; por lo tanto, es una función par.

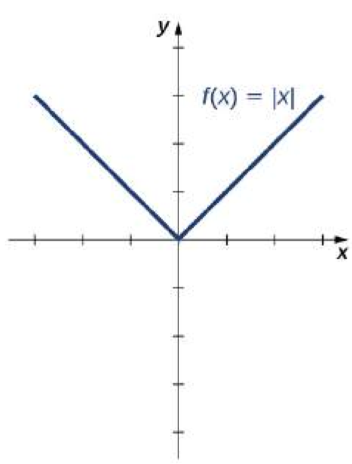


Figura 1.14 El gráfico de $f(x) = |x|$ es simétrico respecto al eje de la y.

EJEMPLO 1.11

Trabajar con la función de valor absoluto

Calcule el dominio y el rango de la función $f(x) = 2|x - 3| + 4$.

Solución

Como la función de valor absoluto está definida para todos los números reales, su dominio es $(-\infty, \infty)$. Dado que $|x - 3| \geq 0$ para todo x, la función $f(x) = 2|x - 3| + 4 \geq 4$. Por lo tanto, el rango es, como máximo, el conjunto $\{y|y \geq 4\}$. Para ver que el rango es en efecto todo este conjunto, necesitamos mostrar que para $y \geq 4$ existe un número real x de manera que

$$2|x - 3| + 4 = y.$$

Un número real x satisface esta ecuación siempre y cuando

$$|x - 3| = \frac{1}{2}(y - 4).$$

Dado que $y \geq 4$, sabemos que $y - 4 \geq 0$, y por tanto el lado derecho de la ecuación es no negativo, por lo que es posible que exista una solución. Además,

$$|x - 3| = \begin{cases} -(x - 3) & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Por lo tanto, vemos que hay dos soluciones:

$$x = \pm\frac{1}{2}(y - 4) + 3.$$

El rango de esta función es $\{y|y \geq 4\}$.

1.8 Para que la función $f(x) = |x + 2| - 4$, halle el dominio y el rango.

SECCIÓN 1.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, (a) determine el dominio y el rango de cada relación y (b) diga si la relación es una función.

1.

x	y	x	y
–3	9	1	1
–2	4	2	4
–1	1	3	9
0	0		

2.

x	y	x	y
–3	–2	1	1
–2	–8	2	8
–1	–1	3	–2
0	0		

3.

x	y	x	y
1	–3	1	1
2	–2	2	2
3	–1	3	3
0	0		

4.

x	y	x	y
1	1	5	1
2	1	6	1
3	1	7	1
4	1		

5.

x	y	x	y
3	3	15	1
5	2	21	2
8	1	33	3
10	0		

6.

x	y	x	y
−7	11	1	−2
−2	5	3	4
−2	1	6	11
0	−1		

En los siguientes ejercicios, halle los valores de cada función, si existen, y luego simplifique.

a. $f(0)$ *b.* $f(1)$ *c.* $f(3)$ *d.* $f(-x)$ *e.* $f(a)$ *f.* $f(a+h)$ *grandes.*

7. $f(x) = 5x - 2$

8. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$

9. $f(x) = \frac{2}{x}$

10. $f(x) = |x - 7| + 8$

11. $f(x) = \sqrt{6x + 5}$

12. $f(x) = \frac{x-2}{3x+7}$

13. $f(x) = 9$

En los siguientes ejercicios, halle el dominio, el rango y todos los ceros/intersecciones de las funciones, si los hay.

14. $f(x) = \frac{x}{x^2-16}$

15. $g(x) = \sqrt{8x-1}$

16. $h(x) = \frac{3}{x^2+4}$

17. $f(x) = -1 + \sqrt{x + 2}$

18. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-9}}$

19. $g(x) = \frac{3}{x-4}$

20. $f(x) = 4\,|x + 5|$

21. $g(x) = \sqrt{\frac{7}{x-5}}$

En los siguientes ejercicios, realice una tabla para dibujar el gráfico de cada función utilizando los siguientes valores: $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.$

22. $f(x) = x^2 + 1$

x	y	x	y
−3	10	1	2
−2	5	2	5
−1	2	3	10
0	1		

23. $f(x) = 3x - 6$

x	y	x	y
−3	−15	1	−3
−2	−12	2	0
−1	−9	3	3
0	−6		

24. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

x	y	x	y
−3	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
−2	0	2	2
−1	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{5}{2}$
0	1		

25. $f(x) = 2|x|$

x	y	x	y
−3	6	1	2
−2	4	2	4
−1	2	3	6
0	0		

26. $f(x) = -x^2$

x	y	x	y
−3	−9	1	−1
−2	−4	2	−4
−1	−1	3	−9
0	0		

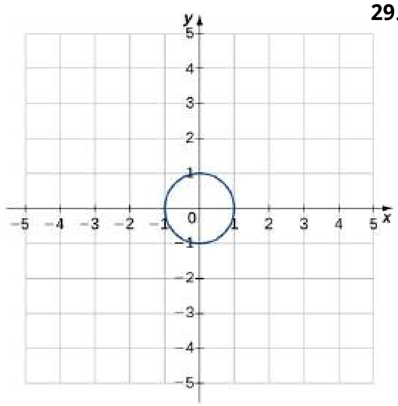
27. $f(x) = x^3$

x	y	x	y
−3	−27	1	1
−2	−8	2	8
−1	−1	3	27
0	0		

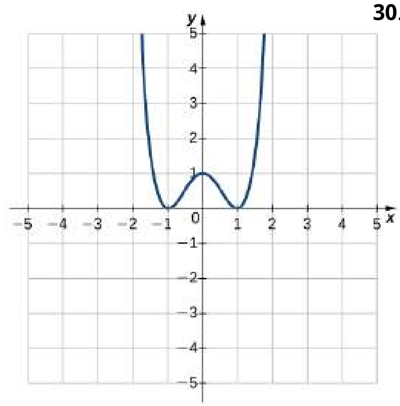
En los siguientes ejercicios, utilice la prueba de la línea vertical para determinar si cada uno de los gráficos dados representa una función. **Supongamos que un gráfico continúa en ambos extremos si se extiende más allá de la cuadrícula dada.** *Si el gráfico representa una función, determine lo siguiente para cada gráfico.*

a. Dominio y rango
b. intersección en x, si la hay (estimar si es necesario).
c. intersección y, si la hay (estimar si es necesario).
d. Los intervalos para los que la función es creciente.
e. Los intervalos para los que la función es decreciente.
f. Los intervalos para los que la función es constante.
g. Simetría alrededor de cualquier eje o del origen.
h. Si la función es par, impar o ninguna de las dos.

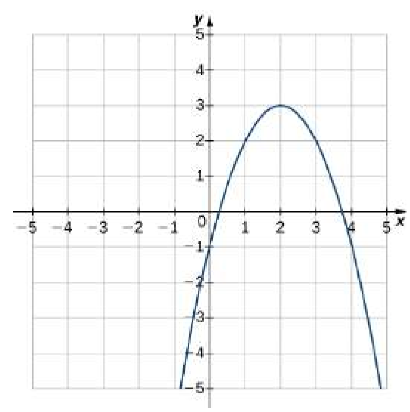
28.



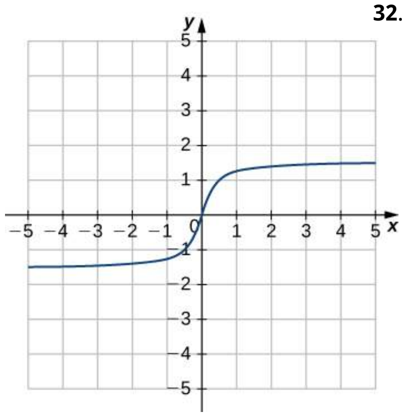
29.



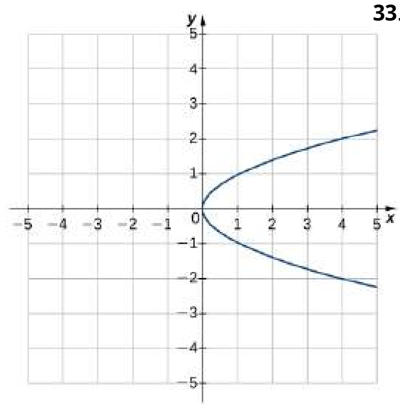
30.



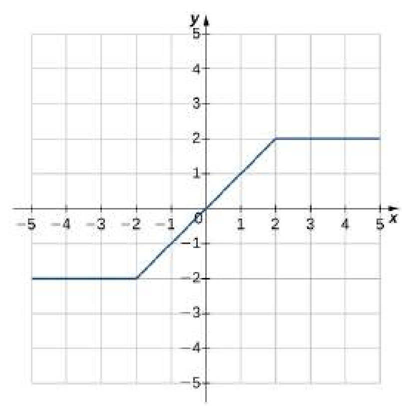
31.



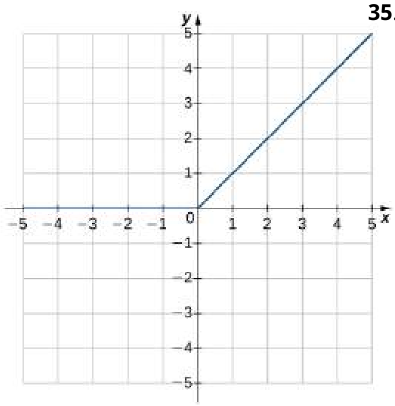
32.



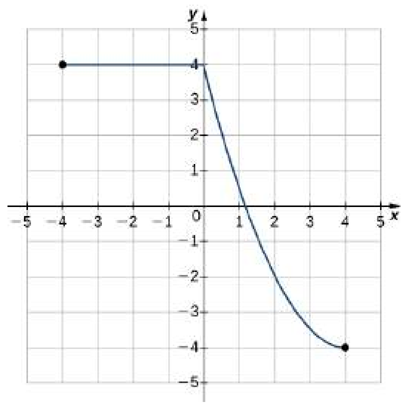
33.



34.



35.



En los siguientes ejercicios, para cada par de funciones, calcule a. $f + g$ *b.* $f - g$ *c.* $f \,.\, g$ *d.* f/g. *Determine el dominio de cada una de estas nuevas funciones.*

36. $f(x) = 3x + 4, g(x) = x - 2$

37. $f(x) = x - 8, g(x) = 5x^2$

38. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1, g(x) = x + 1$

39. $f(x) = 9 - x^2, g(x) = x^2 - 2x - 3$

40. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x - 2$

41. $f(x) = 6 + \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{x}$

En los siguientes ejercicios, para cada par de funciones, calcule a. $(f \circ g)(x)$ *y b.* $(g \circ f)(x)$ *Simplifique los resultados. Halle el dominio de cada uno de los resultados.*

42. $f(x) = 3x, g(x) = x + 5$

43. $f(x) = x + 4, g(x) = 4x - 1$

44. $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 - 2$

45. $f(x) = x^2 + 7, g(x) = x^2 - 3$

46. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x + 9$

47. $f(x) = \frac{3}{2x+1}, g(x) = \frac{2}{x}$

48. $f(x) = |x + 1|\,, g(x) = x^2 + x - 4$

49. La siguiente tabla muestra los ganadores del campeonato de la NBA de los años 2001 a 2012.

Año	Ganador
2001	LA Lakers
2002	LA Lakers
2003	San Antonio Spurs
2004	Detroit Pistons
2005	San Antonio Spurs
2006	Miami Heat
2007	San Antonio Spurs
2008	Boston Celtics
2009	LA Lakers
2010	LA Lakers
2011	Dallas Mavericks
2012	Miami Heat

a. Considere la relación en la que los valores del dominio son los años 2001 a 2012 y el rango es el ganador correspondiente. ¿Esta relación es una función? Explique por qué sí o por qué no.
b. Considere la relación en la que los valores del dominio son los ganadores y el rango son los años correspondientes. ¿Esta relación es una función? Explique por qué sí o por qué no.

50. **[T]** El área A de un cuadrado depende de la longitud del lado s.

a. Escriba una función $A(s)$ para el área de un cuadrado.
b. Encuentre e interprete $A(6,5)$.
c. Halle la aproximación exacta y de dos dígitos significativos de la longitud de los lados de un cuadrado con un área de 56 unidades cuadradas.

51. **[T]** El volumen de un cubo depende de la longitud de sus lados s.

a. Escriba una función $V(s)$ para el volumen de un cubo.
b. Encuentre e interprete $V(11{,}8)$.

52. **[T]** Una compañía de alquiler de vehículos alquila automóviles por una tarifa fija de 20 dólares y una tarifa por hora de 10,25 dólares. Por lo tanto, el costo total C para alquilar un automóvil está en función de las horas t en que el auto se alquila más la tarifa plana.

a. Escriba la fórmula de la función que modela esta situación.
b. Halle el costo total de alquilar un auto durante 2 días y 7 horas.
c. Determine cuánto tiempo estuvo alquilado el automóvil si la factura es de 432,73 dólares.

53. **[T]** Un vehículo tiene un tanque de 20 galones y obtiene 15 mpg (millas por galón). El número de millas *N* que se pueden recorrer depende de la cantidad de gasolina *x* que haya en el tanque.

a. Escriba una fórmula que modele esta situación.
b. Determine el número de millas que puede recorrer el vehículo con (i) un tanque de gasolina lleno y (ii) con 3/4 de un tanque de gasolina.
c. Determine el dominio y el rango de la función.
d. Determine cuántas veces la conductora ha tenido que parar a recargar si ha conducido un total de 578 millas.

54. **[T]** El volumen V de una esfera depende de la longitud de su radio tal que $V = (4/3)\pi r^3$. Dado que la Tierra no es una esfera perfecta, podemos utilizar el *radio medio* al medir desde el centro hasta su superficie. El radio medio es la distancia promedio del centro físico a la superficie, con base en un gran número de muestras. Halle el volumen de la Tierra con radio medio $6{,}371 \times 10^6$ m.

55. **[T]** Una determinada bacteria crece en cultivo en una zona circular. El radio del círculo, medido en centímetros, viene dado por $r(t) = 6 - \left[5/\left(t^2 + 1\right)\right]$, donde t es el tiempo medido en horas desde que se introdujo en el cultivo un círculo de 1 cm de radio de la bacteria.

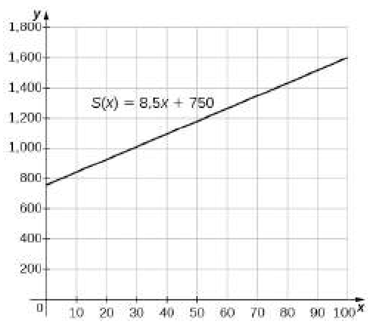
a. Exprese el área de la bacteria en función del tiempo.
b. Halle el área exacta y aproximada del cultivo bacteriano en 3 horas.
c. Exprese la circunferencia de la bacteria en función del tiempo.
d. Halle la circunferencia exacta y aproximada de la bacteria en 3 horas.

56. **[T]** Un turista estadounidense visita París y debe convertir dólares estadounidenses a euros, lo que puede hacer con la función $E(x) = 0{,}79x$, donde x es el número de dólares americanos y $E(x)$ es el número equivalente de euros. Como los tipos de cambio fluctúan, cuando el turista regresa a Estados Unidos 2 semanas después, la conversión de euros a dólares estadounidenses es $D(x) = 1{,}245x$, donde x es el número de euros y $D(x)$ es el número equivalente de dólares estadounidenses.

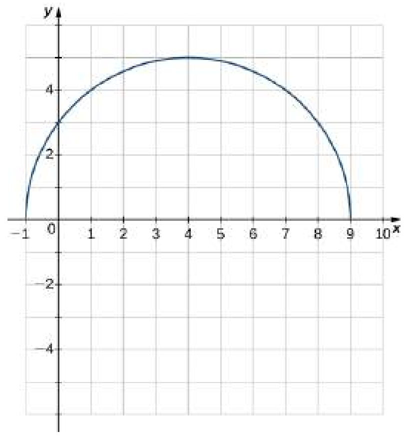
a. Halle la función compuesta que convierte directamente de dólares americanos a dólares americanos a través de euros. ¿Perdió valor el dinero del turista en el proceso de conversión?
b. Utilice (a) para determinar cuántos dólares estadounidenses recibiría el turista al final de su viaje si convirtiera 200 dólares más al llegar a París.

57. **[T]** El gerente de una tienda de patinetas paga a sus trabajadores un salario mensual *S* de 750 dólares más una comisión de 8,50 dólares por cada patineta que se vende.

   a. Escriba una función $y = S(x)$ que modele el salario mensual de un trabajador en función del número de patinetas *x* que vende.
   b. Halle el salario mensual aproximado cuando un trabajador vende 25, 40 o 55 patinetas.
   c. Utilice la función INTERSECT de una calculadora gráfica para determinar el número de patinetas que deben venderse para que un trabajador obtenga unos ingresos mensuales de 1400 dólares. (*Pista*: Halle la intersección de la función y la línea $y = 1.400$).



58. **[T]** Utilice una calculadora gráfica para representar el semicírculo $y = \sqrt{25 - (x - 4)^2}$. Luego, utilice la función INTERCEPT de la calculadora para hallar el valor de ambas x y y.



1.2 Clases básicas de funciones

Objetivos de aprendizaje

1.2.1 Calcular la pendiente de una función lineal e interpretar su significado.
1.2.2 Reconocer el grado de un polinomio.
1.2.3 Hallar las raíces de un polinomio cuadrático.
1.2.4 Describir los gráficos de las funciones polinómicas pares e impares básicas.
1.2.5 Identificar una función racional.
1.2.6 Describir los gráficos de las funciones potencia y raíz.
1.2.7 Explicar la diferencia entre funciones algebraicas y trascendentales.
1.2.8 Graficar una función definida a trozos.
1.2.9 Dibujar el gráfico de una función que ha sido desplazada, estirada o reflejada desde su posición gráfica inicial.

Ya estudiamos las características generales de las funciones, así que ahora vamos a examinar algunas clases específicas de funciones. Comenzaremos revisando las propiedades básicas de las funciones lineales y cuadráticas, y luego las generalizamos para incluir los polinomios de mayor grado. Al combinar las funciones raíz con los polinomios, podremos definir las funciones algebraicas generales y distinguirlas de las funciones trascendentales que examinaremos más adelante en este capítulo. Terminaremos la sección con ejemplos de funciones definidas a trozos y echaremos un vistazo a cómo dibujar el gráfico de una función que ha sido desplazada, estirada o reflejada desde su forma inicial.

Funciones lineales y pendiente

El tipo de función más fácil de considerar es una **función lineal**. Las funciones lineales tienen la forma $f(x) = ax + b$, donde a y b son constantes. En la Figura 1.15, vemos ejemplos de funciones lineales cuando a es positivo, negativo y cero. Note que si $a > 0$, el gráfico de la línea sube a medida que x aumenta. En otras palabras, $f(x) = ax + b$ aumenta en $(-\infty, \infty)$. Si $a < 0$, el gráfico de la línea cae a medida que x aumenta. En este caso, $f(x) = ax + b$ disminuye en $(-\infty, \infty)$. Si $a = 0$, la línea es horizontal.

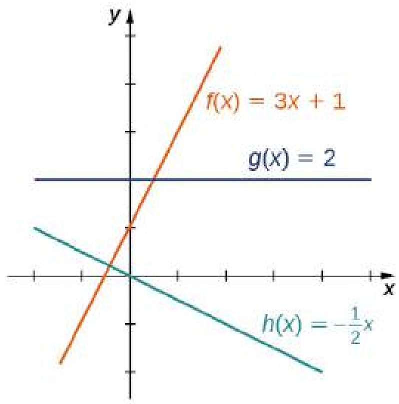


Figura 1.15 Estas funciones lineales son crecientes o decrecientes en (∞, ∞) y una función es una línea horizontal.

Como sugiere la Figura 1.15, el gráfico de cualquier función lineal es una línea. Uno de los rasgos distintivos de una línea es su pendiente. La **pendiente** es el cambio en y por cada cambio de unidad en x. La pendiente mide tanto la inclinación como la dirección de una línea. Si la pendiente es positiva, la línea apunta hacia arriba cuando se mueve de izquierda a derecha. Si la pendiente es negativa, la línea apunta hacia abajo cuando se mueve de izquierda a derecha. Si la pendiente es cero, la línea es horizontal. Para calcular la pendiente de una línea, necesitamos determinar la relación del cambio en y en función del cambio en x. Para ello, elegimos dos puntos cualesquiera (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la línea y calculamos $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. En la Figura 1.16, vemos que esta relación es independiente de los puntos elegidos.

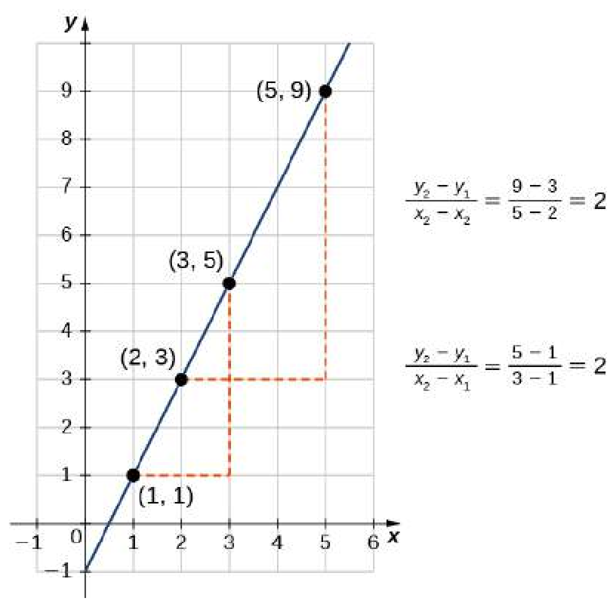


Figura 1.16 Para cualquier función lineal, la pendiente $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ es independiente de la elección de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la línea.

Definición

Considere la línea L que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Supongamos que $\Delta y = y_2 - y_1$ y $\Delta x = x_2 - x_1$ denotan los cambios en y y x, respectivamente. La **pendiente** de la línea es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

Ahora examinamos la relación entre la pendiente y la fórmula de una función lineal. Consideremos la función lineal dada por la fórmula $f(x) = ax + b$. Como lo comentamos, sabemos que el gráfico de una función lineal viene dado por una línea. Podemos utilizar nuestra definición de pendiente para calcular la pendiente de esta línea. Como se muestra, podemos determinar la pendiente calculando $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ para cualquier punto (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en la recta. Al evaluar la función f en $x = 0$, vemos que $(0, b)$ es un punto en esta línea. Al evaluar esta función en $x = 1$, vemos que $(1, a + b)$ también es un punto en esta línea. Por lo tanto, la pendiente de esta línea es

$$\frac{(a + b) - b}{1 - 0} = a.$$

Hemos demostrado que el coeficiente a es la pendiente de la línea. Podemos concluir que la fórmula $f(x) = ax + b$ describe una línea con pendiente a. Además, como esta línea interseca con el eje y en el punto $(0, b)$, vemos que la intersección y para esta función lineal es $(0, b)$. Concluimos que la fórmula $f(x) = ax + b$ nos indica la pendiente, a, y la intersección y, $(0, b)$, para esta línea. Dado que a menudo utilizamos el símbolo m para denotar la pendiente de una línea, podemos escribir

$$f(x) = mx + b$$

para denotar la **forma pendiente-intersección** de una función lineal.

A veces conviene expresar una función lineal de diferentes maneras. Por ejemplo, supongamos que el gráfico de una función lineal pasa por el punto (x_1, y_1) y la pendiente de la línea es m. Puesto que cualquier otro punto $(x, f(x))$ en el gráfico de f debe satisfacer la ecuación

$$m = \frac{f(x) - y_1}{x - x_1},$$

esta función lineal puede expresarse escribiendo

$$f(x) - y_1 = m(x - x_1).$$

Llamamos a esta ecuación la **ecuación punto-pendiente** de esa función lineal.

Como toda línea no vertical es el gráfico de una función lineal, los puntos de esa línea pueden describirse mediante las ecuaciones en su forma pendiente-intersección o punto-pendiente. Sin embargo, una línea vertical no representa el gráfico de una función y no puede expresarse de ninguna de estas formas. En cambio, una línea vertical se describe mediante la ecuación $x = k$ para alguna constante k. Dado que ni la forma pendiente-intersección ni la forma punto-pendiente permiten líneas verticales, utilizamos la notación

$$ax + by = c,$$

donde a, b son diferentes a cero, para denotar la **forma estándar de una línea**.

Definición

Consideremos una línea que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m. La ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{1.4}$$

es la **ecuación punto-pendiente** de esa línea.

Consideremos una línea con pendiente m y la intersección y $(0, b)$. La ecuación

$$y = mx + b \tag{1.5}$$

es una ecuación para esa línea en la **forma pendiente-intersección**.

La **forma estándar de una línea** viene dada por la ecuación

$$ax + by = c, \tag{1.6}$$

donde a y b no son ambos cero. Esta forma es más general porque permite una línea vertical, $x = k$.

EJEMPLO 1.12

Hallar la pendiente y las ecuaciones de las rectas

Consideremos la línea que pasa por los puntos $(11, –4)$ y $(−4, 5)$, como se muestra en la Figura 1.17.

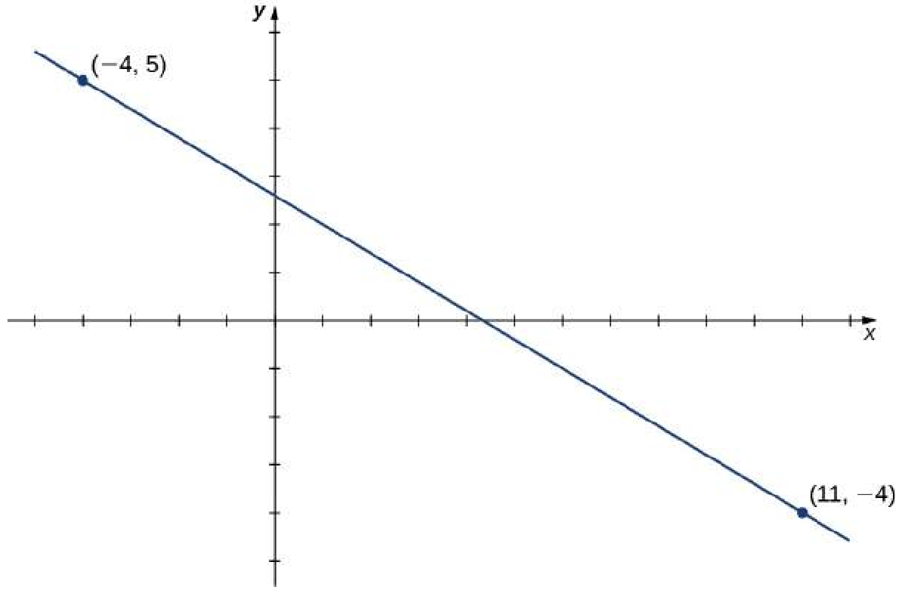


Figura 1.17 Hallar la ecuación de una función lineal con un gráfico que es una línea entre dos puntos dados.

a. Halle la pendiente de la línea.
b. Halle una ecuación para esta función lineal en la forma punto-pendiente.
c. Halle una ecuación para esta función lineal en la forma pendiente-intersección.

Solución

a. La pendiente de la línea es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (–4)}{–4 - 11} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}.$$

b. Para hallar una ecuación para la función lineal en su forma punto-pendiente, utilice la pendiente $m = -3/5$ y elija cualquier punto de la línea. Si elegimos el punto $(11, –4)$, obtenemos la ecuación

$$f(x) + 4 = -\frac{3}{5}(x - 11).$$

c. Para hallar una ecuación de la función lineal en la forma pendiente-intersección, resuelva la ecuación de la parte b. para $f(x)$. Cuando hacemos esto, obtenemos la ecuación

$$f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{13}{5}.$$

1.9 Consideremos la línea que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(1, 4)$. Halle la pendiente de la línea.

Halle una ecuación de esa línea en su forma punto-pendiente. Halle una ecuación de esa línea en su forma pendiente-intersección.

EJEMPLO 1.13

Una función de distancia lineal

Jessica sale de su casa a las 5:50 a. m. y recorre 9 millas. Regresa a su casa a las 7:08 a. m. Responda las siguientes preguntas, suponiendo que Jessica corre a un ritmo constante.

a. Describa la distancia D (en millas) que Jessica corre como una función lineal de su tiempo de carrera t (en minutos).
b. Dibuje un gráfico de D.

c. Interprete el significado de la pendiente.

Solución

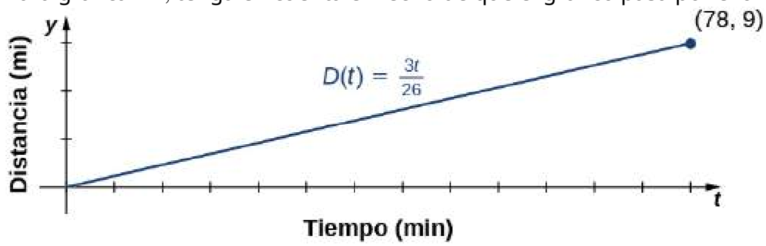
a. En el momento $t = 0$, Jessica está en su casa, así que $D(0) = 0$. En el momento $t = 78$ minutos, Jessica finalizó el recorrido de 9 millas, así que $D(78) = 9$. La pendiente de la función lineal es

$$m = \frac{9 - 0}{78 - 0} = \frac{3}{26}.$$

La intersección y es $(0, 0)$, por lo que la ecuación de esta función lineal es

$$D(t) = \frac{3}{26}t.$$

b. Para graficar D, tenga en cuenta el hecho de que el gráfico pasa por el origen y tiene pendiente $m = 3/26$.



c. La pendiente $m = 3/26 \approx 0{,}115$ describe la distancia (en millas) que Jessica corre por minuto, o su velocidad media.

Polinomios

Una función lineal es un tipo especial de una clase más general de funciones: los polinomios. Una **función polinómica** es cualquier función que pueda escribirse de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \textbf{(1.7)}$$

para algún número entero $n \geq 0$ y las constantes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, donde $a_n \neq 0$. En el caso de que $n = 0$, permitimos $a_0 = 0$; si $a_0 = 0$, la función $f(x) = 0$ se denomina *función cero*. El valor n se denomina **grado** del polinomio; la constante a_n se denomina *coeficiente líder*. Una función lineal de la forma $f(x) = mx + b$ es un polinomio de grado 1 si $m \neq 0$ y de grado 0 si $m = 0, 0$. Un polinomio de grado 0 también se llama *función constante*. Una función polinómica de grado 2 se llama **función cuadrática**. En particular, una función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$. Una función polinómica de grado 3 se denomina **función cúbica**.

Funciones potencia

Algunas funciones polinómicas son funciones potencia. Una **función potencia** es cualquier función de la forma $f(x) = ax^b$, donde a y b son números reales. El exponente en una función potencia puede ser cualquier número real, pero aquí consideramos el caso en que el exponente es un número entero positivo. (Más adelante estudiaremos otros casos). Si el exponente es un entero positivo, entonces $f(x) = ax^n$ es un polinomio. Si n es par, entonces $f(x) = ax^n$ es una función par ya que $f(-x) = a(-x)^n = ax^n$ si n es par. Si los valores de n es impar, entonces $f(x) = ax^n$ es una función impar porque $f(-x) = a(-x)^n = -ax^n$ si n es impar (Figura 1.18).

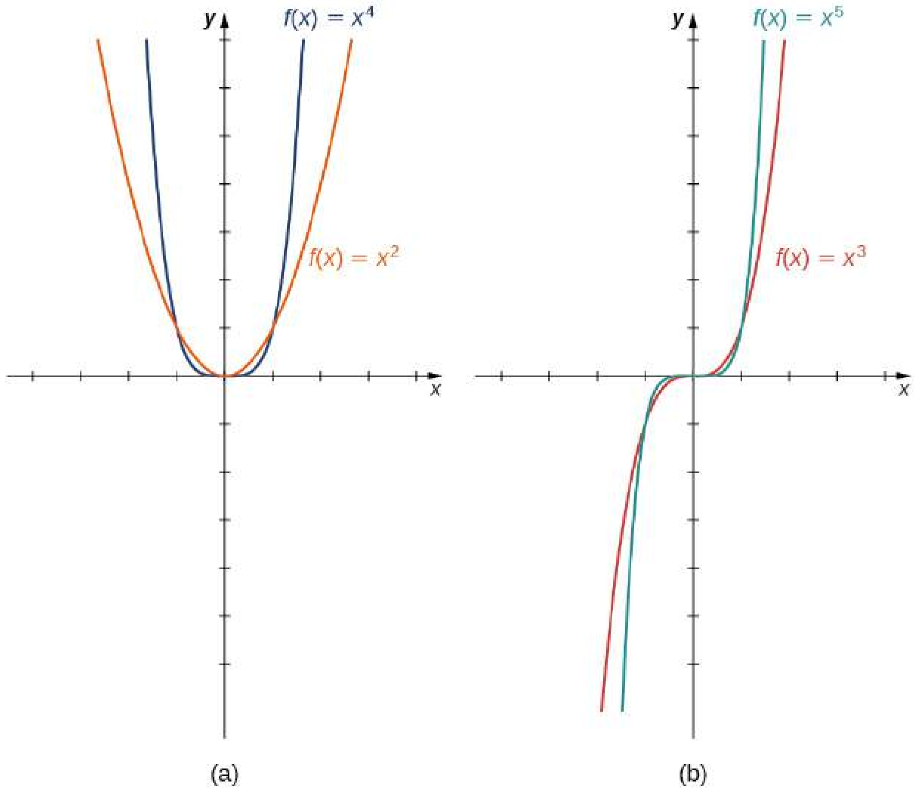


Figura 1.18 (a) Para cualquier número entero par n, $f(x) = ax^n$ es una función par. (b) Para cualquier número entero impar n, $f(x) = ax^n$ es una función impar.

Comportamiento en el infinito

Para determinar el comportamiento de una función f a medida que sus valores de entrada se acercan al infinito, observamos los valores $f(x)$ a medida que las entradas, x, se hacen más grandes. Para algunas funciones, los valores de $f(x)$ se acercan a un número finito. Por ejemplo, en la función $f(x) = 2 + 1/x$, los valores $1/x$ se acercan cada vez más a cero para todos los valores de x a medida que se hacen más y más grandes. De esta función, decimos "$f(x)$ se acerca a dos como x va al infinito", y escribimos $f(x) \to 2$ cuando $x \to \infty$. La línea $y = 2$ es una asíntota horizontal para la función $f(x) = 2 + 1/x$ porque el gráfico de la función se aproxima a la línea a medida que x se hace más grande.

En otras funciones, los valores $f(x)$ pueden no acercarse a un número finito, sino que pueden hacerse más grandes para todos los valores de x a medida que se van haciendo más grandes. En ese caso, decimos que "$f(x)$ se acerca al infinito cuando x se acerca al infinito", y escribimos $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Por ejemplo, para la función $f(x) = 3x^2$, las salidas $f(x)$ se hacen más grandes a medida que los valores de entrada x se hacen más grandes. Podemos concluir que la función $f(x) = 3x^2$ se acerca al infinito cuando x se acerca al infinito, y escribimos $3x^2 \to \infty$ cuando $x \to \infty$. El comportamiento mientras $x \to -\infty$ y el significado de $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ pueden definirse de forma similar. Podemos describir lo que ocurre con los valores de $f(x)$ cuando $x \to \infty$ y dado que $x \to -\infty$ como el *comportamiento final* de la función.

Para entender el comportamiento final de las funciones polinómicas, podemos centrarnos en las funciones cuadráticas y cúbicas. El comportamiento de los polinomios de mayor grado puede analizarse de forma similar. Consideremos una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$, los valores $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$. Si $a < 0$, los valores $f(x) \to -\infty$ como $x \to \pm\infty$. Como el gráfico de una función cuadrática es una parábola, la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$; la parábola se abre hacia abajo si $a < 0$. (Vea la Figura 1.19(a)).

Consideremos ahora una función cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Si $a > 0$, entonces $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $f(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$. Si $a < 0$, entonces $f(x) \to -\infty$ como $x \to \infty$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to -\infty$. Como podemos ver en ambos gráficos, el término principal del polinomio determina el comportamiento final (vea la Figura

1.19(b)).

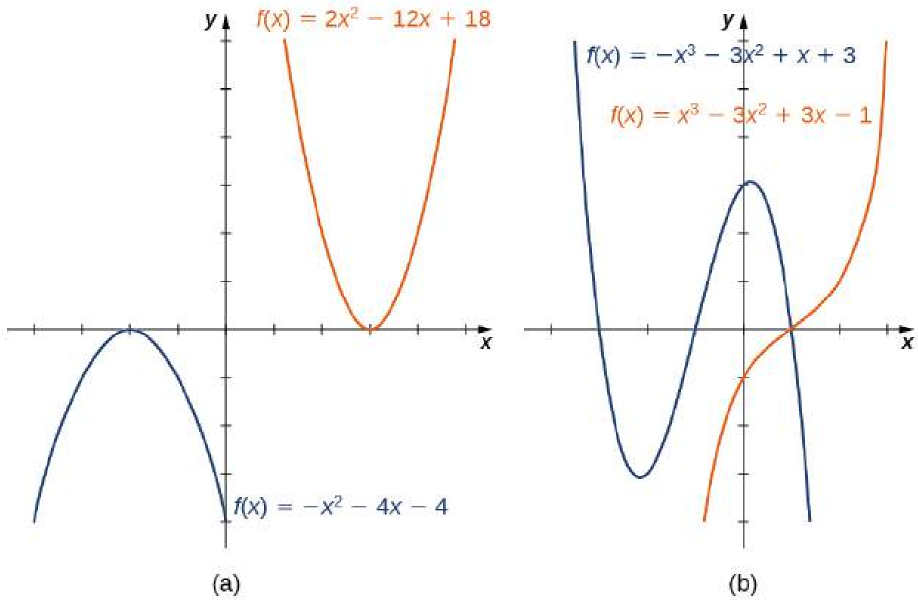


Figura 1.19 (a) En una función cuadrática, si el coeficiente líder $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba. Si los valores de $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo. (b) En una función cúbica f, si el coeficiente líder $a > 0$, los valores $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y los valores $f(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$. Si el coeficiente líder $a < 0$, lo opuesto es verdadero.

Ceros de funciones polinómicas

Otra característica del gráfico de una función polinómica es el punto de intersección con el eje x. Para determinar el punto donde una función f interseca con el eje x, necesitamos resolver la ecuación $f(x) = 0$ para x. En el caso de la función lineal $f(x) = mx + b$, la intersección x está dada por la resolución de la ecuación $mx + b = 0$. En este caso, vemos que la intersección x viene dada por $(-b/m, 0)$. En el caso de una función cuadrática, para hallar la(s) intersección(es) en x se necesita hallar los ceros de una ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$. En algunos casos, es fácil factorizar el polinomio $ax^2 + bx + c$ para hallar los ceros. Si no es así, utilizamos la fórmula cuadrática.

Regla: la fórmula cuadrática

Consideremos la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde $a \neq 0$. Las soluciones de esta ecuación vienen dadas por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1.8}$$

Si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, esta fórmula nos dice que hay dos números reales que satisfacen la ecuación cuadrática. Si los valores de $b^2 - 4ac = 0$, esta fórmula nos dice que solo hay una solución, y es un número real. Si los valores de $b^2 - 4ac < 0$, ningún número real satisface la ecuación cuadrática.

En el caso de los polinomios de mayor grado, puede ser más complicado determinar dónde el gráfico interseca el eje x. En algunos casos, es posible hallar la intersección x mediante la factorización del polinomio para hallar sus ceros. En otros casos, es imposible calcular los valores exactos de las intersecciones x. Sin embargo, como veremos más adelante, en casos como este podemos utilizar herramientas analíticas para aproximar (en un grado muy alto) dónde se encuentran las intersecciones x. Aquí nos centramos en los gráficos de los polinomios en los que podemos calcular sus ceros explícitamente.

EJEMPLO 1.14

Graficar funciones polinómicas

Para las siguientes funciones a. y b., i. describa el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$, ii. halle todos los ceros de f, y iii. dibuje un gráfico de f.

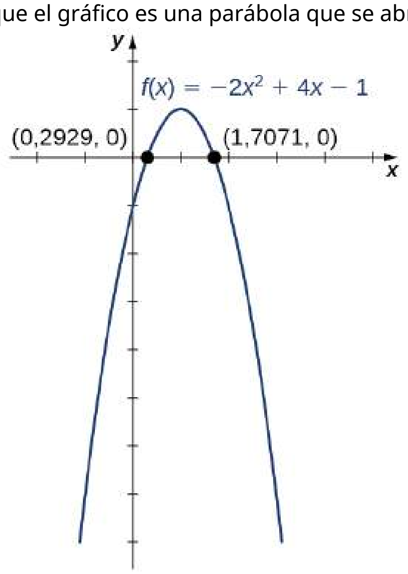
a. $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$
b. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

Solución

a. La función $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ es una función cuadrática.
   i. Porque $a = -2 < 0$, dado que $x \to \pm\infty$, $f(x) \to -\infty$.
   ii. Para hallar los ceros de f, use la fórmula cuadrática. Los ceros son

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-2)(-1)}}{2(-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{-4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{-4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

   iii. Para dibujar el gráfico de f, utilice la información de sus respuestas anteriores y combínela con el hecho de que el gráfico es una parábola que se abre hacia abajo.



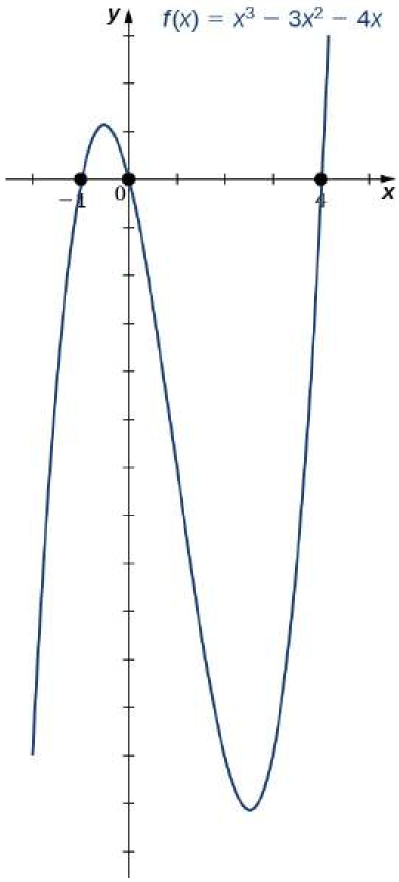
b. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$ es una función cúbica.
   i. Dado que $a = 1 > 0$, dado que $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$. Dado que $x \to -\infty$, $f(x) \to -\infty$.
   ii. Para hallar los ceros de f, necesitamos factorizar el polinomio. En primer lugar, cuando factorizamos x en todos los términos, hallamos

$$f(x) = x(x^2 - 3x - 4).$$

   Entonces, cuando factorizamos la función cuadrática $x^2 - 3x - 4$, tenemos

$$f(x) = x(x - 4)(x + 1).$$

   Por lo tanto, los ceros de f son $x = 0, 4, -1$.
   iii. Combinando los resultados de las partes i. y ii., realice un bosquejo general de f.



1.10 Consideremos la función cuadrática $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$. Halle los ceros de f. ¿La parábola se abre hacia arriba o hacia abajo?

Modelos matemáticos

Una gran variedad de situaciones del mundo real puede describirse mediante **modelos matemáticos**. Un modelo matemático es aquel que simula situaciones de la vida real con ecuaciones matemáticas. Físicos, ingenieros, economistas y otros investigadores desarrollan modelos combinando la observación con datos cuantitativos para elaborar ecuaciones, funciones, gráficos y otras herramientas matemáticas que describen con precisión el comportamiento de diversos sistemas. Los modelos matemáticos son útiles porque ayudan a predecir resultados futuros. Algunos ejemplos de estos modelos son el estudio de la dinámica de la población, la investigación de los patrones climáticos y la predicción de las ventas de productos.

Como ejemplo, consideremos un modelo matemático que una empresa podría utilizar para describir sus ingresos por la venta de un artículo concreto. El importe de los ingresos R que una empresa recibe por la venta de n artículos vendidos a un precio de p dólares por artículo se describe mediante la ecuación $R = p.n$. La empresa quiere saber cómo cambian las ventas al variar el precio del artículo. Supongamos que los datos de la Tabla 1.6 muestran el número de unidades que vende una empresa en función del precio por artículo.

p	6	8	10	12	14
n	19,4	18,5	16,2	13,8	12,2

Tabla 1.6 Número de unidades vendidas n (en miles) en función del precio por unidad p (en dólares)

En la Figura 1.20, vemos el gráfico del número de unidades vendidas (en miles) en función del precio (en dólares). De la forma del gráfico se desprende que el número de unidades vendidas es probablemente una función lineal del precio por artículo, y los datos pueden aproximarse por la función lineal $n = -1{,}04p + 26$ para $0 \leq p \leq 25$, donde n predice el número de unidades vendidas en miles. Utilizando esta función lineal, los ingresos (en miles de dólares) pueden estimarse mediante la función cuadrática

$$R(p) = p.(-1{,}04p + 26) = -1{,}04p^2 + 26p$$

para $0 \leq p \leq 25$. En el Ejemplo 1.15, utilizamos esta función cuadrática para predecir la cantidad de ingresos que recibe la empresa en función del precio que cobra por artículo. Obsérvese que no podemos concluir definitivamente el número real de unidades vendidas para valores de p, para los que no se recogen datos. Sin embargo, teniendo en cuenta los otros valores de los datos y el gráfico mostrado, parece razonable que el número de unidades vendidas (en miles) si el precio cobrado es p dólares puede acercarse a los valores predichos por la función lineal $n = -1{,}04p + 26$.

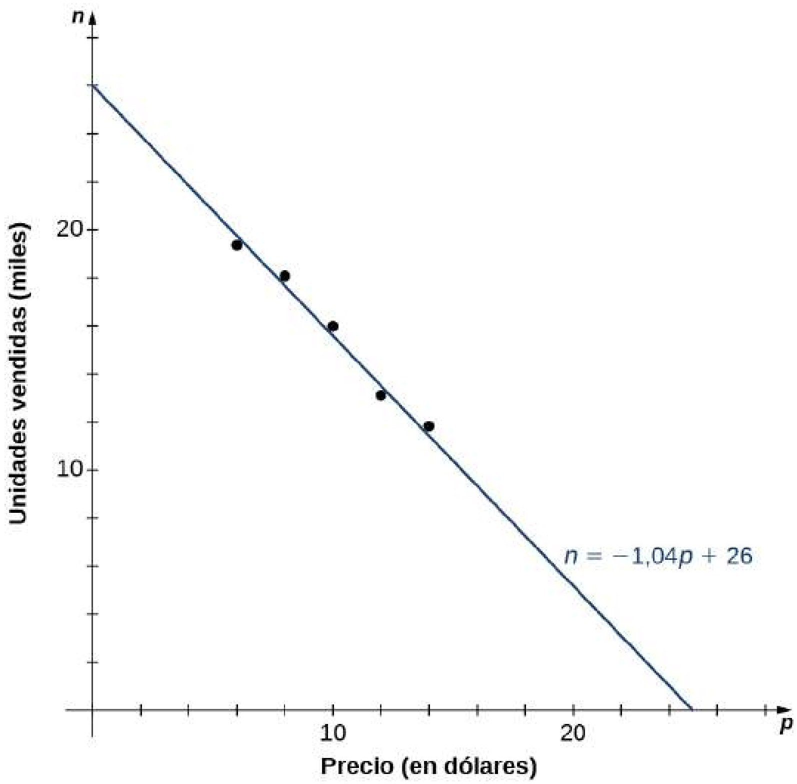


Figura 1.20 Los datos recogidos sobre el número de artículos vendidos en función del precio son aproximadamente lineales. Utilizamos la función lineal $n = -1{,}04p + 26$ para estimar esta función.

EJEMPLO 1.15

Maximizando los ingresos

A una empresa le interesa predecir los ingresos que percibirá en función del precio que cobre por un determinado artículo. Utilizando los datos de la Tabla 1.6, la empresa utiliza la siguiente función cuadrática para modelar los ingresos R (en miles de dólares) en función del precio por artículo p:

$$R(p) = p.(-1{,}04p + 26) = -1{,}04p^2 + 26p$$

para $0 \leq p \leq 25$.

a. Prediga los ingresos si la empresa vende el artículo a un precio de $p = \$5$ y $p = \$17$.
b. Halle los ceros de esta función e interprete el significado de los mismos.
c. Dibuje un gráfico de R.
d. Utilice el gráfico para determinar el valor de p que maximiza los ingresos. Halle el máximo de ingresos.

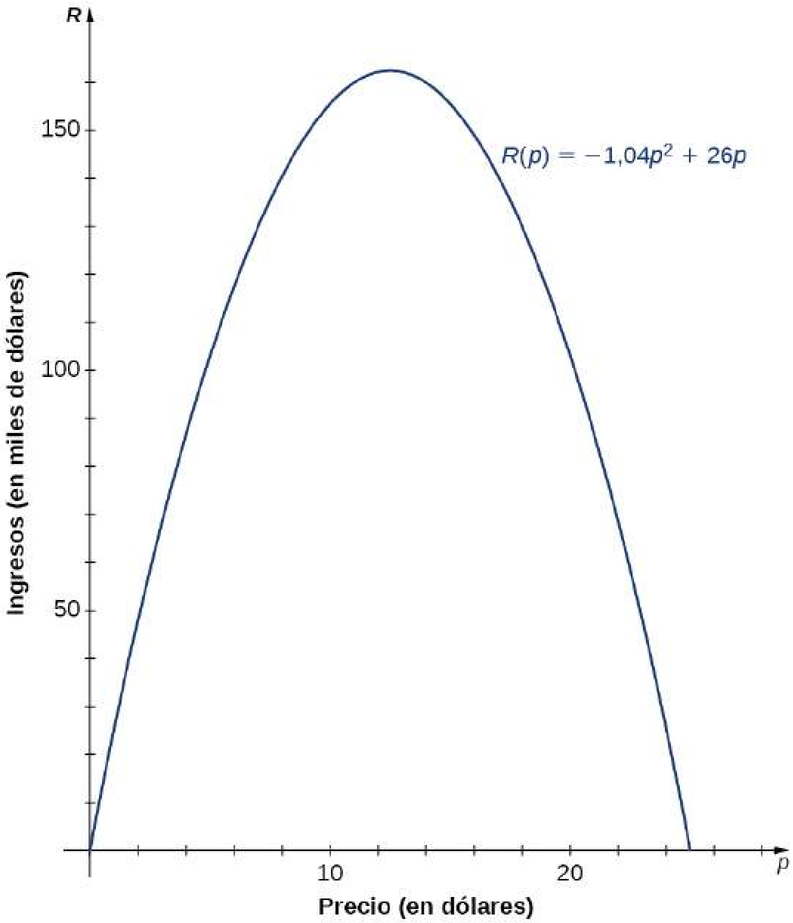
Solución

a. Al evaluar la función de los ingresos en $p = 5$ y $p = 17$, podemos concluir que

$$R(5) = -1{,}04(5)^2 + 26(5) = 104, \text{ por lo que los ingresos } = \$104.000;$$
$$R(17) = -1{,}04(17)^2 + 26(17) = 141{,}44, \text{ por lo que los ingresos } = \$141.440.$$

b. Los ceros de esta función se pueden hallar resolviendo la ecuación $-1{,}04p^2 + 26p = 0$. Al factorizar la expresión cuadrática, obtenemos $p\,(-1{,}04p + 26) = 0$. Las soluciones de esta ecuación vienen dadas por $p = 0, 25$. Para estos valores de p, los ingresos son nulos. Cuando $p = \$0$, los ingresos son nulos porque la empresa está regalando su mercancía. Cuando $p = \$25$, los ingresos son nulos porque el precio es demasiado alto, y nadie comprará ningún artículo.

c. Al saber que la función es cuadrática, sabremos que el gráfico es una parábola. Como el coeficiente líder es negativo, la parábola se abre hacia abajo. Una propiedad de las parábolas es que son simétricas respecto al eje, por lo que como los ceros están en $p = 0$ y $p = 25$, la parábola debe ser simétrica con respecto a la línea intermedia, o $p = 12{,}5$.



d. La función es una parábola con ceros en $p = 0$ y $p = 25$, y es simétrica respecto a la línea $p = 12{,}5$, por lo que el máximo ingreso tiene lugar a un precio de $p = \$12{,}50$ por artículo. A ese precio, los ingresos son $R\,(p) = -1{,}04(12{,}5)^2 + 26\,(12{,}5) = \$162, 500.$

Funciones algebraicas

Al permitir cocientes y potencias fraccionarias en las funciones polinómicas, creamos una clase más amplia de funciones. Una **función algebraica** es aquella que implica suma, resta, multiplicación, división, potencias racionales y raíces. Dos tipos de funciones algebraicas son las funciones racionales y las funciones raíz.

Al igual que los números racionales son cocientes de los enteros, las funciones racionales son cocientes de los polinomios. En particular, una **función racional** es cualquier función de la forma $f\,(x) = p(x)/q\,(x)$, donde $p(x)$ como $q(x)$ son polinomios. Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{3x\text{– }1}{5x + 2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$$

son funciones racionales. Una **función raíz** es una función potencia de la forma $f(x) = x^{1/n}$, donde n es un número entero positivo mayor que uno. Por ejemplo, $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es la función raíz cuadrada y $g(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ es la función raíz cúbica. Al posibilitar composiciones de funciones raíz y funciones racionales, podemos crear otras funciones algebraicas. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es una función algebraica.

EJEMPLO 1.16

Hallar el dominio y el rango de las funciones algebraicas

En cada una de las siguientes funciones, halle el dominio y el rango.

a. $f(x) = \frac{3x\text{–}1}{5x+2}$
b. $f\left(x\right) = \sqrt{4\text{–}x^2}$

Solución

a. No es posible dividir entre cero, por lo que el dominio es el conjunto de los números reales x tal que $x \neq -2/5$. Para hallar el rango, necesitamos hallar los valores y para el que existe un número real x de manera que

$$y = \frac{3x\text{– }1}{5x + 2}.$$

Cuando multiplicamos ambos lados de esta ecuación por $5x + 2$, vemos que x debe satisfacer la ecuación

$$5xy + 2y = 3x\text{– }1.$$

A partir de esta ecuación, podemos ver que x debe satisfacer

$$2y + 1 = x(3 - 5y).$$

Si $y = 3/5$, esta ecuación no tiene solución. Por otro lado, mientras $y \neq 3/5$,

$$x = \frac{2y + 1}{3 - 5y}$$

satisface esta ecuación. Podemos concluir que el rango de f es $\{y|y \neq 3/5\}$.

b. Para hallar el dominio de f, necesitamos $4 - x^2 \geq 0$. Al factorizar, escribimos $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x) \geq 0$. Esta inecuación se cumple si y solo si ambos términos son positivos o ambos términos son negativos. Para que ambos términos sean positivos, tenemos que hallar x de manera que

$$2 - x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 2 + x \geq 0.$$

Estas dos desigualdades se reducen a $2 \geq x$ y $x \geq -2$. Por lo tanto, el conjunto $\{x| - 2 \leq x \leq 2\}$ debe formar parte del dominio. Para que ambos términos sean negativos, necesitamos

$$2 - x \leq 0 \qquad \text{y} \qquad 2 + x \geq 0.$$

Estas dos desigualdades también se reducen a $2 \leq x$ y $x \geq -2$. No hay valores de x que satisfagan ambas desigualdades. Así, podemos concluir que el dominio de esta función es $\{x| - 2 \leq x \leq 2\}$.
Si $-2 \leq x \leq 2$, entonces $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$. Por lo tanto, $0 \leq \sqrt{4 - x^2} \leq 2$, y el rango de f es $\{y|0 \leq y \leq 2\}$.

1.11 Halle el dominio y el rango de la función $f(x) = (5x + 2)/(2x\text{– }1)$.

Las funciones raíz $f(x) = x^{1/n}$ tienen características determinantes en función de si n es par o impar. Para todos los enteros pares $n \geq 2$, el dominio de $f(x) = x^{1/n}$ es el intervalo $[0, \infty)$. Para todos los enteros impares $n \geq 1$, el dominio de $f(x) = x^{1/n}$ es el conjunto de todos los números reales. Ya que $x^{1/n} = -(-x)^{1/n}$ para los enteros impares n, $f(x) = x^{1/n}$ es una función impar si n es impar. Observe los gráficos de las funciones raíz para diferentes valores de n en la Figura 1.21.

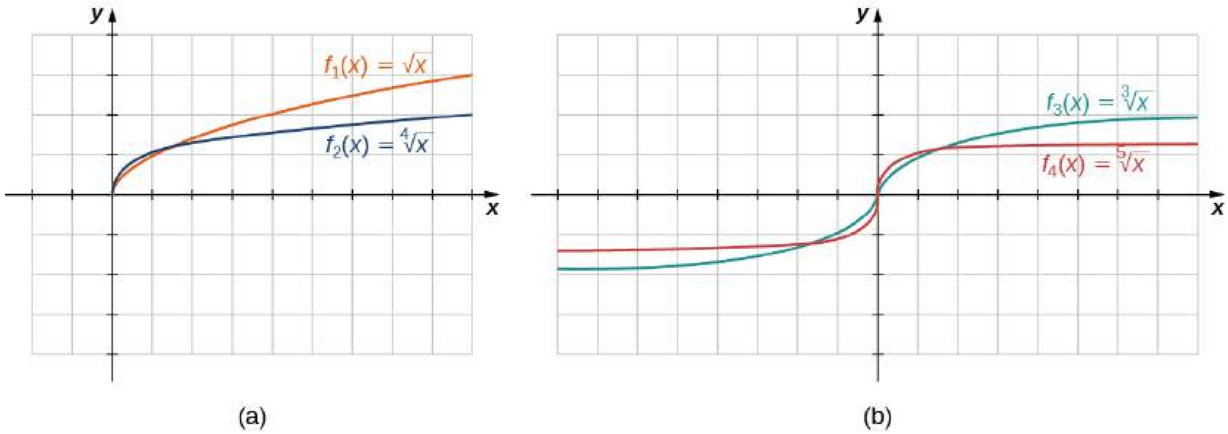


Figura 1.21 (a) Si n es uniforme, el dominio de $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ¿es $\left[0, \infty\right)$. (b) Si n es impar, el dominio de $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ¿es $\left(-\infty, \infty\right)$ y la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$ es una función impar.

EJEMPLO 1.17

Encontrar dominios para funciones algebraicas

En cada una de las siguientes funciones, determine el dominio de la función.

a. $f(x) = \frac{3}{x^2-1}$
b. $f(x) = \frac{2x+5}{3x^2+4}$
c. $f(x) = \sqrt{4-3x}$
d. $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

Solución

a. No se puede dividir entre cero, por lo que el dominio es el conjunto de valores x tal que $x^2-1 \neq 0$. Por lo tanto, el dominio es $\{x | x \neq \pm 1\}$.
b. Es necesario determinar los valores de x cuyo denominador es cero. Ya que $3x^2+4 \geq 4$ para todos los números reales x, el denominador nunca es cero. Por lo tanto, el dominio es $(-\infty, \infty)$.
c. Como la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real, el dominio es el conjunto de valores x para lo cual $4-3x \geq 0$. Por lo tanto, el dominio es $\{x | x \leq 4/3\}$.
d. La raíz cúbica se encuentra definida para todos los números reales, por lo que el dominio es el intervalo $(-\infty, \infty)$.

1.12 Halle el dominio de cada una de las siguientes funciones: $f(x) = (5-2x)/(x^2+2)$ y $g(x) = \sqrt{5x-1}$.

Funciones trascendentales

Hasta ahora hemos hablado de las funciones algebraicas. Sin embargo, algunas funciones no pueden describirse mediante las operaciones algebraicas básicas. Estas funciones se conocen como **funciones trascendentales** porque se dice que "trascienden" o van más allá del álgebra. Las funciones trascendentales más comunes son las trigonométricas, las exponenciales y las logarítmicas. La *función trigonométrica* relaciona las razones de dos lados de un triángulo rectángulo. Son $\operatorname{sen} x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x$, y $\csc x$ (Más adelante hablaremos de las funciones trigonométricas). Una función exponencial es la función de la forma $f(x) = b^x$, donde la base $b > 0, b \neq 1$. Una **función logarítmica** es la función de la forma $f(x) = \log_b(x)$ para alguna constante $b > 0, b \neq 1$, donde $\log_b(x) = y$ si y solo si $b^y = x$. (Más adelante en el capítulo también hablaremos de las funciones exponenciales y logarítmicas).

EJEMPLO 1.18

Clasificación de las funciones algebraicas y trascendentales

Clasifique cada una de las siguientes funciones, de la a. hasta la c., como algebraicas o trascendentales.

a. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{4x+2}$
b. $f(x) = 2^{x^2}$
c. $f(x) = \text{sen}(2x)$

Solución

a. Ya que esta función solo implica operaciones algebraicas básicas, es una función algebraica.
b. Esta función no puede escribirse como una fórmula que implique solo operaciones algebraicas básicas, por lo que es trascendental. (Tenga en cuenta que las funciones algebraicas solo pueden tener potencias que sean números racionales)
c. Como en la parte b., esta función no puede escribirse mediante una fórmula que implique únicamente operaciones algebraicas básicas; por tanto, esta función es trascendental.

1.13 Es $f(x) = x/2$ una función algebraica o trascendental?

Funciones definidas a trozos

A veces, una función está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Una función con esta propiedad se conoce como **función definida a trozos**. La función de valor absoluto es un ejemplo de función definida a trozos porque la fórmula cambia con el signo de x:

$$f(x) = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}.$$

Otras funciones definidas a trozos pueden representarse con fórmulas completamente diferentes, según la parte del dominio en la que cae un punto. Para graficar una función definida a trozos, graficamos cada parte de la función en su respectivo dominio en el mismo sistema de coordenadas. Si la fórmula de una función es diferente para $x < a$ y $x > a$, debemos prestar especial atención a lo que ocurre en $x = a$ cuando grafiquemos la función. A veces, el gráfico debe incluir un círculo abierto o cerrado para indicar el valor de la función en $x = a$. Lo examinamos en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.19

Graficar una función definida a trozos

Dibuje el gráfico de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Solución

Represente gráficamente la función lineal $y = x + 3$ en el intervalo $(-\infty, 1)$ y grafique la función cuadrática $y = (x-2)^2$ en el intervalo $\left[1, \infty\right)$. Dado que el valor de la función en $x = 1$ viene dada por la fórmula $f(x) = (x-2)^2$, vemos que $f(1) = 1$. Para indicar esto en el gráfico, dibujamos un círculo cerrado en el punto $(1, 1)$. El valor de la función viene dado por $f(x) = x + 3$ para todos los $x < 1$, pero no en la $x = 1$. Para indicar esto en el gráfico, dibujamos un círculo abierto en $(1, 4)$.

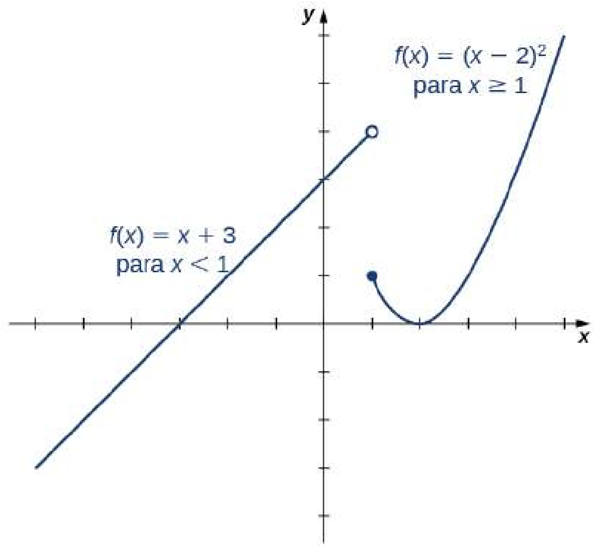


Figura 1.22 Esta función definida a trozos es lineal para $x < 1$ y cuadrática para $x \geq 1$.

1.14 Dibuje un gráfico de la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, x \leq 2 \\ x + 2, x > 2 \end{cases}.$$

EJEMPLO 1.20

Tarifas de estacionamiento descritas por una función definida a trozos

En una gran ciudad, a los conductores se les cobra una tarifa variable por aparcar en un garaje. Se les cobra 10 dólares por la primera hora o cualquier parte de la primera hora y 2 dólares adicionales por cada hora o parte de la misma hasta un máximo de 30 dólares por día. El estacionamiento está abierto desde las 6 a. m. hasta las 12 a. m.

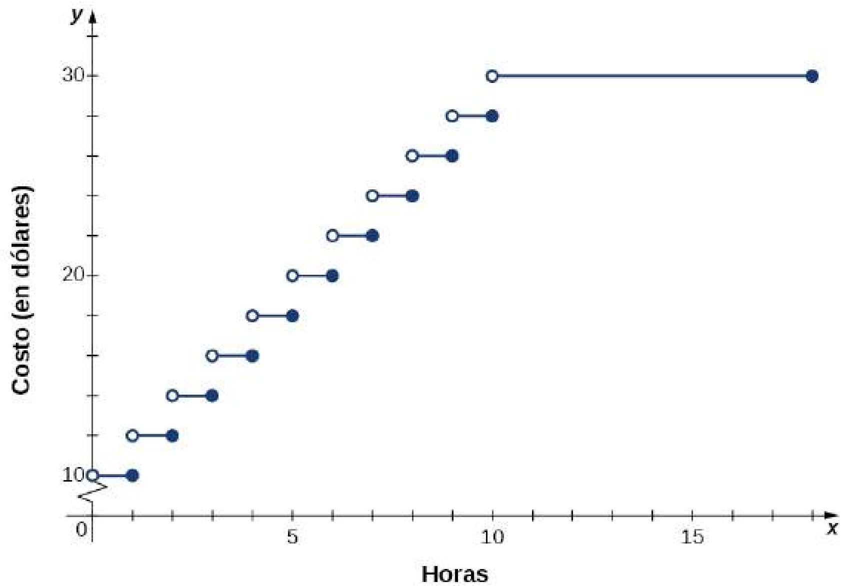
a. Escriba una función definida a trozos que describa cuánto cuesta C estacionar en el garaje en función de las horas de estacionamiento x.
b. Dibuje un gráfico de esta función $C(x)$.

Solución

a. Como el estacionamiento está abierto 18 horas al día, el dominio en esta función es $\{x|0 < x \leq 18\}$. El costo del uso de este estacionamiento puede describirse a trozos mediante la función

$$C(x) = \begin{cases} 10, 0 < x \leq 1 \\ 12, 1 < x \leq 2 \\ 14, 2 < x \leq 3 \\ 16, 3 < x \leq 4 \\ \quad\vdots \\ 30, 10 < x \leq 18 \end{cases}.$$

b. El gráfico de la función está formado por varios segmentos de rectas horizontales



1.15 El costo del envío de una carta está en función de su peso. Supongamos que el costo del envío de una carta es de $49¢$ para la primera onza y $21¢$ por cada onza adicional. Escriba una función definida a trozos que describa el costo C en función del peso x por $0 < x \leq 3$, donde C se mide en céntimos y x se mide en onzas.

Transformaciones de funciones

Hemos visto varios casos en los que hemos sumado, restado o multiplicado constantes para formar variaciones de funciones simples. En el ejemplo anterior, por ejemplo, hemos restado 2 al argumento de la función $y = x^2$ para obtener la función $f(x) = (x - 2)^2$. Esta sustracción representa un desplazamiento de la función $y = x^2$ en dos unidades a la derecha. Un desplazamiento, horizontal o vertical, es un tipo de **transformación de una función**. Otras transformaciones incluyen escalas horizontales y verticales, y reflexiones sobre los ejes.

El desplazamiento vertical de una función se produce si sumamos o restamos la misma constante a cada salida y. Para $c > 0$, el gráfico de $f(x) + c$ es un desplazamiento del gráfico de $f(x)$ que sube en unidades c, mientras que el gráfico de $f(x) - c$ es un desplazamiento del gráfico de $f(x)$ que baja en unidades c. Por ejemplo, el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 4$ es el gráfico de $y = x^2$ que se desplazó hacia arriba en 4 unidades; el gráfico de la función $f(x) = x^2 - 4$ es el gráfico de $y = x^2$ que se desplaza hacia abajo en 4 unidades (Figura 1.23).

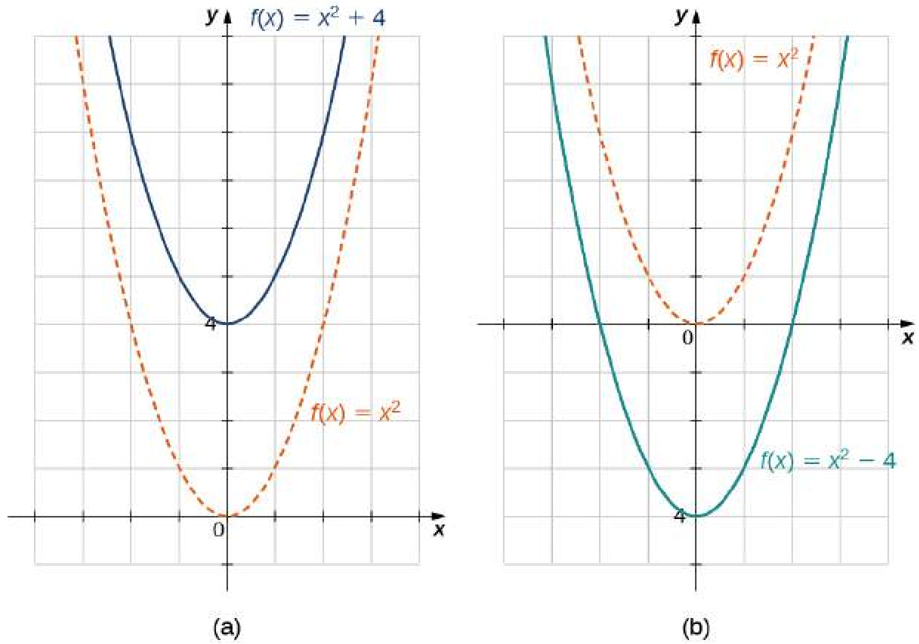


Figura 1.23 (a) Para $c > 0$, el gráfico de $y = f(x) + c$ es un desplazamiento vertical hacia arriba en unidades c del gráfico de $y = f(x)$. (b) Para $c > 0$, el gráfico de $y = f(x) - c$ es un desplazamiento vertical hacia abajo en unidades c del gráfico de $y = f(x)$.

El desplazamiento horizontal de una función se produce si sumamos o restamos la misma constante a cada entrada x. Para $c > 0$, el gráfico de $f(x + c)$ es un desplazamiento del gráfico de $f(x)$ a la izquierda en unidades c; el gráfico de $f(x - c)$ es un desplazamiento del gráfico de $f(x)$ a la derecha en c. ¿Por qué el gráfico se desplaza a la izquierda cuando se suma una constante y se desplaza a la derecha cuando se resta una constante? Para responder esta pregunta, veamos un ejemplo.

Considere la función $f(x) = |x + 3|$ y evalúe esta función en $x - 3$. Dado que $f(x - 3) = |x|$ y $x - 3 < x$, el gráfico de $f(x) = |x + 3|$ es el gráfico de $y = |x|$ desplazado a la izquierda en 3 unidades. Del mismo modo, el gráfico de $f(x) = |x - 3|$ es el gráfico de $y = |x|$ desplazado a la derecha en 3 unidades (Figura 1.24).

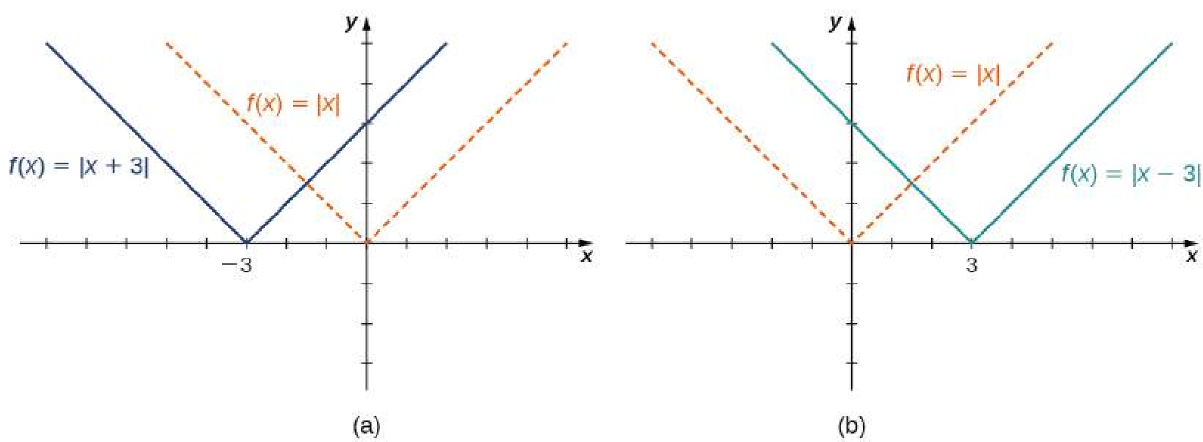


Figura 1.24 (a) Para $c > 0$, el gráfico de $y = f(x + c)$ es un desplazamiento horizontal hacia la izquierda en unidades c del gráfico de $y = f(x)$. (b) Para $c > 0$, el gráfico de $y = f(x - c)$ es un desplazamiento horizontal hacia la derecha en unidades c del gráfico de $y = f(x)$.

Se produce un escalado vertical de un gráfico si multiplicamos todas las salidas y de una función por la misma constante positiva. Para $c > 0$, el gráfico de la función $cf(x)$ es el gráfico de $f(x)$ escalado verticalmente por un factor de c. Si $c > 1$, los valores de salida de la función $cf(x)$ son mayores que los valores de salida de la función $f(x)$; por lo tanto, el gráfico se ha estirado verticalmente. Si los valores de $0 < c < 1$, entonces los valores de salida de la función $cf(x)$ son más pequeños, por lo que el gráfico se ha comprimido. Por ejemplo, el gráfico de la función $f(x) = 3x^2$ es el gráfico de $y = x^2$ estirado verticalmente por un factor de 3, mientras que el gráfico de $f(x) = x^2/3$ es el gráfico de $y = x^2$ comprimido verticalmente por un factor de 3 (Figura 1.25).

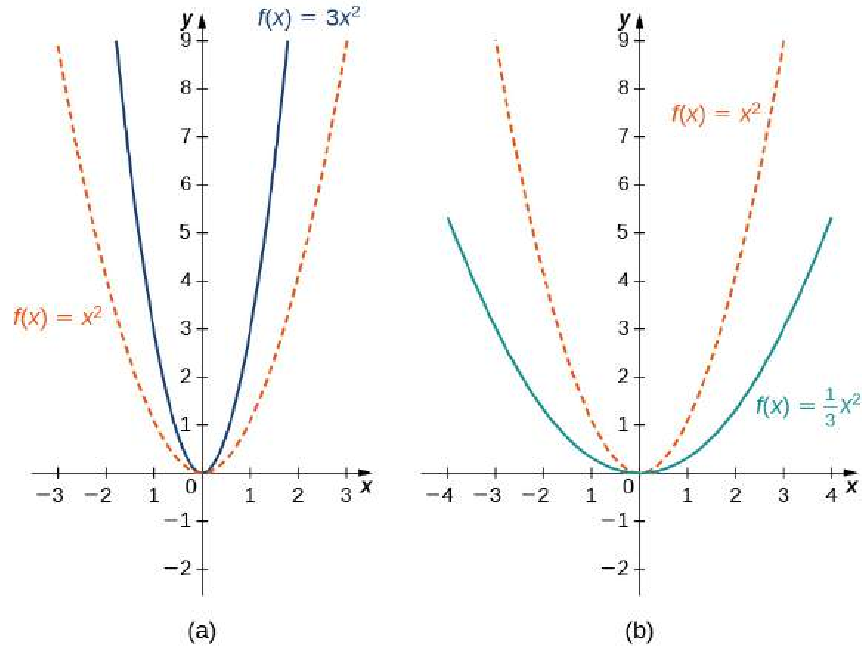


Figura 1.25 (a) Si $c > 1$, el gráfico de $y = cf(x)$ es un estiramiento vertical del gráfico de $y = f(x)$. (b) Si $0 < c < 1$, el gráfico de $y = cf(x)$ es una compresión vertical del gráfico de $y = f(x)$.

El escalado horizontal de una función se produce si multiplicamos las entradas x por la misma constante positiva. Para $c > 0$, el gráfico de la función $f(cx)$ es el gráfico de $f(x)$ escalado horizontalmente por un factor de c. Si $c > 1$, el gráfico de $f(cx)$ es el gráfico de $f(x)$ comprimido horizontalmente. Si los valores de $0 < c < 1$, el gráfico de $f\,(cx)$ es el gráfico de $f\,(x)$ estirado horizontalmente. Por ejemplo, consideremos la función $f\,(x) = \sqrt{2x}$ y evaluar f en $x/2$. Dado que $f(x/2) = \sqrt{x}$, el gráfico de $f\,(x) = \sqrt{2x}$ es el gráfico de $y = \sqrt{x}$ comprimido horizontalmente. El gráfico de $y = \sqrt{x/2}$ es un estiramiento horizontal del gráfico de $y = \sqrt{x}$ (Figura 1.26).

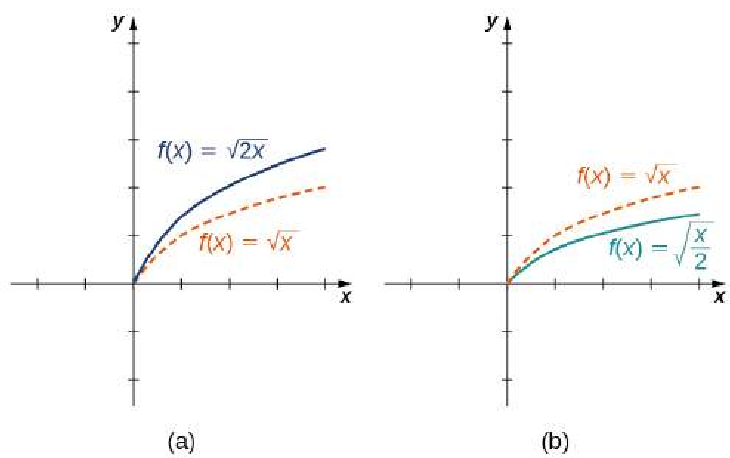


Figura 1.26 (a) Si $c > 1$, el gráfico de $y = f\,(cx)$ es una compresión horizontal del gráfico de $y = f(x)$. (b) Si $0 < c < 1$, el gráfico de $y = f(cx)$ es un estiramiento horizontal del gráfico de $y = f(x)$.

Hemos explorado lo que ocurre con el gráfico de una función f cuando multiplicamos f por una constante $c > 0$ para obtener una nueva función $cf(x)$. También hemos hablado de lo que ocurre con el gráfico de una función f cuando multiplicamos la variable independiente x por $c > 0$ para obtener una nueva función $f(cx)$. Sin embargo, no hemos abordado qué ocurre con el gráfico de la función si la constante c es negativa. Si tenemos una constante $c < 0$, podemos escribir c como un número positivo multiplicado por -1; pero, ¿qué tipo de transformación obtenemos cuando multiplicamos la función o su argumento por -1? Cuando multiplicamos todas las salidas por -1, obtenemos una reflexión sobre el eje x. Cuando multiplicamos todas las entradas por -1, obtenemos una reflexión sobre el eje y. Por ejemplo, el gráfico de $f\,(x) = -(x^3 + 1)$ es el gráfico de $y = (x^3 + 1)$ reflejado sobre el eje x. El gráfico de $f\,(x) = (-x)^3 + 1$ es el gráfico de $y = x^3 + 1$ reflejado sobre el eje y (Figura 1.27).

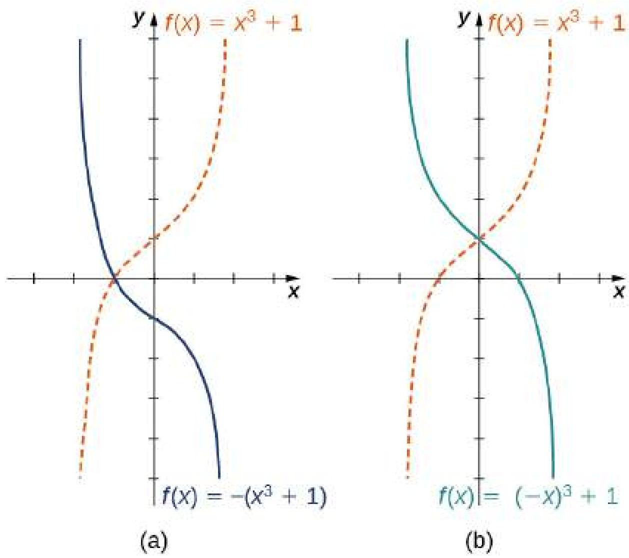


Figura 1.27 (a) El gráfico de $y = -f(x)$ es el gráfico de $y = f(x)$ reflejado sobre el eje x. (b) El gráfico de $y = f(-x)$ es el gráfico de $y = f(x)$ reflejado sobre el eje y.

Si el gráfico de una función consiste en más de una transformación de otro gráfico, es importante transformar el gráfico en el orden correcto. Dada una función $f(x)$, el gráfico de la función relacionada $y = cf\,(a\,(x+b)) + d$ puede obtenerse del gráfico de $y = f(x)$ realizando las transformaciones en el orden siguiente.

1. El escalado horizontal del gráfico de $y = f(x+b)$ por un factor de $|a|$. Si $a < 0$, el gráfico se refleja sobre el eje y.
2. Desplazamiento horizontal del gráfico de $y = f(x)$. Si $b > 0$, el desplazamiento es hacia la izquierda. Si los valores de $b < 0$, el desplazamiento es hacia la derecha.
3. El escalado vertical del gráfico de $y = f(a\,(x+b))$ por un factor de $|c|$. Si $c < 0$, el gráfico se refleja sobre el eje x.
4. Desplazamiento vertical del gráfico de $y = cf(a\,(x+b))$. Si $d > 0$, se desplaza hacia arriba. Si los valores de $d < 0$, se desplaza hacia abajo.

En la siguiente tabla podemos resumir las diferentes transformaciones y sus efectos relacionados en el gráfico de una función.

Transformación de $f\ (c > 0)$	Efecto en el gráfico de f
$f\,(x) + c$	Desplazamiento vertical hacia arriba en c unidades
$f\,(x) - c$	Desplazamiento vertical hacia abajo en c unidades
$f(x + c)$	Desplazamiento a la izquierda por c unidades
$f(x - c)$	Desplazamiento a la derecha en c unidades
$cf(x)$	Estiramiento vertical si $c > 1$; compresión vertical si $0 < c < 1$
$f(cx)$	Estiramiento horizontal si $0 < c < 1$; compresión horizontal si $c > 1$
$-f(x)$	Reflexión sobre el eje x
$f(-x)$	Reflexión sobre el eje y

Tabla 1.7 Transformaciones de funciones

EJEMPLO 1.21

Transformación de una función

Para cada una de las siguientes funciones, a. y b., dibuje un gráfico utilizando una secuencia de transformaciones de una función conocida.

a. $f(x) = -|x+2| - 3$
b. $f(x) = 3\sqrt{-x} + 1$

Solución

a. A partir del gráfico de $y = |x|$, se desplazan 2 unidades a la izquierda, se refleja sobre el eje x, y luego se desplaza hacia abajo 3 unidades

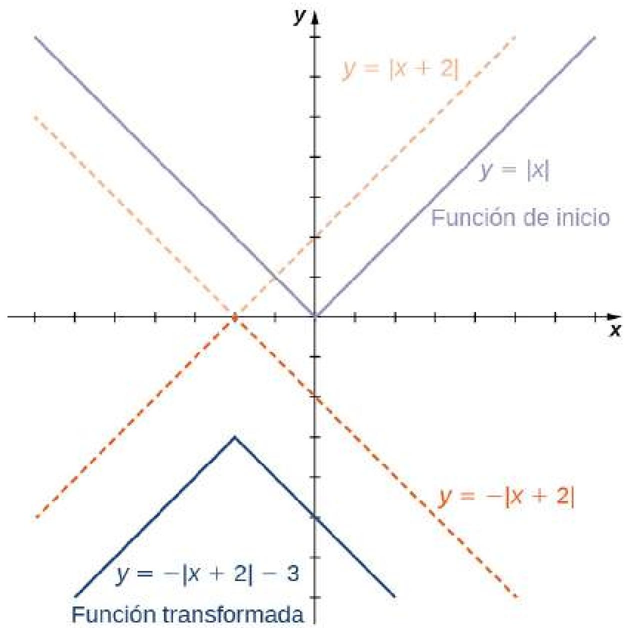


Figura 1.28 La función $f(x) = -|x+2| - 3$ puede verse como una secuencia de tres transformaciones de la función $y = |x|$.

b. A partir del gráfico de $y = \sqrt{x}$, se refleja sobre el eje y, se estira el gráfico verticalmente por un factor de 3, y se mueve hacia arriba 1 unidad

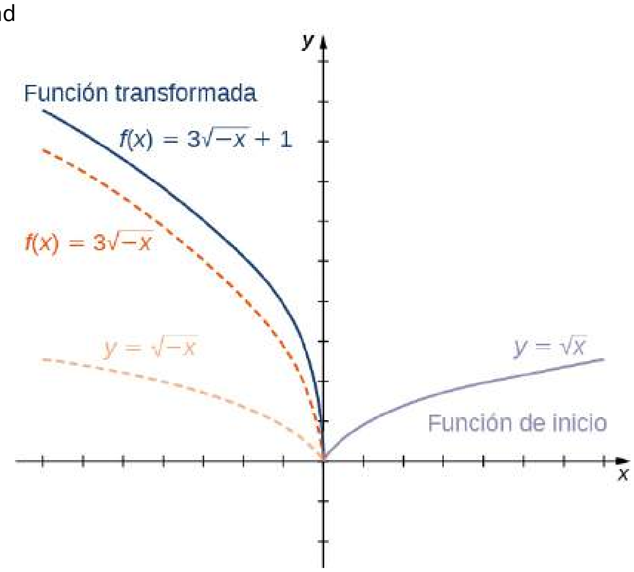


Figura 1.29 La función $f(x) = 3\sqrt{-x} + 1$ puede verse como una secuencia de tres transformaciones de la función $y = \sqrt{x}$.

1.16 Describa cómo la función $f(x) = -(x+1)^2 - 4$ se puede graficar utilizando el gráfico de $y = x^2$ y una secuencia de transformaciones.

SECCIÓN 1.2 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, para cada par de puntos, a. halle la pendiente de la línea que pasa por los puntos y b. indique si la línea es creciente, decreciente, horizontal o vertical.

59. $(-2, 4)$ y $(1, 1)$

60. $(-1, 4)$ y $(3, -1)$ grandes.

61. $(3, 5)$ y $(-1, 2)$

62. $(6, 4)$ y $(4, -3)$ grandes.

63. $(2, 3)$ y $(5, 7)$

64. $(1, 9)$ y $(-8, 5)$ grandes.

65. $(2, 4)$ y $(1, 4)$

66. $(1, 4)$ y $(1, 0)$

En los siguientes ejercicios, escriba la ecuación de la línea que satisface las condiciones dadas en la forma pendiente-intersección.

67. La pendiente $= -6$, pasa por $(1, 3)$ grandes.

68. La pendiente de intersección $= 3$, pasa por $(-3, 2)$

69. La pendiente de intersección $= \frac{1}{3}$, pasa por $(0, 4)$ grandes.

70. La pendiente de intersección $= \frac{2}{5}$, $x = 8$

71. Pasa por la intersección $(2, 1)$ y $(-2, -1)$ grandes.

72. Pasa por la intersección $(-3, 7)$ y $(1, 2)$ grandes.

73. $x = 5$ y la intersección y $= -3$

74. $x = -6$ y $y = 9$

En los siguientes ejercicios, para cada ecuación lineal, a. indique la pendiente m y la intersección y b, si la hay, y b. grafique la línea.

75. $y = 2x - 3$

76. $y = -\frac{1}{7}x + 1$

77. $f(x) = -6x$

78. $f(x) = -5x + 4$

79. $4y + 24 = 0$

80. $8x - 4 = 0$

81. $2x + 3y = 6$

82. $6x - 5y + 15 = 0$

En los siguientes ejercicios, para cada polinomio, a. halle el grado; b. halle los ceros, si los hay; c. halle la(s) intersección(es) y, si la(s) hay; d. utilice el coeficiente líder para determinar el comportamiento final del gráfico; y e. determine algebraicamente si el polinomio es par, impar o ninguno de los dos.

83. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$

84. $f(x) = -3x^2 + 6x$

85. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$

86. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

87. $f(x) = 3x - x^3$

Para los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de $f(x) = x^2$ para graficar cada función transformada g.

88. $g(x) = x^2 - 1$

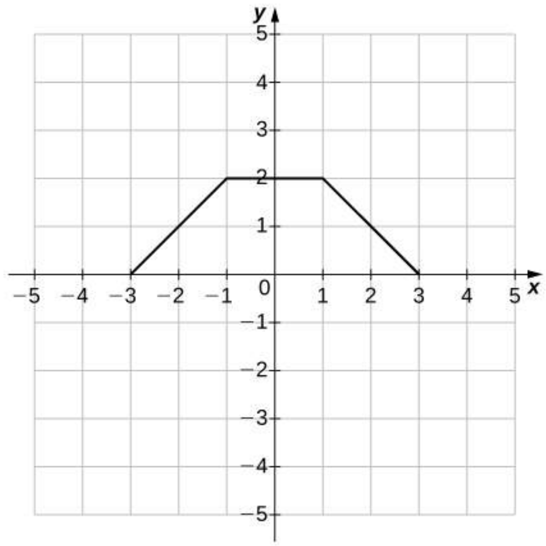
89. $g(x) = (x+3)^2 + 1$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ para graficar cada función transformada g.

90. $g(x) = \sqrt{x+2}$

91. $g(x) = -\sqrt{x} - 1$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de $y = f(x)$ para graficar cada función transformada g.



92. $g(x) = f(x) + 1$

93. $g(x) = f(x-1) + 2$

En los siguientes ejercicios, para cada una de las funciones definidas a trozos, a. considere los valores dados de la variable independiente y b. dibuje el gráfico.

94. $f(x) = \begin{cases} 4x+3, x \leq 0 \\ -x+1, x > 0 \end{cases}$; $f(-3)$; $f(0)$; $f(2)$ grandes.

95. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, x < 0 \\ 4x - 3, x \geq 0 \end{cases}$; $f(-4)$; $f(0)$; $f(2)$

96. $h(x) = \begin{cases} x+1, x \leq 5 \\ 4, x > 5 \end{cases}$; $h(0)$; $h(\pi)$; $h(5)$ grandes.

97. $g(x) = \begin{cases} \frac{3}{x-2}, x \neq 2 \\ 4, x = 2 \end{cases}$; $g(0)$; $g(-4)$; $g(2)$

En los siguientes ejercicios, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Explique por qué.

98. $f(x) = (4x+1)/(7x-2)$ es una función trascendental.

99. $g(x) = \sqrt[3]{x}$ es una función raíz impar

100. Una función logarítmica es una función algebraica.

101. Una función de la forma $f(x) = x^b$, donde b es una constante de valor real, es una función exponencial.

102. El dominio de una función raíz par son todos los números reales.

103. **[T]** Una compañía compra un equipo informático por 20.500 dólares. Al final de un periodo de 3 años, el valor del equipo ha disminuido linealmente a 12.300 dólares.

a. Halle una función $y = V(t)$ que determine el valor *V* del equipo al cabo de t años.
b. Halle e interprete el significado de las intersecciones x y y para esta situación.
c. ¿Cuál es el valor del equipo al cabo de 5 años?
d. ¿Cuándo el valor del equipo será de 3.000 dólares?

104. **[T]** El total de las compras en línea durante las fiestas navideñas ha aumentado considerablemente en los últimos 5 años. En 2012 $(t = 0)$, las ventas navideñas totales en línea fueron de 42.300 millones de dólares, mientras que en 2013 fueron de 48.100 millones de dólares.

a. Halle una función lineal *S* que estime el total de las ventas navideñas en línea en el año *t*.
b. Interprete la pendiente del gráfico de *S*.
c. Utilice la parte a. para predecir el año en que las compras en línea de la Navidad alcanzarán los 60.000 millones de dólares.

105. **[T]** Una panadería familiar hace cupcakes y los vende en festivales locales al aire libre. Para un festival de música, hay un costo fijo de 125 dólares para montar un puesto de cupcakes. La propietaria calcula que hacer cada uno cuesta 0,75 dólares, y está interesada en determinar el costo total C en función del número de cupcakes elaborados.

a. Halle una función lineal que relacione el costo *C* con *x*, el número de cupcakes hechos.
b. Halle el costo de hornear 160 cupcakes.
c. Si la propietaria vende los cupcakes a 1,50 dólares cada uno, ¿cuántos necesita vender para empezar a obtener beneficios? *(Pista*: Utiliza la función INTERSECCIÓN en una calculadora para encontrar este número).

106. **[T]** Se espera que una casa que costó 250.000 dólares valga el doble de su precio de compra en 18 años.

a. Halle una función lineal que modele el precio *P* de la casa frente al número de años *t* desde la compra original.
b. Interpreta la pendiente del gráfico de *P*.
c. Halle el precio de la casa 15 años después de su compra.

107. **[T]** Alguien compró un automóvil por 26.000 dólares. El valor del auto se deprecia 1.500 dólares al año.

a. Halle una función lineal que modele el valor V del automóvil después de t años.
b. Halle e interprete $V(4)$.

108. **[T]** Se compró un condominio en una zona exclusiva de la ciudad por 432.000 dólares. En 35 años valdrá 60.500 dólares. Halle la tasa de depreciación.

109. **[T]** El costo total C para producir un determinado artículo se modela mediante la función $C(x) = 10{,}50x + 28.500,$ donde x es el número de artículos producidos. Determine el costo de producción de 175 artículos.

110. **[T]** Un profesor le pide a su clase que informe la cantidad de tiempo t que han dedicado a escribir dos tareas. La mayoría de los estudiantes afirman que les toma unos 45 minutos teclear un trabajo de cuatro páginas y 1,5 horas teclear uno de nueve.

a. Halle la función lineal $y = N(t)$ que modela esta situación, donde N es el número de páginas escritas y t es el tiempo en minutos.
b. Utilice la parte a. para determinar cuántas páginas se pueden escribir en 2 horas.
c. Utilice la parte a. para determinar el tiempo que se tarda en escribir una tarea de 20 páginas.

111. **[T]** El rendimiento (como porcentaje de la capacidad total) de las centrales nucleares de Estados Unidos puede modelarse mediante la función $P(t) = 1{,}8576t + 68{,}052,$ donde t es el tiempo en años y $t = 0$ corresponde a principios del año 2000. Utilice el modelo para predecir el porcentaje de rendimiento en 2015.

112. **[T]** La oficina de admisiones de una universidad pública estima que el 65 % de los estudiantes a los que se les ofreció la admisión en la clase de 2019 se matricularán realmente.

a. Halle la función lineal $y = N(x)$, donde N es el número de estudiantes que realmente se matriculan y x es el número de todos los estudiantes a los que se les ofreció la admisión en la clase de 2019.
b. Si la universidad quiere que el tamaño de la clase de primer año de 2019 sea de 1350, determine cuántos estudiantes deben admitirse.

1.3 Funciones trigonométricas

Objetivos de aprendizaje

1.3.1 Convertir medidas de ángulos entre grados y radianes.
1.3.2 Reconocer las definiciones triangular y circular de las funciones trigonométricas básicas.
1.3.3 Escribir las identidades trigonométricas básicas.
1.3.4 Identificar los gráficos y los periodos de las funciones trigonométricas.
1.3.5 Describir el desplazamiento de un gráfico de seno o coseno a partir de la ecuación de la función.

Las funciones trigonométricas se utilizan para modelar muchos fenómenos, como las ondas sonoras, las vibraciones de las cuerdas, la corriente eléctrica alterna y el movimiento de los péndulos. De hecho, casi cualquier movimiento repetitivo o cíclico puede modelarse mediante alguna combinación de funciones trigonométricas. En este apartado definiremos las seis funciones trigonométricas básicas y veremos algunas de las principales identidades relacionadas con estas funciones.

Medición de radianes

Para utilizar las funciones trigonométricas, primero debemos entender cómo se miden los ángulos. Aunque podemos utilizar tanto los radianes como los grados, los **radianes** son una medida más natural porque están relacionados directamente con el círculo unitario, un círculo de radio 1. La medida del radián de un ángulo se define como sigue. Dado un ángulo θ, supongamos que s es la longitud del arco correspondiente en el círculo unitario (Figura 1.30). Decimos que el ángulo correspondiente al arco de longitud 1 tiene medida de radián 1.

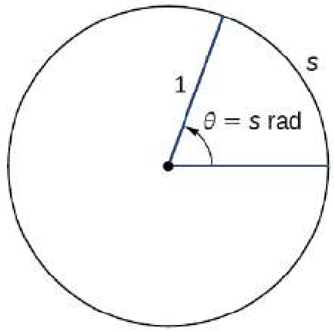


Figura 1.30 La medida del radián de un ángulo θ es la longitud del arco s del arco asociado en el círculo unitario.

Dado que un ángulo de $360°$ corresponde a la circunferencia de un círculo, o a un arco de longitud 2π, concluimos que un ángulo con una medida de grado de $360°$ tiene una medida del radián de 2π. Del mismo modo, vemos que $180°$ equivale a π radianes. La Tabla 1.8 muestra la relación entre los valores comunes de los grados y los radianes.

Grados	Radianes	Grados	Radianes
0	0	120	$2\pi/3$
30	$\pi/6$	135	$3\pi/4$
45	$\pi/4$	150	$5\pi/6$
60	$\pi/3$	180	π
90	$\pi/2$		

Tabla 1.8 Ángulos comunes expresados en grados y radianes

EJEMPLO 1.22

Convertir radianes y grados

a. Exprese $225°$ utilizando radianes.
b. Exprese $5\pi/3$ rad utilizando grados.

Solución

Utilice el hecho de que $180°$ equivale a π radianes como factor de conversión: $1 = \frac{\pi\,\text{rad}}{180°} = \frac{180°}{\pi\,\text{rad}}$.

a. $225° = 225° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{4}$ rad
b. $\frac{5\pi}{3}$ rad = $\frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 300°$

1.17 Exprese $210°$ utilizando radianes. Exprese $11\pi/6$ rad utilizando grados.

Las seis funciones trigonométricas básicas

Las funciones trigonométricas nos permiten utilizar las medidas de los ángulos, en radianes o grados, para encontrar las coordenadas de un punto en cualquier círculo —no solo en un círculo unitario— o para encontrar un ángulo dado un punto en un círculo. También definen la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo.

Para definir las funciones trigonométricas, consideremos primero el círculo unitario centrado en el origen y un punto

$P = (x, y)$ en el círculo de la unidad. Supongamos que θ es un ángulo con un lado inicial que se halla a lo largo del eje positivo x y con un lado terminal que es el segmento de línea OP. Un ángulo en esta posición se dice que está en *posición estándar* (Figura 1.31). Podemos entonces definir los valores de las seis funciones trigonométricas para θ en términos de las coordenadas x como y.

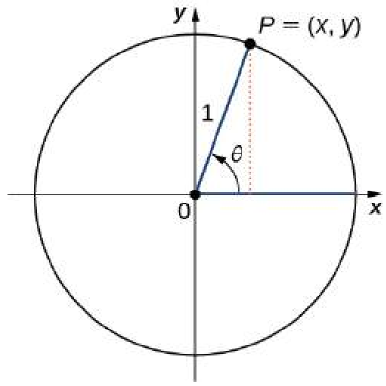


Figura 1.31 El ángulo θ está en posición estándar. Los valores de las funciones trigonométricas para θ se definen en términos de las coordenadas x como y.

Definición

Supongamos que $P = (x, y)$ es un punto del círculo unitario centrado en el origen O. Supongamos que θ es un ángulo con un lado inicial a lo largo del eje positivo x y un lado terminal dado por el segmento de línea OP. Las **funciones trigonométricas** se definen entonces como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= y & \csc\theta &= \frac{1}{y} \\ \cos\theta &= x & \sec\theta &= \frac{1}{x} \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} & \cot\theta &= \frac{x}{y} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Si los valores de $x = 0$, $\sec\theta$ y $\tan\theta$ son indefinidos. Si los valores de $y = 0$, entonces $\cot\theta$ y $\csc\theta$ son indefinidos.

Podemos ver que para un punto $P = (x, y)$ en un círculo de radio r con un ángulo correspondiente θ, las coordenadas x como y satisfacen

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ x &= r\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{r} \\ y &= r\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Los valores de las demás funciones trigonométricas pueden expresarse en términos de x, y, y r (Figura 1.32).

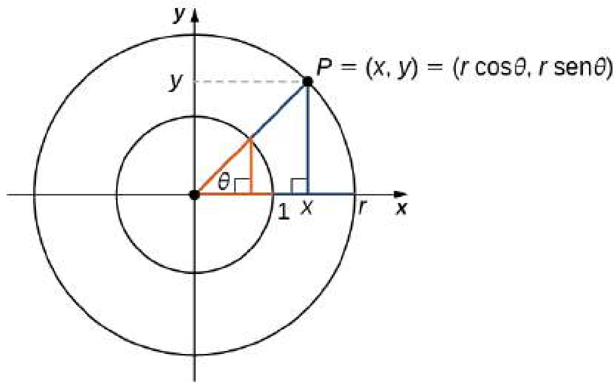


Figura 1.32 Para un punto $P = (x, y)$ en un círculo de radio r, las coordenadas x como y satisfacen $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

La Tabla 1.9 muestra los valores del seno y del coseno en los ángulos mayores del primer cuadrante. A partir de esta tabla, podemos determinar los valores del seno y del coseno en los ángulos correspondientes de los otros cuadrantes. Los valores de las demás funciones trigonométricas se calculan fácilmente a partir de los valores de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0

Tabla 1.9 Los valores de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ en los ángulos principales θ en el primer cuadrante

EJEMPLO 1.23

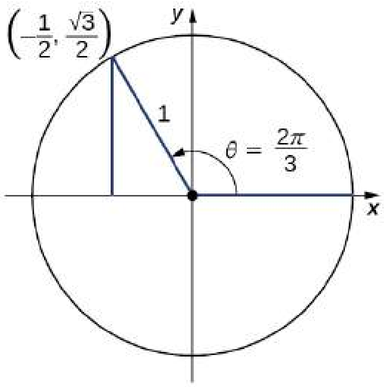
Evaluación de funciones trigonométricas

Evalúe cada una de las siguientes expresiones.

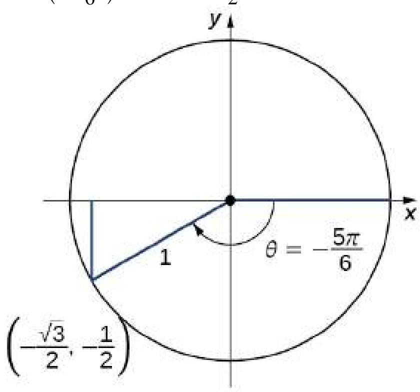
a. $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ grandes.
b. $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ grandes.
c. $\tan\left(\frac{15\pi}{4}\right)$

Solución

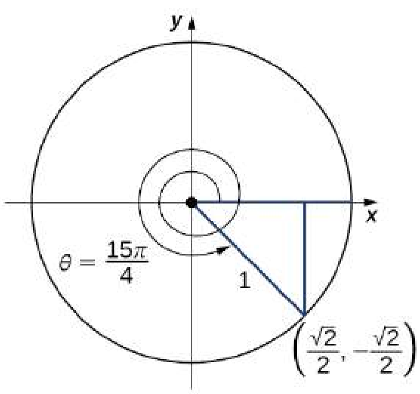
a. En el círculo unitario, el ángulo $\theta = \frac{2\pi}{3}$ corresponde al punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Por lo tanto, $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



b. Un ángulo $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ corresponde a una revolución en sentido negativo, como se muestra. Por lo tanto, $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



c. Un ángulo $\theta = \frac{15\pi}{4} = 2\pi + \frac{7\pi}{4}$. Por lo tanto, este ángulo corresponde a más de una revolución, como se muestra. Sabiendo que un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ corresponde al punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, podemos concluir que $\tan\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \frac{y}{x} = -1$.



1.18 Evalúe $\cos(3\pi/4)$ y $\text{sen}(-\pi/6)$.

Como se mencionó anteriormente, las razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se pueden expresar en términos de las funciones trigonométricas evaluadas en cualquiera de los ángulos agudos del triángulo. Supongamos que θ es uno de los ángulos agudos. Supongamos que A es la longitud del cateto adyacente, O es la longitud del cateto opuesto, y H es la longitud de la hipotenusa. Inscribiendo el triángulo en un círculo de radio H, como se muestra en la Figura 1.33, vemos que A, H, y O satisfacen las siguientes relaciones con θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{O}{H} \qquad \csc\theta = \frac{H}{O}$$
$$\cos\theta = \frac{A}{H} \qquad \sec\theta = \frac{H}{A}$$
$$\tan\theta = \frac{O}{A} \qquad \cot\theta = \frac{A}{O}$$

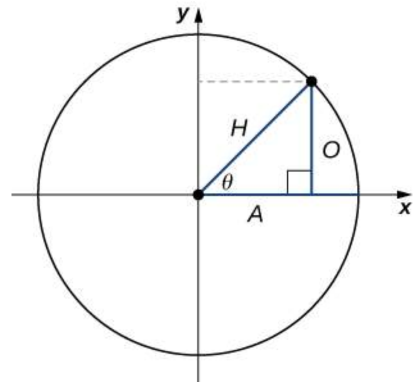


Figura 1.33 Al inscribir un triángulo rectángulo en una circunferencia, podemos expresar las relaciones de las longitudes de los lados en términos de las funciones trigonométricas evaluadas en θ.

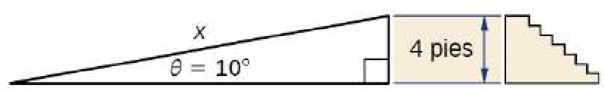
EJEMPLO 1.24

Construir una rampa de madera

Se construirá una rampa de madera con un extremo en el suelo y el otro en la parte superior de una corta escalera. Si la parte superior de la escalera es de 4 ft desde el suelo y el ángulo entre el suelo y la rampa debe ser de $10°$, ¿qué longitud debe tener la rampa?

Solución

Supongamos que x denota la longitud de la rampa. En la siguiente imagen, vemos que x tiene que satisfacer la ecuación $\operatorname{sen}(10°) = 4/x$. Al resolver esta ecuación para x, vemos que $x = 4/\operatorname{sen}(10°) \approx 23{,}035$ pies.



1.19 Un pintor de casas quiere inclinar una escalera de 20 contra una casa. Si el ángulo entre la base de la escalera y el suelo debe ser $60°$, ¿A qué distancia de la casa debe colocar la base de la escalera?

Identidades trigonométricas

Una **identidad trigonométrica** es una ecuación en la que intervienen funciones trigonométricas que es verdadera para todos los ángulos θ para el que se definen las funciones. Podemos utilizar esas identidades para ayudarnos a resolver o simplificar ecuaciones. A continuación se enumeran las principales identidades trigonométricas.

Regla: identidades trigonométricas

Identidades recíprocas

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$
$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Fórmulas de adición y sustracción

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Fórmulas de ángulo doble

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

EJEMPLO 1.25

Resolver ecuaciones trigonométricas

Para cada una de las siguientes ecuaciones, utilice una identidad trigonométrica para encontrar todas las soluciones.

a. $1 + \cos(2\theta) = \cos\theta$
b. $\operatorname{sen}(2\theta) = \tan\theta$

Solución

a. Si utilizamos la fórmula del doble ángulo para $\cos(2\theta)$, vemos que θ es una solución de

$$1 + \cos(2\theta) = \cos\theta$$

si y solo si

$$1 + 2\cos^2\theta - 1 = \cos\theta,$$

que es verdadera si y solo si

$$2\cos^2\theta - \cos\theta = 0.$$

Para resolver esta ecuación, es importante tener en cuenta que tenemos que factorizar el lado izquierdo y no dividir ambos lados de la ecuación por $\cos\theta$. El problema de dividir por $\cos\theta$ es que es posible que $\cos\theta$ es cero. De hecho, si dividiéramos ambos lados de la ecuación por $\cos\theta$, nos perderíamos algunas de las soluciones de la ecuación original. Factorizando el lado izquierdo de la ecuación, vemos que θ es una solución de esta ecuación si y solo si

$$\cos\theta(2\cos\theta - 1) = 0.$$

Dado que $\cos\theta = 0$ cuando

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \pm \pi, \frac{\pi}{2} \pm 2\pi, \ldots,$$

y $\cos\theta = 1/2$ cuando

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \pm 2\pi, \ldots \text{ o } \theta = -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3} \pm 2\pi, \ldots,$$

concluimos que el conjunto de soluciones de esta ecuación es

$$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi, \theta = \frac{\pi}{3} + 2n\pi, \text{ y } \theta = -\frac{\pi}{3} + 2n\pi, n = 0, \pm 1, 1, \pm 2, \ldots.$$

b. Si utilizamos la fórmula del doble ángulo para $\operatorname{sen}(2\theta)$ y la identidad recíproca para $\tan(\theta)$, la ecuación se puede escribir como

$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}.$$

Para resolver esta ecuación, multiplicamos ambos lados por $\cos\theta$ para eliminar el denominador, y decimos que si θ satisface esta ecuación, entonces θ satisface la ecuación

$$2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Sin embargo, en este punto tenemos que ser cuidadosos. Incluso si θ satisface esta nueva ecuación, puede no satisfacer la ecuación original porque para hacerlo, necesitaríamos poder dividir ambos lados de la ecuación por $\cos\theta$. Sin embargo, si $\cos\theta = 0$, no podemos dividir ambos lados de la ecuación por $\cos\theta$. Por lo tanto, es posible que lleguemos a soluciones extrañas. Por lo tanto, al final, es importante comprobar si hay ese tipo de soluciones. Volviendo a la ecuación, es importante que tengamos en cuenta $\operatorname{sen}\theta$ de ambos términos del lado izquierdo en vez de dividir ambos lados de la ecuación por $\operatorname{sen}\theta$. Factorizando el lado izquierdo de la ecuación, podemos reescribir esta ecuación como

$$\operatorname{sen}\theta(2\cos^2\theta - 1) = 0.$$

Por tanto, las soluciones vienen dadas por los ángulos θ de manera que $\operatorname{sen}\theta = 0$ o $\cos^2\theta = 1/2$. Las soluciones de la primera ecuación son $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2{,}2\pi, \ldots$. Las soluciones de la segunda ecuación son $\theta = \pi/4, (\pi/4) \pm (\pi/2), (\pi/4) \pm \pi, \ldots$. Tras comprobar que no hay soluciones extrañas, el conjunto de soluciones de la ecuación es

$$\theta = n\pi \quad \text{y} \quad \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n = 0, \pm 1{,}1, \pm 2, \ldots.$$

1.20 Halle todas las soluciones a la ecuación $\cos(2\theta) = \operatorname{sen}\theta$.

EJEMPLO 1.26

Demostrar la una identidad trigonométrica

Demuestre la identidad trigonométrica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

Solución

Comencemos con la identidad

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Si dividimos ambos lados de esta ecuación entre $\cos^2\theta$, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Dado que $\operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \tan\theta$ y $1/\cos\theta = \sec\theta$, concluimos que

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta.$$

1.21 Demuestre la identidad trigonométrica $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

Gráficos y periodos de las funciones trigonométricas

Hemos visto que al recorrer el círculo unitario, los valores de las funciones trigonométricas se repiten. Podemos ver este patrón en los gráficos de las funciones. Supongamos que $P = (x, y)$ es un punto del círculo unitario y que θ es el ángulo correspondiente . Dado que los ángulos θ y $\theta + 2\pi$ corresponden al mismo punto P, los valores de las funciones trigonométricas en θ y en $\theta + 2\pi$ son los mismos. En consecuencia, las funciones trigonométricas son **funciones periódicas.** El periodo de una función f se define como el menor valor positivo p de manera que $f(x + p) = f(x)$ para todos los valores x en el dominio de f. Las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen un periodo de 2π. Como las funciones tangente y cotangente se repiten en un intervalo de longitud π, su periodo es π (Figura 1.34).

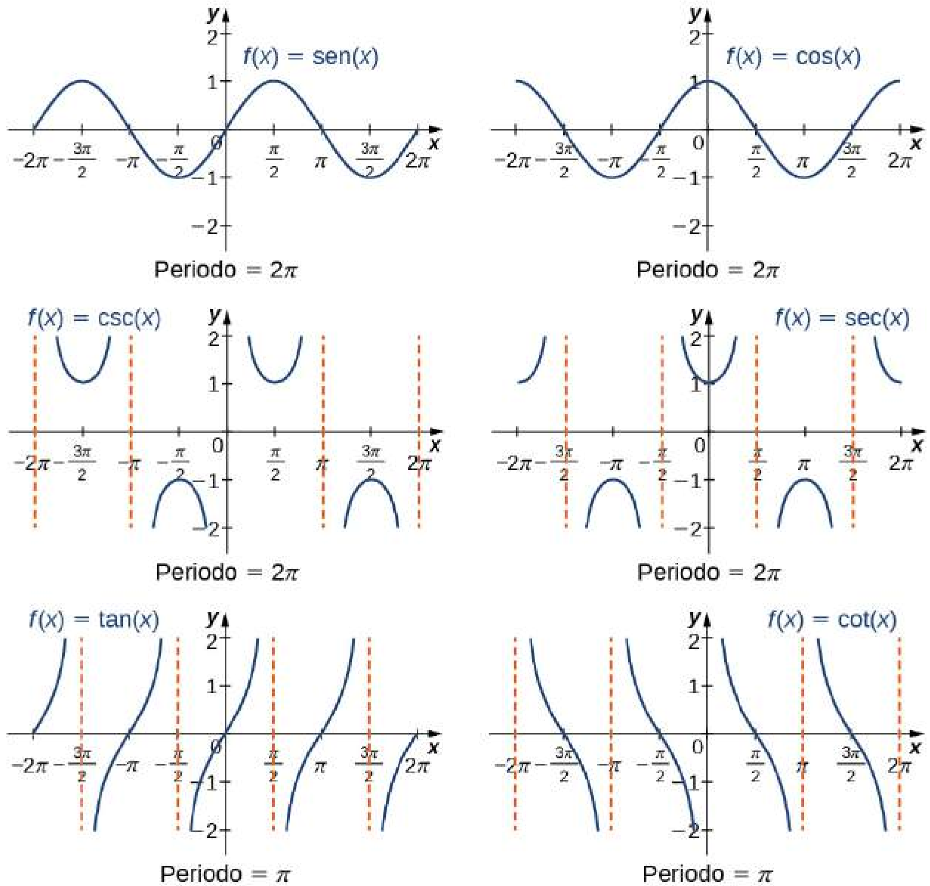


Figura 1.34 Las seis funciones trigonométricas son periódicas.

Al igual que con las funciones algebraicas, podemos aplicar transformaciones a las funciones trigonométricas. En particular, considere la siguiente función:

$$f(x) = A\cos(B(x-\alpha)) + C. \tag{1.10}$$

En la Figura 1.35, la constante α provoca un desplazamiento horizontal o de fase. El factor B cambia el periodo. Esta función seno transformada tendrá un periodo $2\pi/|B|$. El factor A resulta en un estiramiento vertical por un factor de $|A|$. Decimos $|A|$ es la "amplitud de f." La constante C ocasiona un desplazamiento vertical.

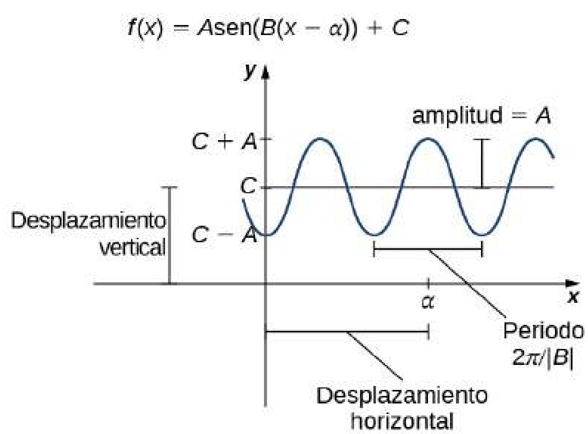


Figura 1.35 Gráfico de una función coseno general.

Observe en la Figura 1.34 que el gráfico de $y = \cos x$ es el gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ desplazado a la izquierda $\pi/2$. Por lo tanto, podemos escribir $\cos x = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$. Del mismo modo, podemos ver el gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ como el gráfico de $y = \cos x$ desplazado a la derecha en $\pi/2$ unidades, y afirma que $\operatorname{sen} x = \cos(x - \pi/2)$.

Una curva sinusoidal desplazada surge de forma natural al graficar el número de horas de luz en un lugar determinado en función del día del año. Por ejemplo, supongamos que una ciudad informa que el 21 de junio es el día más largo del año con $15{,}7$ horas y que el 21 de diciembre es el día más corto del año con $8{,}3$ horas. Se puede demostrar que la función

$$h(t) = 3{,}7 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80{,}5)\right) + 12$$

es un modelo para el número de horas de luz del día h en función del día del año t (Figura 1.36).

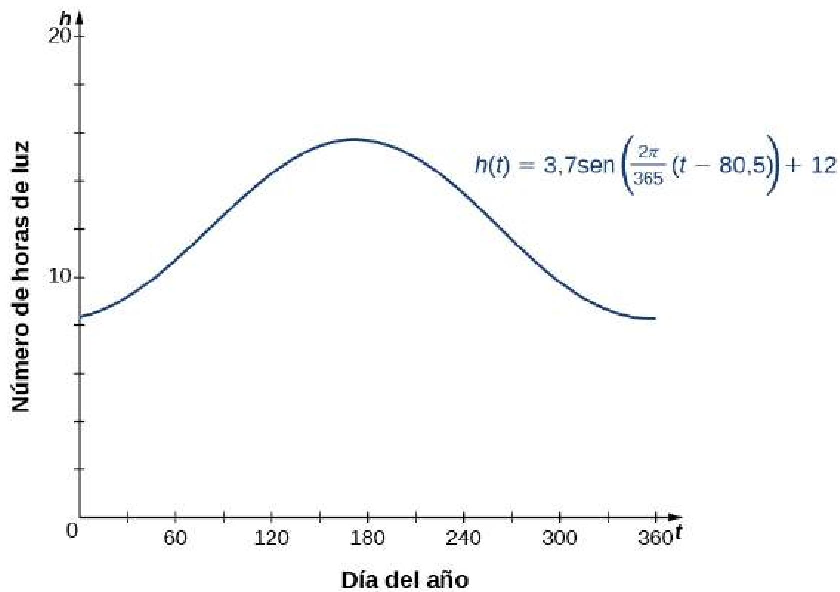


Figura 1.36 Las horas de luz en función del día del año pueden modelarse mediante una curva sinusoidal desplazada.

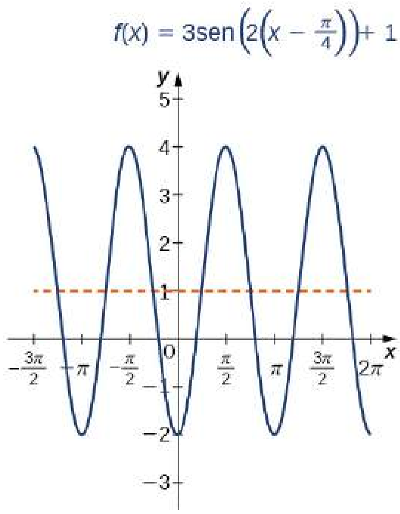
EJEMPLO 1.27

Trazado del gráfico de una curva senoidal transformada

Dibuje un gráfico de $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$.

Solución

Este gráfico es una compresión horizontal por un factor de 2, un desplazamiento de fase a la derecha de π/4 unidades, seguido de un estiramiento vertical por un factor de 3 y luego un desplazamiento vertical de 1 unidad. El periodo de f ¿es π.



1.22 Describa la relación entre el gráfico de $f(x) = 3\,\text{sen}\,(4x) - 5$ y el gráfico de $y = \text{sen}(x)$.

SECCIÓN 1.3 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, convierta cada ángulo de grados a radianes. Escriba la respuesta como un múltiplo de π.

113. $240°$

114. $15°$

115. $-60°$

116. $-225°$

117. $330°$

En los siguientes ejercicios, convierta cada ángulo de radianes a grados.

118. $\frac{\pi}{2}$ rad

119. $\frac{7\pi}{6}$ rad

120. $\frac{11\pi}{2}$ rad

121. -3π rad

122. $\frac{5\pi}{12}$ rad

Evalúe los siguientes valores funcionales.

123. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ grandes.

124. $\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)$ grandes.

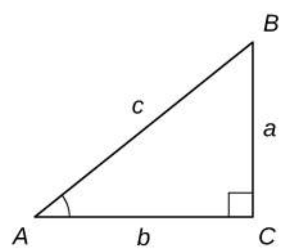
125. $\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ grandes.

126. $\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$ grandes.

127. $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$ grandes.

128. $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

En los siguientes ejercicios, considere el triángulo ABC, un triángulo rectángulo con un ángulo recto en C. a. Halle el lado que falta en el triángulo. b. Halle los seis valores de la función trigonométrica para el ángulo en A. Si es necesario, simplifique a una fracción o redondee a tres decimales.



129. $a = 4, c = 7$

130. $a = 21, c = 29$

131. $a = 85{,}3, b = 125{,}5$

132. $b = 40, c = 41$

133. $a = 84, b = 13$

134. $b = 28, c = 35$

En los siguientes ejercicios, P es un punto del círculo unitario. a. Halle el valor (exacto) de la coordenada que falta en cada punto y b. halle los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ con un lado terminal que pasa por el punto P. Racionalice los denominadores.

135. $P\left(\frac{7}{25}, y\right), y > 0$

136. $P\left(\frac{-15}{17}, y\right), y < 0$

137. $P\left(x, \frac{\sqrt{7}}{3}\right), x < 0$

138. $P\left(x, \frac{-\sqrt{15}}{4}\right), x > 0$

En los siguientes ejercicios, simplifique cada expresión escribiéndola en términos de senos y cosenos, y luego simplifique. La respuesta final no tiene que ser solo en términos de seno y coseno.

139. $\tan^2 x + \operatorname{sen} x \csc x$

140. $\sec x \operatorname{sen} x \cot x$

141. $\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x}$

142. $\sec x - \cos x$

143. $(1 + \tan\theta)^2 - 2\tan\theta$

144. $\operatorname{sen} x\,(\csc x - \operatorname{sen} x)$
grandes.

145. $\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} + \frac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}$

146. $\frac{1+\tan^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}$

En los siguientes ejercicios, verifique que cada ecuación sea una identidad.

147. $\frac{\tan\theta\cot\theta}{\csc\theta} = \operatorname{sen}\theta$

148. $\frac{\sec^2\theta}{\tan\theta} = \sec\theta\csc\theta$

149. $\frac{\operatorname{sen} t}{\csc t} + \frac{\cos t}{\sec t} = 1$

150. $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+1} + \frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x} = 0$

151. $\cot\gamma + \tan\gamma = \sec\gamma\csc\gamma$

152. $\operatorname{sen}^2\beta + \tan^2\beta + \cos^2\beta = \sec^2\beta$

153. $\frac{1}{1-\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{1+\operatorname{sen}\alpha} = 2\sec^2\alpha$

154. $\frac{\tan\theta-\cot\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \sec^2\theta - \csc^2\theta$

En los siguientes ejercicios, resuelva las ecuaciones trigonométricas en el intervalo $0 \le \theta < 2\pi$.

155. $2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$

156. $1 + \cos\theta = \frac{1}{2}$

157. $2\tan^2\theta = 2$

158. $4\operatorname{sen}^2\theta - 2 = 0$

159. $\sqrt{3}\cot\theta + 1 = 0$

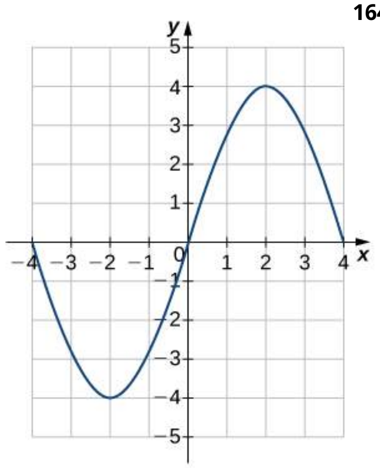
160. $3\sec\theta - 2\sqrt{3} = 0$

161. $2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\theta$

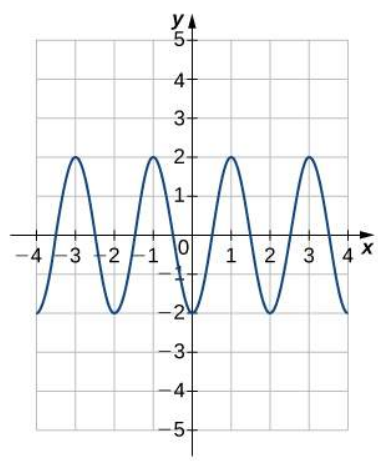
162. $\csc^2\theta + 2\csc\theta + 1 = 0$

En los siguientes ejercicios, cada gráfico es de la forma $y = A\operatorname{sen} Bx$ o $y = A\cos Bx$, donde $B > 0$. Escriba la ecuación del gráfico.

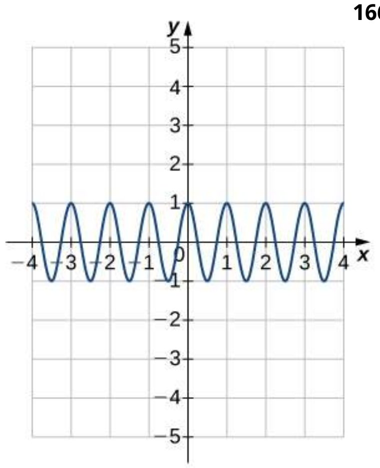
163.



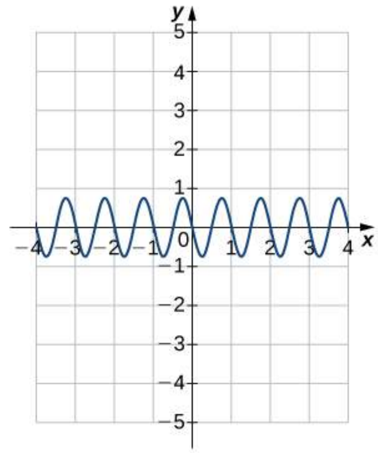
164.



165.



166.



En los siguientes ejercicios, halle a. la amplitud, b. el periodo, y c. el desplazamiento de fase con dirección para cada función.

167. $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

168. $y = 3\cos(2x + 3)$ grandes.

169. $y = \frac{-1}{2}\text{sen}\left(\frac{1}{4}x\right)$

170. $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ grandes.

171. $y = -3\,\text{sen}(\pi x + 2)$

172. $y = 4\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

173. **[T]** El diámetro de una rueda que da vueltas sobre el suelo es de 40 in. Si la rueda gira en un ángulo de $120°$, ¿cuántas pulgadas se desplaza? Aproximación a la pulgada entera más cercana.

174. **[T]** Halle la longitud del arco intersecado por el ángulo central θ en un círculo de radio *r*. Redondee a la centésima más cercana.

a. $r = 12{,}8$ cm, $\theta = \frac{5\pi}{6}$ rad b. $r = 4{,}378$ cm, $\theta = \frac{7\pi}{6}$ rad c. $r = 0{,}964$ cm, $\theta = 50°$ d. $r = 8{,}55$ cm, $\theta = 325°$

175. **[T]** A medida que un punto *P* se mueve alrededor de un círculo, la medida del ángulo cambia. La medida de la rapidez con la que cambia el ángulo se llama *velocidad angular*, ω, y viene dada por $\omega = \theta/t$, donde θ está en radianes y *t* es el tiempo. Halle la velocidad angular para los datos dados. Redondee a la milésima más cercana.

a. $\theta = \frac{7\pi}{4}\,\text{rad}, t = 10$ s b. $\theta = \frac{3\pi}{5}\,\text{rad}, t = 8$ sec c. $\theta = \frac{2\pi}{9}\,\text{rad}, t = 1$ min d. $\theta = 23{,}76\,\text{rad}, t = 14$ min

176. **[T]** Se necesita un total de 250.000 m^2 de terreno para construir una central nuclear. Supongamos que se decide que la zona en la que se va a construir la central eléctrica será circular.

a. Halle el radio de la zona circular de terreno.
b. Si la superficie del terreno va a formar un sector de $45°$ de una circunferencia en vez de una circunferencia entera, halle la longitud del lado curvo.

177. **[T]** El área de un triángulo isósceles con lados iguales de longitud *x* es

$\frac{1}{2}x^2 \operatorname{sen}\theta,$

donde θ es el ángulo que forman los dos lados. Halle el área de un triángulo isósceles con lados iguales de longitud 8 pulgadas y ángulo $\theta = 5\pi/12$ rad.

178. **[T]** Una partícula se desplaza en una trayectoria circular con una velocidad angular constante ω. La velocidad angular se modela mediante la función $\omega = 9\,|\cos(\pi t - \pi/12)|$. Determine la velocidad angular en $t = 9$ seg.

179. **[T]** La corriente alterna para las tomas de corriente de una casa tiene un voltaje dado por la función

$V(t) = 150\cos 368t,$

donde *V* es el voltaje en un tiempo de *t* segundos.

a. Halle el periodo de la función e interprete su significado.
b. Determine el número de periodos que se producen al pasar 1 segundo.

180. **[T]** El número de horas de luz diurna en una ciudad del noreste se modela mediante la función

$$N(t) = 12 + 3\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 79)\right],$$

donde *t* es el número de días después del 1 de enero.

a. Halle la amplitud y el periodo.
b. Determine el número de horas de luz diurna del día más largo del año.
c. Determine el número de horas de luz diurna del día más corto del año.
d. Determine el número de horas de luz diurna 90 días después del 1 de enero.
e. Grafique la función para un periodo que comienza el 1 de enero.

181. **[T]** Supongamos que $T = 50 + 10\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 8)\right]$ es un modelo matemático de la temperatura (en grados Fahrenheit) a las *t* horas después de la medianoche de un determinado día de la semana.

a. Determine la amplitud y el periodo.
b. Halle la temperatura 7 horas después de la medianoche.
c. ¿A qué hora $T = 60°$?
d. Dibuje el gráfico de T en $0 \le t \le 24$.

182. **[T]** La función
$H(t) = 8 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} t\right)$
modela la altura H (en pies) de la marea t horas después de la medianoche. Supongamos que $t = 0$ es medianoche.

a. Encuentre la amplitud y el periodo.
b. Grafique la función en un periodo.
c. ¿Cuál es la altura de la marea a las 4:30 a. m.?

1.4 Funciones inversas

Objetivos de aprendizaje

1.4.1 Determinar las condiciones para que una función tenga una inversa.
1.4.2 Utilizar la prueba de la línea horizontal para reconocer cuándo una función es biunívoca.
1.4.3 Hallar la inversa de una función dada.
1.4.4 Dibujar el gráfico de una función inversa.
1.4.5 Evaluar funciones trigonométricas inversas.

Una función inversa invierte la operación realizada por una determinada función. En otras palabras, lo que hace una función, lo deshace la función inversa. En esta sección, definiremos formalmente una función inversa y estableceremos las condiciones necesarias para que exista. Examinaremos cómo encontrar una función inversa y estudiaremos la relación entre el gráfico de una función y el gráfico de su inversa. A continuación, aplicaremos estas ideas para definir y discutir las propiedades de las funciones trigonométricas inversas.

Existencia de una función inversa

Comencemos con un ejemplo. Dada una función f y una salida $y = f(x)$, a menudo nos interesa encontrar qué valor o valores x se asignaron a y entre f. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^3 + 4$. Dado que cualquier salida $y = x^3 + 4$, podemos resolver esta ecuación para x y hallar que la entrada es $x = \sqrt[3]{y-4}$. Esta ecuación define x en función de y. Denotando esta función como f^{-1}, y escribiendo $x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-4}$, vemos que para cualquier x en el dominio de f, $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(x^3+4\right) = x$. Así, esta nueva función, f^{-1}, "deshizo" lo que la función original f hizo. Una función con esta propiedad se denomina función inversa de la función original.

Definición

Dada una función f con dominio D y rango R, su **función inversa** (si la hay) es la función f^{-1} con dominio R y rango D de manera que $f^{-1}(y) = x$ si $f(x) = y$. En otras palabras, para una función f y su inversa f^{-1},

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para todo } x \text{ in } D, \text{y } f\left(f^{-1}(y)\right) = y \text{ para todo } y \text{ in } R. \quad \textbf{(1.11)}$$

Observe que f^{-1} se lee como "f inversa" Aquí, el -1 no se utiliza como exponente y $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$. La Figura 1.37 muestra la relación entre el dominio y el rango de f y el dominio y el rango de f^{-1}.

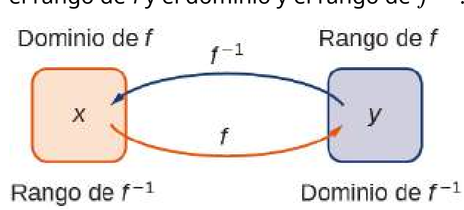


Figura 1.37 Dada una función f y su inversa f^{-1}, $f^{-1}(y) = x$ si y solo si $f(x) = y$. El rango de f se convierte en el

dominio de f^{-1} y el dominio de f se convierte en el rango de f^{-1}.

Recordemos que una función tiene exactamente una salida para cada entrada. Por lo tanto, para definir una función inversa, necesitamos asignar cada entrada a una sola salida. Por ejemplo, intentemos encontrar la función inversa de $f(x) = x^2$. Si resolvemos la ecuación $y = x^2$ por x, llegamos a la ecuación $x = \pm\sqrt{y}$. Esta ecuación no describe x en función de y porque hay dos soluciones a esta ecuación para cada $y > 0$. El problema de intentar encontrar una función inversa para $f(x) = x^2$ es que se envían dos entradas a una sola salida en cada salida $y > 0$. La función $f(x) = x^3 + 4$ que se comentó anteriormente no presentaba ese problema. En esa función, cada entrada se enviaba a una salida diferente. Una función que envía cada entrada a una salida *diferente* se llama función biunívoca.

Definición

Decimos que f es una **función biunívoca** si $f(x_1) \neq f(x_2)$ cuando $x_1 \neq x_2$.

Una forma de determinar si una función es biunívoca es observando su gráfico. Si una función es biunívoca, entonces no se pueden enviar dos entradas a la misma salida. Entonces, si dibujamos una línea horizontal en cualquier parte del plano xy según la **prueba de la línea horizontal**, esta no puede intersecar el gráfico más de una vez. Podemos notar que la prueba de la línea horizontal es diferente de la prueba de la línea vertical. La prueba de la línea vertical determina si un gráfico es el de una función. La prueba de la línea horizontal determina si una función es biunívoca (Figura 1.38).

Regla: prueba de la línea horizontal

Una función f es biunívoca si y solo si cada línea horizontal interseca el gráfico de f solo una vez.

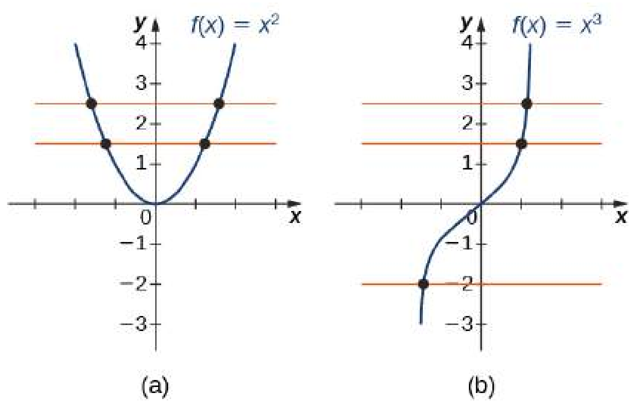
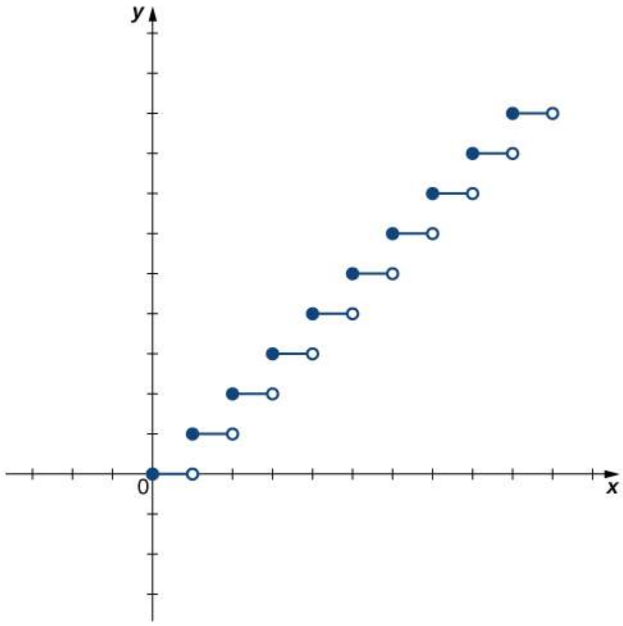


Figura 1.38 (a) La función $f(x) = x^2$ no es biunívoca porque falla la prueba de la línea horizontal. (b) La función $f(x) = x^3$ es biunívoca porque pasa la prueba de la línea horizontal.

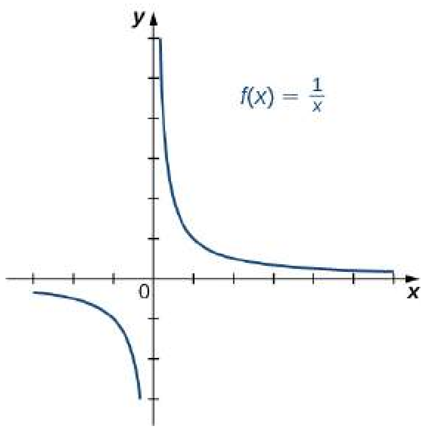
EJEMPLO 1.28

Cómo determinar si una función es biunívoca

En cada una de las siguientes funciones, utilice la prueba de la línea horizontal para determinar si son biunívocas.



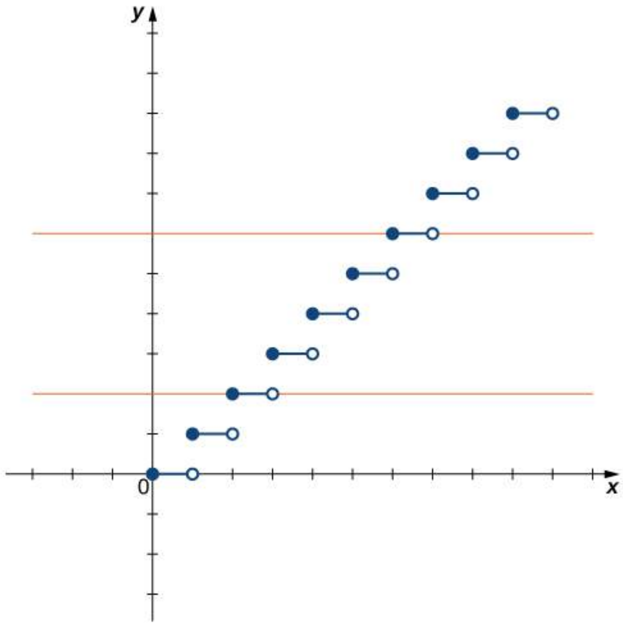
a.



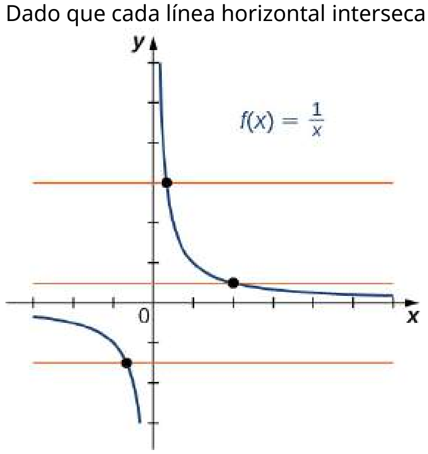
b.

Solución

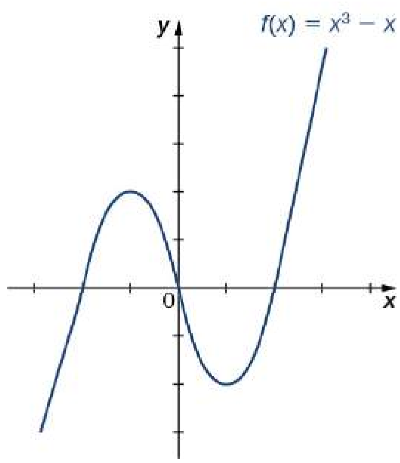
a. Dado que la línea horizontal $y = n$ para cualquier número entero $n \geq 0$ interseca el gráfico más de una vez, esta función no es unívoca



b. Dado que cada línea horizontal interseca el gráfico una vez (como máximo), esta función es biunívoca



1.23 ¿La función f graficada biunívoca en la siguiente imagen?



Encontrar la inversa de una función

Ahora podemos considerar las funciones biunívocas y mostrar cómo encontrar sus inversas. Recordemos que una función asigna elementos en el dominio de f a elementos en el rango de f. La función inversa asigna cada elemento del rango de f a su elemento correspondiente del dominio de f. Por lo tanto, para encontrar la función inversa de una función biunívoca f, dada cualquier y en el rango de f, tenemos que determinar cuál x en el dominio de f satisface $f(x)=y$. Dado que f es biunívoca, hay exactamente un valor de este tipo x. Podemos encontrar ese valor x resolviendo la ecuación $f(x)=y$ para x. Al hacer esto, podemos escribir x en función de y donde el dominio de esta función es el rango de f y el rango de esta nueva función es el dominio de f. En consecuencia, esta función es la inversa de f, y escribimos $x=f^{-1}(y)$. Dado que normalmente utilizamos la variable x para denotar la variable independiente y y para denotar la variable dependiente, a menudo intercambiamos los papeles de x como y, y se escribe $y=f^{-1}(x)$. Representar la función inversa de esta manera también es útil más adelante cuando grafiquemos una función f y su inversa f^{-1} en los mismos ejes.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: hallar una función inversa

1. Resuelva la ecuación $y=f(x)$ para x.
2. Intercambie las variables de x como y y escriba $y=f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 1.29

Hallar una función inversa

Halle la inversa de la función $f(x)=3x-4$. Indique el dominio y el rango de la función inversa. Verifique que $f^{-1}(f(x))=x$.

Solución

Siga los pasos indicados en la estrategia.

Paso 1. Si los valores de $y=3x-4$, entonces $3x=y+4$ y $x=\frac{1}{3}y+\frac{4}{3}$.

Paso 2. Reescriba como $y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ y supongamos que $y=f^{-1}(x)$.

Por lo tanto, $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

Dado que el dominio de f ¿es $(-\infty,\infty)$, el rango de f^{-1} ¿es $(-\infty,\infty)$. Dado que el rango de f ¿es $(-\infty,\infty)$, el dominio de f^{-1} ¿es $(-\infty,\infty)$.

Puede comprobar que $f^{-1}(f(x))=x$ escribiendo

$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(3x-4)=\frac{1}{3}(3x-4)+\frac{4}{3}=x-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=x.$$

Tenga en cuenta que para que $f^{-1}(x)$ sea la inversa de $f(x)$, ambos $f^{-1}(f(x))=x$ y $f(f^{-1}(x))=x$ para todo x en el dominio de la función interior.

1.24 Halle la inversa de la función $f(x)=3x/(x-2)$. Indique el dominio y el rango de la función inversa.

Gráficos de funciones inversas

Consideremos la relación entre el gráfico de una función f y el gráfico de su inversa. Consideremos el gráfico de f que se muestra en la Figura 1.39 y un punto (a,b) en el gráfico. Dado que $b=f(a)$, entonces $f^{-1}(b)=a$. Por lo tanto, cuando graficamos f^{-1}, el punto (b,a) está en el gráfico. Como resultado, el gráfico de f^{-1} es un reflejo del gráfico de f sobre la línea $y=x$.

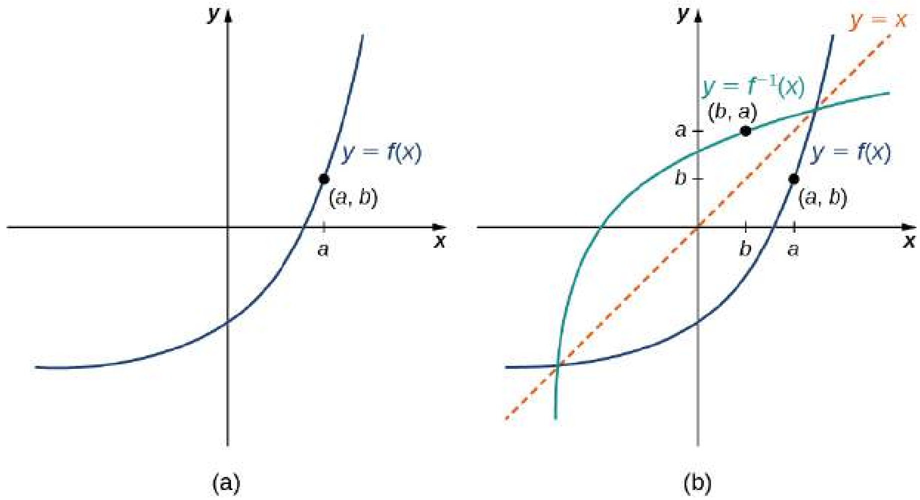
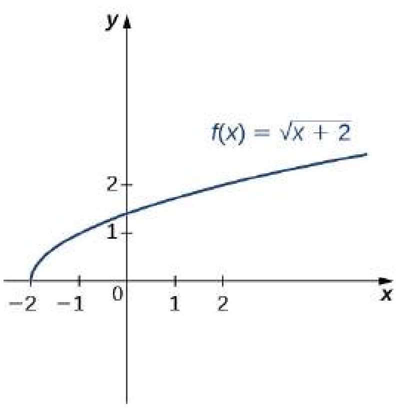


Figura 1.39 (a) El gráfico de esta función f muestra el punto (a, b) en el gráfico de f. (b) Ya que (a, b) está en el gráfico de f, el punto (b, a) está en el gráfico de f^{-1}. El gráfico de f^{-1} es un reflejo del gráfico de f sobre la línea $y = x$.

EJEMPLO 1.30

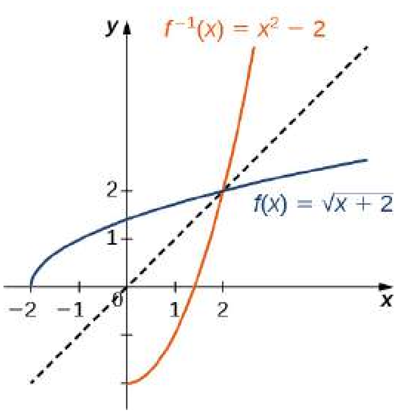
Trazado de gráficos de funciones inversas

En el gráfico de f en la siguiente imagen dibuje un gráfico de f^{-1} trazando la línea $y = x$ y utilizando la simetría. Identifique el dominio y el rango de f^{-1}.



Solución

Refleje el gráfico sobre la línea $y = x$. El dominio de f^{-1} ¿es $\left[0, \infty\right)$. El rango de f^{-1} ¿es $\left[-2, \infty\right)$. Utilizando la estrategia anterior para encontrar funciones inversas, podemos comprobar que la función inversa es $f^{-1}(x) = x^2 - 2$, como se muestra en el gráfico.



1.25 Dibuje la gráfica de $f(x) = 2x + 3$ y el gráfico de su inversa utilizando la propiedad de simetría de las funciones inversas.

Restricciones de dominio

Como hemos visto, $f(x) = x^2$ no tiene una función inversa porque no es biunívoca. Sin embargo, podemos elegir un subconjunto del dominio de f tal que la función es biunívoca. Este subconjunto se denomina **dominio restringido**. Al restringir el dominio de f, podemos definir una nueva función g tal que el dominio de g es el dominio restringido de f y $g(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de g. Entonces podemos definir una función inversa para g en ese dominio. Por ejemplo, ya que $f(x) = x^2$ es biunívoca en el intervalo $[0, \infty)$, podemos definir una nueva función g tal que el dominio de g ¿es $[0, \infty)$ y $g(x) = x^2$ para todas las x en su dominio. Dado que g es una función biunívoca, tiene una función inversa, dada por la fórmula $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Por otro lado, la función $f(x) = x^2$ también es biunívoca en el dominio $(-\infty, 0]$. Por lo tanto, también podríamos definir una nueva función h tal que el dominio de h ¿es $(-\infty, 0]$ y $h(x) = x^2$ para todas las x en el dominio de h. Entonces h es una función biunívoca y también debe tener una inversa. Su inversa viene dada por la fórmula $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ (Figura 1.40).

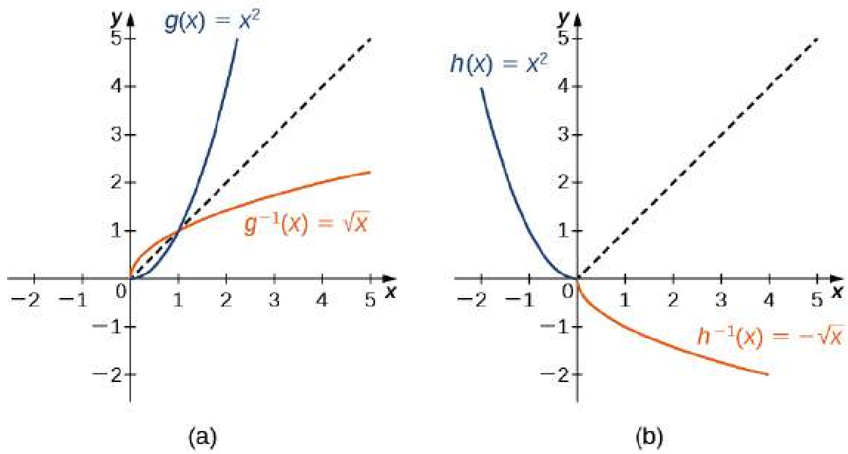


Figura 1.40 (a) Para $g(x) = x^2$ limitada a $\left[0, \infty\right)$, $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$. (b) Para $h(x) = x^2$ limitada a $(-\infty, 0]$, $h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

EJEMPLO 1.31

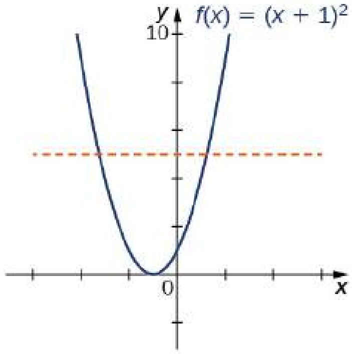
Restringir el dominio

Considere la función $f(x) = (x + 1)^2$.

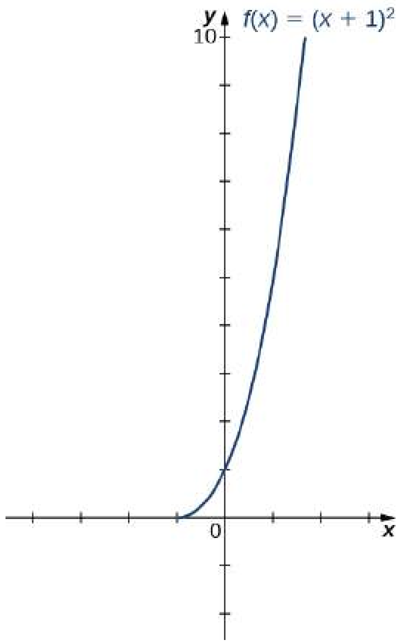
a. Dibuje la gráfica de f y utilice la prueba de la línea horizontal para demostrar que f no es biunívoca.
b. Demuestre que f es biunívoca en el dominio restringido $[-1, \infty)$. Determine el dominio y el rango de la inversa de f en este dominio restringido y halle una fórmula para f^{-1}.

Solución

a. El gráfico de f es el gráfico de $y = x^2$ desplazado a la izquierda en 1 unidad. Dado que existe una línea horizontal que interseca el gráfico más de una vez, f no es biunívoca.



b. En el intervalo $[-1, \infty)$, f es biunívoca.



El dominio y el rango de f^{-1} vienen dados por el rango y el dominio de f, respectivamente. Por lo tanto, el dominio de f^{-1} ¿es $[0, \infty)$ y el rango de f^{-1} ¿es $\left[-1, \infty\right)$. Para encontrar una fórmula para f^{-1}, resuelva la ecuación $y = (x+1)^2$ por x. Si $y = (x+1)^2$, entonces $x = -1 \pm \sqrt{y}$. Como estamos restringiendo el dominio al intervalo donde $x \geq -1$, necesitamos $\pm\sqrt{y} \geq 0$. Por lo tanto, $x = -1 + \sqrt{y}$. Al intercambiar x como y, escribimos $y = -1 + \sqrt{x}$ y concluimos que $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x}$.

1.26 Considere $f(x) = 1/x^2$ restringida al dominio $\left(-\infty, 0\right)$. Verifique que f es biunívoca en este dominio. Determine el dominio y el rango de la inversa de f y halle una fórmula para f^{-1}.

Funciones trigonométricas inversas

Las seis funciones trigonométricas básicas son periódicas y, por tanto, no son biunívocas. Sin embargo, si restringimos el dominio de una función trigonométrica a un intervalo en el que es biunívoca, podemos definir su inversa. Consideremos la función seno (Figura 1.34). La función seno es biunívoca en un número infinito de intervalos, pero la convención estándar es restringir el dominio al intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Al hacerlo, definimos la función seno inversa en el dominio $[-1, 1]$ tal que para cualquier x en el intervalo $[-1, 1]$, la función seno inversa nos dice qué ángulo θ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ satisface $\operatorname{sen}\theta = x$. Del mismo modo, podemos restringir los dominios de las otras funciones trigonométricas para definir las **funciones trigonométricas inversas**, que son funciones que nos dicen qué ángulo en un determinado intervalo tiene un valor trigonométrico específico.

Definición

La función seno inversa, denotada sen^{-1} o arcsen, y la función coseno inversa, denotada $\cos^{-1}$ o arccos, se definen en el dominio $D = \{x | -1 \le x \le 1\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{sen}^{-1}(x) = y \text{ si y solo si } \text{sen}(y) = x \text{ y } -\tfrac{\pi}{2} \le y \le \tfrac{\pi}{2}; \\ &\cos^{-1}(x) = y \text{ si y solo si } \cos(y) = x \text{ y } 0 \le y \le \pi. \end{aligned} \tag{1.12}$$

La función tangente inversa, denotada $\tan^{-1}$ o arctan, y la función cotangente inversa, denotada $\cot^{-1}$ o arccot, se definen en el dominio $D = \left\{x \middle| -\infty < x < \infty\right\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\tan^{-1}(x) = y \text{ si y solo si } \tan(y) = x \text{ y } -\tfrac{\pi}{2} < y < \tfrac{\pi}{2}; \\ &\cot^{-1}(x) = y \text{ si y solo si } \cot(y) = x \text{ y } 0 < y < \pi. \end{aligned} \tag{1.13}$$

La función cosecante inversa, denotada $\csc^{-1}$ o arccsc, y la función secante inversa, denotada $\sec^{-1}$ o arcsec, se definen en el dominio $D = \{x | \, |x| \ge 1\}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\csc^{-1}(x) = y \text{ si y solo si } \csc(y) = x \text{ y } -\tfrac{\pi}{2} \le y \le \tfrac{\pi}{2}, y \ne 0; \\ &\sec^{-1}(x) = y \text{ si y solo si } \sec(y) = x \text{ y } 0 \le y \le \pi, y \ne \pi/2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Para graficar las funciones trigonométricas inversas utilizamos los gráficos de las funciones trigonométricas restringidas a los dominios definidos anteriormente y reflejamos los gráficos sobre la línea $y = x$ (Figura 1.41).

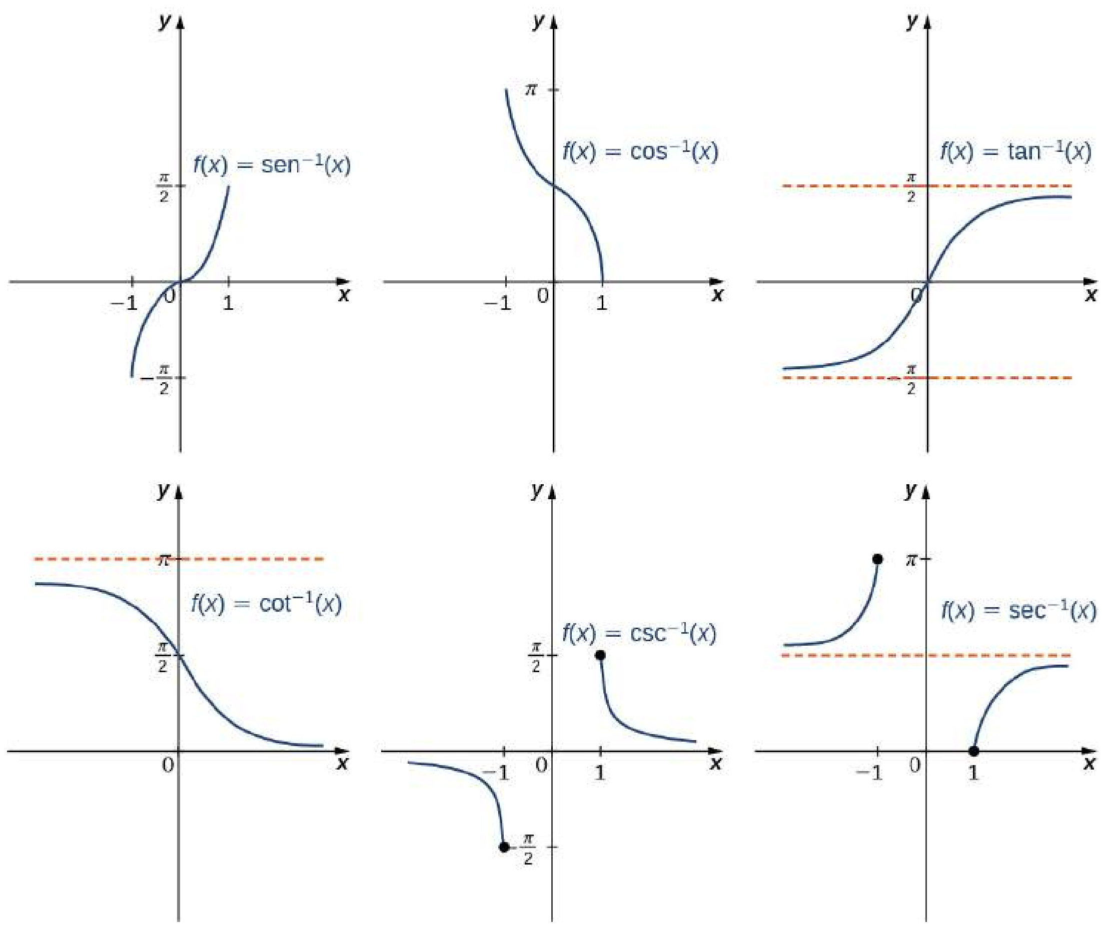


Figura 1.41 El gráfico de cada una de las funciones trigonométricas inversas es una reflexión sobre la línea $y = x$ de la correspondiente función trigonométrica restringida.

MEDIOS

Visite el [siguiente sitio (http://www.openstax.org/l/20_inversefun)](http://www.openstax.org/l/20_inversefun) para ver más comparaciones de funciones y sus inversas.

Al evaluar una función trigonométrica inversa, la salida es un ángulo. Por ejemplo, para evaluar $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, necesitamos encontrar un ángulo θ de manera que $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Evidentemente, muchos ángulos tienen esta propiedad. Sin embargo, dada la definición de $\cos^{-1}$, necesitamos el ángulo θ que no solo resuelve esta ecuación, sino que se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$. Concluimos que $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Ahora consideraremos una composición de una función trigonométrica y su inversa. Por ejemplo, veamos las dos expresiones $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ y $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(\pi))$. En la primera, simplificamos como sigue:

$$\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En la segunda, tenemos

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(\pi)) = \operatorname{sen}^{-1}(0) = 0.$$

La función inversa se supone que "deshace" la función original, así que ¿por qué no es $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(\pi)) = \pi$? Recordando nuestra definición de funciones inversas, una función f y su inversa f^{-1} cumplen las condiciones $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ para todos los y en el dominio de f^{-1} y $f^{-1}(f(x)) = x$ para todos los valores x en el dominio de f, ¿Qué pasó aquí? La cuestión es que la función inversa del seno, sen^{-1}, es la inversa de la función seno *restringida* definida en el dominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Por lo tanto, para x en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, es cierto que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$. Sin embargo, para valores de x fuera de este intervalo, la ecuación no se cumple, aunque $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ se define para todos los números reales x.

¿Qué pasa con $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} y)$? ¿Presenta un problema similar? La respuesta es *no*. Dado que el dominio de sen^{-1} es el intervalo $[-1, 1]$, concluimos que $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} y) = y$ si $-1 \leq y \leq 1$ y la expresión no está definida para otros valores de y. En resumen,

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} y) = y \text{ si } -1 \leq y \leq 1$$

y

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \text{ si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Del mismo modo, para la función coseno,

$$\cos(\cos^{-1} y) = y \text{ si } -1 \leq y \leq 1$$

y

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \text{ si } 0 \leq x \leq \pi.$$

Propiedades similares son válidas para las demás funciones trigonométricas y sus inversas.

EJEMPLO 1.32

Evaluación de expresiones que implican funciones trigonométricas inversas

Evalúe cada una de las siguientes expresiones.

a. $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ grandes.
b. $\tan\left(\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ grandes.
c. $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ grandes.
d. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Solución

a. Al evaluar $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\sqrt{3}/2\right)$ equivale a encontrar el ángulo θ de manera que $\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. El ángulo $\theta = -\pi/3$ satisface estas dos condiciones. Por lo tanto, $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\sqrt{3}/2\right) = -\pi/3$.

b. Primero utilizamos el hecho de que $\tan^{-1}\left(-1/\sqrt{3}\right) = -\pi/6$. Entonces $\tan(-\pi/6) = -1/\sqrt{3}$. Por lo tanto, $\tan\left(\tan^{-1}\left(-1/\sqrt{3}\right)\right) = -1/\sqrt{3}$.

c. Para evaluar $\cos^{-1}(\cos(5\pi/4))$, utiliza primero el hecho de que $\cos(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2$. Entonces tenemos que encontrar el ángulo θ de manera que $\cos(\theta) = -\sqrt{2}/2$ y $0 \le \theta \le \pi$. Dado que $3\pi/4$ satisface estas dos condiciones, tenemos $\cos\left(\cos^{-1}(5\pi/4)\right) = \cos\left(\cos^{-1}\left(-\sqrt{2}/2\right)\right) = 3\pi/4$.

d. Dado que $\cos(2\pi/3) = -1/2$, tenemos que evaluar $\operatorname{sen}^{-1}(-1/2)$. Es decir, necesitamos encontrar el ángulo θ de manera que $\operatorname{sen}(\theta) = -1/2$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Dado que $-\pi/6$ satisface estas dos condiciones, podemos concluir que $\operatorname{sen}^{-1}(\cos(2\pi/3)) = \operatorname{sen}^{-1}(-1/2) = -\pi/6$.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Valor máximo de una función

En muchas áreas de la ciencia, la ingeniería y las matemáticas es útil conocer el valor máximo que puede obtener una función, aunque no conozcamos su valor exacto en un instante determinado. Por ejemplo, si tenemos una función que describe la resistencia de una viga del tejado, querremos saber el peso máximo que puede soportar la viga sin romperse. Si tenemos una función que describe la velocidad de un tren, nos gustaría saber su velocidad máxima antes de que salte de los raíles. El diseño seguro depende a menudo de conocer los valores máximos.

Este proyecto describe un ejemplo sencillo de una función con un valor máximo dependiente de los coeficientes de dos ecuaciones. Veremos que los valores máximos pueden depender de varios factores distintos de la variable independiente *x*.

1. Consideremos el gráfico en la Figura 1.42 de la función $y = \operatorname{sen} x + \cos x$. Describa su forma general. ¿Es periódico? ¿Cómo lo sabe?

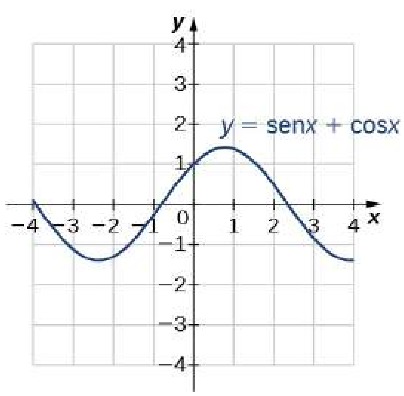


Figura 1.42 El gráfico de $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

Utilizando una calculadora gráfica u otro dispositivo para graficar estime los valores x y y del punto máximo del gráfico (el primer punto de este tipo donde $x > 0$). Puede ser útil expresar el valor de x como múltiplo de π.

2. Consideremos ahora otros gráficos de la forma $y = A\operatorname{sen} x + B\cos x$ para varios valores de *A* y *B*. Dibuje el gráfico cuando *A* = 2 y *B* = 1, y halle los valores x y los *y* para el punto máximo (recuerde expresar el valor *x* como un múltiplo de π, si es posible). ¿Se movió?
3. Repita para *A* = 1, *B* = 2. ¿Hay alguna relación con lo que encontró en la parte (2)?
4. Complete la siguiente tabla añadiendo algunas opciones propias para *A* y *B*:

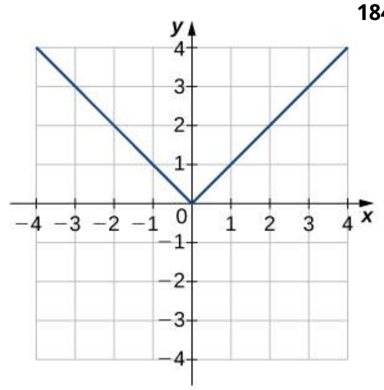
A	*B*	*x*	*y*	*A*	*B*	*x*	*y*
0	1			$\sqrt{3}$	1		
1	0			1	$\sqrt{3}$		
1	1			12	5		
1	2			5	12		
2	1						
2	2						
3	4						
4	3						

5. Trate de averiguar la fórmula de los valores *y*.
6. La fórmula de los valores x es un poco más difícil. Los puntos más útiles de la tabla son $(1, 1), \left(1, \sqrt{3}\right), \left(\sqrt{3}, 1\right)$. (*Pista*: Considere las funciones trigonométricas inversas)
7. Si halló fórmulas para las partes (5) y (6), demuestre que funcionan juntas. Es decir, sustituya la fórmula de valor x que encontró en $y = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ y simplifíquela para llegar a la fórmula de valor y que encontró.

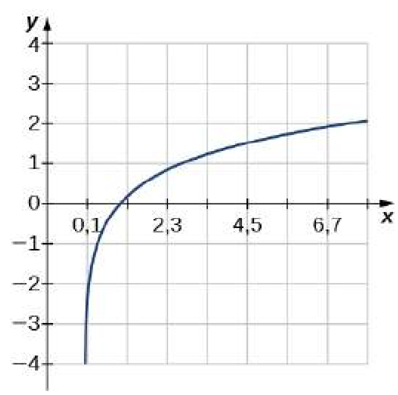
SECCIÓN 1.4 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, utilice la prueba de la línea horizontal para determinar si las funciones en cada uno de los gráficos dados son biunívocas.

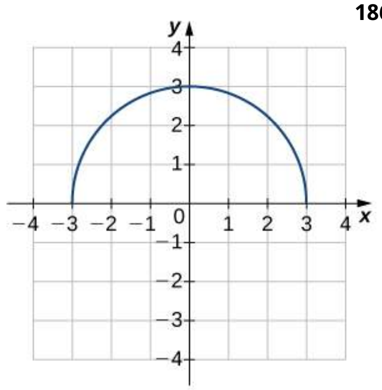
183.



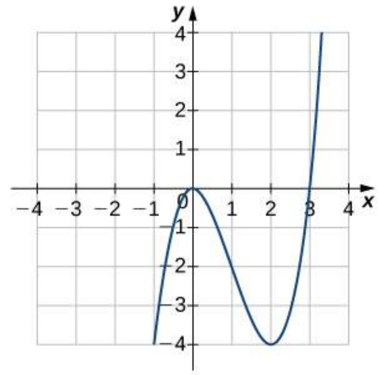
184.



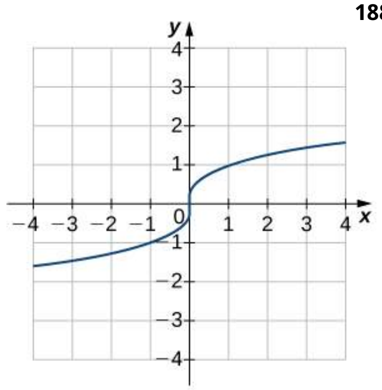
185.



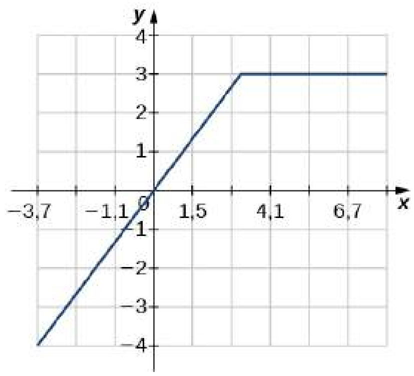
186.



187.



188.



En los siguientes ejercicios, a. halle la función inversa, y b. halle el dominio y el rango de la función inversa.

189. $f(x) = x^2 - 4, x \geq 0$

190. $f(x) = \sqrt[3]{x - 4}$

191. $f(x) = x^3 + 1$

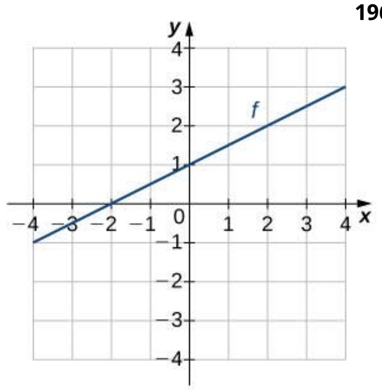
192. $f(x) = (x-1)^2, x \leq 1$

193. $f(x) = \sqrt{x-1}$

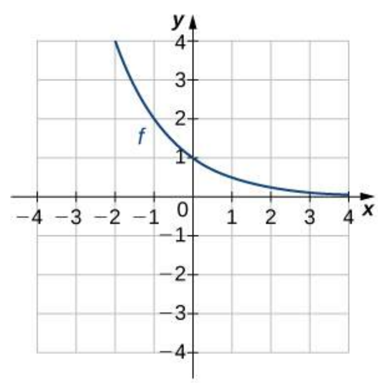
194. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de f para dibujar el gráfico de su función inversa.

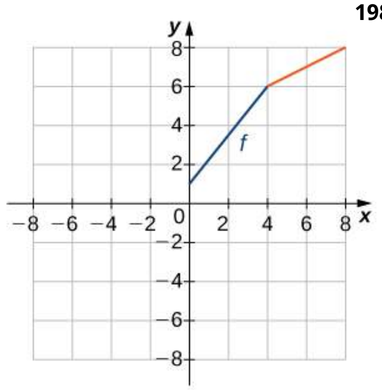
195.



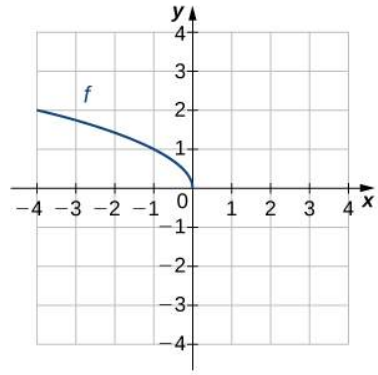
196.



197.



198.



En los siguientes ejercicios, utilice la composición para determinar qué pares de funciones son inversas.

199. $f(x) = 8x, g(x) = \frac{x}{8}$

200. $f(x) = 8x + 3, g(x) = \frac{x-3}{8}$

201. $f(x) = 5x - 7, g(x) = \frac{x+5}{7}$

202. $f(x) = \frac{2}{3}x + 2, g(x) = \frac{3}{2}x + 3$

203. $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1, g(x) = \frac{1}{x} + 1, x \neq 0$

204. $f(x) = x^3 + 1, g(x) = (x-1)^{1/3}$

205. $f(x) = x^2 + 2x + 1, x \geq -1, \quad g(x) = -1 + \sqrt{x}, x \geq 0$

206. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2, g(x) = \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2$

En los siguientes ejercicios, evalúe las funciones. Indique el valor exacto.

207. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ grandes.

208. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ grandes.

209. $\cot^{-1}(1)$ grandes.

210. $\text{sen}^{-1}(-1)$ grandes.

211. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ grandes.

212. $\cos\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)\right)$ grandes.

213. $\text{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ grandes.

214. $\text{sen}^{-1}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ grandes.

215. $\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ grandes.

216. La función $C = T(F) = (5/9)(F - 32)$ convierte los grados Fahrenheit en grados Celsius.

a. Halle la función inversa $F = T^{-1}(C)$
b. ¿Para qué sirve la función inversa?

217. **[T]** La velocidad V (en centímetros por segundo) de la sangre en una arteria a una distancia *x* cm del centro de esta puede modelarse por la función $V = f(x) = 500(0{,}04 - x^2)$ para $0 \le x \le 0{,}2$.

a. Calcule $x = f^{-1}(V)$.
b. Interprete para qué sirve la función inversa.
c. Halle la distancia del centro de una arteria con una velocidad de 15 cm/s, 10 cm/s y 5 cm/s.

218. Una función que convierte las tallas de los vestidos en Estados Unidos a las de Europa viene dada por $D(x) = 2x + 24$.

a. Calcule las tallas europeas de vestidos que corresponden a las tallas 6, 8, 10 y 12 en Estados Unidos.
b. Halle la función que convierte las tallas de vestidos europeas en tallas estadounidenses de vestidos.
c. Utilice la parte b. para encontrar las tallas de vestido en Estados Unidos que corresponden a la 46, 52, 62 y 70.

219. **[T]** El costo de eliminar una toxina de un lago se modela mediante la función

$C(p) = 75p/(85 - p)$, donde C es el costo (en miles de dólares) y p es la cantidad de toxina en un lago pequeño (medida en partes por mil millones [parts per billion, ppb]). Este modelo solo es válido cuando la cantidad de toxina es inferior a 85 ppb.

a. Calcule el costo de eliminar 25 ppb, 40 ppb y 50 ppb de la toxina del lago.
b. Halle la función inversa. c. Utilice la parte b. para determinar qué cantidad de toxina se elimina por 50.000 dólares.

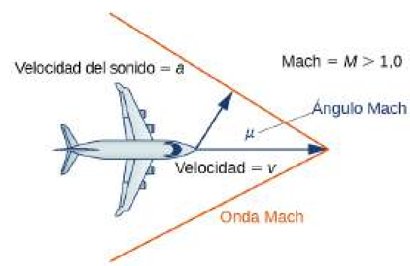
220. **[T]** Un automóvil de carreras acelera a una velocidad dada por

$v(t) = \frac{25}{4}t + 54$, donde *v* es la velocidad (en pies por segundo) en el tiempo *t*.

a. Halle la velocidad del automóvil a los 10 s.
b. Halle la función inversa.
c. Utilice la parte b. para determinar el tiempo que tarda el automóvil en alcanzar una velocidad de 150 ft/s.

221. **[T]** El número Mach *M* de un avión es la relación entre su velocidad y la velocidad del sonido. Cuando un avión vuela a una altitud constante, su ángulo de Mach viene dado por $\mu = 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$.

Halle el ángulo de Mach (al grado más cercano) para los siguientes números Mach.



a. $M = 1{,}4$
b. $M = 2{,}8$
c. $M = 4{,}3$

222. **[T]** Usando $\mu = 2\text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$, halle el número Mach *M* para los siguientes ángulos.

a. $\mu = \frac{\pi}{6}$
b. $\mu = \frac{2\pi}{7}$
c. $\mu = \frac{3\pi}{8}$

223. **[T]** La temperatura promedio (en grados Celsius) de una ciudad del norte de Estados Unidos se puede modelar mediante la función

$T(x) = 5 + 18\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{6}(x - 4{,}6)\right]$, donde x es el tiempo en meses y $x = 1{,}00$ corresponde al 1 de enero. Determine el/los día(s) (mes y día) en que la temperatura promedio es $21\ °\text{C}$.Utilice la parte entera de su(s) respuesta(s) como el mes y calcule el día del mes a partir de la parte decimal.

224. **[T]** La profundidad (en pies) del agua en un muelle cambia con la subida y bajada de las mareas. Se modela mediante la función

$D(t) = 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 8$, donde t es el número de horas después de la medianoche. Determine el primer momento después de medianoche cuando la profundidad es de 11,75 ft.

225. **[T]** Un objeto que se mueve con movimiento armónico simple se modela mediante la función

$s(t) = -6\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, donde s se mide en pulgadas y t se mide en segundos. Determine el primer tiempo cuando la distancia recorrida es de 4,5 in

226. **[T]** Una galería de arte local tiene un retrato de 3 ft de altura que está colgado a 2,5 ft por encima del nivel de los ojos de una persona de estatura promedio. El ángulo de visión θ se puede modelar mediante la función

$\theta = \tan^{-1}\frac{5{,}5}{x} - \tan^{-1}\frac{2{,}5}{x}$, donde x es la distancia (en pies) desde el retrato. Halle el ángulo de visión de una persona que está a 4 ft del retrato.

227. **[T]** Utilice una calculadora para evaluar $\tan^{-1}(\tan(2{,}1))$ y $\cos^{-1}(\cos(2{,}1))$. Explique los resultados de cada uno.

228. **[T]** Utilice una calculadora para evaluar $\text{sen}(\text{sen}^{-1}(-2))$ y $\tan(\tan^{-1}(-2))$. Explique los resultados de cada uno.

1.5 Funciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos de aprendizaje

1.5.1 Identificar la forma de una función exponencial.
1.5.2 Explicar la diferencia entre los gráficos de x^b y b^x.
1.5.3 Reconocer el significado del número e.
1.5.4 Identificar la forma de una función logarítmica.
1.5.5 Explicar la relación entre las funciones exponenciales y logarítmicas.
1.5.6 Describir cómo calcular un logaritmo en una base diferente.
1.5.7 Identificar las funciones hiperbólicas, sus gráficos y las identidades básicas.

En esta sección examinamos las funciones exponenciales y logarítmicas. Utilizamos las propiedades de estas funciones para resolver ecuaciones que implican términos exponenciales o logarítmicos, y estudiamos el significado y la importancia del número e. También definimos las funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas, que implican combinaciones de funciones exponenciales y logarítmicas. (Tenga en cuenta que presentamos definiciones alternativas de las funciones exponenciales y logarítmicas en el capítulo Aplicaciones de las integraciones, y demostramos que las funciones tienen las mismas propiedades con cualquiera de las dos definiciones)

Funciones exponenciales

Las funciones exponenciales aparecen en muchas aplicaciones. Un ejemplo común es el crecimiento de la población.

Por ejemplo, si una población comienza con P_0 individuos y luego crece a una tasa anual de $2\ \%$, su población después de 1 año es

$$P(1) = P_0 + 0{,}02P_0 = P_0(1 + 0{,}02) = P_0(1{,}02).$$

Su población después de 2 años es

$$P(2) = P(1) + 0{,}02P(1) = P(1)(1{,}02) = P_0(1{,}02)^2.$$

En general, su población después de t años es

$$P(t) = P_0(1{,}02)^t,$$

que es una función exponencial. De forma más general, cualquier función de la forma $f(x) = b^x$, donde $b > 0, b \neq 1$, es una función exponencial con **base** b y **exponente** x. Las funciones exponenciales tienen bases constantes y exponentes variables. Observe que una función de la forma $f(x) = x^b$ para alguna constante b no es una función exponencial sino una función potencia.

Para ver la diferencia entre una función exponencial y una función potencia, comparamos las funciones $y = x^2$ y $y = 2^x$. En la Tabla 1.10, vemos que tanto 2^x y x^2 se acercan al infinito a medida que $x \to \infty$. Sin embargo, con el tiempo, 2^x se hace más grande que x^2 y crece más rápidamente a medida que $x \to \infty$. En la dirección opuesta, a medida que $x \to -\infty$, $x^2 \to \infty$, mientras que $2^x \to 0$. La línea $y = 0$ es una asíntota horizontal para $y = 2^x$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
x^2	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36
2^x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

Tabla 1.10 Los valores de x^2 y 2^x

En la Figura 1.43, graficamos ambas $y = x^2$ y $y = 2^x$ para mostrar las diferencias entre los gráficos.

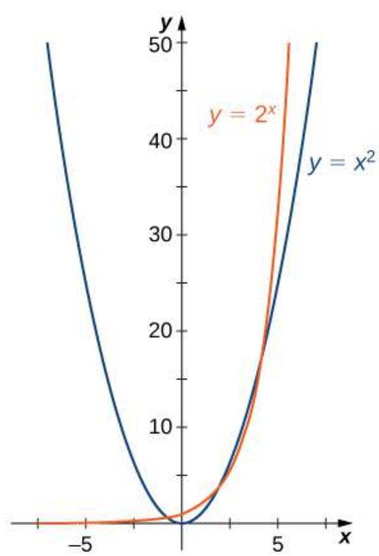


Figura 1.43 Tanto 2^x y x^2 se acercan al infinito a medida que $x \to \infty$, pero 2^x crece más rápidamente que x^2. Dado que $x \to -\infty$, $x^2 \to \infty$, mientras que $2^x \to 0$.

Evaluación de funciones exponenciales

Recuerde las propiedades de los exponentes: si los valores de x es un número entero positivo, entonces definimos $b^x = b.\, b \cdots b$ (con x factores de b). Si x es un número entero negativo, entonces $x = -y$ para algún número entero positivo y, y definimos $b^x = b^{-y} = 1/b^y$. También, b^0 se define como 1. Si x es un número racional, entonces $x = p/q$, donde p y q son números enteros y $b^x = b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p}$. Por ejemplo, $9^{3/2} = \sqrt{9^3} = 27$. Sin embargo, ¿cómo se define b^x si x es un número irracional? Por ejemplo, ¿qué entendemos por $2^{\sqrt{2}}$? Esta es una pregunta demasiado compleja para que podamos responderla completamente en este momento; sin embargo, podemos hacer una aproximación. En la Tabla 1.11, enumeramos algunos números racionales que se acercan a $\sqrt{2}$, y los valores de 2^x para cada número racional x también se presentan. Afirmamos que si elegimos números racionales x cada vez más cerca de $\sqrt{2}$, los valores de 2^x se acercan cada vez más a algún número L. Definimos que ese número L para que sea $2^{\sqrt{2}}$.

x	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421	1,414213
2^x	2,639	2,65737	2,66475	2,665119	2,665138	2,665143

Tabla 1.11 Los valores de 2^x para una lista de números racionales que se aproximan a $\sqrt{2}$

EJEMPLO 1.33

Crecimiento bacteriano

Supongamos que se sabe que una determinada población de bacterias duplica su tamaño cada 4 horas. Si un cultivo comienza con 1.000 bacterias, el número de bacterias después de 4 horas es $n(4) = 1.000.\, 2$. El número de bacterias después de 8 horas es $n(8) = n(4).\, 2 = 1.000.\, 2^2$. En general, el número de bacterias después de $4m$ horas es $n(4m) = 1.000.\, 2^m$. Supongamos que $t = 4m$, vemos que el número de bacterias después de t horas es $n(t) = 1.000.\, 2^{t/4}$. Calcule el número de bacterias después de 6 horas, 10 horas, y 24 horas.

Solución

El número de bacterias después de 6 horas está dado por $n(6) = 1.000.\, 2^{6/4} \approx 2828$ bacterias. El número de bacterias después de 10 horas está dado por $n(10) = 1.000.\, 2^{10/4} \approx 5657$ bacterias. El número de bacterias después de 24 horas está dado por $n(24) = 1.000.\, 2^6 = 64.000$ bacterias.

1.27 Dada la función exponencial $f(x) = 100.\, 3^{x/2}$, evaluar $f(4)$ y $f(10)$.

MEDIOS

Visite World Population Balance (http://www.openstax.org/l/20_exponengrow) (balance de la población mundial) para ver otro ejemplo de crecimiento exponencial de la población.

Gráficos de funciones exponenciales

Para cualquier base $b > 0, b \neq 1$, la función exponencial $f(x) = b^x$ se define para todos los números reales x y $b^x > 0$. Por lo tanto, el dominio de $f(x) = b^x$ es $\left(-\infty, \infty\right)$ y el rango es $\left(0, \infty\right)$. Para graficar b^x, observamos que para $b > 1$, b^x es creciente en $(-\infty, \infty)$ y $b^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$, mientras que $b^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$. Por otro lado, si $0 < b < 1$, $f(x) = b^x$ es decreciente en $(-\infty, \infty)$ y $b^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ mientras que $b^x \to \infty$ cuando $x \to -\infty$ (Figura 1.44).

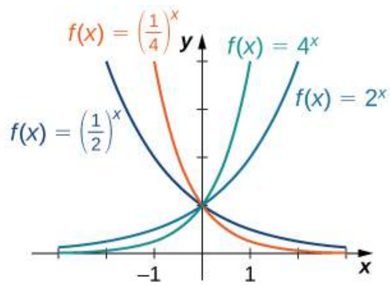


Figura 1.44 Si los valores de $b > 1$, entonces b^x es creciente en $(-\infty, \infty)$. Si $0 < b < 1$, entonces b^x es decreciente en $(-\infty, \infty)$.

MEDIOS

Visite este sitio (http://www.openstax.org/l/20_inverse) para explorar más los gráficos de las funciones exponenciales.

Observe que las funciones exponenciales cumplen las leyes generales de los exponentes. Para recordar estas leyes, las exponemos como reglas.

Regla: leyes de los exponentes

Para cualquier constante $a > 0, b > 0$, y para todo x y y,

1. $b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
2. $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
3. $(b^x)^y = b^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^x$
5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

EJEMPLO 1.34

Uso de las leyes de los exponentes

Utilice las leyes de los exponentes para simplificar cada una de las siguientes expresiones.

a. $\dfrac{\left(2x^{2/3}\right)^3}{\left(4x^{-1/3}\right)^2}$

b. $\dfrac{\left(x^3 y^{-1}\right)^2}{\left(xy^2\right)^{-2}}$

Solución

a. Podemos simplificar de la siguiente manera:

$$\frac{\left(2x^{2/3}\right)^3}{\left(4x^{-1/3}\right)^2} = \frac{2^3\left(x^{2/3}\right)^3}{4^2\left(x^{-1/3}\right)^2} = \frac{8x^2}{16x^{-2/3}} = \frac{x^2 x^{2/3}}{2} = \frac{x^{8/3}}{2}.$$

b. Podemos simplificar de la siguiente manera:

$$\frac{\left(x^3 y^{-1}\right)^2}{\left(xy^2\right)^{-2}} = \frac{\left(x^3\right)^2\left(y^{-1}\right)^2}{x^{-2}\left(y^2\right)^{-2}} = \frac{x^6 y^{-2}}{x^{-2} y^{-4}} = x^6 x^2 y^{-2} y^4 = x^8 y^2.$$

1.28 Utilice las leyes de los exponentes para simplificar $\left(6x^{-3} y^2\right) / \left(12x^{-4} y^5\right)$.

El número *e*

Un tipo especial de función exponencial aparece con frecuencia en aplicaciones del mundo real. Para describirlo, consideremos el siguiente ejemplo de crecimiento exponencial, que surge del interés compuesto en una cuenta de ahorros. Supongamos que una persona invierte P dólares en una cuenta de ahorros con una tasa de interés anual r, calculada anualmente. La cantidad de dinero después de 1 año es

$$A(1) = P + rP = P(1 + r).$$

La cantidad de dinero después de 2 años es

$$A(2) = A(1) + rA(1) = P(1 + r) + rP(1 + r) = P(1 + r)^2.$$

En general, la cantidad después de t años es

$$A(t) = P(1 + r)^t.$$

Si el dinero se calcula 2 veces al año, la cantidad de dinero después de medio año es

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = P + \left(\frac{r}{2}\right)P = P\left(1 + \left(\frac{r}{2}\right)\right).$$

La cantidad de dinero después de 1 año es

$$A(1) = A\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{r}{2}\right)A\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(1 + \frac{r}{2}\right) + \frac{r}{2}\left(P\left(1 + \frac{r}{2}\right)\right) = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^2.$$

Después de t años, la cantidad de dinero en la cuenta es

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

En general, si el dinero se calcula n veces al año, la cantidad de dinero en la cuenta después de t años está dada por la función

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

¿Qué sucede a medida que $n \to \infty$? Para responder esta pregunta, suponemos que $m = n/r$ y escribimos

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{mrt},$$

y examinamos el comportamiento de $(1 + 1/m)^m$ a medida que $m \to \infty$, utilizando una tabla de valores (Tabla 1.12).

m	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$	2,5937	2,7048	2,71692	2,71815	2,718268	2,718280

Tabla 1.12 Los valores de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ a medida que $m \to \infty$

De esta tabla se desprende que $(1 + 1/m)^m$ se acerca a un número entre $2{,}7$ y $2{,}8$ a medida que $m \to \infty$. De hecho, $(1 + 1/m)^m$ se acerca a algún número a medida que $m \to \infty$. Llamamos a este **número** e. Con seis decimales de exactitud,

$$e \approx 2{,}718282.$$

La letra e fue utilizada por primera vez para representar este número por el matemático suizo Leonhard Euler durante la década de 1720. Aunque Euler no descubrió el número, mostró muchas conexiones importantes entre e y las funciones logarítmicas. Seguimos utilizando la notación e hoy para honrar el trabajo de Euler porque aparece en muchas áreas de las matemáticas y porque podemos utilizarla en muchas aplicaciones prácticas.

Volviendo a nuestro ejemplo de la cuenta de ahorros, podemos concluir que si una persona pone P dólares en una cuenta con una tasa de interés anual r, calculada continuamente, entonces $A(t) = Pe^{rt}$. Esta función puede resultar familiar. Dado que las funciones que involucran a la base e surgen a menudo en aplicaciones, llamamos a la función

$f(x) = e^x$ la **función exponencial natural**. Esta función no solo es interesante por la definición del número e, pero además, como se verá a continuación, su gráfico tiene una propiedad importante.

Dado que $e > 1$, sabemos que e^x es creciente en $(-\infty, \infty)$. En la Figura 1.45, mostramos un gráfico de $f(x) = e^x$ junto con una *línea tangente* al gráfico de en $x = 0$. Damos una definición precisa de línea tangente en el próximo capítulo; pero, de manera informal, decimos que una línea tangente a un gráfico de f en $x = a$ es una línea que pasa por el punto $(a, f(a))$ y tiene la misma "pendiente" que f en ese punto . La función $f(x) = e^x$ es la única función exponencial b^x con la línea tangente en $x = 0$ que tiene una pendiente de 1. Como veremos más adelante en el texto, tener esta propiedad hace que la función exponencial natural sea la función exponencial más sencilla de utilizar en muchos casos.

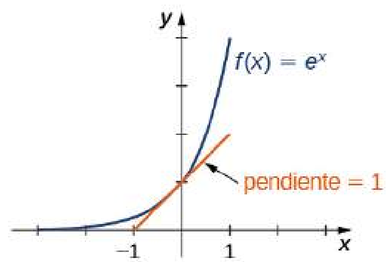


Figura 1.45 El gráfico de $f(x) = e^x$ tiene una línea tangente con pendiente 1 en $x = 0$.

EJEMPLO 1.35

Interés compuesto

Supongamos que se invierten $\$500$ en una cuenta con una tasa de interés anual de $r = 5{,}5\ \%$, calculada continuamente.

a. Supongamos que t denota el número de años después de la inversión inicial y $A(t)$ denota la cantidad de dinero en la cuenta en el tiempo t. Halle una fórmula para $A(t)$.
b. Calcule la cantidad de dinero en la cuenta después de 10 años y después de 20 años.

Solución

a. Si se invierten P dólares en una cuenta con una tasa de interés anual r, calculada continuamente, entonces $A(t) = Pe^{rt}$. Aquí $P = \$500$ dólares y $r = 0{,}055$. Por lo tanto, $A(t) = 500e^{0{,}055t}$.
b. Después de 10 años, la cantidad de dinero en la cuenta es

$$A(10) = 500e^{0{,}055.10} = 500e^{0{,}55} \approx \$866{,}63.$$

Después de 20 años, la cantidad de dinero en la cuenta es

$$A(20) = 500e^{0{,}055.20} = 500e^{1{,}1} \approx \$1.502{,}08.$$

1.29 Si se invierten $\$750$ dólares en una cuenta con una tasa de interés anual de $4\ \%$, calculada continuamente, halle una fórmula para la cantidad de dinero en la cuenta después de t años. Calcule la cantidad de dinero después de 30 años.

Funciones logarítmicas

Utilizando nuestra comprensión de las funciones exponenciales, podemos discutir sus inversas, que son las funciones logarítmicas. Resultan útiles cuando tenemos que considerar cualquier fenómeno que varía en un amplio rango de valores, como el pH en química o los decibeles en niveles de sonido.

La función exponencial $f(x) = b^x$ es biunívoca, con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $\left(0, \infty\right)$. Por lo tanto, tiene una función inversa, llamada *función logarítmica con base b*. Para cualquier $b > 0, b \neq 1$, la función logarítmica con base *b*, denotada $\log_b$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\left(-\infty, \infty\right)$, y satisface

$$\log_b(x) = y \text{ si y solo si } b^y = x.$$

Por ejemplo,

$$\begin{array}{lll}\log_2(8) = 3 & \text{dado que} & 2^3 = 8, \\ \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2 & \text{dado que} & 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}, \\ \log_b(1) = 0 & \text{dado que} & b^0 = 1 \text{ para cualquier base } b > 0.\end{array}$$

Además, como $y = \log_b(x)$ y de $y = b^x$ son funciones inversas,

$$\log_b\left(b^x\right) = x \text{ y } b^{\log_b(x)} = x.$$

La función logarítmica más utilizada es la función $\log_e$. Dado que esta función utiliza e natural como base, se llama **logaritmo natural**. Aquí utilizamos la notación $\ln(x)$ o $\ln x$ con el significado de $\log_e(x)$. Por ejemplo,

$$\ln(e) = \log_e(e) = 1, \ln\left(e^3\right) = \log_e\left(e^3\right) = 3, \ln(1) = \log_e(1) = 0.$$

Dado que las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$ son inversas entre sí,

$$\ln\left(e^x\right) = x \text{ y } e^{\ln x} = x,$$

y sus gráficos son simétricos respecto a la línea $y = x$ (Figura 1.46).

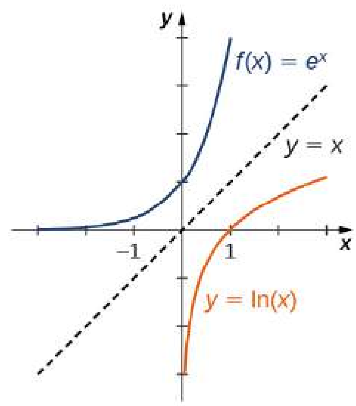


Figura 1.46 Las funciones $y = e^x$ como $y = \ln(x)$ son inversas entre sí, por lo que sus gráficos son simétricos respecto a la línea $y = x$.

MEDIOS

En este sitio (http://www.openstax.org/l/20_logscale) puede ver un ejemplo de escala logarítmica de base 10.

En general, para cualquier base $b > 0, b \neq 1$, la función $g(x) = \log_b(x)$ es simétrica respecto a la línea $y = x$ con la función $f(x) = b^x$. Utilizando este hecho y los gráficos de las funciones exponenciales, graficamos las funciones $\log_b$ para varios valores de $b > 1$ (Figura 1.47).

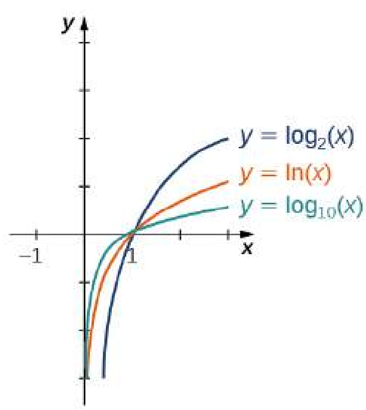


Figura 1.47 Gráficos de $y = \log_b(x)$ se representan para $b = 2, e, 10$.

Antes de resolver algunas ecuaciones que implican funciones exponenciales y logarítmicas, vamos a repasar las propiedades básicas de los logaritmos.

Regla: propiedades de los logaritmos

Si los valores de $a, b, c > 0, b \neq 1$, y r es un número real cualquiera, entonces

1	$\log_b(ac) = \log_b(a) + \log_b(c)$	(Propiedad del producto)
2.	$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c)$	(Propiedad del cociente)
3.	$\log_b(a^r) = r\log_b(a)$	(Propiedad de la potencia)

EJEMPLO 1.36

Resolución de ecuaciones con funciones exponenciales

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para x.

a. $5^x = 2$
b. $e^x + 6e^{-x} = 5$

Solución

a. Aplicando la función de logaritmo natural a ambos lados de la ecuación, tenemos

$$\ln 5^x = \ln 2.$$

Utilizando la propiedad de la potencia de los logaritmos,

$$x \ln 5 = \ln 2.$$

Por lo tanto, $x = \ln 2 / \ln 5$.

b. Multiplicando ambos lados de la ecuación por e^x, llegamos a la ecuación

$$e^{2x} + 6 = 5e^x.$$

Reescribiendo esta ecuación como

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0,$$

podemos entonces reescribirla como una ecuación cuadrática en e^x:

$$\left(e^x\right)^2 - 5\left(e^x\right) + 6 = 0.$$

Ahora podemos resolver la ecuación cuadrática. Factorizando esta ecuación, obtenemos

$$\left(e^x - 3\right)\left(e^x - 2\right) = 0.$$

Por lo tanto, las soluciones satisfacen $e^x = 3$ y $e^x = 2$. Tomando el logaritmo natural de ambos lados nos da las soluciones $x = \ln 3, \ln 2$.

1.30 Resuelva $e^{2x}/(3 + e^{2x}) = 1/2$.

EJEMPLO 1.37

Resolución de ecuaciones con funciones logarítmicas

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para x.

a. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 4$
b. $\log_{10}\sqrt{x} + \log_{10} x = 2$
c. $\ln(2x) - 3\ln\left(x^2\right) = 0$

Solución

a. Por la definición de la función de logaritmo natural,

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 4 \text{ si y solo si } e^4 = \frac{1}{x}.$$

Por lo tanto, la solución es $x = 1/e^4$.

b. Utilizando las propiedades del producto y la potencia de las funciones logarítmicas, reescriba el lado izquierdo de la ecuación como

$$\log_{10}\sqrt{x} + \log_{10}x = \log_{10}x\sqrt{x} = \log_{10}x^{3/2} = \frac{3}{2}\log_{10}x.$$

Por lo tanto, la ecuación puede reescribirse como

$$\frac{3}{2}\log_{10}x = 2 \text{ o } \log_{10}x = \frac{4}{3}.$$

La solución es $x = 10^{4/3} = 10\sqrt[3]{10}$.

c. Utilizando la propiedad de la potencia de las funciones logarítmicas, podemos reescribir la ecuación como $\ln(2x) - \ln\left(x^6\right) = 0$.

Utilizando la propiedad del cociente, esto se convierte en

$$\ln\left(\frac{2}{x^5}\right) = 0.$$

Por lo tanto, $2/x^5 = 1$, lo que implica $x = \sqrt[5]{2}$. A continuación, debemos comprobar si hay soluciones extrañas.

1.31 Resuelva $\ln\left(x^3\right) - 4\ln(x) = 1$.

Cuando se evalúa una función logarítmica con una calculadora, es posible que haya notado que las únicas opciones son $\log_{10}$ o log, llamado el *logaritmo común* o *ln*, que es el logaritmo natural. Sin embargo, las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas pueden expresarse en términos de cualquier base deseada b. Si necesita usar una calculadora para evaluar una expresión con una base diferente, puede aplicar primero las fórmulas de cambio de base. Utilizando este cambio de base, solemos escribir una función exponencial o logarítmica dada en términos de las funciones exponencial natural y de logaritmo natural.

Regla: fórmulas de cambio de base

Supongamos que $a > 0, b > 0$, y $a \neq 1, b \neq 1$.

1. $a^x = b^{x\log_b a}$ para cualquier número real x.
   Si $b = e$, esta ecuación se reduce a $a^x = e^{x\log_e a} = e^{x\ln a}$.
2. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ para cualquier número real $x > 0$.
   Si $b = e$, esta ecuación se reduce a $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

Prueba

Para la primera fórmula de cambio de base, comenzamos haciendo uso de la propiedad de potencia de las funciones logarítmicas. Sabemos que para cualquier base $b > 0, b \neq 1, \log_b(a^x) = x\log_b a$. Por lo tanto,

$$b^{\log_b(a^x)} = b^{x\log_b a}.$$

Además, sabemos que b^x y $\log_b(x)$ son funciones inversas. Por lo tanto,

$$b^{\log_b(a^x)} = a^x.$$

Combinando estas dos últimas igualdades, concluimos que $a^x = b^{x\log_b a}$.

Para demostrar la segunda propiedad, demostramos que

$$(\log_b a).(\log_a x) = \log_b x.$$

Supongamos que $u = \log_b a$, $v = \log_a x$, y $w = \log_b x$. Demostraremos que $u.v = w$. Por la definición de las funciones logarítmicas, sabemos que $b^u = a$, $a^v = x$, y $b^w = x$. De las ecuaciones anteriores, vemos que

$$b^{uv} = (b^u)^v = a^v = x = b^w.$$

Por lo tanto, $b^{uv} = b^w$. Como las funciones exponenciales son biunívocas, podemos concluir que $u.v = w$.

□

EJEMPLO 1.38

Cambio de bases

Utilice una calculadora para evaluar $\log_3 7$ con la fórmula de cambio de base presentada anteriormente.

Solución

Utilice la segunda ecuación con $a = 3$ y $e = 3$:

$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} \approx 1{,}77124.$

1.32 Utilice la fórmula de cambio de base y una calculadora para evaluar $\log_4 6$.

EJEMPLO 1.39

Inicio del capítulo: La escala de Richter para los terremotos

Figura 1.48 (créditos: modificación del trabajo de Robb Hannawacker, NPS).

En 1935, Charles Richter desarrolló una escala (ahora conocida como *escala de Richter*) para medir la magnitud de un terremoto. La escala es una escala logarítmica de base 10, y puede describirse de la siguiente forma: consideremos un terremoto de magnitud R_1 en la escala de Richter y un segundo terremoto de magnitud R_2 en la escala de Richter. Supongamos que $R_1 > R_2$, lo que significa que el terremoto de magnitud R_1 es más fuerte, pero ¿cuánto más fuerte es que el otro terremoto? Una forma de medir la intensidad de un terremoto es utilizar un sismógrafo para medir la amplitud de las ondas sísmicas. Si los valores de A_1 es la amplitud medida para el primer terremoto y A_2 es la amplitud medida para el segundo terremoto, entonces las amplitudes y magnitudes de los dos terremotos satisfacen la siguiente ecuación:

$$R_1 - R_2 = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Considere un terremoto de magnitud 8 en la escala de Richter y un terremoto de magnitud 7 en la escala de Richter. Entonces,

$$8 - 7 = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Por lo tanto,

$$\log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = 1,$$

lo que implica $A_1/A_2 = 10$ o $A_1 = 10A_2$. Dado que A_1 es 10 veces más grande que A_2, decimos que el primer terremoto es 10 veces más intenso que el segundo. Por otro lado, si un terremoto de magnitud 8 en la escala de Richter y otro de magnitud 6, entonces la intensidad relativa de los dos terremotos satisface la ecuación

$$\log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = 8 - 6 = 2.$$

Por lo tanto, $A_1 = 100A_2$. Es decir, el primer terremoto es 100 veces más intenso que el segundo.

¿Cómo podemos utilizar las funciones logarítmicas para comparar la gravedad relativa del terremoto de magnitud 9 en Japón en 2011 con el terremoto de magnitud 7,3 en Haití en 2010?

Solución

Para comparar los terremotos de Japón y Haití, podemos utilizar una ecuación presentada anteriormente:

$$9 - 7{,}3 = \log_{10}\left(\frac{A_1}{A_2}\right).$$

Por lo tanto, $A_1/A_2 = 10^{1{,}7}$, y concluimos que el terremoto de Japón fue aproximadamente 50 veces más intenso que el terremoto de Haití.

1.33 Compare la gravedad relativa de un terremoto de magnitud $8{,}4$ con uno de magnitud $7{,}4$.

Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen en términos de ciertas combinaciones de e^x y e^{-x}. Estas funciones surgen de forma natural en diversas aplicaciones de ingeniería y física, como el estudio de las ondas de agua y las vibraciones de las membranas elásticas. Otro uso común de una función hiperbólica es la representación de una cadena o cable colgante, también conocida como catenaria (Figura 1.49). Si introducimos un sistema de coordenadas para que el punto bajo de la cadena se encuentre a lo largo del eje y, podemos describir la altura de la cadena en términos de una función hiperbólica. En primer lugar, definimos las **funciones hiperbólicas**.

Figura 1.49 La forma de una hebra de seda en una tela de araña puede describirse en términos de una función hiperbólica. La misma forma se aplica a una cadena o cable que cuelga de dos soportes solo con su propio peso (créditos: "Mtpaley", Wikimedia Commons).

Definición

Coseno hiperbólico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Seno hiperbólico

$$\operatorname{senoh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Tangente hiperbólica

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senoh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Cosecante hiperbólica

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senoh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

Secante hiperbólica

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

Cotangente hiperbólica

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senoh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

El nombre *cosh* rima con "gosh", mientras que el nombre *senh* se pronuncia “cench". *Tanh*, *sech*, *csch* y *coth* se pronuncian "tanch", "seech", "coseech" y "cotanch", respectivamente.

Utilizando la definición de $\cosh(x)$ y los principios de la física, se puede demostrar que la altura de una cadena colgante, como la que aparece en la Figura 1.49, se puede describir mediante la función $h(x) = a\cosh(x/a) + c$ para ciertas constantes a y c.

Pero, ¿por qué estas funciones se llaman *funciones hiperbólicas*? Para responder esta pregunta, consideremos la cantidad $\cosh^2 t - \operatorname{senoh}^2 t$. Utilizando la definición de $\cosh$ y senoh, vemos que

$$\cosh^2 t - \operatorname{senoh}^2 t = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1.$$

Esta identidad es el análogo de la identidad trigonométrica $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. Aquí, dado un valor t, el punto $(x, y) = (\cosh t, \operatorname{senoh} t)$ se encuentra en la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$ (Figura 1.50).

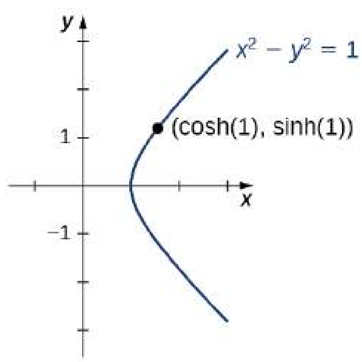


Figura 1.50 La hipérbola unitaria $\cosh^2 t - \operatorname{senoh}^2 t = 1$.

Gráficos de funciones hiperbólicas

Para graficar $\cosh x$ y $\operatorname{senoh} x$, aprovechamos el hecho de que ambas funciones se acercan a $(1/2)\, e^x$ a medida que $x \to \infty$, dado que $e^{-x} \to 0$ cuando $x \to \infty$. Dado que $x \to -\infty$, $\cosh x$ se acerca a $1/2e^{-x}$, mientras que $\operatorname{senoh} x$ se acerca a $-1/2e^{-x}$. Por lo tanto, utilizando los gráficos de $1/2e^x$, $1/2e^{-x}$, y $-1/2e^{-x}$ como guías, graficamos $\cosh x$ y $\operatorname{senoh} x$. Para graficar $\tanh x$, utilizamos el hecho de que $\tanh(0) = 0, -1 < \tanh(x) < 1$ para todo $x, \tanh x \to 1$ cuando $x \to \infty$, y $\tanh x \to -1$ cuando $x \to -\infty$. Los gráficos de las otras tres funciones hiperbólicas se pueden dibujar utilizando los gráficos de $\cosh x$, $\operatorname{senoh} x$, y $\tanh x$ (Figura 1.51).

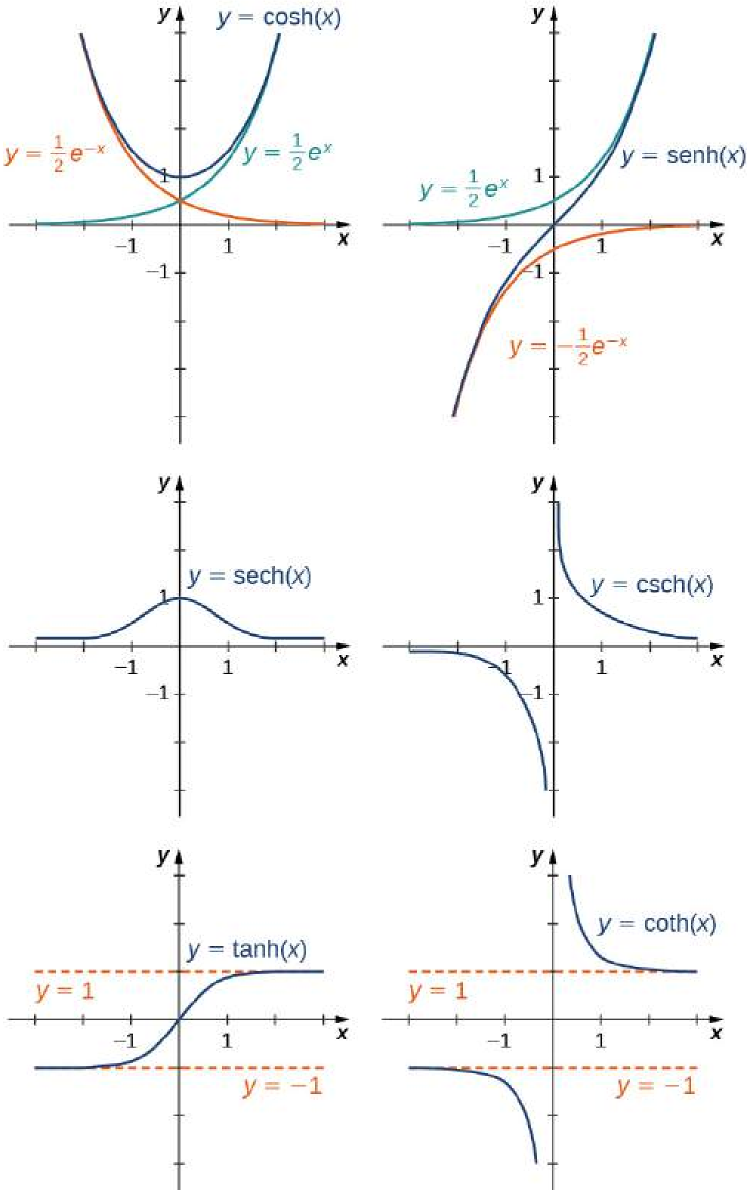


Figura 1.51 Las funciones hiperbólicas son combinaciones de e^x y e^{-x}.

Identidades que involucran funciones hiperbólicas

La identidad $\cosh^2 t - \text{senoh}^2 t$, mostrada en la Figura 1.50, es una de las varias identidades que involucran funciones hiperbólicas, algunas de las cuales se enumeran a continuación. Las cuatro primeras propiedades se deducen fácilmente de las definiciones de seno hiperbólico y coseno hiperbólico. Salvo algunas diferencias de signo, la mayoría de estas propiedades son análogas a las identidades de las funciones trigonométricas.

Regla: identidades que involucran funciones hiperbólicas

1. $\cosh(-x) = \cosh x$
2. $\text{senoh}(-x) = -\text{senoh}\, x$
3. $\cosh x + \text{senoh}\, x = e^x$
4. $\cosh x - \text{senoh}\, x = e^{-x}$
5. $\cosh^2 x - \text{senoh}^2 x = 1$
6. $1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$
7. $\coth^2 x – 1 = \text{csch}^2 x$
8. $\text{senoh}(x \pm y) = \text{senoh}\, x \cosh y \pm \cosh x\, \text{senoh}\, y$

9. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senoh} x \operatorname{senoh} y$

EJEMPLO 1.40

Evaluación de funciones hiperbólicas

a. Simplifique $\operatorname{senoh}(5 \ln x)$.
b. Si los valores de $\operatorname{senoh} x = 3/4$, calcule los valores de las cinco funciones hiperbólicas restantes.

Solución

a. Utilizando la definición del senoh, escribimos

$$\operatorname{senoh}(5 \ln x) = \frac{e^{5 \ln x} - e^{-5 \ln x}}{2} = \frac{e^{\ln\left(x^5\right)} - e^{\ln\left(x^{-5}\right)}}{2} = \frac{x^5 - x^{-5}}{2}.$$

b. Utilizando la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senoh}^2 x = 1$, vemos que

$$\cosh^2 x = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}.$$

Dado que $\cosh x \geq 1$ para todo x, debemos tener $\cosh x = 5/4$. Entonces, utilizando las definiciones para las otras funciones hiperbólicas, concluimos que $\tanh x = 3/5$, $\operatorname{csch} x = 4/3$, $\operatorname{sech} x = 4/5$, y $\coth x = 5/3$.

1.34 Simplifique $\cosh(2 \ln x)$.

Funciones hiperbólicas inversas

A partir de los gráficos de las funciones hiperbólicas, vemos que todas ellas son biunívocas excepto $\cosh x$ y $\operatorname{sech} x$. Si restringimos los dominios de estas dos funciones al intervalo $\left[0, \infty\right)$, entonces todas las funciones hiperbólicas son biunívocas, y podemos definir las **funciones hiperbólicas inversas**. Dado que las funciones hiperbólicas propiamente dichas implican funciones exponenciales, las funciones hiperbólicas inversas implican funciones logarítmicas.

Definición

Funciones hiperbólicas inversas

$$\operatorname{senoh}^{-1} x = \operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad \cosh^{-1} x = \operatorname{arccosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\tanh^{-1} x = \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad \coth^{-1} x = \operatorname{arccot} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \operatorname{arcsech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \qquad \operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{arccsch} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right)$$

Veamos cómo derivar la primera ecuación. Las demás siguen el mismo camino. Supongamos que $y = \operatorname{senoh}^{-1} x$. Entonces, $x = \operatorname{senoh} y$ y, por la definición de la función de seno hiperbólico, $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Por lo tanto,

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por e^y, obtenemos

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$$

Esto se puede resolver como una ecuación cuadrática, con la solución

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Dado que $e^y > 0$, la única solución es la del signo positivo. Aplicando el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación, concluimos que

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

EJEMPLO 1.41

Evaluación de funciones hiperbólicas inversas

Evalúe cada una de las siguientes expresiones.

$\text{senoh}^{-1}(2)$grandes.

$\tanh^{-1}(1/4)$grandes.

Solución

$\text{senoh}^{-1}(2) = \ln\left(2 + \sqrt{2^2 + 1}\right) = \ln\left(2 + \sqrt{5}\right) \approx 1{,}4436$

$\tanh^{-1}(1/4) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1/4}{1-1/4}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5/4}{3/4}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}2554$

1.35 Evalúe $\tanh^{-1}(1/2)$.

SECCIÓN 1.5 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, evalúe las funciones exponenciales dadas como se indica, con precisión de dos dígitos significativos después del decimal.

229. $f(x) = 5^x$ a. $x = 3$ b. $x = \frac{1}{2}$ c. $x = \sqrt{2}$

230. $f(x) = (0{,}3)^x$ a. $x = -1$ b. $x = 4$ c. $x = -1{,}5$

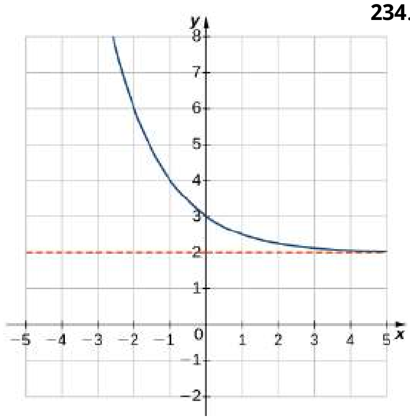
231. $f(x) = 10^x$ a. $x = -2$ b. $x = 4$ c. $x = \frac{5}{3}$

232. $f(x) = e^x$ a. $x = 2$ b. $x = -3{,}2$ c. $x = \pi$

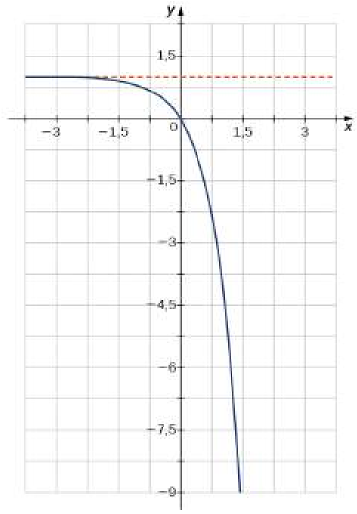
En los siguientes ejercicios, relacione la ecuación exponencial con el gráfico correcto.

a. $y = 4^{-x}$
b. $y = 3^{x-1}$
c. $y = 2^{x+1}$
d. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$
e. $y = -3^{-x}$
f. $y = 1 - 5^x$

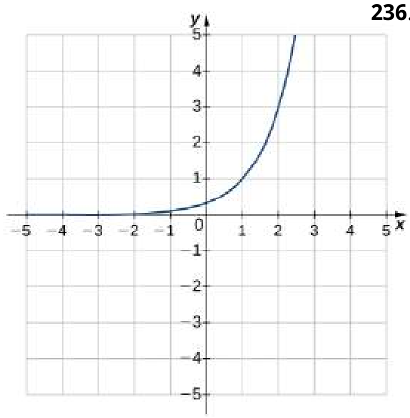
233.



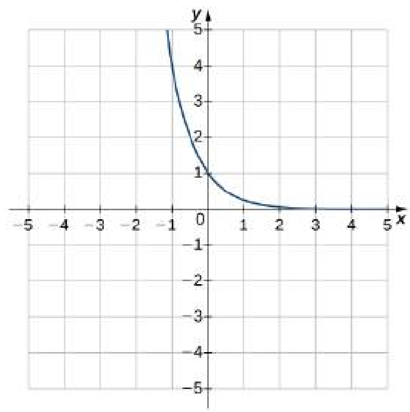
234.



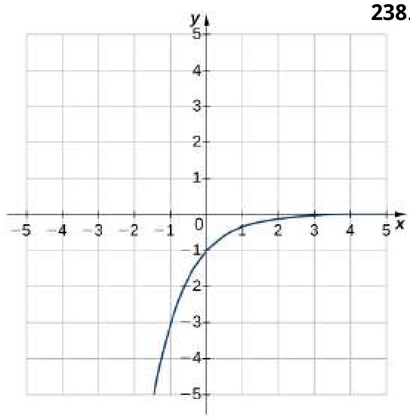
235.



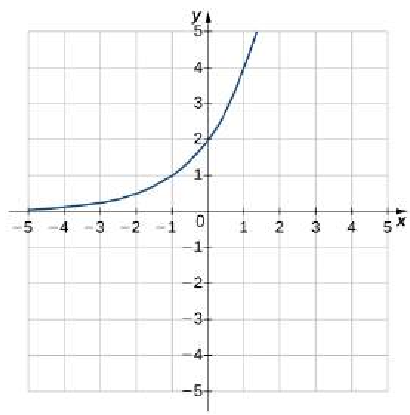
236.



237.



238.



En los siguientes ejercicios, dibuje el gráfico de la función exponencial. Determine el dominio, el rango y la asíntota horizontal.

239. $f(x) = e^x + 2$

240. $f(x) = -2^x$

241. $f(x) = 3^{x+1}$

242. $f(x) = 4^x - 1$

243. $f(x) = 1 - 2^{-x}$

244. $f(x) = 5^{x+1} + 2$

245. $f(x) = e^{-x} - 1$

En los siguientes ejercicios, escriba la ecuación en forma exponencial equivalente.

246. $\log_3 81 = 4$

247. $\log_8 2 = \frac{1}{3}$

248. $\log_5 1 = 0$

249. $\log_5 25 = 2$

250. $\log 0{,}1 = -1$

251. $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right) = -3$

252. $\log_9 3 = 0{,}5$

253. $\ln 1 = 0$

En los siguientes ejercicios, escriba la ecuación en forma logarítmica equivalente.

254. $2^3 = 8$

255. $4^{-2} = \frac{1}{16}$

256. $10^2 = 100$

257. $9^0 = 1$

258. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

259. $\sqrt[3]{64} = 4$

260. $e^x = y$

261. $9^y = 150$

262. $b^3 = 45$

263. $4^{-3/2} = 0{,}125$

En los siguientes ejercicios, dibuje el gráfico de la función logarítmica. Determine el dominio, el rango y la asíntota vertical.

264. $f(x) = 3 + \ln x$

265. $f(x) = \ln(x - 1)$

266. $f(x) = \ln(-x)$ grandes.

267. $f(x) = 1 - \ln x$

268. $f(x) = \log x - 1$

269. $f(x) = \ln(x + 1)$

En los siguientes ejercicios, utilice las propiedades de los logaritmos para escribir las expresiones como suma, diferencia o producto de logaritmos.

270. $\log x^4 y$

271. $\log_3 \frac{9a^3}{b}$

272. $\ln a \sqrt[3]{b}$

273. $\log_5 \sqrt{125xy^3}$

274. $\log_4 \frac{\sqrt[3]{xy}}{64}$

275. $\ln\left(\frac{6}{\sqrt{e^3}}\right)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, resuelva la ecuación exponencial de manera exacta.

276. $5^x = 125$

277. $e^{3x} - 15 = 0$

278. $8^x = 4$

279. $4^{x+1} - 32 = 0$

280. $3^{x/14} = \frac{1}{10}$

281. $10^x = 7{,}21$

282. $4.\,2^{3x} - 20 = 0$

283. $7^{3x-2} = 11$

En los siguientes ejercicios, resuelva la ecuación logarítmica de manera exacta, si es posible.

284. $\log_3 x = 0$

285. $\log_5 x = -2$

286. $\log_4 (x + 5) = 0$

287. $\log(2x - 7) = 0$

288. $\ln\sqrt{x+3} = 2$

289. $\log_6(x+9) + \log_6 x = 2$

290. $\log_4(x+2) - \log_4(x-1) = 0$

291. $\ln x + \ln(x-2) = \ln 4$

En los siguientes ejercicios, utilice la fórmula de cambio de base y la base 10 o la base e para evaluar las expresiones dadas. Responda en forma exacta y en forma aproximada, redondeando a cuatro decimales.

292. $\log_5 47$

293. $\log_7 82$

294. $\log_6 103$

295. $\log_{0,5} 211$

296. $\log_2 \pi$

297. $\log_{0,2} 0{,}452$

298. Reescriba las siguientes expresiones en términos de exponenciales y simplifique.

a. $2\cosh(\ln x)$ b. $\cosh 4x + \operatorname{senoh} 4x$ c. $\cosh 2x - \operatorname{senoh} 2x$ d. $\ln(\cosh x + \operatorname{senoh} x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senoh} x)$

299. **[T]** El número de bacterias *N* en un cultivo después de *t* días puede modelarse mediante la función $N(t) = 1300.\,(2)^{t/4}$. Calcule el número de bacterias presentes después de 15 días.

300. **[T]** La demanda *D* (en millones de barriles) de petróleo en un país rico en petróleo viene dada por la función $D(p) = 150.\,(2{,}7)^{-0{,}25p}$, donde *p* es el precio (en dólares) del barril de petróleo. Calcule la cantidad de petróleo demandada (al millón de barriles más cercano) cuando el precio está entre 15 y 20 dólares.

301. **[T]** El monto *A* de una inversión de 100.000 dólares que se paga de forma continua y compuesta durante *t* años está dado por $A(t) = 100.000.\,e^{0{,}055t}$. Calcule el monto *A* acumulado en 5 años.

302. **[T]** Una inversión se calcula mensual, trimestral o anualmente y está dada por la función $A = P\left(1 + \frac{j}{n}\right)^{nt}$, donde A es el valor de la inversión en el tiempo t, P es el capital inicial que se invirtió, j es la tasa de interés anual y n es el número de veces que se calculan los intereses al año. Dada una tasa de interés anual del 3,5 % y un capital inicial de 100.000 dólares, calcule el monto A acumulado en 5 años para los intereses que se calculan a. diariamente, b., mensualmente, c. trimestralmente y d. anualmente.

303. **[T]** La concentración de iones de hidrógeno en una sustancia se denota mediante $\left[\mathrm{H}^{+}\right]$, medida en moles por litro. El pH de una sustancia se define mediante la función logarítmica $\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H}^{+}\right]$. Esta función se utiliza para medir la acidez de una sustancia. El pH del agua es de 7. Una sustancia con un pH inferior a 7 es un ácido, mientras que la que tiene un pH superior a 7 es una base.

a. Calcule el pH de las siguientes sustancias. Redondee las respuestas a un dígito.
b. Determine si la sustancia es un ácido o una base.
   i. Huevos: $\left[\mathrm{H}^{+}\right] = 1{,}6 \times 10^{-8}$ mol/L
   ii. Cerveza: $\left[\mathrm{H}^{+}\right] = 3{,}16 \times 10^{-3}$ mol/L
   iii. Jugo de tomate: $\left[\mathrm{H}^{+}\right] = 7{,}94 \times 10^{-5}$ mol/L

304. **[T]** El yodo-131 es una sustancia radiactiva que se descompone según la función $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-0{,}08664t}$, donde Q_0 es la cantidad inicial de una muestra de la sustancia y *t* está en días. Determine el tiempo que tarda (al día más cercano) en descomponerse el 95 % de una cantidad.

305. **[T]** Según el Banco Mundial, a finales de 2013 ($t = 0$) la población de EE. UU. era de 316 millones de habitantes y aumentaba de acuerdo con el siguiente modelo:

$P(t) = 316e^{0{,}0074t}$, donde *P* se mide en millones de personas y *t* se mide en años después de 2013.

a. Según este modelo, ¿cuál será la población de Estados Unidos en 2020?
b. Determine cuándo la población de Estados Unidos será el doble que en 2013.

306. **[T]** El monto *A* acumulado después de invertir 1.000 dólares durante *t* años a una tasa de interés del 4 % se modela mediante la función $A(t) = 1.000(1{,}04)^t$.

a. Calcule el monto acumulado después de 5 años y 10 años.
b. Determine el tiempo que tarda en triplicarse la inversión original.

307. **[T]** Se sabe que una colonia bacteriana cultivada en un laboratorio duplica su número en 12 horas. Supongamos que, inicialmente, hay 1.000 bacterias presentes.

a. Utilice la función exponencial $Q = Q_0 e^{kt}$ para determinar el valor k, que es la tasa de crecimiento de la bacteria. Redondee a cuatro decimales.
b. Determine aproximadamente el tiempo que tardan en crecer 200.000 bacterias.

308. **[T]** La población de conejos en una reserva de caza se duplica cada 6 meses. Supongamos que hay 120 conejos inicialmente.

a. Utilice la función exponencial $P = P_0 a^t$ para determinar la tasa de crecimiento constante a. Redondee a cuatro decimales.
b. Utilice la función de la parte a. para determinar aproximadamente el tiempo que tarda la población de conejos en llegar a 3500.

309. **[T]** El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8,3 en la escala de Richter. Al mismo tiempo, en Japón, un terremoto de magnitud 4,9 solo causó daños menores. ¿Aproximadamente cuánta más energía liberó el terremoto de San Francisco que el de Japón? Consulte la definición de la escala de Richter en el Figura 1.48 de esta sección.

Revisión del capítulo

Términos clave

base el número b en la función exponencial $f(x) = b^x$ y la función logarítmica $f(x) = \log_b x$
ceros de una función cuando un número real x es un cero de una función f, $f(x) = 0$
creciente en el intervalo I una función es creciente en el intervalo I si para todas $x_1, x_2 \in I$, $f(x_1) \le f(x_2)$ si $x_1 < x_2$
dominio el conjunto de entradas de una función
dominio restringido subconjunto del dominio de una función f
ecuación punto-pendiente ecuación de una función lineal donde se indica su pendiente y un punto del gráfico de la función
exponente el valor x en la expresión b^x
forma pendiente-intersección ecuación de una función lineal que indica su pendiente y su intersección y
función un conjunto de entradas, un conjunto de salidas y una regla para asignar cada entrada a exactamente una salida.
función algebraica una función que implica cualquier combinación de solo las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces aplicadas a una variable de entrada x
función biunívoca una función f es biunívoca si $f(x_1) \ne f(x_2)$ si $x_1 \ne x_2$
función compuesta dadas dos funciones f y g, una nueva función, denotada $g \circ f$, de manera que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
función cuadrática polinomio de grado 2; es decir, una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a \ne 0$
función cúbica un polinomio de grado 3; es decir, una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde $a \ne 0$
función de valor absoluto $f(x) = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \ge 0 \end{cases}$
función definida a trozos función que se define de forma diferente en las distintas partes de su dominio.
función exponencial natural la función $f(x) = e^x$
función impar una función es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en el dominio de f
función inversa para una función f, la función inversa f^{-1} satisface $f^{-1}(y) = x$ si $f(x) = y$
función lineal una función que se puede escribir de la forma $f(x) = mx + b$
función logarítmica una función de la forma $f(x) = \log_b(x)$ para alguna base $b > 0, b \ne 1$ de manera que $y = \log_b(x)$ si y solo si $b^y = x$
función par una función es par si $f(-x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f
función periódica una función es periódica si tiene un patrón de repetición a medida que los valores de x se mueven de izquierda a derecha
función polinómica una función de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
función potencia una función de la forma $f(x) = x^n$ para cualquier número entero positivo $n \ge 1$
función racional una función de la forma $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ como $q(x)$ son polinomios
función raíz una función de la forma $f(x) = x^{1/n}$ para cualquier número entero $n \ge 2$
función trascendental una función que no puede expresarse mediante una combinación de operaciones aritméticas básicas.
funciones hiperbólicas las funciones denotadas senoh, $\cosh$, $\tanh$, csch, sech, y $\coth$, que implican ciertas combinaciones de e^x y e^{-x}
funciones hiperbólicas inversas las inversas de las funciones hiperbólicas donde $\cosh$ y sech están restringidas al dominio $\left[0, \infty\right)$; cada una de estas funciones puede expresarse en términos de una composición de la función de logaritmo natural y una función algebraica
funciones trigonométricas funciones de un ángulo definidas como las relaciones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo
funciones trigonométricas inversas las inversas de las funciones trigonométricas están definidas en dominios restringidos donde son funciones biunívocas
grado en una función polinómica, el valor del mayor exponente de cualquier término.
gráfico de una función el conjunto de puntos (x, y) de manera que x está en el dominio de f, en tanto que $y = f(x)$
identidad trigonométrica ecuación con funciones trigonométricas que es verdadera para todos los ángulos θ para la que se definen las funciones de la ecuación
logaritmo natural la función $\ln x = \log_e x$
modelo matemático Un método para simular situaciones de la vida real con ecuaciones matemáticas.
número e a medida que m se hace más grande, la cantidad $(1 + (1/m))^m$ se acerca a algún número real; definimos ese número real como e; el valor de e es, aproximadamente, $2{,}718282$

pendiente cambio en y por cada unidad de cambio en x
prueba de la línea horizontal una función f es biunívoca si y solo si cada línea horizontal interseca el gráfico de f, como máximo, una vez
prueba de la línea vertical dado el gráfico de una función, toda línea vertical interseca el gráfico una vez como máximo
que disminuye en el intervalo I una función decreciente en el intervalo I si, para todo $x_1, x_2 \in I, f(x_1) \geq f(x_2)$ si $x_1 < x_2$
radianes para un arco circular de longitud s en un círculo de radio 1, la medida del radián del ángulo asociado θ ¿es s
rango el conjunto de salidas de una función
simetría en torno al eje *y* el gráfico de una función f es simétrico respecto al eje y si $(-x, y)$ está en el gráfico de f siempre que (x, y) está en el gráfico
simetría respecto al origen el gráfico de una función f es simétrico respecto al origen si $(-x, -y)$ está en el gráfico de f siempre que (x, y) está en el gráfico
tabla de valores tabla que contiene una lista de entradas y sus correspondientes salidas
transformación de una función desplazamiento, escalado o reflexión de una función.
variable dependiente la variable de salida de una función
variable independiente la variable de entrada de una función

Ecuaciones clave

Composición de dos funciones	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
Función de valor absoluto	$f(x) = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x, x \geq 0 \end{cases}$

Ecuación punto-pendiente de una línea	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Forma pendiente-intersección de una línea	$y = mx + b$
Forma estándar de una línea	$ax + by = c$
Función polinómica	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Función sinusoidal generalizada	$f(x) = A\,\text{sen}\,(B(x - \alpha)) + C$

Funciones inversas	$f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x in D, y $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ para todo y in R.

Conceptos clave

1.1 Repaso de las funciones

- Una función es un mapeo de un conjunto de entradas hacia un conjunto de salidas con exactamente una salida para cada entrada.
- Si no se indica ningún dominio para una función $y = f(x)$, se considera que el dominio es el conjunto de todos los números reales x para el cual la función está definida.
- El gráfico de una función f, cada línea vertical puede intersecar el gráfico, como máximo, una vez.
- Una función puede tener cualquier número de ceros, pero tiene, como máximo, una intersección y.
- Para definir la composición $g \circ f$, el rango de f debe estar contenido en el dominio de g.
- Las funciones pares son simétricas respecto al eje y, mientras que las funciones impares son simétricas respecto al origen.

1.2 Clases básicas de funciones

- La función potencia $f(x) = x^n$ es una función par si n es uniforme y $n \neq 0$, y es una función impar si n es impar.

- La función raíz $f(x) = x^{1/n}$ tiene el dominio $[0, \infty)$ si n es par y el dominio $(-\infty, \infty)$ si n es impar. Si los valores de n es impar, entonces $f(x) = x^{1/n}$ es una función impar.
- El dominio de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $p(x)$ como $q(x)$ son funciones polinómicas; es el conjunto de x de manera que $q(x) \neq 0$.
- Las funciones que implican las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación, división y potencias son funciones algebraicas. Todas las demás funciones son trascendentales. Las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas son ejemplos de funciones trascendentales.
- Una función polinómica f de grado $n \geq 1$ satisface $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$. El signo del valor de salida cuando $x \to \infty$ depende únicamente del signo del coeficiente líder y de si n es par o impar.
- Los desplazamientos verticales y horizontales, escalados verticales y horizontales, y reflexiones sobre los ejes x y y son ejemplos de transformaciones de funciones.

1.3 Funciones trigonométricas

- La medida en radianes se define de forma que el ángulo asociado al arco de longitud 1 en el círculo unitario tiene medida de radián 1. Un ángulo con una medida de grado de $180°$ tiene una medida del radián de π rad.
- En los ángulos agudos θ, los valores de las funciones trigonométricas se definen como las relaciones de dos lados de un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos agudos es θ.
- Para un ángulo general θ, supongamos que (x, y) es un punto en un círculo de radio r correspondiente a este ángulo θ. Las funciones trigonométricas pueden escribirse como razones que implican x, y, y r.
- Las funciones trigonométricas son periódicas. Las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen periodo 2π. Las funciones tangente y cotangente tienen periodo π.

1.4 Funciones inversas

- Para que una función tenga una inversa, la función debe ser biunívoca. Dado el gráfico de una función, podemos determinar si esta es biunívoca utilizando la prueba de la línea horizontal.
- Si una función no es biunívoca, podemos restringir el dominio a otro más pequeño en el que la función lo sea, y a continuación, definimos la inversa de la función en el dominio más pequeño.
- Para una función f y su inversa f^{-1}, $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ para todos los valores x en el dominio de f^{-1} y $f^{-1}(f(x)) = x$ para todos los valores x en el dominio de f.
- Como las funciones trigonométricas son periódicas, necesitamos restringir sus dominios para definir las funciones trigonométricas inversas.
- El gráfico de una función f y su inversa f^{-1} son simétricos respecto a la línea $y = x$.

1.5 Funciones exponenciales y logarítmicas

- La función exponencial $y = b^x$ es creciente si $b > 1$ y decreciente si $0 < b < 1$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$ y su rango es $\left(0, \infty\right)$.
- La función logarítmica $y = \log_b(x)$ es la inversa de $y = b^x$. Su dominio es $\left(0, \infty\right)$ y su rango es $\left(-\infty, \infty\right)$.
- La función exponencial natural es $y = e^x$ y la función de logaritmo natural es $y = \ln x = \log_e x$.
- Dada una función exponencial o logarítmica en base a, podemos hacer un cambio de base para convertir esta función a cualquier base $b > 0, b \neq 1$. Solemos convertir a base e.
- Las funciones hiperbólicas son combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x}. Como resultado, las funciones hiperbólicas inversas implican el logaritmo natural.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

310. Una función es siempre biunívoca.

311. $f \circ g = g \circ f$, asumiendo que *f* y *g* son funciones.

312. Una relación que supera las pruebas de línea horizontal y vertical es una función biunívoca.

313. Una relación que pasa la prueba de la línea horizontal es una función.

En los siguientes problemas, indique el dominio y el rango de las funciones dadas:

$f = x^2 + 2x - 3,$ $g = \ln(x - 5),$ $h = \frac{1}{x+4}$

314. h

315. g

316. $h \circ f$

317. $g \circ f$

Calcule el grado, la intersección y y los ceros de las siguientes funciones polinómicas.

318. $f(x) = 2x^2 + 9x - 5$

319. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x$

Simplifique las siguientes expresiones trigonométricas.

320. $\frac{\tan^2 x}{\sec^2 x} + \cos^2 x$

321. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas en el intervalo $\theta = [-2\pi, 2\pi]$ de manera exacta.

322. $6\cos^2 x - 3 = 0$

323. $\sec^2 x - 2\sec x + 1 = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.

324. $5^x = 16$

325. $\log_2(x + 4) = 3$

¿Son las siguientes funciones biunívocas sobre su dominio de existencia? ¿Tiene la función una inversa? Si es así, halle la inversa $f^{-1}(x)$ de la función. Justifique su respuesta.

326. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

327. $f(x) = \frac{1}{x}$

En los siguientes problemas, determine el mayor dominio en el que la función es biunívoca y halle la inversa en ese dominio.

328. $f(x) = \sqrt{9 - x}$

329. $f(x) = x^2 + 3x + 4$

330. Un automóvil corre a lo largo de una pista circular con un diámetro de 1 milla. Un entrenador situado en el centro del círculo marca su progreso cada 5 segundos. Después de 5 segundos, el entrenador tiene que girar 55° para seguir el ritmo del automóvil. ¿A qué velocidad viaja el automóvil?

En los siguientes problemas, piense en el propietario de un restaurante que quiere vender camisetas que anuncien su marca. Él recuerda que hay un costo fijo y un costo variable, aunque no recuerda los valores. Sí sabe que la compañía de impresión de camisetas cobra 440 dólares por 20 camisetas y 1.000 dólares por 100 camisetas.

331. a. Halle la ecuación $C = f(x)$ que describa el costo total en función del número de camisetas y b. determine cuántas camisetas debe vender para alcanzar el punto de equilibrio si vende las camisetas a 10 dólares cada una.

332. a. Halle la función inversa $x = f^{-1}(C)$ y describa el significado de esta función. b. Determine cuántas camisas puede comprar el propietario si tiene 8000 dólares para gastar.

En los siguientes problemas, considere la población de Ocean City, Nueva Jersey, que es cíclica por temporada.

333. La población puede ser modelada mediante $P(t) = 82{,}5 - 67{,}5\cos\left[(\pi/6)t\right]$, donde t es el tiempo en meses ($t = 0$ representa el 1.º de enero) y P es la población (en miles). Durante un año, ¿en qué intervalos la población es inferior a 20.000 habitantes? ¿En qué intervalos la población supera los 140.000 habitantes?

334. En realidad, lo más probable es que la población global aumente o disminuya a lo largo de cada año. Reformulemos el modelo como $P(t) = 82{,}5 - 67{,}5\cos\left[(\pi/6)t\right] + t$, donde t es el tiempo en meses ($t = 0$ representa el 1.º de enero) y P es la población (en miles). ¿Cuándo es la primera vez que la población alcanza los 200.000 habitantes?

En los siguientes problemas, considere la datación radiométrica. Se encuentra un esqueleto humano en una excavación arqueológica. Se aplica la datación por carbono para determinar la antigüedad del esqueleto mediante la ecuación $y = e^{rt}$, donde y es la proporción de radiocarbono aún presente en el material, t es el número de años transcurridos y $r = -0{,}0001210$ es la tasa de decaimiento del radiocarbono.

335. Si se espera que el esqueleto tenga 2.000 años de antigüedad, ¿qué porcentaje de radiocarbono debería estar presente?

336. Halle la inversa de la ecuación de datación del carbono. ¿Qué significa? Si hay un 25 % de radiocarbono, ¿qué edad tiene el esqueleto?

2 LÍMITES

Figura 2.1 La visión de la exploración humana por parte de la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (National Aeronautics and Space Administration, NASA) a lugares lejanos del universo ilustra la idea de los viajes espaciales a gran velocidad. Pero, ¿hay un límite para la velocidad de una nave espacial? (créditos: NASA).

Esquema del capítulo

Introducción

Los escritores de ciencia ficción suelen imaginar naves espaciales que pueden viajar a planetas lejanos en galaxias distantes. Sin embargo, en 1905, Albert Einstein demostró que existe un límite a la velocidad que puede alcanzar cualquier objeto. El problema es que cuanto más rápido se mueve un objeto, más masa alcanza (en forma de energía), según la ecuación

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo, v es su velocidad y c es la velocidad de la luz. ¿Cuál es el límite de velocidad?

(Analizamos este problema con más detalle en el Ejemplo 2.12).

La idea de límite es fundamental para todo el cálculo. Comenzamos este capítulo examinando por qué los límites son tan importantes. A continuación, pasamos a describir cómo calcular el límite de una función en un punto determinado. No todas las funciones tienen límites en todos los puntos, y discutimos lo que esto significa y cómo podemos saber si una función tiene o no un límite en un valor particular. Este capítulo se ha creado de manera informal e intuitiva, pero esto no siempre es suficiente si necesitamos demostrar un enunciado matemático que implique límites. La última sección de este capítulo presenta la definición más precisa de un límite y muestra cómo demostrar si una función tiene un límite.

2.1 Un repaso previo del cálculo

Objetivos de aprendizaje

2.1.1 Describir el problema de la tangente y cómo condujo a la idea de la derivada.
2.1.2 Explicar cómo interviene la idea de límite en la resolución del problema de la tangente.
2.1.3 Reconocer una tangente a una curva en un punto como límite de líneas secantes.
2.1.4 Identificar la velocidad instantánea como el límite de la velocidad media en un pequeño intervalo de tiempo.
2.1.5 Describir el problema del área y cómo se resolvió con la integral.
2.1.6 Explicar cómo interviene la idea de límite en la resolución del problema de área.
2.1.7 Reconocer cómo las ideas de límite, derivada e integral condujeron a los estudios de series infinitas y al cálculo multivariable.

A medida que nos embarcamos en el estudio del cálculo, veremos cómo su desarrollo surgió a partir de soluciones comunes a problemas prácticos en áreas como la física de la ingeniería, como el problema del viaje espacial planteado en el inicio del capítulo. Dos problemas clave condujeron a la formulación inicial del cálculo: (1) el problema de la tangente, o cómo determinar la pendiente de una línea tangente a una curva en un punto; y (2) el problema del área, o cómo determinar el área bajo una curva.

El problema de la tangente y el cálculo diferencial

La tasa de cambio es uno de los conceptos más importantes del cálculo. Comenzamos nuestra investigación de las tasas de cambio observando los gráficos de las tres líneas $f(x) = -2x - 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$, y $h(x) = 2$, se muestra en la Figura 2.2.

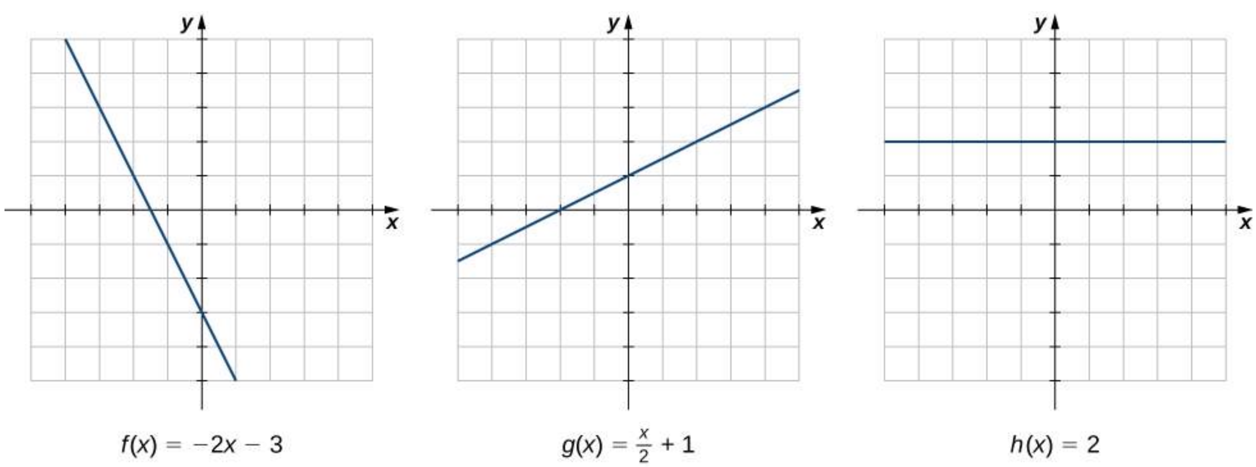


Figura 2.2 La tasa de cambio de una función lineal es constante en cada una de estos tres gráficos, con la constante determinada por la pendiente.

A medida que nos movemos de izquierda a derecha a lo largo del gráfico de $f(x) = -2x - 3$, vemos que el gráfico disminuye a una tasa constante. Por cada 1 unidad que nos movemos hacia la derecha a lo largo del eje *x*, la coordenada *y* disminuye en 2 unidades. Esta tasa de cambio está determinada por la pendiente (-2) de la línea. Del mismo modo, la pendiente de 1/2 en la función $g(x)$ nos dice que por cada cambio en *x* de 1 unidad hay un cambio correspondiente en *y* de 1/2 unidad. La función $h(x) = 2$ tiene una pendiente de cero, lo que indica que los valores de la función permanecen constantes. Vemos que la pendiente de cada función lineal indica la tasa de cambio de la función.

Compare los gráficos de estas tres funciones con el gráfico de $k(x) = x^2$ (Figura 2.3). El gráfico de $k(x) = x^2$ empieza por la izquierda disminuyendo rápidamente, luego empieza a disminuir más lentamente y a nivelarse finalmente empieza a aumentar; lentamente al principio, seguido por una tasa de aumento creciente a medida que se mueve hacia la derecha. A diferencia de una función lineal, ningún número representa la tasa de cambio de esta función.

Preguntamos con toda naturalidad: ¿cómo se mide la tasa de cambio de una función no lineal?

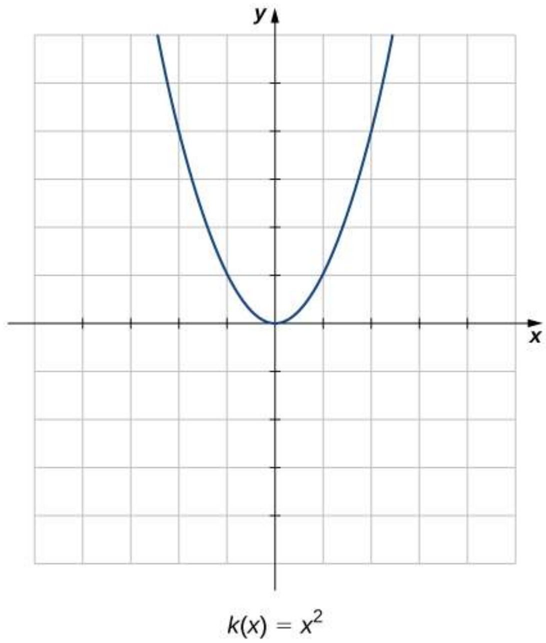


Figura 2.3 La función $k(x) = x^2$ no tiene una tasa de cambio constante.

Podemos aproximar la tasa de cambio de una función $f(x)$ en un punto $(a, f(a))$ en su gráfico tomando otro punto $(x, f(x))$ en el gráfico de $f(x)$, dibujando una línea a través de los dos puntos y calculando la pendiente de la línea resultante. Tal línea se llama línea **secante**. La Figura 2.4 muestra una línea secante a una función $f(x)$ en un punto $(a, f(a))$.

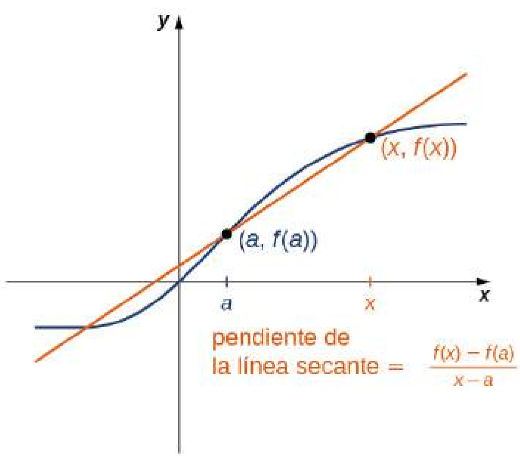


Figura 2.4 La pendiente de una línea secante que pasa por un punto $(a, f(a))$ estima la tasa de cambio de la función en el punto $(a, f(a))$.

Definimos formalmente una línea secante como sigue:

Definición

La **secante** de la función $f(x)$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$ es la línea que pasa por estos puntos. Su pendiente está dada por

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{2.1}$$

La exactitud de la aproximación de la tasa de cambio de la función con una línea secante depende de lo cerca que esté *x* de *a*. Como vemos en la Figura 2.5, si *x* está más cerca de *a*, la pendiente de la línea secante es una mejor medida de la tasa de cambio de $f(x)$ en *a*.

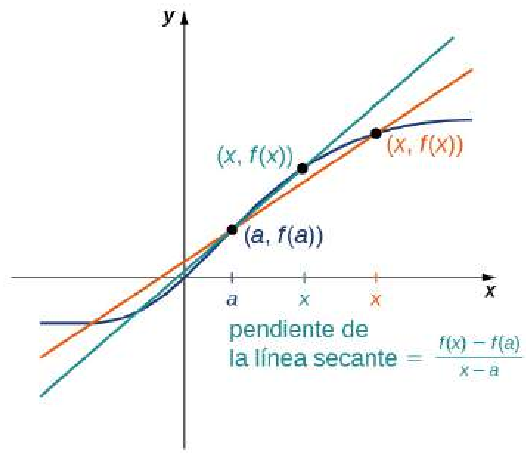


Figura 2.5 A medida que *x* se acerca a *a*, la pendiente de la línea secante se convierte en una mejor aproximación a la tasa de cambio de la función $f(x)$ en *a*.

Las propias líneas secantes se acercan a una línea que se llama **tangente** a la función $f(x)$ en *a* (Figura 2.6). La pendiente de la línea tangente al gráfico en *a* mide la tasa de cambio de la función en *a*. Este valor también representa la derivada de la función $f(x)$ en *a*, o la tasa de cambio de la función en *a*. Esta derivada se denomina $f'(a)$. El **cálculo diferencial** es el campo del cálculo que se ocupa del estudio de las derivadas y sus aplicaciones.

MEDIOS

Para ver una demostración interactiva de la pendiente de una línea secante que puede manipular usted mismo, visite esta miniaplicación (*Nota:* Este sitio requiere un plugin de Java para el navegador): Visión de las matemáticas (http://www.openstax.org/l/20_mathinsight).

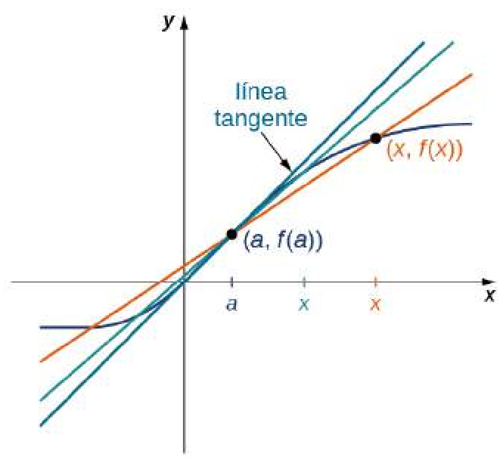


Figura 2.6 Resolver el problema de la tangente: a medida que *x* se acerca a *a*, las líneas secantes se acercan a la línea tangente.

El Ejemplo 2.1 ilustra cómo calcular las pendientes de las líneas secantes. Estas pendientes estiman la pendiente de la línea tangente o, lo que es lo mismo, la tasa de cambio de la función en el punto en el que se calculan las pendientes.

EJEMPLO 2.1

Cálculo de las pendientes de las líneas secantes

Estime la pendiente de la línea tangente (tasa de cambio) a $f(x) = x^2$ en $x = 1$ calculando las pendientes de las líneas secantes que pasan por $(1, 1)$ y cada uno de los siguientes puntos del gráfico de $f(x) = x^2$.

a. $(2, 4)$ grandes.
b. $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

Solución

Utilice la fórmula de la pendiente de una línea secante a partir de la definición.

a. $m_{\text{sec}} = \frac{4-1}{2-1} = 3$

b. $m_{\text{sec}} = \frac{\frac{9}{4}-1}{\frac{3}{2}-1} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

El punto de la parte b. está más cerca del punto $(1, 1)$, por lo que la pendiente de 2,5 está más cerca de la pendiente de la línea tangente. Una buena estimación de la pendiente de la tangente estaría en el rango de 2 a 2,5 (Figura 2.7).

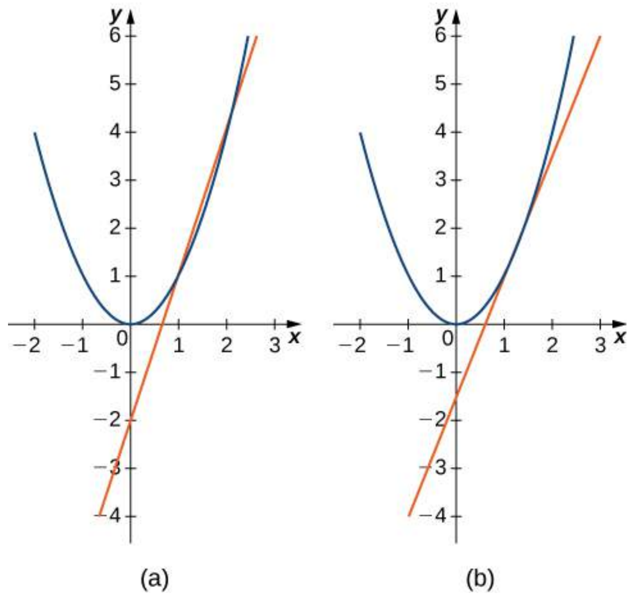


Figura 2.7 Las líneas secantes a $f(x) = x^2$ en $(1, 1)$ hasta (a) $(2, 4)$ y (b) $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ proporcionan aproximaciones sucesivas a la línea tangente a $f(x) = x^2$ en $(1, 1)$.

2.1 Estime la pendiente de la línea tangente (tasa de cambio) a $f(x) = x^2$ en $x = 1$ calculando las pendientes de las líneas secantes que pasan por $(1, 1)$ y el punto $\left(\frac{5}{4}, \frac{25}{16}\right)$ en el gráfico de $f(x) = x^2$.

Continuamos nuestra investigación explorando una pregunta relacionada. Teniendo en cuenta que la velocidad puede ser considerada como la tasa de cambio de posición, supongamos que tenemos una función $s(t)$, que da la posición de un objeto a lo largo de un eje de coordenadas en un tiempo dado *t*. ¿Podemos utilizar estas mismas ideas para crear una definición razonable de la velocidad instantánea en un momento dado $t = a$? Comenzamos aproximando la velocidad instantánea con una velocidad media. En primer lugar, recuerde que la velocidad de un objeto que se desplaza a una velocidad constante es el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo que ha recorrido. Definimos la **velocidad media** de un objeto durante un periodo como el cambio de su posición dividido entre la duración del periodo.

Definición

Supongamos que $s(t)$ es la posición de un objeto que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas en el tiempo *t*. La **velocidad media** del objeto en un intervalo de tiempo $[a, t]$ donde $a < t$ (o $[t, a]$ si $t < a$) es

$$v_{\text{ave}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}. \quad \textbf{(2.2)}$$

A medida que *t* se elige más cerca de *a*, la velocidad media se acerca más a la velocidad instantánea. Observe que calcular la velocidad media de una función de posición en un intervalo de tiempo es esencialmente lo mismo que calcular la pendiente de una línea secante a una función. Además, para calcular la pendiente de una línea tangente en un punto *a*, dejamos que los valores de *x* se acerquen a *a* en la pendiente de la línea secante. Del mismo modo, para calcular la velocidad instantánea en el tiempo *a*, dejamos que los valores de *t* se acerquen a *a* en la velocidad media. Este proceso de dejar que *x* o *t* se acerquen a *a* en una expresión se llama tomar un **límite**. Por lo tanto, podemos definir la **velocidad instantánea** de la siguiente manera.

Definición

Para una función de posición $s(t)$, la **velocidad instantánea** en un tiempo $t = a$ es el valor al que se acercan las velocidades promedio en intervalos de la forma $[a, t]$ y $[t, a]$ a medida que los valores de *t* se acercan a *a*, siempre que dicho valor exista.

El Ejemplo 2.2 ilustra este concepto de límites y velocidad media.

EJEMPLO 2.2

Cálculo de la velocidad media

Se deja caer una roca desde una altura de 64 pies. Se determina que su altura (en pies) sobre el suelo *t* segundos después (para $0 \leq t \leq 2$) está dada por $s(t) = -16t^2 + 64$. Calcule la velocidad media de la roca en cada uno de los intervalos de tiempo dados. Utilice esta información para adivinar la velocidad instantánea de la roca en el tiempo $t = 0{,}5$.

a. $[0{,}49, 0{,}5]$
b. $[0{,}5, 0{,}51]$

Solución

Sustituya los datos en la fórmula para la definición de la velocidad media.

a. $v_{\text{ave}} = \frac{s(0{,}5)-s(0{,}49)}{0{,}5-0{,}49} = -15{,}84$
b. $v_{\text{ave}} = \frac{s(0{,}51)-s(0{,}5)}{0{,}51-0{,}5} = -16{,}16$

La velocidad instantánea está entre -15,84 y -16,16 ft/s. Una buena estimación podría ser -16 ft/s.

2.2 Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas de manera que su posición en el tiempo *t* está dada por $s(t) = t^3$. Estime su velocidad instantánea en el tiempo $t = 2$ calculando su velocidad media en el intervalo de tiempo $[2, 2{,}001]$.

El problema del área y el cálculo integral

Ahora nos centramos en una pregunta clásica del cálculo. Muchas cantidades en física, por ejemplo, las cantidades de trabajo, pueden interpretarse como el área bajo una curva. Esto nos lleva a plantear la pregunta: ¿cómo podemos calcular el área entre el gráfico de una función y el eje *x* en un intervalo (Figura 2.8)?

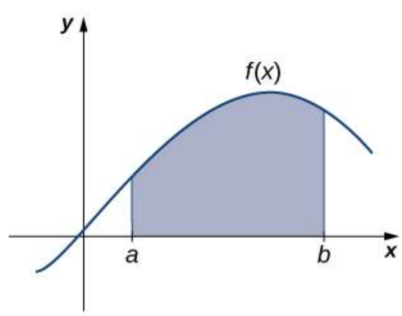


Figura 2.8 El problema del área: ¿cómo calculamos el área de la región sombreada?

Al igual que en la respuesta a nuestras preguntas anteriores sobre la velocidad, primero intentamos aproximar la solución. Aproximamos el área dividiendo el intervalo $[a, b]$ en intervalos más pequeños en forma de rectángulo. La aproximación del área proviene de la suma de las áreas de estos rectángulos (Figura 2.9).

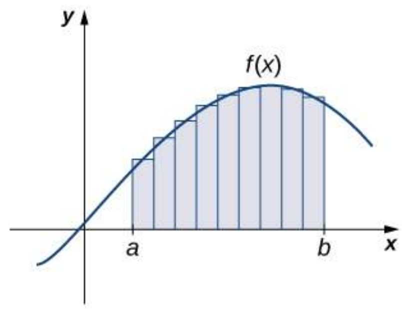


Figura 2.9 El área de la región bajo la curva se aproxima sumando las áreas de los rectángulos delgados.

A medida que los anchos de los rectángulos se hacen más pequeños (se acercan a cero), las sumas de las áreas de los rectángulos se acercan al área entre el gráfico de $f(x)$ y el eje *x* en el intervalo $[a, b]$. Una vez más, nos encontramos con un límite. Los límites de este tipo sirven de base para la definición de la integral definida. El **cálculo integral** es el estudio de las integrales y sus aplicaciones.

EJEMPLO 2.3

Estimación mediante rectángulos

Estime el área entre el eje *x* y el gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$ utilizando los tres rectángulos que se muestran en la Figura 2.10.

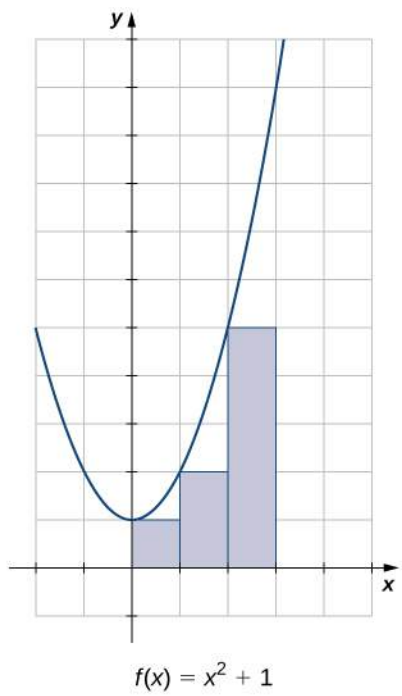
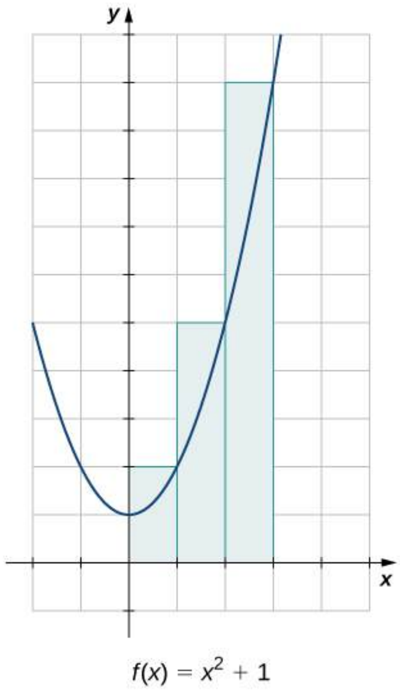


Figura 2.10 El área de la región bajo la curva de $f(x) = x^2 + 1$ se puede estimar mediante rectángulos.

Solución

Las áreas de los tres rectángulos son 1 unidad^2, 2 unidad^2 y 5 unidad^2. Utilizando estos rectángulos, nuestra estimación de área es de 8 unidades^2.

2.3 Estime el área entre el eje *x* y el gráfico de $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$ utilizando los tres rectángulos que se muestran aquí:



Otros aspectos del cálculo

Hasta ahora, hemos estudiado funciones de una sola variable. Estas funciones pueden representarse visualmente mediante gráficos en dos dimensiones; sin embargo, no hay ninguna razón de peso para restringir nuestra investigación a dos dimensiones. Supongamos, por ejemplo, que en vez de determinar la velocidad de un objeto que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas queremos determinar la velocidad de una roca disparada desde una catapulta en un momento dado, o de un avión que se mueve en tres dimensiones. Tal vez queramos graficar funciones de valor real de dos variables o determinar volúmenes de sólidos del tipo que se muestra en la Figura 2.11. Estos son solo algunos de los tipos de preguntas que pueden plantearse y responderse utilizando el **cálculo multivariable**. Informalmente, el cálculo multivariable puede caracterizarse como el estudio del cálculo de funciones de dos o más variables. Sin embargo, antes de explorar estas y otras ideas, primero debemos sentar las bases para el estudio del cálculo en una variable explorando el concepto de límite.

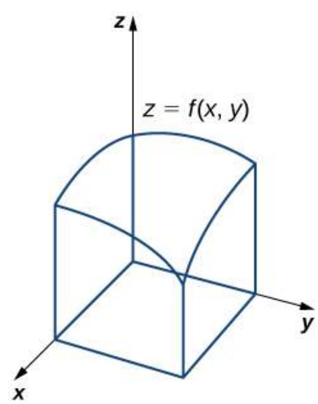


Figura 2.11 Podemos utilizar el cálculo multivariable para calcular el volumen entre una superficie definida por una función de dos variables y un plano.

SECCIÓN 2.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, los puntos $P(1,2)$ y $Q(x,y)$ están en el gráfico de la función $f(x)=x^2+1$.

1. **[T]** Complete la siguiente tabla con los valores adecuados: coordenada *y* de *Q*, el punto $Q(x,y)$, y la pendiente de la línea secante que pasa por los puntos *P* y *Q*. Redondee su respuesta a ocho dígitos significativos.

x	*y*	$Q(x,y)$	m_{sec}
1,1	a.	e.	i.
1,01	b.	f.	j.
1,001	c.	g.	k.
1,0001	d.	h.	l.

2. Utilice los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para estimar el valor de la pendiente de la línea tangente a *f* en $x=1$.

3. Utilice el valor del ejercicio anterior para hallar la ecuación de la línea tangente en el punto *P*. Grafique $f(x)$ y la línea tangente.

En los siguientes ejercicios, los puntos $P(1,1)$ y $Q(x,y)$ están en el gráfico de la función $f(x)=x^3$.

4. **[T]** Complete la siguiente tabla con los valores adecuados: coordenada *y* de *Q*, el punto $Q(x,y)$, y la pendiente de la línea secante que pasa por los puntos *P* y *Q*. Redondee su respuesta a ocho dígitos significativos.

x	*y*	$Q(x,y)$	m_{sec}
1,1	a.	e.	i.
1,01	b.	f.	j.
1,001	c.	g.	k.
1,0001	d.	h.	l.

5. Utilice los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para estimar el valor de la pendiente de la línea tangente a *f* en $x=1$.

6. Utilice el valor del ejercicio anterior para hallar la ecuación de la línea tangente en el punto *P*. Grafique $f(x)$ y la línea tangente.

En los siguientes ejercicios, los puntos $P(4, 2)$ *y* $Q(x, y)$ *están en el gráfico de la función* $f(x) = \sqrt{x}$.

7. **[T]** Complete la siguiente tabla con los valores adecuados: coordenada *y* de *Q*, el punto $Q(x, y)$, y la pendiente de la línea secante que pasa por los puntos *P* y *Q*. Redondee su respuesta a ocho dígitos significativos.

x	**y**	$Q(x, y)$	m_{sec}
4,1	a.	e.	i.
4,01	b.	f.	j.
4,001	c.	g.	k.
4,0001	d.	h.	l.

8. Utilice los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para estimar el valor de la pendiente de la línea tangente a *f* en $x = 4$.

9. Utilice el valor del ejercicio anterior para hallar la ecuación de la línea tangente en el punto *P*.

En los siguientes ejercicios, los puntos $P(1{,}5, 0)$ *y* $Q(\phi, y)$ *están en el gráfico de la función* $f(\phi) = \cos(\pi\phi)$.

10. **[T]** Complete la siguiente tabla con los valores adecuados: coordenada *y* de *Q*, el punto $Q(\varphi, y)$, y la pendiente de la línea secante que pasa por los puntos *P* y *Q*. Redondee su respuesta a ocho dígitos significativos.

x	**y**	$Q(\phi, y)$	m_{sec}
1,4	a.	e.	i.
1,49	b.	f.	j.
1,499	c.	g.	k.
1,4999	d.	h.	l.

11. Utilice los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para estimar el valor de la pendiente de la línea tangente a *f* en $\varphi = 1{,}5$.

12. Utilice el valor del ejercicio anterior para hallar la ecuación de la línea tangente en el punto *P*.

En los siguientes ejercicios, los puntos $P(-1,-1)$ y $Q(x, y)$ están en el gráfico de la función $f(x) = \frac{1}{x}$.

13. **[T]** Complete la siguiente tabla con los valores adecuados: coordenada *y* de *Q*, el punto $Q(x, y)$, y la pendiente de la línea secante que pasa por los puntos *P* y *Q*. Redondee su respuesta a ocho dígitos significativos.

x	*y*	$Q(x, y)$	m_{sec}
−1,05	a.	e.	i.
−1,01	b.	f.	j.
−1,005	c.	g.	k.
−1,001	d.	h.	l.

14. Utilice los valores de la columna derecha de la tabla del ejercicio anterior para estimar el valor de la pendiente de la línea tangente a *f* en $x = -1$.

15. Utilice el valor del ejercicio anterior para hallar la ecuación de la línea tangente en el punto *P*.

En los siguientes ejercicios, la función de posición de una bola lanzada desde lo alto de un edificio de 200 metros de altura está dada por $s(t) = 200 - 4{,}9t^2$, donde la posición s se mide en metros y el tiempo t se mide en segundos. Redondee su respuesta a ocho dígitos significativos.

16. **[T]** Calcule la velocidad media de la pelota en los intervalos de tiempo dados.

a. $[4{,}99, 5]$
b. $[5, 5{,}01]$
c. $[4{,}999, 5]$
d. $[5, 5{,}001]$

17. Utilice el ejercicio anterior para adivinar la velocidad instantánea de la pelota en $t = 5$ seg.

En los siguientes ejercicios, considere una piedra lanzada al aire desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 15 m/s. Su altura en metros en el tiempo t segundos es $h(t) = 15t - 4{,}9t^2$.

18. **[T]** Calcule la velocidad media de la piedra en los intervalos de tiempo dados.

a. $[1, 1{,}05]$
b. $[1, 1{,}01]$
c. $[1, 1{,}005]$
d. $[1, 1{,}001]$

19. Utilice el ejercicio anterior para adivinar la velocidad instantánea de la piedra en $t = 1$ seg.

En los siguientes ejercicios, considere un cohete lanzado al aire que luego regresa a la Tierra. La altura del cohete en metros está dada por $h(t) = 600 + 78{,}4t - 4{,}9t^2$*, donde t se mide en segundos.*

20. **[T]** Calcule la velocidad media del cohete en los intervalos de tiempo dados.

a. $[9, 9{,}01]$
b. $[8{,}99, 9]$
c. $[9, 9{,}001]$
d. $[8{,}999, 9]$

21. Utilice el ejercicio anterior para adivinar la velocidad instantánea del cohete en $t = 9$ seg.

En los siguientes ejercicios, considere que un atleta corre los 40 metros planos. La posición del atleta está dada por $d(t) = \frac{t^3}{6} + 4t$*, donde d es la posición en metros y t es el tiempo transcurrido, medido en segundos.*

22. **[T]** Calcule la velocidad media del corredor en los intervalos de tiempo dados.

a. $[1{,}95, 2{,}05]$
b. $[1{,}995, 2{,}005]$
c. $[1{,}9995, 2{,}0005]$
d. $[2, 2{,}00001]$

23. Utilice el ejercicio anterior para adivinar la velocidad instantánea del corredor en $t = 2$ seg.

En los siguientes ejercicios, considere la función $f(x) = |x|$.

24. Dibuje el gráfico de *f* en el intervalo $[-1, 2]$ y sombree la región por encima del eje *x*.

25. Utilice el ejercicio anterior para calcular el valor aproximado del área entre el eje *x* y el gráfico de *f* en el intervalo $[-1, 2]$ utilizando rectángulos. Para los rectángulos, utilice las unidades cuadradas y aproxime tanto por encima como por debajo de las líneas. Utilice la geometría para hallar la respuesta exacta.

En los siguientes ejercicios, considere la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. *(Pista: Se trata de la mitad superior de un círculo de radio 1 situado en* $(0, 0)$ *).*

26. Dibuje el gráfico de *f* en el intervalo $[-1, 1]$.

27. Utilice el ejercicio anterior para calcular el área aproximada entre el eje *x* y el gráfico de *f* en el intervalo $[-1, 1]$ utilizando rectángulos. Para los rectángulos, utilice cuadrados de 0,4 por 0,4 unidades y aproxime tanto por encima como por debajo de las líneas. Utilice la geometría para hallar la respuesta exacta.

En los siguientes ejercicios, considere la función $f(x) = -x^2 + 1$.

28. Dibuje el gráfico de *f* en el intervalo $[-1, 1]$.

29. Aproxime el área de la región entre el eje *x* y el gráfico de *f* en el intervalo $[-1, 1]$.

2.2 El límite de una función

Objetivos de aprendizaje

- **2.2.1** Describir el límite de una función utilizando la notación correcta.
- **2.2.2** Utilizar una tabla de valores para estimar el límite de una función o para identificar que el límite no existe.
- **2.2.3** Utilizar un gráfico para estimar el límite de una función o para identificar que el límite no existe.
- **2.2.4** Definir los límites unilaterales y proporcionar ejemplos.
- **2.2.5** Explicar la relación entre los límites unilaterales y bilaterales.
- **2.2.6** Describir un límite infinito utilizando la notación correcta.
- **2.2.7** Definir una asíntota vertical.

El concepto de límite o proceso de límite, esencial para la comprensión del cálculo, existe desde hace miles de años. De hecho, los primeros matemáticos utilizaron un proceso de límite para obtener aproximaciones cada vez mejores de las áreas de los círculos. Sin embargo, la definición formal de límite, tal como la conocemos y entendemos hoy, no apareció sino hasta finales del siglo XIX. Por lo tanto, comenzamos nuestra búsqueda para entender los límites, como hicieron nuestros antepasados matemáticos, utilizando un enfoque intuitivo. Al final de este capítulo, dotados de una comprensión conceptual de los límites, examinaremos la definición formal de un límite.

Comenzaremos nuestra exploración de los límites echando un vistazo a los gráficos de las funciones

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2},\ g(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2},\ \text{y}\ h(x) = \frac{1}{(x - 2)^2},$$

que se muestran en la Figura 2.12. En particular, vamos a centrarnos en el comportamiento de cada gráfico en y alrededor de $x = 2$.

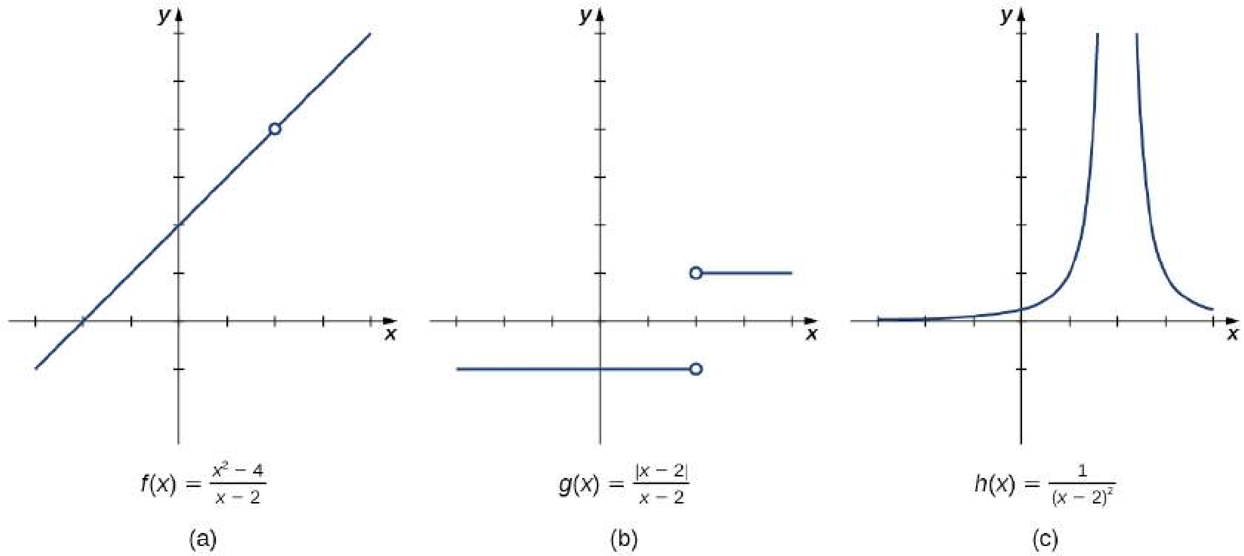


Figura 2.12 Estos gráficos muestran el comportamiento de tres funciones diferentes en torno a $x = 2$.

Cada una de las tres funciones está indefinida en $x = 2$, pero si hacemos solo esta afirmación, damos una imagen muy incompleta de cómo se comporta cada función en las proximidades de $x = 2$. Para expresar de forma más completa el comportamiento de cada gráfico en la vecindad de 2, necesitamos introducir el concepto de límite.

Definición intuitiva de un límite

Veamos primero cómo la función $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ se comporta alrededor de $x = 2$ en la Figura 2.12. A medida que los valores de *x* se acercan a 2 desde cualquier lado de 2, los valores de $y = f(x)$ se acercan a 4. Matemáticamente, decimos que el límite de $f(x)$ a medida que *x* se acerca a 2 es 4. Simbólicamente, expresamos este límite como

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

A partir de esta brevísima mirada informal a un límite, empecemos a desarrollar una **definición intuitiva del límite**. Podemos pensar que el límite de una función en un número *a* es el único número real *L* al que se acercan los valores de la función a medida que los valores de *x* se acercan a *a*, siempre que dicho número real *L* exista. Tenemos la siguiente definición que se expresa con más detalle:

Definición

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en todos los valores de un intervalo abierto que contiene *a*, con la posible excepción de la propia *a* y que *L* es un número real. Si *todos* los valores de la función $f(x)$ se acercan al número real *L* a medida que los valores de $x (\neq a)$ se acercan al número *a*, entonces decimos que el límite de $f(x)$ a medida que *x* se acerca a *a* es *L* (más conciso, a medida que *x* se acerca a *a*, $f(x)$ se acerca y se mantiene cerca de *L*). Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L. \tag{2.3}$$

Podemos estimar los límites construyendo tablas de valores funcionales y observando sus gráficos. Este proceso se describe en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Evaluación de un límite mediante una tabla de valores funcionales

1. Para evaluar $\lim_{x \to a} f(x)$, comenzamos completando una tabla de valores funcionales. Debemos elegir dos conjuntos de valores *x*: un conjunto de valores que se aproximan a *a* y son menores que *a*, y otro conjunto de valores que se aproximan a *a* y son mayores que *a*. La Tabla 2.1 demuestra cómo podrían ser sus tablas

x	$f(x)$	x	$f(x)$ grandes.
$a-0{,}1$	$f(a-0{,}1)$ grandes.	$a+0{,}1$	$f(a+0{,}1)$ grandes.
$a-0{,}01$	$f(a-0{,}01)$ grandes.	$a+0{,}01$	$f(a+0{,}01)$ grandes.
$a-0{,}001$	$f(a-0{,}001)$ grandes.	$a+0{,}001$	$f(a+0{,}001)$ grandes.
$a-0{,}0001$	$f(a-0{,}0001)$ grandes.	$a+0{,}0001$	$f(a+0{,}0001)$
Utilice los valores adicionales que sean necesarios.		Utilice los valores adicionales que sean necesarios.	

Tabla 2.1 Tabla de valores funcionales para $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

2. A continuación, veamos los valores de cada una de las columnas $f(x)$ y determinemos si los valores parecen acercarse a un único valor a medida que bajamos por cada columna. En las columnas, observamos la secuencia $f(a-0{,}1)$, $f(a-0{,}01)$, $f(a-0{,}001)$., $f(a-0{,}0001)$,, etc., y $f(a+0{,}1)$, $f(a+0{,}01)$, $f(a+0{,}001)$, $f(a+0{,}0001)$, y así sucesivamente. (*Nota*: Aunque elegimos los valores x $a \pm 0{,}1$, $a \pm 0{,}01$, $a \pm 0{,}001$, $a \pm 0{,}0001$, y así sucesivamente, y estos valores probablemente funcionarán casi siempre, en muy raras ocasiones necesitaremos modificar nuestras elecciones.
3. Si ambas columnas se acercan a un valor común de *yL*, afirmamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Podemos utilizar la siguiente estrategia para confirmar el resultado obtenido en la tabla o como método alternativo para estimar un límite.
4. Utilizando una calculadora gráfica o un programa de computadora que nos permita graficar funciones, podemos trazar la función $f(x)$, asegurándonos de que los valores funcionales de $f(x)$ para los valores *x* cerca de *a* estén en nuestra ventana. Podemos utilizar la función de rastreo para movernos a lo largo del gráfico de la función y observar la lectura del valor *y* a medida que los valores *x* se acercan a *a*. Si los valores *y* se acercan a *L* a medida que nuestros valores *x* se acercan a *a* desde ambas direcciones, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$. Es posible que tengamos que ampliar nuestro gráfico y repetir este proceso varias veces.

Aplicamos esta estrategia de resolución de problemas para calcular un límite en el Ejemplo 2.4.

EJEMPLO 2.4

Evaluación de un límite mediante una tabla de valores funcionales 1

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ utilizando una tabla de valores funcionales.

Solución

Hemos calculado los valores de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ para los valores de *x* que figuran en la Tabla 2.2.

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
−0,1	0,998334166468	0,1	0,998334166468
−0,01	0,999983333417	0,01	0,999983333417
−0,001	0,999999833333	0,001	0,999999833333

Tabla 2.2 Tabla de valores funcionales para $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$		x	$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$
−0,0001	0,999999998333		0,0001	0,999999998333

Tabla 2.2 **Tabla de valores funcionales para** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Nota: Los valores de esta tabla se obtuvieron con una calculadora y se utilizaron todos los lugares indicados en la salida de la calculadora.

Al leer cada $\frac{(\operatorname{sen} x)}{x}$, vemos que los valores de cada columna parecen acercarse a uno. Por lo tanto, es bastante razonable concluir que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Una calculadora o un gráfico generado por computadora de $f(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)}{x}$ sería similar a la mostrada en la Figura 2.13, y confirma nuestra estimación.

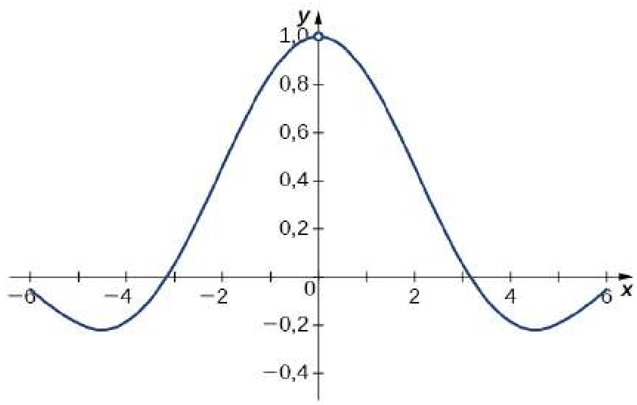


Figura 2.13 El gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ confirma la estimación de la Tabla 2.2.

EJEMPLO 2.5

Evaluación de un límite mediante una tabla de valores funcionales 2

Evalúe $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ utilizando una tabla de valores funcionales.

Solución

Como antes, utilizamos una tabla (en este caso, la Tabla 2.3) para enumerar los valores de la función para los valores dados de *x*.

x	$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$		x	$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
3,9	0,251582341869		4,1	0,248456731317
3,99	0,25015644562		4,01	0,24984394501
3,999	0,250015627		4,001	0,249984377
3,9999	0,250001563		4,0001	0,249998438
3,99999	0,25000016		4,00001	0,24999984

Tabla 2.3 **Tabla de valores funcionales para** $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

Después de revisar esta tabla, vemos que los valores funcionales inferiores a 4 parecen disminuir hacia 0,25 mientras que los valores funcionales superiores a 4 parecen aumentar hacia 0,25. Concluimos que $\lim\limits_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = 0{,}25.$

Confirmamos esta estimación utilizando el gráfico de $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ se muestra en la Figura 2.14.

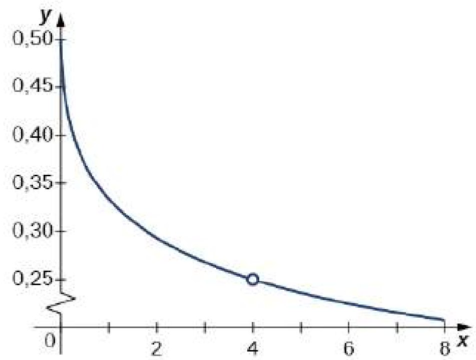


Figura 2.14 El gráfico de $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ confirma la estimación de la Tabla 2.3.

2.4 Estime $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$ utilizando una tabla de valores funcionales. Utilice un gráfico para confirmar su estimación.

En este punto, vemos en el Ejemplo 2.4 y el Ejemplo 2.5 que puede ser tan fácil, si no más, estimar un límite de una función revisando su gráfico como estimarlo utilizando una tabla de valores funcionales. En el Ejemplo 2.6, evaluamos un límite únicamente observando un gráfico en vez de utilizar una tabla de valores funcionales.

EJEMPLO 2.6

Evaluación de un límite mediante un gráfico

Para $g(x)$ que se muestra en la Figura 2.15, evalúe $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$.

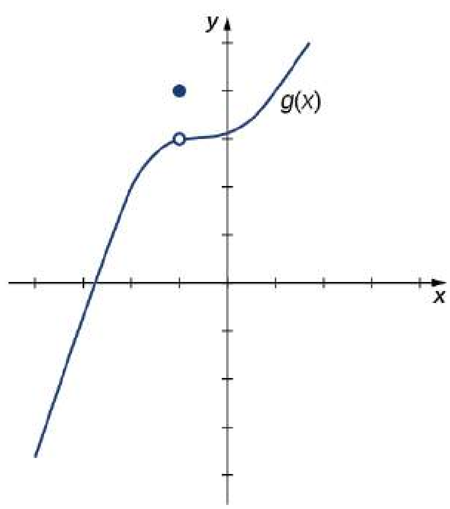


Figura 2.15 El gráfico de $g(x)$ incluye un valor que no está en una curva suave.

Solución

A pesar de que $g(-1) = 4$, a medida que los valores x se acercan a −1 desde cualquier lado, los valores $g(x)$ se acercan a 3. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 3$. Note que podemos determinar este límite sin conocer siquiera la expresión algebraica de la función.

Con base en el Ejemplo 2.6, hacemos la siguiente observación: Es posible que el límite de una función exista en un punto, y que la función esté definida en él, pero el límite de la función y el valor de la función en el punto pueden ser diferentes.

2.5 Utilice el gráfico de $h(x)$ en la Figura 2.16 para evaluar $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$, si es posible.

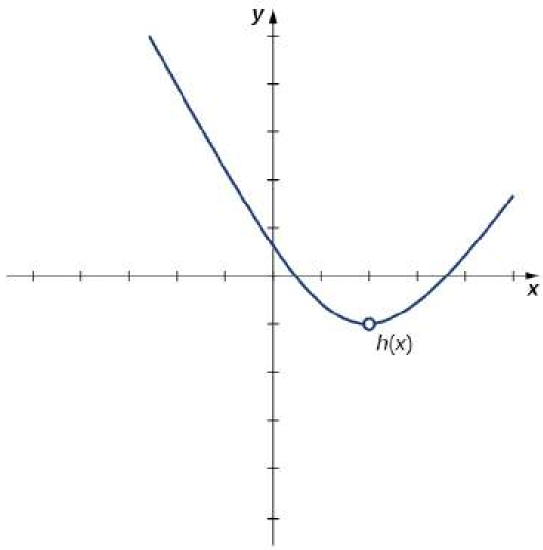


Figura 2.16

Observar una tabla de valores funcionales o el gráfico de una función nos proporciona una visión útil del valor del límite de una función en un punto determinado. Sin embargo, estas técnicas se basan demasiado en conjeturas. En algún momento tendremos que desarrollar métodos alternativos de evaluación de los límites. Estos nuevos métodos son de naturaleza más algebraica y los exploramos en la siguiente sección; sin embargo, en este punto introduciremos dos límites especiales que son esenciales para las técnicas que vienen.

Teorema 2.1

Dos límites importantes

Supongamos que *a* es un número real y *c* una constante.

i. $$\lim_{x \to a} x = a \tag{2.4}$$

ii. $$\lim_{x \to a} c = c \tag{2.5}$$

Podemos hacer las siguientes observaciones sobre estos dos límites.

i. En el primer límite, observe que a medida que *x* se acerca a *a*, también lo hace $f(x)$, porque $f(x) = x$. En consecuencia, $\lim\limits_{x \to a} x = a$.
ii. En el segundo límite, tome en cuenta la Tabla 2.4.

x	$f(x) = c$	**x**	$f(x) = c$
$a - 0{,}1$	*c*	$a + 0{,}1$	*c*
$a - 0{,}01$	*c*	$a + 0{,}01$	*c*

Tabla 2.4 Tabla de valores funcionales para $\lim\limits_{x \to a} c = c$

x	$f(x) = c$	x	$f(x) = c$
$a - 0{,}001$	c	$a + 0{,}001$	c
$a - 0{,}0001$	c	$a + 0{,}0001$	c

Tabla 2.4 Tabla de valores funcionales para $\lim\limits_{x \to a} c = c$

Observe que para todos los valores de *x* (independientemente de que se acerquen a *a*), los valores $f(x)$ permanecen constantes en *c*. No tenemos otra opción que concluir $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

Existencia de un límite

Cuando consideremos el límite en el siguiente ejemplo, tenga en cuenta que para que exista el límite de una función en un punto, los valores de la función deben acercarse a un único valor de número real en ese punto. Si los valores funcionales no se aproximan a un único valor, entonces el límite no existe.

EJEMPLO 2.7

Evaluación de un límite que no existe

Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}\,(1/x)$ utilizando una tabla de valores.

Solución

La Tabla 2.5 enumera los valores de la función $\text{sen}(1/x)$ para los valores dados de *x*.

x	$\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$	x	$\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$
−0,1	0,544021110889	0,1	−0,544021110889
−0,01	0,50636564111	0,01	−0,50636564111
−0,001	−0,8268795405312	0,001	0,826879540532
−0,0001	0,305614388888	0,0001	−0,305614388888
−0,00001	−0,035748797987	0,00001	0,035748797987
−0,000001	0,349993504187	0,000001	−0,349993504187

Tabla 2.5 Tabla de valores funcionales para $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Tras examinar la tabla de valores funcionales, podemos ver que los valores *y* no parecen acercarse a un único valor. Parece que el límite no existe. Antes de sacar esta conclusión, adoptemos un enfoque más sistemático. Tomemos la siguiente secuencia de valores de *x* que se acercan a 0:

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{9\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots.$$

Los valores *y* correspondientes son

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots.$$

Llegados a este punto, realmente podemos concluir que $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}\,(1/x)$ no existe (los matemáticos suelen abreviar "no existe" como DNE (does not exist). Así, escribiríamos $\lim\limits_{x \to 0} \text{sen}\,(1/x)$ DNE). El gráfico de $f(x) = \text{sen}\,(1/x)$ se muestra en la Figura 2.17 y ofrece una imagen más clara del comportamiento de $\text{sen}(1/x)$ a medida que *x* se acerca a 0. Puede notar que $\operatorname{sen}(1/x)$ oscila cada vez más entre -1 y 1 a medida que *x* se acerca a 0.

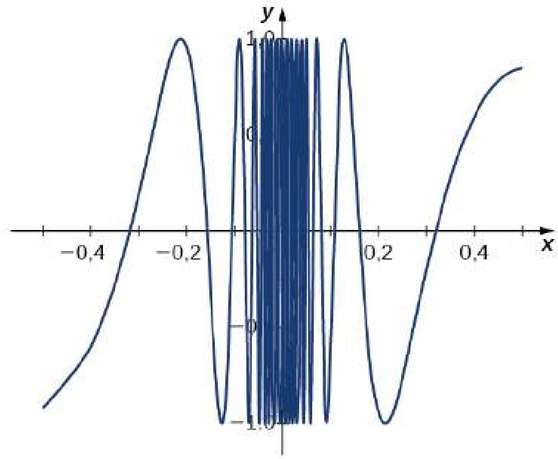


Figura 2.17 El gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ oscila rápidamente entre -1 y 1 a medida que *x* se acerca a 0.

2.6 Utilice una tabla de valores funcionales para evaluar $\lim\limits_{x \to 2} \frac{|x^2-4|}{x-2}$, si es posible.

Límites unilaterales

A veces, indicar que el límite de una función no existe en un punto no nos proporciona suficiente información sobre el comportamiento de la función en ese punto concreto. Para ver esto, volvamos a revisar la función $g(x) = |x-2|/(x-2)$ introducido al principio de la sección (vea la Figura 2.12(b)). Como elegimos valores de *x* cercanos a 2, $g(x)$ no se aproxima a un único valor, por lo que el límite a medida que *x* se aproxima a 2 no existe, es decir, $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ DNE. Sin embargo, esta afirmación por sí sola no nos da una imagen completa del comportamiento de la función en torno al valor *x* de 2. Para proporcionar una descripción más precisa, introducimos la idea de un **límite unilateral**. Para todos los valores a la izquierda de 2 (o *el lado negativo de* 2), $g(x) = -1$. Por lo tanto, a medida que *x* se acerca a 2 por la izquierda, $g(x)$ se acerca a -1. Matemáticamente, decimos que el límite es -1 a medida que *x* se acerca a 2 por la izquierda. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = -1.$$

Del mismo modo, a medida que *x* se acerca a 2 por la derecha (o *desde el lado positivo*), $g(x)$ se acerca a 1. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1.$$

Ahora podemos presentar una definición informal de los límites unilaterales.

Definición

Definamos dos tipos de **límites unilaterales**.

Límite por la izquierda: Supongamos que $f(x)$ es una función definida en todos los valores de un intervalo abierto de la forma (*c*, *a*), y que *L* es un número real. Si los valores de la función $f(x)$ se acercan al número real *L* a medida que los valores de *x* (donde $x < a$). se acercan al número *a*, entonces decimos que *L* es el límite de $f(x)$ a medida que *x* se acerca a *a* por la izquierda. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L. \tag{2.6}$$

Límite por la derecha: Supongamos que $f(x)$ sea una función definida en todos los valores de un intervalo abierto de la forma (a, c), y que *L* es un número real. Si los valores de la función $f(x)$ se acercan al número real L a medida que los valores de x (donde $x > a$). se acercan al número a, entonces decimos que L es el límite de $f(x)$ a medida que x se acerca a a por la derecha. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L. \tag{2.7}$$

EJEMPLO 2.8

Evaluación de los límites unilaterales

Para que la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, evalúe cada uno de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ grandes.
b. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

Solución

Podemos volver a utilizar las tablas de valores funcionales en la Tabla 2.6. Nótese que para los valores de x inferiores a 2, utilizamos $f(x) = x + 1$ y para valores de x superiores a 2, utilizamos $f(x) = x^2 - 4$.

x	$f(x) = x + 1$		x	$f(x) = x^2 - 4$
1,9	2,9		2,1	0,41
1,99	2,99		2,01	0,0401
1,999	2,999		2,001	0,004001
1,9999	2,9999		2,0001	0,00040001
1,99999	2,99999		2,00001	0,0000400001

Tabla 2.6 Tabla de valores funcionales para $f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ si } x < 2 \\ x^2 - 4 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$

Con base en esta tabla, podemos concluir que a. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ y b. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 0$. Por lo tanto, el límite (bilateral) de $f(x)$ no existe en $x = 2$. La Figura 2.18 muestra un gráfico de $f(x)$ y refuerza nuestra conclusión sobre estos límites.

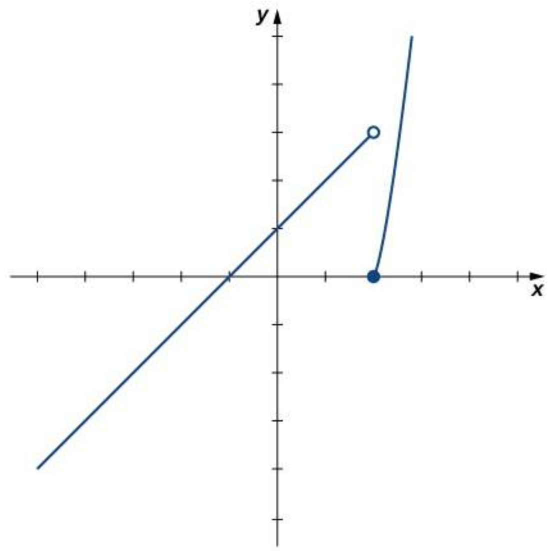


Figura 2.18 El gráfico de $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ si } x < 2 \\ x^2 - 4 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$ tiene una pausa en $x = 2$.

2.7 Utilice una tabla de valores funcionales para estimar los siguientes límites, si es posible.

a. $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2}$

b. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2}$

Consideremos ahora la relación entre el límite de una función en un punto y los límites por la derecha y por la izquierda en ese punto. Parece claro que si el límite por la derecha y el límite por la izquierda tienen un valor común, entonces ese valor común es el límite de la función en ese punto. Del mismo modo, si el límite por la izquierda y el límite por la derecha toman valores diferentes, el límite de la función no existe. Estas conclusiones se resumen en Relacionar los límites unilaterales y bilaterales.

Teorema 2.2

Relacionar los límites unilaterales y bilaterales

Supongamos que $f(x)$ es una función definida en todos los valores de un intervalo abierto que contiene *a*, con la posible excepción de la propia *a* y que *L* es un número real. Entonces,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L. \text{ si y solo si } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Límites infinitos

Evaluar el límite de una función en un punto o evaluar el límite de una función por la derecha y por la izquierda en un punto nos ayuda a caracterizar el comportamiento de una función alrededor de un valor dado. Como veremos, también podemos describir el comportamiento de las funciones que no tienen límites finitos.

Ahora nos centramos en $h(x) = 1/(x-2)^2$, la tercera y última función introducida al principio de esta sección (vea la Figura 2.12(c)). En su gráfico vemos que a medida que los valores de *x* se acercan a 2, los valores de $h(x) = 1/(x-2)^2$ se hacen cada vez más grandes y, de hecho, se vuelven infinitos. Matemáticamente, decimos que el límite de $h(x)$ a medida que *x* se acerca a 2 es el infinito positivo. Simbólicamente, expresamos esta idea como

$$\lim_{x \to 2} h(x) = +\infty.$$

De forma más general, definimos los **límites infinitos** como sigue:

Definición

Definamos tres tipos de **límites infinitos**.

Límites infinitos por la izquierda: Supongamos que $f(x)$ sea una función definida en todos los valores de un intervalo abierto de la forma (b, a).

i. Si los valores de $f(x)$ aumentan sin límite a medida que los valores de *x* (donde $x < a$). se acerca al número *a*, entonces decimos que el límite a medida que *x* se acerca a *a* por la izquierda es el infinito positivo y escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty. \tag{2.8}$$

ii. Si los valores de $f(x)$ disminuyen sin límite a medida que los valores de *x* (donde $x < a$). se acerca al número *a*, entonces decimos que el límite a medida que *x* se acerca a *a* por la izquierda es el infinito negativo y escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty. \tag{2.9}$$

Límites infinitos por la derecha: Supongamos que $f(x)$ sea una función definida en todos los valores de un intervalo abierto de la forma (a, c).

i. Si los valores de $f(x)$ aumentan sin límite a medida que los valores de *x* (donde $x > a$). se acerca al número *a*, entonces decimos que el límite a medida que *x* se acerca a *a* por la derecha es el infinito positivo y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty. \tag{2.10}$$

ii. Si los valores de $f(x)$ disminuyen sin límite a medida que los valores de *x* (donde $x > a$). se acerca al número *a*, entonces decimos que el límite a medida que *x* se acerca a *a* por la derecha es el infinito negativo y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty. \tag{2.11}$$

Límite infinito bilateral: Supongamos que $f(x)$ se define para todos los $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene *a*.

i. Si los valores de $f(x)$ aumentan sin límite a medida que los valores de *x* (donde $x \neq a$). se acerca al número *a*, entonces decimos que el límite a medida que *x* se acerca a *a* es el infinito positivo y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty. \tag{2.12}$$

ii. Si los valores de $f(x)$ disminuyen sin límite a medida que los valores de *x* (donde $x \neq a$). se acerca al número *a*, entonces decimos que el límite a medida que *x* se acerca a *a* es el infinito negativo y escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty. \tag{2.13}$$

Es importante entender que cuando escribimos afirmaciones como $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ estamos describiendo el comportamiento de la función, tal y como la acabamos de definir. No afirmamos que exista un límite. Para el límite de una función $f(x)$ exista en *a*, debe acercarse a un número real *L* a medida que *x* se acerca a *a*. Dicho esto, si, por ejemplo, $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, siempre escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ en vez de $\lim_{x \to a} f(x)$ (does not exist, DNE).

EJEMPLO 2.9

Reconocer un límite infinito

Evalúe cada uno de los siguientes límites, si es posible. Utilice una tabla de valores funcionales y un gráfico $f(x) = 1/x$ para confirmar su conclusión.

a. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$
b. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$
c. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Solución

Empiece por construir una tabla de valores funcionales.

x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
−0,1	−10	0,1	10
−0,01	−100	0,01	100
−0,001	−1.000	0,001	1.000
−0,0001	−10.000	0,0001	10.000
−0,00001	−100.000	0,00001	100.000
−0,000001	−1.000.000	0,000001	1.000.000

Tabla 2.7 Tabla de valores funcionales para $f(x) = \frac{1}{x}$

a. Los valores de $1/x$ disminuyen sin límite a medida que x se acerca a 0 por la izquierda. Concluimos que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

b. Los valores de $1/x$ aumentan sin límite a medida que x se acerca a 0 por la derecha. Concluimos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

c. Dado que $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ tienen valores diferentes, concluimos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \text{ No existe (DNE).}$$

El gráfico de $f(x) = 1/x$ en la Figura 2.19 confirma estas conclusiones.

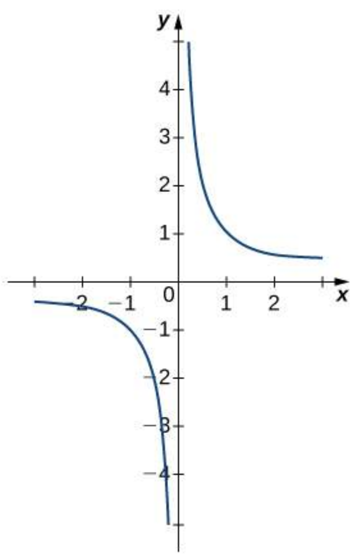


Figura 2.19 El gráfico de $f(x) = 1/x$ confirma que el límite a medida que x se acerca a 0 no existe.

2.8 Evalúe cada uno de los siguientes límites, si es posible. Utilice una tabla de valores funcionales y un gráfico $f(x) = 1/x^2$ para confirmar su conclusión.

a. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2}$
b. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2}$
c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

Es útil señalar que las funciones de la forma $f(x) = 1/(x-a)^n$, donde *n* es un número entero positivo, tienen límites infinitos a medida que *x* se acerca a *a* por la izquierda o la derecha (Figura 2.20). Estos límites se resumen en Límites infinitos a partir de números enteros positivos.

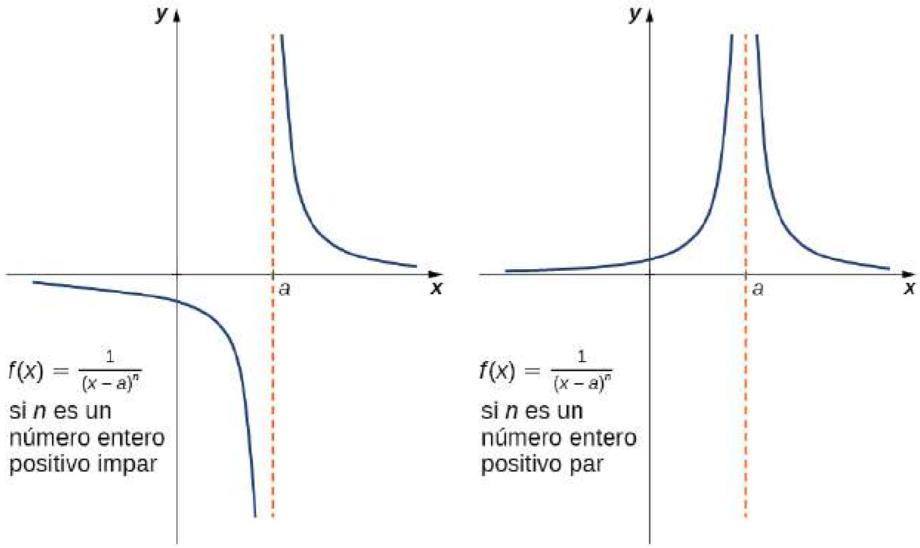


Figura 2.20 La función $f(x) = 1/(x-a)^n$ tiene límites infinitos en *a*.

Teorema 2.3

Límites infinitos a partir de números enteros positivos

Si *n* es un número entero positivo par, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty.$$

Si *n* es un número entero positivo impar, entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty.$$

También debemos señalar que en los gráficos de $f(x) = 1/(x-a)^n$, los puntos del gráfico que tienen coordenadas *x* muy cercanas a *a* están muy cerca de la línea vertical $x = a$. Es decir, a medida que *x* se acerca a *a*, los puntos del gráfico de $f(x)$ están más cerca de la línea $x = a$. La línea $x = a$ se denomina **asíntota vertical** del gráfico. Definimos formalmente una asíntota vertical como sigue:

Definición

Supongamos que $f(x)$ es una función. Si se cumple alguna de las siguientes condiciones, la línea $x = a$ es una **asíntota vertical** de $f(x)$.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$
o
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ o } -\infty$$

EJEMPLO 2.10

Hallar una asíntota vertical

Evalúe cada uno de los siguientes límites utilizando Límites infinitos a partir de números enteros positivos. Identifique las asíntotas verticales de la función $f(x) = 1/(x+3)^4$.

a. $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{1}{(x+3)^4}$
b. $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{1}{(x+3)^4}$
c. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^4}$

Solución

Podemos utilizar directamente Límites infinitos a partir de números enteros positivos.

a. $\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{1}{(x+3)^4} = +\infty$
b. $\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{1}{(x+3)^4} = +\infty$
c. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{1}{(x+3)^4} = +\infty$

La función $f(x) = 1/(x+3)^4$ tiene una asíntota vertical de $x = -3$.

2.9 Evalúe cada uno de los siguientes límites. Identifique las asíntotas verticales de la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$.

a. $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3}$
b. $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3}$
c. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^3}$

En el siguiente ejemplo ponemos en práctica nuestros conocimientos sobre los distintos tipos de límites para analizar el comportamiento de una función en diferentes puntos.

EJEMPLO 2.11

Comportamiento de una función en diferentes puntos

Utilice el gráfico de $f(x)$ en la Figura 2.21 para determinar cada uno de los siguientes valores:

a. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$; $f(-4)$ grandes.
b. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$; $f(-2)$ grandes.
c. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$; $f(1)$ grandes.
d. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; $f(3)$

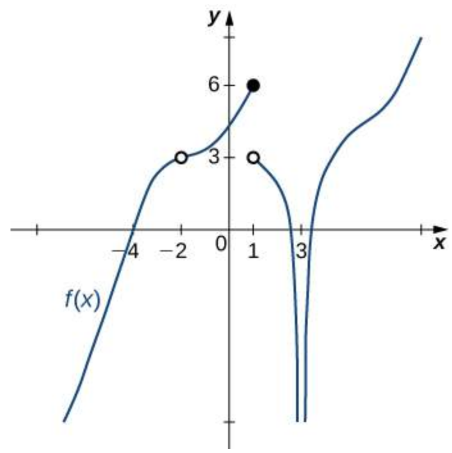


Figura 2.21 El gráfico muestra $f(x)$.

Solución

Utilizando Límites infinitos a partir de números enteros positivos y el gráfico como referencia, llegamos a los siguientes valores:

a. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to -4} f(x) = 0;\ f(-4) = 0$

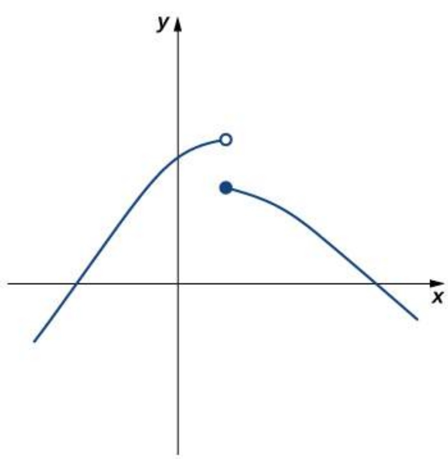
b. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3.;\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3;\ \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 3;\ f(-2)$ es indefinida

c. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 6;\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3;\ \lim\limits_{x \to 1} f(x)$ DNE; $f(1) = 6$

d. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty;\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty;\ f(3)$ es indefinida

---

2.10 Evalúe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ por $f(x)$ se muestra aquí:



EJEMPLO 2.12

Inicio del capítulo: La ecuación de Einstein

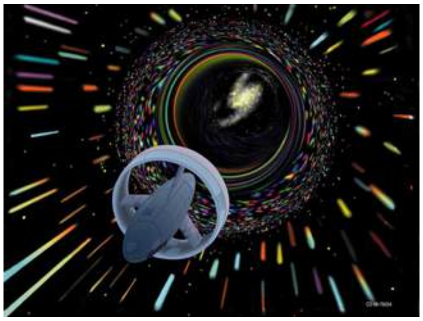


Figura 2.22 (créditos: NASA).

En la introducción del capítulo mencionamos brevemente cómo Albert Einstein demostró que existe un límite a la velocidad que puede viajar cualquier objeto. Dada la ecuación de Einstein para la masa de un objeto en movimiento, ¿cuál es el valor de este límite?

Solución

Nuestro punto de partida es la ecuación de Einstein para la masa de un objeto en movimiento,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde m_0 es la masa del objeto en reposo, v es su velocidad y c es la velocidad de la luz. Para ver cómo cambia la masa a altas velocidades, podemos graficar la relación de masas m/m_0 en función de la relación de las velocidades, v/c (Figura 2.23).

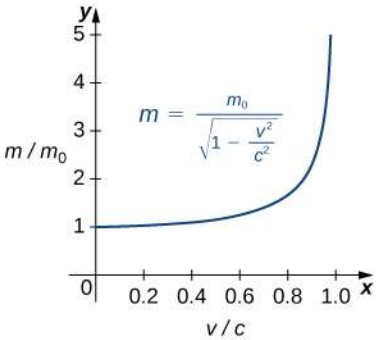


Figura 2.23 Este gráfico muestra la relación de masas en función de la relación de velocidades en la ecuación de Einstein para la masa de un objeto en movimiento.

Podemos ver que a medida que la relación de velocidades se acerca a 1 —es decir, a medida que la velocidad del objeto se acerca a la velocidad de la luz— la relación de masas aumenta sin límite. Es decir, la función tiene una asíntota vertical en $v/c = 1$. Podemos probar algunos valores de esta relación para comprobar esta idea.

$\frac{v}{c}$	$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$	$\frac{m}{m_0}$
0,99	0,1411	7,089
0,999	0,0447	22,37

Tabla 2.8 Relación de masas y velocidades para un objeto en movimiento

$\frac{v}{c}$	$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$	$\frac{m}{m_0}$
0,9999	0,0141	70,71

Tabla 2.8 Relación de masas y velocidades para un objeto en movimiento

Así, según la Tabla 2.8, si un objeto con masa 100 kg viaja a 0,9999*c*, su masa se convierte en 7071 kg. Como ningún objeto puede tener una masa infinita, concluimos que ningún objeto puede viajar a la velocidad de la luz o más.

SECCIÓN 2.2 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, considere la función $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$.

30. **[T]** Complete la siguiente tabla para la función. Redondee sus soluciones a cuatro decimales.

x	$f(x)$	**x**	$f(x)$
0,9	a.	1,1	e.
0,99	b.	1,01	f.
0,999	c.	1,001	g.
0,9999	d.	1,0001	h.

31. ¿Qué indican sus resultados en el ejercicio anterior sobre el límite bilateral $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Razone su respuesta.

En los siguientes ejercicios, considere la función $f(x)=(1+x)^{1/x}$.

32. **[T]** Haga una tabla con los valores de f para $x=-0{,}01, -0{,}001, -0{,}0001, -0{,}00001$ y para $x=0{,}01, 0{,}001, 0{,}0001, 0{,}00001$. Redondee sus soluciones a cinco decimales.

x	$f(x)$	**x**	$f(x)$
−0,01	a.	0,01	e.
−0,001	b.	0,001	f.
−0,0001	c.	0,0001	g.
−0,00001	d.	0,00001	h.

33. ¿Qué indica la tabla de valores del ejercicio anterior sobre la función $f(x)=(1+x)^{1/x}$?

34. ¿A qué constante matemática parece acercarse el límite del ejercicio anterior?

En los siguientes ejercicios, utilice los valores dados a fin de establecer una tabla para evaluar los límites. Redondee sus soluciones a ocho decimales.

35. **[T]** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$; $\pm 0{,}1, \pm 0{,}01, \pm 0{,}001, \pm 0{,}0001$

x	$\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$		x	$\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$
−0,1	a.		0,1	e.
−0,01	b.		0,01	f.
−0,001	c.		0,001	g.
−0,0001	d.		0,0001	h.

36. **[T]** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ ±0,1, ±0,01, ±0,001, ±0,0001

X	$\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$		x	$\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$
−0,1	a.		0,1	e.
−0,01	b.		0,01	f.
−0,001	c.		0,001	g.
−0,0001	d.		0,0001	h.

37. Utilice los dos ejercicios anteriores para conjeturar (suponer) el valor del siguiente límite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x}$ para *a*, un valor real positivo.

[T] *En los siguientes ejercicios, establezca una tabla de valores para hallar el límite indicado. Redondee a ocho dígitos.*

38. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2+x-6}$

x	$\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$		x	$\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$
1,9	a.		2,1	e.
1,99	b.		2,01	f.
1,999	c.		2,001	g.
1,9999	d.		2,0001	h.

39. $\lim\limits_{x \to 1} (1-2x)$

x	$1-2x$		x	$1-2x$
0,9	a.		1,1	e.
0,99	b.		1,01	f.
0,999	c.		1,001	g.
0,9999	d.		1,0001	h.

40. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{1-e^{1/x}}$

x	$\frac{5}{1-e^{1/x}}$	x	$\frac{5}{1-e^{1/x}}$
−0,1	a.	0,1	e.
−0,01	b.	0,01	f.
−0,001	c.	0,001	g.
−0,0001	d.	0,0001	h.

41. $\lim\limits_{z \to 0} \frac{z-1}{z^2(z+3)}$

z	$\frac{z-1}{z^2(z+3)}$	z	$\frac{z-1}{z^2(z+3)}$
−0,1	a.	0,1	e.
−0,01	b.	0,01	f.
−0,001	c.	0,001	g.
−0,0001	d.	0,0001	h.

42. $\lim\limits_{t \to 0^+} \frac{\cos t}{t}$

t	$\frac{\cos t}{t}$
0,1	a.
0,01	b.
0,001	c.
0,0001	d.

43. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4}$

x	$\frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4}$	x	$\frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4}$
1,9	a.	2,1	e.
1,99	b.	2,01	f.
1,999	c.	2,001	g.
1,9999	d.	2,0001	h.

[T] *En los siguientes ejercicios, establezca una tabla de valores y redondee a ocho dígitos significativos. Con base en la tabla de valores, haga una conjetura sobre cuál es el límite. A continuación, utilice una calculadora para representar gráficamente la función y determinar el límite. ¿Su conjetura fue correcta? Si no, ¿por qué falla el método de las tablas?*

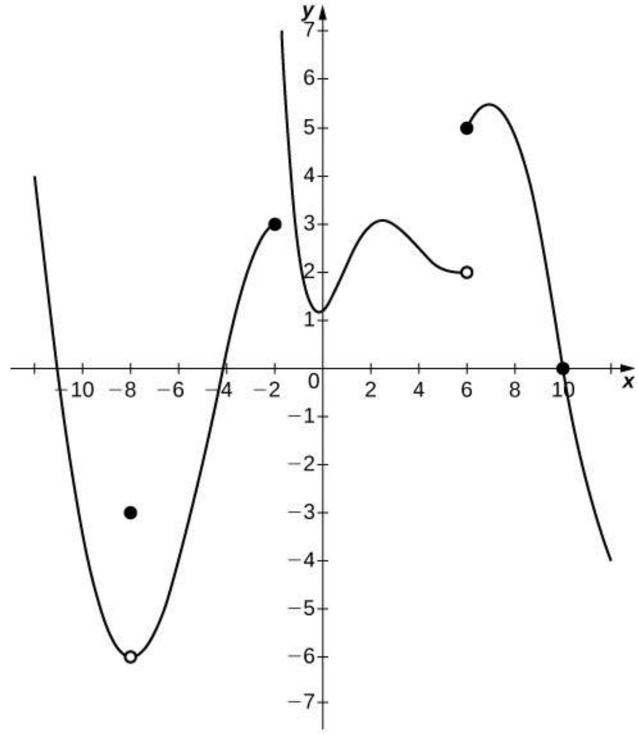
44. $\lim\limits_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$

θ	$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$	θ	$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\theta}\right)$
−0,1	a.	0,1	e.
−0,01	b.	0,01	f.
−0,001	c.	0,001	g.
−0,0001	d.	0,0001	h.

45. $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$

a	$\frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$
0,1	a.
0,01	b.
0,001	c.
0,0001	d.

En los siguientes ejercicios, considere el gráfico de la función $y = f(x)$ que se muestra aquí. ¿Cuáles afirmaciones sobre $y = f(x)$ son verdaderas y cuáles son falsas? Explique por qué una afirmación es falsa.



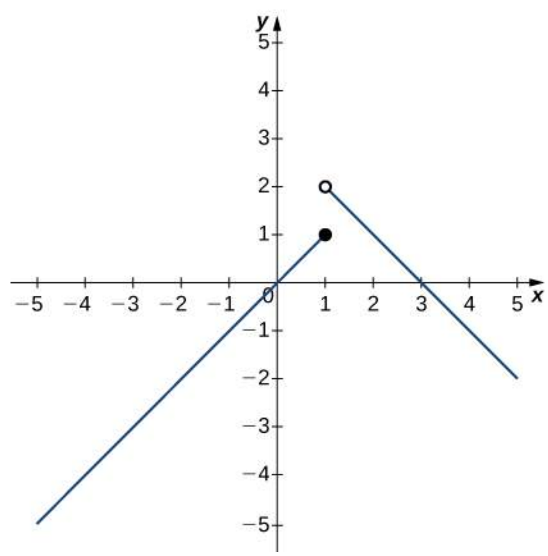
46. $\lim\limits_{x \to 10} f(x) = 0$

47. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 3$

48. $\lim\limits_{x \to -8} f(x) = f(-8)$
grandes.

49. $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 5$

En los siguientes ejercicios, utiliza el siguiente gráfico de la función $y = f(x)$ para hallar los valores, si es posible. Estime cuando sea necesario.



50. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ grandes.

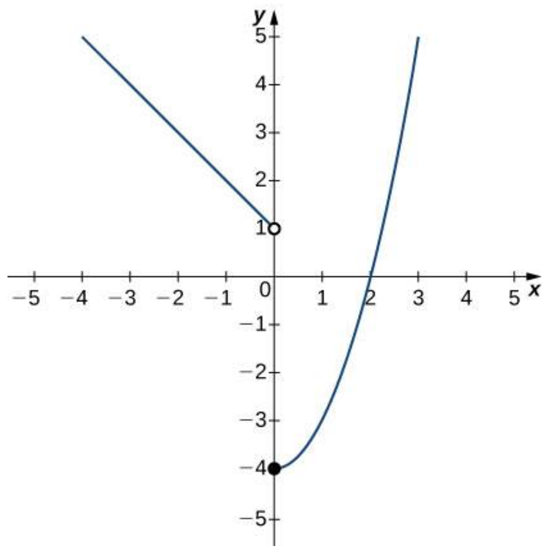
51. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

52. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ grandes.

53. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

54. $f(1)$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de la función $y = f(x)$ que se muestra aquí para hallar los valores de ser posible. Estime cuando sea necesario.



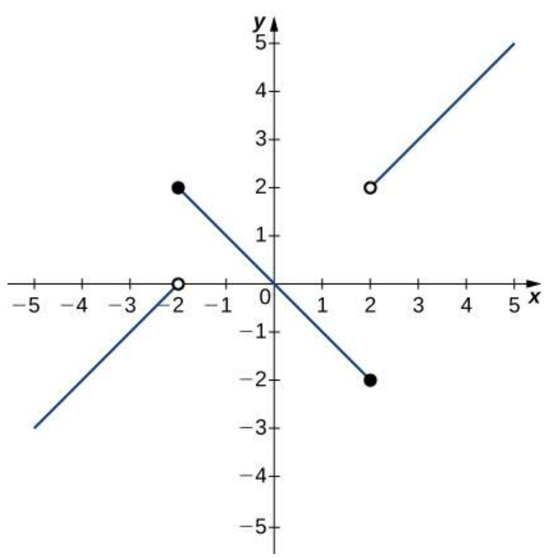
55. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

56. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ grandes.

57. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

58. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de la función $y = f(x)$ que se muestra aquí para hallar los valores de ser posible. Estime cuando sea necesario.



59. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

60. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ grandes.

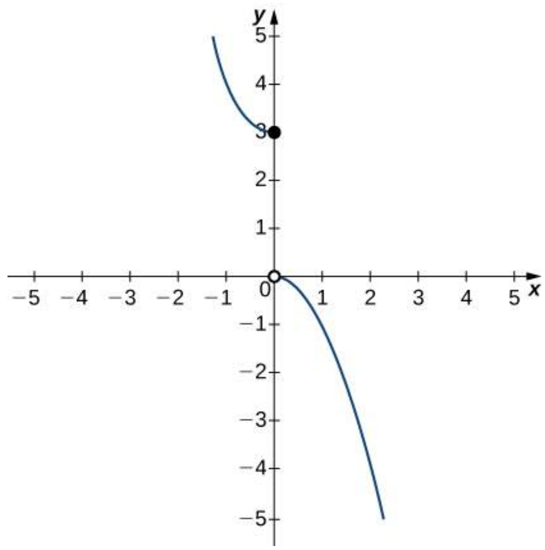
61. $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

62. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ grandes.

63. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

64. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de la función $y = g(x)$ que se muestra aquí para hallar los valores de ser posible. Estime cuando sea necesario.

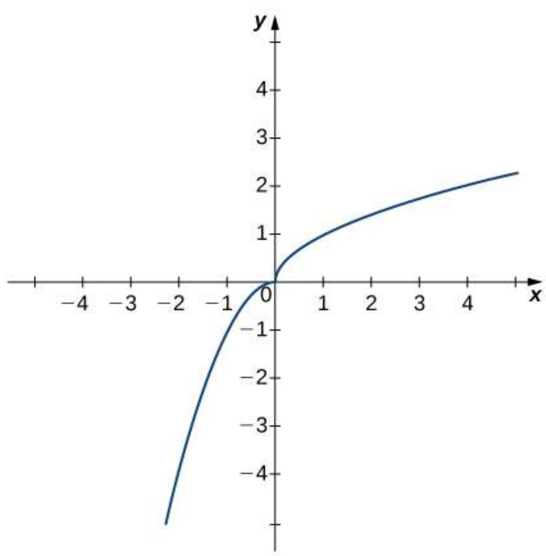


65. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$

66. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ grandes.

67. $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de la función $y = h(x)$ que se muestra aquí para hallar los valores de ser posible. Estime cuando sea necesario.

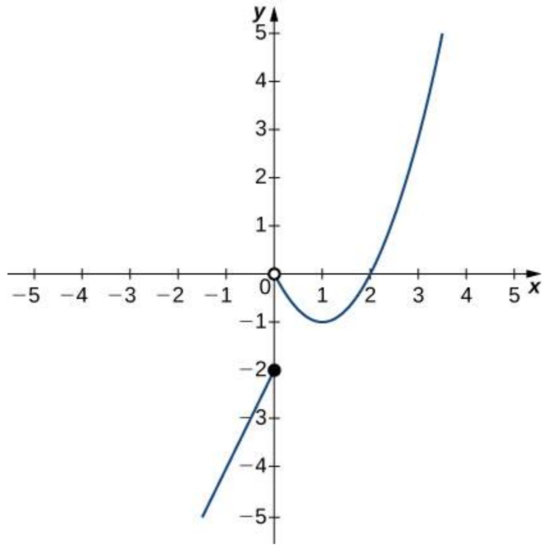


68. $\lim\limits_{x \to 0^-} h(x)$ grandes.

69. $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x)$

70. $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de la función $y = f(x)$ que se muestra aquí para hallar los valores de ser posible. Estime cuando sea necesario.



71. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

72. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ grandes.

73. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

74. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ grandes.

75. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

En los siguientes ejercicios, dibuje el gráfico de una función con las propiedades dadas.

76. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 3,\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 6, f(4)$ no está definido.

77. $As\ x \to -\infty\ ,\ f(x) \to 0,\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty,$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0), f(0) = 1,\ As\ x \to \infty,\ f(x) \to -\infty$

78. $As\ x \to -\infty,\ f(x) \to 2,\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,$

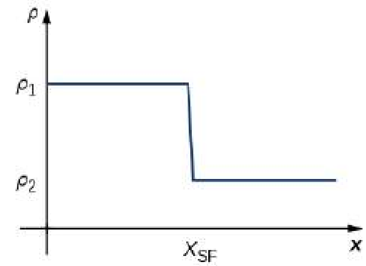
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \infty,\ As\ x \to \infty,\ f(x) \to 2, f(0) = \frac{-1}{3}$

79. $As\ x \to -\infty,\ f(x) \to 2,\ \lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty,$

$As\ x \to \infty,\ f(x) \to 2, f(0) = 0$

80. $As\ x \to -\infty,\ f(x) \to 0,\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty,$
$f(0) = -1,\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \infty,\ As\ x \to \infty,\ f(x) \to 0$

81. Las ondas expansivas aparecen en muchas aplicaciones físicas, desde las supernovas hasta las ondas generadas por una detonación. Se muestra un gráfico de la densidad de una onda expansiva con respecto a la distancia, *x*. Nos interesa principalmente la ubicación de la parte delantera del amortiguador, marcada x_{SF} en el diagrama.



a. Evalúe $\lim\limits_{x \to x_{SF}^+} \rho(x)$.
b. Evalúe $\lim\limits_{x \to x_{SF}^-} \rho(x)$.
c. Evalúe $\lim\limits_{x \to x_{SF}} \rho(x)$.
Explique el significado físico de sus respuestas.

82. Un entrenador de pista utiliza una cámara con un obturador rápido para estimar la posición de un corredor con respecto al tiempo. Aquí se ofrece una tabla de los valores de posición del atleta en función del tiempo, donde *x* es la posición en metros del corredor y *t* es el tiempo en segundos. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{t \to 2} x(t)$? ¿Qué significa en términos físicos?

t (s)	*x* (m)
1,75	4,5
1,95	6,1
1,99	6,42
2,01	6,58
2,05	6,9
2,25	8,5

2.3 Las leyes de los límites

Objetivos de aprendizaje

2.3.1 Reconocer las leyes básicas de los límites.
2.3.2 Utilizar las leyes de los límites para evaluar el límite de una función.
2.3.3 Evaluar el límite de una función mediante la factorización.
2.3.4 Utilizar las leyes de los límites para evaluar el límite de un polinomio o una función racional.
2.3.5 Evaluar el límite de una función mediante la factorización o el uso de conjugados.
2.3.6 Evaluar el límite de una función utilizando el teorema del emparedado.

En la sección anterior evaluamos los límites al observar los gráficos o construir una tabla de valores. En esta sección, estableceremos y aprendemos a aplicar las leyes para calcular los límites. En el proyecto estudiantil que se halla al final de esta sección tiene la oportunidad de aplicar estas leyes de los límites para derivar la fórmula del área de un círculo adaptando un método ideado por el matemático griego Arquímedes. Comenzaremos por reafirmar dos resultados útiles de los límites de la sección anterior. Estos dos resultados, junto con las leyes de los límites, sirven de base para calcular muchos límites.

Evaluación de los límites con las leyes de los límites

Las dos primeras leyes de los límites se expusieron en Dos límites importantes y las repetimos aquí. Estos resultados básicos, junto con las demás leyes de los límites, nos permiten evaluar los límites de muchas funciones algebraicas.

Teorema 2.4

Resultados del límite básico

Para cualquier número real *a* y cualquier constante *c*,

i. $$\lim_{x \to a} x = a \tag{2.14}$$

ii. $$\lim_{x \to a} c = c \tag{2.15}$$

EJEMPLO 2.13

Evaluación de un límite básico

Evalúe cada uno de los siguientes límites utilizando Resultados del límite básico.

a. $\lim\limits_{x \to 2} x$
b. $\lim\limits_{x \to 2} 5$

Solución

a. El límite de *x* a medida que *x* se acerca a *a* es *a*: $\lim\limits_{x \to 2} x = 2.$
b. El límite de una constante es esa constante: $\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5.$

Ahora veremos las **leyes de los límites**, que son las propiedades individuales de los límites. Aquí se omiten las pruebas de que estas leyes son válidas.

Teorema 2.5

Leyes de los límites

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ se define para todos los $x \neq a$ en algún intervalo abierto que contenga *a*. Supongamos que *L* y *M* son números reales tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Sea *c* una constante. Entonces, cada una de las siguientes afirmaciones es válida:

Ley de suma para los límites: $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$

Ley de la diferencia para los límites: $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = L - M$

Ley del múltiplo constante para los límites $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c.\lim\limits_{x \to a} f(x) = cL$

Ley de productos para los límites $\lim\limits_{x \to a} (f(x) . g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} g(x) = L. M$

Ley del cociente para los límites $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ por $M \neq 0$

Ley de la potencia para los límites $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n = L^n$ para cada número entero positivo *n*.

Ley de la raíz para los límites $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ para todo *L* si *n* es impar y para $L \geq 0$ si *n* es par y $f(x) \geq 0$.

Ahora practicaremos la aplicación de estas leyes de los límites para evaluar un límite.

EJEMPLO 2.14

Evaluación de un límite mediante las leyes de los límites

Utilice las leyes de los límites para evaluar $\lim\limits_{x \to -3} (4x + 2)$.

Solución

Apliquemos las leyes de los límites paso a paso para asegurarnos de que entendemos su funcionamiento. Debemos tener en cuenta el requisito de que, en cada aplicación de una ley límite, deben existir nuevos límites para que esa ley se aplique.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -3} (4x + 2) &= \lim_{x \to -3} 4x + \lim_{x \to -3} 2 && \text{Aplique la ley de la suma.}\\
&= 4 . \lim_{x \to -3} x + \lim_{x \to -3} 2 && \text{Aplique la ley del múltiplo constante.}\\
&= 4 . (-3) + 2 = -10. && \text{Aplique los resultados del límite básico y simplifique.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.15

Utilizar repetidamente las leyes de los límites

Utilice las leyes de los límites para evaluar $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 4}$.

Solución

Para hallar este límite, tenemos que aplicar las leyes de los límites varias veces. Una vez más, debemos tener en cuenta que al reescribir el límite en términos de otros límites, cada nuevo límite debe existir para que se aplique la ley de los límites.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x+1}{x^3+4} &= \frac{\lim\limits_{x \to 2}\left(2x^2-3x+1\right)}{\lim\limits_{x \to 2}\left(x^3+4\right)} && \text{Aplique la ley del cociente, asegurándose de que } (2)^3 + 4 \neq 0\\
&= \frac{2 . \lim\limits_{x \to 2} x^2 - 3 . \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} x^3 + \lim\limits_{x \to 2} 4} && \text{Aplique la ley de la suma y la ley del múltiplo constante.}\\
&= \frac{2 . \left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^2 - 3 . \lim\limits_{x \to 2} x + \lim\limits_{x \to 2} 1}{\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^3 + \lim\limits_{x \to 2} 4} && \text{Aplique la ley de la potencia.}\\
&= \frac{2(4)-3(2)+1}{(2)^3+4} = \frac{1}{4}. && \text{Aplique las leyes básicas de los límites y simplifique.}
\end{aligned}$$

2.11 Utilice las leyes de los límites para evaluar $\lim\limits_{x \to 6} (2x - 1)\sqrt{x + 4}$. En cada paso, indique la ley de los límites aplicada.

Límites de funciones polinómicas y racionales

A estas alturas ya se habrá dado cuenta de que en cada uno de los ejemplos anteriores, se dio este caso: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Esto no siempre es así, pero lo es para todos los polinomios en cualquier elección de *a* y para todas las funciones racionales en todos los valores de *a* para los que está definida la función racional.

Teorema 2.6

Límites de funciones polinómicas y racionales

Supongamos que $p(x)$ como $q(x)$ son funciones polinómicas. Supongamos que a es un número real. Entonces,

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a)\text{grandes.}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} \text{ cuando } q(a) \neq 0.$$

Para ver que este teorema se cumple, consideremos el polinomio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$. Aplicando las leyes de la suma, del múltiplo constante y de la potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} p(x) &= \lim_{x\to a} \left(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right) \\ &= c_n \left(\lim_{x\to a} x\right)^n + c_{n-1} \left(\lim_{x\to a} x\right)^{n-1} + \cdots + c_1 \left(\lim_{x\to a} x\right) + \lim_{x\to a} c_0 \\ &= c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 \\ &= p(a). \end{aligned}$$

Ahora se deduce de la ley del cociente que si $p(x)$ como $q(x)$ son polinomios para los que $q(a) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

El Ejemplo 2.16 aplica este resultado.

EJEMPLO 2.16

Evaluación de un límite de una función racional

Evalúe los términos $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2-3x+1}{5x+4}$.

Solución

Como 3 está en el dominio de la función racional $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{5x+4}$, podemos calcular el límite sustituyendo 3 por la x en la función. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 3x + 1}{5x + 4} = \frac{10}{19}.$$

2.12 Evalúe $\lim_{x\to -2} \left(3x^3 - 2x + 7\right)$.

Técnicas adicionales de evaluación de límites

Como vimos, podemos evaluar fácilmente los límites de los polinomios y los límites de algunas funciones racionales (pero no todas) por sustitución directa. Sin embargo, como vimos en la sección introductoria sobre los límites, es en efecto posible que $\lim_{x\to a} f(x)$ exista cuando $f(a)$ es indefinida. La siguiente observación nos permite evaluar muchos límites de este tipo:

Si para toda $x \neq a$, $f(x) = g(x)$ en algún intervalo abierto que contenga *a*, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Para entender mejor esta idea, considere el límite $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$.

La función

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \end{aligned}$$

y la función $g(x) = x + 1$ son idénticas para todos los valores de $x \neq 1$. Los gráficos de estas dos funciones se muestran en la Figura 2.24.

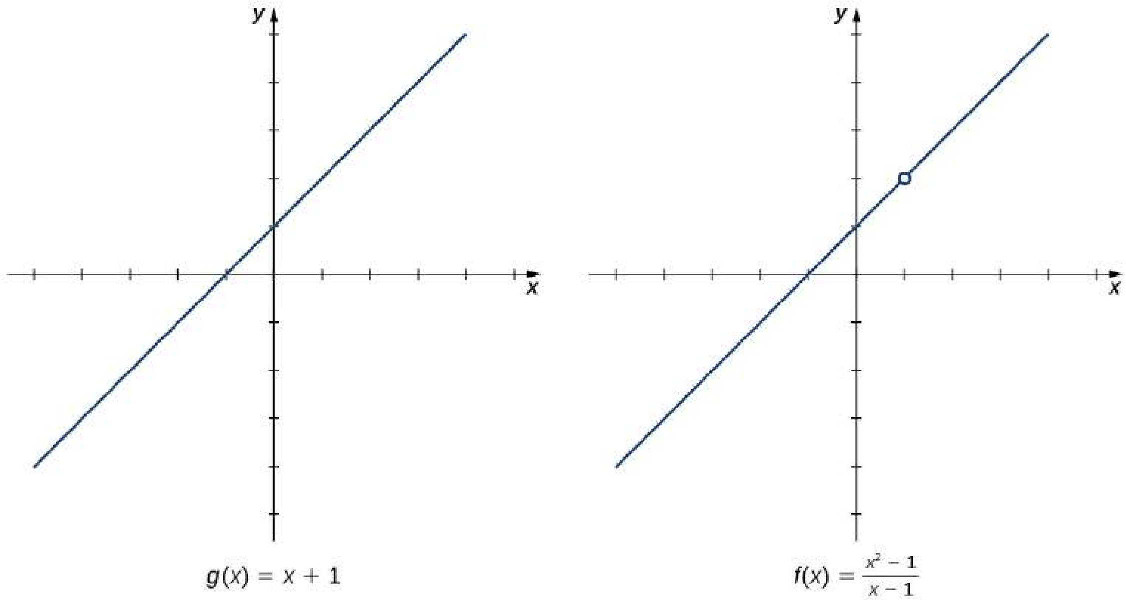


Figura 2.24 Los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$ son idénticos para todas las $x \neq 1$. Sus límites en 1 son iguales.

Vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

El límite tiene la forma $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. (En este caso, decimos que $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada $0/0$). La siguiente estrategia de resolución de problemas ofrece un esquema general para evaluar este tipo de límites.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Calcular un límite cuando $f(x)/g(x)$ tiene la forma indeterminada 0/0

1. En primer lugar, nos aseguraremos de que nuestra función tiene la forma adecuada y no puede ser evaluada inmediatamente utilizando las leyes de los límites.
2. Entonces tenemos que hallar una función que sea igual a $h(x) = f(x)/g(x)$ para todo $x \neq a$ en algún intervalo que contenga *a*. Para ello, es posible que tengamos que probar uno o varios de los siguientes pasos
   a. Si los valores de $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios, debemos factorizar cada función y cancelar los factores comunes.
   b. Si el numerador o el denominador tienen una diferencia que implica una raíz cuadrada, debemos intentar multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de la expresión que incluye a la raíz cuadrada.
   c. Si los valores de $f(x)/g(x)$ es una fracción compleja, empezamos por simplificarla.
3. Por último, aplicamos las leyes de los límites.

Los siguientes ejemplos demuestran el uso de esta estrategia de resolución de problemas. El Ejemplo 2.17 ilustra la técnica de factor y cancelación; el Ejemplo 2.18 muestra la multiplicación por un conjugado. En el Ejemplo 2.19, vemos la simplificación de una fracción compleja.

EJEMPLO 2.17

Evaluación de un límite mediante factorización y cancelación

Evalúe $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3}$.

Solución

Paso 1. La función $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3}$ es indefinida para $x = 3$. De hecho, si sustituimos 3 en la función obtenemos $0/0$, que es indefinida. Factorizar y cancelar es una buena estrategia:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(2x+1)}$$

Paso 2. Para todos $x \neq 3$, $\frac{x^2 - 3x}{2x^2 - 5x - 3} = \frac{x}{2x+1}$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)(2x+1)} = \lim_{x \to 3} \frac{x}{2x+1}.$$

Paso 3. Evalúe utilizando las leyes de los límites:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{2x+1} = \frac{3}{7}.$$

☑ 2.13 Evalúe $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 9}$.

EJEMPLO 2.18

Evaluar un límite multiplicando por un conjugado

Evalúe $\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1}$.

Solución

Paso 1. $\frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1}$ tiene la forma $0/0$ en -1. Empecemos por multiplicar por $\sqrt{x+2} + 1$, el conjugado de $\sqrt{x+2} - 1$, en el numerador y el denominador:

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 1}{\sqrt{x+2} + 1}.$$

Paso 2. A continuación, multiplicamos el numerador. No multiplicamos el denominador porque esperamos que $(x+1)$ en el denominador se anule al final:

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt{x+2} + 1\right)}.$$

Paso 3. Entonces lo cancelamos:

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 1}.$$

Paso 4. Por último, aplicamos las leyes de los límites:

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 1} = \frac{1}{2}.$$

☑ 2.14 Evalúe $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$.

EJEMPLO 2.19

Evaluación de un límite mediante la simplificación de una fracción compleja

Evalúe $\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1}$.

Solución

Paso 1. $\frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1}$ tiene la forma $0/0$ en 1. Simplificamos la fracción algebraica multiplicando por $2(x+1)/2(x+1)$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}}{x-1} \cdot \frac{2(x+1)}{2(x+1)}.$$

Paso 2. A continuación, multiplicamos por los numeradores. No multiplique los denominadores porque necesitamos cancelar el factor $(x-1)$:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2-(x+1)}{2(x-1)(x+1)}.$$

Paso 3. A continuación, simplificamos el numerador:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-x+1}{2(x-1)(x+1)}.$$

Paso 4. Ahora factorizamos -1 en el numerador:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{2(x-1)(x+1)}.$$

Paso 5. Entonces, cancelamos los factores comunes de $(x-1)$:

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{2(x+1)}.$$

Paso 6. Por último, evaluamos mediante las leyes de los límites:

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{2(x+1)} = -\frac{1}{4}.$$

2.15 Evalúe $\lim_{x \to -3} \frac{\frac{1}{x+2} + 1}{x+3}$.

El Ejemplo 2.20 no se ajusta perfectamente a ninguno de los patrones establecidos en los ejemplos anteriores. Sin embargo, con un poco de creatividad, podemos seguir utilizando estas mismas técnicas.

EJEMPLO 2.20

Evaluación de un límite cuando no se aplican las leyes de los límites

Evalúe $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{5}{x(x-5)} \right)$.

Solución

Tanto $1/x$ y $5/x(x-5)$ no tienen un límite en cero. Como ninguna de las dos funciones tiene un límite en cero, no podemos aplicar la ley de suma para los límites y debemos utilizar una estrategia diferente. En este caso, encontramos el límite realizando la suma y luego aplicando una de nuestras estrategias anteriores. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{5}{x(x-5)} &= \frac{x-5+5}{x(x-5)} \\ &= \frac{x}{x(x-5)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x(x-5)}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x-5)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x-5}\\ &= -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

2.16 Evalúe $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-2x-3}\right)$.

Volvamos ahora a los límites unilaterales. Unas sencillas modificaciones en las leyes de los límites nos permiten aplicarlas a los límites unilaterales. Por ejemplo, para aplicar las leyes de los límites a un límite de la forma $\lim_{x\to a^-} h(x)$, necesitamos la función $h(x)$ para ser definida sobre un intervalo abierto de la forma (b, a); para un límite de la forma $\lim_{x\to a^+} h(x)$, necesitamos la función $h(x)$ para ser definida sobre un intervalo abierto de la forma (a, c). El Ejemplo 2.21 ilustra este punto.

EJEMPLO 2.21

Evaluación de un límite unilateral mediante las leyes de los límites

Evalúe cada uno de los siguientes límites, si es posible.

a. $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{x-3}$
b. $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}$

Solución

La Figura 2.25 ilustra la función $f(x)=\sqrt{x-3}$ y nos ayuda a comprender estos límites.

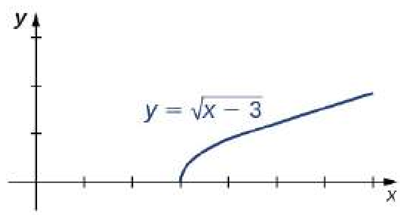


Figura 2.25 El gráfico muestra la función $f(x)=\sqrt{x-3}$.

a. La función $f(x)=\sqrt{x-3}$ se define en el intervalo $\left[3,+\infty\right)$. Como esta función no está definida a la izquierda de 3, no podemos aplicar las leyes de los límites para calcular $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{x-3}$. De hecho, ya que $f(x)=\sqrt{x-3}$ es indefinida a la izquierda de 3, $\lim_{x\to 3^-}\sqrt{x-3}$ no existe.
b. Dado que $f(x)=\sqrt{x-3}$ se define a la derecha de 3, las leyes de los límites sí se aplican a $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}$. Aplicando estas leyes de los límites obtenemos $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}=0$.

En el Ejemplo 2.22 observamos los límites unilaterales de una función definida a trozos y los utilizamos para sacar una conclusión sobre un límite bilateral de la misma función.

EJEMPLO 2.22

Evaluación de un límite bilateral utilizando las leyes de los límites

Para $f(x)=\begin{cases}4x-3 & \text{si } x<2\\ (x-3)^2 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$, evalúe cada uno de los límites siguientes:

a. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ grandes.
b. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ grandes.
c. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Solución
La Figura 2.26 ilustra la función $f(x)$ y nos ayuda a comprender estos límites.

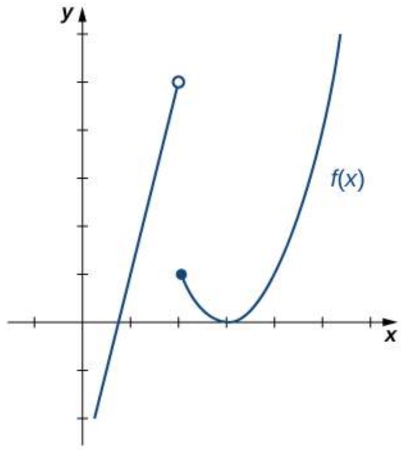


Figura 2.26 Este gráfico muestra una función $f(x)$.

a. Dado que $f(x) = 4x - 3$ para todas las x en $\left(-\infty, 2\right)$, sustituya $f(x)$ en el límite con $4x - 3$ y aplique las leyes de los límites:
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (4x - 3) = 5.$$
b. Dado que $f(x) = (x-3)^2$ para todas las x en $\left(2, +\infty\right)$, sustituya $f(x)$ en el límite con $(x-3)^2$ y aplique las leyes de los límites:
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x-3)^2 = 1.$$
c. Dado que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$, concluimos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

2.17 Grafique $f(x) = \begin{cases} -x - 2 \text{ si } x < -1 \\ 2 \text{ si } x = -1 \\ x^3 \text{ si } x > -1 \end{cases}$ y evalúe $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$.

Ahora nos centramos en la evaluación de un límite de la forma $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, donde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = K$, donde $K \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Es decir, $f(x)/g(x)$ tiene la forma $K/0, K \neq 0$ en *a*.

EJEMPLO 2.23

Evaluación de un límite de la forma $K/0, K \neq 0$ Utilizar las leyes de los límites

Evalúe $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-2x}$.

Solución
Paso 1. Después de sustituir en $x = 2$, vemos que este límite tiene la forma $-1/0$. Es decir, a medida que x se acerca a 2 por la izquierda, el numerador se acerca a -1; y el denominador se acerca a 0. En consecuencia, la magnitud de $\frac{x-3}{x(x-2)}$ se convierte en infinito. Para tener una mejor idea de cuál es el límite, tenemos que factorizar el denominador:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x(x-2)}.$$

Paso 2. Dado que $x-2$ es la única parte del denominador que es cero cuando se sustituye por 2, entonces separamos $1/(x-2)$ del resto de la función:

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x} \cdot \frac{1}{x-2}.$$

Paso 3. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x} = -\frac{1}{2}$ y $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$. Por lo tanto, el producto de $(x-3)/x$ y $1/(x-2)$ tiene un límite de $+\infty$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-2x} = +\infty.$$

2.18 Evalúe $\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$.

El teorema del emparedado

Las técnicas que hemos desarrollado hasta ahora funcionan muy bien para las funciones algebraicas, pero aún no podemos evaluar los límites de funciones trigonométricas muy básicas. El siguiente teorema, llamado **teorema del emparedado**, resulta muy útil para establecer los límites trigonométricos básicos. Este teorema nos permite calcular los límites "comprimiendo" una función, con un límite en un punto desconocido *a* entre dos funciones que tienen un límite común conocido en *a*. La Figura 2.27 ilustra esta idea.

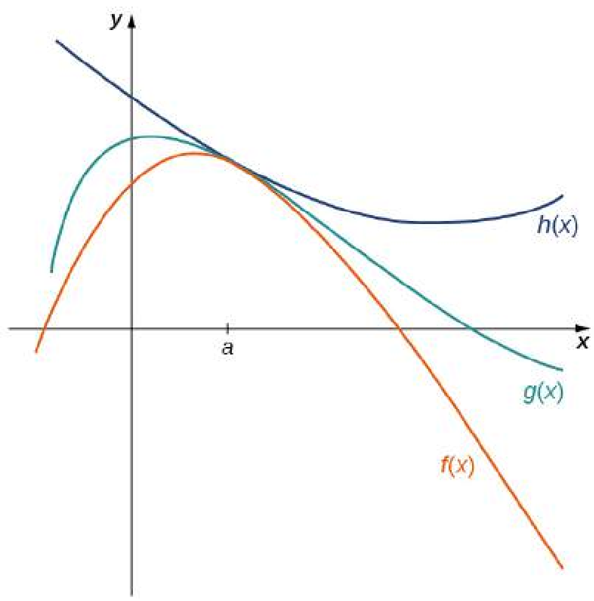


Figura 2.27 El teorema del emparedado se aplica cuando $f(x) \le g(x) \le h(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$.

Teorema 2.7

El teorema del emparedado

Supongamos que $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$ se define para todos los $x \ne a$ sobre un intervalo abierto que contiene *a*. Si

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

para todos los $x \ne a$ en un intervalo abierto que contiene *a* y

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$$

donde *L* es un número real, entonces $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

EJEMPLO 2.24

Aplicación del teorema del emparedado

Aplique el teorema del emparedado para evaluar $\lim\limits_{x \to 0} x \cos x$.

Solución

Dado que $-1 \le \cos x \le 1$ para toda *x*, tenemos $-|x| \le x \cos x \le |x|$. Dado que $\lim\limits_{x \to 0} (-|x|) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} |x|$, del teorema del emparedado, obtenemos $\lim\limits_{x \to 0} x \cos x = 0$. Los gráficos de $f(x) = -|x|$, $g(x) = x \cos x$, y $h(x) = |x|$ se muestran en la Figura 2.28.

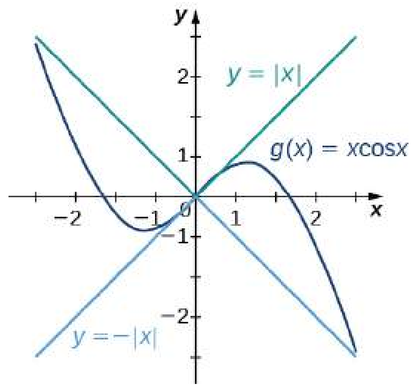


Figura 2.28 Los gráficos de $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$ se muestran alrededor del punto $x = 0$.

2.19 Utilice el teorema del emparedado para evaluar $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.

Ahora utilizamos el teorema del emparedado para abordar varios límites muy importantes. Aunque esta discusión es algo larga, estos límites resultan muy valiosos para el desarrollo del material tanto en la siguiente sección como en el siguiente capítulo. El primero de estos límites es $\lim\limits_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta$. Tenga en cuenta el círculo unitario que se muestra en la Figura 2.29. Allí vemos que $\operatorname{sen} \theta$ es la coordenada *y* en el círculo unitario y corresponde al segmento de línea mostrado en azul. La medida del radián del ángulo θ es la longitud del arco que subtiende en el círculo unitario. Por lo tanto, vemos que para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \operatorname{sen} \theta < \theta$.

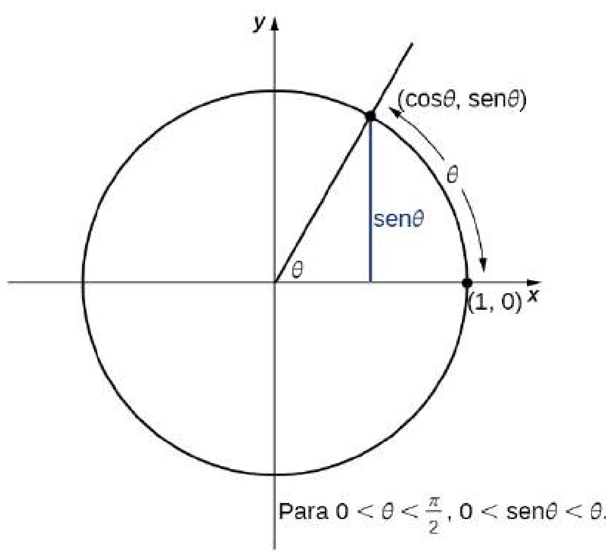


Figura 2.29 La función seno se muestra como una línea en el círculo unitario.

Dado que $\lim\limits_{\theta \to 0^+} 0 = 0$ y $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \theta = 0$, utilizando el teorema del emparedado concluimos que

$$\lim_{\theta \to 0^+} \operatorname{sen} \theta = 0.$$

Para ver que $\lim_{\theta \to 0^-} \operatorname{sen} \theta = 0$ igualmente, observe que para $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0, 0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto, $0 < \operatorname{sen}(-\theta) < -\theta$. En consecuencia, $0 < -\operatorname{sen} \theta < -\theta$. Se deduce que $0 > \operatorname{sen} \theta > \theta$. Una aplicación del teorema del emparedado produce el límite deseado. Por lo tanto, dado que $\lim_{\theta \to 0^+} \operatorname{sen} \theta = 0$ y $\lim_{\theta \to 0^-} \operatorname{sen} \theta = 0$,

$$\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0. \tag{2.16}$$

A continuación, utilizando la identidad $\cos \theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}$ para $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, vemos que

$$\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = \lim_{\theta \to 0} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} = 1. \tag{2.17}$$

A continuación veremos un límite que juega un papel importante en capítulos posteriores, a saber, $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta}$. Para evaluar este límite, utilizamos el círculo unitario en la Figura 2.30. Note que esta figura añade un triángulo más a la Figura 2.30. Vemos que la longitud del lado opuesto al ángulo θ en este nuevo triángulo es $\tan \theta$. Así, vemos que para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{sen} \theta < \theta < \tan \theta$.

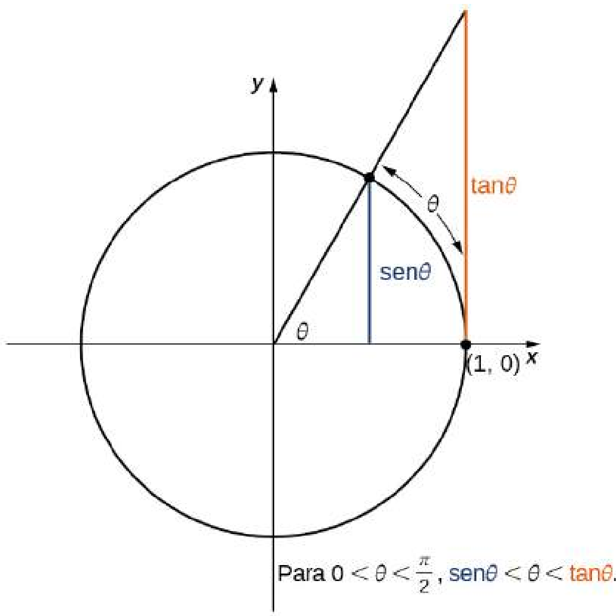


Figura 2.30 Las funciones seno y tangente se muestran como líneas en el círculo unitario.

Al dividir entre $\operatorname{sen} \theta$ en todas las partes de la inecuación obtenemos

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen} \theta} < \frac{1}{\cos \theta}.$$

De manera equivalente, tenemos

$$1 > \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} > \cos \theta.$$

Dado que $\lim_{\theta \to 0^+} 1 = 1 = \lim_{\theta \to 0^+} \cos \theta$, concluimos que $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$. Aplicando una manipulación similar a la utilizada para demostrar que $\lim_{\theta \to 0^-} \operatorname{sen} \theta = 0$, podemos demostrar que $\lim_{\theta \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1. \tag{2.18}$$

En el Ejemplo 2.25 utilizamos este límite para establecer $\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0$. Este límite también resulta útil en capítulos posteriores.

EJEMPLO 2.25

Evaluación de un límite trigonométrico importante

Evalúe $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta}$.

Solución

En el primer paso, multiplicamos por el conjugado para poder utilizar una identidad trigonométrica a fin de convertir el coseno del numerador en un seno:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} &= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} \cdot \frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} \\ &= 1 . \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0. \tag{2.19}$$

2.20 Evalúe $\lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Derivación de la fórmula del área de un círculo

Algunas de las fórmulas geométricas que hoy damos por sentadas se obtuvieron por primera vez mediante métodos que anticiparon algunos de los métodos del cálculo. El matemático griego Arquímedes (ca. 287-212; a.C.) fue especialmente ingenioso, ya que utilizó polígonos inscritos en círculos para aproximar el área del círculo a medida que aumentaba el número de lados del polígono. Nunca se le ocurrió la idea de un límite, pero podemos utilizar esta idea para ver lo que sus construcciones geométricas podrían haber predicho sobre el límite.

Podemos estimar el área de un círculo calculando el área de un polígono regular inscrito. Piense que el polígono regular está formado por n triángulos. Tomando el límite a medida que el ángulo del vértice de estos triángulos llega a cero, se puede obtener el área del círculo. Para comprobarlo, realice los siguientes pasos:

1. Exprese la altura h y la base b del triángulo isósceles en la Figura 2.31 en términos de θ y r.

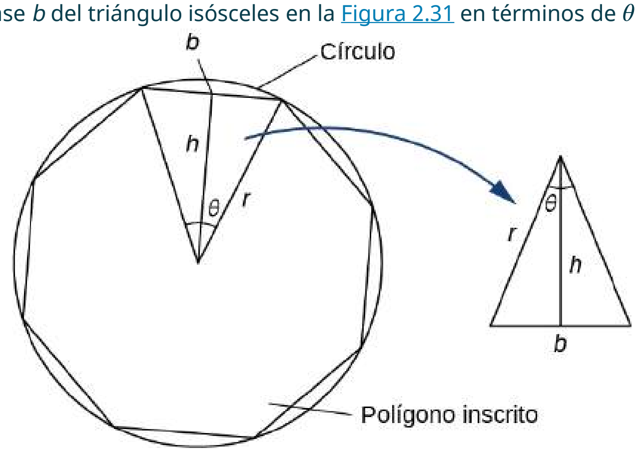


Figura 2.31

2. Utilizando las expresiones obtenidas en el paso 1, exprese el área del triángulo isósceles en términos de θ y r. (Sustituya $(1/2)\operatorname{sen}\theta$ por $\operatorname{sen}(\theta/2)\cos(\theta/2)$ en su expresión)
3. Si un polígono regular de n lados está inscrito en una circunferencia de radio r, halle una relación entre θ y n. Resuelva esto para n. Tenga en cuenta que hay 2 radianes π en un círculo (utilice radianes, no grados).
4. Halle una expresión para el área del polígono de n lados en términos de r y θ.
5. Para hallar una fórmula para el área del círculo, halle el límite de la expresión en el paso 4 a medida que θ llega a cero. (*Pista:* $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{(\operatorname{sen}\theta)}{\theta}=1$).

La técnica de estimación de áreas de regiones mediante el uso de polígonos se revisa en Introducción a la integración.

SECCIÓN 2.3 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, utilice las leyes de los límites para evaluar cada uno. Justifique cada paso indicando la(s) ley(es) de los límites correspondiente(s).

83. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4x^2-2x+3\right)$

84. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2+5}{4-7x}$

85. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^2-6x+3}$

86. $\lim\limits_{x\to -1}(9x+1)^2$

En los siguientes ejercicios, utilice la sustitución directa para evaluar cada límite.

87. $\lim\limits_{x\to 7}x^2$

88. $\lim\limits_{x\to -2}\left(4x^2-1\right)$ grandes.

89. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\operatorname{sen}x}$

90. $\lim\limits_{x\to 2}e^{2x-x^2}$

91. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2-7x}{x+6}$

92. $\lim\limits_{x\to 3}\ln e^{3x}$

En los siguientes ejercicios, utilice la sustitución directa para demostrar que cada límite conduce a la forma indeterminada $0/0$. Luego evalúe el límite.

93. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

94. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-2x}$

95. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{3x-18}{2x-12}$

96. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}$

97. $\lim\limits_{t\to 9}\frac{t-9}{\sqrt{t}-3}$

98. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}$, donde a es una constante de valor real diferente a cero.

99. $\lim\limits_{\theta\to \pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}$

100. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$

101. $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{2x^2+3x-2}{2x-1}$

102. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$

En los siguientes ejercicios, utilice la sustitución directa para obtener una expresión indefinida. A continuación, utilice el método del Ejemplo 2.23 para simplificar la función y ayudar a determinar el límite.

103. $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{2x^2+7x-4}{x^2+x-2}$

104. $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{2x^2+7x-4}{x^2+x-2}$

105. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{2x^2+7x-4}{x^2+x-2}$

106. $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2x^2+7x-4}{x^2+x-2}$

En los siguientes ejercicios, suponga que $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 6} g(x) = 9$, *y* $\lim\limits_{x \to 6} h(x) = 6$. *Utilice estos tres hechos y las leyes de los límites para evaluar cada uno.*

107. $\lim\limits_{x \to 6} 2f(x)\, g(x)$ grandes.

108. $\lim\limits_{x \to 6} \frac{g(x)-1}{f(x)}$ grandes.

109. $\lim\limits_{x \to 6} \left(f(x) + \frac{1}{3} g(x) \right)$ grandes.

110. $\lim\limits_{x \to 6} \frac{(h(x))^3}{2}$

111. $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt{g(x) - f(x)}$ grandes.

112. $\lim\limits_{x \to 6} x .\, h(x)$ grandes.

113. $\lim\limits_{x \to 6} [(x+1) .\, f(x)]$

114. $\lim\limits_{x \to 6} (f(x) .\, g(x) - h(x))$

[T] *En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para dibujar el gráfico de cada función definida a trozos y estudie el gráfico para evaluar los límites dados.*

115. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 3 \\ x+4, & x > 3 \end{cases}$

a. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ grandes.

b. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

116. $g(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

a. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ grandes.

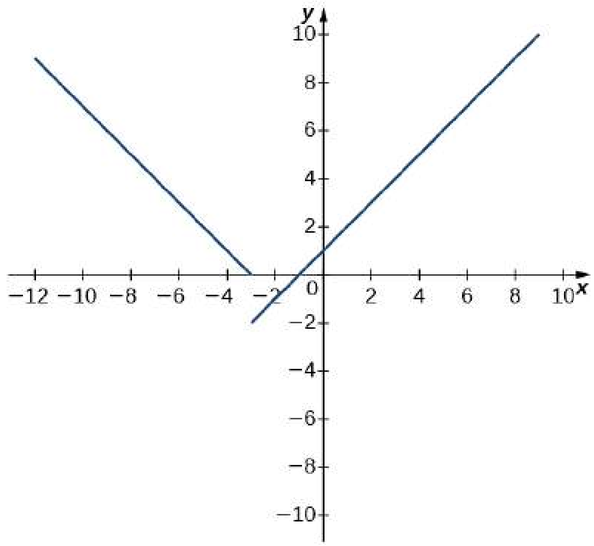
b. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

117. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x < 2 \\ 3 - x, & x \ge 2 \end{cases}$

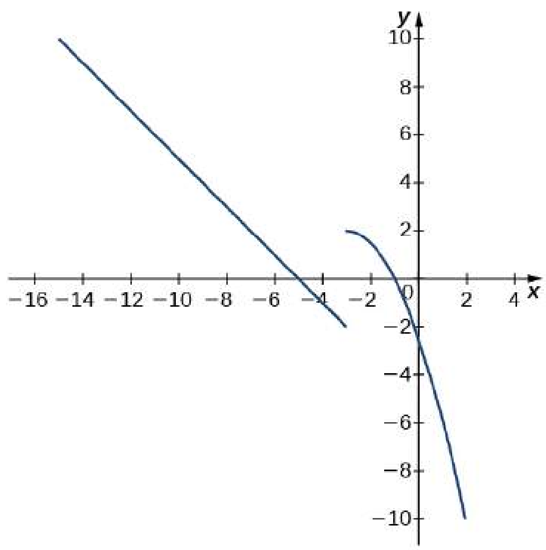
a. $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x)$ grandes.

b. $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$

En los siguientes ejercicios, utilice los gráficos y las leyes de los límites para evaluar cada límite.



$y = f(x)$



$y = g(x)$

118. $\lim\limits_{x \to -3^+} (f(x) + g(x))$ grandes.

119. $\lim\limits_{x \to -3^-} (f(x) - 3g(x))$ grandes.

120. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)g(x)}{3}$

121. $\lim\limits_{x \to -5} \frac{2+g(x)}{f(x)}$ grandes.

122. $\lim\limits_{x \to 1} (f(x))^2$

123. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{f(x) - g(x)}$

124. $\lim\limits_{x \to -7} (x.\, g(x))$ grandes.

125. $\lim\limits_{x \to -9} [x.\, f(x) + 2.\, g(x)]$

En los siguientes problemas, evalúe el límite utilizando el teorema del emparedado. Utilice una calculadora para representar gráficamente las funciones $f(x)$, $g(x)$, y $h(x)$ si es posible.

126. **[T]** ¿Verdadero o falso? Si los valores de $2x - 1 \leq g(x) \leq x^2 - 2x + 3$, entonces $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 0.$

127. **[T]** $\lim\limits_{\theta \to 0} \theta^2 \cos\left(\frac{1}{\theta}\right)$

128. $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ racional} \\ x^2, & x \text{ irracional} \end{cases}$$

129. **[T]** En física, la magnitud de un campo eléctrico generado por una carga puntual a una distancia *r* en el vacío se rige por la ley de Coulomb: $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, donde *E* representa la magnitud del campo eléctrico, *q* es la carga de la partícula, *r* es la distancia entre la partícula y donde se mide la intensidad del campo, y $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ es la constante de Coulomb: $8{,}988 \times 10^9 \text{ N.m}^2/\text{C}^2$.

a. Utilice una calculadora gráfica para graficar $E(r)$ dado que la carga de la partícula es $q = 10^{-10}$.

b. Evalúe $\lim\limits_{r \to 0^+} E(r)$. ¿Cuál es el significado físico de esta cantidad? ¿Es físicamente relevante? ¿Por qué se evalúa por la derecha?

130. **[T]** La densidad de un objeto viene dada por su masa dividida por su volumen: $\rho = m/V$.

a. Utilice una calculadora para representar el volumen en función de la densidad $(V = m/\rho)$, suponiendo que está examinando algo con una masa de 8 kg ($m = 8$).

b. Evalúe $\lim\limits_{\rho \to 0^+} V(\rho)$ y explique el significado físico.

2.4 Continuidad

Objetivos de aprendizaje

2.4.1 Explicar las tres condiciones de continuidad en un punto.
2.4.2 Describir tres tipos de discontinuidades.
2.4.3 Definir la continuidad en un intervalo.
2.4.4 Enunciar el teorema de los límites de las funciones compuestas.
2.4.5 Dar un ejemplo del teorema del valor intermedio.

Muchas funciones tienen la propiedad de que sus gráficos se pueden trazar con un lápiz sin levantar el lápiz de la página. Estas funciones se denominan *continuas*. Otras funciones tienen puntos en los que se produce una ruptura en el gráfico, pero satisfacen esta propiedad en los intervalos contenidos en sus dominios. Son continuas en estos intervalos y se dice que tienen una *discontinuidad en un punto* donde se produce una ruptura.

Comenzamos nuestra investigación sobre la continuidad explorando lo que significa que una función tenga *continuidad en un punto*. Intuitivamente, una función es continua en un punto determinado si no hay ruptura en su gráfico en ese punto.

Continuidad en un punto

Antes de ver una definición formal de lo que significa que una función sea continua en un punto, consideremos varias funciones que no cumplen nuestra noción intuitiva de lo que significa ser continua en un punto. A continuación, creamos una lista de condiciones que evitan estos fallos.

Nuestra primera función de interés se muestra en la Figura 2.32. Vemos que el gráfico de $f(x)$ tiene un agujero en *a*. De hecho, $f(a)$ es indefinida. Como mínimo, para que $f(x)$ sea continua en *a*, necesitamos la siguiente condición:

$$\text{i. } f(a) \text{ está definida.}$$

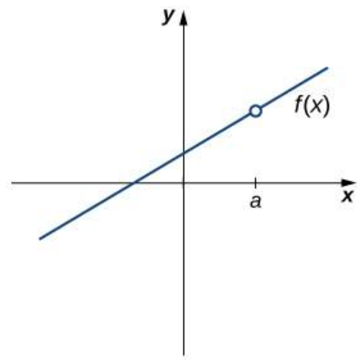


Figura 2.32 La función $f(x)$ no es continua en *a* porque $f(a)$ es indefinida.

Sin embargo, como vemos en la Figura 2.33, esta condición no es suficiente para garantizar la continuidad en el punto *a*. Aunque $f(a)$ está definida, la función tiene una brecha en *a*. En este ejemplo, la brecha existe porque $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe. Debemos añadir otra condición para la continuidad en *a*,, a saber,

$$\text{ii. } \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe.}$$

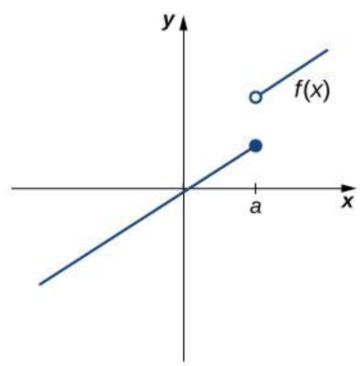


Figura 2.33 La función $f(x)$ no es continua en *a* porque $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

Sin embargo, como vemos en la Figura 2.34, estas dos condiciones por sí solas no garantizan la continuidad en un punto. La función de esta figura satisface las dos primeras condiciones, pero sigue sin ser continua en *a*. Debemos añadir una tercera condición a nuestra lista:

$$\text{iii. } \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

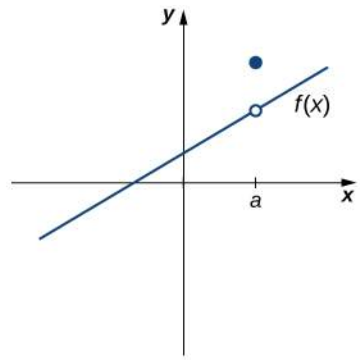


Figura 2.34 La función $f(x)$ no es continua en *a* porque $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Ahora reunamos nuestra lista de condiciones y formemos una definición de continuidad en un punto.

Definición

Una función $f(x)$ es **continua en un punto** *a* si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i. $f(a)$ está definida
ii. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
iii. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Una función es **discontinua en un punto** *a* si no es continua en *a*.

El siguiente procedimiento se puede utilizar para analizar la continuidad de una función en un punto utilizando esta definición.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Determinación de la continuidad en un punto

1. Compruebe si $f(a)$ está definida. Si los valores de $f(a)$ es indefinida, no necesitamos ir más allá. La función no es continua en *a*. Si los valores de $f(a)$ está definida, continúe con el paso 2.
2. Calcule $\lim_{x \to a} f(x)$. Es posible que en algunos casos tengamos que hacer esto calculando primero $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe (es decir, no es un número real), entonces la función no es continua en *a* y el problema está resuelto. Si los valores de $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, entonces continúe con el paso 3.
3. Compare $f(a)$ y $\lim_{x \to a} f(x)$. Si $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, entonces la función no es continua en *a*. Si los valores de $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, entonces la función es continua en *a*.

Los tres ejemplos siguientes muestran cómo aplicar esta definición para determinar si una función es continua en un punto dado. Ilustran situaciones en las que cada una de las condiciones de continuidad de la definición tiene éxito o falla.

EJEMPLO 2.26

Determinación de la continuidad en un punto, condición 1

Utilizando la definición, determine si la función $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ es continua en $x = 2$. Justifique la conclusión.

Solución

Empecemos por intentar calcular $f(2)$. Podemos ver que $f(2) = 0/0$, que es indefinida. Por lo tanto, $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ es discontinua en 2 porque $f(2)$ es indefinida. El gráfico de $f(x)$ se muestra en la Figura 2.35.

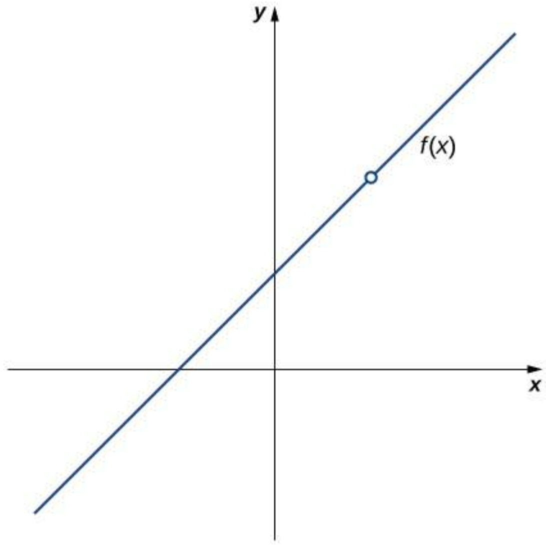


Figura 2.35 La función $f(x)$ es discontinua en 2 porque $f(2)$ es indefinida.

EJEMPLO 2.27

Determinación de la continuidad en un punto, condición 2

Utilizando la definición, determine si la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq 3 \\ 4x - 8 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ es continua en $x = 3$. Justifique la conclusión.

Solución

Empecemos por intentar calcular $f(3)$.

$$f(3) = -(3^2) + 4 = -5.$$

Así, $f(3)$ está definida. A continuación, calculamos $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$. Para ello, debemos calcular $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -(3^2) + 4 = -5$$

y

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4(3) - 8 = 4.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe. Así, $f(x)$ no es continua en 3. El gráfico de $f(x)$ se muestra en la Figura 2.36.

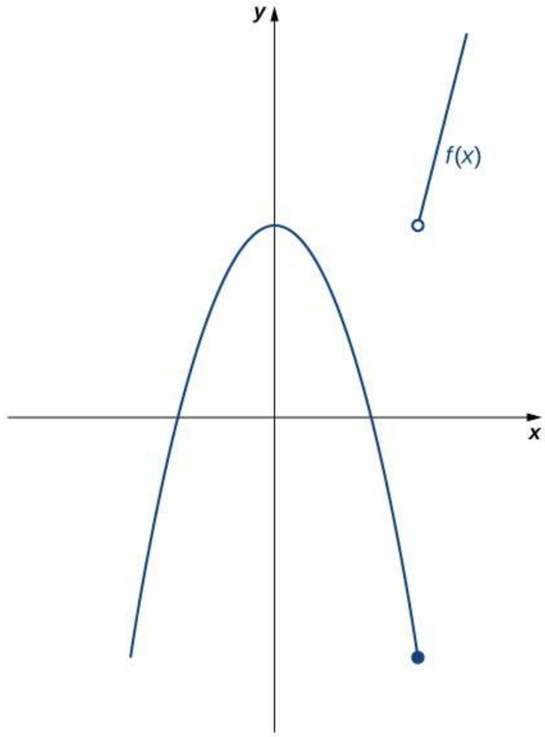


Figura 2.36 La función $f(x)$ no es continua en 3 porque $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existe.

EJEMPLO 2.28

Determinación de la continuidad en un punto, condición 3

Utilizando la definición, determine si la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$.

Solución

En primer lugar, observe que

$$f(0) = 1.$$

Luego,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Por último, compare $f(0)$ y $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. Vemos que

$$f(0) = 1 = \lim_{x \to 0} f(x).$$

Dado que se cumplen las tres condiciones de la definición de continuidad, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

2.21 Utilizando la definición, determine si la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ -x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es continua en $x = 1$. Si la función no es continua en 1, indique la condición de continuidad en un punto que no se cumple.

Aplicando la definición de continuidad y los teoremas previamente establecidos sobre la evaluación de límites, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.8

Continuidad de polinomios y funciones racionales
Los polinomios y las funciones racionales son continuos en todos los puntos de sus dominios.

Prueba

Anteriormente, demostramos que si $p(x)$ como $q(x)$ son polinomios, $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$ para cada polinomio $p(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}$ siempre y cuando $q(a) \neq 0$. Por lo tanto, los polinomios y las funciones racionales son continuos en sus dominios.

□

Ahora aplicamos Continuidad de polinomios y funciones racionales para determinar los puntos en los que una función racional dada es continua.

EJEMPLO 2.29

Continuidad de una función racional

¿Para qué valores de x es $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$ es continua?

Solución

La función racional $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$ es continua para cualquier valor de x excepto $x = 5$.

2.22 ¿Para qué valores de x es $f(x) = 3x^4 - 4x^2$ es continua?

Tipos de discontinuidades

Como hemos visto en el Ejemplo 2.26 y el Ejemplo 2.27, las discontinuidades adquieren diferentes aspectos. Clasificamos los tipos de discontinuidades que hemos visto hasta ahora como discontinuidades removibles, discontinuidades infinitas o discontinuidades de salto. Intuitivamente, una **discontinuidad removible** es aquella para la cual hay un agujero en el gráfico, una **discontinuidad de salto** es aquella no infinita en la que las secciones de la función no se encuentran, y una **discontinuidad infinita** es la que se halla en una asíntota vertical. La Figura 2.37 ilustra las diferencias de estos tipos de discontinuidades. Aunque estos términos proporcionan una forma práctica de describir tres tipos comunes de discontinuidades, hay que tener en cuenta que no todas las discontinuidades encajan perfectamente en estas categorías.

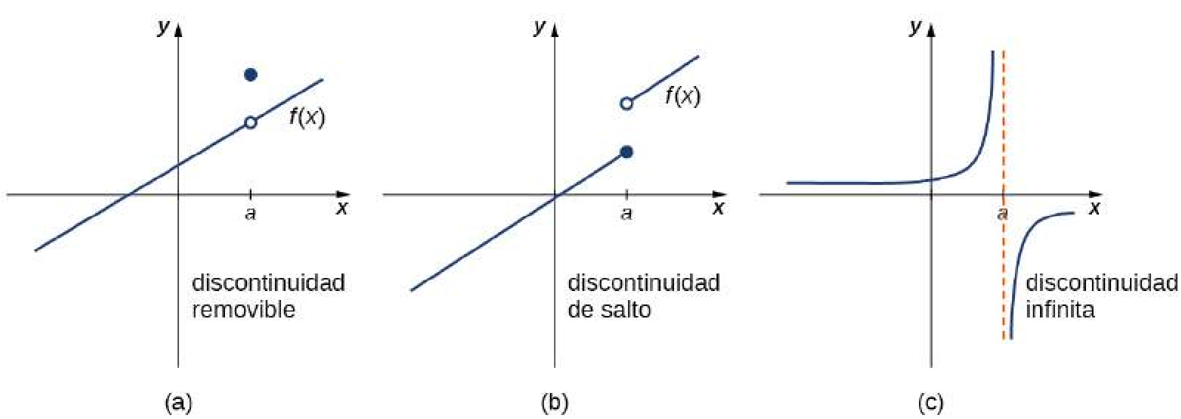


Figura 2.37 Las discontinuidades se clasifican como (a) removibles, (b) de salto, o (c) infinitas.

Estas tres discontinuidades se definen formalmente como sigue:

Definición

Si $f(x)$ es discontinua en *a*, entonces

1. f tiene una **discontinuidad removible** en *un* si $\lim_{x \to a} f(x)$. (Nota: Cuando afirmamos que $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, queremos decir que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, donde *L* es un número real).
2. f tiene una **discontinuidad de salto** en *a* si $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ambos existen, pero $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$. (Nota: Cuando afirmamos que $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ambos existen, queremos decir que ambos son de valor real y que ninguno toma los valores ±∞).
3. f tiene una **discontinuidad infinita** en *a* si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

EJEMPLO 2.30

Clasificar una discontinuidad

En el Ejemplo 2.26, demostramos que $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ es discontinuo en $x = 2$. Clasifique esta discontinuidad como evitable, de salto finito o de salto infinito.

Solución

Para clasificar la discontinuidad en 2 debemos evaluar $\lim_{x \to 2} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \to 2} (x+2) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Como *f* es discontinua en 2 y $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, *f* tiene una discontinuidad removible en $x = 2$.

EJEMPLO 2.31

Clasificar una discontinuidad

En el Ejemplo 2.27, demostramos que $f(x) = \begin{cases} -x^2+4 & \text{si } x \le 3 \\ 4x-8 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ es discontinuo en $x = 3$. Clasifique esta discontinuidad como evitable, de salto finito o de salto infinito.

Solución

Anteriormente, demostramos que *f* es discontinua en 3 porque $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe. Sin embargo, como $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -5$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$ ambos existen, concluimos que la función tiene una discontinuidad de salto en 3.

EJEMPLO 2.32

Clasificar una discontinuidad

Determine si $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ es continua en -1. Si la función es discontinua en -1, clasifique la discontinuidad como removible, de salto o infinita.

Solución

El valor de la función $f(-1)$ es indefinida. Por lo tanto, la función no es continua en -1. Para determinar el tipo de discontinuidad, debemos determinar el límite en -1. Vemos que $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x+2}{x+1} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x+2}{x+1} = +\infty$. Por lo tanto, la función tiene una discontinuidad infinita en -1.

2.23 Para $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, decida si *f* es continua en 1. Si *f* no es continua en 1, clasifique la discontinuidad como removible, de salto o infinita.

Continuidad en un intervalo

Ahora que hemos explorado el concepto de continuidad en un punto, extendamos esa idea a la **continuidad en un intervalo**. Mientras desarrollamos esta idea para diferentes tipos de intervalos, puede ser útil tener en mente la idea intuitiva de que una función es continua en un intervalo si podemos usar un lápiz para trazar la función entre dos puntos cualesquiera del intervalo sin levantar el lápiz del papel. Como preparación para definir la continuidad en un intervalo, empecemos por ver la definición de lo que significa que una función sea continua por la derecha o por la izquierda en un punto.

Continuidad por la derecha y por la izquierda

Una función $f(x)$ se dice **que es continua por la derecha** en *a* si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Una función $f(x)$ se dice **que es continua por la izquierda** en *a* si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Una función es continua en un intervalo abierto si es continua en cada punto del intervalo. Una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado de la forma $[a, b]$ si es continua en cada punto de (a, b) y es continua por la derecha en *a* y continua por la izquierda en *b*. De manera similar, una función $f(x)$ es continua en un intervalo de la forma $(a, b]$ si es continua en (a, b) y es continua por la izquierda en *b*. La continuidad en otros tipos de intervalos se define de forma similar.

Exigir que $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ asegura que podemos trazar el gráfico de la función desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$ sin levantar el lápiz. Si, por ejemplo, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$, tendríamos que levantar el lápiz para saltar desde $f(a)$ al gráfico del resto de la función en $(a, b]$.

EJEMPLO 2.33

Continuidad en un intervalo

Indique el intervalo o los intervalos en los que la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$ es continuo.

Solución

Dado que $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x}$ es una función racional, es continua en todos los puntos de su dominio. El dominio de $f(x)$. es el conjunto $\left(-\infty, -2\right) \cup (-2, 0) \cup \left(0, +\infty\right)$. Por lo tanto, $f(x)$. es continua en cada uno de los intervalos $\left(-\infty, -2\right)$, $(-2, 0)$, y $\left(0, +\infty\right)$.

EJEMPLO 2.34

Continuidad en un intervalo

Indique el intervalo o los intervalos en los que la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ es continuo.

Solución

A partir de las leyes de los límites, sabemos que $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - a^2}$ para todos los valores de *a* en $(-2, 2)$. También sabemos que $\lim\limits_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0$ existe y $\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 2]$.

2.24 Indique el intervalo o los intervalos en los que la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ es continuo.

El Teorema de la función compuesta nos permite ampliar nuestra capacidad de calcular los límites. En particular, este teorema nos permite demostrar en definitiva que las funciones trigonométricas son continuas sobre sus dominios.

Teorema 2.9

Teorema de la función compuesta

Si los valores de $f(x)$ es continua en *L* y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L).$$

Antes de pasar al Ejemplo 2.35, recordemos que en la sección de leyes de los límites, mostramos $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos(0)$. En consecuencia, sabemos que $f(x) = \cos x$ es continua en 0. En el Ejemplo 2.35 vemos cómo combinar este resultado con el teorema de la función compuesta.

EJEMPLO 2.35

Límite de una función coseno compuesta

Evalúe $\lim\limits_{x \to \pi/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Solución

La función dada es un compuesto de $\cos x$ y $x - \frac{\pi}{2}$. Dado que $\lim\limits_{x \to \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $\cos x$ es continua en 0, podemos aplicar el teorema de la función compuesta. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \pi/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\lim_{x \to \pi/2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos(0) = 1.$$

2.25 Evalúe $\lim\limits_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x - \pi)$.

La prueba del siguiente teorema utiliza el teorema de la función compuesta así como la continuidad de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en el punto 0 para demostrar que las funciones trigonométricas son continuas en todos sus dominios.

Teorema 2.10

Continuidad de las funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son continuas en todos sus dominios.

Prueba

Comenzamos demostrando que $\cos x$ es continua en todo número real. Para ello, debemos demostrar que $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$ para todos los valores de *a*.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \cos x &= \lim_{x \to a} \cos((x - a) + a) && \text{reescriba } x = x - a + a \\
&= \lim_{x \to a} (\cos(x - a) \cos a - \text{sen}(x - a) \,\text{sen}\, a) && \text{aplique la identidad del coseno a través de la suma de dos ángulos} \\
&= \cos\left(\lim_{x \to a} (x - a)\right) \cos a - \text{sen}\left(\lim_{x \to a} (x - a)\right) \text{sen}\, a && \lim_{x \to a} (x - a) = 0, \text{ y sen } x \text{ y } \cos x \text{ son continuos en } 0 \\
&= \cos(0) \cos a - \text{sen}(0) \,\text{sen}\, a && \text{evalúe cos(0) y sen(0) y simplifique} \\
&= 1.\cos a - 0.\,\text{sen}\, a = \cos a.
\end{aligned}$$

La prueba de que $\text{sen}\, x$ es continua en todo número real es análoga. Puesto que el resto de las funciones trigonométricas pueden expresarse en términos de $\text{sen}\, x$ y $\cos x$, su continuidad se desprende de la ley del límite del cociente.

□

Como puede ver, el teorema de la función compuesta es muy valioso para demostrar la continuidad de las funciones trigonométricas. A medida que avanzamos en el estudio del cálculo, volveremos a ver este teorema muchas veces.

El teorema del valor intermedio

Funciones continuas sobre intervalos de la forma $[a, b]$, donde *a* y *b* son números reales y presentan muchas propiedades útiles. A lo largo de nuestro estudio del cálculo, nos encontraremos con muchos teoremas poderosos relativos a dichas funciones. El primero de estos teoremas es el **teorema del valor intermedio**.

Teorema 2.11

El teorema del valor intermedio

Supongamos que *f* es continua en un intervalo cerrado y limitado $[a, b]$. Si *z* es cualquier número real entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un número *c* en $[a, b]$ que satisface $f(c) = z$ en la Figura 2.38.

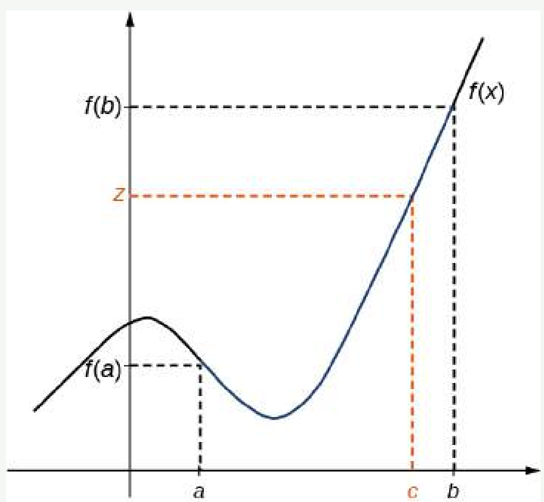


Figura 2.38 Hay un número $c \in [a, b]$ que satisface $f(c) = z$.

EJEMPLO 2.36

Aplicación del teorema del valor intermedio

Demuestre que $f(x) = x - \cos x$ tiene al menos un cero.

Solución

Dado que $f(x) = x - \cos x$ es continua en $\left(-\infty, +\infty\right)$, es continua en cualquier intervalo cerrado de la forma $[a, b]$. Si puede hallar un intervalo $[a, b]$ de manera que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, puede utilizar el teorema del valor intermedio para concluir que debe haber un número real *c* en (a, b) que satisface $f(c) = 0$. Tenga en cuenta que

$$f(0) = 0 - \cos(0) = -1 < 0$$

y

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} > 0.$$

Utilizando el teorema del valor intermedio podemos ver que debe haber un número real *c* en $[0, \pi/2]$ que satisface $f(c) = 0$. Por lo tanto, $f(x) = x - \cos x$ tiene al menos un cero.

EJEMPLO 2.37

¿Cuándo se puede aplicar el teorema del valor intermedio?

Si los valores de $f(x)$ es continua en $[0, 2]$, $f(0) > 0$ y $f(2) > 0$, ¿podemos utilizar el teorema del valor intermedio para concluir que $f(x)$ no tiene ceros en el intervalo $[0, 2]$? Explique.

Solución

No. El teorema del valor intermedio solo nos permite concluir que podemos encontrar un valor entre $f(0)$ y $f(2)$; no nos permite concluir que no podemos encontrar otros valores. Para ver esto más claramente, considere la función $f(x) = (x-1)^2$. Este satisface $f(0) = 1 > 0$, $f(2) = 1 > 0$, y $f(1) = 0$.

EJEMPLO 2.38

¿Cuándo se puede aplicar el teorema del valor intermedio?

Para $f(x) = 1/x$, $f(-1) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$. ¿Podemos concluir que $f(x)$ tiene un cero en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución

No. La función no es continua sobre $[-1, 1]$. El teorema del valor intermedio no se aplica aquí.

2.26 Demuestre que $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$ tiene un cero en el intervalo $[0, 1]$.

SECCIÓN 2.4 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, determine el punto o puntos en los que cada función es discontinua, si los hay. Clasifique cualquier discontinuidad como de salto, removible, infinita u otra.

131. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

132. $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

133. $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$

134. $g(t) = t^{-1} + 1$

135. $f(x) = \frac{5}{e^x-2}$

136. $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$

137. $H(x) = \tan 2x$

138. $f(t) = \frac{t+3}{t^2+5t+6}$

En los siguientes ejercicios, decida si la función es continua en el punto dado. Si es discontinua, ¿de qué tipo de discontinuidad se trata?

139. $f(x)\frac{2x^2-5x+3}{x-1}$ en $x = 1$

140. $h(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\tan\theta}$ en $\theta = \pi$

141. $g(u) = \begin{cases} \frac{6u^2+u-2}{2u-1} & \text{si } u \neq \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \text{si } u = \frac{1}{2} \end{cases}$, a las $u = \frac{1}{2}$

142. $f(y) = \frac{\text{sen}(\pi y)}{\tan(\pi y)}$, a las $y = 1$

143. $f(x) = \begin{cases} x^2 - e^x & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, a las $x = 0$

144. $f(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\,(x) & \text{si } x \leq \pi \\ x \tan(x) & \text{si } x > \pi \end{cases}$, a las $x = \pi$

En los siguientes ejercicios, halle el valor o valores de k que hacen que cada función sea continua en el intervalo dado.

145. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x < k \\ 2x - 3, & k \leq x \leq 8 \end{cases}$

146. $f(\theta) = \begin{cases} \text{sen}\,\theta, & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ \cos(\theta + k), & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

147. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+2}, & x \neq -2 \\ k, & x = -2 \end{cases}$

148. $f(x) = \begin{cases} e^{kx}, & 0 \leq x < 4 \\ x + 3, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$

149. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{kx}, & 0 \leq x \leq 3 \\ x + 1, & 3 < x \leq 10 \end{cases}$

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema del valor intermedio (TVI).

150. Supongamos que $h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x \leq 2 \\ 5 + 4x, & x > 2 \end{cases}$ En el intervalo $[0, 4]$, no hay ningún valor de x tal que $h(x) = 10$, aunque $h(0) < 10$ y $h(4) > 10$. Explique por qué esto no contradice el TVI.

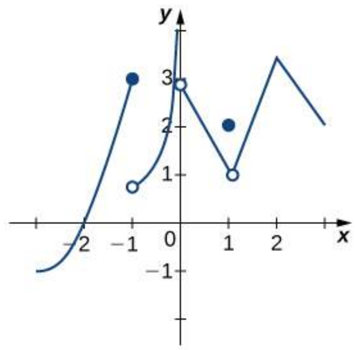
151. Una partícula que se mueve a lo largo de una línea tiene en cada tiempo t una función de posición $s(t)$, que es continua. Supongamos que $s(2) = 5$ y $s(5) = 2$. Otra partícula se mueve de manera que su posición viene dada por $h(t) = s(t) - t$. Explique por qué debe haber un valor c para $2 < c < 5$ de manera que $h(c) = 0$.

152. **[T]** Utilice el enunciado “el coseno de t es igual a t al cubo”.

a. Escriba una ecuación matemática del enunciado.
b. Demuestre que la ecuación de la parte a. tiene al menos una solución real.
c. Utilice una calculadora para encontrar un intervalo de longitud 0,01 que contenga una solución.

153. Aplicar el TVI para determinar si $2^x = x^3$ tiene una solución en uno de los intervalos $[1{,}25, 1{,}375]$ o $[1{,}375, 1{,}5]$. Explique brevemente su respuesta para cada intervalo.

154. Consideremos el gráfico de la función $y = f(x)$ que se muestra en el siguiente gráfico.



a. Halle todos los valores para los que la función es discontinua.
b. Para cada valor de la parte a., indique por qué no se aplica la definición formal de continuidad.
c. Clasifique cada discontinuidad como de salto, removible o infinita.

155. Supongamos que $f(x) = \begin{cases} 3x, x > 1 \\ x^3, x < 1 \end{cases}$.

a. Dibuje el gráfico de *f*.
b. ¿Es posible encontrar un valor *k* tal que $f(1) = k$, que hace que $f(x)$ continua para todos los números reales? Explique brevemente.

156. Supongamos que $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2-1}$ para $x \neq -1, 1$.

a. Dibuje el gráfico de *f*.
b. ¿Es posible encontrar valores k_1 y k_2 de manera que $f(-1) = k_1$ y $f(1) = k_2$, y eso hace a $f(x)$ continua para todos los números reales? Explique brevemente.

157. Dibuje el gráfico de la función $y = f(x)$ con las propiedades i. hasta la vi.

i. El dominio de *f* es $\left(-\infty, +\infty\right)$.
ii. *f* tiene una discontinuidad infinita en $x = -6$.
iii. $f(-6) = 3$
iv. $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = 2$
v. $f(-3) = 3$
vi. *f* es continua por la izquierda pero no por la derecha en $x = 3$.
vii. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

158. Dibuje el gráfico de la función $y = f(x)$ con las propiedades i. hasta la iv.

i. El dominio de *f* es $[0, 5]$.
ii. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ existen y son iguales.
iii. $f(x)$ es continua por la izquierda pero no es continua en $x = 2$, y continua por la derecha pero no es continua en $x = 3$.
iv. $f(x)$ tiene una discontinuidad removible en $x = 1$, una discontinuidad de salto en $x = 2$, y se mantienen los siguientes límites

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -\infty$ y
$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 2$.

En los siguientes ejercicios, supongamos que $y = f(x)$ está definida para toda x. En cada descripción, dibuje un gráfico con la propiedad indicada.

159. Discontinua en $x = 1$ con la $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

160. Discontinua en $x = 2$ pero continua en otras partes con $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

Determine si cada una de las afirmaciones dadas es verdadera. Justifique su respuesta con una explicación o un contraejemplo.

161. $f(t) = \frac{2}{e^t - e^{-t}}$ es continua en todas partes.

162. Si los límites izquierdo y derecho de $f(x)$ cuando $x \to a$ existen y son iguales, entonces f no puede ser discontinua en $x = a$.

163. Si una función no es continua en un punto, entonces no está definida en ese punto.

164. Según el TVI, $\cos x - \operatorname{sen} x - x = 2$ tiene una solución en el intervalo $[-1, 1]$.

165. Si $f(x)$ es continua, de manera que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en $[a, b]$.

166. La función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$ es continua en el intervalo $[0, 3]$.

167. Si $f(x)$ es continua en todas partes y $f(a), f(b) > 0$, entonces no hay raíz de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

[T] Los siguientes problemas toman en cuenta la forma escalar de la ley de Coulomb, que describe la fuerza electrostática entre dos cargas puntuales, como los electrones. Viene dada por la ecuación $F(r) = k_e \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$, donde k_e es la constante de Coulomb, q_i son las magnitudes de las cargas de las dos partículas, y r es la distancia entre las dos partículas.

168. Para simplificar el cálculo de un modelo con muchas partículas que interactúan, después de cierto valor umbral $r = R$, aproximamos *F* a cero.

a. Explique el razonamiento físico de esta suposición.
b. ¿Cuál es la ecuación de fuerza?
c. Evalúe la fuerza *F* utilizando tanto la ley de Coulomb como nuestra aproximación, suponiendo que dos protones con una magnitud de carga de $1{,}6022 \times 10^{-19}$ culombios (C), y la constante de Coulomb $k_e = 8{,}988 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$ están a 1 m de distancia. Además, suponga que $R < 1$ m. ¿Cuánta inexactitud genera nuestra aproximación? ¿Es razonable nuestra aproximación?
d. ¿Existe algún valor finito de *R* para el que este sistema siga siendo continuo en *R*?

169. En vez de hacer que la fuerza sea 0 en *R*, dejamos que la fuerza sea 10^{-20} para $r \geq R$. Supongamos dos protones, que tienen una magnitud de carga $1{,}6022 \times 10^{-19}$ C, y la constante de Coulomb $k_e = 8{,}988 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$. ¿Existe un valor *R* que pueda hacer que este sistema sea continuo? Si es así, hállelo.

Recuerde la discusión sobre las naves espaciales del inicio del capítulo. Los siguientes problemas analizan el lanzamiento de un cohete desde la superficie de la Tierra. La fuerza de gravedad sobre el cohete viene dada por $F(d) = -mk/d^2$, donde m es la masa del cohete, d es la distancia del cohete al centro de la Tierra y k es una constante.

170. **[T]** Determine el valor y las unidades de *k* dado que la masa del cohete es de 3 millones de kg. (*Pista*: La distancia del centro de la Tierra a su superficie es de 6378 km).

171. **[T]** A partir de cierta distancia *D*, el efecto gravitatorio de la Tierra se hace bastante despreciable, por lo que podemos aproximar la función de fuerza mediante
$$F(d) = \begin{cases} -\frac{mk}{d^2} & \text{si } d < D \\ 10.000 & \text{si } d \geq D \end{cases}.$$
Usando el valor de k del ejercicio anterior, calcule la condición necesaria *D* tal que la función de fuerza permanezca continua.

172. A medida que el cohete se aleja de la superficie de la Tierra, hay una distancia *D* en la que el cohete pierde parte de su masa, puesto que ya no necesita el exceso de combustible almacenado. Podemos escribir esta función como
$$F(d) = \begin{cases} -\frac{m_1 k}{d^2} & \text{si } d < D \\ -\frac{m_2 k}{d^2} & \text{si } d \geq D \end{cases}.$$
¿Existe un valor *D* tal que esta función sea continua, suponiendo $m_1 \neq m_2$?

Demuestre que las siguientes funciones son continuas en todas partes

173. $f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$

174. $g(x) = |x|$

175. ¿Dónde es
$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \\ 1 \text{ si } x \text{ es racional} \end{cases}$$
es continua?

2.5 La definición precisa de un límite

Objetivos de aprendizaje

- **2.5.1** Describir la definición épsilon-delta de un límite.
- **2.5.2** Aplicar la definición épsilon-delta para hallar el límite de una función.
- **2.5.3** Describir las definiciones épsilon-delta de los límites unilaterales y de los límites infinitos.
- **2.5.4** Utilizar la definición épsilon-delta para demostrar las leyes de los límites.

Hasta ahora ya ha pasado de la definición muy informal de un límite en la introducción de este capítulo a la comprensión intuitiva de un límite. En este punto, debería tener una intuición muy fuerte de lo que significa el límite de una función y cómo puede hallarlo. En esta sección, convertiremos esa idea intuitiva de un límite en una definición formal utilizando un lenguaje matemático preciso. La definición formal de un límite es posiblemente una de las definiciones más desafiantes que encontrará al principio de sus estudios de cálculo; sin embargo, vale la pena cualquier esfuerzo para conciliarla con su noción intuitiva de un límite. La comprensión de esta definición es la llave que abre las puertas a una mejor comprensión del cálculo.

Cuantificar la cercanía

Antes de exponer la definición formal de un límite, debemos introducir algunas ideas preliminares. Recordemos que la distancia entre dos puntos *a* y *b* en una línea numérica viene dada por $|a-b|$.

- La afirmación $|f(x) - L| < \varepsilon$ puede interpretarse como: *La distancia entre $f(x)$ y L es menor que ε.*
- La afirmación $0 < |x - a| < \delta$ puede interpretarse como $x \neq a$ *y la distancia entre x y a es menor que δ.*

También es importante observar las siguientes equivalencias de valor absoluto:

- La afirmación $|f(x) - L| < \varepsilon$ equivale a la afirmación $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.
- La afirmación $0 < |x - a| < \delta$ equivale a la afirmación $a - \delta < x < a + \delta$ y $x \neq a$.

Con estas aclaraciones, podemos enunciar la **definición épsilon-delta del límite** formal.

Definición

Supongamos que $f(x)$ se define para todos los $x \neq a$ sobre un intervalo abierto que contiene *a*. Supongamos que *L* es un número real. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esta definición puede parecer bastante compleja desde el punto de vista matemático, pero resulta más fácil de entender si la desglosamos frase por frase. El enunciado en sí mismo implica algo llamado *cuantificador universal* (para cada $\varepsilon > 0$), hay un *cuantificador existencial* (existe un $\delta > 0$), y, por último, una *declaración condicional* (si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$). Echemos un vistazo a la Tabla 2.9, que desglosa la definición y traduce cada parte.

Definición	Explicación
1 Por cada $\varepsilon > 0$,	1 Para cada distancia positiva ε de *L*,
2. existe un $\delta > 0$,	2. Hay una distancia positiva δ de *a*,

Tabla 2.9 Explicación de la definición épsilon-delta del límite

Definición	Explicación
3. tal que	3. tal que
4. si $0 < \|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - L\| < \varepsilon$.	4. si *x* está más cerca que δ de *a* y $x \neq a$, entonces $f(x)$ está más cerca que ε de *L*.

Tabla 2.9 Explicación de la definición épsilon-delta del límite

Podemos entender mejor esta definición si la observamos geométricamente. La Figura 2.39 muestra los posibles valores de δ para varias opciones de $\varepsilon > 0$ para una función determinada $f(x)$, un número *a*, y un límite *L* en *a*. Obsérvese que a medida que elegimos valores menores de ε (la distancia entre la función y el límite), siempre podemos hallar un δ lo suficientemente pequeño de manera que si hemos elegido un valor de *x* dentro de δ de *a*, entonces el valor de $f(x)$ está dentro de ε del límite *L*.

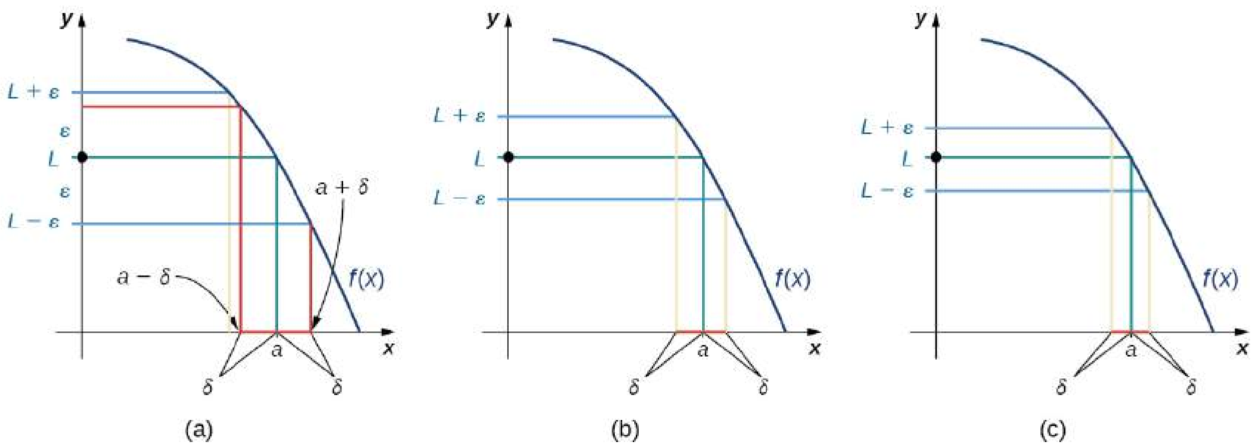


Figura 2.39 Estos gráficos muestran los posibles valores de δ, dadas opciones sucesivamente más pequeñas de ε.

MEDIOS

Visite la siguiente miniaplicación para experimentar con la búsqueda de valores de δ para determinados valores de ε:

La definición épsilon-delta de límites (http://www.openstax.org/l/20_epsilondelt)

El Ejemplo 2.39 muestra cómo se puede utilizar esta definición para demostrar una afirmación sobre el límite de una función específica en un valor determinado.

EJEMPLO 2.39

Probar una afirmación sobre el límite de una función específica

Compruebe que $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3$.

Solución

Supongamos que $\varepsilon > 0$.

La primera parte de la definición comienza "Para cada $\varepsilon > 0$“. Esto significa que debemos demostrar que lo que sigue es cierto sin importar el valor positivo de ε que se elija. Cuando afirmamos "Supongamos que $\varepsilon > 0$,” señalamos nuestra intención de hacerlo.

Elija $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

La definición continúa con "existe un $\delta > 0$." La frase "existe" en un enunciado matemático es siempre una señal para la búsqueda del tesoro. En otras palabras, debemos ir a buscar δ. Entonces, ¿de dónde vino exactamente $\delta = \varepsilon/2$? Hay dos enfoques básicos para rastrear a δ. Un método es totalmente algebraico y el otro es geométrico.

Comenzamos abordando el problema desde un punto de vista algebraico. Ya que en última instancia queremos $|(2x+1)-3| < \varepsilon$, comenzamos manipulando esta expresión: $|(2x+1)-3| < \varepsilon$ equivale a $|2x-2| < \varepsilon$, que a su vez equivale a $|2|\,|x-1| < \varepsilon$. Por último, esto equivale a $|x-1| < \varepsilon/2$. Así, parece que $\delta = \varepsilon/2$ es apropiado.

También podemos hallar δ mediante métodos geométricos. La Figura 2.40 demuestra cómo se hace.

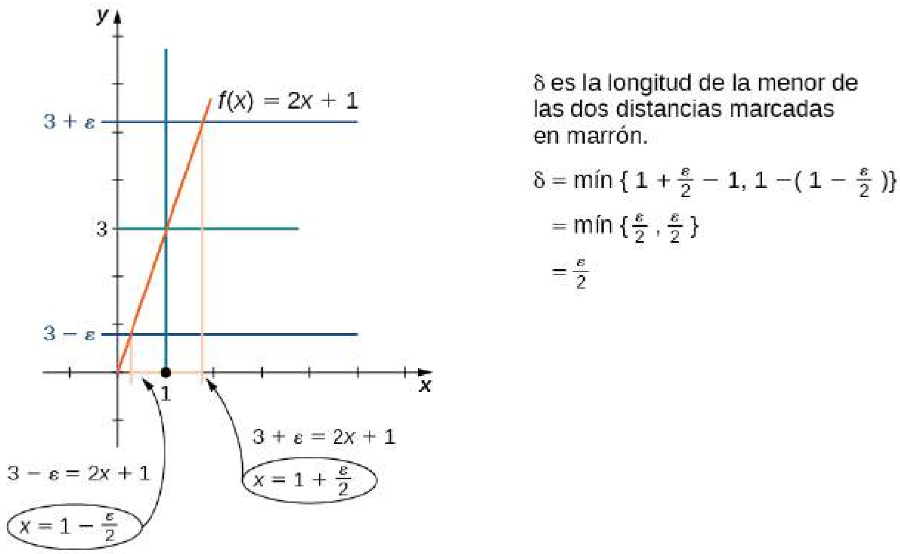


Figura 2.40 Este gráfico muestra cómo encontramos δ geométricamente.

Supongamos que $0 < |x-1| < \delta$. Cuando δ, nuestro objetivo es demostrar que si $0 < |x-1| < \delta$, entonces $|(2x+1)-3| < \varepsilon$. Para demostrar cualquier afirmación de la forma "Si esto, entonces aquello", empezamos por suponer "esto" e intentar conseguir "aquello".

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|(2x+1)-3| &= |2x-2| && \text{propiedad del valor absoluto}\\
&= |2\,(x-1)| &&\\
&= |2|\,|x-1| && |2| = 2\\
&= 2\,|x-1| &&\\
&< 2.\,\delta && \text{aquí es donde usamos la suposición de que } 0 < |x-1| < \delta\\
&= 2.\,\tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon && \text{aquí es donde usamos nuestra elección de } \delta = \varepsilon/2
\end{aligned}$$

Análisis

En esta parte de la prueba, comenzamos con $|(2x+1)-3|$ y utilizamos nuestra suposición $0 < |x-1| < \delta$ en una parte clave de la cadena de desigualdades para conseguir $|(2x+1)-3|$ sea inferior a ε. Con la misma facilidad podríamos haber manipulado la supuesta desigualdad $0 < |x-1| < \delta$ para llegar a $|(2x+1)-3| < \varepsilon$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
0 < |x-1| < \delta &\Rightarrow |x-1| < \delta\\
&\Rightarrow -\delta < x-1 < \delta\\
&\Rightarrow -\tfrac{\varepsilon}{2} < x-1 < \tfrac{\varepsilon}{2}\\
&\Rightarrow -\varepsilon < 2x-2 < \varepsilon\\
&\Rightarrow -\varepsilon < 2x-2 < \varepsilon\\
&\Rightarrow |2x-2| < \varepsilon\\
&\Rightarrow |(2x+1)-3| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$. (Una vez completada la prueba, expresamos lo que hemos conseguido)

Después de eliminar todas las observaciones, aquí está la versión final de la prueba:

Supongamos que $\varepsilon > 0$.

Elija $\delta = \varepsilon/2$.

Supongamos que $0 < |x-1| < \delta$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |(2x+1)-3| &= |2x-2| \\ &= |2(x-1)| \\ &= |2|\,|x-1| \\ &= 2\,|x-1| \\ &< 2.\,\delta \\ &= 2.\,\frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 1}(2x+1) = 3$.

La siguiente estrategia de resolución de problemas resume el tipo de prueba que elaboramos en el Ejemplo 2.39.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Al demostrar que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ para una función específica $f(x)$

1. Comencemos la prueba con la siguiente afirmación: Supongamos que $\varepsilon > 0$.
2. A continuación, tenemos que obtener un valor para δ. Después de haberlo obtenido, hacemos la siguiente afirmación, rellenando el espacio en blanco con nuestra elección de δ: Elija $\delta =$ ________.
3. El siguiente enunciado de la prueba debería ser (en este punto, completamos nuestro valor dado para *a*): Suponga que $0 < |x-a| < \delta$.
4. A continuación, con base en esta suposición, tenemos que demostrar que $|f(x) - L| < \varepsilon$, donde $f(x)$ y *L* son nuestra función $f(x)$ y nuestro límite *L*. En algún momento, necesitamos utilizar $0 < |x-a| < \delta$.
5. Concluimos nuestra prueba con la afirmación: Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

EJEMPLO 2.40

Probar una afirmación sobre un límite

Complete la prueba de que $\lim\limits_{x \to -1}(4x+1) = -3$ al rellenar los espacios en blanco.

Supongamos que ____.

Elija $\delta =$ ________.

Supongamos que $0 < |x-$ ________ $| < \delta$.

Así, |__________ − __________| =____ ε.

Solución

Comenzamos llenando los espacios en blanco en los que la definición especifica las opciones. Por lo tanto, tenemos

Supongamos que $\varepsilon > 0$.

Elija $\delta =$ ________.

Supongamos que $0 < |x-(-1)| < \delta$. (o, de forma equivalente, $0 < |x+1| < \delta$).

Así, $|(4x+1)-(-3)| = |4x+4| = |4|\,|x+1| < 4\delta$________$\varepsilon$.

Al centrarnos en la última línea de la prueba, notamos que deberíamos elegir $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Ahora completamos la redacción final de la prueba:

Supongamos que $\varepsilon > 0$.

Elija $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Supongamos que $0 < |x - (-1)| < \delta$ (o, de forma equivalente, $0 < |x + 1| < \delta$).

Así, $|(4x + 1) - (-3)| = |4x + 4| = |4|\,|x + 1| < 4\delta = 4\,(\varepsilon/4) = \varepsilon$.

2.27 Complete la prueba de que $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$ al rellenar los espacios en blanco.

Supongamos que ______.

Elija $\delta =$ ________.

Supongamos que $0 < |x -$ _____$| <$ _____.

Por lo tanto,

$|$________ $-$ _____$| =$ ___________________________________ε.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

En el Ejemplo 2.39 y el Ejemplo 2.40, las pruebas eran bastante sencillas, ya que las funciones con las que trabajábamos eran lineales. En el Ejemplo 2.41, vemos cómo modificar la prueba para acomodar una función no lineal.

EJEMPLO 2.41

Demostración de una afirmación sobre el límite de una función específica (enfoque geométrico)

Compruebe que $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Solución

1. Supongamos que $\varepsilon > 0$. La primera parte de la definición comienza "Para cada $\varepsilon > 0$," por lo que debemos demostrar que lo que sigue es cierto sin importar el valor positivo de ε que se elija. Cuando afirmamos "Supongamos que $\varepsilon > 0$," señalamos nuestra intención de hacerlo.
2. Sin perder la generalidad, asuma que $\varepsilon \leq 4$. Surgen dos preguntas: ¿Por qué queremos $\varepsilon \leq 4$ y ¿por qué está bien hacer esa suposición? En respuesta a la primera pregunta: Más adelante, en el proceso de resolución de δ, descubriremos que δ implica la cantidad $\sqrt{4 - \varepsilon}$. En consecuencia, necesitamos $\varepsilon \leq 4$. En respuesta a la segunda pregunta: Si podemos hallar $\delta > 0$ que "funciona" para $\varepsilon \leq 4$, entonces "funcionará" para cualquier $\varepsilon > 4$ también. Tenga en cuenta que, aunque siempre está bien poner un límite superior a ε, nunca se debe poner un límite inferior (distinto de cero) a ε.
3. Elija $\delta = \min\left\{2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\right\}$. La Figura 2.41 muestra cómo hemos hecho esta elección de δ.

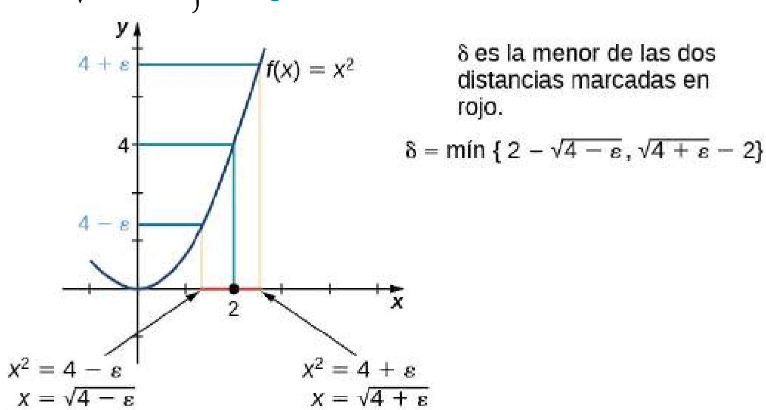


Figura 2.41 Este gráfico muestra cómo encontramos δ geométricamente para un ε dado para la prueba en el Ejemplo 2.41.

4. Debemos mostrar: Si los valores de $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|x^2 - 4| < \varepsilon$, por lo que debemos empezar por asumir

$$0 < |x - 2| < \delta.$$

No necesitamos realmente $0 < |x - 2|$ (en otras palabras, $x \neq 2$) para esta prueba. Dado que $0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 2| < \delta$, está bien para colocar $0 < |x - 2|$.

$$|x - 2| < \delta.$$

Por lo tanto,

$$-\delta < x - 2 < \delta.$$

Recordemos que $\delta = \min\left\{2 - \sqrt{4-\varepsilon}, \sqrt{4+\varepsilon} - 2\right\}$. Por lo tanto, $\delta \leq 2 - \sqrt{4-\varepsilon}$ y en consecuencia $-\left(2 - \sqrt{4-\varepsilon}\right) \leq -\delta$. También utilizamos $\delta \leq \sqrt{4+\varepsilon} - 2$ aquí. En este punto podríamos preguntarnos: ¿Por qué sustituimos $2 - \sqrt{4-\varepsilon}$ por δ en el lado izquierdo de la desigualdad y $\sqrt{4+\varepsilon} - 2$ en el lado derecho de la desigualdad? Si nos fijamos en la Figura 2.41, vemos que $2 - \sqrt{4-\varepsilon}$ corresponde a la distancia a la izquierda de 2 en el eje *x* y $\sqrt{4+\varepsilon} - 2$ corresponde a la distancia de la derecha. Por lo tanto,

$$-\left(2 - \sqrt{4-\varepsilon}\right) \leq -\delta < x - 2 < \delta \leq \sqrt{4+\varepsilon} - 2.$$

Simplificamos la expresión de la izquierda:

$$-2 + \sqrt{4-\varepsilon} < x - 2 < \sqrt{4+\varepsilon} - 2.$$

Entonces, sumamos 2 a todas las partes de la desigualdad:

$$\sqrt{4-\varepsilon} < x < \sqrt{4+\varepsilon}.$$

Cuadramos todas las partes de la desigualdad. Está bien hacerlo, ya que todas las partes de la desigualdad son positivas:

$$4 - \varepsilon < x^2 < 4 + \varepsilon.$$

Restamos 4 a todas las partes de la desigualdad:

$$-\varepsilon < x^2 - 4 < \varepsilon.$$

Por último,

$$|x^2 - 4| < \varepsilon.$$

5. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

2.28 Halle δ correspondiente a $\varepsilon > 0$ para probar que $\lim_{x \to 9} \sqrt{x} = 3$.

El enfoque geométrico para demostrar que el límite de una función toma un valor específico funciona bastante bien para algunas funciones. Además, el conocimiento de la definición formal del límite que proporciona este método es inestimable. Sin embargo, también podemos abordar las pruebas de límites desde un punto de vista puramente algebraico. En muchos casos, un enfoque algebraico no solo puede proporcionarnos una visión adicional de la definición, sino que también puede resultar más sencillo. Además, el enfoque algebraico es la principal herramienta utilizada en las pruebas de las afirmaciones sobre los límites. Para el Ejemplo 2.42, adoptamos un enfoque puramente algebraico.

EJEMPLO 2.42

Demostración de una afirmación sobre el límite de una función específica (enfoque algebraico)

Compruebe que $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^2 - 2x + 3\right) = 6.$

Solución

Utilicemos nuestro esquema de la estrategia de resolución de problemas:

1. Supongamos que $\varepsilon > 0$.
2. Elija $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$. Esta elección de δ puede parecer extraña a primera vista, pero se obtuvo echando un vistazo a nuestra desigualdad final deseada: $\left|\left(x^2 - 2x + 3\right) - 6\right| < \varepsilon$. Esta desigualdad equivale a $|x + 1| \,.\, |x - 3| < \varepsilon$. En este punto, la tentación de elegir simplemente $\delta = \frac{\varepsilon}{x-3}$ es muy fuerte. Lamentablemente, nuestra elección de δ debe depender únicamente de ε y de ninguna otra variable. Si podemos sustituir $|x - 3|$ por un valor numérico, podremos resolver el problema. Este es el lugar donde si asumimos $\delta \le 1$ entra en juego. La elección de $\delta \le 1$ aquí es arbitraria. Podríamos haber utilizado fácilmente cualquier otro número positivo. En algunas pruebas, puede ser necesario un mayor cuidado en esta elección. Ahora bien, ya que $\delta \le 1$ y $|x + 1| < \delta \le 1$, podemos demostrar que $|x - 3| < 5$. En consecuencia, $|x + 1| \,.\, |x - 3| < |x + 1| \,.\, 5$. En este punto nos damos cuenta de que también necesitamos $\delta \le \varepsilon/5$. Así, elegimos $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$.
3. Supongamos que $0 < |x + 1| < \delta$. Por lo tanto,
$$|x + 1| < 1 \text{ y } |x + 1| < \frac{\varepsilon}{5}.$$
Dado que $|x + 1| < 1$, podemos concluir que $-1 < x + 1 < 1$. Así, restando 4 a todas las partes de la desigualdad, obtenemos $-5 < x - 3 < -1$. En consecuencia, $|x - 3| < 5$. Esto nos da
$$\left|\left(x^2 - 2x + 3\right) - 6\right| = |x + 1| \,.\, |x - 3| < \frac{\varepsilon}{5} . 5 = \varepsilon.$$
Por lo tanto,
$$\lim_{x \to -1} \left(x^2 - 2x + 3\right) = 6.$$

2.29 Complete la prueba de que $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

Supongamos que $\varepsilon > 0$; elija $\delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$; asuma que $0 < |x\text{–}1| < \delta$.

Dado que $|x\text{–}1| < 1$, podemos concluir que $-1 < x\text{–}1 < 1$. Por lo tanto, $1 < x + 1 < 3$. Por lo tanto, $|x + 1| < 3$.

Verás que, en general, cuanto más compleja sea una función, es más probable que el enfoque algebraico sea el más fácil de aplicar. El enfoque algebraico también es más útil para demostrar afirmaciones sobre los límites.

Prueba de las leyes de los límites

Ahora demostraremos cómo utilizar la definición épsilon-delta de un límite para construir una prueba rigurosa de una de las leyes de límites. La **desigualdad del triángulo** se utiliza en un punto clave de la prueba, así que primero revisamos esta propiedad clave del valor absoluto.

Definición

La **desigualdad del triángulo** establece que si *a* y *b* son cualquier número real, entonces $|a + b| \le |a| + |b|$.

Prueba

Demostramos la siguiente ley de los límites: Si los valores de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$.

Supongamos que $\varepsilon > 0$.

Elija $\delta_1 > 0$ de modo que si $0 < |x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon/2$.

Elija $\delta_2 > 0$ de modo que si $0 < |x - a| < \delta_2$, entonces $|g(x) - M| < \varepsilon/2$.

Elija $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Supongamos que $0 < |x - a| < \delta$.

Por lo tanto,

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &= |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ahora exploraremos el significado de la inexistencia de un límite. El límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe si no hay ningún número real L para el que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Así, para todos los números reales L, $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$. Para entender lo que esto significa, examinamos cada parte de la definición de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ junto con su opuesto. Una explicación de la definición se halla en la Tabla 2.10.

Definición	Opuesto
1 Por cada $\varepsilon > 0$,	1 Existe $\varepsilon > 0$ para que
2. existe un $\delta > 0$, para que	2. por cada $\delta > 0$,
3. si $0 < \|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - L\| < \varepsilon$.	3. Existe una x que satisface $0 < \|x - a\| < \delta$ por lo que $\|f(x) - L\| \geq \varepsilon$.

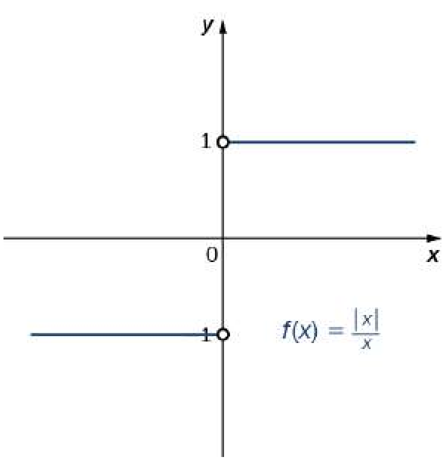
Tabla 2.10 **Explicación de la definición de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y su opuesto**

Por último, podemos afirmar lo que significa que un límite no exista. El límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe si para cada número real L, existe un número real $\varepsilon > 0$ de manera que para todos los $\delta > 0$, hay una x que satisface $0 < |x - a| < \delta$, por lo que $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Apliquemos esto en el Ejemplo 2.43 para demostrar que un límite no existe.

EJEMPLO 2.43

Demostrar la inexistencia de un límite

Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ no existe. El gráfico de $f(x) = |x|/x$ aquí se muestra:



Solución

Supongamos que L es un candidato a límite. Elija $\varepsilon = 1/2$.

Supongamos que $\delta > 0$. O bien $L \geq 0$ o $L < 0$. Si $L \geq 0$, entonces supongamos que $x = -\delta/2$. Por lo tanto,

$$|x - 0| = \left|-\frac{\delta}{2} - 0\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

y

$$\left|\frac{\left|-\frac{\delta}{2}\right|}{-\frac{\delta}{2}} - L\right| = |-1 - L| = L + 1 \geq 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Por otro lado, si $L < 0$, entonces supongamos que $x = \delta/2$. Por lo tanto,

$$|x - 0| = \left|\frac{\delta}{2} - 0\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

y

$$\left|\frac{\left|\frac{\delta}{2}\right|}{\frac{\delta}{2}} - L\right| = |1 - L| = |L| + 1 \geq 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Así, para cualquier valor de L, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \neq L$.

Límites unilaterales e infinitos

De la misma manera que primero adquirimos una comprensión intuitiva de los límites y luego pasamos a una definición más rigurosa de un límite, ahora volvemos a examinar los límites unilaterales. Para ello, modificamos la definición épsilon-delta de un límite para dar definiciones formales épsilon-delta para los límites por la derecha y la izquierda en un punto. Estas definiciones solo requieren ligeras modificaciones respecto a la definición del límite. En la definición del límite por la derecha, la desigualdad $0 < x - a < \delta$ sustituye a $0 < |x - a| < \delta$, que asegura que solo consideramos los valores de x que son mayores que (a la derecha de) a. Del mismo modo, en la definición del límite por la izquierda, la desigualdad $-\delta < x - a < 0$ sustituye a $0 < |x - a| < \delta$, que garantiza que solo consideremos los valores de x que son menores que (a la izquierda de) a.

Definición

Límite por la derecha: Supongamos que $f(x)$ se define sobre un intervalo abierto de la forma (a, b) donde $a < b$. Entonces,

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Límite por la izquierda: Supongamos que $f(x)$ se define sobre un intervalo abierto de la forma (b, c) donde $b < c$. Entonces,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $-\delta < x - a < 0$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

EJEMPLO 2.44

Probar una declaración sobre un límite por la derecha

Compruebe que $\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$.

Solución

Supongamos que $\varepsilon > 0$.

Elija $\delta = \varepsilon^2$. Como en última instancia queremos $\left|\sqrt{x-4} - 0\right| < \varepsilon$, manipulamos esta desigualdad para obtener $\sqrt{x-4} < \varepsilon$ o, de forma equivalente, $0 < x - 4 < \varepsilon^2$, que da $\delta = \varepsilon^2$ una elección clara. También podemos determinar δ geométricamente, como se muestra en la Figura 2.42.

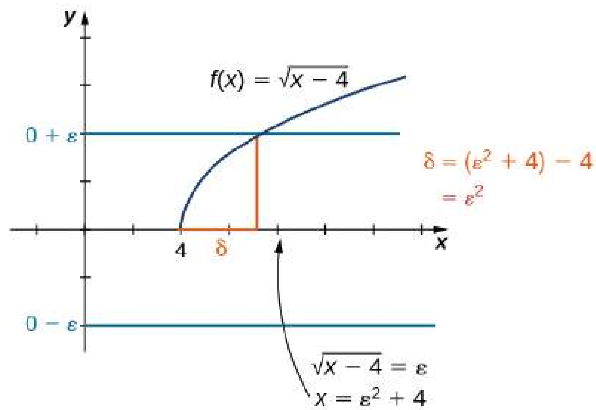


Figura 2.42 Este gráfico muestra cómo encontramos δ para la prueba en el Ejemplo 2.44.

Supongamos que $0 < x - 4 < \delta$. Por lo tanto, $0 < x - 4 < \varepsilon^2$. Por lo tanto, $0 < \sqrt{x-4} < \varepsilon$. Finalmente, $\left|\sqrt{x-4} - 0\right| < \varepsilon$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 0$.

2.30 Halle δ correspondiente a ε para demostrar que $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$.

Concluimos el proceso de convertir nuestras ideas intuitivas de varios tipos de límites en definiciones formales rigurosas, persiguiendo una definición formal de los límites infinitos. Para tener $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, queremos que los valores de la función $f(x)$ se hagan cada vez más grandes a medida que *x* se acerca a *a*. En lugar del requisito de que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para un ε arbitrariamente pequeño cuando $0 < |x - a| < \delta$ para un delta lo bastante pequeño δ, queremos $f(x) > M$ para un *M* positivo arbitrariamente grande cuando $0 < |x - a| < \delta$ para un delta lo bastante pequeño δ. La Figura 2.43 ilustra esta idea mostrando el valor de δ para valores sucesivamente mayores de *M*.

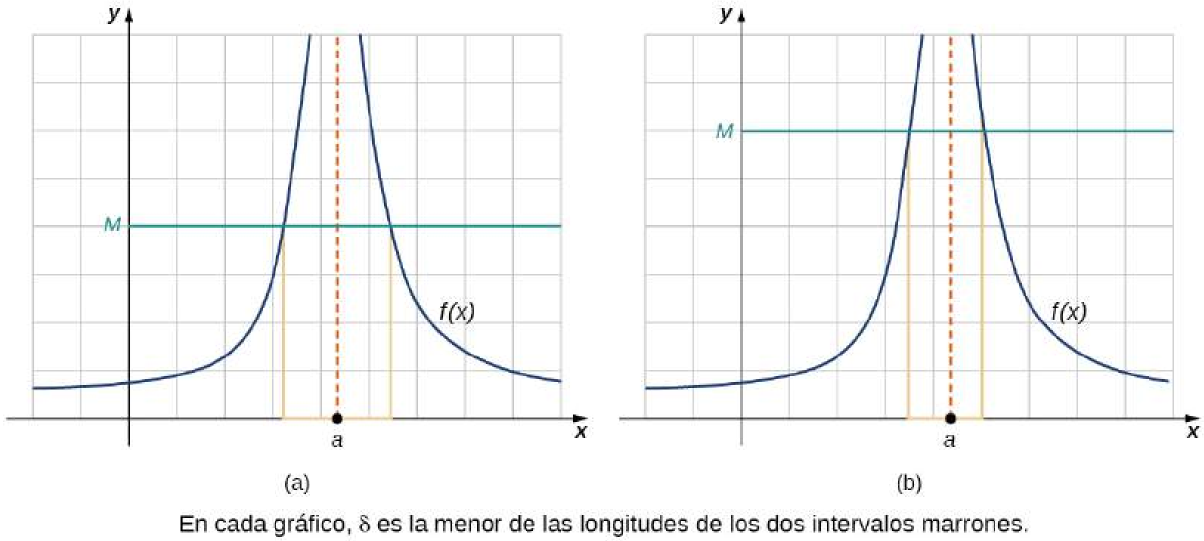


Figura 2.43 Estos gráficos representan los valores de δ para que *M* demuestre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Definición

Supongamos que $f(x)$ se define para todos los $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene *a*. Entonces, tenemos un límite infinito

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si para cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) > M$.

Supongamos que $f(x)$ se define para todos los $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene *a*. Entonces, tenemos un límite infinito negativo

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si para cada $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $f(x) < -M$.

SECCIÓN 2.5 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, escriba la definición adecuada de $\varepsilon - \delta$ para cada uno de los enunciados dados.

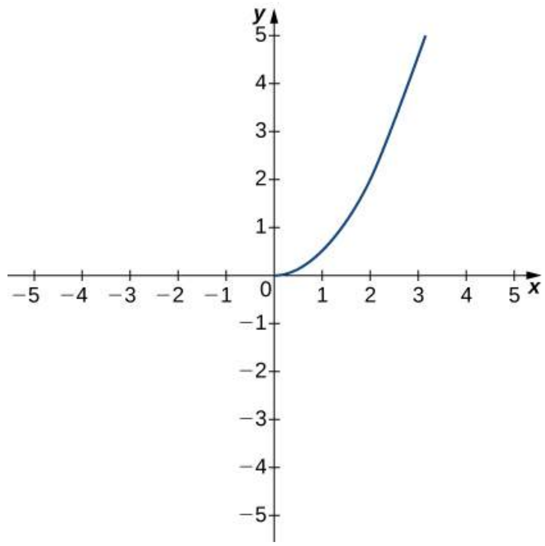
176. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = N$

177. $\lim\limits_{t \to b} g(t) = M$

178. $\lim\limits_{x \to c} h(x) = L$

179. $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$

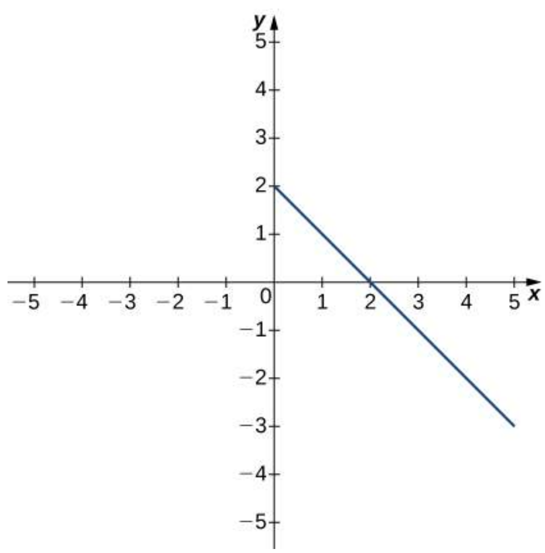
El siguiente gráfico de la función f satisface $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$. *En los siguientes ejercicios, determine un valor de* $\delta > 0$ *que satisfaga cada afirmación.*



180. Si los valores de $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 2| < 1$.

181. Si los valores de $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|f(x) - 2| < 0{,}5$.

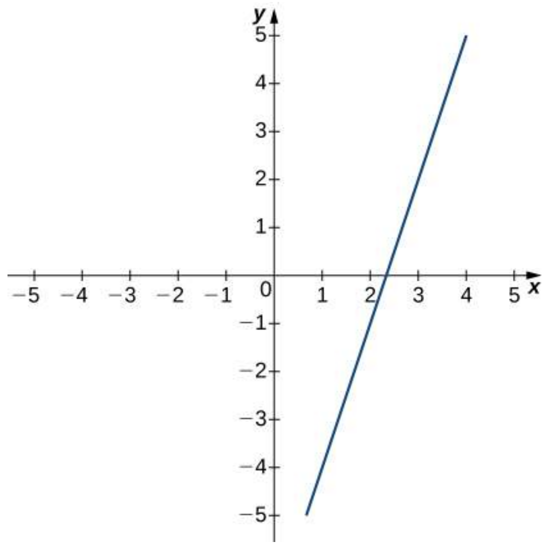
El siguiente gráfico de la función f satisface $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$. *En los siguientes ejercicios, determine un valor de* $\delta > 0$ *que satisfaga cada afirmación.*



182. Si los valores de $0 < |x - 3| < \delta$, entonces $|f(x) + 1| < 1$.

183. Si los valores de $0 < |x - 3| < \delta$, entonces $|f(x) + 1| < 2$.

El siguiente gráfico de la función f satisface $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$. En los siguientes ejercicios, para cada valor de ε, halle un valor de $\delta > 0$ de tal manera que la definición precisa de límite se cumpla.



184. $\varepsilon = 1{,}5$

185. $\varepsilon = 3$

[T] *En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora gráfica para hallar un número δ para que las afirmaciones se cumplan.*

186. $\left|\operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{2}\right| < 0{,}1,$ siempre que $\left|x - \frac{\pi}{12}\right| < \delta$

187. $\left|\sqrt{x-4} - 2\right| < 0{,}1,$ siempre que $|x - 8| < \delta$

En los siguientes ejercicios, utilice la definición precisa de límite para demostrar los límites dados.

188. $\lim\limits_{x \to 2} (5x + 8) = 18$

189. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

190. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

191. $\lim\limits_{x \to 0} x^4 = 0$

192. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2x) = 8$

En los siguientes ejercicios, utilice la definición precisa de límite para demostrar los límites unilaterales dados.

193. $\lim\limits_{x \to 5^-} \sqrt{5 - x} = 0$

194. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -2,$ donde $f(x) = \begin{cases} 8x - 3, & \text{si } x < 0 \\ 4x - 2, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$

195. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 3,$ donde $f(x) = \begin{cases} 5x - 2, & \text{si } x < 1 \\ 7x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$

En los siguientes ejercicios, utilice la definición precisa de límite para demostrar los límites infinitos dados.

196. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

197. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3}{(x+1)^2} = \infty$

198. $\lim\limits_{x \to 2} -\frac{1}{(x-2)^2} = -\infty$

199. Un ingeniero utiliza una máquina para cortar un cuadrado plano de Aerogel de 144 cm^2. Si hay una tolerancia de error máxima en el área de 8 cm^2, ¿con qué precisión debe cortar el lado, suponiendo que todos los lados tienen la misma longitud? ¿Cómo se relacionan estos números con δ, ε, *a*, y *L*?

200. Utilice la definición precisa de límite para demostrar que el siguiente límite no existe $\lim\limits_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$.

201. Utilizando definiciones precisas de los límites, demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe, dado que $f(x)$ es la función techo. (*Pista*: Pruebe cualquier $\delta < 1$).

202. Utilizando definiciones precisas de los límites, demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe: $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es racional} \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$. (*Pista*: Piense que siempre puedes elegir un número racional $0 < r < d$, pero $|f(r) - 0| = 1$).

203. Utilizando definiciones precisas de los límites, determine $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ por $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \text{ es racional} \\ 0 \text{ si } x \text{ es irracional} \end{cases}$. (*Pista*: Divida en dos casos, *x* racional y *x* irracional)

204. Utilizando la función del ejercicio anterior, use la definición precisa de límites para demostrar que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe para $a \neq 0$.

En los siguientes ejercicios, supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ ambos existen. Utilice la definición precisa de límites para demostrar las siguientes leyes de los límites:

205. $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = L + M$

206. $\lim\limits_{x\to a} [cf(x)] = cL$ para cualquier constante real *c(Pista*: Consideremos dos casos: $c = 0$ y $c \neq 0$).

207. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = LM$. (*Sugerencia*: $|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \leq |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L|$).

Revisión del capítulo

Términos clave

asíntota vertical una función tiene una asíntota vertical en $x = a$ si el límite a medida que *x* se acerca a *a* desde la derecha o la izquierda es infinito

cálculo diferencial el campo del cálculo que se ocupa del estudio de las derivadas y sus aplicaciones

cálculo integral el estudio de las integrales y sus aplicaciones

cálculo multivariable el estudio del cálculo de funciones de dos o más variables

continuidad en un intervalo función que puede ser trazada con un lápiz sin levantarlo del papel; es continua en un intervalo abierto si es continua en cada punto del intervalo; una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado de la forma $[a, b]$ si es continua en cada punto de (a, b), y es continua por la derecha en *a* y por la izquierda en *b*

continuidad en un punto una función $f(x)$ es continua en un punto *a* si y solo si se cumplen las tres condiciones siguientes: (1) $f(a)$ está definida, (2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe y (3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

continuidad por la derecha una función es continua por la derecha en *a* si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

continuidad por la izquierda una función es continua por la izquierda en *b* si $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

definición epsilon-delta del límite $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$

definición intuitiva del límite si todos los valores de la función $f(x)$ se acercan al número real *L* a medida que los valores de $x (\neq a)$ se acercan a *a*, $f(x)$ se acerca a *L*

desigualdad triangular si *a* y *b* son números reales cualesquiera, entonces $|a + b| \leq |a| + |b|$

discontinuidad de salto se produce una discontinuidad de salto en un punto *a* si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ ambos existen, pero $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

discontinuidad en un punto una función es discontinua en un punto o tiene una discontinuidad en un punto si no es continua en el punto

discontinuidad infinita se produce una discontinuidad infinita en un punto *a* si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

discontinuidad removible se produce una discontinuidad removible en un punto *a* si $f(x)$ es discontinua en *a*, pero $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe

ley de la diferencia para los límites la ley límite $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = L - M$

ley de la potencia para los límites la ley límite $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n = L^n$ para cada número entero positivo *n*

ley de la raíz para los límites la ley límite $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ para todo *L* si *n* es impar y para $L \geq 0$ si *n* es par

ley de productos para los límites la ley límite $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \,.\, g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x) = L.\, M$

ley de suma para los límites la ley de los límites $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$

ley del cociente para los límites la ley límite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}$ por $M \neq 0$

ley del múltiplo constante para los límites la ley límite $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c.\, \lim\limits_{x \to a} f(x) = cL$

leyes de los límites las propiedades individuales de los límites; para cada una de las leyes individuales, supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ se define para todos los $x \neq a$ en algún intervalo abierto que contenga *a*; supongamos que *L* y *M* son números reales de modo que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$; supongamos que *c* es una constante

límite el proceso de dejar que *x* o *t* se acerquen a *a* en una expresión; el límite de una función $f(x)$ a medida que *x* se acerca a *a* es el valor al que se acerca $f(x)$ a medida que *x* se acerca a *a*

límite infinito una función tiene un límite infinito en un punto *a* si aumenta o disminuye sin límite al acercarse a *a*

límite unilateral un límite unilateral de una función es un límite tomado por la izquierda o por la derecha

secante una línea secante a una función $f(x)$ en *a* es una línea que pasa por el punto $(a, f(a))$ y otro punto de la función; la pendiente de la línea secante está dada por $m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

tangente una línea tangente al gráfico de una función en un punto $(a, f(a))$ es la línea a la que se aproximan las líneas secantes a través de $(a, f(a))$ a medida que pasan por puntos de la función con valores de *x* que se aproximan a *a*; la pendiente de la línea tangente a un gráfico en *a* mide la tasa de cambio de la función en *a*

teorema del emparedado establece que si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene

a y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ donde L es un número real, entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$

Teorema del valor intermedio supongamos que f es continua en un intervalo cerrado y limitado $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$; si z es un número real cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces hay un número c en $[a, b]$ que satisface $f(c) = z$

velocidad instantánea la velocidad instantánea de un objeto con una función de posición que viene dada por $s(t)$ es el valor que tienen las velocidades medias en intervalos de la forma $[t, a]$ y $[a, t]$ se acercan a medida que los valores de t se acercan a a, siempre que exista tal valor

velocidad media el cambio en la posición de un objeto dividido entre la duración de un periodo; la velocidad media de un objeto en un intervalo de tiempo $[t, a]$ (si $t < a$ o $[a, t]$ si $t > a$), con una posición dada por $s(t)$, que es $v_{\text{ave}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$

Ecuaciones clave

Pendiente de una línea secante	$m_{\text{sec}} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
Velocidad media en el intervalo $[a, t]$	$v_{\text{ave}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$

Definición intuitiva del límite	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$
Dos límites importantes	$\lim\limits_{x \to a} x = a \quad \lim\limits_{x \to a} c = c$
Límites unilaterales	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \quad \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$
Límites infinitos por la izquierda	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$
Límites infinitos por la derecha	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty \quad \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$
Límites infinitos bilaterales	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty : \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty : \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Resultados del límite básico	$\lim\limits_{x \to a} x = a \ \lim\limits_{x \to a} c = c$
Límites importantes	$\lim\limits_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = 0$ $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$ $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$ $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0$

Conceptos clave

2.1 Un repaso previo del cálculo

- El cálculo diferencial surgió al tratar de resolver el problema de determinar la pendiente de una línea tangente a una curva en un punto. La pendiente de la línea tangente indica la tasa de cambio de la función, también llamada *derivada*. El cálculo de una derivada requiere calcular un límite.
- El cálculo integral surgió al tratar de resolver el problema de calcular el área de una región entre el gráfico de una función y el eje *x*. Podemos aproximar el área dividiéndola en rectángulos finos y sumando las áreas de estos

rectángulos. Esta suma conduce al valor de una función llamada *integral*. La integral también se calcula hallando un límite y, de hecho, está relacionada con la derivada de una función.
- El cálculo multivariable nos permite resolver problemas en el espacio tridimensional, lo que incluye la determinación del movimiento en el espacio y la búsqueda de volúmenes de sólidos.

2.2 El límite de una función

- Se puede utilizar una tabla de valores o un gráfico para estimar un límite.
- Si el límite de una función en un punto no existe, todavía es posible que existan los límites por la izquierda y por la derecha en ese punto.
- Si los límites de una función por la izquierda y por la derecha existen y son iguales, entonces el límite de la función es ese valor común.
- Podemos utilizar los límites para describir el comportamiento infinito de una función en un punto.

2.3 Las leyes de los límites

- Las leyes de los límites nos permiten evaluar los límites de las funciones sin tener que pasar cada vez por los procesos paso a paso.
- Para polinomios y funciones racionales, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Se puede evaluar el límite de una función factorizando y cancelando, multiplicando por un conjugado o simplificando una fracción compleja.
- El teorema del emparedado permite hallar el límite de una función si esta es siempre mayor que una función y menor que otra función con límites conocidos.

2.4 Continuidad

- Para que una función sea continua en un punto, debe estar definida en ese punto, su límite debe existir en este y el valor de la función en ese punto debe ser igual al valor del límite en el mismo.
- Las discontinuidades pueden clasificarse como removibles, de salto o infinitas.
- Una función es continua en un intervalo abierto si es continua en cada punto del intervalo. Es continua en un intervalo cerrado si es continua en cada punto de su interior y es continua en sus puntos finales.
- El teorema de la función compuesta dice: Si los valores de $f(x)$ es continua en L y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right) = f(L)$.
- El teorema del valor intermedio garantiza que si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función toma todos los valores entre los valores de sus extremos.

2.5 La definición precisa de un límite

- La noción intuitiva de un límite puede convertirse en una definición matemática rigurosa conocida como la *definición épsilon-delta del límite*.
- La definición épsilon-delta puede utilizarse para demostrar afirmaciones sobre los límites.
- La definición épsilon-delta de un límite puede modificarse para definir límites unilaterales.

Ejercicios de repaso

Verdadero o falso. En los siguientes ejercicios, justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

208. Una función tiene que ser continua en $x = a$ si el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

209. Puede utilizar la regla de cociente para evaluar $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

210. Si hay una asíntota vertical en $x = a$ para la función $f(x)$, entonces f es indefinida en el punto $x = a$.

211. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe, entonces f es indefinida en el punto $x = a$.

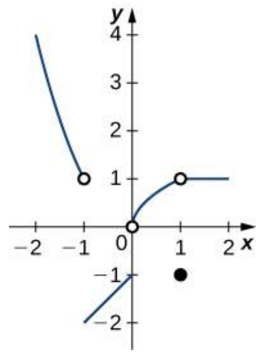
212. Utilizando el gráfico, halle cada límite o explique por qué no existe el límite.

a. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ grandes.

b. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ grandes.

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ grandes.

d. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



En los siguientes ejercicios, evalúe el límite algebraicamente o explique por qué el límite no existe.

213. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$

214. $\lim\limits_{x \to 0} 3x^2 - 2x + 4$

215. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-2x^2-1}{3x-2}$

216. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\cot x}{\cos x}$

217. $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x^2+25}{x+5}$

218. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2-2x-8}{x^2-4}$

219. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$

220. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

221. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{4-x}{\sqrt{x}-2}$

222. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}-2}$

Utilice el teorema del emparedado en los siguientes ejercicios para demostrar el límite.

223. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos(2\pi x) = 0$

224. $\lim\limits_{x \to 0} x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$

225. Determine el dominio tal que la función $f(x) = \sqrt{x-2} + xe^x$ sea continua en su dominio.

En los siguientes ejercicios, determine el valor de c tal que la función siga siendo continua. Dibuje la función resultante para asegurarse de que es continua.

226. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x > c \\ 2x, x \le c \end{cases}$

227. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, x > -1 \\ x^2 + c, x \le -1 \end{cases}$

En los siguientes ejercicios, utilice la definición precisa de límite para demostrar el límite.

228. $\lim\limits_{x \to 1} (8x + 16) = 24$

229. $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$

230. Se lanza una pelota al aire y su posición vertical viene dada por $x(t) = -4{,}9t^2 + 25t + 5.$ Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que la pelota debe aterrizar en el suelo en algún momento entre 5 s y 6 s después del lanzamiento.

231. Una partícula que se mueve a lo largo de una línea tiene un desplazamiento según la función $x(t) = t^2 - 2t + 4,$ donde x se mide en metros y t se mide en segundos. Halle la velocidad media durante el periodo $t = [0, 2]$.

232. A partir de los ejercicios anteriores, estime la velocidad instantánea en $t = 2$ comprobando la velocidad media dentro de $t = 0{,}01 \text{ sec}.$

3 DERIVADAS

Figura 3.1 El Hennessey Venom GT puede pasar de 0 a 200 mph en 14,51 segundos (créditos: modificación del trabajo de Codex41, Flickr).

Esquema del capítulo

Introducción

El Hennessey Venom GT es uno de los automóviles más rápidos del mundo. En 2014, alcanzó una velocidad récord de 270,49 mph. Puede pasar de 0 a 200 mph en 14,51 segundos. Las técnicas de este capítulo se pueden usar para calcular la aceleración que el Venom alcanza en esta hazaña (vea el Ejemplo 3.8).

El cálculo de la velocidad y sus cambios son aplicaciones importantes del cálculo, pero en realidad van mucho más allá. El cálculo es importante en todas las ramas de las matemáticas, la ciencia y la ingeniería, y es fundamental para el análisis en los negocios y también en la salud. En este capítulo, exploraremos una de las principales herramientas del cálculo, la derivada, y mostraremos las formas prácticas de calcular derivadas. También aplicaremos estas reglas a una serie de funciones en este capítulo para luego explorar las aplicaciones de estas técnicas.

3.1 Definir la derivada

Objetivos de aprendizaje

3.1.1 Reconocer el significado de la tangente a una curva en un punto.
3.1.2 Calcular la pendiente de una línea tangente.
3.1.3 Identificar la derivada como el límite de un cociente de diferencias.
3.1.4 Calcular la derivada de una función dada en un punto.
3.1.5 Describir la velocidad como una tasa de cambio.
3.1.6 Explicar la diferencia entre velocidad media y velocidad instantánea.
3.1.7 Estimar la derivada a partir de una tabla de valores.

Ahora que tenemos tanto una comprensión conceptual de los límites como la capacidad práctica de calcularlos, establecimos la base para nuestro estudio del cálculo, la rama de las matemáticas en la que calculamos derivadas e integrales. La mayoría de los matemáticos e historiadores coinciden en que el cálculo fue desarrollado de forma independiente por el inglés Isaac Newton $(1643–1727)$ y el alemán Gottfried Leibniz $(1646–1716)$, cuyas imágenes aparecen en la Figura 3.2. Cuando atribuimos a Newton y Leibniz el desarrollo del cálculo, a lo que hacemos referencia es al hecho de que Newton y Leibniz fueron los primeros en comprender la relación entre la derivada y la integral. Ambos matemáticos se beneficiaron del trabajo de sus predecesores, como Barrow, Fermat y Cavalieri. La relación inicial entre los dos matemáticos parece haber sido amistosa; sin embargo, en años posteriores estalló una amarga controversia sobre la prioridad de los trabajos de ambos. Aunque parece probable que Newton fuera el primero en llegar a las ideas que sustentan el cálculo, estamos en deuda con Leibniz por la notación que utilizamos habitualmente en la actualidad.

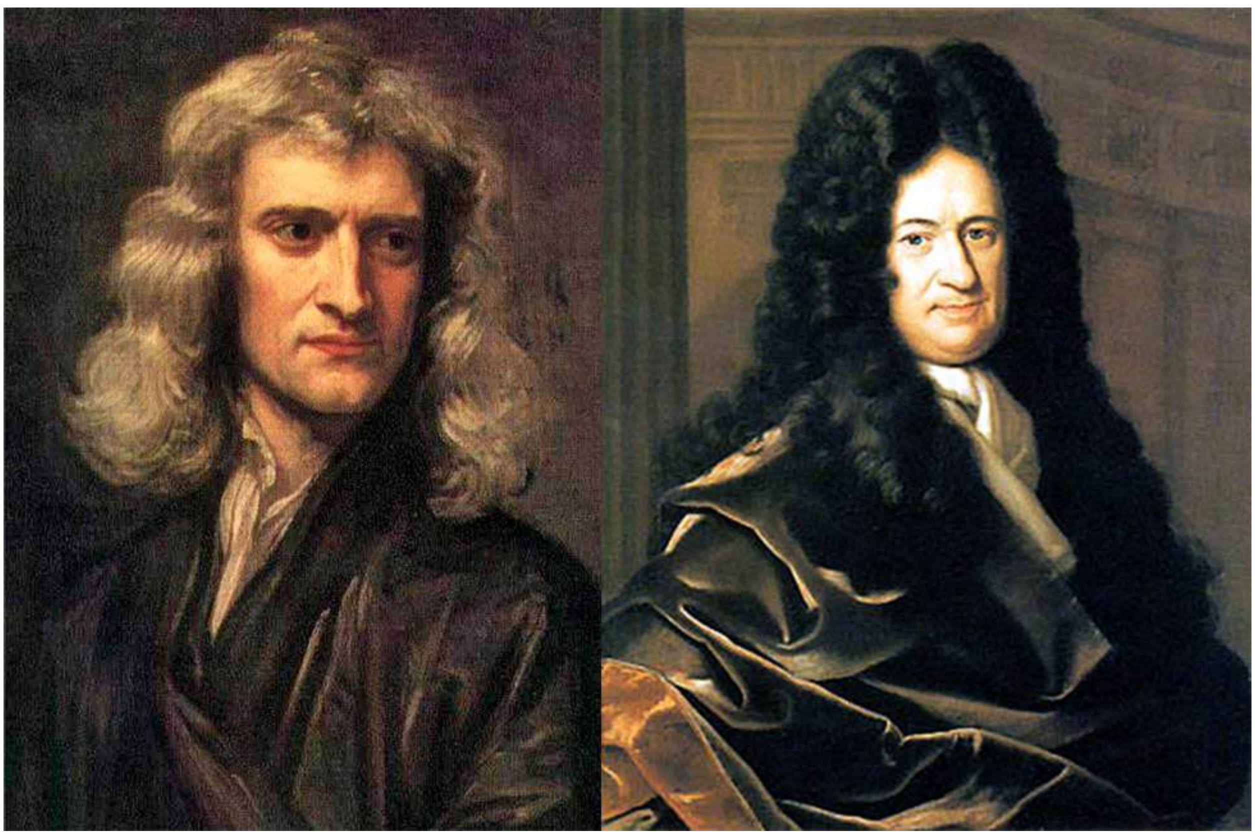


Figura 3.2 Se atribuye a Newton y a Leibniz el desarrollo del cálculo de forma independiente.

Rectas tangentes

Comenzamos nuestro estudio del cálculo revisando la noción de rectas secantes y rectas tangentes. Recordemos que utilizamos la pendiente de una línea secante a una función en un punto $(a, f(a))$ para estimar la tasa de cambio, o la tasa a la que cambia una variable en relación con otra. Podemos obtener la pendiente de la secante eligiendo un valor de x cerca de a y dibujar una línea a lo largo de los puntos $(a, f(a))$ y $(x, f(x))$, como se muestra en la Figura 3.3. La pendiente de esta línea viene dada por una ecuación en forma de cociente de diferencias:

$$m_{\sec} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

También podemos calcular la pendiente de una línea secante a una función en un valor a utilizando esta ecuación y sustituyendo x con la $a + h$, donde h es un valor cercano a 0. Luego podemos calcular la pendiente de la línea que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a + h, f(a + h))$. En este caso, encontramos que la línea secante tiene una pendiente dada por el siguiente cociente de diferencias con incremento h:

$$m_{\sec} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Definición

Supongamos que f es una función definida en un intervalo I que contiene a. Si $x \neq a$ está en I, entonces

$$Q = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3.1}$$

es un **cociente de diferencias**.

Además, si $h \neq 0$ se elige de manera que $a + h$ está en I, entonces

$$Q = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.2}$$

es un cociente de diferencias con incremento h.

MEDIOS

Vea el desarrollo de la derivada (http://www.openstax.org/l/20_calcapplets) con esta miniaplicación.

Estas dos expresiones para calcular la pendiente de una línea secante se ilustran en la Figura 3.3. Veremos que cada uno de estos dos métodos para encontrar la pendiente de una línea secante es de gran utilidad. Dependiendo del entorno, podemos elegir uno u otro. La principal consideración en nuestra elección suele depender de la facilidad de cálculo.

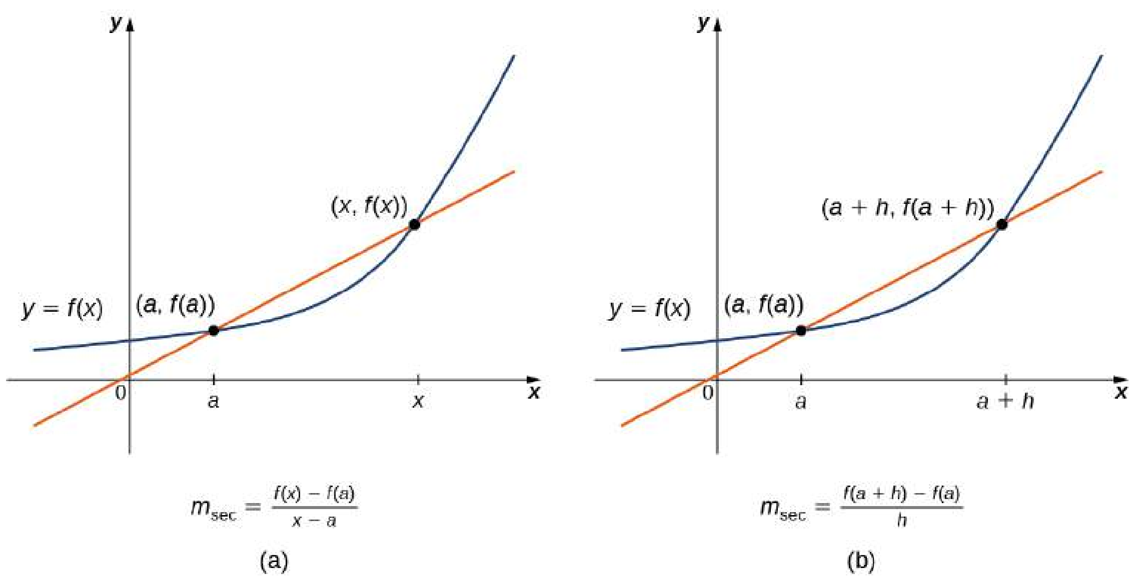


Figura 3.3 Podemos calcular la pendiente de una línea secante de dos maneras.

En la Figura 3.4(a) vemos que, a medida que los valores de x se acercan a a, las pendientes de las líneas secantes proporcionan mejores estimaciones de la tasa de cambio de la función en a. Además, las mismas rectas secantes se aproximan a la línea tangente a la función en a, que representa el límite de las líneas secantes. Del mismo modo, la Figura 3.4(b) muestra que a medida que los valores de h se acercan a 0, las rectas secantes también se acercan a la línea tangente. La pendiente de la línea tangente en a es la tasa de cambio de la función en a, como se muestra en la Figura 3.4(c).

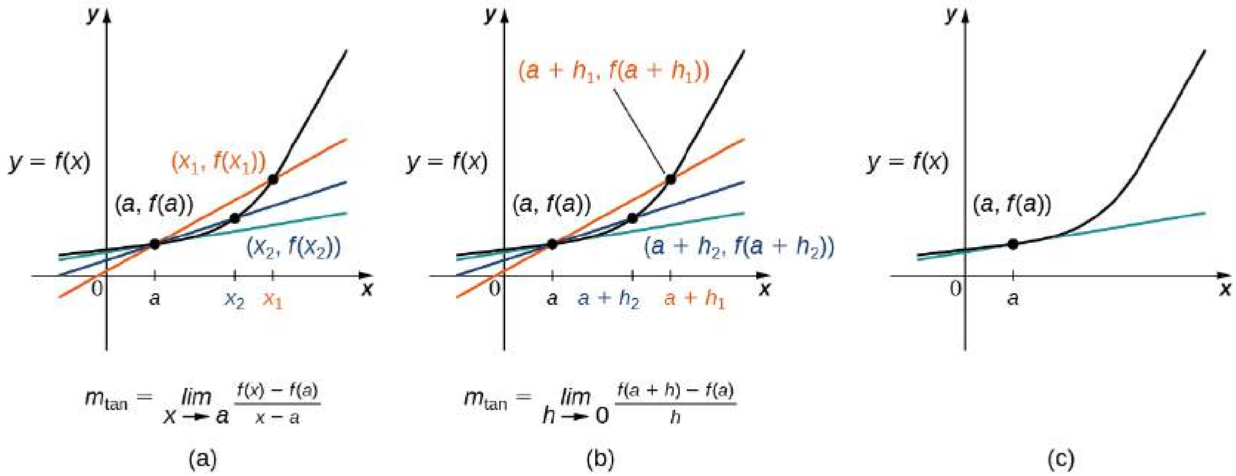


Figura 3.4 Las líneas secantes se acercan a la línea tangente (mostrada en verde) cuando el segundo punto se acerca al primero.

MEDIOS

Puede usar este sitio (http://www.openstax.org/l/20_diffmicros) para explorar gráficos y ver si tienen una línea tangente en un punto.

En la Figura 3.5 mostramos el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ y su línea tangente en $(1, 1)$ en una serie de intervalos más estrechos sobre $x = 1$. A medida que los intervalos se hacen más estrechos, el gráfico de la función y su línea tangente parecen coincidir, lo que hace que los valores de la línea tangente sean una buena aproximación a los valores de la función para las elecciones de x cerca de 1. De hecho, el gráfico de $f(x)$ parece ser localmente lineal en las inmediaciones de $x = 1$.

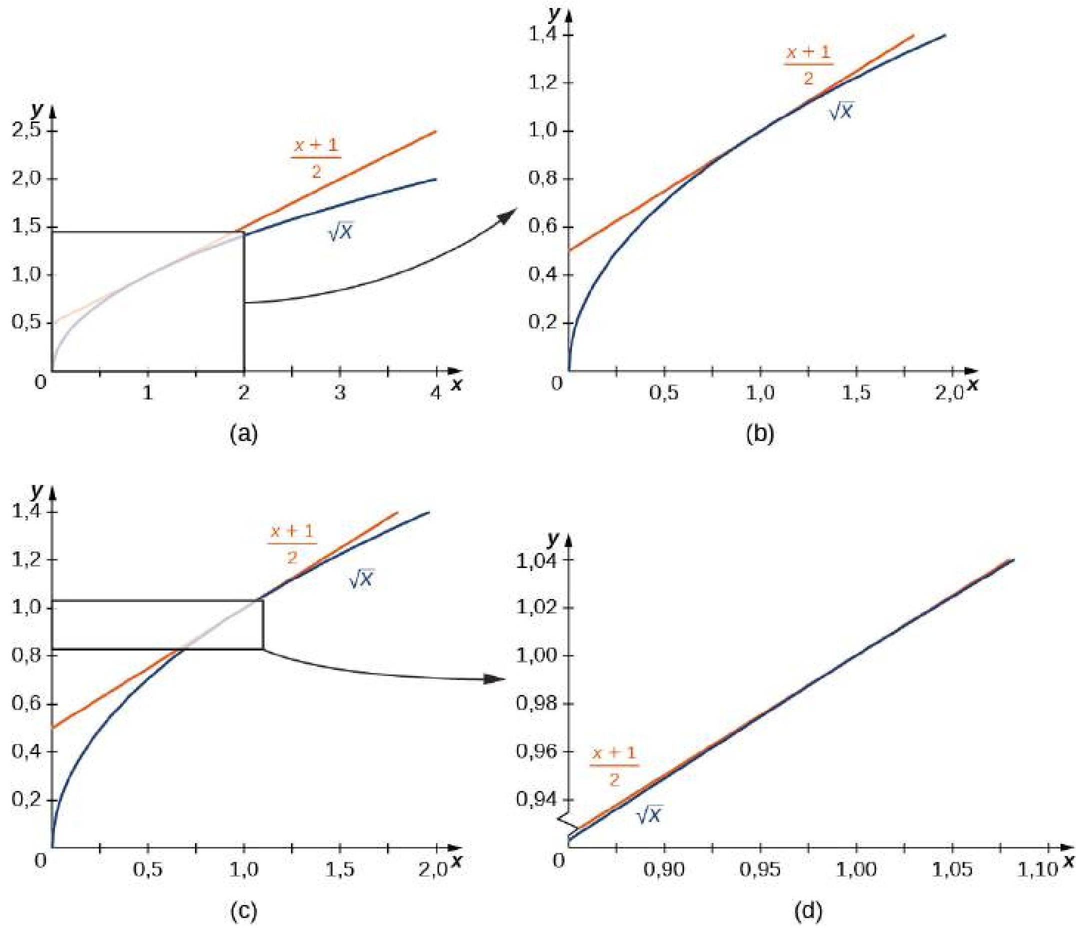


Figura 3.5 Para valores de x cerca de 1, el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ y su línea tangente parecen coincidir.

Formalmente podemos definir la línea tangente al gráfico de una función como sigue.

Definición

Supongamos que $f(x)$ sea una función definida en un intervalo abierto que contenga a. La *línea tangente* a $f(x)$ en a es la línea que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente

$$m_{\tan} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3.3}$$

siempre que exista este límite.

De forma equivalente, podemos definir la línea tangente a $f(x)$ en a para que sea la línea que pasa por el punto $(a, f(a))$ con pendiente

$$m_{\tan} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.4}$$

siempre que exista este límite.

Al igual que utilizamos dos expresiones diferentes para definir la pendiente de una línea secante, utilizamos dos formas diferentes para definir la pendiente de la línea tangente. En este texto utilizamos ambas formas de la definición. Como antes, la elección de la definición dependerá del entorno. Ahora que ya definimos formalmente una línea tangente a una función en un punto, podemos utilizar esta definición para encontrar ecuaciones de rectas tangentes.

EJEMPLO 3.1

Hallar una línea tangente

Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = x^2$ en $x = 3$.

Solución

Primero halle la pendiente de la línea tangente. En este ejemplo, utilice la Ecuación 3.3.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} && \text{Aplique la definición.} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} && \text{Sustituya } f(x) = x^2 \text{ y } f(3) = 9. \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6 && \text{Factorice el numerador para evaluar el límite.} \end{aligned}$$

A continuación, halle un punto en la línea tangente. Como la línea es tangente al gráfico de $f(x)$ en $x = 3$, pasa por el punto $(3, f(3))$. Tenemos $f(3) = 9$, para que la línea tangente pase por el punto $(3, 9)$.

Usando la ecuación punto-pendiente de la línea con la pendiente $m = 6$ y el punto $(3, 9)$, obtenemos la línea $y - 9 = 6(x - 3)$. Simplificando, tenemos $y = 6x - 9$. El gráfico de $f(x) = x^2$ y su línea tangente en 3 se muestran en la Figura 3.6.

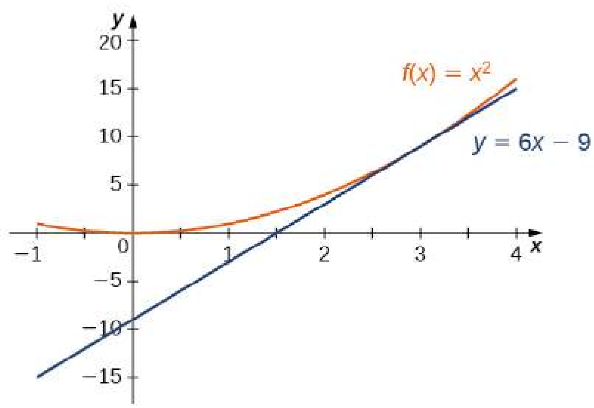


Figura 3.6 La línea tangente a $f(x)$ en $x = 3$.

EJEMPLO 3.2

La pendiente de una línea tangente revisada

Use la Ecuación 3.4 para encontrar la pendiente de la línea tangente al gráfico de $f(x) = x^2$ en $x = 3$.

Solución

Los pasos son muy similares a los del Ejemplo 3.1. Consulte la definición en la Ecuación 3.4.

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} && \text{Aplique la definición.} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} && \text{Sustituya } f(3+h) = (3+h)^2 \text{ y } f(3) = 9. \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} && \text{Expanda y simplifique para evaluar el límite.} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6 \end{aligned}$$

Obtuvimos el mismo valor para la pendiente de la línea tangente utilizando la otra definición, con lo que se demuestra que las fórmulas se pueden intercambiar.

EJEMPLO 3.3

Halle la ecuación de una línea tangente

Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = 1/x$ en $x = 2$.

Solución

Podemos utilizar la Ecuación 3.3, pero como vimos, los resultados son los mismos si utilizamos la Ecuación 3.4.

$$\begin{aligned}
m_{\tan} &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} && \text{Aplique la definición.} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} && \text{Sustituya } f(x) = \tfrac{1}{x} \text{ y } f(2) = \tfrac{1}{2}. \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} \cdot \frac{2x}{2x} && \text{Multiplique el numerador y el denominador por } 2x \text{ para simplifique las fracciones.} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(2 - x)}{(x - 2)(2x)} && \text{Simplifique.} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2x} && \text{Simplifique utilizando } \tfrac{2-x}{x-2} = -1, \text{ para } x \neq 2. \\
&= -\frac{1}{4} && \text{Evalúe el límite.}
\end{aligned}$$

Ahora sabemos que la pendiente de la línea tangente es $-\frac{1}{4}$. Para encontrar la ecuación de la línea tangente, necesitamos también un punto en la línea. Sabemos que $f(2) = \frac{1}{2}$. Como la línea tangente pasa por el punto $(2, \frac{1}{2})$ podemos utilizar la ecuación punto-pendiente de una línea para encontrar la ecuación de la línea tangente. Por lo tanto, la línea tangente tiene la ecuación $y = -\frac{1}{4}x + 1$. Los gráficos de $f(x) = \frac{1}{x}$ como $y = -\frac{1}{4}x + 1$ se muestran en la Figura 3.7.

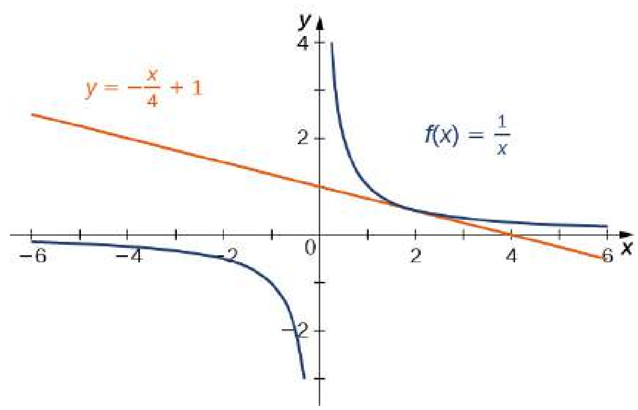


Figura 3.7 La línea es tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

3.1 Calcule la pendiente de la línea tangente al gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

La derivada de una función en un punto

El tipo de límite que calculamos para hallar la pendiente de la línea tangente a una función en un punto se da en muchas aplicaciones de varias disciplinas. Estas aplicaciones incluyen la velocidad y la aceleración en física, las funciones de ganancia marginal en los negocios y las tasas de crecimiento en biología. Este límite se da con tanta frecuencia que damos a este valor un nombre especial: la **derivada**. El proceso para encontrar una derivada se denomina **diferenciación**.

Definición

Supongamos que $f(x)$ sea una función definida en un intervalo abierto que contenga a. La derivada de la función $f(x)$ en a, denotada por $f'(a)$, se define por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{3.5}$$

siempre que exista este límite.

Como alternativa, también podemos definir la derivada de $f(x)$ en a cuando

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \tag{3.6}$$

EJEMPLO 3.4

Estimación de una derivada

Para $f(x) = x^2$, utilice una tabla para estimar $f'(3)$ utilizando la Ecuación 3.5.

Solución

Cree una tabla con los valores de x justo debajo de 3 y justo encima de 3.

x	$\frac{x^2-9}{x-3}$
2,9	5,9
2,99	5,99
2,999	5,999
3,001	6,001
3,01	6,01
3,1	6,1

Tras examinar la tabla, vemos que un buen estimado es $f'(3) = 6$.

3.2 Para $f(x) = x^2$, utilice una tabla para estimar $f'(3)$ utilizando la Ecuación 3.6.

EJEMPLO 3.5

Encontrar una derivada

Para $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, calcule $f'(2)$ utilizando la Ecuación 3.5.

Solución

Sustituya la función y el valor dados directamente en la ecuación.

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} && \text{Aplique la definición.} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{\left(3x^2-4x+1\right)-5}{x-2} && \text{Sustituya } f(x) = 3x^2 - 4x + 1 \text{ y } f(2) = 5. \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+2)}{x-2} && \text{Simplifique y factorice el numerador.} \\
&= \lim_{x \to 2} (3x+2) && \text{Cancele el factor común.} \\
&= 8 && \text{Evalúe el límite.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.6

Repaso de la derivada

Para $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, calcule $f'(2)$ utilizando la Ecuación 3.6.

Solución

Usando esta ecuación, podemos sustituir dos valores de la función en la ecuación, y deberíamos obtener el mismo valor que en el Ejemplo 3.5.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} && \text{Aplique la definición.} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(3(2+h)^2-4(2+h)+1)-5}{h} && \text{Sustituya } f(2)=5 \text{ y } f(2+h)=3(2+h)^2-4(2+h)+1. \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h^2+8h}{h} && \text{Simplifique el numerador.} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(3h+8)}{h} && \text{Factorice el numerador.} \\ &= \lim_{h\to 0} (3h+8) && \text{Cancele el factor común.} \\ &= 8 && \text{Evalúe el límite.} \end{aligned}$$

Los resultados son los mismos si utilizamos la Ecuación 3.5 o la Ecuación 3.6.

3.3 Para $f(x) = x^2 + 3x + 2$, calcule $f'(1)$.

Velocidades y tasas de cambio

Ahora que podemos evaluar una derivada, podemos utilizarla en aplicaciones de velocidad. Recordemos que si $s(t)$ es la posición de un objeto que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas, la velocidad media del objeto en un intervalo de tiempo $[a, t]$ si $t > a$ o $[t, a]$ si $t < a$ viene dada por el cociente de diferencias

$$v_{\text{ave}} = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}. \tag{3.7}$$

Dado que los valores de t se acercan a a, los valores de v_{ave} se acercan al valor que llamamos velocidad instantánea en a. Es decir, la velocidad instantánea en a, denotado $v(a)$, está dada por

$$v(a) = s'(a) = \lim_{t\to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}. \tag{3.8}$$

Para entender mejor la relación entre la velocidad media y la velocidad instantánea, consulte la Figura 3.8. En esa figura, la pendiente de la línea tangente (mostrada en rojo) es la velocidad instantánea del objeto en el momento $t = a$ cuya posición en el momento t viene dada por la función $s(t)$. La pendiente de la línea secante (mostrada en verde) es la velocidad media del objeto en el intervalo de tiempo $[a, t]$.

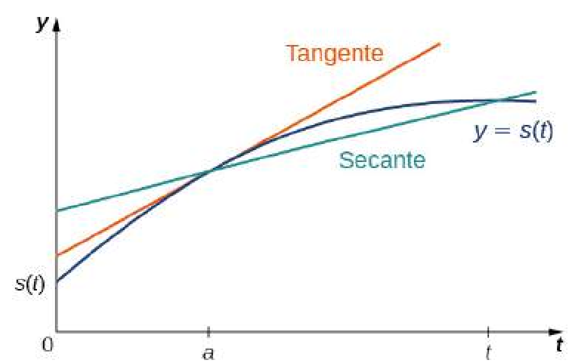


Figura 3.8 La pendiente de la línea secante es la velocidad media en el intervalo $[a, t]$. La pendiente de la línea tangente es la velocidad instantánea.

Podemos utilizar la Ecuación 3.5 para calcular la velocidad instantánea, o podemos estimar la velocidad de un objeto en movimiento utilizando una tabla de valores. A continuación, podemos confirmar la estimación utilizando la Ecuación 3.7.

EJEMPLO 3.7

Estimación de la velocidad

Un peso de plomo en un resorte oscila hacia arriba y hacia abajo. Su posición en el tiempo t con respecto a una línea horizontal fija viene dada por $s(t) = \operatorname{sen} t$ (Figura 3.9). Utilice una tabla de valores para estimar $v(0)$. Compruebe la estimación utilizando la Ecuación 3.5.

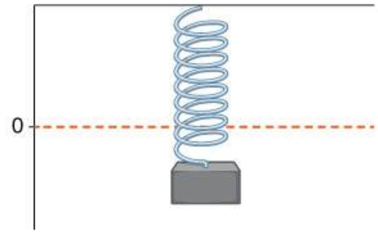


Figura 3.9 Un peso de plomo suspendido de un resorte en movimiento oscilatorio vertical.

Solución

Podemos estimar la velocidad instantánea en $t = 0$ calculando una tabla de velocidades promedio utilizando los valores de t que se acercan a 0, como se muestra en el Tabla 3.1.

t	$\frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 0}{t - 0} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$
$-0{,}1$	$0{,}998334166$
$-0{,}01$	$0{,}9999833333$
$-0{,}001$	$0{,}999999833$
$0{,}001$	$0{,}999999833$
$0{,}01$	$0{,}9999833333$
$0{,}1$	$0{,}998334166$

Tabla 3.1 Velocidades promedio con valores de *t* cercanos a 0

En la tabla vemos que la velocidad media en el intervalo de tiempo $[-0{,}1, 0]$ ¿es $0{,}998334166$, la velocidad media en el intervalo de tiempo $[-0{,}01, 0]$ ¿es $0{,}9999833333$,, etc. Utilizando esta tabla de valores, parece que un es $v(0) = 1$.

Utilizando la Ecuación 3.5, podemos ver que

$$v(0) = s'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 0}{t - 0} = \lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1.$$

Así, de hecho, $v(0) = 1$.

3.4 Se deja caer una roca desde una altura de 64 pies. Su altura sobre el suelo en el momento t segundos después viene dada por $s(t) = -16t^2 + 64, 0 \le t \le 2$. Calcule su velocidad instantánea 1 segundo después de su caída, utilizando la Ecuación 3.5.

Como hemos visto a lo largo de esta sección, la pendiente de una línea tangente a una función y la velocidad instantánea son conceptos relacionados. Cada una se estima calculando una derivada y cada una mide la tasa instantánea de cambio de una función, o la tasa de cambio de una función en cualquier punto a lo largo de la misma.

Definición

La **tasa instantánea de cambio** de una función $f(x)$ en un valor a es su derivada $f'(a)$.

EJEMPLO 3.8

Inicio del capítulo: Estimación de la tasa de cambio de la velocidad

Figura 3.10 (créditos: modificación del trabajo de Codex41, Flickr).

Alcanzando una velocidad máxima de $270{,}49$ mph, el Hennessey Venom GT es uno de los autos más rápidos del mundo. En las pruebas pasó de 0 al 60 mph en $3{,}05$ segundos, desde 0 para 100 mph en $5{,}88$ segundos, desde 0 para 200 mph en $14{,}51$ segundos, y de 0 para $229{,}9$ mph en $19{,}96$ segundos. Utilice estos datos para sacar una conclusión sobre la tasa de cambio de la velocidad (es decir, su aceleración) a medida que se acerca $229{,}9$ mph. ¿La velocidad de aceleración del automóvil parece aumentar, disminuir o ser constante?

Solución

Primero observe que 60 mph = 88 ft/s, 100 mph $\approx 146{,}67$ pies/s, 200 mph $\approx 293{,}33$ ft/s, y $229{,}9$ mph $\approx 337{,}19$ ft/s. Podemos resumir la información en una tabla.

t	$v(t)$ grandes.
0	0
$3{,}05$	88
$5{,}88$	$147{,}67$
$14{,}51$	$293{,}33$
$19{,}96$	$337{,}19$

Tabla 3.2 $v(t)$ **a diferentes valores de** t

Ahora calcule la aceleración promedio del automóvil en pies por segundo en intervalos de la forma $[t, 19{,}96]$ cuando t se acerca a $19{,}96$, como se muestra en la siguiente tabla.

t	$\frac{v(t)-v(19{,}96)}{t-19{,}96} = \frac{v(t)-337{,}19}{t-19{,}96}$
$0{,}0$	$16{,}89$
$3{,}05$	$14{,}74$

Tabla 3.3 **Aceleración media**

t	$\frac{v(t)-v(19{,}96)}{t-19{,}96} = \frac{v(t)-337{,}19}{t-19{,}96}$
5,88	13,46
14,51	8,05

Tabla 3.3 Aceleración media

El ritmo de aceleración del automóvil disminuye a medida que su velocidad se aproxima a 229,9 mph (337,19 ft/s).

EJEMPLO 3.9

Tasa de cambio de temperatura

Un propietario ajusta el termostato para que la temperatura dentro de su casa empiece a bajar de 70 °F a las 9 p. m., alcance un mínimo de 60° durante la noche, y suba de nuevo a 70° a las 7 de la mañana siguiente. Supongamos que la temperatura de la casa viene dada por $T(t) = 0{,}4t^2 - 4t + 70$ por $0 \le t \le 10$, donde t es el número de horas pasadas las 9 p. m. Halle la tasa instantánea de cambio de la temperatura a medianoche.

Solución

Como la medianoche es 3 horas pasadas las 9 p. m., queremos calcular $T'(3)$. Consulte la Ecuación 3.5.

$$\begin{aligned}
T'(3) &= \lim_{t\to 3} \frac{T(t)-T(3)}{t-3} && \text{Aplique la definición.}\\
&= \lim_{t\to 3} \frac{0{,}4t^2-4t+70-61{,}6}{t-3} && \text{Sustituya } T(t) = 0{,}4t^2 - 4t + 70 \text{ y } T(3) = 61{,}6.\\
&= \lim_{t\to 3} \frac{0{,}4t^2-4t+8{,}4}{t-3} && \text{Simplifique.}\\
&= \lim_{t\to 3} \frac{0{,}4(t-3)(t-7)}{t-3} && = \lim_{t\to 3} \frac{0{,}4(t-3)(t-7)}{t-3}\\
&= \lim_{t\to 3} 0{,}4(t-7) && \text{Cancele.}\\
&= -1{,}6 && \text{Evalúe el límite.}
\end{aligned}$$

La tasa instantánea de cambio de la temperatura a medianoche es $-1{,}6$ °F por hora.

EJEMPLO 3.10

Tasa de cambio del beneficio

Una compañía de juguetes puede vender x sistemas de juego electrónico a un precio de $p = -0{,}01x + 400$ dólares por sistema de juego. El costo de fabricación x viene dado por $C(x) = 100x + 10.000$ dólares. Halle la tasa de cambio del beneficio cuando se producen 10.000 juegos. ¿Debe la compañía juguetera aumentar o disminuir la producción?

Solución

El beneficio $P(x)$ obtenido por la producción de x sistemas de juego es $R(x) - C(x)$, donde $R(x)$ son los ingresos obtenidos por la venta de x juegos. Dado que la compañía puede vender x juegos en $p = -0{,}01x + 400$ por juego,

$$R(x) = xp = x(-0{,}01x + 400) = -0{,}01x^2 + 400x.$$

En consecuencia,

$$P(x) = -0{,}01x^2 + 300x - 10.000.$$

Por lo tanto, la evaluación de la tasa de cambio del beneficio da

$$\begin{aligned} P'(10.000) &= \lim_{x\to 10.000} \frac{P(x)-P(10.000)}{x-10.000} \\ &= \lim_{x\to 10.000} \frac{-0{,}01x^2+300x-10.000-1.990.000}{x-10.000} \\ &= \lim_{x\to 10.000} \frac{-0{,}01x^2+300x-2.000.000}{x-10.000} \\ &= 100. \end{aligned}$$

Dado que la tasa de cambio del beneficio $P'(10.000) > 0$ y $P(10.000) > 0$, la compañía debe aumentar la producción.

3.5 Una cafetería determina que el beneficio diario obtenido de los panecillos al cobrar s dólares por panecillo es $P(s) = -20s^2 + 150s - 10$. La cafetería cobra actualmente $\$3{,}25$ por panecillo. Halle $P'(3{,}25)$, la tasa de cambio del beneficio cuando el precio es $\$3{,}25$ y decida si la cafetería debería considerar la posibilidad de subir o bajar el precio de los panecillos

SECCIÓN 3.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, utilice la Ecuación 3.1 para encontrar la pendiente de la línea secante entre los valores x_1 y x_2 para cada función $y = f(x)$.

1. $f(x) = 4x + 7; x_1 = 2, x_2 = 5$

2. $f(x) = 8x - 3; x_1 = -1, x_2 = 3$

3. $f(x) = x^2 + 2x + 1; x_1 = 3, x_2 = 3{,}5$

4. $f(x) = -x^2 + x + 2; x_1 = 0{,}5, x_2 = 1{,}5$

5. $f(x) = \frac{4}{3x-1}; x_1 = 1, x_2 = 3$

6. $f(x) = \frac{x-7}{2x+1}; x_1 = 0, x_2 = 2$

7. $f(x) = \sqrt{x}; x_1 = 1, x_2 = 16$

8. $f(x) = \sqrt{x-9}; x_1 = 10, x_2 = 13$

9. $f(x) = x^{1/3} + 1; x_1 = 0, x_2 = 8$

10. $f(x) = 6x^{2/3} + 2x^{1/3}; x_1 = 1, x_2 = 27$

Para las siguientes funciones,

a. utilice la Ecuación 3.4 para encontrar la pendiente de la línea tangente $m_{\tan} = f'(a)$, y
b. halle la ecuación de la línea tangente a f en $x = a$.

11. $f(x) = 3 - 4x, a = 2$

12. $f(x) = \frac{x}{5} + 6, a = -1$

13. $f(x) = x^2 + x, a = 1$

14. $f(x) = 1 - x - x^2, a = 0$

15. $f(x) = \frac{7}{x}, a = 3$

16. $f(x) = \sqrt{x+8}, a = 1$

17. $f(x) = 2 - 3x^2, a = -2$

18. $f(x) = \frac{-3}{x-1}, a = 4$

19. $f(x) = \frac{2}{x+3}, a = -4$

20. $f(x) = \frac{3}{x^2}, a = 3$

En las siguientes funciones $y = f(x)$, calcule $f'(a)$ utilizando la Ecuación 3.5.

21. $f(x) = 5x + 4, a = -1$

22. $f(x) = -7x + 1, a = 3$

23. $f(x) = x^2 + 9x, a = 2$

24. $f(x) = 3x^2 - x + 2, a = 1$

25. $f(x) = \sqrt{x}, a = 4$

26. $f(x) = \sqrt{x-2}, a = 6$

27. $f(x) = \frac{1}{x}, a = 2$

28. $f(x) = \frac{1}{x-3}, a = -1$

29. $f(x) = \frac{1}{x^3}, a = 1$

30. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, a = 4$

En los siguientes ejercicios, dada la función $y = f(x)$,

a. Calcule la pendiente de la línea secante PQ para cada punto $Q(x, f(x))$ con el valor x que se indica en la tabla.
b. Utilice las respuestas de a. para estimar el valor de la pendiente de la línea tangente en P.
c. Use la respuesta de b. para hallar la ecuación de la línea tangente a f en el punto P.

31. **[T]** $f(x) = x^2 + 3x + 4, P(1, 8)$ (Redondee a 6 decimales)

x	**La pendiente** m_{PQ}	**x**	**La pendiente** m_{PQ}
1,1	(i)	0,9	(vii)
1,01	(ii)	0,99	(viii)
1,001	(iii)	0,999	(ix)
1,0001	(iv)	0,9999	(x)
1,00001	(v)	0,99999	(xi)
1,000001	(vi)	0,999999	(xii)

32. **[T]** $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}, P(0, -1)$

x	**La pendiente** m_{PQ}	**x**	**La pendiente** m_{PQ}
0,1	(i)	$-0,1$	(vii)
0,01	(ii)	$-0,01$	(viii)
0,001	(iii)	$-0,001$	(ix)
0,0001	(iv)	$-0,0001$	(x)
0,00001	(v)	$-0,00001$	(xi)
0,000001	(vi)	$-0,000001$	(xii)

33. **[T]** $f(x) = 10e^{0,5x}, P(0, 10)$ (Redondee a 4 decimales)

x	**La pendiente** m_{PQ}
$-0,1$	(i)
$-0,01$	(ii)
$-0,001$	(iii)
$-0,0001$	(iv)
$-0,00001$	(v)
−0,000001	(vi)

34. **[T]** $f(x) = \tan(x), P(\pi, 0)$

x	**La pendiente** m_{PQ}
3,1	(i)
3,14	(ii)
3,141	(iii)
3,1415	(iv)
3,14159	(v)
3,141592	(vi)

[T] *Para las siguientes funciones de posición $y = s(t)$, un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, donde t está en segundos y s está en metros. Halle*

a. la expresión simplificada para la velocidad media de $t = 2$ al $t = 2 + h$;
b. la velocidad media entre $t = 2$ y $t = 2 + h$, donde (i) $h = 0{,}1$, (ii) $h = 0{,}01$, (iii) $h = 0{,}001$, y (iv) $h = 0{,}0001$; y
c. utilice la respuesta de a. para estimar la velocidad instantánea en $t = 2$ segundos.

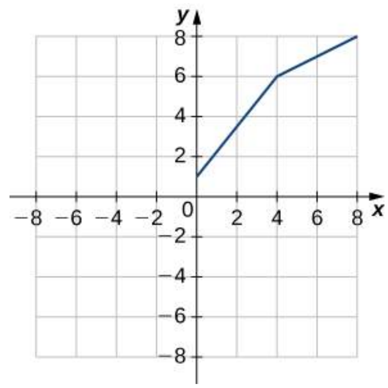
35. $s(t) = \frac{1}{3}t + 5$

36. $s(t) = t^2 - 2t$

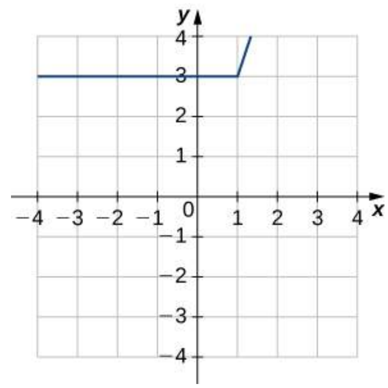
37. $s(t) = 2t^3 + 3$

38. $s(t) = \frac{16}{t^2} - \frac{4}{t}$

39. Utilice el siguiente gráfico para evaluar a $f'(1)$ y b. $f'(6)$.



40. Utilice el siguiente gráfico para evaluar a $f'(-3)$ y b. $f'(1{,}5)$.



En los siguientes ejercicios, utilice la definición de límite de la derivada para demostrar que la derivada no existe en $x = a$ para cada una de las funciones dadas.

41. $f(x) = x^{1/3}, x = 0$

42. $f(x) = x^{2/3}, x = 0$

43. $f(x) = \begin{cases} 1, x < 1 \\ x, x \geq 1 \end{cases}, x = 1$

44. $f(x) = \frac{|x|}{x}, x = 0$

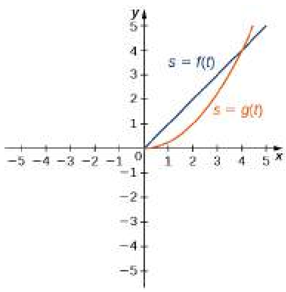
45. **[T]** La posición en ft de un auto de carreras a lo largo de una pista recta después de t segundos está modelada por la función $s(t) = 8t^2 - \frac{1}{16}t^3$.

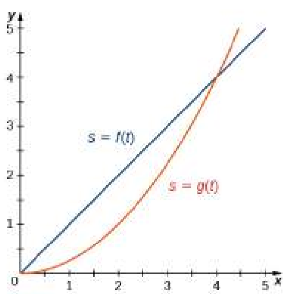
a. Halle la velocidad media del vehículo en los siguientes intervalos de tiempo con cuatro decimales
   i. [4, 4,1]
   ii. [4, 4,01]
   iii. [4, 4,001]
   iv. [4, 4,0001]
b. Utilice a. para sacar una conclusión sobre la velocidad instantánea del vehículo en $t = 4$ segundos.

46. **[T]** La distancia en ft que una pelota rueda por una pendiente se modela mediante la función $s(t) = 14t^2$, donde t son los segundos después de que la pelota empieza a rodar.

a. Halle la velocidad media de la pelota en los siguientes intervalos de tiempo
   i. [5, 5,1]
   ii. [5, 5,01]
   iii. [5, 5,001]
   iv. [5, 5,0001]
b. Utilice las respuestas de a. para sacar una conclusión sobre la velocidad instantánea de la pelota en $t = 5$ segundos.

47. Dos vehículos comienzan a viajar uno al lado del otro por una carretera recta. Sus funciones de posición, que se muestran en el siguiente gráfico, vienen dadas por $s = f(t)$ y $s = g(t)$, donde s se mide en pies y t se mide en segundos.





a. ¿Qué vehículo viajó más lejos en $t = 2$ segundos?
b. ¿Cuál es la velocidad aproximada de cada vehículo en $t = 3$ segundos?
c. ¿Qué vehículo va más rápido a los $t = 4$ segundos?
d. ¿Qué hay de cierto en las posiciones de los vehículos en $t = 4$ segundos?

48. **[T]** El costo total $C(x)$, en cientos de dólares, para producir x tarros de mayonesa viene dado por $C(x) = 0{,}000003x^3 + 4x + 300$.

a. Calcule el costo promedio por tarro en los siguientes intervalos:
   i. [100, 100,1]
   ii. [100, 100,01]
   iii. [100, 100,001]
   iv. [100, 100,0001]
b. Utilice las respuestas de a. para estimar el costo promedio de producción de 100 tarros de mayonesa.

49. **[T]** Para la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$, haga lo siguiente.

a. Utilice una calculadora gráfica para graficar *f* en una ventana de visualización adecuada.
b. Use la función ZOOM de la calculadora para aproximar los dos valores de $x = a$ para la cual $m_{\tan} = f'(a) = 0$.

50. **[T]** Para la función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, haga lo siguiente.

a. Utilice una calculadora gráfica para graficar f en una ventana de visualización adecuada.
b. Utilice la función ZOOM de la calculadora para aproximar los valores de $x = a$ para la cual $m_{\tan} = f'(a) = 0$.

51. Supongamos que $N(x)$ calcula el número de galones de gasolina utilizados por un vehículo que recorre x millas. Supongamos que el vehículo alcanza 30 mpg (millas por galón)

a. Halle una expresión matemática para $N(x)$.
b. ¿Cuál es el valor de $N(100)$? Explique el significado físico.
c. ¿Cuál es el valor de $N'(100)$? Explique el significado físico.

52. **[T]** Para la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, haga lo siguiente.

a. Utilice una calculadora gráfica para graficar f en una ventana de visualización adecuada.
b. Utilice la función nDeriv función, que halla numéricamente la derivada, en una calculadora gráfica para estimar $f'(-2)$, $f'(-0{,}5)$, $f'(1{,}7)$, y $f'(2{,}718)$.

53. **[T]** Para la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, haga lo siguiente.

a. Utilice una calculadora gráfica para representar f en una ventana de visualización adecuada.
b. Utilice la función nDeriv en una calculadora gráfica para hallar $f'(-4)$, $f'(-2)$, $f'(2)$, y $f'(4)$.

3.2 La derivada como función

Objetivos de aprendizaje

3.2.1 Definir la función derivada de una función dada.
3.2.2 Graficar una función derivada a partir del gráfico de una función dada.
3.2.3 Indique la relación entre las derivadas y la continuidad.
3.2.4 Describe tres condiciones en las que una función no tiene derivada.
3.2.5 Explica el significado de una derivada de orden superior.

Como vimos, la derivada de una función en un punto determinado nos da la tasa de cambio o pendiente de la línea tangente a la función en ese punto. Si diferenciamos una función de posición en un momento dado, obtenemos la velocidad en ese momento. Parece razonable concluir que al conocer la derivada de la función en cada punto obtendríamos información valiosa sobre el comportamiento de la función. Sin embargo, el proceso de encontrar la derivada incluso en unos cuantos valores utilizando las técnicas de la sección anterior se volvería muy pronto bastante tedioso. En esta sección definiremos la función derivada y aprenderemos un proceso para encontrarla.

Funciones derivadas

La función derivada da la derivada de una función en cada punto del dominio de la función original para la que se define la derivada. Podemos definir formalmente una función derivada como sigue.

Definición

Supongamos que f es una función. La **función derivada**, denotada por f', es la función cuyo dominio consiste en los valores de x de manera tal que el siguiente límite existe:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{3.9}$$

Una función $f(x)$ se dice que es **diferenciable en** a si $f'(a)$. De forma más general, se dice que una función es **diferenciable en** S si es diferenciable en cada punto de un conjunto abierto S, y una **función diferenciable** es aquella en la que $f'(x)$ existe en su dominio.

En los siguientes ejemplos utilizaremos la Ecuación 3.9 para encontrar la derivada de una función.

EJEMPLO 3.11

Hallar la derivada de una función de raíz cuadrada

Calcule la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución

Empiece directamente con la definición de la función derivada. Utilice la Ecuación 3.1.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} && \text{Sustituya } f(x+h) = \sqrt{x+h} \text{ y } f(x) = \sqrt{x} \text{ en } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} && \text{Multiplique el numerador y el denominador por } \sqrt{x+h} + \sqrt{x} \text{ sin distribuir en el denominador.} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} && \text{Multiplique los numeradores y simplifique.} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} && \text{Cancele el } h. \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}} && \text{Evalúe el límite.}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.12

Hallar la derivada de una función cuadrática

Halle la derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x$.

Solución

Siga aquí el mismo procedimiento, pero multiplicar por el conjugado.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 - 2(x+h)) - (x^2 - 2x)}{h} && \text{Sustituya } f(x+h) = (x+h)^2 - 2(x+h) \text{ y } f(x) = x^2 - 2x \text{ en } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h - x^2 + 2x}{h} && \text{Expanda } (x+h)^2 - 2(x+h). \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh - 2h + h^2}{h} && \text{Simplifique.} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x - 2 + h)}{h} && \text{Saque el factor común } h \text{ del numerador.} \\
&= \lim_{h \to 0} (2x - 2 + h) && \text{Cancele el factor común de } h. \\
&= 2x - 2 && \text{Evalúe el límite.}
\end{aligned}$$

3.6 Calcule la derivada de $f(x) = x^2$.

Para expresar la derivada de una función utilizamos diferentes notaciones. En el Ejemplo 3.12 demostramos que si

$f(x) = x^2 - 2x$, entonces $f'(x) = 2x - 2$. Si hubiéramos expresado esta función en la forma $y = x^2 - 2x$, podríamos haber expresado la derivada como $y' = 2x - 2$ o $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$. Podríamos haber expresado la misma información al escribir $\frac{d}{dx}\left(x^2 - 2x\right) = 2x - 2$. Así, para la función $y = f(x)$, cada una de las siguientes notaciones representa la derivada de $f(x)$:

$$f'(x),\ \frac{dy}{dx},\ y',\ \frac{d}{dx}(f(x)).$$

En vez de $f'(a)$ también podemos utilizar $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ El uso de la notación $\frac{dy}{dx}$ (llamada notación Leibniz) es bastante común en ingeniería y física. Para entender mejor esta notación, recordemos que la derivada de una función en un punto es el límite de las pendientes de las líneas secantes cuando estas se acercan a la línea tangente. Las pendientes de estas líneas secantes suelen expresarse en la forma $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ donde Δy es la diferencia en los valores y correspondientes a la diferencia en los valores x, que se expresan como Δx (Figura 3.11). Así, la derivada, que puede considerarse como la tasa instantánea de cambio de y con respecto a x, se expresa como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

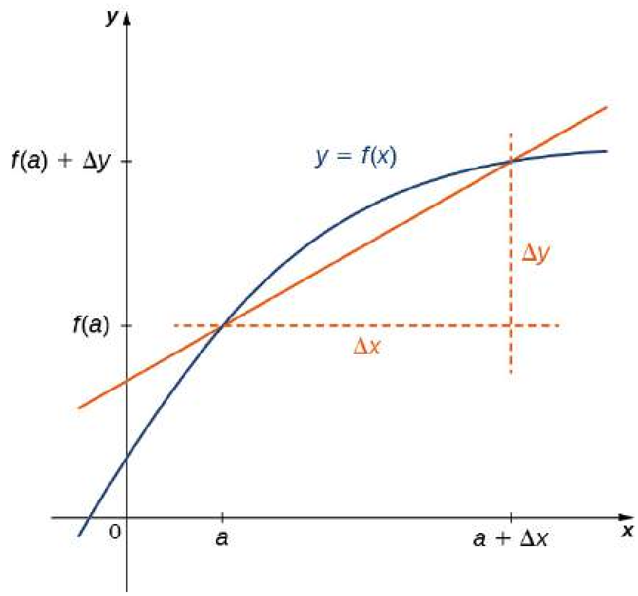


Figura 3.11 La derivada se expresa como $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Graficar una derivada

Ya hablamos de cómo graficar una función, así que dada la ecuación de una función o la ecuación de una función derivada, podemos graficarla. Dadas ambas, esperaríamos ver una correspondencia entre los gráficos de estas dos funciones, ya que $f'(x)$ da la tasa de cambio de una función $f(x)$ (o pendiente de la línea tangente a $f(x)$)

En el Ejemplo 3.11 encontramos que para $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$. Si graficamos estas funciones en los mismos ejes, como en la Figura 3.12, podemos usar los gráficos para entender la relación entre estas dos funciones. En primer lugar, observamos que $f(x)$ es creciente en todo su dominio, lo que significa que las pendientes de sus líneas tangentes en todos los puntos son positivas. En consecuencia, esperamos $f'(x) > 0$ para todos los valores de x en su dominio. Además, a medida que x aumenta, las pendientes de las líneas tangentes a $f(x)$ disminuyen y esperamos ver un descenso correspondiente en $f'(x)$. También observamos que $f(0)$ es indefinido y que $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$, correspondiente a una tangente vertical a $f(x)$ a las 0.

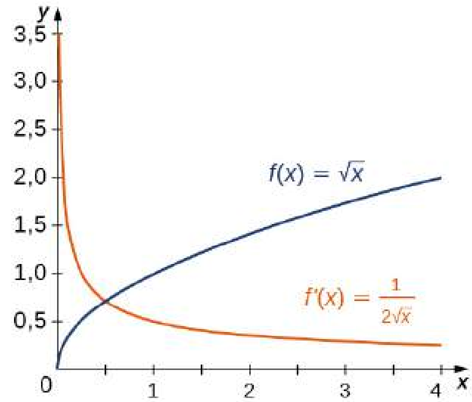


Figura 3.12 La derivada $f'(x)$ es positiva en todas partes porque la función $f(x)$ aumenta.

En el Ejemplo 3.12 encontramos que para $f(x) = x^2 - 2x$, $f'(x) = 2x - 2$. Los gráficos de estas funciones se muestran en la Figura 3.13. Observe que $f(x)$ disminuye para $x < 1$. Para estos mismos valores de x, $f'(x) < 0$. Para los valores de $x > 1$, $f(x)$ está aumentando y $f'(x) > 0$. También, $f(x)$ tiene una tangente horizontal en $x = 1$ y $f'(1) = 0$.

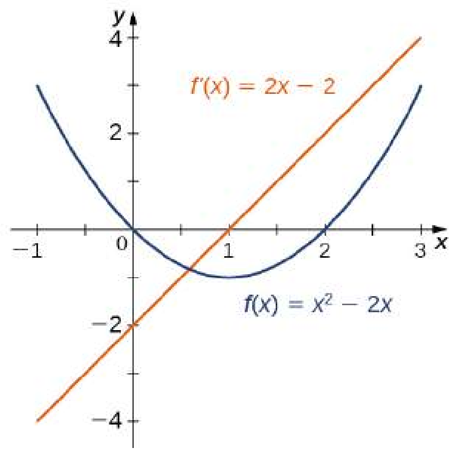
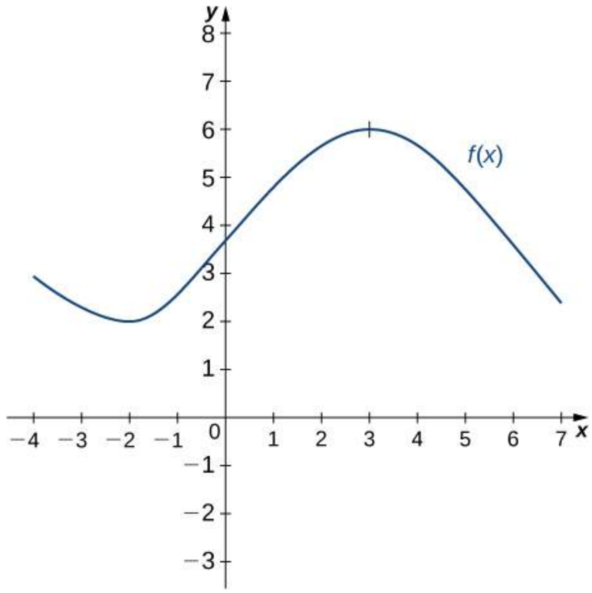


Figura 3.13 La derivada $f'(x) < 0$ donde la función $f(x)$ es decreciente y $f'(x) > 0$ donde $f(x)$ aumenta. La derivada es cero donde la función tiene una tangente horizontal.

EJEMPLO 3.13

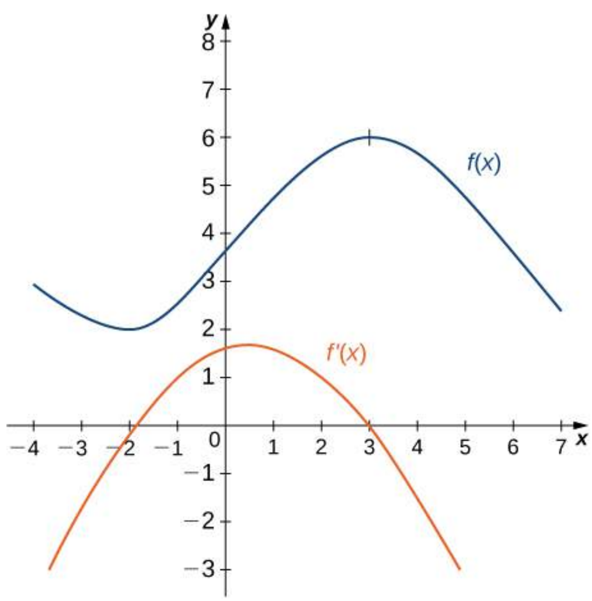
Trazado de una derivada mediante una función

Utilice el siguiente gráfico de $f(x)$ para dibujar un gráfico de $f'(x)$.



Solución

La solución se muestra en el siguiente gráfico. Observe que $f(x)$ está aumentando y $f'(x) > 0$ sobre $(-2, 3)$. También, $f(x)$ es decreciente y $f'(x) < 0$ sobre $\left(-\infty, -2\right)$ y en $\left(3, +\infty\right)$. También tenga en cuenta que $f(x)$ tiene tangentes horizontales en -2 y 3, y $f'(-2) = 0$ y $f'(3) = 0$.



3.7 Dibuje la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$. ¿En qué intervalo se encuentra el gráfico de $f'(x)$ por encima del eje x?

Derivadas y continuidad

Ahora que podemos graficar una derivada, vamos a examinar el comportamiento de los gráficos. En primer lugar, consideraremos la relación entre diferenciabilidad y continuidad. Veremos que si una función es diferenciable en un punto, debe ser continua en el mismo, sin embargo, una función que es continua en un punto no tiene por qué ser diferenciable en él. De hecho, una función puede ser continua en un punto y no ser diferenciable en ese punto por una entre varias razones.

Teorema 3.1

La Diferenciabilidad implica continuidad

Supongamos que $f(x)$ es una función y a está en su dominio. Si los valores de $f(x)$ es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Prueba

Si los valores de $f(x)$ es diferenciable en a, entonces $f'(a)$ existe y

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Queremos demostrar que $f(x)$ es continua en a demostrando que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (f(x) - f(a) + f(a)) \\
&= \lim_{x \to a} \left(\tfrac{f(x) - f(a)}{x - a} . (x - a) + f(a) \right) && \text{Multiplicar y dividir } f(x) - f(a) \text{ por } x - a. \\
&= \left(\lim_{x \to a} \tfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) . \left(\lim_{x \to a} (x - a) \right) + \lim_{x \to a} f(a) \\
&= f'(a) . 0 + f(a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $f(a)$ está definida y $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, concluimos que f es continua en a.

□

Acabamos de demostrar que la diferenciabilidad implica continuidad, pero ahora consideramos si la continuidad implica diferenciabilidad. Para responder esa pregunta, examinaremos la función $f(x) = |x|$. Esta función es continua en todas partes; sin embargo, $f'(0)$ es indefinida. Esta observación nos lleva a pensar que la continuidad no implica diferenciabilidad. Exploremos más a fondo. Para $f(x) = |x|$,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Este límite no existe porque

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \text{ y } \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Vea la Figura 3.14.

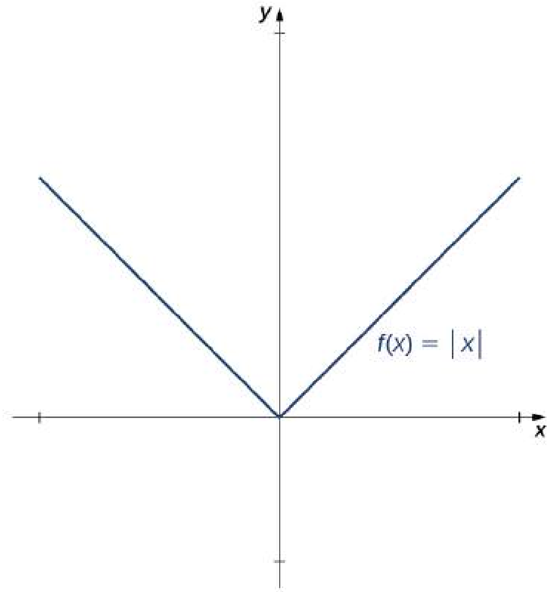


Figura 3.14 La función $f(x) = |x|$ es continua en 0 pero no es diferenciable en 0.

Consideremos algunas situaciones adicionales en las que una función continua no es diferenciable. Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

Por lo tanto, $f'(0)$ no existe. Un rápido vistazo al gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ aclara la situación. La función tiene una línea tangente vertical en 0 (Figura 3.15).

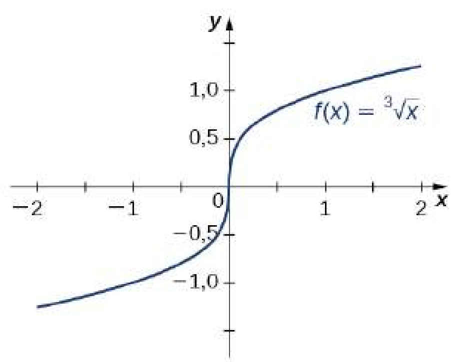


Figura 3.15 La función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ tiene una tangente vertical en $x = 0$. Es continua en 0 pero no es diferenciable en 0.

La función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ también tiene una derivada que muestra un comportamiento interesante en 0. Vemos que

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}(1/x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Este límite no existe, esencialmente porque las pendientes de las líneas secantes cambian continuamente de dirección al acercarse a cero (Figura 3.16).

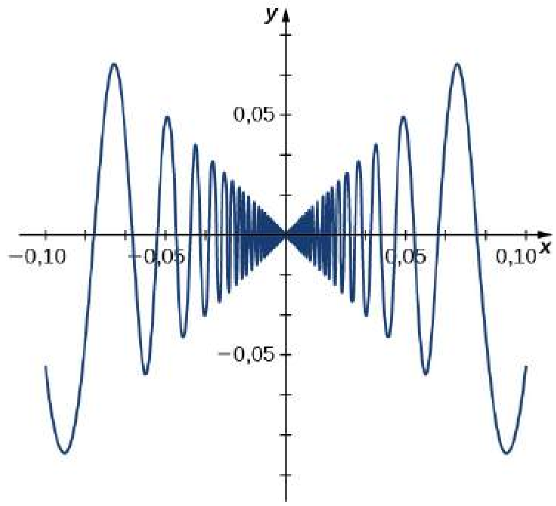


Figura 3.16 La función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ no es diferenciable en 0.

En resumen:

1. Observamos que si una función no es continua, no puede ser diferenciable, ya que toda función diferenciable debe ser continua. Sin embargo, es posible que una función continua no sea diferenciable.
2. Vimos que $f(x) = |x|$ no es diferenciable en 0 porque el límite de las pendientes de las líneas tangentes a la izquierda y a la derecha no eran iguales. Visualmente, esto dio lugar a una esquina aguda en el gráfico de la función en 0. De esto se deduce que para que una función sea diferenciable en un punto, debe ser "suave" en ese punto.
3. Vimos en el ejemplo de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, una función no es diferenciable en un punto en el que hay una línea tangente vertical.
4. Como vimos con $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ una función puede dejar de ser diferenciable en un punto de formas más complicadas también.

EJEMPLO 3.14

Una función a trozos continua y diferenciable

Una compañía de juguetes quiere diseñar una pista para un carrito de juguete que comienza con una curva parabólica y luego se convierte en una línea recta (Figura 3.17). La función que describe la pista debe tener la forma $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x^2 + bx + c \text{si } x < -10 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2} \text{si } x \geq -10 \end{cases}$ donde x y $f(x)$ están en pulgadas. Para que el auto recorra suavemente por la pista, la función $f(x)$ debe ser continua y diferenciable en -10. Halle los valores de b y c que hacen $f(x)$ tanto continua como diferenciable.

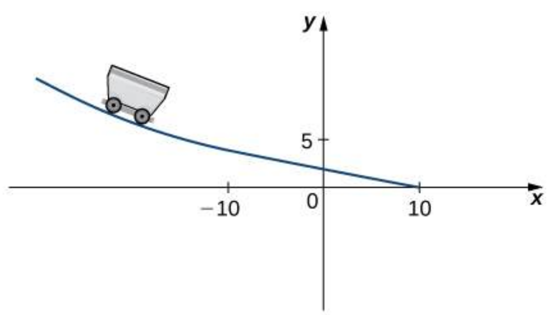


Figura 3.17 Para que ese auto recorra suavemente la pista, la función debe ser continua y diferenciable.

Solución

Para que la función sea continua en $x = -10$, $\lim\limits_{x \to -10^-} f(x) = f(-10)$. Por lo tanto, ya que

$$\lim_{x \to -10^-} f(x) = \frac{1}{10}(-10)^2 - 10b + c = 10\text{–}\,10b + c$$

y $f(-10) = 5$, debemos tener $10\text{–}\,10b + c = 5$. De forma equivalente, tenemos $c = 10b - 5$.

Para que la función sea diferenciable en -10,

$$f'(-10) = \lim_{x \to -10} \frac{f(x) - f(-10)}{x + 10}$$

debe existir. Dado que $f(x)$ se define con reglas diferentes a la derecha y a la izquierda, debemos evaluar este límite por la derecha y por la izquierda y luego igualarlos entre sí:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -10^-} \frac{f(x)-f(-10)}{x+10} &= \lim_{x \to -10^-} \frac{\frac{1}{10}x^2+bx+c-5}{x+10} \\
&= \lim_{x \to -10^-} \frac{\frac{1}{10}x^2+bx+(10b-5)-5}{x+10} && \text{Sustituya } c = 10b - 5. \\
&= \lim_{x \to -10^-} \frac{x^2-100+10bx+100b}{10(x+10)} \\
&= \lim_{x \to -10^-} \frac{(x+10)(x-10+10b)}{10(x+10)} && \text{Factor por agrupación.} \\
&= b - 2.
\end{aligned}$$

También tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -10^+} \frac{f(x)-f(-10)}{x+10} &= \lim_{x \to -10^+} \frac{-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}-5}{x+10} \\
&= \lim_{x \to -10^+} \frac{-(x+10)}{4(x+10)} \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Esto nos da $b - 2 = -\frac{1}{4}$. Así que $b = \frac{7}{4}$ y $c = 10\left(\frac{7}{4}\right) - 5 = \frac{25}{2}$.

✓ 3.8 Halle los valores de a y b que hacen $f(x) = \begin{cases} ax + b \text{ si } x < 3 \\ x^2 \text{ si } x \geq 3 \end{cases}$ continua y diferenciable en 3.

Derivadas de orden superior

La derivada de una función es a su vez una función, por lo que podemos encontrar la derivada de una derivada. Por ejemplo, la derivada de una función de posición es la tasa de cambio de posición, o velocidad. La derivada de la velocidad es la tasa de cambio de la velocidad, que es la aceleración. La nueva función obtenida al diferenciar la derivada se llama segunda derivada. Además, podemos seguir tomando derivadas para obtener la tercera derivada, la cuarta derivada, etc. En conjunto, se denominan **derivadas de orden superior**. La notación para las derivadas de orden superior de $y = f(x)$ puede expresarse en cualquiera de las siguientes formas:

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{(4)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)\text{grandes.}$$

$$y''(x), y'''(x), y^{(4)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)\text{grandes.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Es interesante observar que la notación para $\frac{d^2y}{dx^2}$ puede verse como un intento de expresar $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ de forma más compacta. De manera similar, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$.

EJEMPLO 3.15

Calcular una segunda derivada

Para $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, calcule $f''(x)$.

Solución

Primero calcule $f'(x)$.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\left(2(x+h)^2 - 3(x+h) + 1\right) - (2x^2 - 3x + 1)}{h}$	Sustituya $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ y $f(x+h) = 2(x+h)^2 - 3(x+h) + 1$ en $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h}$	Simplifique el numerador.
$= \lim\limits_{h \to 0} (4x + 2h - 3)$	Factorice el h en el numerador y cancele con la h en el denominador.
$= 4x - 3$	Tome el límite.

A continuación, calcule $f''(x)$ tomando la derivada de $f'(x) = 4x - 3$.

$f''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$	Uso $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ con $f'(x)$ in lugar de $f(x)$.
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{(4(x+h) - 3) - (4x - 3)}{h}$	Sustituya $f'(x+h) = 4(x+h) - 3$ y $f'(x) = 4x - 3$.
$= \lim\limits_{h \to 0} 4$	Simplifique.
$= 4$	Tome el límite.

3.9 Calcule $f''(x)$ por $f(x) = x^2$.

EJEMPLO 3.16

Encontrar la aceleración

La posición de una partícula a lo largo de un eje de coordenadas en el tiempo t (en segundos) viene dado por $s(t) = 3t^2 - 4t + 1$ (en metros). Halle la función que describe su aceleración en el tiempo t.

Solución

Dado que $v(t) = s'(t)$ y $a(t) = v'(t) = s''(t)$, comenzamos encontrando la derivada de $s(t)$:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3(t+h)^2 - 4(t+h) + 1 - \left(3t^2 - 4t + 1\right)}{h} \\ &= 6t - 4. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} s''(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{s'(t+h) - s'(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6(t+h) - 4 - (6t - 4)}{h} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Así, $a = 6 \text{ m/s}^2$.

3.10 Para $s(t) = t^3$, calcule $a(t)$.

SECCIÓN 3.2 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, utilice la definición de una derivada para encontrar $f'(x)$.

54. $f(x) = 6$

55. $f(x) = 2 - 3x$

56. $f(x) = \frac{2x}{7} + 1$

57. $f(x) = 4x^2$

58. $f(x) = 5x - x^2$

59. $f(x) = \sqrt{2x}$

60. $f(x) = \sqrt{x - 6}$

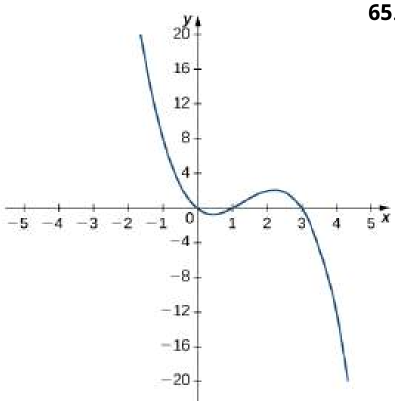
61. $f(x) = \frac{9}{x}$

62. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

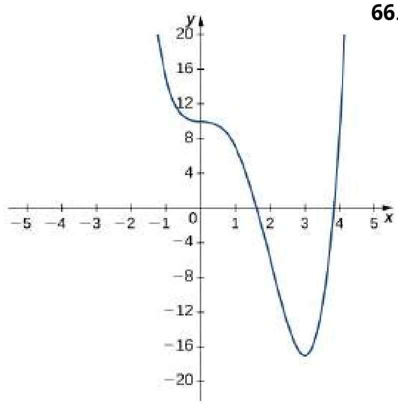
63. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de $y = f(x)$ para dibujar el gráfico de su derivada $f'(x)$.

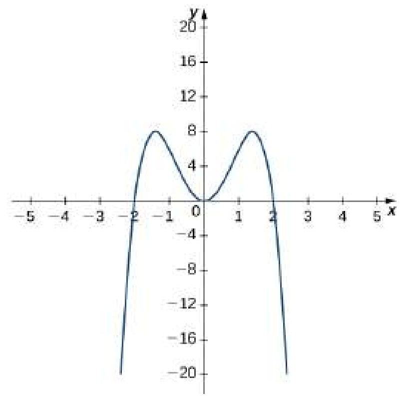
64.



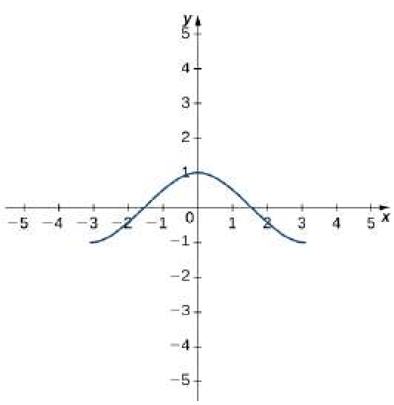
65.



66.



67.



En los siguientes ejercicios, el límite dado representa la derivada de una función $y = f(x)$ en $x = a$. Calcule $f(x)$ y a.

68. $\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{2/3} - 1}{h}$

69. $\lim_{h \to 0} \frac{\left[3(2+h)^2 + 2\right] - 14}{h}$

70. $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

71. $\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^4 - 16}{h}$

72. $\lim_{h \to 0} \frac{[2(3+h)^2 - (3+h)] - 15}{h}$

73. $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$

Para las siguientes funciones,

a. dibuje el gráfico y
b. use la definición de derivada para demostrar que la función no es diferenciable en $x = 1$.

74. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, 0 \le x \le 1 \\ 3x - 1, x > 1 \end{cases}$

75. $f(x) = \begin{cases} 3, x < 1 \\ 3x, x \ge 1 \end{cases}$

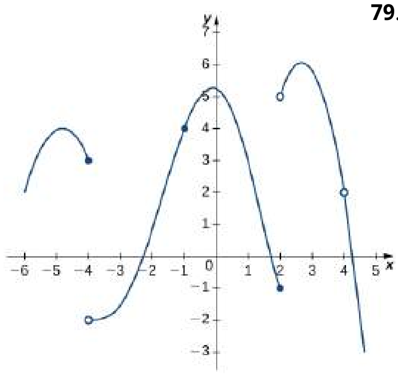
76. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, x \le 1 \\ x, x > 1 \end{cases}$

77. $f(x) = \begin{cases} 2x, x \le 1 \\ \frac{2}{x}, x > 1 \end{cases}$

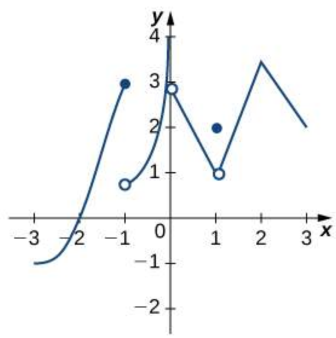
Para los siguientes gráficos,

a. determine para qué valores de $x = a$ el plano $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe pero f no es continua en $x = a$, y
b. determine para qué valores de $x = a$ la función es continua pero no diferenciable en $x = a$.

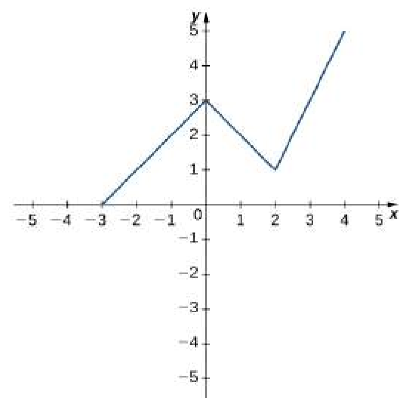
78.



79.



80. Utilice el gráfico para evaluar a. $f'(-0{,}5)$, b. $f'(0)$, c. $f'(1)$, d. $f'(2)$, y e. $f'(3)$, si existe.



En las siguientes funciones, utilice $f''(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$ para calcular $f''(x)$.

81. $f(x) = 2 - 3x$

82. $f(x) = 4x^2$

83. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para graficar $f(x)$. Determine la función $f'(x)$, y, a continuación, use una calculadora para hacer un gráfico $f'(x)$.

84. **[T]** $f(x) = -\frac{5}{x}$

85. **[T]** $f(x) = 3x^2 + 2x + 4.$

86. **[T]** $f(x) = \sqrt{x} + 3x$

87. **[T]** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

88. **[T]** $f(x) = 1 + x + \frac{1}{x}$

89. **[T]** $f(x) = x^3 + 1$

En los siguientes ejercicios, describa lo que representan las dos expresiones en función de cada una de las situaciones dadas. Asegúrese de incluir las unidades.

a. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
b. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

90. $P(x)$ indica la población de una ciudad en el tiempo x en años.

91. $C(x)$ indica la cantidad total de dinero (en miles de dólares) gastada en concesiones por x clientes en un parque de atracciones.

92. $R(x)$ indica el costo total (en miles de dólares) de la fabricación de x radios-reloj.

93. $g(x)$ denota la calificación (en puntos porcentuales) recibida en un examen, dadas x horas de estudio.

94. $B(x)$ indica el costo (en dólares) de un libro de texto de sociología en las librerías universitarias de Estados Unidos en x años desde 1990.

95. $p\,(x)$ indica la presión atmosférica en Torrs a una altitud de x pies.

96. Trace el gráfico de una función $y = f\,(x)$ con todas las propiedades siguientes:

a. $f'\,(x) > 0$ por $-2 \leq x < 1$
b. $f'\,(2) = 0$
c. $f'\,(x) > 0$ por $x > 2$
d. $f\,(2) = 2$ y $f\,(0) = 1$
e. $\lim\limits_{x \to -\infty} f\,(x) = 0$ y

$\lim\limits_{x \to \infty} f\,(x) = \infty$

f. $f'\,(1)$ no existe.

97. Supongamos que la temperatura T en grados Fahrenheit a una altura de x en pies sobre el suelo viene dada por $y = T(x)$.

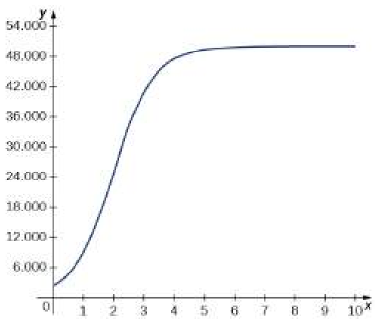
a. Dé una interpretación física, con unidades, de $T'(x)$.
b. Si sabemos que $T'\,(1.000) = -0{,}1$, explique el significado físico.

98. Supongamos que el beneficio total de una compañía es $y = P(x)$ mil dólares cuando se venden x unidades de un artículo.

a. ¿Qué mide $\frac{P(b) - P(a)}{b - a}$ por $0 < a < b$ y cuáles son las unidades?
b. ¿Qué mide $P'(x)$ y cuáles son las unidades?
c. Supongamos que $P'\,(30) = 5$, ¿cuál es la variación aproximada de las ganancias si el número de artículos vendidos aumenta de 30 para 31?

99. El gráfico de la siguiente figura modela el número de personas $N(t)$ que han contraído la gripe t semanas después de su brote inicial en una ciudad con una población de $50\ 000$ personas.

a. Describa lo que $N'(t)$ representa y cómo se comporta cuando t aumenta.
b. ¿Qué nos dice la derivada sobre cómo afecta el brote de gripe a esta ciudad?



En los siguientes ejercicios, utilice la siguiente tabla, que muestra la altura h del cohete Saturno V para la misión Apolo 11 t segundos después del lanzamiento.

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	0
1	2
2	4
3	13
4	25
5	32

100. ¿Cuál es el significado físico de $h'(t)$? ¿Cuáles son las unidades?

101. **[T]** Elabore una tabla de valores para $h'(t)$ y grafique ambas $h(t)$ y $h'(t)$ en el mismo gráfico. *(Pista:* para los **puntos internos**, estime tanto el límite izquierdo como el derecho y promédielos. Un punto interno de un intervalo I es un elemento de I que no es un punto final de I).

102. **[T]** El mejor ajuste lineal para los datos viene dado por $H(t) = 7{,}229t - 4{,}905$, donde H es la altura del cohete (en metros) y t es el tiempo transcurrido desde el despegue. A partir de esta ecuación, determine $H'(t)$. Gráfico $H(t)$ con los datos dados y, en otro plano de coordenadas, grafique $H'(t)$.

103. **[T]** El mejor ajuste cuadrático para los datos viene dado por $G(t) = 1{,}429t^2 + 0{,}0857t - 0{,}1429$, donde G es la altura del cohete (en metros) y t es el tiempo transcurrido desde el despegue. A partir de esta ecuación, determine $G'(t)$. Gráfico $G(t)$ con los datos dados y, en otro plano de coordenadas, grafique $G'(t)$.

104. **[T]** El mejor ajuste cúbico para los datos viene dado por $F(t) = 0{,}2037t^3 + 2{,}956t^2 - 2{,}705t + 0{,}4683$, donde F es la altura del cohete (en m) y t es el tiempo transcurrido desde el despegue. A partir de esta ecuación, determine $F'(t)$. Gráfico $F(t)$ con los datos dados y, en otro plano de coordenadas, grafique $F'(t)$. ¿Qué función entre la lineal, cuadrática o cúbica se ajusta mejor a los datos?

105. Utilizando los mejores ajustes lineales, cuadráticos y cúbicos para los datos, determine qué $H''(t)$, $G''(t)$ y $F''(t)$ sí lo son. ¿Cuáles son los significados físicos de $H''(t)$, $G''(t)$ y $F''(t)$, y cuáles son sus unidades?

3.3 Reglas de diferenciación

Objetivos de aprendizaje

3.3.1 Enunciar las reglas de la constante, del múltiplo constante y de la potencia.
3.3.2 Aplicar las reglas de la suma y la diferencia para combinar derivadas.
3.3.3 Utilizar la regla del producto para encontrar la derivada de un producto de funciones.
3.3.4 Utilizar la regla del cociente para encontrar la derivada de un cociente de funciones.
3.3.5 Extender la regla de la potencia a funciones con exponentes negativos.
3.3.6 Combinar las reglas de diferenciación para encontrar la derivada de una función polinómica o de una función racional.

Encontrar las derivadas de las funciones utilizando la definición de la derivada puede ser un proceso largo y, para ciertas funciones, bastante difícil. Por ejemplo, anteriormente descubrimos que $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ mediante un proceso que implicaba multiplicar una expresión por un conjugado antes de evaluar un límite. El proceso que podríamos utilizar para evaluar $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x}\right)$ utilizando la definición, aunque es similar, es más complicado. En esta sección, desarrollaremos reglas para encontrar derivadas que nos permitan evitar este proceso. Empezamos por lo básico.

Reglas básicas

Las funciones $f(x) = c$ y $g(x) = x^n$ donde n es un número entero positivo son los bloques de construcción a partir de los cuales se construyen todos los polinomios y funciones racionales. Para encontrar derivadas de polinomios y funciones racionales de forma eficiente sin recurrir a la definición de límite de la derivada, debemos primero desarrollar fórmulas para diferenciar estas funciones básicas.

La regla constante

Primero aplicamos la definición de límite de la derivada para encontrar la derivada de la función constante, $f(x) = c$. Para esta función, tanto $f(x) = c$ como $f(x+h) = c$, por lo que obtenemos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 = 0, \end{aligned}$$

La regla para diferenciar funciones constantes se llama **regla de la constante**. Afirma que la derivada de una función constante es cero; es decir, puesto que una función constante es una línea horizontal, la pendiente, o la tasa de cambio, de una función constante es 0. En el siguiente teorema volvemos a exponer esta regla.

Teorema 3.2

La regla constante

Supongamos que c es una constante.

Si los valores de $f(x) = c$, entonces $f'(x) = 0$.

Alternativamente, podemos expresar esta regla como

$$\frac{d}{dx}(c) = 0,$$

EJEMPLO 3.17

Aplicación de la regla de la constante

Calcule la derivada de $f(x) = 8$.

Solución

Esto es solo una aplicación de la regla en un paso:

$$f'(x) = 0,$$

3.11 Calcule la derivada de $g(x) = -3$.

La regla de la potencia

Ya demostramos que

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x \text{ y } \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2}.$$

En este punto, se puede ver un patrón que comienza a desarrollarse para las derivadas de la forma $\frac{d}{dx}(x^n)$. Continuamos nuestro examen de las fórmulas de derivación diferenciando funciones de potencia de la forma $f(x) = x^n$ donde n es un número entero positivo. Desarrollaremos fórmulas para las derivadas de este tipo de funciones por etapas, empezando por las potencias enteras positivas. Antes de enunciar y demostrar la regla general para las derivadas de funciones de esta forma, veremos un caso concreto, $\frac{d}{dx}(x^3)$. A medida que avancemos en esta derivación, observe que la técnica utilizada en este caso es esencialmente la misma que la que se usa para demostrar el caso general.

EJEMPLO 3.18

Diferenciando x^3

Halle $\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$.

Solución

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

Note que el primer término de la expansión de $(x+h)^3$ es x^3 y el segundo término es $3x^2h$. Todos los demás términos contienen potencias de h de dos o mayores.

$$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

En este paso se cancelaron los términos x^3 dejando solo los términos que contienen h.

$$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

Factorice el factor común de h.

$$= \lim\limits_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)$$

Tras cancelar el factor común de h, el único término que no contiene h es $3x^2$.

$$= 3x^2$$

Supongamos que h llega a 0.

3.12 Halle $\frac{d}{dx}\left(x^4\right)$.

Como veremos, el procedimiento para encontrar la derivada de la forma general $f(x) = x^n$ es bastante similar. Aunque a menudo no es prudente sacar conclusiones generales a partir de ejemplos concretos, observamos que cuando diferenciamos $f(x) = x^3$, la potencia en x se convierte en el coeficiente de x^2 en la derivada y la potencia x en la derivada disminuye en 1. El siguiente teorema afirma que la **regla de la potencia** se cumple para todas las potencias enteras positivas de x. En su momento ampliaremos este resultado a las potencias enteras negativas. Más adelante veremos que esta regla también puede extenderse primero a las potencias racionales de x y luego a las potencias arbitrarias de x. No obstante tenga en cuenta que esta regla no se aplica a las funciones en las que una constante se eleva a una potencia variable, como por ejemplo $f(x) = 3^x$.

Teorema 3.3

La regla de la potencia

Supongamos que n es un número entero positivo. Si los valores de $f(x) = x^n$, entonces

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Alternativamente, podemos expresar esta regla como

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Prueba

Para $f(x) = x^n$ donde n es un número entero positivo, tenemos

$$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

$$\text{Dado que } (x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n,$$

vemos que

$$(x+h)^n - x^n = nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}h^3 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n.$$

A continuación, divida ambos lados entre *h*:

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h + \binom{n}{2} x^{n-2}h^2 + \binom{n}{3} x^{n-3}h^3 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n}{h}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \binom{n}{3} x^{n-3}h^2 + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2}h + \binom{n}{3} x^{n-3}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right) \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 3.19

Aplicación de la regla de la potencia

Halle la derivada de la función $f(x) = x^{10}$ aplicando la regla de la potencia.

Solución

Utilizando la regla de la potencia con $n = 10$, obtenemos

$$f'(x) = 10x^{10-1} = 10x^9.$$

3.13 Calcule la derivada de $f(x) = x^7$.

Reglas de la suma, la diferencia y del múltiplo constante

Encontramos nuestras siguientes reglas de diferenciación observando las derivadas de sumas, diferencias y múltiplos constantes de funciones. Al igual que cuando trabajamos con funciones, hay reglas que facilitan encontrar derivadas de funciones que sumamos, restamos o multiplicamos por una constante. Estas reglas se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.4

Reglas de la suma, la diferencia y del múltiplo constante

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables y que k es una constante. Entonces cada una de las siguientes ecuaciones se cumple.

Regla de la suma. La derivada de la suma de una función f y una función g es igual a la suma de la derivada de f y la derivada de g.

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x));$$

es decir,

$$\text{para } j(x) = f(x) + g(x),\, j'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Regla de la diferencia. La derivada de la diferencia de una función *f* y una función *g* es la misma que la diferencia de la derivada de *f* y la derivada de g:

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) - \frac{d}{dx}(g(x));$$

es decir,

$$\text{para } j(x) = f(x) - g(x),\, j'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Regla del múltiplo constante. La derivada de una constante k multiplicada por una función f es lo mismo que la constante multiplicada por la derivada:

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}(f(x));$$

es decir,

$$\text{para } j(x) = kf(x), j'(x) = kf'(x).$$

Prueba

Aquí solo proporcionamos la prueba de la regla de la suma. El resto permanece similar.

Para las funciones diferenciables $f(x)$ y $g(x)$, establecemos $j(x) = f(x) + g(x)$. Utilizando la definición de límite de la derivada tenemos

$$j'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{j(x+h) - j(x)}{h}.$$

Al sustituir $j(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$ y $j(x) = f(x) + g(x)$, obtenemos

$$j'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h}.$$

Si reordenamos y reagrupamos los términos, tenemos

$$j'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right).$$

Ahora aplicamos la ley de suma para los límites y la definición de la derivada para obtener

$$j'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) + \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x).$$

□

EJEMPLO 3.20

Aplicación de la regla del múltiplo constante

Calcule la derivada de $g(x) = 3x^2$ y compárela con la derivada de $f(x) = x^2$.

Solución

Utilicemos directamente la regla de la potencia:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) = 3\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 3(2x) = 6x.$$

Dado que $f(x) = x^2$ tiene la derivada $f'(x) = 2x$, vemos que la derivada de $g(x)$ es 3 veces la derivada de $f(x)$. Esta relación se ilustra en la Figura 3.18.

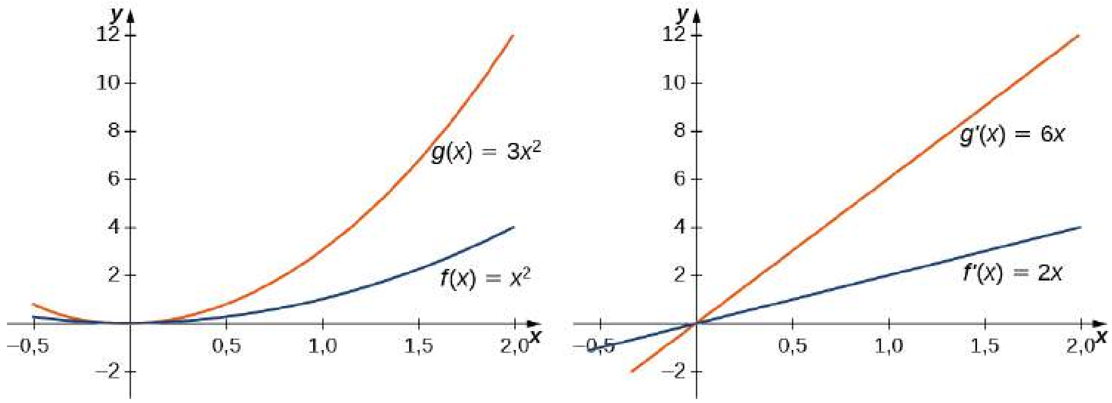


Figura 3.18 La derivada de $g(x)$ es 3 veces la derivada de $f(x)$.

EJEMPLO 3.21

Aplicación de las reglas básicas de las derivadas

Calcule la derivada de $f(x) = 2x^5 + 7$.

Solución

Comenzamos aplicando la regla para diferenciar la suma de dos funciones, seguida de las reglas de diferenciación de múltiplos constantes de funciones y de la regla para diferenciar potencias. Para entender mejor la secuencia en la que se aplican las reglas de diferenciación, utilicemos la notación de Leibniz a lo largo de la solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x^5 + 7\right) & \\ &= \frac{d}{dx}\left(2x^5\right) + \frac{d}{dx}(7) & \text{Aplique la regla de la suma.} \\ &= 2\frac{d}{dx}\left(x^5\right) + \frac{d}{dx}(7) & \text{Aplique la regla del múltiplo constante.} \\ &= 2\left(5x^4\right) + 0 & \text{Aplique la regla de la potencia y la regla de la constante.} \\ &= 10x^4. & \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

3.14 Calcule la derivada de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$.

EJEMPLO 3.22

Halle la ecuación de una línea tangente

Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 6$ a las $x = 1$.

Solución

Para encontrar la ecuación de la línea tangente, necesitamos un punto y una pendiente. Para hallar el punto, calcule

$$f(1) = 1^2 - 4(1) + 6 = 3.$$

Esto nos da el punto $(1, 3)$. Como la pendiente de la línea tangente en 1 es $f'(1)$, primero debemos encontrar $f'(x)$. Utilizando la definición de una derivada, tenemos

$$f'(x) = 2x - 4$$

por lo que la pendiente de la línea tangente es $f'(1) = -2$. Utilizando la fórmula punto-pendiente, vemos que la ecuación de la línea tangente es

$$y - 3 = -2(x - 1).$$

Poniendo la ecuación de la línea en forma pendiente-intersección, obtenemos

$$y = -2x + 5.$$

3.15 Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = 3x^2 - 11$ a las $x = 2$. Utilice la forma punto-pendiente.

La regla del producto

Ya que examinamos las reglas básicas, podemos empezar a ver algunas de las reglas más avanzadas. La primera examina la derivada del producto de dos funciones. Aunque podría ser tentador asumir que la derivada del producto es el producto de las derivadas, de forma similar a las reglas de la suma y la diferencia, la **regla del producto** no sigue este patrón. Para ver por qué no podemos utilizarlo, analicemos la función $f(x) = x^2$, cuya derivada es $f'(x) = 2x$ y no $\frac{d}{dx}(x) \,.\, \frac{d}{dx}(x) = 1.1 = 1.$

Teorema 3.5

Regla del producto

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables. Entonces

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \,.\, g(x) + \frac{d}{dx}(g(x)) \,.\, f(x).$$

Eso es,

$$\text{si } j(x) = f(x)\,g(x), \text{entonces } j'(x) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x).$$

Esto significa que la derivada de un producto de dos funciones es la derivada de la primera función multiplicada por la segunda más la derivada de la segunda función multiplicada por la primera.

Prueba

Comenzamos asumiendo que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables. En un punto clave de esta prueba tenemos que tener en cuenta el hecho de que, como $g(x)$ es diferenciable, también es continua. En particular, tenemos en cuenta el hecho de que ya que $g(x)$ es continua, $\lim\limits_{h \to 0} g(x+h) = g(x)$.

Al aplicar la definición de límite de la derivada a $j(x) = f(x)\,g(x)$, obtenemos

$$j'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}.$$

Al sumar y restar $f(x)\,g(x+h)$ en el numerador, tenemos

$$j'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}.$$

Tras descomponer este cociente y aplicar la ley de suma para los límites, la derivada se convierte en

$$j'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h}\right) + \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x)g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}\right).$$

Reordenando, obtenemos

$$j'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \,.\, g(x+h)\right) + \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \,.\, f(x)\right).$$

Utilizando la continuidad de $g(x)$, la definición de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$, y aplicando las leyes de los límites, llegamos a la regla del producto,

$$j'(x) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x).$$

□

EJEMPLO 3.23

Aplicación de la regla del producto a las funciones en un punto

Para $j(x) = f(x)\,g(x)$, utilice la regla del producto para hallar $j'(2)$ si $f(2) = 3, f'(2) = -4, g(2) = 1$, y $g'(2) = 6$.

Solución

Dado que $j(x) = f(x)\,g(x)$, $j'(x) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x)$, y por lo tanto

$$j'(2) = f'(2)\,g(2) + g'(2)\,f(2) = (-4)(1) + (6)(3) = 14.$$

EJEMPLO 3.24

Aplicación de la regla del producto a los binomios

Para $j(x) = (x^2 + 2)(3x^3 - 5x)$, calcule $j'(x)$ aplicando la regla del producto. Compruebe el resultado encontrando primero el producto y luego diferenciando.

Solución

Si establecemos $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = 3x^3 - 5x$, entonces $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 9x^2 - 5$. Por lo tanto,

$$j'(x) = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x) = (2x)\left(3x^3 - 5x\right) + (9x^2 - 5)(x^2 + 2).$$

Simplificando, tenemos

$$j'(x) = 15x^4 + 3x^2 - 10.$$

Para comprobarlo, observamos que $j(x) = 3x^5 + x^3 - 10x$ y en consecuencia, $j'(x) = 15x^4 + 3x^2 - 10$.

3.16 Utilice la regla del producto para obtener la derivada de $j(x) = 2x^5\left(4x^2 + x\right)$.

La regla del cociente

Después de haber desarrollado y practicado la regla del producto, ahora consideraremos la diferenciación de cocientes de funciones. Como vemos en el siguiente teorema, la derivada del cociente no es el cociente de las derivadas, sino que es la derivada de la función del numerador multiplicada por la función del denominador menos la derivada de la función del denominador multiplicada por la función del numerador, todo ello dividido entre el cuadrado de la función del denominador. Para entender mejor por qué no podemos tomar simplemente el cociente de las derivadas, hay que tener en cuenta que

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x, \text{ no } \frac{\frac{d}{dx}\left(x^3\right)}{\frac{d}{dx}(x)} = \frac{3x^2}{1} = 3x^2.$$

Teorema 3.6

La regla del cociente

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables. Entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(f(x)).\,g(x) - \frac{d}{dx}(g(x)).\,f(x)}{(g(x))^2}.$$

Eso es,

$$\text{si } j(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{entonces } j'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2}.$$

La prueba de la **regla del cociente** es muy similar a la de la regla del producto, por lo que se omite aquí. En su lugar, aplicamos esta nueva regla para encontrar derivadas en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3.25

Aplicación de la regla del cociente

Use la regla del cociente para encontrar la derivada de $k(x) = \frac{5x^2}{4x+3}$.

Solución

Supongamos que $f(x) = 5x^2$ y $g(x) = 4x + 3$. Por lo tanto, $f'(x) = 10x$ y $g'(x) = 4$. Sustituyendo por la regla del cociente, tenemos

$$k'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2} = \frac{10x(4x+3) - 4(5x^2)}{(4x+3)^2}.$$

Si simplificamos, obtenemos

$$k'(x) = \frac{20x^2 + 30x}{(4x+3)^2}.$$

3.17 Calcule la derivada de $h(x) = \frac{3x+1}{4x-3}$.

Ahora es posible utilizar la regla del cociente para ampliar la regla de la potencia para encontrar derivadas de funciones de la forma x^k donde k es un número entero negativo.

Teorema 3.7

Regla de la potencia ampliada

Si los valores de k es un número entero negativo, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\right) = kx^{k-1}.$$

Prueba

Si los valores de k es un número entero negativo, podemos establecer $n = -k$, para que n sea un número entero positivo con $k = -n$. Ya que para cada entero positivo n, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, ahora podemos aplicar la regla del cociente al establecer $f(x) = 1$ y $g(x) = x^n$. En este caso, $f'(x) = 0$ y $g'(x) = nx^{n-1}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(x^{-n}\right) = \frac{0\,(x^n) - 1\left(nx^{n-1}\right)}{(x^n)^2}.$$

Simplificando, vemos que

$$\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(x^{-n}\right) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{(n-1)-2n} = -nx^{-n-1}.$$

Por último, note que ya que $k = -n$, al sustituir tenemos

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\right) = kx^{k-1}.$$

□

EJEMPLO 3.26

Uso de la regla de la potencia ampliada

Halle $\frac{d}{dx}\left(x^{-4}\right)$.

Solución

Si aplicamos la regla de la potencia ampliada con $k = -4$, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-4}\right) = -4x^{-4-1} = -4x^{-5}.$$

EJEMPLO 3.27

Uso de la regla de la potencia ampliada y de la regla del múltiplo constante

Utilice la regla de la potencia ampliada y la regla del múltiplo constante para encontrar la derivada de $f(x) = \frac{6}{x^2}$.

Solución

Puede parecer tentador utilizar la regla del cociente para encontrar esta derivada, y ciertamente no sería incorrecto hacerlo. Sin embargo, es mucho más fácil diferenciar esta función reescribiéndola primero como $f(x) = 6x^{-2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{6}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(6x^{-2}\right) && \text{Reescriba } \tfrac{6}{x^2} \text{ dado que } 6x^{-2}. \\ &= 6\frac{d}{dx}(x^{-2}) && \text{Aplique la regla del múltiplo constante.} \\ &= 6(-2x^{-3}) && \text{Utilice la regla de la potencia ampliada para diferenciar } x^{-2}. \\ &= -12x^{-3} && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

3.18 Calcule la derivada de $g(x) = \frac{1}{x^7}$ utilizando la regla de la potencia ampliada.

Combinación de reglas de diferenciación

Como vimos en los ejemplos de esta sección, rara vez se nos pide que apliquemos una sola regla de diferenciación para encontrar la derivada de una función dada. En este punto, combinando las reglas de diferenciación, podemos encontrar las derivadas de cualquier función polinómica o racional. Más adelante nos encontraremos con combinaciones más complejas de reglas de diferenciación. Una regla de oro para aplicar varias reglas es aplicarlas en el orden inverso al de la evaluación de la función.

EJEMPLO 3.28

Combinación de reglas de diferenciación

Para $k(x) = 3h(x) + x^2 g(x)$, calcule $k'(x)$.

Solución

Para encontrar esta derivada se necesita la regla de la suma, la regla del múltiplo constante y la regla del producto.

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{d}{dx}\left(3h(x) + x^2 g(x)\right) = \frac{d}{dx}(3h(x)) + \frac{d}{dx}\left(x^2 g(x)\right) && \text{Aplique la regla de la suma.} \\ &= 3\frac{d}{dx}(h(x)) + \left(\frac{d}{dx}\left(x^2\right) g(x) + \frac{d}{dx}(g(x))\, x^2\right) && \text{Aplique la regla del múltiplo constante para diferenciar } 3h(x) \text{ y el producto regla para diferenciar } x^2 g(x). \\ &= 3h'(x) + 2xg(x) + g'(x)x^2 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.29

Ampliación de la regla del producto

Para $k(x) = f(x)\, g(x)\, h(x)$, exprese $k'(x)$ en términos de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, y sus derivadas.

Solución

Podemos pensar en la función $k(x)$ como el producto de la función $f(x)\, g(x)$ y la función $h(x)$. Es decir, $k(x) = (f(x)\, g(x)) \,.\, h(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) \,.\, h(x) + \frac{d}{dx}(h(x)) \,.\, (f(x)g(x)) && \text{Aplicar la regla del producto al producto de } f(x)g(x) \text{ y } h(x). \\ &= \left(f'(x)g(x) + g'(x)f(x)\right)h(x) + h'(x)f(x)g(x) && \text{Aplique la regla del producto a } f(x)g(x). \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.30

Combinación de la regla del cociente y la regla del producto

Para $h(x) = \frac{2x^3 k(x)}{3x+2}$, calcule $h'(x)$.

Solución

Este procedimiento es típico para encontrar la derivada de una función racional.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\frac{d}{dx}\left(2x^3 k(x)\right).(3x+2) - \frac{d}{dx}(3x+2).\left(2x^3 k(x)\right)}{(3x+2)^2} && \text{Aplique la regla del cociente.} \\ &= \frac{\left(6x^2 k(x) + k'(x).2x^3\right)(3x+2) - 3\left(2x^3 k(x)\right)}{(3x+2)^2} && \text{Aplique la regla del producto para hallar } \frac{d}{dx}\left(2x^3 k(x)\right). \text{ Uso } \frac{d}{dx}(3x+2) = 3. \\ &= \frac{-6x^3 k(x) + 18x^3 k(x) + 12x^2 k(x) + 6x^4 k'(x) + 4x^3 k'(x)}{(3x+2)^2} && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

3.19 Halle $\frac{d}{dx}(3f(x) - 2g(x))$.

EJEMPLO 3.31

Determinar si una función tiene una tangente horizontal

Determine los valores de x en el que $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 1$ tiene una línea tangente horizontal.

Solución

Para encontrar los valores de x en el que $f(x)$ tiene una línea tangente horizontal, debemos resolver $f'(x) = 0$. Dado que

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 8 = (3x - 2)(x - 4),$$

debemos resolver $(3x - 2)(x - 4) = 0$. Así vemos que la función tiene líneas tangentes horizontales en $x = \frac{2}{3}$ y $x = 4$ como se muestra en la siguiente gráfica.

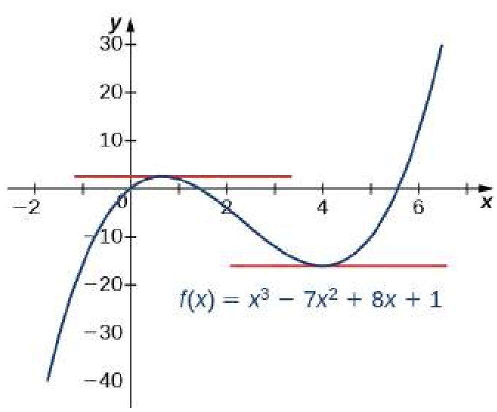


Figura 3.19 Esta función tiene líneas tangentes horizontales en $x = 2/3$ y $x = 4$.

EJEMPLO 3.32

Encontrar una velocidad

La posición de un objeto en un eje de coordenadas en el tiempo$t$ viene dada por $s(t) = \frac{t}{t^2+1}$. ¿Cuál es la velocidad inicial del objeto?

Solución

Dado que la velocidad inicial es $v(0) = s'(0)$, comience por hallar $s'(t)$ aplicando la regla del cociente:

$$s'(t) = \frac{1\left(t^2+1\right) - 2t(t)}{\left(t^2+1\right)^2} = \frac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Después de la evaluación, vemos que $v(0) = 1$.

3.20 Halle los valores de x para los que el gráfico de $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$ tiene una línea tangente paralela a la línea $y = 2x + 3$.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Las tribunas de la Fórmula 1

Las carreras de automóviles de Fórmula 1 pueden ser muy emocionantes y de hecho atraen muchos espectadores. Los diseñadores de los circuitos de Fórmula 1 tienen que asegurarse de que haya suficiente espacio en las gradas alrededor de la pista para acomodar al público. Sin embargo, esas carreras pueden ser peligrosas, y los aspectos de seguridad son primordiales. Las tribunas deben estar situadas donde los espectadores no corran peligro en caso de que un piloto pierda el control de un automóvil (Figura 3.20).

Figura 3.20 La tribuna junto a una recta del circuito de Barcelona-Catalunya, situada donde los espectadores no corren peligro.

La seguridad es un problema sobre todo en las curvas. Si un conductor no frena lo suficiente antes de entrar en la curva, su auto puede salirse de la pista. Por lo general esto solo da lugar a un giro más amplio que ralentiza al conductor, pero si este pierde completamente el control, el auto puede salirse de la pista por completo, en una trayectoria tangente a la curva del circuito.

Supongamos que está diseñando una nueva pista de Fórmula 1. Una sección de la vía puede ser modelada por la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$ (Figura 3.21). El plan actual prevé la construcción de tribunas a lo largo de la primera recta y alrededor de una parte de la primera curva. Los planes prevén que la esquina delantera de la tribuna se sitúe en el punto $(-1{,}9, 2{,}8)$. Queremos determinar si esta ubicación pone en peligro a los espectadores si un conductor pierde el control de su automóvil.

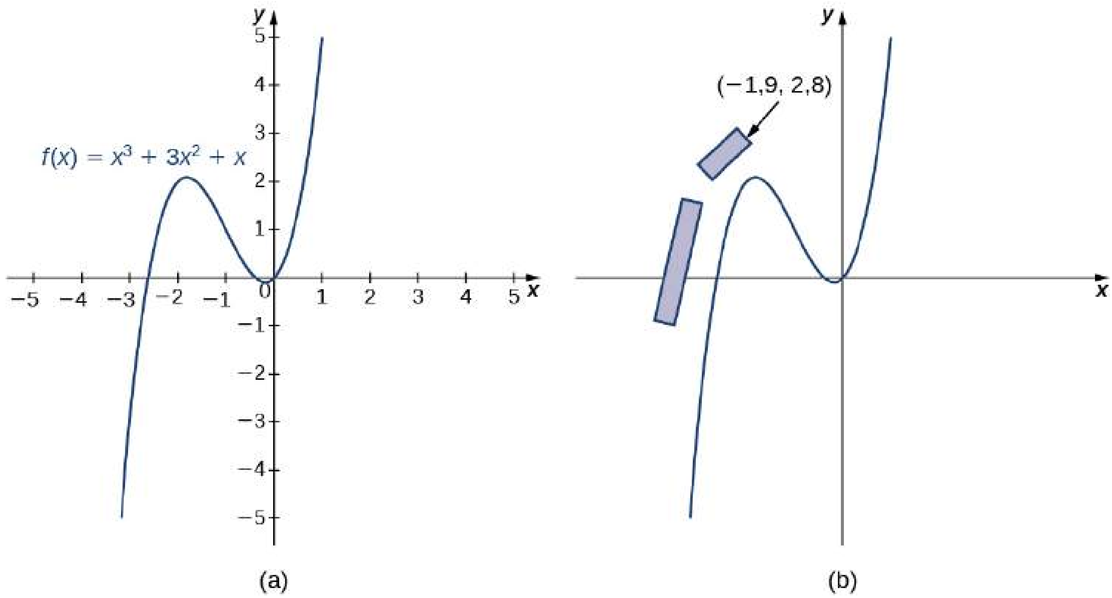


Figura 3.21 (a) Una sección de la pista puede ser modelada por la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x$. b) La esquina delantera de la tribuna está situada en $(-1{,}9, 2{,}8)$.

1. Los físicos han determinado que los conductores tienen más probabilidades de perder el control de sus autos al entrar en una curva, en el punto donde la pendiente de la línea tangente es 1. Halle las intersecciones en (x, y) coordenadas de este punto cerca del giro.
2. Halle la ecuación de la línea tangente a la curva en este punto.
3. Para determinar si los espectadores están en peligro en este escenario, halle la coordenada *x* del punto donde la línea tangente interseca la línea $y = 2{,}8$. ¿Este punto a la derecha de la tribuna es seguro? ¿O los espectadores están en peligro?
4. ¿Qué pasa si un conductor pierde el control antes de lo previsto según los físicos? Supongamos que un conductor pierde el control en el punto $(-2{,}5, 0{,}625)$. ¿Cuál es la pendiente de la línea tangente en este punto?
5. Si un conductor pierde el control como se describe en la parte 4, ¿los espectadores no corren peligro?
6. ¿Debe mantener el diseño actual de la tribuna, o esta debe trasladarse?

SECCIÓN 3.3 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule $f'(x)$ por cada función.

106. $f(x) = x^7 + 10$

107. $f(x) = 5x^3 - x + 1$

108. $f(x) = 4x^2 - 7x$

109. $f(x) = 8x^4 + 9x^2 - 1$

110. $f(x) = x^4 + \frac{2}{x}$

111. $f(x) = 3x\left(18x^4 + \frac{13}{x+1}\right)$
grandes.

112. $f(x) = (x+2)\left(2x^2 - 3\right)$
grandes.

113. $f(x) = x^2\left(\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)$
grandes.

114. $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{3}$

115. $f(x) = \frac{4x^3 - 2x + 1}{x^2}$

116. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

117. $f(x) = \frac{x+9}{x^2 - 7x + 1}$

En los siguientes ejercicios, halle la ecuación de la línea tangente $T(x)$ al gráfico de la función dada en el punto indicado. Utilice una calculadora gráfica para representar la función y la línea tangente.

118. **[T]** $y = 3x^2 + 4x + 1$ a las $(0, 1)$

119. **[T]** $y = \frac{2}{x^2} + 1$ a las $(1, 3)$

120. **[T]** $y = \frac{2x}{x-1}$ a las $(-1, 1)$

121. **[T]** $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}$ en $(1, -1)$

En los siguientes ejercicios, suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son ambas funciones diferenciables para toda x. Halle la derivada de cada una de las funciones $h(x)$.

122. $h(x) = 4f(x) + \frac{g(x)}{7}$

123. $h(x) = x^3 f(x)$ grandes.

124. $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{2}$

125. $h(x) = \frac{3f(x)}{g(x)+2}$

En los siguientes ejercicios, suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables con los valores que se indican en la siguiente tabla. Utilice la siguiente tabla para calcular las siguientes derivadas.

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	−2	0
$g(x)$	2	3	−4	6
$f'(x)$	−1	7	8	−3
$g'(x)$	4	1	2	9

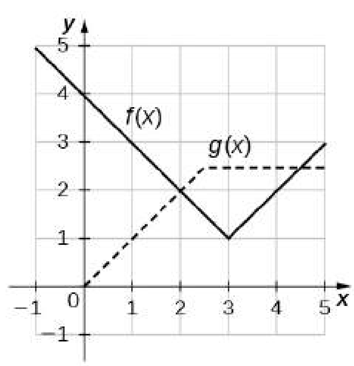
126. Halle $h'(1)$ si $h(x) = xf(x) + 4g(x)$.

127. Halle $h'(2)$ si $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

128. Halle $h'(3)$ si $h(x) = 2x + f(x)g(x)$.

129. Halle $h'(4)$ si $h(x) = \frac{1}{x} + \frac{g(x)}{f(x)}$.

En los siguientes ejercicios, utilice la siguiente figura para hallar las derivadas indicadas, si es que existen.



130. Supongamos que $h(x) = f(x) + g(x)$. Calcule

a. $h'(1)$,
b. $h'(3)$, y
c. $h'(4)$.

131. Supongamos que $h(x) = f(x)\, g(x)$. Calcule

a. $h'(1)$,
b. $h'(3)$, y
c. $h'(4)$.

132. Supongamos que $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Calcule

a. $h'(1)$,
b. $h'(3)$, y
c. $h'(4)$.

En los siguientes ejercicios,

a. evalúe $f'(a)$, y
b. grafique la función $f(x)$ y la línea tangente en $x = a$.

133. **[T]** $f(x) = 2x^3 + 3x - x^2, a = 2$

134. **[T]** $f(x) = \frac{1}{x} - x^2, a = 1$

135. **[T]** $f(x) = x^2 - x^{12} + 3x + 2, a = 0$

136. **[T]** $f(x) = \frac{1}{x} - x^2, a = -1$

137. Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x - 3$ en $x = -1$.

138. Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = x^2 + \frac{4}{x} - 10$ a las $x = 8$.

139. Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = (3x - x^2)(3 - x - x^2)$ en $x = 1$.

140. Halle el punto en el gráfico de $f(x) = x^3$ tal que la línea tangente en ese punto tenga una intersección en x de 6.

141. Halle la ecuación de la línea que pasa por el punto $P(3, 3)$ y es tangente al gráfico de $f(x) = \frac{6}{x-1}$.

142. Determine todos los puntos del gráfico de $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ para el cual

a. la línea tangente es horizontal
b. la línea tangente tiene una pendiente de -1.

143. Halle un polinomio cuadrático tal que $f(1) = 5, f'(1) = 3$ y $f''(1) = -6$.

144. Un auto que circula por una autopista con tráfico ha recorrido $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ metros en t segundos.

a. Determine el tiempo en segundos en que la velocidad del auto es 0.
b. Determine la aceleración del auto cuando la velocidad es 0.

145. **[T]** Un arenque nadando en línea recta ha recorrido $s(t) = \frac{t^2}{t^2+2}$ pies en t segundos.

Determine la velocidad del arenque cuando haya recorrido 3 segundos.

146. La población en millones de platija ártica en el Océano Atlántico se modela mediante la función $P(t) = \frac{8t+3}{0{,}2t^2+1}$, donde t se mide en años.

a. Determine la población inicial de platijas.
b. Determine $P'(10)$ e interprete brevemente el resultado.

147. **[T]** La concentración de antibióticos en el torrente sanguíneo t horas después de haber sido inyectados viene dada por la función $C(t) = \frac{2t^2+t}{t^3+50}$, donde C se mide en miligramos por litro de sangre.

a. Calcule la tasa de cambio de $C(t)$.
b. Determine la tasa de cambio de $t = 8, 12, 24,$ y $36.$
c. Describa brevemente lo que parece ocurrir a medida que aumenta el número de horas.

148. Un editor de libros tiene una función de costo dada por $C(x) = \frac{x^3+2x+3}{x^2}$, donde *x* es el número de ejemplares de un libro en miles y *C* es el costo por libro en dólares. Evalúe $C'(2)$ y explique su significado.

149. **[T]** Según la ley de gravitación universal de Newton, la fuerza F entre dos cuerpos de masa constante m_1 y m_2 está dado por la fórmula $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$, donde G es la constante gravitacional y d es la distancia entre los cuerpos.

a. Supongamos que G, m_1, y m_2 son constantes. Calcule la tasa de cambio de la fuerza F con respecto a la distancia d.
b. Calcule la tasa de cambio de la fuerza F con la constante gravitacional $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2, en dos cuerpos separados por 10 metros, cada uno con una masa de 1.000 kilogramos.

3.4 Las derivadas como tasas de cambio

Objetivos de aprendizaje

3.4.1 Determinar un nuevo valor de una cantidad a partir del valor anterior y la cantidad de cambio.
3.4.2 Calcular la tasa de cambio promedio y explicar en qué se diferencia de la tasa de cambio instantánea.
3.4.3 Aplicar las tasas de cambio al desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un objeto que se mueve a lo largo de una línea recta.
3.4.4 Predecir la población futura a partir del valor actual y la tasa de crecimiento de la población.
3.4.5 Utilizar las derivadas para calcular el costo marginal y los ingresos en una situación comercial.

En esta sección veremos algunas aplicaciones de la derivada centrándonos en su interpretación como la tasa de cambio de una función. Estas aplicaciones incluyen la **aceleración** y la velocidad en física, las **tasas de crecimiento de la población** en biología y las funciones marginales en economía.

Fórmula de la cantidad de cambio

Una de las aplicaciones de las derivadas es estimar un valor desconocido de una función en un punto utilizando un valor conocido de la función en algún punto dado junto con su tasa de cambio en el punto dado. Si los valores de $f(x)$ es una función definida en un intervalo $[a, a+h]$, entonces la **cantidad de cambio** de $f(x)$ sobre el intervalo es el cambio en los valores y de la función en ese intervalo y viene dada por

$$f(a+h) - f(a).$$

La **tasa de cambio** de la función f en ese mismo intervalo es la relación entre la cantidad de cambio en ese intervalo y el cambio correspondiente en los valores x. Viene dado por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Como sabemos, la tasa de cambio instantánea de $f(x)$ en a es su derivada

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Para valores suficientemente pequeños de h, $f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Podemos entonces resolver para $f(a+h)$ a fin de obtener la fórmula de la cantidad de cambio:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h. \qquad \textbf{(3.10)}$$

Podemos utilizar esta fórmula si solo conocemos $f(a)$ y $f'(a)$ y deseamos estimar el valor de $f(a+h)$. Por ejemplo, podemos utilizar la población actual de una ciudad y su tasa de crecimiento para estimar su número en un futuro próximo. Como podemos ver en la Figura 3.22, estamos aproximando $f(a+h)$ por las coordenadas y en $a+h$ en la línea tangente a $f(x)$ en $x = a$. Observe que la exactitud de esta estimación depende del valor de h así como del valor de $f'(a)$.

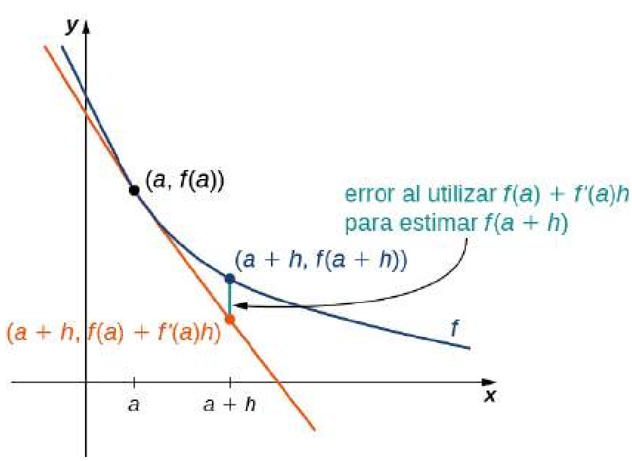


Figura 3.22 El nuevo valor de una cantidad modificada es igual al valor original más la tasa de cambio multiplicada por el intervalo de cambio: $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\text{h}$.

MEDIOS

He aquí una interesante demostración (http://www.openstax.org/l/20_chainrule) de la tasa de cambio.

EJEMPLO 3.33

Estimación del valor de una función

Si los valores de $f(3) = 2$ y $f'(3) = 5$, estime $f(3{,}2)$.

Solución

Comience por calcular h. Tenemos $h = 3{,}2 - 3 = 0{,}2$. Por lo tanto,

$$f(3{,}2) = f(3 + 0{,}2) \approx f(3) + (0{,}2)\, f'(3) = 2 + 0{,}2\,(5) = 3.$$

3.21 Dado que $f(10) = -5$ y $f'(10) = 6$, estime $f(10{,}1)$.

Movimiento a lo largo de una línea

Otro uso de la derivada es el de analizar el movimiento a lo largo de una línea. Describimos la velocidad como la tasa de cambio de posición. Si tomamos la derivada de la velocidad, podemos encontrar la aceleración, o la tasa de cambio de la velocidad. También es importante presentar la idea de **rapidez**, que es la magnitud de la velocidad. Así, podemos enunciar las siguientes definiciones matemáticas.

Definición

Supongamos que $s(t)$ es una función que da la posición de un objeto en el tiempo t.

La velocidad del objeto en el tiempo t viene dada por $v(t) = s'(t)$.

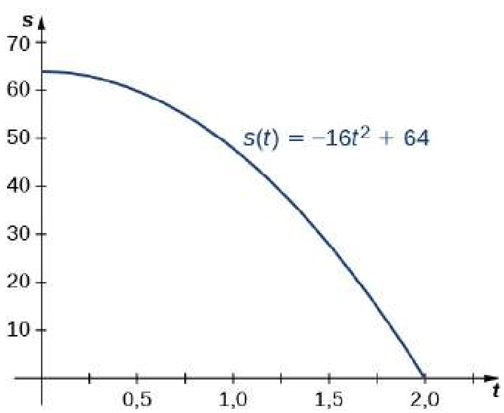
La rapidez del objeto en el momento t viene dada por $|v(t)|$.

La aceleración del objeto en t viene dada por $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

EJEMPLO 3.34

Comparación de la velocidad instantánea y la velocidad media

Se deja caer una pelota desde una altura de 64 ft. Su altura sobre el suelo (en ft) t segundos después viene dada por $s(t) = -16t^2 + 64$.



a. ¿Cuál es la velocidad instantánea de la pelota cuando toca el suelo?
b. ¿Cuál es la velocidad media durante su caída?

Solución

Lo primero que hay que hacer es determinar el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello, defina $s(t) = 0$. Resolución de problemas $-16t^2 + 64 = 0$, obtenemos $t = 2$, para que la pelota tarde 2 segundos en llegar al suelo.

a. La velocidad instantánea de la pelota al golpear el suelo es $v(2)$. Dado que $v(t) = s'(t) = -32t$, obtenemos $v(t) = -64$ ft/s.

b. La velocidad media de la pelota durante su caída es
$$v_{ave} = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = \frac{0 - 64}{2} = -32 \text{ ft/s}.$$

EJEMPLO 3.35

Interpretación de la relación entre $v(t)$ y $a(t)$

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas en la dirección positiva hacia la derecha. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = t^3 - 4t + 2$. Calcule $v(1)$ y $a(1)$ y utilice estos valores para responder las siguientes preguntas.

a. La partícula se mueve de izquierda a derecha o de derecha a izquierda en el tiempo $t = 1$?
b. ¿La partícula se acelera o se ralentiza en el tiempo $t = 1$?

Solución

Comience por calcular $v(t)$ y $a(t)$.

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 4$ y $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t$.

Al evaluar estas funciones en $t = 1$, obtenemos $v(1) = -1$ y $a(1) = 6$.

a. Dado que $v(1) < 0$, la partícula se mueve de derecha a izquierda.
b. Dado que $v(1) < 0$ y $a(1) > 0$, la velocidad y la aceleración actúan en direcciones opuestas. En otras palabras, la partícula se acelera en la dirección opuesta a la que viaja, haciendo que $|v(t)|$ disminuya. La partícula se ralentiza.

EJEMPLO 3.36

Posición y velocidad

La posición de una partícula que se mueve a lo largo de un eje de coordenadas viene dada por $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 4, t \geq 0$.

a. Halle $v(t)$.
b. ¿En qué tiempo(s) la partícula está en reposo?
c. ¿En qué intervalos de tiempo se mueve la partícula de izquierda a derecha? ¿De derecha a izquierda?
d. Use la información obtenida para trazar la trayectoria de la partícula a lo largo de un eje de coordenadas.

Solución

a. La velocidad es la derivada de la función de posición:
$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 18t + 24.$$
b. La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, así que establezca $3t^2 - 18t + 24 = 0$. Factorizando el lado izquierdo de la ecuación se obtiene $3(t-2)(t-4) = 0$. Al resolver encontramos que la partícula está en reposo en $t = 2$ y $t = 4$.
c. La partícula se mueve de izquierda a derecha cuando $v(t) > 0$ y de derecha a izquierda cuando $v(t) < 0$. La Figura 3.23 ofrece el análisis del signo de $v(t)$ por $t \geq 0$, pero no representa el eje a lo largo del cual se mueve la partícula.

Figura 3.23 El signo de v(t) determina la dirección de la partícula.

Dado que $3t^2 - 18t + 24 > 0$ sobre $[0, 2) \cup (4, +\infty)$, la partícula se mueve de izquierda a derecha en estos intervalos.
Dado que $3t^2 - 18t + 24 < 0$ sobre $(2, 4)$, la partícula se mueve de derecha a izquierda en este intervalo.

d. Antes de dibujar el gráfico de la partícula, necesitamos conocer su posición en el momento en que comienza a moverse $(t = 0)$ y en los momentos en que cambia de dirección $(t = 2, 4)$. Tenemos $s(0) = 4$, $s(2) = 24$, y $s(4) = 20$. Esto significa que la partícula comienza en el eje de coordenadas en 4 y cambia de dirección en 0 y 20 en el eje de coordenadas. La trayectoria de la partícula se muestra en un eje de coordenadas en la Figura 3.24.

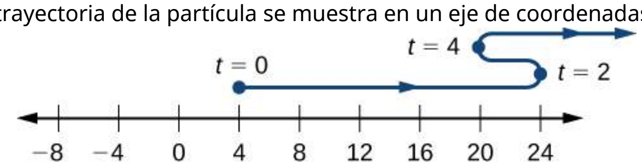


Figura 3.24 La trayectoria de la partícula puede determinarse analizando v(t).

3.22 Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = t^2 - 5t + 1$. ¿La partícula se mueve de derecha a izquierda o de izquierda a derecha en el momento $t = 3$?

Cambio de población

Además de analizar la velocidad, la rapidez, la aceleración y la posición, podemos utilizar las derivadas para analizar varios tipos de poblaciones, incluso aquellas tan diversas como colonias de bacterias y ciudades. Podemos utilizar una población actual, junto con la tasa de crecimiento, para estimar el tamaño de una población en el futuro. La tasa de crecimiento de la población es la tasa de cambio de una población y, en consecuencia, puede representarse mediante la derivada del tamaño de la población.

Definición

Si los valores de $P(t)$ es el número de individuos de una población, entonces la tasa de crecimiento de la población de $P(t)$ se define como $P'(t)$.

EJEMPLO 3.37

Estimación de una población

La población de una ciudad se triplica cada 5 años. Si su población actual es de 10.000 habitantes, ¿cuál será su población aproximada dentro de 2 años?

Solución

Supongamos que $P(t)$ es la población (en miles) t años a partir de este momento. Así, sabemos que $P(0) = 10$ y con base a la información, prevemos $P(5) = 30$. Ahora estime $P'(0)$, la tasa de crecimiento actual, utilizando

$$P'(0) \approx \frac{P(5) - P(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4.$$

Al aplicar la Ecuación 3.10 a $P(t)$, podemos estimar la población dentro de 2 años escribiendo

$$P(2) \approx P(0) + (2)P'(0) \approx 10 + 2(4) = 18;$$

así, dentro de 2 años la población será de 18.000 habitantes.

3.23 Se sabe que la población actual de una colonia de mosquitos es de 3.000; es decir, $P(0) = 3.000$. Si $P'(0) = 100$, estimar el tamaño de la población en 3 días, donde t se mide en días.

Cambios en los costos e ingresos

Además de analizar el movimiento a lo largo de una línea y el crecimiento de la población, las derivadas se usan para analizar los cambios en los costos, los ingresos y las ganancias. El concepto de función marginal es habitual en el ámbito de la empresa y la economía e implica el uso de derivadas. El costo marginal es la derivada de la función de costos. El ingreso marginal es la derivada de la función de ingresos. La ganancia marginal es la derivada de la función de ganancias, que se basa en la función de costos y la función de ingresos.

Definición

Si los valores de $C(x)$ es el costo de producción de x artículos, entonces el **costo marginal** $MC(x)$ ¿es $MC(x) = C'(x)$.

Si los valores de $R(x)$ son los ingresos obtenidos por la venta de x artículos, entonces el ingreso marginal $MR(x)$ ¿es $MR(x) = R'(x)$.

Si los valores de $P(x) = R(x) - C(x)$ es la ganancia obtenida por la venta de x artículos, entonces la **ganancia marginal** $MP(x)$ se define como $MP(x) = P'(x) = MR(x) - MC(x) = R'(x) - C'(x)$.

Podemos hacer una aproximación

$$MC(x) = C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

eligiendo un valor adecuado para h. Como x representa objetos, un valor razonable y pequeño para h es 1. Así, sustituyendo $h = 1$, obtenemos la aproximación $MC(x) = C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$. En consecuencia, $C'(x)$ para un valor determinado de x puede considerarse como el cambio en el costo asociado a la producción de un artículo adicional. De manera similar, $MR(x) = R'(x)$ se aproxima a los ingresos obtenidos por la venta de un artículo adicional, y $MP(x) = P'(x)$ se aproxima la ganancia obtenida por la producción y venta de un artículo adicional.

EJEMPLO 3.38

Aplicación de los ingresos marginales

Supongamos que el número de raciones de barbacoa que se pueden vender, x, puede estar relacionado con el precio aplicado, p, por la ecuación $p(x) = 9 - 0{,}03x, 0 \leq x \leq 300$.

En este caso, el ingreso en dólares obtenidos por la venta de x raciones de barbacoa viene dado por

$$R(x) = xp(x) = x(9 - 0{,}03x) = -0{,}03x^2 + 9x \text{ para } 0 \leq x \leq 300.$$

Utilice la función de ingresos marginales para estimar los ingresos obtenidos por la venta de la ración número 101 de barbacoa. Compárela con el ingreso real obtenido por la venta de esta ración.

Solución

En primer lugar, halle la función de ingresos marginales: $MR(x) = R'(x) = -0{,}06x + 9$.

A continuación, utilice $R'(100)$ para aproximar a $R(101) - R(100)$, los ingresos obtenidos por la venta de la ración número 101. Dado que $R'(100) = 3$, los ingresos obtenidos por la venta de la ración número 101 son de aproximadamente 3 dólares.

Los ingresos reales obtenidos por la venta de la ración número 101 son

$$R(101) - R(100) = 602{,}97 - 600 = 2{,}97, \text{ o } \$2{,}97.$$

El ingreso marginal es una estimación razonablemente buena en este caso y tiene la ventaja de ser fácil de calcular.

3.24 Supongamos que el beneficio obtenido por la venta de x raciones de pescado frito viene dada por $P(x) = -0{,}03x^2 + 8x - 50$. Utilice la función de ganancia marginal para estimar la ganancia de la venta de la ración número 101 de pescado frito.

SECCIÓN 3.4 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, las funciones dadas representan la posición de una partícula que viaja a lo largo de una línea horizontal.

a. Halle las funciones de velocidad y aceleración.
b. Determine los intervalos de tiempo en los que el objeto se ralentiza o se acelera.

150. $s(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t + 8$

151. $s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t - 10$

152. $s(t) = \frac{t}{1+t^2}$

153. Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba desde el suelo. La distancia s en ft que el cohete viaja desde el suelo después de t segundos viene dada por $s(t) = -16t^2 + 560t$.

a. Halle la velocidad del cohete 3 segundos después de su lanzamiento.
b. Halle la aceleración del cohete 3 segundos después de su lanzamiento.

154. Se lanza una pelota hacia abajo con una velocidad de 8 ft/s desde lo alto de un edificio de 64 ft de altura. Después de t segundos, su altura sobre el suelo viene dada por $s(t) = -16t^2 - 8t + 64$.

a. Determine el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo.
b. Determine la velocidad de la pelota cuando toca el suelo.

155. La función de posición $s(t) = t^2 - 3t - 4$ representa la posición de la parte trasera de un automóvil que sale en marcha atrás de un camino de entrada y luego conduciendo en línea recta, donde s está en pies y t está en segundos. En este caso, $s(t) = 0$ representa el momento en que la parte trasera del auto está en la puerta del garaje, por lo que $s(0) = -4$ es la posición inicial del automóvil, 4 ft dentro del garaje.

a. Determine la velocidad del auto cuando $s(t) = 0$.
b. Determine la velocidad del auto cuando $s(t) = 14$.

156. La posición de un colibrí volando a lo largo de una línea recta en t segundos viene dada por $s(t) = 3t^3 - 7t$ metros.

a. Determine la velocidad del pájaro en $t = 1$ seg.
b. Determine la aceleración del pájaro en $t = 1$ seg.
c. Determine la aceleración del pájaro cuando la velocidad es igual a 0.

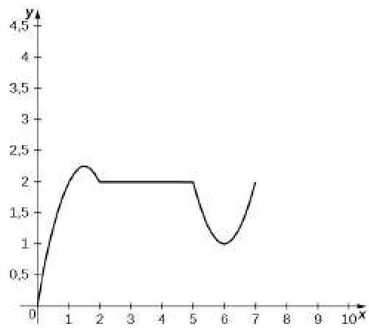
157. Se lanza una papa verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 100 ft/s desde una pistola de papas en la cima de un edificio de 85 ft de altura. La distancia en pies que la papa recorre desde el suelo tras t segundos viene dada por $s(t) = -16t^2 + 100t + 85$.

a. Halle la velocidad de la papa después de $0{,}5$ s y $5{,}75$ s.
b. Halle la velocidad de la papa a los 0,5 s y a los 5,75 s.
c. Determine cuándo la papa alcanza su máxima altura.
d. Halle la aceleración de la papa a los 0,5 s y a los 1,5 s.
e. Determine el tiempo que la papa está en el aire.
f. Determine la velocidad de la papa al caer al suelo.

158. La función de posición $s(t) = t^3 - 8t$ da la posición en millas de un tren de mercancías donde el este es la dirección positiva y t se mide en horas.

a. Determine la dirección en la que viaja el tren cuando $s(t) = 0$.
b. Determine la dirección en la que viaja el tren cuando $a(t) = 0$.
c. Determine los intervalos de tiempo en los que la velocidad del tren aumenta o disminuye.

159. El siguiente gráfico muestra la posición $y = s(t)$ de un objeto que se mueve en línea recta.



a. Utilice el gráfico de la función de posición para determinar los intervalos de tiempo en los que la velocidad es positiva, negativa o cero.
b. Dibuje el gráfico de la función de velocidad.
c. Utilice el gráfico de la función velocidad para determinar los intervalos de tiempo en los que la aceleración es positiva, negativa o cero.
d. Determine los intervalos de tiempo en los que el objeto se acelera o desacelera.

160. La función de costos en dólares de una empresa que fabrica procesadores de alimentos viene dada por $C(x) = 200 + \frac{7}{x} + \frac{x^2}{7}$, donde x es el número de procesadores de alimentos fabricados.

a. Calcule la función de costo marginal.
b. Utilice la función de costo marginal para estimar el costo de fabricación del decimotercer procesador de alimentos.
c. Halle el costo real de fabricación del decimotercer procesador de alimentos.

161. El precio p (en dólares) y la demanda x para un determinado radio-reloj digital viene dado por la función precio-demanda $p = 10 - 0{,}001x$.

a. Halle la función de ingresos $R(x)$.
b. Halle la función de ingreso marginal.
c. Halle el ingreso marginal en $x = 2000$ y 5.000.

162. **[T]** Se obtiene una ganancia cuando los ingresos superan los costos. Supongamos que la función de ganancias de un fabricante de patinetas viene dada por $P(x) = 30x - 0{,}3x^2 - 250$, donde x es el número de patinetas vendidas.

a. Halle la ganancia exacta de la venta de la trigésima patineta.
b. Halle la función de ganancia marginal y utilícela para estimar la ganancia de la venta de la trigésima patineta.

163. **[T]** En general, la función de ganancias es la diferencia entre las funciones de ingresos y costos: $P(x) = R(x) - C(x)$.

Supongamos que las funciones de precio-demanda y de costo para la producción de taladros inalámbricos vienen dadas, respectivamente, por $p = 143 - 0{,}03x$ y $C(x) = 75.000 + 65x$, donde x es el número de taladros inalámbricos que se venden a un precio de p dólares por taladro y $C(x)$ es el costo de producción de x taladros inalámbricos.

a. Calcule la función de costo marginal.
b. Halle las funciones de ingresos y de ingresos marginales.
c. Halle $R'(1.000)$ y $R'(4{,}000)$. Interprete los resultados.
d. Halle las funciones de ganancias y de ganancia marginal.
e. Halle $P'(1.000)$ y $P'(4{,}000)$. Interprete los resultados.

164. Una pequeña ciudad de Ohio encargó a una empresa de servicios actuariales un estudio que modelara la tasa de cambio de la población de la ciudad. El estudio reveló que la población de la ciudad (medida en miles de personas) puede modelarse mediante la función $P(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 64t + 3.000$, donde t se mide en años.

a. Halle la función de tasa de cambio $P'(t)$ de la función de población.
b. Halle $P'(1)$, $P'(2)$, $P'(3)$, y $P'(4)$. Interprete lo que los resultados significan para la ciudad.
c. Halle $P''(1)$, $P''(2)$, $P''(3)$, y $P''(4)$. Interprete lo que los resultados significan para la población de la ciudad.

165. **[T]** Un cultivo de bacterias crece en número según la función $N(t) = 3.000\left(1 + \frac{4t}{t^2+100}\right)$, donde t se mide en horas.

a. Halle la tasa de cambio del número de bacterias.
b. Halle $N'(0), N'(10), N'(20)$, y $N'(30)$.
c. Interprete los resultados en (b).
d. Halle $N''(0), N''(10), N''(20)$, y $N''(30)$. Interprete lo que implican las respuestas sobre el crecimiento de la población de bacterias.

166. La fuerza centrípeta de un objeto de masa m viene dada por $F(r) = \frac{mv^2}{r}$, donde v es la velocidad de rotación y r es la distancia desde el centro de rotación.

a. Halle la tasa de cambio de la fuerza centrípeta con respecto a la distancia desde el centro de rotación.
b. Halle la tasa de cambio de la fuerza centrípeta de un objeto con una masa de 1.000 kilogramos, una velocidad de 13,89 m/s y una distancia de 200 metros desde el centro de rotación.

Las siguientes preguntas se refieren a la población de Londres (en millones) por década en el siglo XIX, que se muestra en la siguiente tabla.

Años desde 1800	Población (millones)
1	0,8795
11	1,040
21	1,264
31	1,516
41	1,661
51	2,000
61	2,634
71	3,272
81	3,911
91	4,422

Tabla 3.4 Población de Londres Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/Demographics_of_London.

167. **[T]**

a. Utilizando una calculadora o un programa informático halle la función lineal de mejor ajuste para medir la población.
b. Halle la derivada de la ecuación en a. y explica su significado físico.
c. Calcule la segunda derivada de la ecuación y explique su significado físico.

168. **[T]**

a. Utilizando una calculadora o un programa informático, halle la curva cuadrática que mejor se ajuste a los datos.
b. Halle la derivada de la ecuación y explique su significado físico.
c. Calcule la segunda derivada de la ecuación y explique su significado físico.

En los siguientes ejercicios, piense en un astronauta en un gran planeta de otra galaxia. Para conocer mejor la composición de este planeta, el astronauta deja caer un sensor electrónico en una zanja profunda. El sensor transmite su posición vertical cada segundo en relación con la posición del astronauta. El resumen de los datos del sensor mientras cae se muestra en la siguiente tabla.

Tiempo después de la caída (s)	Posición (m)
0	0
1	−1
2	−2
3	−5
4	−7
5	−14

169. **[T]**

a. Utilizando una calculadora o un programa informático, halle la curva cuadrática que mejor se ajuste a los datos.
b. Calcule la derivada de la función de posición y explique su significado físico.
c. Calcule la segunda derivada de la función de posición y explique su significado físico.

170. **[T]**

a. Utilizando una calculadora o un programa informático halle la curva cúbica que mejor se ajusta a los datos.
b. Calcule la derivada de la función de posición y explique su significado físico.
c. Calcule la segunda derivada de la función de posición y explique su significado físico.
d. Utilizando el resultado de c. explica por qué una función cúbica no es una buena opción para este problema.

Los siguientes problemas tratan de las ecuaciones de Holling tipo I, II y III. Estas ecuaciones describen el evento ecológico de crecimiento de una población de depredadores dada la cantidad de presas disponibles para su consumo.

171. **[T]** La ecuación de Holling tipo I se describe mediante $f(x) = ax$, donde x es la cantidad de presas disponibles y $a > 0$ es la velocidad a la que el depredador se encuentra con la presa para consumirla.

a. Grafique la ecuación de Holling tipo I, dada $a = 0{,}5$.
b. Determine la primera derivada de la ecuación de Holling tipo I y explique físicamente lo que la derivada implica.
c. Determine la segunda derivada de la ecuación de Holling tipo I y explica físicamente lo que la derivada implica.
d. Utilizando las interpretaciones de b. y c. explique por qué la ecuación de Holling tipo I puede no ser realista.

172. **[T]** La ecuación de Holling tipo II está descrita por $f(x) = \frac{ax}{n+x}$, donde x es la cantidad de presas disponibles y $a > 0$ es la tasa máxima de consumo del depredador.

a. Grafique la ecuación de Holling tipo II dada $a = 0{,}5$ y $n = 5$. ¿Cuáles son las diferencias entre las ecuaciones de Holling tipo I y II?
b. Tome la primera derivada de la ecuación de Holling tipo II e interprete su significado físico.
c. Demuestre que $f(n) = \frac{1}{2}a$ e interprete el significado del parámetro n.
d. Halle e interprete el significado de la segunda derivada. ¿Qué hace que la función de Holling tipo II sea más realista que la función de Holling tipo I?

173. **[T]** La ecuación de Holling tipo III se describe mediante $f(x) = \frac{ax^2}{n^2+x^2}$, donde x es la cantidad de presas disponibles y $a > 0$ es la tasa máxima de consumo del depredador.

a. Grafique la ecuación de Holling tipo III dada $a = 0{,}5$ y $n = 5$. ¿Cuáles son las diferencias entre las ecuaciones de Holling tipo II y III?
b. Tome la primera derivada de la ecuación de Holling tipo III e interprete su significado físico.
c. Halle e interprete el significado de la segunda derivada (puede ser útil graficarla).
d. ¿Qué otros fenómenos ecológicos describen la función de Holling tipo III en comparación con la de tipo II?

174. **[T]** Las poblaciones de la liebre americana (en miles) y del lince (en cientos) recogidas a lo largo de 7 años, de 1937 a 1943, se muestran en la siguiente tabla. La liebre americana es la presa principal del lince.

Población de liebre americana (en miles)	Población de linces (en cientos)
20	10
55	15
65	55
95	60

Tabla 3.5 Poblaciones de liebres americanas y de linces. Fuente: http://www.biotopics.co.uk/newgcse/predatorprey.html.

a. Grafique los puntos de datos y determine qué función de tipo Holling se ajusta mejor a los datos.
b. Utilizando los significados de los parámetros a y n, determine los valores de los mismos examinando un gráfico de los datos. Recordemos que n mida qué valor de la presa resulta en el medio máximo del valor del depredador.
c. Trace las funciones resultantes de tipo Holling I, II y III sobre los datos. ¿Es correcto el resultado de la parte a.?

3.5 Derivadas de funciones trigonométricas

Objetivos de aprendizaje

3.5.1 Encontrar las derivadas de las funciones seno y coseno.
3.5.2 Encontrar las derivadas de las funciones trigonométricas estándar.
3.5.3 Calcular las derivadas de orden superior del seno y del coseno.

Uno de los tipos de movimiento más importantes en física es el movimiento armónico simple, que se asocia a sistemas como un objeto con masa que oscila sobre un resorte. El movimiento armónico simple puede describirse utilizando funciones seno o coseno. En esta sección ampliaremos nuestro conocimiento de las fórmulas de las derivadas para incluir las derivadas de estas y otras funciones trigonométricas. Comenzaremos con las derivadas de las funciones seno y coseno y luego las utilizaremos para obtener las fórmulas de las derivadas de las cuatro funciones trigonométricas restantes. Al ser capaces de calcular las derivadas de las funciones seno y coseno podremos encontrar la velocidad y la aceleración del movimiento armónico simple.

Derivadas de las funciones seno y coseno

Comenzamos nuestra exploración de la derivada de la función seno utilizando la fórmula para hacer una estimación razonable de su derivada. Recordemos que para una función $f(x)$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

En consecuencia, para los valores de h muy cerca de 0, $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Vemos que al utilizar $h = 0{,}01$,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) \approx \frac{\operatorname{sen}(x+0{,}01) - \operatorname{sen} x}{0{,}01}$$

Al establecer $D(x) = \frac{\operatorname{sen}(x+0{,}01)-\operatorname{sen} x}{0{,}01}$ y empleando una herramienta gráfica, podemos obtener un gráfico de una aproximación a la derivada de $\operatorname{sen} x$ (Figura 3.25).

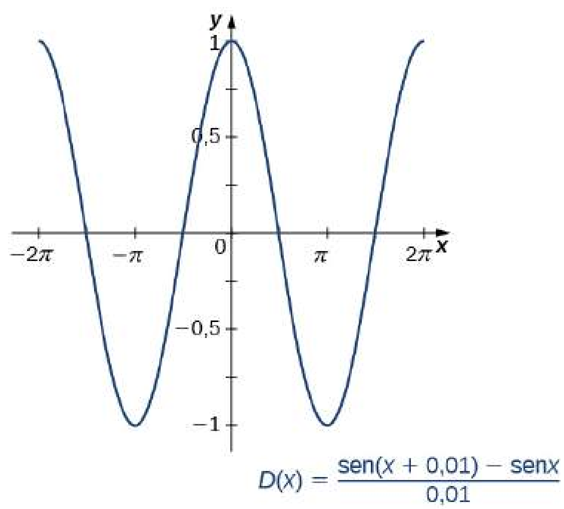


Figura 3.25 El gráfico de la función $D(x)$ es muy similar a una curva de coseno.

Tras la inspección, el gráfico de $D(x)$ parece estar muy cerca del gráfico de la función coseno. De hecho, demostraremos que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x.$$

Si siguiéramos los mismos pasos para aproximar la derivada de la función coseno, encontraríamos que

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$$

Teorema 3.8

Las derivadas de sen x y cos x

La derivada de la función seno es el coseno y la derivada de la función coseno es el seno negativo.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \tag{3.11}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \tag{3.12}$$

Prueba

Debido a que las pruebas de $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$ y $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$ utilizan técnicas similares, solo proporcionamos la prueba para $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$. Antes de comenzar, recuerde dos importantes límites trigonométricos que aprendimos en Introducción a los límites:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1 \text{ y } \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0.$$

Los gráficos de $y = \frac{(\operatorname{sen} h)}{h}$ y $y = \frac{(\cos h - 1)}{h}$ se muestran en la Figura 3.26.

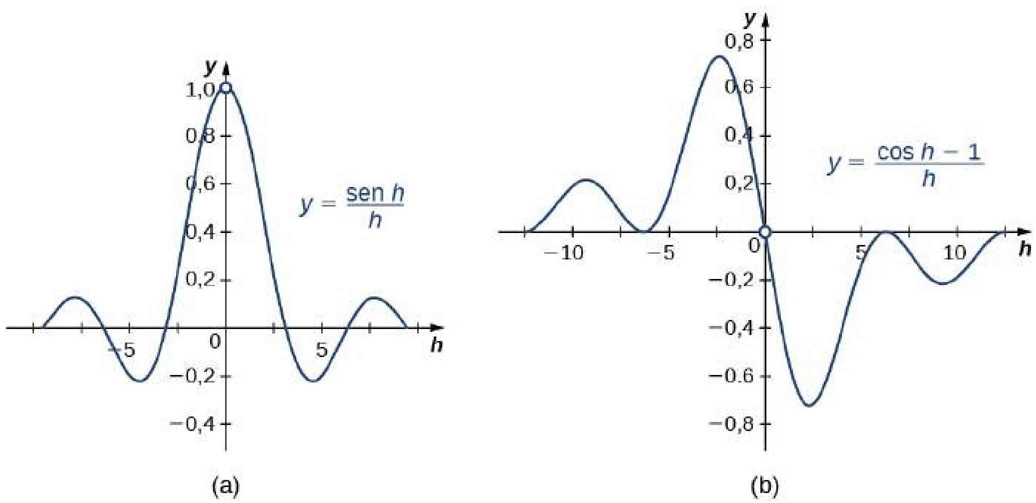


Figura 3.26 Estos gráficos muestran dos límites importantes necesarios para establecer las fórmulas de las derivadas de las funciones seno y coseno.

También recordamos la siguiente identidad trigonométrica para el seno de la suma de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}(x + h) = \operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h.$$

Ahora que hemos reunido todas las ecuaciones e identidades necesarias, procedemos a realizar la prueba.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x &= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} && \text{Aplique la definición de la derivada.} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} && \text{Utilice la identidad trigonométrica para el seno de la suma de dos ángulos.} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h} + \frac{\cos x \operatorname{sen} h}{h} \right) && \text{Reagrupe.} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\operatorname{sen} x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) \right) && \text{Saque el factor común sen } x \text{ y } \cos x. \\
&= \operatorname{sen} x . 0 + \cos x . 1 && \text{Aplique las fórmulas de límites trigonométricos.} \\
&= \cos x && \text{Simplifique.}
\end{aligned}$$

□

La Figura 3.27 muestra la relación entre el gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y su derivada $f'(x) = \cos x$. Observe que en los puntos donde $f(x) = \operatorname{sen} x$ tiene una tangente horizontal, su derivada $f'(x) = \cos x$ toma el valor cero. También vemos que donde $f(x) = \operatorname{sen} x$ aumenta, $f'(x) = \cos x > 0$ y donde $f(x) = \operatorname{sen} x$ disminuye, $f'(x) = \cos x < 0$.

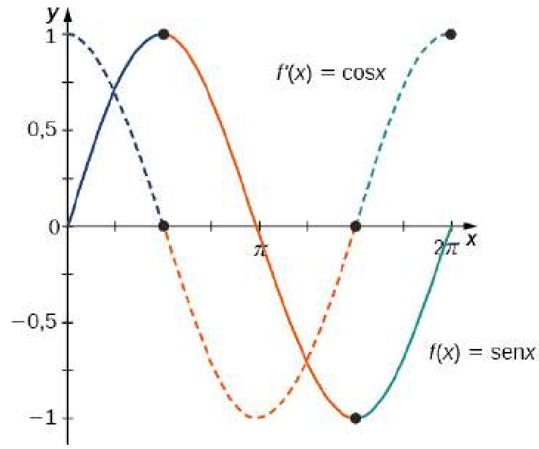


Figura 3.27 Donde $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo, $f'(x) = 0$ es decir, $f'(x) = 0$ donde $f(x)$ tiene una tangente horizontal. Estos puntos se marcan con puntos en los gráficos.

EJEMPLO 3.39

Diferenciación de una función que contiene sen *x*

Calcule la derivada de $f(x) = 5x^3 \operatorname{sen} x$.

Solución

Utilizando la regla del producto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(5x^3\right) . \operatorname{sen} x + \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) . 5x^3 \\ &= 15x^2 . \operatorname{sen} x + \cos x . 5x^3 . \end{aligned}$$

Tras simplificar, obtenemos

$$f'(x) = 15x^2 \operatorname{sen} x + 5x^3 \cos x.$$

3.25 Calcule la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$.

EJEMPLO 3.40

Encontrar la derivada de una función que contiene cos *x*

Calcule la derivada de $g(x) = \frac{\cos x}{4x^2}$.

Solución

Aplicando la regla del cociente, tenemos

$$g'(x) = \frac{(-\operatorname{sen} x)4x^2 - 8x(\cos x)}{\left(4x^2\right)^2}.$$

Si simplificamos, obtenemos

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-4x^2 \operatorname{sen} x - 8x \cos x}{16x^4} \\ &= \frac{-x \operatorname{sen} x - 2\cos x}{4x^3}. \end{aligned}$$

3.26 Calcule la derivada de $f(x) = \frac{x}{\cos x}$.

EJEMPLO 3.41

Una aplicación para la velocidad

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas de tal manera que su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = 2\operatorname{sen} t - t$ por $0 \le t \le 2\pi$. ¿En qué tiempos la partícula está en reposo?

Solución

Para determinar cuándo la partícula está en reposo, establezca $s'(t) = v(t) = 0$. Comience por hallar $s'(t)$. Obtenemos

$$s'(t) = 2\cos t - 1,$$

por lo que debemos resolver

$$2\cos t - 1 = 0 \text{ para } 0 \le t \le 2\pi.$$

Las soluciones a esta ecuación son $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{5\pi}{3}$. Por tanto, la partícula está en reposo en los tiempos $t = \frac{\pi}{3}$ y $t = \frac{5\pi}{3}$.

3.27 Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = \sqrt{3}t + 2\cos t$ por $0 \le t \le 2\pi$. ¿En qué tiempos la partícula está en reposo?

Derivadas de otras funciones trigonométricas

Como las cuatro funciones trigonométricas restantes pueden expresarse como cocientes que implican al seno, al coseno o a ambos, podemos utilizar la regla del cociente para encontrar fórmulas para sus derivadas.

EJEMPLO 3.42

Derivada de la función tangente

Calcule la derivada de $f(x) = \tan x$.

Solución

Comience por expresar $\tan x$ como el cociente de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:

$$f(x) = \tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Ahora aplique la regla del cociente para obtener

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x}{(\cos x)^2}.$$

Si simplificamos, obtenemos

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}.$$

Al reconocer que $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, según el teorema de Pitágoras, ahora tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Por último, utilice la identidad $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ para obtener

$$f'(x) = \sec^2 x.$$

3.28 Calcule la derivada de $f(x) = \cot x$.

Las derivadas de las restantes funciones trigonométricas pueden obtenerse mediante técnicas similares. Proporcionamos estas fórmulas en el siguiente teorema.

Teorema 3.9

Derivadas de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, **y** $\csc x$

Las derivadas del resto de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \tag{3.13}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \tag{3.14}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \tag{3.15}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x. \tag{3.16}$$

EJEMPLO 3.43

Halle la ecuación de una línea tangente

Halle la ecuación de una línea tangente al gráfico de $f(x) = \cot x$ en $x = \frac{\pi}{4}$.

Solución

Para encontrar la ecuación de la línea tangente, necesitamos un punto y una pendiente en ese punto. Para hallar el punto, calcule

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1.$$

Por lo tanto, la línea tangente pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$. A continuación, halle la pendiente encontrando la derivada de $f(x) = \cot x$ y evalúela en $\frac{\pi}{4}$:

$$f'(x) = -\csc^2 x \text{ y } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2.$$

Utilizando la ecuación punto-pendiente de la línea, obtenemos

$$y - 1 = -2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

o de forma equivalente,

$$y = -2x + 1 + \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO 3.44

Encontrar la derivada de las funciones trigonométricas

Calcule la derivada de $f(x) = \csc x + x\tan x$.

Solución

Para encontrar esta derivada, debemos utilizar tanto la regla de la suma como la del producto. Utilizando la regla de la suma, hallamos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\csc x) + \frac{d}{dx}(x\tan x).$$

En el primer término, $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$, y aplicando la regla del producto al segundo término obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x\tan x) = (1)(\tan x) + (\sec^2 x)(x).$$

Por lo tanto, tenemos

$$f'(x) = -\csc x \cot x + \tan x + x \sec^2 x.$$

3.29 Calcule la derivada de $f(x) = 2\tan x - 3\cot x$.

3.30 Calcule la pendiente de la línea tangente al gráfico de $f(x) = \tan x$ en $x = \frac{\pi}{6}$.

Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ siguen un patrón de repetición. Siguiendo el patrón, podemos encontrar cualquier derivada de orden superior de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

EJEMPLO 3.45

Encontrar derivadas de orden superior de $y = \operatorname{sen} x$

Halle las cuatro primeras derivadas de $y = \operatorname{sen} x$.

Solución

Cada paso de la cadena es sencillo:

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{sen} x \\
\frac{dy}{dx} &= \cos x \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\operatorname{sen} x \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= -\cos x \\
\frac{d^4y}{dx^4} &= \operatorname{sen} x.
\end{aligned}$$

Análisis

Una vez que reconocemos el patrón de derivadas, podemos encontrar cualquier derivada de orden superior determinando el paso en el patrón al que corresponde. Por ejemplo, cada cuarta derivada de sen x es igual a sen x, por lo que

$$\begin{aligned}
\frac{d^4}{dx^4}(\operatorname{sen} x) = \frac{d^8}{dx^8}(\operatorname{sen} x) = \frac{d^{12}}{dx^{12}}(\operatorname{sen} x) = \ldots = \frac{d^{4n}}{dx^{4n}}(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x \\
\frac{d^5}{dx^5}(\operatorname{sen} x) = \frac{d^9}{dx^9}(\operatorname{sen} x) = \frac{d^{13}}{dx^{13}}(\operatorname{sen} x) = \ldots = \frac{d^{4n+1}}{dx^{4n+1}}(\operatorname{sen} x) = \cos x.
\end{aligned}$$

3.31 Para $y = \cos x$, calcule $\frac{d^4y}{dx^4}$.

EJEMPLO 3.46

Utilizando el patrón para las derivadas de orden superior de $y = \operatorname{sen} x$

Halle $\frac{d^{74}}{dx^{74}}(\operatorname{sen} x)$.

Solución

Podemos ver de inmediato que para la derivada 74 de $\operatorname{sen} x$, $74 = 4(18) + 2$, así que

$$\frac{d^{74}}{dx^{74}}(\operatorname{sen} x) = \frac{d^{72+2}}{dx^{72+2}}(\operatorname{sen} x) = \frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x.$$

3.32 Para $y = \operatorname{sen} x$, calcule $\frac{d^{59}}{dx^{59}}(\operatorname{sen} x)$.

EJEMPLO 3.47

Una aplicación a la aceleración

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas de tal manera que su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = 2 - \operatorname{sen} t$. Calcule $v(\pi/4)$ y $a(\pi/4)$. Compare estos valores y decida si la partícula se está acelerando o ralentizando.

Solución

Primero calcule $v(t) = s'(t)$:

$$v(t) = s'(t) = -\cos t.$$

Por lo tanto,

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A continuación, calcule $a(t) = v'(t)$. Por lo tanto, $a(t) = v'(t) = \operatorname{sen} t$ y tenemos

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dado que $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$ y $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, vemos que la velocidad y la aceleración actúan en direcciones opuestas; es decir, el objeto está siendo acelerado en la dirección opuesta a la dirección en la que se desplaza. En consecuencia, la partícula se ralentiza.

3.33 Un bloque unido a un resorte se mueve verticalmente. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = 2 \operatorname{sen} t$. Calcule $v\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ y $a\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. Compare estos valores y decida si el bloque se está acelerando o ralentizando.

SECCIÓN 3.5 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule $\frac{dy}{dx}$ para las funciones dadas.

175. $y = x^2 - \sec x + 1$

176. $y = 3 \csc x + \frac{5}{x}$

177. $y = x^2 \cot x$

178. $y = x - x^3 \operatorname{sen} x$

179. $y = \frac{\sec x}{x}$

180. $y = \operatorname{sen} x \tan x$

181. $y = (x + \cos x)(1 - \operatorname{sen} x)$
grandes.

182. $y = \frac{\tan x}{1 - \sec x}$

183. $y = \frac{1 - \cot x}{1 + \cot x}$

184. $y = \cos x (1 + \csc x)$

En los siguientes ejercicios, halle la ecuación de la línea tangente en cada una de las funciones dadas en los valores indicados de x. A continuación, utilice una calculadora para representar gráficamente tanto la función como la línea tangente para asegurarse de que la ecuación de la línea tangente es correcta.

185. **[T]** $f(x) = -\operatorname{sen} x, x = 0$

186. **[T]** $f(x) = \csc x, x = \frac{\pi}{2}$

187. **[T]** $f(x) = 1 + \cos x, x = \frac{3\pi}{2}$

188. **[T]** $f(x) = \sec x, x = \frac{\pi}{4}$

189. **[T]** $f(x) = x^2 - \tan x,\ x = 0$

190. **[T]** $f(x) = 5 \cot x,\ x = \frac{\pi}{4}$

En los siguientes ejercicios, calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ para las funciones dadas.

191. $y = x\operatorname{sen} x - \cos x$

192. $y = \operatorname{sen} x \cos x$

193. $y = x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

194. $y = \frac{1}{x} + \tan x$

195. $y = 2\csc x$

196. $y = \sec^2 x$

197. Halle todos x los valores en el gráfico de $f(x) = -3\operatorname{sen} x \cos x$ donde la línea tangente es horizontal.

198. Halle todos x los valores en el gráfico de $f(x) = x - 2\cos x$ por $0 < x < 2\pi$ donde la línea tangente tiene pendiente 2.

199. Supongamos que $f(x) = \cot x$. Determine los puntos del gráfico de f por $0 < x < 2\pi$ donde la(s) recta(s) tangente(s) es (son) paralela(s) a la línea $y = -2x$.

200. **[T]** Una masa sobre un resorte rebota hacia arriba y hacia abajo en movimiento armónico simple, modelado por la función $s(t) = -6\cos t$ donde s se mide en pulgadas y t se mide en segundos. Halle la velocidad a la que oscila el resorte en $t = 5$ s.

201. Supongamos que la posición de un péndulo en movimiento armónico simple dada por $s(t) = a\cos t + b\operatorname{sen} t$ donde a y b son constantes, t mide el tiempo en segundos, y s mide la posición en centímetros. Si la posición es 0 cm y la velocidad es de 3 cm/s dado que $t = 0$, halle los valores de a y b.

202. Después de que un buceador salte de un trampolín, el borde del trampolín oscila con la posición dada por $s(t) = -5\cos t$ cm en t segundos después del salto.

a. Trace un periodo de la función de posición para $t \geq 0$.
b. Halle la función de velocidad.
c. Trace un periodo de la función de velocidad para $t \geq 0$.
d. Determine los tiempos en los que la velocidad es 0 en un periodo.
e. Halle la función de aceleración.
f. Trace un periodo de la función de aceleración para $t \geq 0$.

203. El número de hamburguesas vendidas en un restaurante de comida rápida en Pasadena, California, viene dado por $y = 10 + 5\,\text{sen}\,x$ donde y es el número de hamburguesas vendidas y x representa el número de horas transcurridas desde la apertura del restaurante a las 11 a. m. hasta las 11 p. m. momento en el que el establecimiento cierra. Halle y' y determine los intervalos en los que aumenta el número de hamburguesas que se venden.

204. **[T]** La cantidad de lluvia por mes en Phoenix, Arizona, puede aproximarse mediante $y(t) = 0{,}5 + 0{,}3\cos t$, donde t son los meses desde enero. Halle y' y utilice una calculadora para determinar los intervalos en los que la cantidad de lluvia caída disminuye.

En los siguientes ejercicios, utilice la regla del cociente para derivar las ecuaciones dadas.

205. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

206. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

207. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

208. Utilice la definición de derivada y la identidad

$\cos(x + h) = \cos x \cos h - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,h$
para demostrar que
$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\text{sen}\,x.$

En los siguientes ejercicios halle la derivada de orden superior solicitada para las funciones dadas.

209. $\frac{d^3y}{dx^3}$ de $y = 3\cos x$

210. $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $y = 3\,\text{sen}\,x + x^2\cos x$

211. $\frac{d^4y}{dx^4}$ de $y = 5\cos x$

212. $\frac{d^2y}{dx^2}$ de $y = \sec x + \cot x$

213. $\frac{d^3y}{dx^3}$ de $y = x^{10} - \sec x$

3.6 La regla de la cadena

Objetivos de aprendizaje

3.6.1 Indique la regla de la cadena para la composición de dos funciones.
3.6.2 Aplique la regla de la cadena junto con la regla de la potencia.
3.6.3 Aplique correctamente la regla de la cadena y las reglas del producto/cociente en combinación cuando ambas son necesarias.
3.6.4 Reconozca la regla de la cadena para una composición de tres funciones o más.
3.6.5 Describa la prueba de la regla de la cadena.

Hemos visto las técnicas de diferenciación de funciones básicas $(x^n, \text{sen}\,x, \cos x, \text{etc.})$ así como sumas, diferencias, productos, cocientes y múltiplos constantes de estas funciones. Sin embargo, estas técnicas no permiten diferenciar composiciones de funciones, como $h(x) = \text{sen}(x^3)$ o $k(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$. En esta sección estudiamos la regla para calcular la derivada de la composición de dos o más funciones.

Derivar la regla de la cadena

Cuando tenemos una función que es una composición de dos o más funciones, podríamos utilizar todas las técnicas que ya hemos aprendido para diferenciarla. Sin embargo, utilizar todas esas técnicas para descomponer una función en partes más simples que podamos diferenciar puede resultar tedioso. En vez de eso, utilizamos la **regla de la cadena**, que establece que la derivada de una función compuesta es la derivada de la función exterior evaluada en la función interior por la derivada de la función interior.

Para poner esta regla en contexto, veamos un ejemplo: $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right)$. Podemos pensar en la derivada de esta función con respecto a x como la tasa de cambio de $\operatorname{sen}\left(x^3\right)$ en relación con el cambio en x. En consecuencia, queremos saber cómo $\operatorname{sen}\left(x^3\right)$ cambia, a medida que x cambia. Podemos pensar en este evento como una reacción en cadena: Dado que x cambia, x^3 cambia, lo que lleva a un cambio en $\operatorname{sen}\left(x^3\right)$. Esta reacción en cadena nos da pistas sobre lo que implica el cálculo de la derivada de $\operatorname{sen}\left(x^3\right)$. Primero que nada, un cambio en x, lo que fuerza un cambio en x^3 sugiere que de alguna manera la derivada de x^3 está involucrada. Además, el cambio en x^3, lo que fuerza un cambio en $\operatorname{sen}\left(x^3\right)$ sugiere que la derivada de $\operatorname{sen}(u)$ con respecto a u, donde $u = x^3$, también forma parte de la derivada final.

Podemos echar un vistazo más formal a la derivada de $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right)$ fijando el límite que nos daría la derivada en un valor específico a en el dominio de $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right)$.

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}\left(x^3\right) - \operatorname{sen}\left(a^3\right)}{x - a}.$$

Esta expresión no parece especialmente útil; sin embargo, podemos modificarla al multiplicar por y dividir entre la expresión $x^3 - a^3$ para obtener

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}\left(x^3\right) - \operatorname{sen}\left(a^3\right)}{x^3 - a^3} \cdot \frac{x^3 - a^3}{x - a}.$$

A partir de la definición de la derivada, podemos ver que el segundo factor es la derivada de x^3 en $x = a$. Eso es,

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \frac{d}{dx}\left(x^3\right)_{x=a} = 3a^2.$$

Sin embargo, puede ser un poco más difícil reconocer que el primer término es también una derivada. Podemos ver esto suponiendo que $u = x^3$ y observando que a medida que $x \to a, u \to a^3$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}\left(x^3\right) - \operatorname{sen}\left(a^3\right)}{x^3 - a^3} &= \lim_{u \to a^3} \frac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen}\left(a^3\right)}{u - a^3} \\ &= \frac{d}{du}(\operatorname{sen} u)_{u=a^3} \\ &= \cos\left(a^3\right) \end{aligned}$$

Así, $h'(a) = \cos\left(a^3\right) . 3a^2$.

En otras palabras, si $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right)$, entonces $h'(x) = \cos\left(x^3\right) . 3x^2$. Por lo tanto, si pensamos en $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right)$ como la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = x^3$, entonces la derivada $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right)$ es el producto de la derivada de $g(x) = x^3$ y la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ evaluada en la función $g(x) = x^3$. En este punto, prevemos que para $h(x) = \operatorname{sen}(g(x))$, es muy probable que $h'(x) = \cos(g(x))g'(x)$. Como determinamos anteriormente, este es el caso de $h(x) = \operatorname{sen}\left(x^3\right)$.

Ahora que hemos derivado un caso especial de la regla de la cadena, exponemos el caso general y lo aplicamos de forma general a otras funciones compuestas. Al final de la sección se ofrece una prueba informal.

Regla: la regla de la cadena

Supongamos que f y g son funciones. Para todo x en el dominio de g para la cual g es diferenciable en el punto x y f es diferenciable en $g(x)$, la derivada de la función compuesta

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

viene dada por

$$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x). \tag{3.17}$$

Alternativamente, si y es una función de u, y u es una función de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

MEDIOS

Vea una animación (http://www.openstax.org/l/20_chainrule2) de la regla de la cadena.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Aplicar la regla de la cadena

1. Para diferenciar $h(x) = f(g(x))$, empiece por identificar $f(x)$ y $g(x)$.
2. Calcule $f'(x)$ y evalúela en $g(x)$ para obtener $f'(g(x))$.
3. Halle $g'(x)$.
4. Escriba $h'(x) = f'(g(x)) \,.\, g'(x)$.

Nota: Cuando se aplica la regla de la cadena a la composición de dos o más funciones, hay que tener en cuenta que se trabaja desde la función exterior hacia dentro. También es útil recordar que la derivada de la composición de dos funciones puede considerarse que tiene dos partes, la derivada de la composición de tres funciones tiene tres partes y así sucesivamente. Además, recuerde que nunca evaluamos una derivada en una derivada.

La regla de la cadena y la regla de la potencia combinadas

Ahora podemos aplicar la regla de la cadena a las funciones compuestas, pero tenga en cuenta que, a menudo, tenemos que utilizarla con otras reglas. Por ejemplo, para hallar las derivadas de funciones de la forma $h(x) = (g(x))^n$, tenemos que utilizar la regla de la cadena combinada con la regla de la potencia. Para hacerlo, podemos pensar en $h(x) = (g(x))^n$ como $f(g(x))$ donde $f(x) = x^n$. Entonces $f'(x) = nx^{n-1}$. Por lo tanto, $f'(g(x)) = n(g(x))^{n-1}$. Esto nos lleva a la derivada de una función de potencia utilizando la regla de la cadena,

$$h'(x) = n(g(x))^{n-1} g'(x)$$

Regla: regla de la potencia para composición de funciones

Para todos los valores de x para los que está definida la derivada, si

$$h(x) = (g(x))^n.$$

Entonces

$$h'(x) = n(g(x))^{n-1} g'(x) \tag{3.18}$$

EJEMPLO 3.48

Utilizar la regla de la cadena y la regla de la potencia

Calcule la derivada de $h(x) = \frac{1}{\left(3x^2+1\right)^2}$.

Solución

Primero, reescriba $h(x) = \frac{1}{\left(3x^2+1\right)^2} = \left(3x^2+1\right)^{-2}$.

Si aplicamos la regla de la potencia con $g(x) = 3x^2 + 1$, tenemos

$$h'(x) = -2\left(3x^2+1\right)^{-3}(6x).$$

Al reescribir en la forma original obtenemos

$$h'(x) = \frac{-12x}{(3x^2+1)^3}.$$

3.34 Calcule la derivada de $h(x) = \left(2x^3+2x-1\right)^4$.

EJEMPLO 3.49

Utilizar la regla de la cadena y la regla de la potencia con una función trigonométrica

Calcule la derivada de $h(x) = \operatorname{sen}^3 x$.

Solución

Primero recordemos que $\operatorname{sen}^3 x = (\operatorname{sen} x)^3$, por lo que podemos reescribir $h(x) = \operatorname{sen}^3 x$ cuando $h(x) = (\operatorname{sen} x)^3$.

Si aplicamos la regla de la potencia con $g(x) = \operatorname{sen} x$, obtenemos

$$h'(x) = 3(\operatorname{sen} x)^2 \cos x = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x.$$

EJEMPLO 3.50

Halle la ecuación de una línea tangente

Halle la ecuación de una línea tangente al gráfico de $h(x) = \frac{1}{(3x-5)^2}$ en $x = 2$.

Solución

Como estamos hallando la ecuación de una línea, necesitamos un punto. La coordenada x del punto es 2. Para hallar la coordenada y, sustituya 2 en $h(x)$. Dado que $h(2) = \frac{1}{(3(2)-5)^2} = 1$, el punto es $(2, 1)$.

Para la pendiente, necesitamos $h'(2)$. Para calcular $h'(x)$, primero escribimos $h(x) = (3x-5)^{-2}$ y aplique la regla de la potencia para obtener

$$h'(x) = -2(3x-5)^{-3}(3) = -6(3x-5)^{-3}.$$

Al sustituir, tenemos $h'(2) = -6(3(2)-5)^{-3} = -6$. Por lo tanto, la línea tiene la ecuación $y - 1 = -6(x-2)$. Al reescribirla, la ecuación de la línea es $y = -6x + 13$.

3.35 Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = \left(x^2-2\right)^3$ en $x = -2$.

Combinar la regla de la cadena con otras reglas

Ahora que podemos combinar la regla de la cadena y la regla de la potencia, examinamos cómo combinar la regla de la cadena con las otras reglas que aprendimos. En particular, podemos utilizarla con las fórmulas de las derivadas de las funciones trigonométricas o con la regla del producto.

EJEMPLO 3.51

Usar la regla de la cadena en una función coseno general

Calcule la derivada de $h(x) = \cos(g(x))$.

Solución

Piense en $h(x) = \cos(g(x))$ cuando $f(g(x))$ donde $f(x) = \cos x$. Dado que $f'(x) = -\operatorname{sen} x$. tenemos $f'(g(x)) = -\operatorname{sen}(g(x))$. Luego, hacemos el siguiente cálculo.

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(x))\,g'(x) && \text{Aplique la regla de la cadena.} \\ &= -\text{sen}\,(g(x))\,g'(x) && \text{Sustituya } f'(g(x)) = -\text{sen}\,(g(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada de $h(x) = \cos\,(g(x))$ viene dada por $h'(x) = -\text{sen}\,(g(x))\,g'(x)$.

En el siguiente ejemplo aplicamos la regla que acabamos de derivar.

EJEMPLO 3.52

Usar la regla de la cadena en una función coseno

Calcule la derivada de $h(x) = \cos\left(5x^2\right)$.

Solución

Supongamos que $g(x) = 5x^2$. Entonces $g'(x) = 10x$. Utilizando el resultado del ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\text{sen}\left(5x^2\right).\,10x \\ &= -10x\,\text{sen}\left(5x^2\right). \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.53

Usar la regla de la cadena en otra función trigonométrica

Calcule la derivada de $h(x) = \sec\left(4x^5 + 2x\right)$.

Solución

Aplique la regla de la cadena a $h(x) = \sec\,(g(x))$ para obtener

$$h'(x) = \sec(g(x))\tan\,(g(x))\,g'(x).$$

En este problema, $g(x) = 4x^5 + 2x$, por lo que tenemos $g'(x) = 20x^4 + 2$. Por lo tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \sec\left(4x^5 + 2x\right)\tan\left(4x^5 + 2x\right)\left(20x^4 + 2\right) \\ &= (20x^4 + 2)\sec\left(4x^5 + 2x\right)\tan\left(4x^5 + 2x\right). \end{aligned}$$

3.36 Calcule la derivada de $h(x) = \text{sen}(7x + 2)$.

En este punto proporcionamos una lista de fórmulas de derivadas que se pueden obtener aplicando la regla de la cadena junto con las fórmulas de derivadas de funciones trigonométricas. Sus derivaciones son similares a las utilizadas en el Ejemplo 3.51 y el Ejemplo 3.53. Para más facilidad, las fórmulas también se dan en la notación de Leibniz, que algunos estudiantes encuentran más fácil de recordar (analizamos la regla de la cadena utilizando la notación de Leibniz al final de esta sección). No es absolutamente necesario memorizarlas como fórmulas separadas, ya que todas son aplicaciones de la regla de la cadena a fórmulas previamente aprendidas.

Teorema 3.10

Usar la regla de la cadena en funciones trigonométricas

Para todos los valores de x para los que se define la derivada,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\text{sen}(g(x))) &= \cos(g(x))\, g'(x)) & \frac{d}{dx}\,\text{sen}\, u &= \cos u \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\cos(g(x))) &= -\text{sen}\,(g(x))\, g'(x)) & \frac{d}{dx}\cos u &= -\text{sen}\, u \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\tan(g(x))) &= \sec^2(g(x))\, g'(x)) & \frac{d}{dx}\tan u &= \sec^2 u \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\cot(g(x))) &= -\csc^2(g(x))\, g'(x)) & \frac{d}{dx}\cot u &= -\csc^2 u \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\sec(g(x))) &= \sec(g(x)\tan(g(x))\, g'(x)) & \frac{d}{dx}\sec u &= \sec u \tan u \frac{du}{dx} \\
\frac{d}{dx}(\csc(g(x))) &= -\csc(g(x))\cot(g(x))\, g'(x)) & \frac{d}{dx}\csc u &= -\csc u \cot u \frac{du}{dx}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.54

Combinar la regla de la cadena con la regla del producto

Calcule la derivada de $h(x) = (2x+1)^5(3x-2)^7$.

Solución

Primero aplique la regla del producto, luego aplique la regla de la cadena a cada término del producto.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{d}{dx}\left((2x+1)^5\right).(3x-2)^7 + \frac{d}{dx}\left((3x-2)^7\right).(2x+1)^5 && \text{Aplique la regla del producto.} \\
&= 5(2x+1)^4.2.(3x-2)^7 + 7(3x-2)^6.3.(2x+1)^5 && \text{Aplique la regla de la cadena.} \\
&= 10(2x+1)^4(3x-2)^7 + 21(3x-2)^6(2x+1)^5 && \text{Simplifique.} \\
&= (2x+1)^4(3x-2)^6(10(3x-2)+21(2x+1)) && \text{Saque el factor común } (2x+1)^4(3x-2)^6. \\
&= (2x+1)^4(3x-2)^6(72x+1) && \text{Simplifique.}
\end{aligned}$$

3.37 Calcule la derivada de $h(x) = \frac{x}{(2x+3)^3}$.

Compuestos de tres o más funciones

Ahora podemos combinar la regla de la cadena con otras reglas para diferenciar funciones, pero cuando diferenciamos la composición de tres o más funciones, necesitamos aplicar la regla de la cadena más de una vez. Si consideramos esta situación en términos generales, podemos generar una fórmula que no necesitaremos recordar, ya que simplemente podemos aplicar la regla de la cadena varias veces.

En términos generales, primero dejamos que

$$k(x) = h(f(g(x))).$$

Entonces, aplicando la regla de la cadena una vez obtenemos

$$k'(x) = \frac{d}{dx}(h(f(g(x))) = h'(f(g(x))).\frac{d}{dx}f((g(x))).$$

Aplicando de nuevo la regla de la cadena, obtenemos

$$k'(x) = h'\left(f(g(x))\, f'(g(x))\, g'(x)\right).$$

Regla: regla de la cadena para una composición de tres funciones

Para todos los valores de x en los que la función es diferenciable, si

$$k(x) = h(f(g(x))),$$

entonces

$$k'(x) = h'(f(g(x)))\, f'(g(x))\, g'(x).$$

En otras palabras, estamos aplicando la regla de la cadena dos veces.

Observe que la derivada de la composición de tres funciones tiene tres partes (del mismo modo, la derivada de la composición de cuatro funciones tiene cuatro partes, y así sucesivamente). Además , *recuerde que siempre podemos trabajar desde afuera hacia dentro tomando una derivada cada vez.*

EJEMPLO 3.55

Diferenciación de un compuesto de tres funciones

Calcule la derivada de $k(x) = \cos^4\left(7x^2 + 1\right)$.

Solución

Primero, reescriba $k(x)$ como

$$k(x) = \left(\cos\left(7x^2 + 1\right)\right)^4.$$

A continuación, aplique la regla de la cadena varias veces.

$$\begin{aligned} k'(x) &= 4\left(\cos\left(7x^2+1\right)\right)^3\left(\tfrac{d}{dx}\cos\left(7x^2+1\right)\right) && \text{Aplique la regla de la cadena.} \\ &= 4\left(\cos\left(7x^2+1\right)\right)^3\left(-\operatorname{sen}\left(7x^2+1\right)\right)\left(\tfrac{d}{dx}\left(7x^2+1\right)\right) && \text{Aplique la regla de la cadena.} \\ &= 4\left(\cos\left(7x^2+1\right)\right)^3\left(-\operatorname{sen}\left(7x^2+1\right)\right)(14x) && \text{Aplique la regla de la cadena.} \\ &= -56x\operatorname{sen}(7x^2+1)\cos^3(7x^2+1) && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

3.38 Calcule la derivada de $h(x) = \operatorname{sen}^6\left(x^3\right)$.

EJEMPLO 3.56

Uso de la regla de la cadena en un problema de velocidad

Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo *t* viene dada por $s(t) = \operatorname{sen}(2t) + \cos(3t)$. ¿Cuál es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = \frac{\pi}{6}$?

Solución

Para hallar $v(t)$, la velocidad de la partícula en el tiempo t, debemos diferenciar $s(t)$. Por lo tanto,

$$v(t) = s'(t) = 2\cos(2t) - 3\operatorname{sen}(3t).$$

Al sustituir $t = \frac{\pi}{6}$ en $v(t)$, obtenemos $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2.$

3.39 Una partícula se mueve a lo largo de un eje de coordenadas. Su posición en el tiempo t viene dada por $s(t) = \operatorname{sen}(4t)$. Calcule su aceleración en el tiempo t.

Prueba

En este punto, presentamos una prueba muy informal de la regla de la cadena. En aras de la simplicidad, pasamos por alto algunas cuestiones: Por ejemplo, suponemos que $g(x) \neq g(a)$ para $x \neq a$ en algún intervalo abierto que contenga a. Comenzamos aplicando la definición de límite de la derivada a la función $h(x)$ para obtener $h'(a)$:

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}.$$

Reescribiendo, obtenemos

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Aunque está claro que

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(a),$$

no es obvio que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = f'(g(a)).$$

Para comprobar esto, primero hay que recordar que como g es diferenciable en a, g también es continua en a. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

A continuación, sustituya $y = g(x)$ y $b = g(a)$ y utilice el cambio de variables en el límite para obtener

$$\lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} = \lim_{y \to b} \frac{f(y) - f(b)}{y - b} = f'(b) = f'(g(a)).$$

Finalmente,

$$h'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = f'(g(a))\, g'(a).$$

□

EJEMPLO 3.57

Uso de la regla de la cadena con los valores funcionales

Supongamos que $h(x) = f(g(x))$. Si $g(1) = 4$, $g'(1) = 3$, y $f'(4) = 7$, calcule $h'(1)$.

Solución

Utilice la regla de la cadena y luego sustituya.

$$\begin{aligned} h'(1) &= f'(g(1))\, g'(1) && \text{Aplique la regla de la cadena.} \\ &= f'(4) \cdot 3 && \text{Sustituya } g(1) = 4 \text{ y } g'(1) = 3. \\ &= 7 \cdot 3 && \text{Sustituya } f'(4) = 7. \\ &= 21 && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

3.40 Dados $h(x) = f(g(x))$. Si $g(2) = -3$, $g'(2) = 4$, y $f'(-3) = 7$, calcule $h'(2)$.

La regla de la cadena mediante la notación de Leibniz

Al igual que con otras derivadas que ya vimos, podemos expresar la regla de la cadena utilizando la notación de Leibniz. Esta notación para la regla de la cadena se utiliza mucho en aplicaciones de física.

Para $h(x) = f(g(x))$, supongamos que $u = g(x)$ y de $y = h(x) = f(u)$. Por lo tanto,

$$h'(x) = \frac{dy}{dx},\ f'(g(x)) = f'(u) = \frac{dy}{du} \text{ y } g'(x) = \frac{du}{dx}.$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = h'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Regla: regla de la cadena mediante la notación de Leibniz

Si los valores de y es una función de u, y u es una función de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

EJEMPLO 3.58

Tomar una derivada utilizando la notación de Leibniz, ejemplo 1

Calcule la derivada de $y = \left(\frac{x}{3x+2}\right)^5$.

Solución

En primer lugar, supongamos que $u = \frac{x}{3x+2}$. Por lo tanto, $y = u^5$. A continuación, calcule $\frac{du}{dx}$ y $\frac{dy}{du}$. Utilizando la regla del cociente,

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{(3x+2)^2}$$

y

$$\frac{dy}{du} = 5u^4.$$

Finalmente, lo juntamos todo.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} && \text{Aplique la regla de la cadena.}\\
&= 5u^4 \cdot \frac{2}{(3x+2)^2} && \text{Sustituya } \frac{dy}{du} = 5u^4 \text{ y } \frac{du}{dx} = \frac{2}{(3x+2)^2}.\\
&= 5\left(\frac{x}{3x+2}\right)^4 \cdot \frac{2}{(3x+2)^2} && \text{Sustituya } u = \frac{x}{3x+2}.\\
&= \frac{10x^4}{(3x+2)^6} && \text{Simplifique.}
\end{aligned}$$

Es importante recordar que, cuando se utiliza la forma de Leibniz de la regla de la cadena, la respuesta final debe expresarse completamente en términos de la variable original del problema.

EJEMPLO 3.59

Tomar una derivada utilizando la notación de Leibniz, ejemplo 2

Calcule la derivada de $y = \tan\left(4x^2 - 3x + 1\right)$.

Solución

En primer lugar, supongamos que $u = 4x^2 - 3x + 1$. Entonces $y = \tan u$. A continuación, calcule $\frac{du}{dx}$ y $\frac{dy}{du}$:

$$\frac{du}{dx} = 8x - 3 \text{ y } \frac{dy}{du} = \sec^2 u.$$

Finalmente, lo juntamos todo.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} && \text{Aplique la regla de la cadena.}\\
&= \sec^2 u . (8x - 3) && \text{Uso } \frac{du}{dx} = 8x - 3 \text{ y } \frac{dy}{du} = \sec^2 u.\\
&= \sec^2(4x^2 - 3x + 1) . (8x - 3) && \text{Sustituya } u = 4x^2 - 3x + 1.
\end{aligned}$$

3.41 Utilice la notación de Leibniz para encontrar la derivada de $y = \cos\left(x^3\right)$. Asegúrese de que la respuesta final se exprese completamente en términos de la variable x.

SECCIÓN 3.6 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, dados $y = f(u)$ y $u = g(x)$, calcule $\frac{dy}{dx}$ utilizando la notación de Leibniz para la regla de la cadena: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

214. $y = 3u - 6, u = 2x^2$

215. $y = 6u^3, u = 7x - 4$

216. $y = \operatorname{sen} u, u = 5x - 1$

217. $y = \cos u, u = \frac{-x}{8}$

218. $y = \tan u, u = 9x + 2$

219. $y = \sqrt{4u + 3}, u = x^2 - 6x$

En cada uno de los siguientes ejercicios,

a. descomponga cada función en la forma $y = f(u)$ y $u = g(x)$, y
b. halle $\frac{dy}{dx}$ en función de x.

220. $y = (3x - 2)^6$

221. $y = \left(3x^2 + 1\right)^3$

222. $y = \operatorname{sen}^5(x)$ grandes.

223. $y = \left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x}\right)^7$

224. $y = \tan(\sec x)$ grandes.

225. $y = \csc(\pi x + 1)$

226. $y = \cot^2 x$

227. $y = -6(\operatorname{sen})^{-3} x$

En los siguientes ejercicios, calcule $\frac{dy}{dx}$ por cada función.

228. $y = \left(3x^2 + 3x - 1\right)^4$

229. $y = (5 - 2x)^{-2}$

230. $y = \cos^3(\pi x)$ grandes.

231. $y = \left(2x^3 - x^2 + 6x + 1\right)^3$

232. $y = \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$ grandes.

233. $y = (\tan x + \operatorname{sen} x)^{-3}$

234. $y = x^2 \cos^4 x$

235. $y = \operatorname{sen}(\cos 7x)$ grandes.

236. $y = \sqrt{6 + \sec \pi x^2}$

237. $y = \cot^3(4x + 1)$ grandes.

238. Supongamos que $y = [f(x)]^2$ y supongamos que $f'(1) = 4$ y $\frac{dy}{dx} = 10$ por $x = 1$. Calcule $f(1)$.

239. Supongamos que $y = \left(f(x) + 5x^2\right)^4$ y supongamos que $f(-1) = -4$ y $\frac{dy}{dx} = 3$ cuando $x = -1$. Calcule $f'(-1)$ grandes.

240. Supongamos que $y = (f(u) + 3x)^2$ y $u = x^3 - 2x$. Si $f(4) = 6$ y $\frac{dy}{dx} = 18$ cuando $x = 2$, calcule $f'(4)$.

241. **[T]** Halle la ecuación de la línea tangente para $y = -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ en el origen. Utilice una calculadora para graficar juntas la función y la línea tangente.

242. **[T]** Halle la ecuación de la línea tangente para $y = \left(3x + \frac{1}{x}\right)^2$ en el punto $(1, 16)$. Utilice una calculadora para graficar juntas la función y la línea tangente.

243. Calcule las coordenadas x en las que la línea tangente a $y = \left(x - \frac{6}{x}\right)^8$ es horizontal.

244. **[T]** Halle una ecuación de la línea que sea normal a $g(\theta) = \operatorname{sen}^2(\pi\theta)$ en el punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Utilice una calculadora para graficar juntas la función y la línea normal.

En los siguientes ejercicios, utilice la información de la siguiente tabla para encontrar $h'(a)$ en el valor dado para a.

x	$f(x)$ grandes.	$f'(x)$ grandes.	$g(x)$ grandes.	$g'(x)$
0	2	5	0	2
1	1	−2	3	0

x	$f(x)$ grandes.	$f'(x)$ grandes.	$g(x)$ grandes.	$g'(x)$
2	4	4	1	−1
3	3	−3	2	3

245. $h(x) = f(g(x)); a = 0$

246. $h(x) = g(f(x)); a = 0$

247. $h(x) = \left(x^4 + g(x)\right)^{-2}; a = 1$

248. $h(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2; a = 3$

249. $h(x) = f(x + f(x)); a = 1$

250. $h(x) = (1 + g(x))^3; a = 2$

251. $h(x) = g\left(2 + f\left(x^2\right)\right); a = 1$

252. $h(x) = f(g(\operatorname{sen} x)); a = 0$

253. **[T]** La función de posición de un tren de mercancías viene dada por $s(t) = 100(t + 1)^{-2}$, con la s en metros y t en segundos. En el tiempo $t = 6$ s, encontrar:

a. la velocidad y
b. aceleración del tren.
c. Utilizando a. y b. ¿el tren acelera o frena?

254. **[T]** Una masa que cuelga de un resorte vertical está en movimiento armónico simple dado por la siguiente función de posición, donde t se mide en segundos y s está en pulgadas:

$s(t) = -3\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

a. Determine la posición del resorte en $t = 1{,}5$ s.
b. Calcule la velocidad del resorte en $t = 1{,}5$ s.

255. **[T]** El costo total para producir x cajas de galletas Thin Mint Girl Scout es de C dólares, donde $C = 0{,}0001x^3 - 0{,}02x^2 + 3x + 300$. En t semanas, se estima que la producción sea de $x = 1.600 + 100t$ cajas.

a. Calcule el costo marginal $C'(x)$.
b. Utilice la notación de Leibniz para la regla de la cadena, $\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$, para encontrar la tasa con respecto al tiempo t en el que el costo cambia.
c. Utilice b. para determinar la velocidad de aumento de los costos cuando $t = 2$ semanas. Incluya las unidades en la respuesta.

256. **[T]** La fórmula del área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde r es el radio del círculo. Supongamos que un círculo se expande, lo que significa que tanto el área A y el radio r (en pulgadas) se expanden.

a. Supongamos que $r = 2 - \frac{100}{(t+7)^2}$ donde t es el tiempo en segundos. Utilice la regla de la cadena $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ para encontrar la tasa de expansión del área.
b. Utilice a. para hallar el ritmo de expansión del área en $t = 4$ s.

257. **[T]** La fórmula del volumen de una esfera es $S = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r (en pies) es el radio de la esfera. Supongamos que una bola de nieve esférica se derrite al sol.

a. Supongamos que $r = \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{12}$ donde t es el tiempo en minutos. Utilice la regla de la cadena $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$ para encontrar la tasa a la que se funde la bola de nieve.

b. Utilice a. para hallar la tasa de variación del volumen en $t = 1$ min.

258. **[T]** La temperatura diaria en verano de Phoenix en grados Fahrenheit puede modelarse mediante la función $T(x) = 94 - 10\cos\left[\frac{\pi}{12}(x-2)\right]$, donde x son horas después de la medianoche. Halle la velocidad a la que cambia la temperatura a las 4 p. m.

259. **[T]** La profundidad (en pies) del agua en un muelle cambia con la subida y bajada de las mareas. La profundidad se modela mediante la función $D(t) = 5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{7\pi}{6}\right) + 8$, donde t es el número de horas después de la medianoche. Halle la velocidad a la que cambia la profundidad a las 6 a. m.

3.7 Derivadas de funciones inversas

Objetivos de aprendizaje

3.7.1 Calcular la derivada de una función inversa.
3.7.2 Reconocer las derivadas de las funciones trigonométricas inversas estándar.

En esta sección exploraremos la relación entre la derivada de una función y la derivada de su inversa. En las funciones cuyas derivadas ya conocemos, podemos utilizar esta relación para encontrar las derivadas de las inversas sin tener que utilizar la definición de límite de la derivada. En particular, aplicaremos la fórmula de las derivadas de las funciones inversas a las funciones trigonométricas. Esta fórmula también puede utilizarse para extender la regla de la potencia a los exponentes racionales.

La derivada de una función inversa

Comenzamos considerando una función y su inversa. Si los valores de $f(x)$ es invertible y diferenciable, parece razonable que la inversa de $f(x)$ también es diferenciable. La Figura 3.28 muestra la relación entre una función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$. Vea el punto $\left(a, f^{-1}(a)\right)$ en el gráfico de $f^{-1}(x)$ que tiene una línea tangente con una pendiente de $\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{p}{q}$. Este corresponde al punto $\left(f^{-1}(a), a\right)$ en el gráfico de $f(x)$ que tiene una línea tangente con una pendiente de $f'\left(f^{-1}(a)\right) = \frac{q}{p}$. Por lo tanto, si $f^{-1}(x)$ es diferenciable en a, entonces debe ser el caso que

$$\left(f^{-1}\right)'(a) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}.$$

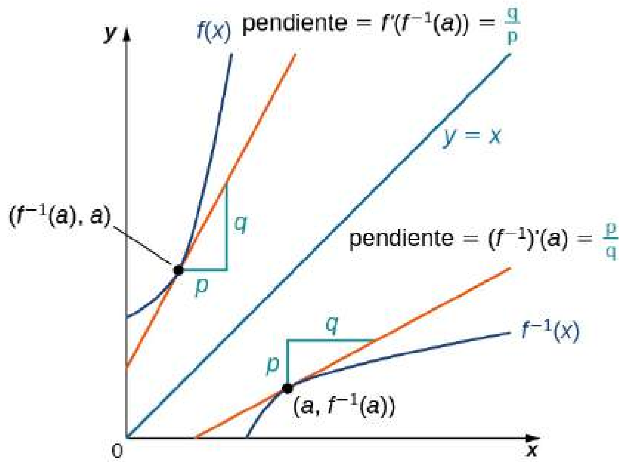


Figura 3.28 Las rectas tangentes de una función y su inversa están relacionadas, así que también lo están las derivadas de estas funciones.

También podemos derivar la fórmula de la derivada de la inversa recordando primero que $x = f\left(f^{-1}(x)\right)$. Entonces, diferenciando ambos lados de esta ecuación (utilizando la regla de la cadena de la derecha), obtenemos

$$1 = f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x)\right).$$

Al resolver para $(f^{-1})'(x)$, obtenemos

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}. \tag{3.19}$$

Resumimos este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 3.11

Teorema de la función inversa

Supongamos que $f(x)$ es una función invertible y diferenciable. Supongamos que $y = f^{-1}(x)$ es la inversa de $f(x)$. Para todo x que satisface $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(f^{-1}(x)\right) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$

Alternativamente, si $y = g(x)$ es la inversa de $f(x)$, entonces

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

EJEMPLO 3.60

Aplicación del teorema de la función inversa

Utilice el teorema de la función inversa para calcular la derivada de $g(x) = \frac{x+2}{x}$. Compare la derivada resultante con la obtenida al diferenciar la función directamente.

Solución

La inversa de $g(x) = \frac{x+2}{x}$ es $f(x) = \frac{2}{x-1}$. Dado que $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, comience por hallar $f'(x)$. Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \text{ y } f'(g(x)) = \frac{-2}{(g(x)-1)^2} = \frac{-2}{\left(\frac{x+2}{x}-1\right)^2} = -\frac{x^2}{2}.$$

Finalmente,

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = -\frac{2}{x^2}.$$

Podemos comprobar que esta es la derivada correcta aplicando la regla del cociente a $g(x)$ para obtener

$$g'(x) = -\frac{2}{x^2}.$$

3.42 Utilice el teorema de la función inversa para calcular la derivada de $g(x) = \frac{1}{x+2}$. Compare el resultado obtenido al diferenciar $g(x)$ directamente.

EJEMPLO 3.61

Aplicación del teorema de la función inversa

Utilice el teorema de la función inversa para calcular la derivada de $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solución

La función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ es la inversa de la función $f(x) = x^3$. Dado que $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, comience por hallar $f'(x)$. Por lo tanto,

$$f'(x) = 3x^2 \text{ y } f'(g(x)) = 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3x^{2/3}.$$

Finalmente,

$$g'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

3.43 Calcule la derivada de $g(x) = \sqrt[5]{x}$ aplicando el teorema de la función inversa.

A partir del ejemplo anterior, vemos que podemos utilizar el teorema de la función inversa para extender la regla de la potencia a exponentes de la forma $\frac{1}{n}$, donde n es un número entero positivo. Esta ampliación nos permitirá, en última instancia, diferenciar x^q, donde q es cualquier número racional.

Teorema 3.12

Extensión de la regla de la potencia a los exponentes racionales

La regla de la potencia puede extenderse a los exponentes racionales. Es decir, si n es un número entero positivo, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(x^{1/n}\right) = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}. \tag{3.20}$$

Además, si n es un número entero positivo y m es un número entero arbitrario, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(x^{m/n}\right) = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1}. \tag{3.21}$$

Prueba

La función $g(x) = x^{1/n}$ es la inversa de la función $f(x) = x^n$. Dado que $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$, comience por hallar $f'(x)$. Por lo tanto,

$$f'(x) = nx^{n-1} \text{ y } f'(g(x)) = n\left(x^{1/n}\right)^{n-1} = nx^{(n-1)/n}.$$

Finalmente,

$$g'(x) = \frac{1}{nx^{(n-1)/n}} = \frac{1}{n}x^{(1-n)/n} = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.$$

Para diferenciar $x^{m/n}$ debemos reescribirlo como $\left(x^{1/n}\right)^m$ y aplicar la regla de la cadena. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\left(x^{m/n}\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(x^{1/n}\right)^m\right) = m\left(x^{1/n}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{(1/n)-1} = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1}.$$

□

EJEMPLO 3.62

Aplicación de la regla de la potencia a una potencia racional

Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $y = x^{2/3}$ en $x = 8$.

Solución

Primero calcule $\frac{dy}{dx}$ y evalúela en $x = 8$. Dado que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-1/3} \text{ y } \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=8} = \frac{1}{3}$$

la pendiente de la línea tangente al gráfico en $x = 8$ ¿es $\frac{1}{3}$.

Sustituyendo $x = 8$ en la función original, obtenemos $y = 4$. Por tanto, la línea tangente pasa por el punto $(8, 4)$. Sustituyendo en la fórmula punto-pendiente de una línea, obtenemos la línea tangente

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

3.44 Calcule la derivada de $s(t) = \sqrt{2t + 1}$.

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Ahora nos centraremos en la búsqueda de derivadas de funciones trigonométricas inversas. Estas derivadas resultarán muy valiosas en el estudio de la integración más adelante en este texto. Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son bastante sorprendentes, ya que sus derivadas son en realidad funciones algebraicas. Anteriormente, se demostró que las derivadas de funciones algebraicas son funciones algebraicas y que las derivadas de funciones trigonométricas son funciones trigonométricas. Aquí, por primera vez, vemos que la derivada de una función no tiene por qué ser del mismo tipo que la función original.

EJEMPLO 3.63

Derivada de la función seno inversa

Utilice el teorema de la función inversa para calcular la derivada de $g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$.

Solución

Dado que para x en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ es la inversa de $g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$, comience por hallar $f'(x)$. Dado que

$$f'(x) = \cos x \text{ y } f'(g(x)) = \cos\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2},$$

vemos que

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Análisis

Para ver que $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2}$, considere el siguiente argumento. Establezca $\operatorname{sen}^{-1} x = \theta$. En este caso, $\operatorname{sen}\theta = x$ donde $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Comenzamos considerando el caso en el que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Dado que θ es un ángulo agudo, podemos construir un triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo θ, una hipotenusa de longitud 1 y el lado opuesto al ángulo θ que tiene una longitud x. A partir del teorema de Pitágoras, el lado adyacente al ángulo θ tiene longitud $\sqrt{1 - x^2}$. Este triángulo se muestra en la Figura 3.29. Utilizando el triángulo, vemos que $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) = \cos\theta = \sqrt{1 - x^2}$.

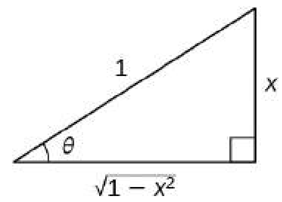


Figura 3.29 Utilizando un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ, una hipotenusa de longitud 1, y el lado opuesto al ángulo θ que tiene una longitud x, podemos ver que $\cos\left(\text{sen}^{-1}x\right) = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$.

En caso de que $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$, hacemos la observación de que $0 < -\theta < \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto

$$\cos\left(\text{sen}^{-1}x\right) = \cos\theta = \cos(-\theta) = \sqrt{1-x^2}.$$

Ahora bien, si $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $x = 1$ o $x = -1$, y como en cualquier caso $\cos\theta = 0$ y $\sqrt{1-x^2} = 0$, tenemos

$$\cos\left(\text{sen}^{-1}x\right) = \cos\theta = \sqrt{1-x^2}.$$

Por último, si $\theta = 0$, $x = 0$ y $\cos\theta = \sqrt{1-0} = 1$.

En consecuencia, en todos los casos, $\cos\left(\text{sen}^{-1}x\right) = \sqrt{1-x^2}$.

EJEMPLO 3.64

Aplicación de la regla de la cadena a la función seno inversa

Aplique la regla de la cadena a la fórmula derivada en el Ejemplo 3.61 para hallar la derivada de $h(x) = \text{sen}^{-1}(g(x))$ y utilizar este resultado para hallar la derivada de $h(x) = \text{sen}^{-1}\left(2x^3\right)$.

Solución

Aplicando la regla de la cadena a $h(x) = \text{sen}^{-1}(g(x))$, tenemos

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}}g'(x).$$

Ahora supongamos que $g(x) = 2x^3$, por lo que $g'(x) = 6x^2$. Al sustituir en el resultado anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-4x^6}} \cdot 6x^2 \\ &= \frac{6x^2}{\sqrt{1-4x^6}}. \end{aligned}$$

3.45 Utilice el teorema de la función inversa para calcular la derivada de $g(x) = \tan^{-1}x$.

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas restantes también se pueden hallar utilizando el teorema de la función inversa. Estas fórmulas se proporcionan en el siguiente teorema.

Teorema 3.13

Derivadas de funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}\text{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-(x)^2}} \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = \frac{-1}{\sqrt{1-(x)^2}} \quad (3.23)$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+(x)^2} \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = \frac{-1}{1+(x)^2} \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{(x)^2-1}} \quad (3.26)$$

$$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x = \frac{-1}{|x|\sqrt{(x)^2-1}} \quad (3.27)$$

EJEMPLO 3.65

Aplicación de fórmulas de diferenciación a una función tangente inversa

Calcule la derivada de $f(x) = \tan^{-1}\left(x^2\right)$.

Solución

Supongamos que $g(x) = x^2$, por lo que $g'(x) = 2x$. Sustituyendo en la Ecuación 3.24, obtenemos

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2} \cdot (2x).$$

Simplificando, tenemos

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}.$$

EJEMPLO 3.66

Aplicación de fórmulas de diferenciación a una función seno inversa

Calcule la derivada de $h(x) = x^2 \operatorname{sen}^{-1} x$.

Solución

Aplicando la regla del producto, tenemos

$$h'(x) = 2x \operatorname{sen}^{-1} x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^2.$$

3.46 Calcule la derivada de $h(x) = \cos^{-1}(3x-1)$.

EJEMPLO 3.67

Aplicación de la función tangente inversa

La posición de una partícula en el tiempo t viene dada por $s(t) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$ por $t \geq \frac{1}{2}$. Halle la velocidad de la partícula en el tiempo $t = 1$.

Solución

Comience por diferenciar $s(t)$ a fin de hallar $v(t)$. Por lo tanto,

$$v(t) = s'(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2} \cdot \frac{-1}{t^2}.$$

Simplificando, tenemos

$$v(t) = -\frac{1}{t^2+1}.$$

Por lo tanto, $v(1) = -\frac{1}{2}$.

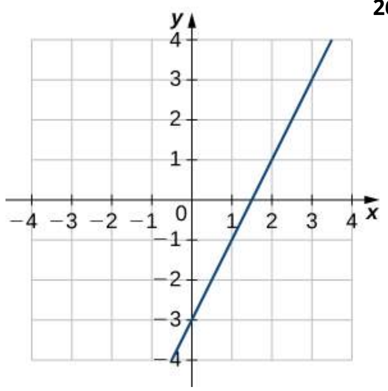
3.47 Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$ en $x = 0$.

SECCIÓN 3.7 EJERCICIOS

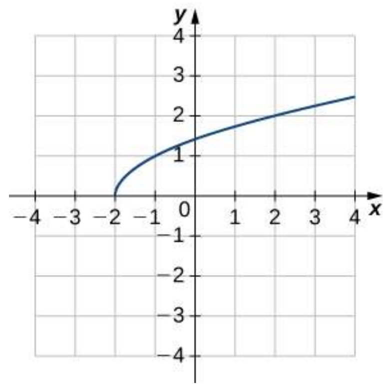
En los siguientes ejercicios, utilice el gráfico de $y = f(x)$ a

a. dibuje el gráfico de $y = f^{-1}(x)$, y
b. utilice la parte a. para estimar $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

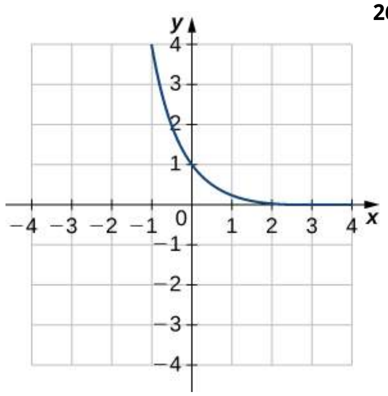
260.



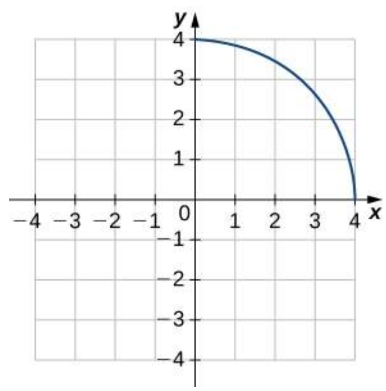
261.



262.



263.



En los siguientes ejercicios, utilice las funciones $y = f(x)$ para hallar

a. $\frac{df}{dx}$ en $x = a$ y
b. $x = f^{-1}(y)$.
c. A continuación, utilice la parte b. para hallar $\frac{df^{-1}}{dy}$ a las $y = f(a)$.

264. $f(x) = 6x–1, x = –2$

265. $f(x) = 2x^3 - 3, x = 1$

266. $f(x) = 9 - x^2, 0 \le x \le 3, x = 2$

267. $f(x) = \operatorname{sen} x, x = 0$

En cada una de las siguientes funciones, halle $\left(f^{-1}\right)'(a)$.

268. $f(x) = x^2 + 3x + 2, x \geq -\frac{3}{2}, a = 2$

269. $f(x) = x^3 + 2x + 3, a = 0$

270. $f(x) = x + \sqrt{x}, a = 2$

271. $f(x) = x - \frac{2}{x}, x < 0, a = 1$

272. $f(x) = x + \operatorname{sen} x, a = 0$

273. $f(x) = \tan x + 3x^2, a = 0$

Para cada una de las funciones dadas $y = f(x)$,

a. Halle la pendiente de la línea tangente a su función inversa f^{-1} en el punto indicado P, y
b. halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de f^{-1} en el punto indicado.

274. $f(x) = \frac{4}{1+x^2}, P(2, 1)$ grandes.

275. $f(x) = \sqrt{x-4}, P(2, 8)$

276. $f(x) = \left(x^3 + 1\right)^4, P(16, 1)$ grandes.

277. $f(x) = -x^3 - x + 2, P(-8, 2)$

278. $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4x - 8, P(-8, 1)$

En los siguientes ejercicios, calcule $\frac{dy}{dx}$ para la función dada.

279. $y = \operatorname{sen}^{-1}\left(x^2\right)$ grandes.

280. $y = \cos^{-1}\left(\sqrt{x}\right)$ grandes.

281. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ grandes.

282. $y = \sqrt{\csc^{-1} x}$

283. $y = \left(1 + \tan^{-1} x\right)^3$

284. $y = \cos^{-1}(2x) . \operatorname{sen}^{-1}(2x)$ grandes.

285. $y = \frac{1}{\tan^{-1}(x)}$ grandes.

286. $y = \sec^{-1}(-x)$ grandes.

287. $y = \cot^{-1}\sqrt{4 - x^2}$

288. $y = x. \csc^{-1} x$

En los siguientes ejercicios, utilice los valores dados para hallar $\left(f^{-1}\right)'(a)$.

289. $f(\pi) = 0, f'(\pi) = -1, a = 0$

290. $f(6) = 2, f'(6) = \frac{1}{3}, a = 2$

291. $f\left(\frac{1}{3}\right) = -8, f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2, a = -8$

292. $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}, f'\left(\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}, a = \frac{1}{2}$

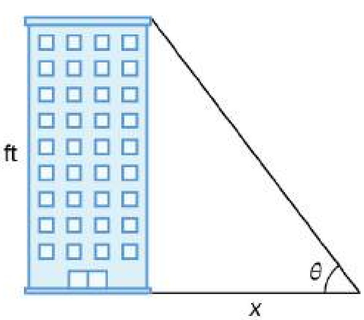
293. $f(1) = -3, f'(1) = 10, a = -3$

294. $f(1) = 0, f'(1) = -2, a = 0$

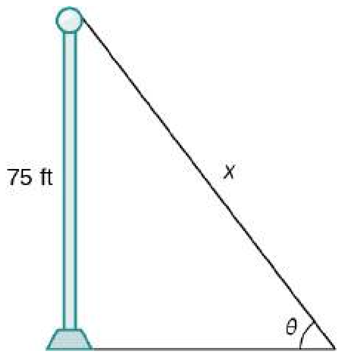
295. **[T]** La posición de un disco de hockey en movimiento después de t segundos es $s(t) = \tan^{-1} t$ donde s está en metros.

a. Halle la velocidad del disco de hockey en cualquier tiempo t.
b. Halle la aceleración del disco en cualquier tiempo t.
c. Evaluar a. y b. para $t = 2, 4,$ y 6 segundos.
d. ¿Qué conclusión se obtiene de los resultados de c.?

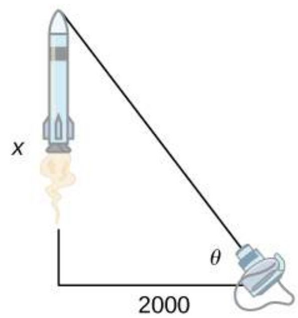
296. **[T]** Un edificio de 225 ft de altura proyecta una sombra de varias longitudes x a medida que pasa el día. El ángulo de elevación θ está formado por líneas que van desde la parte superior e inferior del edificio hasta la punta de la sombra, como se ve en la siguiente figura. Halle la tasa de cambio del ángulo de elevación $\frac{d\theta}{dx}$ cuando $x = 272$ pies.



297. **[T]** Un poste tiene 75 ft de altura. Un ángulo θ se forma cuando los cables de varias longitudes de x ft se fijan desde el suelo hasta la parte superior del poste, como se muestra en la siguiente figura. Halle la tasa de cambio del ángulo $\frac{d\theta}{dx}$ cuando se conecta un cable de 90 ft de longitud.

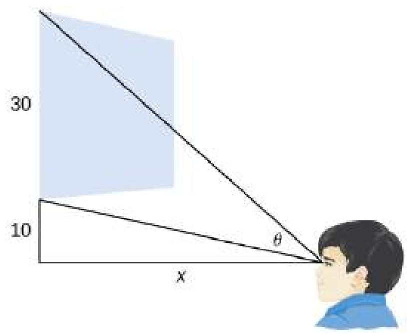


298. **[T]** Una cámara de televisión a nivel del suelo se halla a 2.000 ft de distancia de la plataforma de lanzamiento de un cohete espacial preparado para despegar verticalmente, como se ve en la siguiente figura. El ángulo de elevación de la cámara se halla mediante $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2000}\right)$, donde x es la altura del cohete. Halle la tasa de cambio del ángulo de elevación después del lanzamiento cuando la cámara y el cohete están a 5.000 pies de distancia.



299. **[T]** Un cine local con una pantalla de 30 ft de altura que está a 10 ft por encima del nivel de los ojos de una persona sentada tiene un ángulo de visión θ (en radianes) dado por $\theta = \cot^{-1}\frac{x}{40} - \cot^{-1}\frac{x}{10}$,

donde x es la distancia en ft de la pantalla de cine a la que está sentada la persona, como se muestra en la siguiente figura.



a. Halle $\frac{d\theta}{dx}$.
b. Evalúe $\frac{d\theta}{dx}$ para $x = 5, 10, 15,$ y 20.
c. Interprete los resultados en b.
d. Evalúe $\frac{d\theta}{dx}$ para $x = 25, 30, 35,$ y 40
e. Interprete los resultados en d. ¿A qué distancia x debe sentarse la persona para maximizar su ángulo de visión?

3.8 Diferenciación implícita

Objetivos de aprendizaje

3.8.1 Encontrar la derivada de una función complicada utilizando la diferenciación implícita.
3.8.2 Usar la diferenciación implícita para determinar la ecuación de una línea tangente.

Ya estudiamos cómo encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones y la tasa de cambio de una función en un punto concreto. En todos estos casos tuvimos la ecuación explícita de la función y diferenciamos estas funciones explícitamente. Supongamos, en cambio, que queremos determinar la ecuación de una línea tangente a una curva arbitraria o la tasa de cambio de una curva arbitraria en un punto. En esta sección, resolveremos estos problemas encontrando las derivadas de las funciones que definen y implícitamente en términos de x.

Diferenciación implícita

En la mayoría de las discusiones de matemáticas, si la variable dependiente y es una función de la variable independiente x, expresamos y en términos de x. Si este es el caso, decimos que y es una función explícita de x. Por ejemplo, cuando escribimos la ecuación $y = x^2 + 1$, estamos definiendo y explícitamente en términos de x. Por otro lado, si la relación entre la función y y la variable x se expresa mediante una ecuación en la que y no se expresa completamente en términos de x, decimos que la ecuación define y implícitamente en términos de x. Por ejemplo, la ecuación $y - x^2 = 1$ define la función $y = x^2 + 1$ implícitamente.

La diferenciación implícita nos permite encontrar las pendientes de las tangentes a curvas que claramente no son funciones (ya que no pasan la prueba de la línea vertical). Estamos utilizando la idea de que partes de y son funciones que satisfacen la ecuación dada, pero que y no es en realidad una función de x.

En general, una ecuación define una función implícitamente si la función satisface esa ecuación. Una ecuación puede definir muchas funciones diferentes de forma implícita. Por ejemplo, las funciones

$y = \sqrt{25 - x^2}$ y $y = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} \text{ si} - 5 < x < 0 \\ -\sqrt{25 - x^2} \text{ si } 0 < x < 25 \end{cases}$, que se ilustran en la Figura 3.30, son solo tres de las muchas funciones definidas implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.

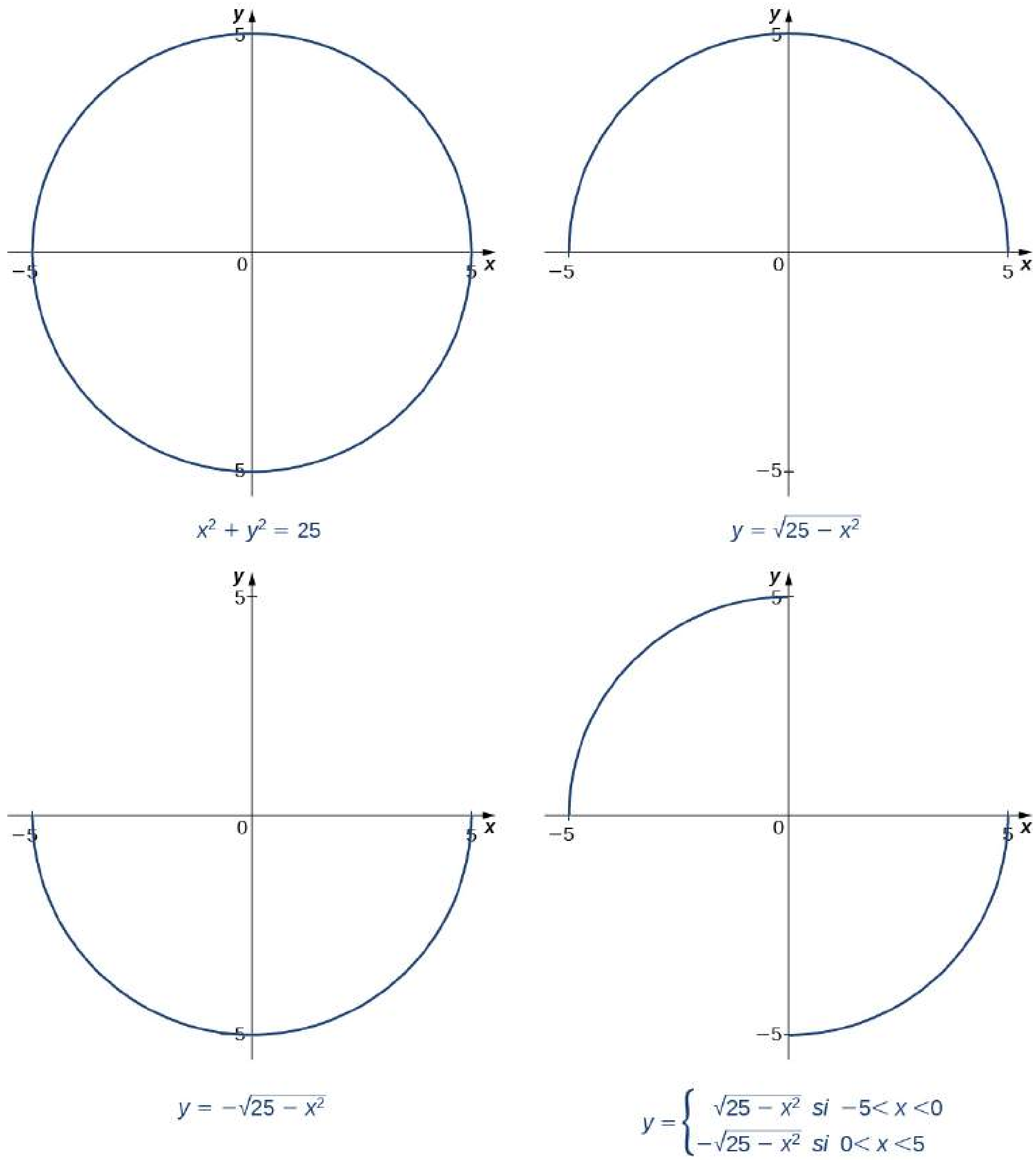


Figura 3.30 La ecuación $x^2 + y^2 = 25$ define muchas funciones de forma implícita.

Si queremos encontrar la pendiente de la línea tangente al gráfico de $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, 4)$, podríamos evaluar la derivada de la función $y = \sqrt{25 - x^2}$ en $x = 3$. Por otro lado, si queremos la pendiente de la línea tangente en el punto $(3, –4)$, podríamos utilizar la derivada de $y = -\sqrt{25 - x^2}$. Sin embargo, no siempre es fácil resolver una función definida implícitamente por una ecuación. Afortunadamente, la técnica de la **diferenciación implícita** nos permite encontrar la derivada de una función definida implícitamente sin tener que resolverla explícitamente. El proceso de encontrar $\frac{dy}{dx}$ utilizando la diferenciación implícita se describe en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Diferenciación implícita

Para realizar la diferenciación implícita en una ecuación que define una función y implícitamente en términos de una variable x, utilice los siguientes pasos:

1. Tome la derivada de ambos lados de la ecuación. Tenga en cuenta que y es una función de x. Por lo tanto, mientras que $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) = \cos y \frac{dy}{dx}$ porque debemos utilizar la regla de la cadena para diferenciar $\operatorname{sen} y$ con respecto a x.
2. Reescriba la ecuación de manera que todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ estén a la izquierda y todos los términos que no contengan $\frac{dy}{dx}$ estén a la derecha.
3. Factorice $\frac{dy}{dx}$ a la izquierda.
4. Resuelva para $\frac{dy}{dx}$ dividiendo ambos lados de la ecuación por una expresión algebraica adecuada.

EJEMPLO 3.68

Uso de la diferenciación implícita

Suponiendo que y se define implícitamente por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

Solución

Siga los pasos de la estrategia de resolución de problemas.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) &= \frac{d}{dx}(25) && \text{Paso 1. Diferencie ambos lados de la ecuación.} \\ \frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(y^2\right) &= 0 && \text{Paso 1.1. Utilice la regla de la suma a la izquierda.} \\ & && \text{A la derecha } \tfrac{d}{dx}(25) = 0. \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 && \text{Paso 1.2. Tome las derivadas, así que } \tfrac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x \\ & && \text{y } \tfrac{d}{dx}\left(y^2\right) = 2y\tfrac{dy}{dx}. \\ 2y\frac{dy}{dx} &= -2x && \text{Paso 2. Mantenga los términos con } \tfrac{dy}{dx} \text{ a la izquierda.} \\ & && \text{Mueva los términos restantes a la derecha.} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} && \text{Paso 4. Divida ambos lados de la ecuación por} \\ & && 2y. \text{ (El paso 3 no se aplica en este caso).} \end{aligned}$$

Análisis

Note que la expresión resultante para $\frac{dy}{dx}$ está en términos tanto de la variable independiente x como de la variable dependiente y. Aunque en algunos casos es posible expresar $\frac{dy}{dx}$ en términos de x solamente, generalmente no es posible hacerlo.

EJEMPLO 3.69

Uso de la diferenciación implícita y la regla del producto

Suponiendo que y se define implícitamente por la ecuación $x^3 \operatorname{sen} y + y = 4x + 3$, calcule $\frac{dy}{dx}$.

Solución

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 \operatorname{sen} y + y\right) = \frac{d}{dx}(4x+3)$$

Paso 1: Diferencie ambos lados de la ecuación.

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 \operatorname{sen} y\right) + \frac{d}{dx}(y) = 4$$

Paso 1.1: Aplique la regla de la suma a la izquierda. A la derecha, $\frac{d}{dx}(4x+3) = 4$.

$$\left(\frac{d}{dx}\left(x^3\right) . \operatorname{sen} y + \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) . x^3\right) + \frac{dy}{dx} = 4$$

Paso 1.2: Utilice la regla del producto para hallar $\frac{d}{dx}\left(x^3 \operatorname{sen} y\right)$. Observe que $\frac{d}{dx}(y) = \frac{dy}{dx}$.

$$3x^2 \operatorname{sen} y + \left(\cos y \frac{dy}{dx}\right) . x^3 + \frac{dy}{dx} = 4$$

Paso 1.3: Sabemos que $\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$. Utilice la regla de la cadena para obtener $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) = \cos y \frac{dy}{dx}$.

$$\mathrm{x}^3 \cos y \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 4 - 3x^2 \operatorname{sen} y$$

Paso 2: Conserve todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ en la izquierda. Mueva todos los demás términos a la derecha.

$$\frac{dy}{dx}\left(\mathrm{x}^3 \cos y + 1\right) = 4 - 3x^2 \operatorname{sen} y$$

Paso 3: Saque el factor común $\frac{dy}{dx}$ a la izquierda.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-3x^2 \operatorname{sen} y}{x^3 \cos y + 1}$$

Paso 4: Resuelva para $\frac{dy}{dx}$ dividiendo ambos lados de la ecuación por $\mathrm{x}^3 \cos y + 1$.

EJEMPLO 3.70

Uso de la diferenciación implícita para encontrar una segunda derivada

Halle $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $x^2 + y^2 = 25$.

Solución

En el Ejemplo 3.68, demostramos que $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Podemos tomar la derivada de ambos lados de esta ecuación para encontrar $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right)$$

Diferencie ambos lados de $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

$$= -\frac{\left(1.y - x\frac{dy}{dx}\right)}{y^2}$$

Utilice la regla del cociente para encontrar $\frac{d}{dy}\left(-\frac{x}{y}\right)$.

$$= \frac{-y + x\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

Simplifique.

$$= \frac{-y + x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

Sustituya $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

$$= \frac{-y^2 - x^2}{y^3}$$

Simplifique.

En este punto encontramos una expresión para $\frac{d^2y}{dx^2}$. Si lo deseamos, podemos simplificar aún más la expresión recordando que $x^2 + y^2 = 25$ y haciendo esta sustitución en el numerador para obtener $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{25}{y^3}$.

3.48 Halle $\frac{dy}{dx}$ por y definida implícitamente por la ecuación $4x^5 + \tan y = y^2 + 5x$.

Encontrar líneas tangentes de forma implícita

Ya vimos la técnica de la diferenciación implícita y ahora podemos aplicarla al problema de encontrar ecuaciones de rectas tangentes a curvas descritas por ecuaciones.

EJEMPLO 3.71

Encontrar una línea tangente a un círculo

Halle la ecuación de la línea tangente a la curva $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$.

Solución

Aunque podríamos encontrar esta ecuación sin utilizar la diferenciación implícita, el uso de ese método lo facilita mucho. En el Ejemplo 3.68, encontramos $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

La pendiente de la línea tangente se encuentra sustituyendo $(3, -4)$ en esta expresión. En consecuencia, la pendiente de la línea tangente es $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$.

Utilizando el punto $(3, -4)$ y la pendiente $\frac{3}{4}$ en la ecuación punto-pendiente de la línea, obtenemos la ecuación $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$ (Figura 3.31).

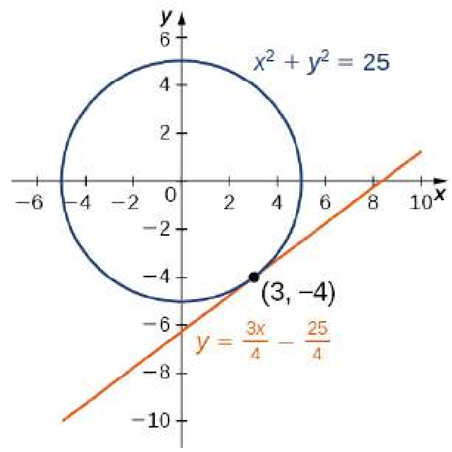


Figura 3.31 La línea $y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$ es tangente a $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, -4).

EJEMPLO 3.72

Hallar la ecuación de la línea tangente a una curva

Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $y^3 + x^3 - 3xy = 0$ en el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (Figura 3.32). Esta curva se conoce como el folium (u hoja) de Descartes.

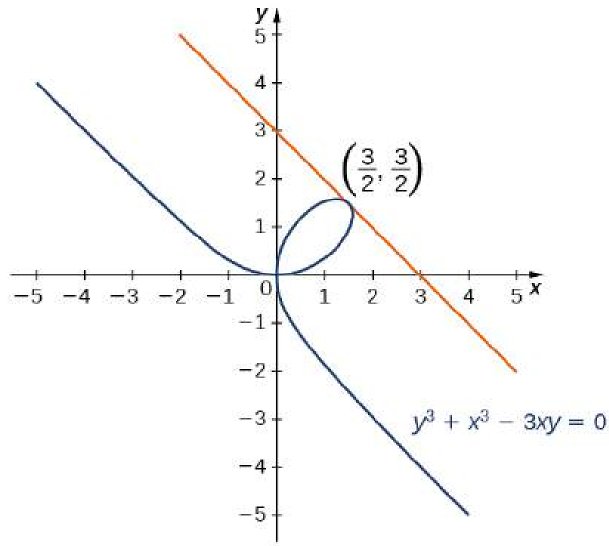


Figura 3.32 Halle la línea tangente al folium de Descartes en $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Solución

Comience por calcular $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(y^3 + x^3 - 3xy\right) &= \frac{d}{dx}(0) \\ 3y^2\frac{dy}{dx} + 3x^2 - \left(3y + \frac{dy}{dx}3x\right) &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}. \end{aligned}$$

A continuación, sustituya $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ en $\frac{dy}{dx} = \frac{3y-3x^2}{3y^2-3x}$ para encontrar la pendiente de la línea tangente:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)} = -1.$$

Finalmente, sustituya en la ecuación punto-pendiente de la línea para obtener

$$y = -x + 3.$$

EJEMPLO 3.73

Aplicación de la diferenciación implícita

En un videojuego sencillo, un cohete viaja en una órbita elíptica cuya trayectoria se describe a través de la ecuación $4x^2 + 25y^2 = 100$. El cohete puede disparar misiles a lo largo de líneas tangentes a su trayectoria. El objetivo del juego es destruir un asteroide que se desplaza por el eje *x* positivo hacia $(0, 0)$. Si el cohete dispara un misil cuando se encuentra en $\left(3, \frac{8}{5}\right)$, ¿dónde intersecará el eje *x*?

Solución

Para resolver este problema, debemos determinar dónde está la línea tangente al gráfico de

$4x^2 + 25y^2 = 100$ a las $\left(3, \frac{8}{5}\right)$ se interseca el eje *x*. Comience por calcular $\frac{dy}{dx}$ implícitamente.

Diferenciando, tenemos

$$8x + 50y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Al resolver $\frac{dy}{dx}$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{25y}.$$

La pendiente de la línea tangente es $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(3, \frac{8}{5}\right)} = -\frac{3}{10}$. La ecuación de la línea tangente es $y = -\frac{3}{10}x + \frac{5}{2}$. Para determinar el punto de intersección de la línea con el eje *x*, resuelva $0 = -\frac{3}{10}x + \frac{5}{2}$. La solución es $x = \frac{25}{3}$. El misil interseca el *eje x* en el punto $\left(\frac{25}{3}, 0\right)$.

3.49 Halle la ecuación de la línea tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(5, 3)$.

SECCIÓN 3.8 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, utilice la diferenciación implícita para hallar $\frac{dy}{dx}$.

300. $x^2 - y^2 = 4$

301. $6x^2 + 3y^2 = 12$

302. $x^2 y = y - 7$

303. $3x^3 + 9xy^2 = 5x^3$

304. $xy - \cos(xy) = 1$

305. $y\sqrt{x+4} = xy + 8$

306. $-xy - 2 = \frac{x}{7}$

307. $y \operatorname{sen}(xy) = y^2 + 2$

308. $(xy)^2 + 3x = y^2$

309. $x^3 y + xy^3 = -8$

En los siguientes ejercicios, halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de la ecuación dada en el punto indicado. Utilice una calculadora o un programa de computadora para representar gráficamente la función y la línea tangente.

310. **[T]** $x^4 y - xy^3 = -2, (-1, -1)$

311. **[T]** $x^2 y^2 + 5xy = 14, (2, 1)$

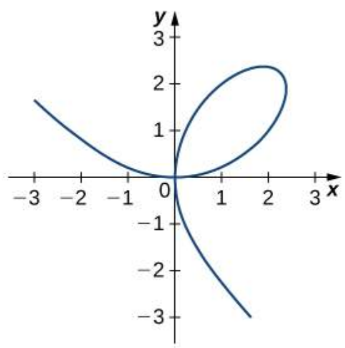
312. **[T]** $\tan(xy) = y, \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

313. **[T]** $xy^2 + \operatorname{sen}(\pi y) - 2x^2 = 10, (2, -3)$

314. **[T]** $\frac{x}{y} + 5x - 7 = -\frac{3}{4}y, (1, 2)$

315. **[T]** $xy + \operatorname{sen}(x) = 1, \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

316. **[T]** El gráfico de un folium de Descartes con ecuación $2x^3 + 2y^3 - 9xy = 0$ se muestra en el siguiente gráfico.



a. Halle la ecuación de la línea tangente en el punto $(2, 1)$. Grafique la línea tangente junto con el folio.
b. Halle la ecuación de la línea normal a la línea tangente en a. en el punto $(2, 1)$.

317. Para la ecuación $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$,

a. Halle la ecuación de la línea normal a la línea tangente en el punto $(1, 1)$.
b. ¿En qué otro punto la línea normal en a. interseca el gráfico de la ecuación?

318. Halle todos los puntos del gráfico de $y^3 - 27y = x^2 - 90$ en la que la línea tangente es vertical.

319. Para la ecuación $x^2 + xy + y^2 = 7$,

a. Calcule la(s) intersección(es) en x.
b. Halle la pendiente de la(s) línea(s) tangente(s) en la(s) intersección(es) x.
c. ¿Qué indican los valores de b. sobre la(s) línea(s) tangente(s)?

320. Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de la ecuación $\text{sen}^{-1} x + \text{sen}^{-1} y = \frac{\pi}{6}$ en el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

321. Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de la ecuación $\tan^{-1}(x + y) = x^2 + \frac{\pi}{4}$ en el punto $(0, 1)$.

322. Halle el valor y' y y'' por $x^2 + 6xy - 2y^2 = 3$.

323. **[T]** El número de teléfonos móviles producidos cuando x dólares en mano de obra y se invierten y dólares en capital por un fabricante se puede modelar mediante la ecuación $60x^{3/4}y^{1/4} = 3.240$.

a. Halle $\frac{dy}{dx}$ y evalúe en el punto $(81, 16)$.
b. Interprete el resultado de un

324. **[T]** El número de automóviles producidos cuando x dólares en mano de obra y se invierten y dólares en capital por un fabricante se puede modelar mediante la ecuación $30x^{1/3}y^{2/3} = 360$.

(Ambas x como y se miden en miles de dólares).

a. Halle $\frac{dy}{dx}$ y evalúe en el punto $(27, 8)$.
b. Interprete el resultado de un

325. El volumen de un cono circular recto de radio x y altura y viene dado por $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$. Supongamos que el volumen del cono es una constante. Halle $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = 4$ en tanto que $y = 16$.

En los siguientes ejercicios, considere una caja rectangular cerrada con una base cuadrada de lado x y altura y.

326. Halle una ecuación para el área superficial de la caja rectangular, $S(x, y)$.

327. Si el área superficial de la caja rectangular es de 78 pies cuadrados, halle $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = 3$ ft y $y = 5$ pies.

En los siguientes ejercicios, utilice la diferenciación implícita para determinar y'. ¿Coincide la respuesta con las fórmulas que determinamos previamente?

328. $x = \operatorname{sen} y$

329. $x = \cos y$

330. $x = \tan y$

3.9 Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos de aprendizaje

3.9.1 Calcular la derivada de las funciones exponenciales.
3.9.2 Calcular la derivada de las funciones logarítmicas.
3.9.3 Utilizar la diferenciación logarítmica para determinar la derivada de una función.

Hasta ahora, hemos aprendido a diferenciar una variedad de funciones, incluidas funciones trigonométricas, inversas e implícitas. En esta sección, exploramos las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas. Como ya comentamos en Introducción a funciones y gráficos, las funciones exponenciales desempeñan un papel importante en el modelado del crecimiento de la población y el decaimiento de materiales radiactivos. Las funciones logarítmicas pueden ayudar a reescalar grandes cantidades y son especialmente útiles para reescribir expresiones complicadas.

Derivada de la función exponencial

Al igual que cuando encontramos las derivadas de otras funciones, podemos calcular las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas utilizando fórmulas. A la hora de desarrollar estas fórmulas, tenemos que hacer ciertas suposiciones básicas. Las pruebas de que estos supuestos se mantienen están fuera del alcance de este curso.

En primer lugar, partimos de la base de que la función $B(x) = b^x$, $b > 0$, está definida para todo número real y es continua. En los cursos anteriores se definieron los valores de las funciones exponenciales para todos los números racionales, empezando por la definición de b^n, donde n es un número entero positivo, como el producto de b multiplicado por sí mismo n veces. Más adelante, definimos $b^0 = 1, b^{-n} = \frac{1}{b^n}$, para un número entero positivo n, y $b^{s/t} = (\sqrt[t]{b})^s$ para números enteros positivos s y t. Estas definiciones dejan abierta la cuestión del valor de b^r donde r es un número real arbitrario. Asumiendo la *continuidad* de $B(x) = b^x$, $b > 0$, podemos interpretar b^r a medida que $\lim\limits_{x \to r} b^x$ donde los valores de x a medida que tomamos el límite son racionales. Por ejemplo, podemos ver 4^π como el número que satisface

$$4^3 < 4^\pi < 4^4, 4^{3,1} < 4^\pi < 4^{3,2}, 4^{3,14} < 4^\pi < 4^{3,15},$$
$$4^{3,141} < 4^\pi < 4^{3,142}, 4^{3,1415} < 4^\pi < 4^{3,1416}, \ldots.$$

Como vemos en la siguiente tabla, $4^\pi \approx 77{,}88$.

x	4^x	x	4^x
4^3	64	$4^{3,141593}$	77,8802710486
$4^{3,1}$	73,5166947198	$4^{3,1416}$	77,8810268071
$4^{3,14}$	77,7084726013	$4^{3,142}$	77,9242251944
$4^{3,141}$	77,8162741237	$4^{3,15}$	78,7932424541
$4^{3,1415}$	77,8702309526	$4^{3,2}$	84,4485062895
$4^{3,14159}$	77,8799471543	4^4	256

Tabla 3.6 Aproximación a un valor de 4^{π}

También suponemos que para $B(x) = b^x, b > 0$, el valor $B'(0)$ de la derivada existe. En esta sección, mostramos que haciendo esta suposición adicional, es posible demostrar que la función $B(x)$ es diferenciable en todas partes.

Hacemos una última suposición: que existe un valor único de $b > 0$ para el cual $B'(0) = 1$. Definimos e para que sea este valor único, como hicimos en Introducción a funciones y gráficos. La Figura 3.33 proporciona gráficos de las funciones $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 2{,}7^x$, y $y = 2{,}8^x$. Una estimación visual de las pendientes de las líneas tangentes a estas funciones en 0 proporciona evidencia de que el valor de e se encuentra entre 2,7 y 2,8. La función $E(x) = e^x$ se denomina **función exponencial natural**. Su inversa, $L(x) = \log_e x = \ln x$ se denomina **función de logaritmo natural**.

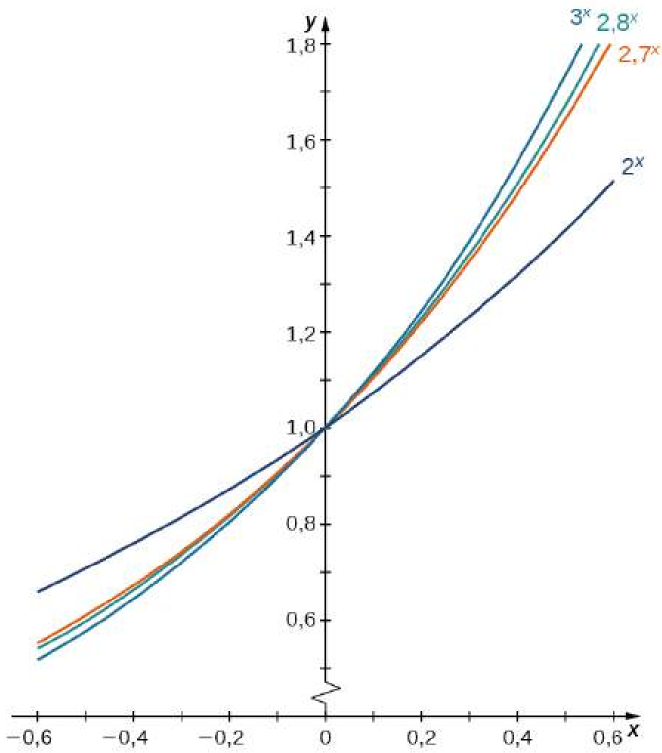


Figura 3.33 El gráfico de $E(x) = e^x$ está entre $y = 2^x$ como $y = 3^x$.

Para una mejor estimación de e, podemos construir una tabla de estimaciones de $B'(0)$ para funciones de la forma $B(x) = b^x$. Antes de hacer esto, recuerde que

$$B'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{b^x - b^0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{b^x - 1}{x} \approx \frac{b^x - 1}{x}$$

para los valores de x muy cerca de cero. Para nuestras estimaciones, elegimos $x = 0{,}00001$ y $x = -0{,}00001$ para obtener la estimación

$$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001} < B'(0) < \frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}.$$

Consulte la siguiente tabla.

b	$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001} < B'(0) < \frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}$	b	$\frac{b^{-0,00001}-1}{-0,00001} < B'(0) < \frac{b^{0,00001}-1}{0,00001}$
2	$0{,}693145 < B'(0) < 0{,}69315$	2,7183	$1{,}000002 < B'(0) < 1{,}000012$
2,7	$0{,}993247 < B'(0) < 0{,}993257$	2,719	$1{,}000259 < B'(0) < 1{,}000269$
2,71	$0{,}996944 < B'(0) < 0{,}996954$	2,72	$1{,}000627 < B'(0) < 1{,}000637$
2,718	$0{,}999891 < B'(0) < 0{,}999901$	2,8	$1{,}029614 < B'(0) < 1{,}029625$
2,7182	$0{,}999965 < B'(0) < 0{,}999975$	3	$1{,}098606 < B'(0) < 1{,}098618$

Tabla 3.7 Estimación de un valor de e

Los datos de la tabla sugieren que $2{,}7182 < e < 2{,}7183$.

El gráfico de $E(x) = e^x$ junto con la línea $y = x + 1$ se muestran en la Figura 3.34. Esta línea es tangente al gráfico de $E(x) = e^x$ en $x = 0$.

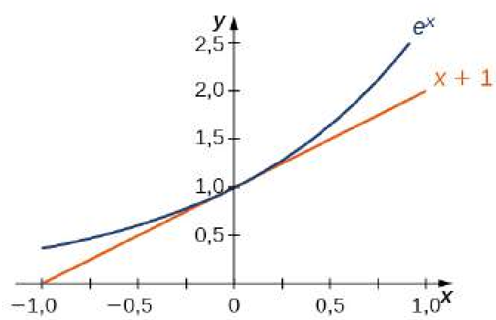


Figura 3.34 La línea tangente a $E(x) = e^x$ en $x = 0$ tiene pendiente 1.

Ahora que hemos expuesto nuestros supuestos básicos, comenzamos nuestra investigación explorando la derivada de $B(x) = b^x, b > 0$. Recordemos que hemos supuesto que $B'(0)$ existe. Aplicando la definición de límite a la derivada concluimos que

$$B'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{b^{0+h} - b^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^h - 1}{h}. \quad \textbf{(3.28)}$$

En cuanto a $B'(x)$, obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned} B'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{b^{x+h}-b^x}{h} && \text{Aplique la definición de límite de la derivada.} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{b^x b^h - b^x}{h} && \text{Tenga en cuenta que } b^{x+h} = b^x b^h. \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{b^x(b^h-1)}{h} && \text{Factorice } b^x. \\ &= b^x \lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h} && \text{Aplique una propiedad de límites.} \\ &= b^x B'(0) && \text{Uso } B'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{b^{0+h}-b^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^h-1}{h}. \end{aligned}$$

Vemos que sobre la base de la suposición de que $B(x) = b^x$ es diferenciable en 0, $B(x)$ no solo es diferenciable en todas partes, sino que su derivada es

$$B'(x) = b^x B'(0). \tag{3.29}$$

Para $E(x) = e^x$, $E'(0) = 1$. Por lo tanto, tenemos $E'(x) = e^x$. (El valor de $B'(0)$ para una función arbitraria de la forma $B(x) = b^x$, $b > 0$, se derivará más adelante.

Teorema 3.14

Derivada de la función exponencial natural

Supongamos que $E(x) = e^x$ es la función exponencial natural. Entonces

$$E'(x) = e^x.$$

En general,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right) = e^{g(x)} g'(x).$$

EJEMPLO 3.74

Derivada de una función exponencial

Calcule la derivada de $f(x) = e^{\tan(2x)}$.

Solución

Utilizando la fórmula de la derivada y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\tan(2x)} \frac{d}{dx}(\tan(2x)) \\ &= e^{\tan(2x)} \sec^2(2x) . 2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.75

Combinación de reglas de diferenciación

Calcule la derivada de $y = \frac{e^{x^2}}{x}$.

Solución

Utilice la derivada de la función exponencial natural, la regla del cociente y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(e^{x^2} .2\right) x.x - 1.e^{x^2}}{x^2} && \text{Aplique la regla del cociente.} \\ &= \frac{e^{x^2}\left(2x^2 - 1\right)}{x^2} && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

3.50 Calcule la derivada de $h(x) = xe^{2x}$.

EJEMPLO 3.76

Aplicación de la función exponencial natural

Una colonia de mosquitos tiene una población inicial de 1.000. Después de t días, la población está dada por $A(t) = 1.000e^{0,3t}$. Demuestre que la relación de la tasa de cambio de la población, $A'(t)$, a la población, $A(t)$ es constante.

Solución

Primero calcule $A'(t)$. Utilizando la regla de la cadena, tenemos $A'(t) = 300e^{0,3t}$. Por lo tanto, la relación entre la tasa de cambio de la población y la población está dada por

$$A'(t) = \frac{300e^{0,3t}}{1.000e^{0,3t}} = 0,3.$$

La relación entre la tasa de cambio de la población y la población es la constante 0,3.

3.51 Si los valores de $A(t) = 1.000e^{0,3t}$ describe la población de mosquitos después de t días, como en el ejemplo anterior, ¿cuál es la tasa de cambio de $A(t)$ después de 4 días?

Derivada de la función logarítmica

Ahora que tenemos la derivada de la función exponencial natural, podemos utilizar la diferenciación implícita para calcular la derivada de su inversa, la función de logaritmo natural.

Teorema 3.15

La derivada de la función de logaritmo natural

Si los valores de $x > 0$ y $y = \ln x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \quad (3.30)$$

De manera más general, supongamos que $g(x)$ es una función diferenciable. Para todos los valores de x para los cuales $g'(x) > 0$, la derivada de $h(x) = \ln(g(x))$ está dada por

$$h'(x) = \frac{1}{g(x)}g'(x). \quad (3.31)$$

Prueba

Si los valores de $x > 0$ y $y = \ln x$, entonces $e^y = x$. Diferenciando ambos lados de esta ecuación se obtiene la ecuación

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1.$$

Al resolver $\frac{dy}{dx}$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}.$$

Por último, sustituimos $x = e^y$ para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

También podemos derivar este resultado aplicando el teorema de la función inversa, como sigue. Dado que $y = g(x) = \ln x$ es la inversa de $f(x) = e^x$, aplicando el teorema de la función inversa tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Utilizando este resultado y aplicando la regla de la cadena a $h(x) = \ln(g(x))$ se obtiene

$$h'(x) = \frac{1}{g(x)}g'(x).$$

□

El gráfico de $y = \ln x$ y su derivada $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ se muestran en la Figura 3.35.

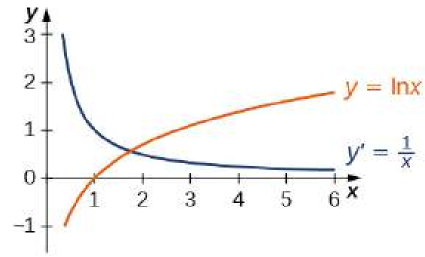


Figura 3.35 La función $y = \ln x$ es creciente en $(0, +\infty)$. Su derivada $y' = \frac{1}{x}$ es mayor que cero en $(0, +\infty)$.

EJEMPLO 3.77

Tomar la derivada de un logaritmo natural

Calcule la derivada de $f(x) = \ln\left(x^3 + 3x - 4\right)$.

Solución

Utilice directamente la Ecuación 3.31.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{x^3+3x-4} \cdot \left(3x^2 + 3\right) && \text{Uso } g(x) = x^3 + 3x - 4 \text{ en } h'(x) = \tfrac{1}{g(x)} g'(x). \\ &= \tfrac{3x^2+3}{x^3+3x-4} && \text{Reescriba.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.78

Uso de las propiedades de los logaritmos en una derivada

Calcule la derivada de $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 \operatorname{sen} x}{2x+1}\right)$.

Solución

A primera vista, tomar esta derivada parece bastante complicado. Sin embargo, utilizando las propiedades de los logaritmos antes de calcular la derivada, podemos hacer el problema mucho más sencillo.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\tfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{2x+1}\right) = 2\ln x + \ln(\operatorname{sen} x) - \ln(2x+1) && \text{Aplique las propiedades de los logaritmos.} \\ f'(x) &= \tfrac{2}{x} + \cot x - \tfrac{2}{2x+1} && \text{Aplique la regla de la suma y } h'(x) = \tfrac{1}{g(x)} g'(x). \end{aligned}$$

3.52 Diferencie: $f(x) = \ln(3x+2)^5$.

Ahora que podemos diferenciar la función de logaritmo natural, podemos utilizar este resultado para calcular las derivadas de $y = log_b x$ como $y = b^x$ para $b > 0, b \neq 1$.

Teorema 3.16

Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas generales

Supongamos que $b > 0, b \neq 1$, y supongamos que $g(x)$ es una función diferenciable.

i. Si, $y = \log_b x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln b}. \tag{3.32}$$

De forma más general, si $h(x) = \log_b(g(x))$, entonces para todos los valores de x para los que $g(x) > 0$,

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x) \ln b}. \tag{3.33}$$

ii. Si $y = b^x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = b^x \ln b. \tag{3.34}$$

De forma más general, si $h(x) = b^{g(x)}$, entonces

$$h'(x) = b^{g(x)} g'(x) \ln b. \tag{3.35}$$

Prueba

Si los valores de $y = \log_b x$, entonces $b^y = x$. Se deduce que $\ln(b^y) = \ln x$. Así que $y \ln b = \ln x$. Al resolver y, tenemos $y = \frac{\ln x}{\ln b}$. Diferenciando y teniendo en cuenta que $\ln b$ es una constante, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln b}.$$

La derivada en la Ecuación 3.33 se deduce ahora de la regla de la cadena.

Si los valores de $y = b^x$, entonces $\ln y = x \ln b$. Utilizando la diferenciación implícita, de nuevo teniendo en cuenta que $\ln b$ es constante, se deduce que $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln b$. Al resolver $\frac{dy}{dx}$ y sustituyendo $y = b^x$, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = y \ln b = b^x \ln b.$$

La derivada más general (Ecuación 3.35) se desprende de la regla de la cadena.

□

EJEMPLO 3.79

Aplicación de fórmulas de derivación

Calcule la derivada de $h(x) = \frac{3^x}{3^x+2}$.

Solución

Utilice la regla del cociente y Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas generales.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3^x \ln 3 (3^x+2) - 3^x \ln 3 (3^x)}{(3^x+2)^2} && \text{Aplique la regla del cociente.} \\ &= \frac{2.3^x \ln 3}{(3^x+2)^2} && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3.80

Cálculo de la pendiente de una línea tangente

Calcule la pendiente de la línea tangente al gráfico de $y = \log_2(3x+1)$ en $x = 1$.

Solución

Para calcular la pendiente, debemos evaluar $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$. Utilizando la Ecuación 3.33, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x+1)\ln 2}.$$

Evaluando la derivada en $x = 1$, vemos que la línea tangente tiene pendiente

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{3}{4\ln 2} = \frac{3}{\ln 16}.$$

3.53 Calcule la pendiente de la línea tangente a $y = 3^x$ en $x = 2$.

Diferenciación logarítmica

En este punto, podemos tomar derivadas de funciones de la forma $y=(g(x))^n$ para determinados valores de n, así como funciones de la forma $y=b^{g(x)}$, donde $b>0$ y $b\neq 1$. Desafortunadamente, todavía no conocemos las derivadas de funciones como $y=x^x$ o $y=x^\pi$. Estas funciones requieren una técnica llamada **diferenciación logarítmica**, que nos permite diferenciar cualquier función de la forma $h(x)=g(x)^{f(x)}$. También se puede utilizar para convertir un problema de diferenciación muy complejo en uno más sencillo, como calcular la derivada de $y=\frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \operatorname{sen}^3 x}$. Esbozamos esta técnica en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Uso de la diferenciación logarítmica

1. Para diferenciar $y=h(x)$ utilizando la diferenciación logarítmica, tome el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación para obtener $\ln y=\ln(h(x))$.
2. Utilice las propiedades de los logaritmos para expandir $\ln(h(x))$ tanto como sea posible.
3. Diferencie ambos lados de la ecuación. A la izquierda tendremos $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$.
4. Multiplique ambos lados de la ecuación por y para resolver $\frac{dy}{dx}$.
5. Sustituya y por $h(x)$.

EJEMPLO 3.81

Uso de la diferenciación logarítmica

Calcule la derivada de $y=\left(2x^4+1\right)^{\tan x}$.

Solución

Utilice la diferenciación logarítmica para calcular esta derivada.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(2x^4+1\right)^{\tan x} && \text{Paso 1. Tome el logaritmo natural de ambos lados.}\\
\ln y &= \tan x \ln\left(2x^4+1\right) && \text{Paso 2. Expanda utilizando las propiedades de los logaritmos.}\\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \sec^2 x \ln\left(2x^4+1\right)+\frac{8x^3}{2x^4+1}.\tan x && \text{Paso 3. Diferencie ambos lados. Utilice la regla del producto a la derecha.}\\
\frac{dy}{dx} &= y.\left(\sec^2 x\ln\left(2x^4+1\right)+\frac{8x^3}{2x^4+1}.\tan x\right) && \text{Paso 4. Multiplique por } y \text{ en ambos lados.}\\
\frac{dy}{dx} &= \left(2x^4+1\right)^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln\left(2x^4+1\right)+\frac{8x^3}{2x^4+1}.\tan x\right) && \text{Paso 5. Sustituya } y=\left(2x^4+1\right)^{\tan x}.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 3.82

Uso de la diferenciación logarítmica

Calcule la derivada de $y=\frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \operatorname{sen}^3 x}$.

Solución

Este problema realmente hace uso de las propiedades de los logaritmos y de las reglas de diferenciación indicadas en este capítulo.

$$\begin{array}{rcll} \ln y & = & \ln \frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \operatorname{sen}^3 x} & \text{Paso 1. Tome el logaritmo natural de ambos lados.} \\ \ln y & = & \ln x + \frac{1}{2}\ln(2x+1) - x\ln e - 3\ln \operatorname{sen} x & \text{Paso 2. Expanda utilizando las propiedades de los logaritmos.} \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} & = & \frac{1}{x} + \frac{1}{2x+1} - 1 - 3\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} & \text{Paso 3. Diferencie ambos lados.} \\ \frac{dy}{dx} & = & y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x+1} - 1 - 3\cot x\right) & \text{Paso 4. Multiplique por } y \text{ en ambos lados.} \\ \frac{dy}{dx} & = & \frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \operatorname{sen}^3 x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x+1} - 1 - 3\cot x\right) & \text{Paso 5. Sustituya } y = \frac{x\sqrt{2x+1}}{e^x \operatorname{sen}^3 x}. \end{array}$$

EJEMPLO 3.83

Ampliación de la regla de la potencia

Calcule la derivada de $y = x^r$ donde r es un número real arbitrario.

Solución

El proceso es el mismo que en el Ejemplo 3.82, aunque con menos complicaciones.

$$\begin{array}{rcll} \ln y & = & \ln x^r & \text{Paso 1. Tome el logaritmo natural de ambos lados.} \\ \ln y & = & r\ln x & \text{Paso 2. Expanda utilizando las propiedades de los logaritmos.} \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} & = & r\frac{1}{x} & \text{Paso 3. Diferencie ambos lados.} \\ \frac{dy}{dx} & = & y\frac{r}{x} & \text{Paso 4. Multiplique por } y \text{ en ambos lados.} \\ \frac{dy}{dx} & = & x^r\frac{r}{x} & \text{Paso 5. Sustituya } y = x^r. \\ \frac{dy}{dx} & = & rx^{r-1} & \text{Simplifique.} \end{array}$$

3.54 Utilice la diferenciación logarítmica para calcular la derivada de $y = x^x$.

3.55 Calcule la derivada de $y = (\tan x)^{\pi}$.

SECCIÓN 3.9 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule $f'(x)$ por cada función.

331. $f(x) = x^2 e^x$

332. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

333. $f(x) = e^{x^3 \ln x}$

334. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + 2x}$

335. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

336. $f(x) = \frac{10^x}{\ln 10}$

337. $f(x) = 2^{4x} + 4x^2$

338. $f(x) = 3^{\operatorname{sen} 3x}$

339. $f(x) = x^{\pi} . \pi^x$

340. $f(x) = \ln\left(4x^3 + x\right)$
grandes.

341. $f(x) = \ln\sqrt{5x - 7}$

342. $f(x) = x^2 \ln 9x$

343. $f(x) = \log(\sec x)$
grandes.

344. $f(x) = \log_7\left(6x^4 + 3\right)^5$

345. $f(x) = 2^x . \log_3 7^{x^2 - 4}$

En los siguientes ejercicios, utilice la diferenciación logarítmica para calcular $\frac{dy}{dx}$.

346. $y = x^{\sqrt{x}}$

347. $y = (\operatorname{sen} 2x)^{4x}$

348. $y = (\ln x)^{\ln x}$

349. $y = x^{\log_2 x}$

350. $y = \left(x^2 - 1\right)^{\ln x}$

351. $y = x^{\cot x}$

352. $y = \frac{x+11}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

353. $y = x^{-1/2}\left(x^2 + 3\right)^{2/3}(3x - 4)^4$

354. **[T]** Halle una ecuación de la línea tangente al gráfico de $f(x) = 4xe^{\left(x^2-1\right)}$ en el punto donde $x = -1$. Grafique la función y la línea tangente.

355. **[T]** Halle la ecuación de la línea que es normal al gráfico de $f(x) = x.5^x$ en el punto donde $x = 1$. Grafique tanto la función como la línea normal.

356. **[T]** Halle la ecuación de la línea tangente al gráfico de $x^3 - x\ln y + y^3 = 2x + 5$ en el punto (2, 1). (*Pista*: Utilice la diferenciación implícita para calcular $\frac{dy}{dx}$.) Grafique tanto la curva como la línea tangente.

357. Considere la función $y = x^{1/x}$ para $x > 0$.

a. Determine los puntos del gráfico donde la línea tangente es horizontal.
b. Determine los puntos del gráfico en los que $y' > 0$ y aquellos en los que $y' < 0$.

358. La fórmula $I(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{e^t}$ es la fórmula de una corriente alterna decreciente.

a. Complete la siguiente tabla con los valores adecuados.

t	$\frac{\operatorname{sen} t}{e^t}$
0	(i)
$\frac{\pi}{2}$	(ii)
π	(iii)
$\frac{3\pi}{2}$	(iv)
2π	(v)
$\frac{5\pi}{2}$	(vi)
3π	(vii)
$\frac{7\pi}{2}$	(viii)
4π	(ix)

b. Utilizando solo los valores de la tabla, determine dónde la línea tangente al gráfico de $I(t)$ es horizontal.

359. **[T]** La población de Toledo, Ohio, en el año 2000 era de aproximadamente 500.000 habitantes. Supongamos que la población aumenta a un ritmo del 5 % anual.

a. Escriba la función exponencial que relaciona la población total en función de t.
b. Utilice a. para determinar la tasa de aumento de la población en t años.
c. Utilice b. para determinar la tasa de aumento de la población en 10 años.

360. **[T]** Un isótopo del elemento erbio tiene una semivida de aproximadamente 12 horas. Inicialmente hay 9 gramos del isótopo presente.

a. Escriba la función exponencial que relaciona la cantidad de sustancia restante en función de t, medido en horas.
b. Utilice a. para determinar la tasa de decaimiento de la sustancia en t horas.
c. Utilice b. para determinar la tasa de decaimiento en $t = 4$ horas.

361. **[T]** El número de casos de gripe en la ciudad de Nueva York desde principios de 1960 hasta principios de 1961 se modela mediante la función

$N(t) = 5{,}3e^{0{,}093t^2 - 0{,}87t}, (0 \le t \le 4),$ donde $N(t)$ indica el número de casos (en miles) y t se mide en años, con $t = 0$ correspondiente a principios de 1960.

a. Muestre el trabajo que evalúa $N(0)$ y $N(4)$. Describa brevemente lo que indican estos valores sobre la enfermedad en la ciudad de Nueva York.
b. Muestre el trabajo que evalúa $N'(0)$ y $N'(3)$. Describa brevemente lo que indican estos valores sobre la enfermedad en la ciudad de Nueva York.

362. **[T]** La *tasa de cambio relativa* de una función diferenciable $y = f(x)$ está dada por $\frac{100.f'(x)}{f(x)}\%$. Un modelo de crecimiento de la población es una función de crecimiento de Gompertz, dada por $P(x) = ae^{-b.e^{-cx}}$ donde $a, b,$ y c son constantes.

a. Halle la fórmula de la tasa de cambio relativa para la función genérica de Gompertz.
b. Utilice a. para calcular la tasa de cambio relativa de una población en $x = 20$ meses cuando $a = 204, b = 0{,}0198,$ y $c = 0{,}15.$
c. Interprete brevemente lo que significa el resultado de b.

En los siguientes ejercicios, utilice la población de la ciudad de Nueva York de 1790 a 1860, que se da en la siguiente tabla.

Años desde 1790	Población
0	33.131
10	60.515
20	96.373
30	123.706
40	202.300
50	312.710
60	515.547
70	813.669

Tabla 3.8 La población de Nueva York a lo largo del tiempo Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/Largest_cities_in_the_United_States_by_population_by_decade.

363. **[T]** Utilizando un programa de computadora o una calculadora, ajuste una curva de crecimiento a los datos de la forma $p = ab^t$.

364. **[T]** Utilizando el mejor ajuste exponencial para los datos, escriba una tabla que contenga las derivadas evaluadas en cada año.

365. **[T]** Utilizando el mejor ajuste exponencial para los datos, escriba una tabla que contenga las segundas derivadas evaluadas en cada año.

366. **[T]** Utilizando las tablas de primeras y segundas derivadas y el mejor ajuste, responda a las siguientes preguntas:

a. ¿Será exacto el modelo para predecir la población futura de la ciudad de Nueva York? ¿Por qué sí o por qué no?
b. Estime la población en 2010. ¿Fue correcta la predicción de a.?

Revisión del capítulo

Términos clave

aceleración tasa de cambio de la velocidad, es decir, la derivada de la velocidad

cantidad de cambio la cantidad de una función $f(x)$ en un intervalo $[x, x+h]$ es $f(x+h) - f(x)$

cociente de diferencias de una función $f(x)$ en a está dada por

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ o } \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

costo marginal es la derivada de la función de costo, o el costo aproximado de producir un artículo más

derivada pendiente de la línea tangente a una función en un punto, calculada tomando el límite del cociente de diferencias

derivada de orden superior la derivada de una derivada, desde la segunda derivada hasta la *enésima* derivada, se llama derivada de orden superior

diferenciable en *a* una función para la cual $f'(a)$ existe es diferenciable en a

diferenciable en *S* una función para la cual $f'(x)$ existe para cada x en el conjunto abierto S es diferenciable en S

diferenciación el proceso de tomar un derivada

diferenciación implícita técnica para calcular $\frac{dy}{dx}$ para una función definida por una ecuación, que se realiza diferenciando ambos lados de la ecuación (recordando tratar la variable y como función) y resolviendo para $\frac{dy}{dx}$

diferenciación logarítmica es una técnica que nos permite diferenciar una función tomando primero el logaritmo natural de ambos lados de una ecuación, aplicando las propiedades de los logaritmos para simplificar la ecuación y diferenciando implícitamente

función derivada da la derivada de una función en cada punto del dominio de la función original para la que se define la derivada

función diferenciable una función para la cual $f'(x)$ existe es una función diferenciable

ganancia marginal es la derivada de la función de ganancias, o la ganancia aproximada que se obtiene al producir y vender un artículo más

ingreso marginal es la derivada de la función de ingresos, o el ingreso aproximado que se obtiene al vender un artículo más

rapidez es el valor absoluto de la velocidad, es decir $|v(t)|$ es la velocidad de un objeto en el tiempo t cuya velocidad viene dada por $v(t)$

regla de la cadena la regla de la cadena define la derivada de una función compuesta como la derivada de la función exterior evaluada en la función interior multiplicada por la derivada de la función interior

regla de la constante la derivada de una función constante es cero: $\frac{d}{dx}(c) = 0$, donde *c* es una constante

regla de la diferencia la derivada de la diferencia de una función *f* y una función *g* es la misma que la diferencia de la derivada de *f* y la derivada de *g*: $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$

regla de la potencia la derivada de una función potencia es una función en la que la potencia sobre x se convierte en el coeficiente del término y la potencia en x en la derivada disminuye en 1: Si los valores de n es un número entero, entonces $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

regla de la suma la derivada de la suma de una función *f* y una función *g* es la misma que la suma de la derivada de *f* y la derivada de *g* $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$

regla del cociente la derivada del cociente de dos funciones es la derivada de la primera función multiplicada por la segunda función menos la derivada de la segunda función multiplicada por la primera función, todo ello dividido entre el cuadrado de la segunda función: $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

regla del múltiplo constante la derivada de una constante *c* multiplicada por una función *f* es la misma que la constante multiplicada por la derivada: $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$

regla del producto la derivada de un producto de dos funciones es la derivada de la primera función multiplicada por la segunda más la derivada de la segunda función multiplicada por la primera: $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

tasa de crecimiento demográfico es la derivada de la población con respecto al tiempo

tasa instantánea de cambio tasa de cambio de una función en cualquier punto a lo largo de la misma a, también llamada $f'(a)$, o derivada de la función en a

tasa promedio de cambio es una función $f(x)$ en un intervalo $[x, x+h]$ es $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Ecuaciones clave

Cociente de diferencias	$Q = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
Cociente de diferencias con incremento h	$Q = \frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Pendiente de la línea tangente	$m_{\tan} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $m_{\tan} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Derivada de $f(x)$ en a	$f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Velocidad media	$v_{\text{ave}} = \frac{s(t)-s(a)}{t-a}$
Velocidad instantánea	$v(a) = s'(a) = \lim\limits_{t \to a} \frac{s(t)-s(a)}{t-a}$

La función derivada	$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Derivada de la función seno	$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
Derivada de la función coseno	$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
Derivada de la función tangente	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
Derivada de la función cotangente	$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
Derivada de la función secante	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
Derivada de la función cosecante	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

La regla de la cadena	$h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$
La regla de la potencia para las funciones	$h'(x) = n(g(x))^{n-1} g'(x)$

Teorema de la función inversa	$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$ siempre que $f'\left(f^{-1}(x)\right) \neq 0$ y $f(x)$ es diferenciable.
Regla de la potencia con exponentes racionales	$\frac{d}{dx}\left(x^{m/n}\right) = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}$.
Derivada de la función seno inversa	$\frac{d}{dx} \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-(x)^2}}$

Derivada de la función coseno inversa	$\frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\frac{-1}{\sqrt{1-(x)^2}}$
Derivada de la función tangente inversa	$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+(x)^2}$
Derivada de la función cotangente inversa	$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x=\frac{-1}{1+(x)^2}$
Derivada de la función secante inversa	$\frac{d}{dx}\sec^{-1}x=\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{(x)^2-1}}$
Derivada de la función cosecante inversa	$\frac{d}{dx}\csc^{-1}x=\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{(x)^2-1}}$

Derivada de la función exponencial natural	$\frac{d}{dx}\left(e^{g(x)}\right)=e^{g(x)}g'(x)$
Derivada de la función de logaritmo natural	$\frac{d}{dx}(\ln g(x))=\frac{1}{g(x)}g'(x)$
Derivada de la función exponencial general	$\frac{d}{dx}\left(b^{g(x)}\right)=b^{g(x)}g'(x)\ln b$
Derivada de la función logarítmica general	$\frac{d}{dx}\left(\log_b g(x)\right)=\frac{g'(x)}{g(x)\ln b}$

Conceptos clave

3.1 Definir la derivada

- La pendiente de la línea tangente a una curva mide la tasa instantánea de cambio de una curva. Podemos calcularla encontrando el límite del cociente de diferencias o el cociente de diferencias con incremento h.
- La derivada de una función $f(x)$ en un valor a se encuentra utilizando cualquiera de las definiciones de la pendiente de la línea tangente.
- La velocidad es la tasa de cambio de la posición. Así, la velocidad $v(t)$ en el momento t es la derivada de la posición $s(t)$ en el momento t. La velocidad media viene dada por
$$v_{\text{ave}}=\frac{s(t)-s(a)}{t-a}.$$
La velocidad instantánea viene dada por
$$v(a)=s'(a)=\lim_{t\to a}\frac{s(t)-s(a)}{t-a}.$$
- Podemos estimar una derivada utilizando una tabla de valores.

3.2 La derivada como función

- La derivada de una función $f(x)$ es la función cuyo valor en x es $f'(x)$.
- El gráfico de la derivada de una función $f(x)$ está relacionado con el gráfico de $f(x)$. Donde $f(x)$ tiene una línea tangente con pendiente positiva, $f'(x)>0$. Donde $f(x)$ tiene una línea tangente con pendiente negativa, $f'(x)<0$. Donde $f(x)$ tiene una línea tangente horizontal, $f'(x)=0$.
- Si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en ese punto. Una función no es diferenciable en un punto si no es continua en el mismo, si tiene una línea tangente vertical en el punto o si el gráfico tiene una esquina aguda o cúspide.
- Las derivadas de orden superior son derivadas de derivadas, desde la segunda derivada hasta la $n-\text{ésima}$ derivada.

3.3 Reglas de diferenciación

- La derivada de una función constante es cero.

- La derivada de una función potencia es una función en la que la potencia sobre x se convierte en el coeficiente del término y la potencia en x en la derivada disminuye en 1.
- La derivada de una constante c multiplicada por una función f es lo mismo que la constante multiplicada por la derivada.
- La derivada de la suma de una función f y una función g es la misma que la suma de la derivada de f y la derivada de g.
- La derivada de la diferencia de una función f y una función g es la misma que la diferencia de la derivada de f y la derivada de g.
- La derivada de un producto de dos funciones es la derivada de la primera función multiplicada por la segunda más la derivada de la segunda función multiplicada por la primera.
- La derivada del cociente de dos funciones es la derivada de la primera función multiplicada por la segunda menos la derivada de la segunda función multiplicada por la primera, todo ello dividido entre el cuadrado de la segunda función.
- Utilizamos la definición de límite de la derivada para desarrollar fórmulas que nos permitan encontrar derivadas sin recurrir a la definición de la derivada. Estas fórmulas pueden usarse por separado o combinadas.

3.4 Las derivadas como tasas de cambio

- Utilizando $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$, es posible estimar $f(a+h)$ dado que $f'(a)$ y $f(a)$.
- La tasa de cambio de posición es la velocidad, y la tasa de cambio de la velocidad es la aceleración. La rapidez es el valor absoluto, o la magnitud, de la velocidad.
- La tasa de crecimiento de la población y la población actual pueden utilizarse para predecir el tamaño de una población futura.
- Las funciones de costo marginal, ingreso marginal y ganancia marginal pueden utilizarse para predecir, respectivamente, el costo de producción de un artículo más, los ingresos obtenidos por la venta de un artículo más y la ganancia obtenida por la producción y venta de un artículo más.

3.5 Derivadas de funciones trigonométricas

- Podemos encontrar las derivadas de sen x y cos x utilizando la definición de derivada y las fórmulas de límite encontradas anteriormente. Los resultados son
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x \; \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x.$$
- Con estas dos fórmulas, podemos determinar las derivadas de las seis funciones trigonométricas básicas.

3.6 La regla de la cadena

- La regla de la cadena nos permite diferenciar composiciones de dos o más funciones. Establece que para $h(x) = f(g(x))$,
$$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x).$$
  En la notación de Leibniz esta regla toma la forma
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$
- Podemos utilizar la regla de la cadena con otras reglas que ya aprendimos y derivar fórmulas en algunas de ellas.
- La regla de la cadena se combina con la regla de la potencia para formar una nueva regla:
$$\text{Si } h(x) = (g(x))^n, \text{entonces } h'(x) = n(g(x))^{n-1} g'(x).$$
- Cuando se aplica a la composición de tres funciones, la regla de la cadena puede expresarse como sigue: Si los valores de $h(x) = f(g(k(x)))$, entonces $h'(x) = f'(g(k(x))\,g'(k(x))\,k'(x)$.

3.7 Derivadas de funciones inversas

- El teorema de la función inversa nos permite calcular derivadas de funciones inversas sin utilizar la definición de límite de la derivada.
- Podemos utilizar el teorema de la función inversa para desarrollar fórmulas de diferenciación para las funciones trigonométricas inversas.

3.8 Diferenciación implícita

- Utilizamos la diferenciación implícita para encontrar las derivadas de funciones definidas implícitamente (funciones definidas por ecuaciones).

- Utilizando la diferenciación implícita, podemos encontrar la ecuación de una línea tangente al gráfico de una curva.

3.9 Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

- Partiendo de la base de que la función exponencial $y = b^x, b > 0$ es continua en todas partes y diferenciable en 0, esta función es diferenciable en todas partes y existe una fórmula para su derivada.
- Podemos utilizar una fórmula para calcular la derivada de $y = \ln x$, y la relación $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ nos permite extender nuestras fórmulas de diferenciación para incluir logaritmos con bases arbitrarias.
- La diferenciación logarítmica nos permite diferenciar funciones de la forma $y = g(x)^{f(x)}$ o funciones muy complejas tomando el logaritmo natural de ambos lados y explotando las propiedades de los logaritmos antes de diferenciar.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? Justifique la respuesta con una prueba o un contraejemplo.

367. Toda función tiene una derivada.

368. Una función continua tiene una derivada continua.

369. Una función continua tiene una derivada.

370. Si una función es diferenciable, es continua.

Utilice la definición de límite de la derivada para evaluar exactamente la derivada.

371. $f(x) = \sqrt{x+4}$

372. $f(x) = \frac{3}{x}$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones.

373. $f(x) = 3x^3 - \frac{4}{x^2}$

374. $f(x) = \left(4 - x^2\right)^3$

375. $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

376. $f(x) = \ln(x+2)$ grandes.

377. $f(x) = x^2 \cos x + x \tan(x)$ grandes.

378. $f(x) = \sqrt{3x^2 + 2}$

379. $f(x) = \frac{x}{4} \operatorname{sen}^{-1}(x)$ grandes.

380. $x^2 y = (y+2) + xy \operatorname{sen}(x)$

Calcule las siguientes derivadas de diversos órdenes.

381. Primera derivada de $y = x \ln(x) \cos x$

382. Tercera derivada de $y = (3x+2)^2$

383. Segunda derivada de $y = 4^x + x^2 \operatorname{sen}(x)$ grandes.

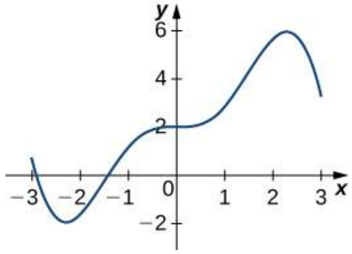
Halle la ecuación de la línea tangente a las siguientes ecuaciones en el punto especificado.

384. $y = \cos^{-1}(x) + x$ en $x = 0$

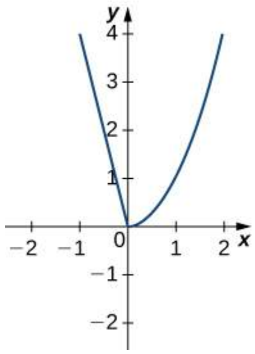
385. $y = x + e^x - \frac{1}{x}$ en $x = 1$

Dibuje la derivada de los siguientes gráficos.

386.



387.



Las siguientes preguntas se refieren al nivel del agua en Ocean City, Nueva Jersey, en enero, que puede ser aproximado mediante $w(t) = 1{,}9 + 2{,}9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ *, donde t se mide en horas después de la medianoche, y la altura se mide en pies.*

388. Calcule y grafique la derivada. ¿Cuál es el significado físico?

389. Calcule $w'(3)$. ¿Cuál es el significado físico de este valor?

Las siguientes preguntas se refieren a la velocidad del viento del huracán Katrina, que afectó a Nueva Orleans (Luisiana) en agosto de 2005. Los datos se muestran en una tabla.

Horas después de la medianoche del 26 de agosto	Velocidad del viento (mph)
1	45
5	75
11	100
29	115
49	145
58	175
73	155
81	125
85	95
107	35

Tabla 3.9 Velocidades de los vientos del huracán Katrina Fuente: http://news.nationalgeographic.com/news/2005/09/0914_050914_katrina_timeline.html.

390. Utilizando la tabla, estime la derivada de la velocidad del viento en la hora 39. ¿Cuál es el significado físico?

391. Estime la derivada de la velocidad del viento en la hora 83. ¿Cuál es el significado físico?

4 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Figura 4.1 Cuando se lanza un cohete, ¿a qué velocidad debería cambiar el ángulo de una cámara de video para seguir observándolo? (créditos: modificación del trabajo de Steve Jurvetson, Wikimedia Commons).

Esquema del capítulo

Introducción

Se lanza un cohete desde tierra y las cámaras graban el evento. Una cámara de video está situada en el suelo a cierta distancia de la plataforma de lanzamiento. ¿A qué velocidad debe cambiar el ángulo de inclinación (el ángulo que forma la cámara con el suelo) para que esta pueda grabar el vuelo del cohete mientras este se dirige hacia arriba? (Vea la Ejemplo 4.3).

El lanzamiento de un cohete implica dos cantidades relacionadas que cambian con el tiempo. Ser capaces de resolver este tipo de problemas es solo una de las aplicaciones de las derivadas que se presentan en este capítulo. También veremos cómo se utilizan las derivadas para encontrar los valores máximos y mínimos de las funciones. Como resultado, podremos resolver problemas de optimización aplicados, como la maximización de los ingresos y la minimización del área superficial. Además, analizaremos cómo se utilizan las derivadas para evaluar límites complicados, para aproximar las raíces de las funciones y para proporcionar gráficos precisos de las funciones.

4.1 Tasas relacionadas

Objetivos de aprendizaje

4.1.1 Expresar cantidades cambiantes en términos de derivadas.
4.1.2 Hallar relaciones entre las derivadas en un problema dado.
4.1.3 Utilizar la regla de la cadena para encontrar la tasa de cambio de una cantidad que depende de la tasa de cambio de otras cantidades.

Hemos visto que para las cantidades que cambian en el tiempo, las tasas a las que estas cantidades cambian están dadas por las derivadas. Si dos cantidades relacionadas cambian en el tiempo, las tasas a las que cambian las cantidades están relacionadas. Por ejemplo, si un globo se llena de aire, tanto el radio como el volumen del globo aumentan. En esta sección, consideramos varios problemas en los que dos o más cantidades relacionadas están cambiando y estudiamos cómo determinar la relación entre las tasas de cambio de estas cantidades.

Establecer problemas de tasas relacionadas

En muchas aplicaciones del mundo real, las cantidades relacionadas cambian con respecto al tiempo. Por ejemplo, si volvemos a considerar el ejemplo del globo, podemos decir que la tasa de cambio del volumen, V, está relacionada con la tasa de cambio del radio, r. En este caso, decimos que $\frac{dV}{dt}$ y $\frac{dr}{dt}$ son **tasas relacionadas** porque V está relacionada con r. Aquí estudiamos varios ejemplos de cantidades relacionadas que cambian con respecto al tiempo y vemos cómo calcular una tasa de cambio dada otra tasa de cambio.

EJEMPLO 4.1

Inflar un globo

Un globo esférico se está llenando de aire a un ritmo constante de $2\text{ cm}^3/\text{s}$ (Figura 4.2). ¿Qué tan rápido aumenta el radio cuando el radio es 3 cm?

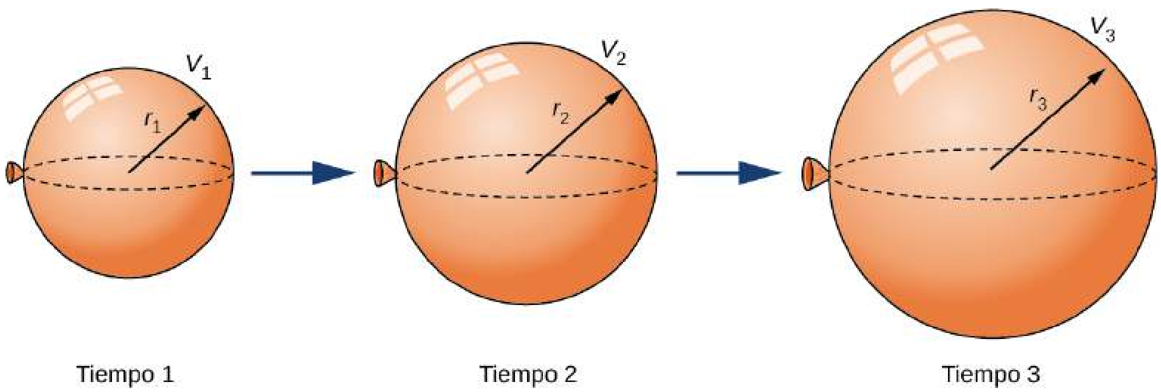


Figura 4.2 A medida que el globo se llena de aire, tanto el radio como el volumen aumentan con respecto al tiempo.

Solución

El volumen de una esfera de radio r centímetros es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{cm}^3.$$

Como el globo se está llenando de aire, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo. Por lo tanto, t segundos después de comenzar a llenar el globo con aire, el volumen de aire en el globo es

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3 \text{cm}^3.$$

Diferenciando ambos lados de esta ecuación con respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena, vemos que la tasa de cambio del volumen está relacionada con la tasa de cambio del radio mediante la ecuación

$$V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t).$$

El globo se está llenando de aire a una velocidad constante de 2 cm^3/s, por lo que $V'(t) = 2\text{ cm}^3/\text{sec}$. Por lo tanto,

$$2\text{cm}^3/\text{sec} = \left(4\pi[r(t)]^2 \text{cm}^2\right) \cdot (r'(t)\text{ cm/s}),$$

lo que implica

$$r'(t) = \frac{1}{2\pi[r(t)]^2} \text{ cm/s.}$$

Cuando el radio $r = 3$ cm,

$$r'(t) = \frac{1}{18\pi} \text{ cm/s.}$$

4.1 ¿Cuál es la tasa instantánea de cambio del radio cuando $r = 6$ cm?

Antes de ver otros ejemplos, vamos a esbozar la estrategia de resolución de problemas que vamos a utilizar para resolver problemas de tasas relacionadas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Resolver un problema de tasas relacionadas

1. Asigne símbolos a todas las variables que intervienen en el problema. Dibuje una figura si procede.
2. Indique, en función de las variables, la información que se da y el índice que debe determinarse.
3. Halle una ecuación que relacione las variables introducidas en el paso 1.
4. Utilizando la regla de la cadena, diferencie ambos lados de la ecuación hallada en el paso 3 con respecto a la variable independiente. Esta nueva ecuación relacionará las derivadas.
5. Sustituya todos los valores conocidos en la ecuación del paso 4, y luego resuelva la tasa de cambio desconocida.

Tenga en cuenta que al resolver un problema de tasas relacionadas, es crucial no sustituir los valores conocidos demasiado pronto. Por ejemplo, si el valor de una cantidad cambiante se sustituye en una ecuación antes de diferenciar ambos lados de la ecuación, entonces esa cantidad se comportará como una constante y su derivada no aparecerá en la nueva ecuación halla en el paso 4. Examinamos este posible error en el siguiente ejemplo.

Ejemplos del proceso

Pongamos ahora en práctica la estrategia que acabamos de describir para resolver varios problemas de tasas relacionadas. El primer ejemplo es el de un avión que sobrevuela la ciudad. La relación que estudiamos es la que existe entre la velocidad del avión y la velocidad a la que cambia la distancia entre el avión y una persona en el suelo.

EJEMPLO 4.2

Un avión volando a una altura constante

Un avión sobrevuela a una altura constante de 4.000 ft. Un hombre está viendo el avión desde una posición a 3.000 ft desde la base de una torre de radio. El avión vuela horizontalmente alejándose del hombre. Si el avión vuela a la velocidad de 600 ft/s, ¿a qué velocidad aumenta la distancia entre el hombre y el avión cuando este pasa por encima de la torre de radio?

Solución

Paso 1. Haga un dibujo, introduciendo variables para representar las diferentes cantidades implicadas.

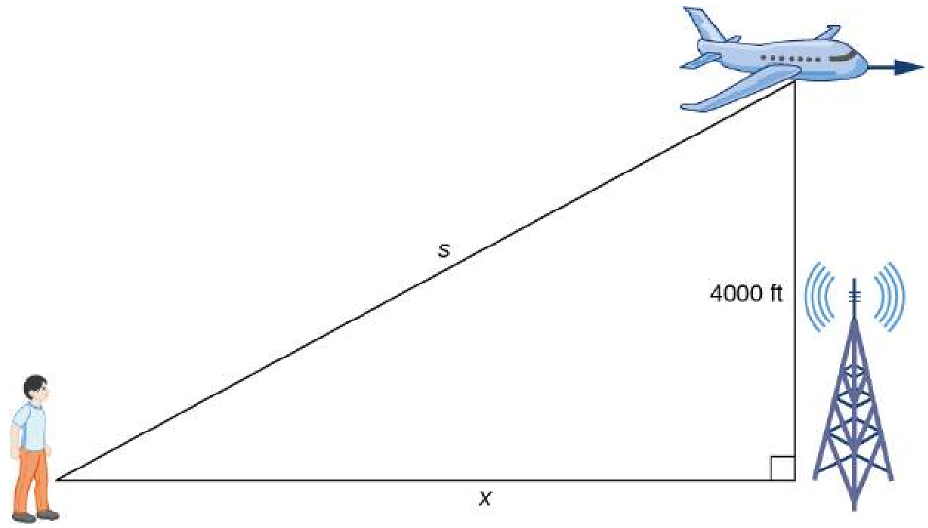


Figura 4.3 Un avión vuela a una altura constante de 4000 pies. La distancia entre la persona y el avión y la persona y el lugar en el suelo directamente debajo del avión están cambiando. Denotamos esas cantidades con las variables s y x, respectivamente.

Como se muestra, x denota la distancia entre el hombre y la posición en el suelo directamente debajo del avión. La variable s denota la distancia entre el hombre y el avión. Tenga en cuenta que ambas x y s son funciones del tiempo. No introducimos una variable para la altura del plano porque se mantiene a una altura constante de 4.000 ft. Como la altura de un objeto sobre el suelo se mide como la distancia más corta entre el objeto y el suelo, el segmento de línea de longitud 4000 pies es perpendicular al segmento de línea de longitud x pies, creando un triángulo rectángulo.

Paso 2. Dado que x denota la distancia horizontal entre el hombre y el punto del suelo por debajo del plano, dx/dt representa la velocidad del avión. Nos dicen que la velocidad del avión es de 600 ft/s. Por lo tanto, $\frac{dx}{dt} = 600$ ft/s. Como se nos pide que hallemos la tasa de cambio de la distancia entre el hombre y el avión cuando el avión está directamente sobre la torre de radio, necesitamos calcular ds/dt cuando $x = 3.000$ ft.

Paso 3. A partir de la figura, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para escribir una ecuación que relacione x y s:

$$[x(t)]^2 + 4.000^2 = [s(t)]^2.$$

Paso 4. Diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo y utilizando el hecho de que la derivada de una constante es cero, llegamos a la ecuación

$$x\frac{dx}{dt} = s\frac{ds}{dt}.$$

Paso 5. Calcule la tasa a la que aumenta la distancia entre el hombre y el avión cuando el avión está directamente sobre la torre de radio. Es decir, calcule $\frac{ds}{dt}$ cuando $x = 3.000$ ft. Como la velocidad del avión es 600 ft/s, sabemos que $\frac{dx}{dt} = 600$ ft/s. No se nos da un valor explícito para s; sin embargo, ya que estamos tratando de calcular $\frac{ds}{dt}$ cuando $x = 3.000$ ft, podemos utilizar el teorema de Pitágoras para determinar la distancia s cuando $x = 3.000$ y la altura es 4.000 ft. Resolviendo la ecuación

$$3.000^2 + 4.000^2 = s^2$$

para s, tenemos $s = 5.000$ ft en el tiempo de interés. Utilizando estos valores, concluimos que ds/dt es una solución de la ecuación

$$(3.000)(600) = (5.000).\,\frac{ds}{dt}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3.000.\,600}{5.000} = 360 \text{ ft/s}.$$

Nota: Al resolver problemas de tasas relacionadas, es importante no sustituir los valores de las variables demasiado pronto. Por ejemplo, en el paso 3, relacionamos las cantidades variables $x(t)$ y $s(t)$ por la ecuación

$$[x(t)]^2 + 4.000^2 = [s(t)]^2.$$

Como el plano permanece a una altura constante, no es necesario introducir una variable para la altura, y se nos permite utilizar la constante 4000 para denotar esa cantidad. Sin embargo, las otras dos cantidades están cambiando. Si por error sustituimos $x(t) = 3.000$ en la ecuación antes de diferenciarla, nuestra ecuación habría sido

$$3.000^2 + 4.000^2 = [s(t)]^2.$$

Después de diferenciar, nuestra ecuación sería

$$0 = s(t)\frac{ds}{dt}.$$

Como resultado, concluiríamos incorrectamente que $\frac{ds}{dt} = 0$.

4.2 ¿Cuál es la velocidad del avión si la distancia entre la persona y el avión aumenta a la tasa de 300 ft/s?

Volvemos ahora al problema del lanzamiento del cohete del principio del capítulo.

EJEMPLO 4.3

Inicio del capítulo: El lanzamiento de un cohete

Figura 4.4 (créditos: modificación del trabajo de Steve Jurvetson, Wikimedia Commons).

Se lanza un cohete para que se eleve verticalmente. Se coloca una cámara a 5.000 ft desde la plataforma de lanzamiento. Cuando el cohete está 1.000 ft sobre la plataforma de lanzamiento, su velocidad es 600 ft/s. Calcule la tasa de cambio necesaria del ángulo de la cámara en función del tiempo para que se mantenga enfocada en el cohete.

Solución

Paso 1. Haga un dibujo introduciendo las variables.

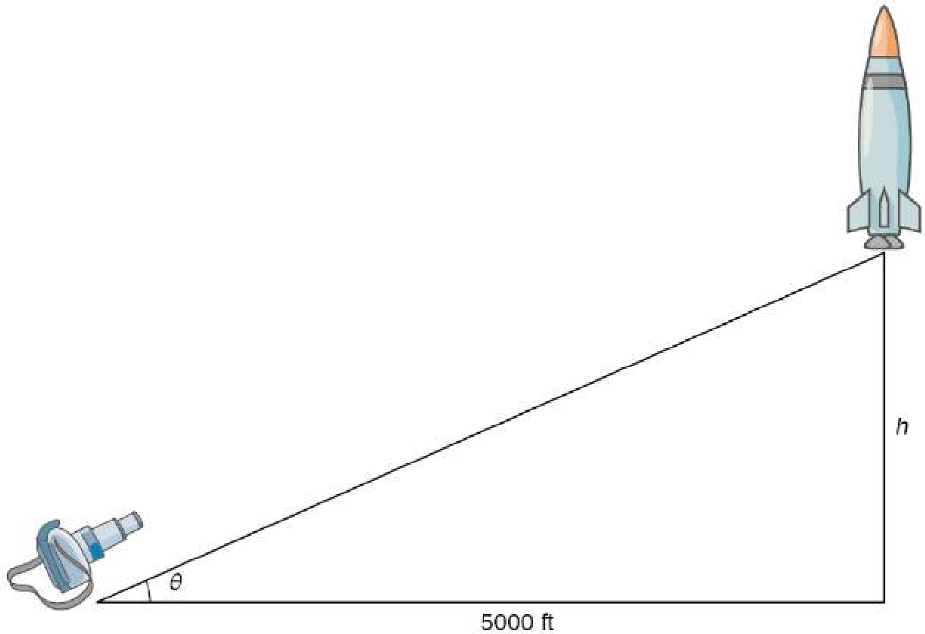


Figura 4.5 Se coloca una cámara a 5.000 ft de la plataforma de lanzamiento del cohete. La altura del cohete y el ángulo de la cámara cambian con respecto al tiempo. Denotamos esas cantidades con las variables h y θ, respectivamente.

Supongamos que h denotan la altura del cohete sobre la plataforma de lanzamiento y θ sea el ángulo entre el objetivo de la cámara y el suelo.

Paso 2. Estamos tratando de calcular la tasa de cambio en el ángulo de la cámara con respecto al tiempo cuando el cohete está a 1.000 ft del suelo. Es decir, tenemos que calcular $\frac{d\theta}{dt}$ cuando $h = 1.000$ ft. En ese momento, sabemos que la velocidad del cohete es $\frac{dh}{dt} = 600$ ft/s.

Paso 3. Ahora tenemos que hallar una ecuación que relacione las dos cantidades que están cambiando con respecto al tiempo h y θ. ¿Cómo podemos crear esa ecuación? Partiendo del hecho de que hemos dibujado un triángulo rectángulo, es natural pensar en las funciones trigonométricas. Recordemos que $\tan\theta$ es la relación entre la longitud del lado opuesto del triángulo y la longitud del lado adyacente. Por lo tanto, tenemos

$$\tan\theta = \frac{h}{5.000}.$$

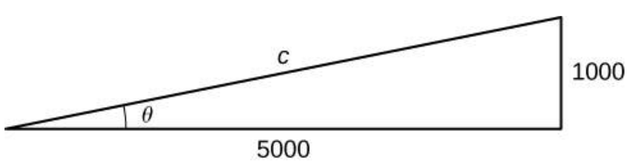
Esto nos da la ecuación

$$h = 5.000\tan\theta.$$

Paso 4. Diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo t, obtenemos

$$\frac{dh}{dt} = 5.000\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Paso 5. Supongamos que se desea calcular $\frac{d\theta}{dt}$ cuando $h = 1.000$ ft. En este momento, sabemos que $\frac{dh}{dt} = 600$ ft/s. Tenemos que determinar $\sec^2\theta$. Recordemos que $\sec\theta$ es la relación entre la longitud de la hipotenusa y la longitud del lado adyacente. Sabemos que la longitud del lado adyacente es 5.000 ft. Para determinar la longitud de la hipotenusa, utilizamos el teorema de Pitágoras, donde la longitud de un cateto es 5.000 ft, la longitud del otro cateto es $h = 1.000$ ft, y la longitud de la hipotenusa es c pies como se muestra en la siguiente figura.



Vemos que

$$1.000^2 + 5.000^2 = c^2$$

y concluimos que la hipotenusa es

$$c = 1.000\sqrt{26}\text{ ft}.$$

Por lo tanto, cuando $h = 1.000$, tenemos

$$\sec^2\theta = \left(\frac{1.000\sqrt{26}}{5.000}\right)^2 = \frac{26}{25}.$$

Recordemos que en el paso 4 la ecuación que relaciona $\frac{d\theta}{dt}$ a nuestros valores conocidos es

$$\frac{dh}{dt} = 5.000\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Cuando $h = 1.000\text{ ft}$, sabemos que $\frac{dh}{dt} = 600\text{ ft/s}$ y $\sec^2\theta = \frac{26}{25}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, llegamos a la ecuación

$$600 = 5.000\left(\frac{26}{25}\right)\frac{d\theta}{dt}.$$

Por lo tanto, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{3}{26}\text{ rad/s}$.

4.3 ¿Qué tasa de cambio es necesaria para el ángulo de elevación de la cámara si esta se coloca en el suelo a una distancia de 4.000 ft desde la plataforma de lanzamiento y la velocidad del cohete es de 500 ft/s cuando el cohete está a 2000 ft del suelo?

En el siguiente ejemplo, consideramos el agua que sale de un embudo en forma de cono. Comparamos la tasa de disminución del nivel de agua en el cono con la tasa de disminución del volumen de agua.

EJEMPLO 4.4

Drenaje de agua de un embudo

El agua escurre por el fondo de un embudo en forma de cono a una tasa de $0{,}03\text{ ft}^3\text{/s}$. La altura del embudo es de 2 pies y el radio en la parte superior del embudo es 1 ft. ¿A qué tasa cambia la altura del agua en el embudo cuando la altura del agua es $\frac{1}{2}\text{ ft}$?

Solución

Paso 1: Haga un dibujo introduciendo las variables.

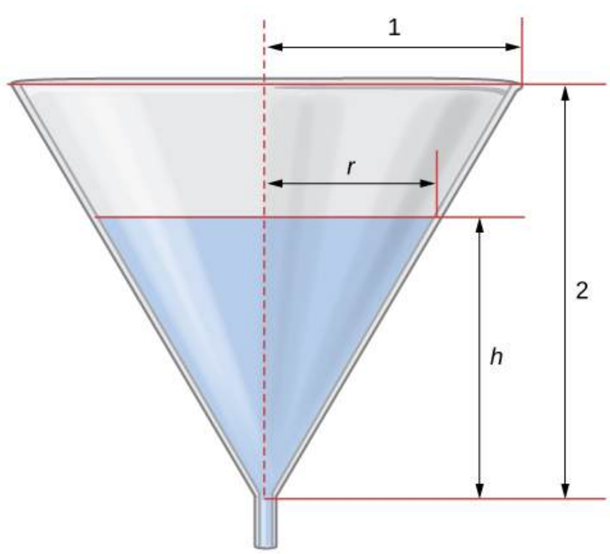


Figura 4.6 El agua sale de un embudo de 2 pies de altura y 1 pie de radio. La altura del agua y el radio del agua

cambian con el tiempo. Denotamos estas cantidades con las variables h y r, respectivamente.

Supongamos que h denota la altura del agua en el embudo, r denota el radio del agua en su superficie y V denota el volumen del agua.

Paso 2: Tenemos que determinar $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = \frac{1}{2}$ ft. Sabemos que $\frac{dV}{dt} = -0{,}03 \text{ ft}^3/\text{s}$.

Paso 3: El volumen de agua en el cono es

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

En la figura, vemos que tenemos triángulos similares. Por lo tanto, la relación de los lados de los dos triángulos es la misma. Por lo tanto, $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$ o $r = \frac{h}{2}$. Utilizando este hecho, la ecuación del volumen puede simplificarse a

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3.$$

Paso 4: Aplicando la regla de la cadena y diferenciando ambos lados de esta ecuación con respecto al tiempo t, obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}.$$

Paso 5: Supongamos que se desea calcular $\frac{dh}{dt}$ cuando $h = \frac{1}{2}$ ft. Como el agua sale a una tasa de $0{,}03 \text{ ft}^3/\text{s}$, sabemos que $\frac{dV}{dt} = -0{,}03 \text{ ft}^3/\text{s}$. Por lo tanto,

$$-0{,}03 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{dh}{dt},$$

lo que implica

$$-0{,}03 = \frac{\pi}{16}\frac{dh}{dt}.$$

De ello se desprende que

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{0{,}48}{\pi} = -0{,}153 \text{ ft/s}.$$

4.4 ¿A qué tasa cambia la altura del agua cuando la altura del agua es $\frac{1}{4}$ ft?

SECCIÓN 4.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule las cantidades para la ecuación dada.

1. Calcule $\frac{dy}{dt}$ en $x = 1$ y $y = x^2 + 3$ si $\frac{dx}{dt} = 4$.

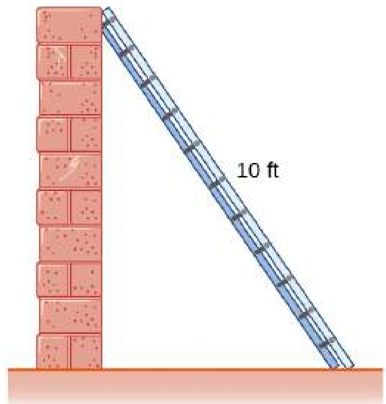
2. Halle $\frac{dx}{dt}$ en $x = -2$ y $y = 2x^2 + 1$ si $\frac{dy}{dt} = -1$.

3. Halle $\frac{dz}{dt}$ en $(x, y) = (1, 3)$ y $z^2 = x^2 + y^2$ si $\frac{dx}{dt} = 4$ y $\frac{dy}{dt} = 3$.

En los siguientes ejercicios, haga un dibujo de la situación si es necesario y utilice las tasas relacionadas para calcular las cantidades.

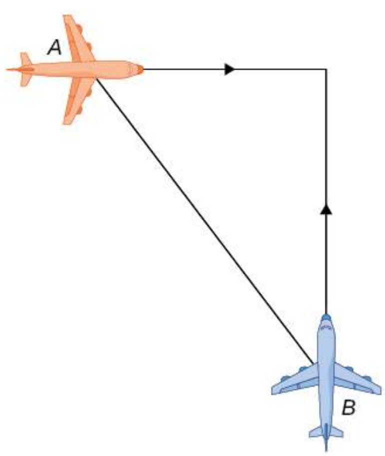
4. **[T]** Si se conectan dos resistores eléctricos en paralelo, la resistencia total (medida en ohmios, denotada por la letra griega mayúscula omega, Ω) está dada por la ecuación $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Si R_1 está aumentando a una tasa de $0{,}5\ \Omega/\text{min}$ y R_2 disminuye a una tasa de $1{,}1\Omega/\text{min}$, ¿a qué tasa cambia la resistencia total cuando $R_1 = 20\Omega$ y $R_2 = 50\Omega$?

5. Una escalera de 10 pies está apoyada en la pared. Si la parte superior de la escalera se desliza por la pared a una tasa de 2 ft/s, ¿a qué velocidad se mueve la parte inferior por el suelo cuando la parte inferior de la escalera está a 5 pies de la pared?



6. Una escalera de 25 pies está apoyada en una pared. Si empujamos la escalera hacia la pared a una velocidad de 1 ft/s, y la parte inferior de la escalera está inicialmente a 20 ft de distancia de la pared, ¿qué tan rápido se mueve la escalera por la pared 5 s después de empezar a empujar?

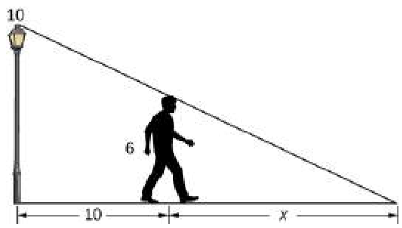
7. Dos aviones están volando en el aire a la misma altura: el avión *A* está volando hacia el este a 250 mi/h y el avión *B* está volando hacia el norte a 300 mi/h. Si ambos se dirigen al mismo aeropuerto, situado a 30 millas al este del avión *A* y a 40 millas al norte del avión *B*, ¿a qué tasa cambia la distancia entre los aviones?



8. Usted y un amigo van en bicicleta a un restaurante que usted cree que está al este; su amigo cree que el restaurante está al norte. Ambos parten del mismo punto, usted circulando a 16 mph al este y su amigo circulando a 12 mph al norte. Después de desplazarse 4 mi, ¿a qué tasa cambia la distancia entre ustedes?

9. Dos autobuses circulan por autopistas paralelas con una separación de 5 mi, uno hacia el este y el otro hacia el oeste. Asumiendo que cada bus conduce una velocidad constante de 55 mph, calcule la tasa a la que cambia la distancia entre los autobuses cuando tienen una separación de 13 mi y están dirigiéndose el uno hacia el otro.

10. Una persona de 6 pies de altura se aleja de un poste de luz de 10 pies a una tasa constante de 3 ft/s. ¿Cuál es la tasa a la que la punta de la sombra se aleja del poste cuando la persona está a 10 ft del poste?



11. Utilizando el problema anterior, ¿cuál es la tasa a la que la punta de la sombra se aleja de la persona cuando esta se encuentra a 10 pies del poste?

12. Una persona de 5 pies de altura camina hacia una pared a una velocidad de 2 ft/s. Un foco se sitúa en el suelo a 40 pies de la pared. ¿Qué tan rápido cambia la altura de la sombra de la persona en la pared cuando esta se encuentra a 10 pies de la misma?

13. Utilizando el problema anterior, ¿cuál es la tasa a la que cambia la sombra cuando la persona está a 10 pies de la pared, si la persona se aleja de la pared a una velocidad de 2 ft/s?

14. Un helicóptero que comienza en el suelo se eleva directamente en el aire a una velocidad de 25 ft/s. Usted está corriendo en el suelo empezando directamente debajo del helicóptero a una tasa de 10 ft/s. Calcule la tasa de cambio de la distancia entre el helicóptero y usted después de 5 segundos.

15. Utilizando el problema anterior, ¿cuál es la tasa a la que cambia la distancia entre usted y el helicóptero cuando este se ha elevado a una altura de 60 pies en el aire, suponiendo que, inicialmente, estaba a 30 pies por encima de usted?

En los siguientes ejercicios, dibuje y marque diagramas para ayudar a resolver los problemas de tasas relacionadas.

16. El lado de un cubo aumenta a una tasa de $\frac{1}{2}$ m/s. Calcule la tasa a la que aumenta el volumen del cubo cuando el lado del cubo es de 4 m.

17. El volumen de un cubo disminuye a una tasa de 10 m^3/s. Calcule la tasa a la que cambia el lado del cubo cuando el lado del cubo es de 2 m.

18. El radio de un círculo aumenta a una tasa de 2 m/s. Calcule la tasa a la que aumenta el área del círculo cuando el radio es de 5 m.

19. El radio de una esfera disminuye a una tasa de 3 m/s. Calcule la tasa a la que disminuye el área superficial cuando el radio es de 10 m.

20. El radio de una esfera aumenta a una tasa de 1 m/s. Calcule la tasa a la que aumenta el volumen cuando el radio es 20 m.

21. El radio de una esfera aumenta a una tasa de 9 cm/s. Calcule el radio de la esfera cuando el volumen y el radio de la esfera aumentan a la misma tasa numérica.

22. La base de un triángulo disminuye a una tasa de 1 cm/min y la altura del triángulo aumenta a una tasa de 5 cm/min. Calcule la tasa a la que cambia el área del triángulo cuando la altura es de 22 cm y la base de 10 cm.

23. Un triángulo tiene dos lados constantes de longitud 3 pies y 5 pies. El ángulo entre estos dos lados aumenta a una tasa de 0,1 rad/s. Calcule la tasa a la que cambia el área del triángulo cuando el ángulo entre los dos lados es $\pi/6$.

24. Un triángulo tiene una altura que aumenta a una tasa de 2 cm/s y su área aumenta a una tasa de 4 cm^2/s. Calcule la tasa a la que cambia la base del triángulo cuando la altura del triángulo es de 4 cm y el área es de 20 cm^2.

En los siguientes ejercicios, considere un cono derecho que pierde agua. Las dimensiones del tanque cónico son una altura de 16 pies y un radio de 5 pies.

25. ¿A qué tasa cambia la profundidad del agua cuando el agua está a 10 pies de altura si el cono pierde agua a una velocidad de 10 ft^3/min?

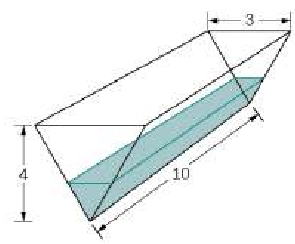
26. Calcule la tasa a la que cambia el área superficial del agua cuando el agua está a 10 pies de altura si el cono pierde agua a una tasa de 10 ft^3/min.

27. Si el nivel del agua disminuye a una tasa de 3 in/min cuando la profundidad del agua es de 8 pies, determine la tasa a la que el agua se escapa del cono.

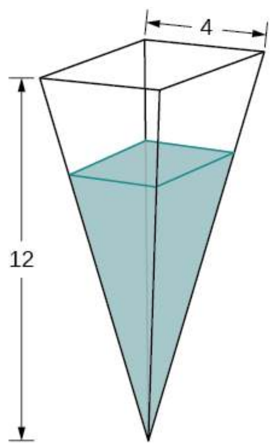
28. Un cilindro vertical pierde agua a una tasa de 1 ft^3/s. Si el cilindro tiene una altura de 10 pies y un radio de 1 pie, ¿a qué tasa cambia la altura del agua cuando la altura es de 6 pies?

29. Un cilindro tiene una fuga de agua, pero usted no puede determinar a qué tasa. El cilindro tiene una altura de 2 m y un radio de 2 m. Calcule la tasa de salida del agua del cilindro si la tasa de disminución de la altura es de 10 cm/min cuando la altura es de 1 m.

30. Un abrevadero tiene los extremos en forma de triángulo isósceles, con un ancho de 3 m y una altura de 4 m, y el abrevadero tiene una longitud de 10 m. El agua se bombea en el abrevadero a una tasa de $5\ \text{m}^3/\text{min}$. ¿A qué tasa cambia la altura del agua cuando el agua tiene 1 m de profundidad?



31. Un tanque tiene forma de pirámide cuadrada invertida, con una base de 4 m por 4 m y una altura de 12 m (vea la siguiente figura). ¿A qué tasa aumenta la altura cuando el agua tiene 2 m de profundidad si se bombea agua a una tasa de $\frac{2}{3}$ m^3/s?



En los siguientes problemas, considere una piscina con forma de la mitad inferior de una esfera, que se está llenando a una tasa de 25 ft^3/min. El radio de la piscina es de 10 pies. La fórmula del volumen de una semiesfera parcial es $V = \frac{\pi h}{6}\left(3r^2 + h^2\right)$ donde h es la altura del agua y r es el radio del agua.

32. Calcule la tasa a la que cambia la profundidad del agua cuando esta tiene una profundidad de 5 pies.

33. Calcule la tasa a la que cambia la profundidad del agua cuando esta tiene una profundidad de 1 pie.

34. Si la altura aumenta a una tasa de 1 in/min cuando la profundidad del agua es de 2 pies, calcule la tasa a la que se está bombeando el agua.

35. Se está descargando grava de un camión y cae en un montón con forma de cono a una tasa de 10 ft^3/min. El radio de la base del cono es tres veces la altura del mismo. Calcule la tasa a la que cambia la altura de la grava cuando el montón tiene una altura de 5 pies.

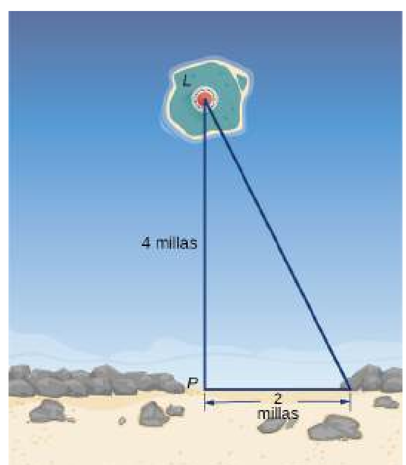
36. Utilizando un planteamiento similar al del problema anterior, calcule la tasa a la que se descarga la grava si la pila tiene 5 pies de altura y la altura aumenta a una tasa de 4 in/min.

En los siguientes ejercicios, dibuje las situaciones y resuelva los problemas de tasas relacionadas.

37. Usted está inmóvil en el suelo y observa cómo un pájaro vuela horizontalmente a una velocidad de 10 m/s. El pájaro se encuentra a 40 m por encima de su cabeza. ¿A qué tasa cambia el ángulo de elevación cuando la distancia horizontal entre usted y el pájaro es de 9 m?

38. Usted se coloca a 40 pies de un cohete de botella en el suelo y observa cómo despega verticalmente en el aire a una tasa de 20 ft/s. Calcule la tasa a la que cambia el ángulo de elevación cuando el cohete está a 30 pies en el aire.

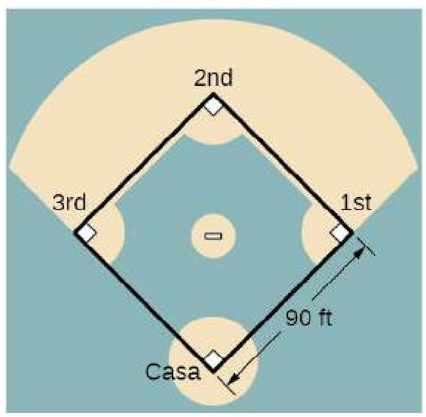
39. Un faro, *L*, se encuentra en una isla a 4 millas de distancia del punto más cercano, *P*, en la playa (vea la siguiente imagen). Si la luz del faro gira en el sentido de las agujas del reloj a una tasa constante de 10 revoluciones/min, ¿a qué tasa se desplaza el haz de luz por la playa a 2 millas del punto más cercano de la playa?



40. Utilizando el mismo planteamiento que en el problema anterior, determine a qué tasa se desplaza el haz de luz a través de la playa a 1 milla de distancia del punto más cercano de la playa.

41. Usted va caminando hacia una parada de autobús en una esquina en ángulo recto. Usted se mueve hacia el norte a una velocidad de 2 m/s y está a 20 metros al sur de la intersección. El autobús se desplaza hacia el oeste a una velocidad de 10 m/s alejándose de la intersección: ¡ha perdido el autobús! ¿Cuál es la tasa a la que cambia el ángulo entre usted y el autobús cuando usted está a 20 metros al sur de la intersección y el autobús está a 10 metros al oeste de la misma?

En los siguientes ejercicios, consulte la figura del diamante de béisbol, que tiene lados de 90 pies.



42. **[T]** Un bateador golpea una pelota hacia la tercera base a 75 ft/s y corre hacia la primera base a una tasa de 24 ft/s. ¿A qué tasa cambia la distancia entre la pelota y el bateador cuando han pasado 2 segundos?

43. **[T]** Un bateador golpea una pelota hacia la segunda base a 80 ft/s y corre hacia la primera base a una tasa de 30 ft/s. ¿A qué tasa cambia la distancia entre la pelota y el bateador cuando el corredor ha recorrido un tercio de la distancia hasta la primera base? (*Pista*: Recordemos la ley de los cosenos).

44. **[T]** Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base a una velocidad de 22 ft/s. ¿A qué tasa cambia la distancia entre el corredor y la segunda base cuando el corredor ha corrido 30 pies?

45. **[T]** Los corredores comienzan en primera y segunda base. Cuando se batea la pelota, el corredor de la primera base corre a una velocidad de 18 ft/s hacia la segunda base y el corredor de la segunda base corre a una velocidad de 20 ft/s hacia la tercera base. ¿A qué tasa cambia la distancia entre los corredores 1 segundo después de que se golpee la pelota?

4.2 Aproximaciones lineales y diferenciales

Objetivos de aprendizaje

4.2.1 Describir la aproximación lineal a una función en un punto.
4.2.2 Escribir la linealización de una función dada.
4.2.3 Dibujar un gráfico que ilustre el uso de diferenciales para aproximar el cambio de una cantidad.
4.2.4 Calcular el error relativo y el error porcentual al utilizar una aproximación diferencial.

Acabamos de ver cómo las derivadas nos permiten comparar cantidades relacionadas que cambian con el tiempo. En esta sección, examinamos otra aplicación de las derivadas: la capacidad de aproximar funciones localmente mediante funciones lineales. Las funciones lineales son las más fáciles de trabajar, por lo que constituyen una herramienta útil para aproximar los valores de las funciones. Además, las ideas presentadas en esta sección se generalizan más adelante en el texto cuando estudiamos cómo aproximar funciones mediante polinomios de mayor grado Introducción a las series de potencias y funciones (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-2/pages/6-introduccion).

Aproximación lineal de una función en un punto

Considere una función f que es diferenciable en un punto $x = a$. Recordemos que la línea tangente al gráfico de f en a está dada por la ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x – a).$$

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 2$. Dado que f es diferenciable en $x = 2$ y $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, vemos que $f'(2) = -\frac{1}{4}$. Por tanto, la línea tangente al gráfico de f en $a = 2$ está dada por la ecuación

$$y = \frac{1}{2} – \frac{1}{4}(x - 2).$$

Figura 4.7(a) muestra un gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ junto con la línea tangente a f en $x = 2$. Tenga en cuenta que para x cerca de 2, el gráfico de la línea tangente se acerca al gráfico de f. Como resultado, podemos utilizar la ecuación de la línea tangente para aproximar $f(x)$ para x cerca de 2. Por ejemplo, si $x = 2{,}1$, la columna y del punto correspondiente en la línea tangente es

$$y = \frac{1}{2} – \frac{1}{4}(2{,}1 - 2) = 0{,}475.$$

El valor real de $f(2{,}1)$ está dada por

$$f(2{,}1) = \frac{1}{2{,}1} \approx 0{,}47619.$$

Por lo tanto, la línea tangente nos da una aproximación bastante buena de $f(2{,}1)$ (Figura 4.7(b)). Sin embargo, hay que tener en cuenta que para los valores de x lejos de 2, la ecuación de la línea tangente no nos da una buena aproximación. Por ejemplo, si $x = 10$, la columna y del punto correspondiente en la línea tangente es

$$y = \frac{1}{2} – \frac{1}{4}(10 - 2) = \frac{1}{2} - 2 = -1{,}5,$$

mientras que el valor de la función en $x = 10$ es $f(10) = 0{,}1$.

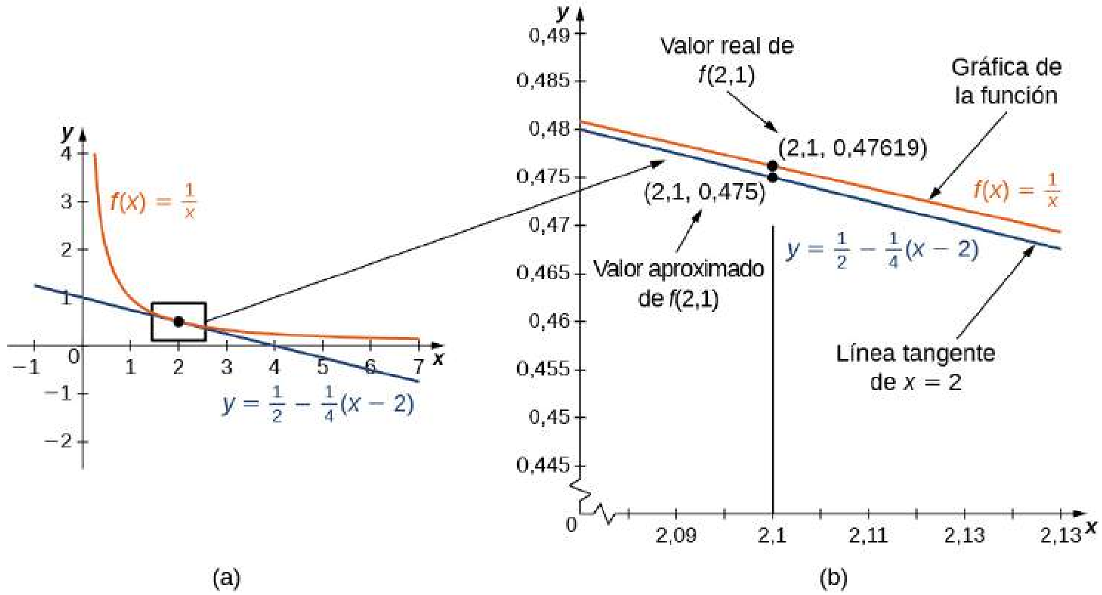


Figura 4.7 (a) La línea tangente a $f(x) = 1/x$ en $x = 2$ proporciona una buena aproximación a f para x cerca de 2. (b) En $x = 2{,}1$, el valor de y en la línea tangente a $f(x) = 1/x$ es 0,475. El valor real de $f(2{,}1)$ es $1/2{,}1$, que es aproximadamente 0,47619.

En general, para una función diferenciable f, la ecuación de la línea tangente a f en $x = a$ se puede utilizar para aproximar $f(x)$ para x cerca de a. Por lo tanto, podemos escribir

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \text{ para } x \text{ cerca de } a.$$

Llamamos función lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{4.1}$$

a la **aproximación lineal**, o **aproximación de la línea tangente**, de f en $x = a$. Esta función L también se conoce como la **linealización** de f en $x = a$.

Para mostrar lo útil que puede ser la aproximación lineal, veremos cómo encontrar la aproximación lineal para $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 9$.

EJEMPLO 4.5

Aproximación lineal de $\sqrt{x}$

Calcule la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 9$ y utilice la aproximación para estimar $\sqrt{9{,}1}$.

Solución

Dado que buscamos la aproximación lineal a $x = 9$, utilizando la Ecuación 4.1 sabemos que la aproximación lineal está dada por

$$L(x) = f(9) + f'(9)(x - 9).$$

Debemos hallar $f(9)$ y $f'(9)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} &\Rightarrow\quad f(9) &= \sqrt{9} = 3 \\ f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} &\Rightarrow\quad f'(9) &= \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por tanto, la aproximación lineal está dada por la Figura 4.8.

$$L(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9)$$

Utilizando la aproximación lineal, podemos estimar $\sqrt{9{,}1}$ escribiendo

$$\sqrt{9{,}1} = f(9{,}1) \approx L(9{,}1) = 3 + \frac{1}{6}(9{,}1 - 9) \approx 3{,}0167.$$

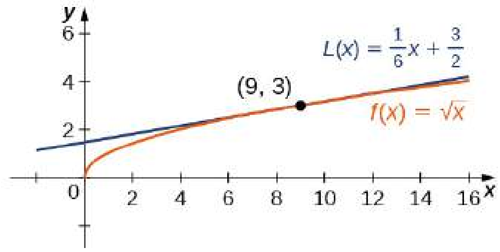


Figura 4.8 La aproximación lineal local a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 9$ proporciona una aproximación a f para x cerca de 9.

Análisis

Utilizando una calculadora, el valor de $\sqrt{9{,}1}$ con cuatro decimales es 3,0166. El valor dado por la aproximación lineal, 3,0167, es muy cercano al valor obtenido con la calculadora, por lo que parece que utilizar esta aproximación lineal es una buena forma de estimar $\sqrt{x}$, al menos para x cerca de 9. Al mismo tiempo, puede parecer extraño utilizar una aproximación lineal cuando podemos simplemente pulsar unos cuantos botones en una calculadora para evaluar $\sqrt{9{,}1}$. Sin embargo, ¿cómo evalúa la calculadora $\sqrt{9{,}1}$? ¡La calculadora utiliza una aproximación! De hecho, las calculadoras y las computadoras utilizan aproximaciones todo el tiempo para evaluar expresiones matemáticas; solo que utilizan aproximaciones de mayor grado.

4.5 Calcule la aproximación lineal local a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 8$. Utilícela para aproximar $\sqrt[3]{8{,}1}$ con cinco decimales.

EJEMPLO 4.6

Aproximación lineal de $\operatorname{sen} x$

Calcule la aproximación lineal de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = \frac{\pi}{3}$ y utilícela para aproximar $\operatorname{sen}(62°)$.

Solución

En primer lugar, observamos que, dado que $\frac{\pi}{3}$ rad equivale a $60°$, utilizando la aproximación lineal a $x = \pi/3$ parece razonable. La aproximación lineal está dada por

$$L(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Vemos que

$$\begin{aligned} f(x) = \operatorname{sen} x \quad &\Rightarrow \quad f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ f'(x) = \cos x \quad &\Rightarrow \quad f'\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aproximación lineal de f en $x = \pi/3$ está dada por la Figura 4.9.

$$L(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Para estimar $\operatorname{sen}(62°)$ utilizando L, primero debemos convertir $62°$ a radianes. Tenemos $62° = \frac{62\pi}{180}$ radianes, por lo que la estimación de $\operatorname{sen}(62°)$ está dada por

$$\operatorname{sen}(62°) = f\left(\frac{62\pi}{180}\right) \approx L\left(\frac{62\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{62\pi}{180} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180} \approx 0{,}88348.$$

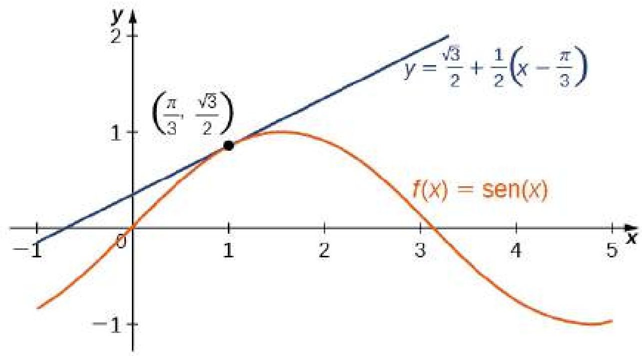


Figura 4.9 La aproximación lineal a $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $x = \pi/3$ proporciona una aproximación a $\operatorname{sen} x$ para x cerca de $\pi/3$.

4.6 Calcule la aproximación lineal para $f(x) = \cos x$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

Se pueden utilizar aproximaciones lineales para estimar raíces y potencias. En el siguiente ejemplo, calculamos la aproximación lineal para $f(x) = (1 + x)^n$ en $x = 0$, que puede utilizarse para estimar raíces y potencias para números reales cercanos a 1. La misma idea puede extenderse a una función de la forma $f(x) = (m + x)^n$ para estimar raíces y potencias cerca de un número diferente m.

EJEMPLO 4.7

Aproximación de raíces y potencias

Calcule la aproximación lineal de $f(x) = (1 + x)^n$ en $x = 0$. Utilice esta aproximación para estimar $(1{,}01)^3$.

Solución

La aproximación lineal a $x = 0$ está dada por

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0).$$

Dado que

$$\begin{aligned} f(x) = (1 + x)^n \quad &\Rightarrow \quad f(0) = 1 \\ f'(x) = n(1 + x)^{n-1} \quad &\Rightarrow \quad f'(0) = n, \end{aligned}$$

la aproximación lineal está dada por la Figura 4.10(a).

$$L(x) = 1 + n(x - 0) = 1 + nx$$

Podemos aproximar $(1{,}01)^3$ evaluando $L(0{,}01)$ cuando n n $= 3$. Concluimos que

$$(1{,}01)^3 = f(1{,}01) \approx L(1{,}01) = 1 + 3(0{,}01) = 1{,}03.$$

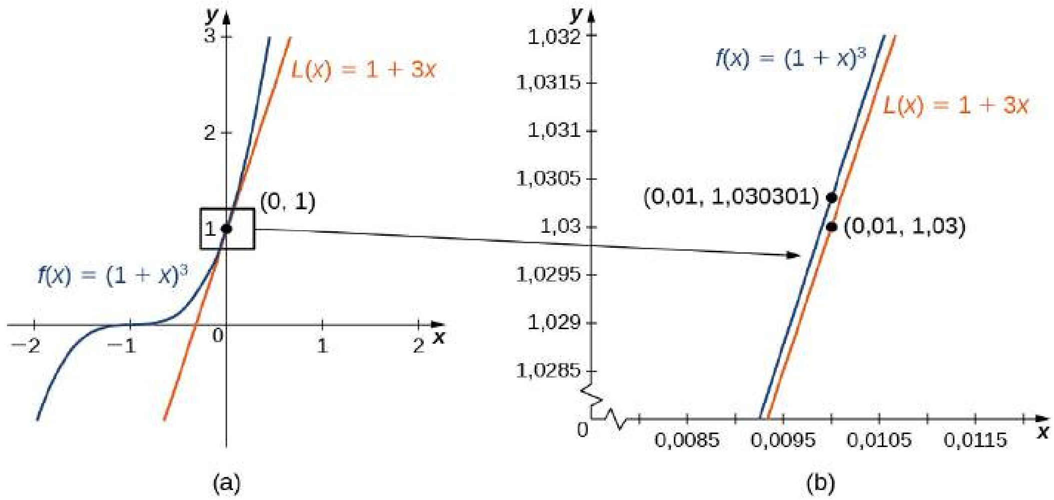


Figura 4.10 (a) La aproximación lineal de $f(x)$ en $x = 0$ es $L(x)$. (b) El valor real de $1{,}01^3$ es 1,030301. La aproximación lineal de $f(x)$ en $x = 0$ estima que $1{,}01^3$ sea 1,03.

4.7 Calcule la aproximación lineal de $f(x) = (1 + x)^4$ en $x = 0$ sin utilizar el resultado del ejemplo anterior.

Diferenciales

Hemos visto que se pueden utilizar aproximaciones lineales para estimar los valores de las funciones. También pueden utilizarse para estimar la cantidad de cambios en el valor de una función como resultado de un pequeño cambio en la entrada. Para discutir esto más formalmente, definimos un concepto relacionado: los **diferenciales**. Los diferenciales nos proporcionan una forma de estimar la cantidad que cambia una función como resultado de un pequeño cambio en los valores de entrada.

La primera vez que vimos las derivadas, utilizamos la notación de Leibniz dy/dx para representar la derivada de y con respecto a x. Aunque utilizamos las expresiones *dy* y *dx* en esta notación, no tienen significado por sí mismas. Aquí vemos el significado de las expresiones *dy* y *dx*. Supongamos que $y = f(x)$ es una función diferenciable. Supongamos que *dx* es una variable independiente a la que se le puede asignar cualquier número real distinto de cero y defina la variable dependiente dy mediante

$$dy = f'(x)dx. \tag{4.2}$$

Es importante tener en cuenta que dy es una función de ambas x y dx. Las expresiones *dy* y *dx* se llaman *diferenciales*. Podemos dividir ambos lados de la Ecuación 4.2 entre dx, que da como resultado

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{4.3}$$

Esta es la expresión familiar que hemos utilizado para denotar una derivada. La Ecuación 4.2 se conoce como la **forma diferencial** de la Ecuación 4.3.

EJEMPLO 4.8

Cálculo de los diferenciales

Para cada una de las siguientes funciones, calcule *dy* y evalúe cuando $x = 3$ y $dx = 0{,}1$.

a. $y = x^2 + 2x$
b. $y = \cos x$

Solución

El paso clave es el cálculo de la derivada. Cuando tengamos eso, podremos obtener *dy* directamente.

a. Dado que $f(x) = x^2 + 2x$, sabemos que $f'(x) = 2x + 2$, y por lo tanto
$$dy = (2x + 2)dx.$$

Cuando $x = 3$ y $dx = 0{,}1$,

$$dy = (2.\,3 + 2)(0{,}1) = 0{,}8.$$

b. Dado que $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\text{sen}(x)$. Esto nos da

$$dy = -\text{sen}\,x\,dx.$$

Cuando $x = 3$ y $dx = 0{,}1$,

$$dy = -\text{sen}(3)(0{,}1) = -0{,}1\,\text{sen}(3).$$

4.8 Para $y = e^{x^2}$, calcule dy.

Ahora conectamos los diferenciales con las aproximaciones lineales. Los diferenciales pueden utilizarse para estimar el cambio en el valor de una función resultante de un pequeño cambio en los valores de entrada. Considere una función f que es diferenciable en el punto a. Supongamos que la entrada x cambia por una pequeña cantidad. Nos interesa saber en qué medida la salida y cambia. Si los valores de x cambia de a a $a + dx$, entonces el cambio en x es dx (también denominado Δx), y el cambio en y está dada por

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

En vez de calcular el cambio exacto en y, sin embargo, a menudo es más fácil aproximar el cambio en y utilizando una aproximación lineal. Para x cerca de a, $f(x)$ se puede aproximar mediante la aproximación lineal

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Por lo tanto, si dx es pequeña,

$$f(a + dx) \approx L(a + dx) = f(a) + f'(a)(a + dx - a).$$

Eso es,

$$f(a + dx) - f(a) \approx L(a + dx) - f(a) = f'(a)dx.$$

En otras palabras, el cambio real de la función f si x aumenta de a a $a + dx$ es aproximadamente la diferencia entre $L(a + dx)$ y $f(a)$, donde $L(x)$ es la aproximación lineal de f en a. Por definición de $L(x)$, esta diferencia es igual a $f'(a)dx$. En resumen,

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a) \approx L(a + dx) - f(a) = f'(a)dx = dy.$$

Por lo tanto, podemos utilizar el diferencial $dy = f'(a)dx$ para aproximar el cambio en y si x aumenta de $x = a$ a $x = a + dx$. Podemos verlo en el siguiente gráfico.

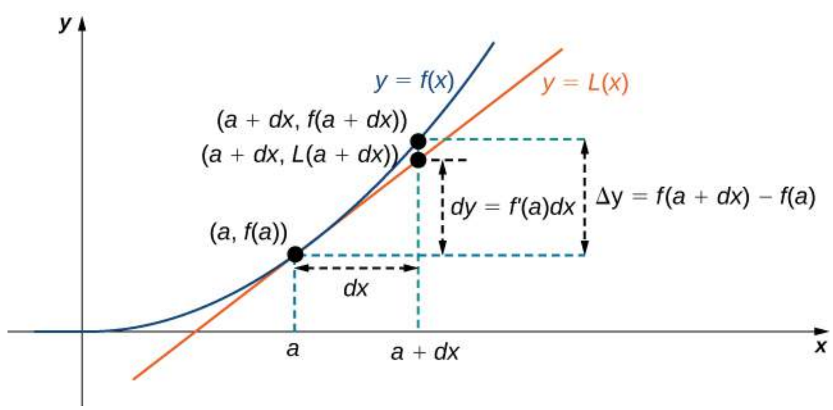


Figura 4.11 El diferencial $dy = f'(a)dx$ se utiliza para aproximar el cambio real en y si x aumenta de a a $a + dx$.

Ahora veremos cómo utilizar los diferenciales para aproximar el cambio en el valor de la función que resulta de un pequeño cambio en el valor de la entrada. Observe que el cálculo con diferenciales es mucho más sencillo que el cálculo de los valores reales de las funciones y el resultado se aproxima mucho a lo que obtendríamos con el cálculo más exacto.

EJEMPLO 4.9

Aproximación del cambio con diferenciales

Supongamos que $y = x^2 + 2x$. Calcule Δy y *dy* en $x = 3$ si $dx = 0{,}1$.

Solución

El cambio real en y si x cambia de $x = 3$ a $x = 3{,}1$ está dada por

$$\Delta y = f(3{,}1) - f(3) = [(3{,}1)^2 + 2(3{,}1)] - [3^2 + 2(3)] = 0{,}81.$$

El cambio aproximado en y está dado por $dy = f'(3)dx$. Dado que $f'(x) = 2x + 2$, tenemos

$$dy = f'(3)dx = (2(3) + 2)(0{,}1) = 0{,}8.$$

4.9 Para $y = x^2 + 2x$, calcule Δy y dy en $x = 3$ si $dx = 0{,}2$.

Cálculo del grado de error

Cualquier tipo de medición es propensa a un cierto grado de error. En muchas aplicaciones, ciertas cantidades se calculan a partir de mediciones. Por ejemplo, el área de un círculo se calcula midiendo el radio del mismo. Un error en la medición del radio conduce a un error en el valor calculado del área. Aquí examinamos este tipo de error y estudiamos cómo se pueden utilizar los diferenciales para estimar el error.

Considere una función f con una entrada que es una cantidad medida. Supongamos que el valor exacto de la cantidad medida es a, pero el valor medido es $a + dx$. Decimos que el error de medición es *dx* (o Δx). Como resultado, se produce un error en la cantidad calculada $f(x)$. Este tipo de error se conoce como **error propagado** y está dado por

$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$

Dado que todas las mediciones están sujetas a cierto grado de error, no conocemos el valor exacto de una cantidad medida, por lo que no podemos calcular el error propagado con exactitud. Sin embargo, dada una estimación de la exactitud de una medición, podemos utilizar diferenciales para aproximar el error propagado Δy. En concreto, si f es una función diferenciable en a, el error propagado es

$$\Delta y \approx dy = f'(a)dx.$$

Lamentablemente, no conocemos el valor exacto a. Sin embargo, podemos utilizar el valor medido $a + dx$, y estimar

$$\Delta y \approx dy \approx f'(a + dx)dx.$$

En el siguiente ejemplo, veremos cómo se pueden utilizar los diferenciales para estimar el error en el cálculo del volumen de una caja si suponemos que la medición de la longitud del lado se hace con cierta exactitud.

EJEMPLO 4.10

Volumen de un cubo

Supongamos que la longitud lateral de un cubo se mide en 5 cm con una exactitud de 0,1 cm.

a. Utilice los diferenciales para estimar el error en el volumen calculado del cubo.
b. Calcule el volumen del cubo si la longitud del lado es (i) 4,9 cm y (ii) 5,1 cm para comparar el error estimado con el posible error real.

Solución

a. La medición de la longitud del lado tiene una exactitud de $\pm 0{,}1$ cm. Por lo tanto,

$$-0{,}1 \le dx \le 0{,}1.$$

El volumen de un cubo está dado por $V = x^3$, que lleva a

$$dV = 3x^2 dx.$$

Utilizando la longitud del lado medida de 5 cm, podemos estimar que

$$-3(5)^2(0{,}1) \le dV \le 3(5)^2(0{,}1).$$

Por lo tanto,

$$-7{,}5 \le dV \le 7{,}5.$$

b. Si la longitud del lado es realmente de 4,9 cm, entonces el volumen del cubo es

$$V(4{,}9) = (4{,}9)^3 = 117{,}649 \text{ cm}^3.$$

Si la longitud del lado es realmente de 5,1 cm, entonces el volumen del cubo es

$$V(5{,}1) = (5{,}1)^3 = 132{,}651 \text{ cm}^3.$$

Por lo tanto, el volumen real del cubo está entre 117,649 y 132,651. Como la longitud del lado se mide en 5 cm, el volumen calculado es $V(5) = 5^3 = 125$. Por lo tanto, el error en el volumen calculado es

$$117{,}649 - 125 \le \Delta V \le 132{,}651 - 125.$$

Eso es,

$$-7{,}351 \le \Delta V \le 7{,}651.$$

Vemos que el error estimado dV está relativamente cerca del posible error real en el volumen calculado.

4.10 Estime el error en el volumen calculado de un cubo si la longitud del lado se mide en 6 cm con una exactitud de 0,2 cm.

El error de medición *dx* $(=\Delta x)$ y el error propagado Δy son errores absolutos. Normalmente nos interesa el tamaño de un error en relación con el tamaño de la cantidad que se mide o calcula. Dado un error absoluto Δq para una determinada cantidad, definimos el **error relativo** como $\frac{\Delta q}{q}$, donde q es el valor real de la cantidad. El **error porcentual** es el error relativo expresado en porcentaje. Por ejemplo, si medimos que la altura de una escalera es de 63 pulgadas cuando la altura real es de 62 pulgadas, el error absoluto es de 1 pulgada pero el error relativo es de $\frac{1}{62} = 0{,}016$, o $1{,}6\ \%$. En comparación, si medimos el ancho de un trozo de cartón como 8,25 in cuando el ancho real es de 8 in, nuestro error absoluto es $\frac{1}{4}$ in, mientras que el error relativo es $\frac{0{,}25}{8} = \frac{1}{32}$, o $3{,}1\ \%$. Por lo tanto, el error porcentual en la medición del cartón es mayor, aunque 0,25 in es menos que 1 in.

EJEMPLO 4.11

Error relativo y porcentual

Un astronauta que utiliza una cámara mide el radio de la Tierra como 4.000 mi con un error de ± 80 mi. Utilicemos los diferenciales para estimar el error relativo y porcentual de utilizar esta medida del radio para calcular el volumen de la Tierra, suponiendo que el planeta es una esfera perfecta.

Solución

Si la medición del radio es exacta con una exactitud de ± 80, tenemos

$$-80 \le dr \le 80.$$

Como el volumen de una esfera está dado por $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$, tenemos

$$dV = 4\pi r^2 dr.$$

Usando el radio medido de 4.000 millas, podemos estimar

$$-4\pi(4{,}000)^2(80) \le dV \le 4\pi(4{,}000)^2(80).$$

Para estimar el error relativo, considere $\frac{dV}{V}$. Como no conocemos el valor exacto del volumen V, utilice el radio medido $r = 4.000$ mi para estimar V. Obtenemos $V \approx \left(\frac{4}{3}\right)\pi(4{,}000)^3$. Por lo tanto, el error relativo satisface

$$\frac{-4\pi(4{,}000)^2(80)}{4\pi(4{,}000)^3/3} \le \frac{dV}{V} \le \frac{4\pi(4{,}000)^2(80)}{4\pi(4{,}000)^3/3},$$

que se simplifica a

$$-0{,}06 \leq \frac{dV}{V} \leq 0{,}06.$$

El error relativo es de 0,06 y el error porcentual es de $6\ \%$.

4.11 Determine el error porcentual si el radio de la Tierra se mide como 3.950 mi con un error de ± 100 mi.

SECCIÓN 4.2 EJERCICIOS

46. Cuál es la aproximación lineal para cualquier función lineal genérica $y = mx + b$?

47. Determine las condiciones necesarias para que la función de aproximación lineal sea constante. Utilice un gráfico para demostrar su resultado.

48. Explique por qué la aproximación lineal es menos precisa a medida que aumenta la distancia entre x y a. Utilice un gráfico para demostrar su argumento.

49. ¿Cuándo es exacta la aproximación lineal?

En los siguientes ejercicios, calcule la aproximación lineal $L(x)$ a $y = f(x)$ cerca de $x = a$ para la función.

50. $f(x) = x + x^4, a = 0$

51. $f(x) = \frac{1}{x}, a = 2$

52. $f(x) = \tan x, a = \frac{\pi}{4}$

53. $f(x) = \operatorname{sen} x, a = \frac{\pi}{2}$

54. $f(x) = x \operatorname{sen} x, a = 2\pi$

55. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x, a = 0$

En los siguientes ejercicios, calcule los valores dados dentro de 0,01 decidiendo la $f(x)$ y a adecuados, y evaluando $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Compruebe su respuesta con una calculadora.

56. **[T]** $(2{,}001)^6$

57. **[T]** $\operatorname{sen}(0{,}02)$

58. **[T]** $\cos(0{,}03)$

59. **[T]** $(15{,}99)^{1/4}$

60. **[T]** $\frac{1}{0{,}98}$

61. **[T]** $\operatorname{sen}(3{,}14)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, determine $f(x)$ y a, y evalúe $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Calcule el error numérico en las siguientes aproximaciones lineales.

62. **[T]** $(1{,}01)^3$

63. **[T]** $\cos(0{,}01)$ grandes.

64. **[T]** $(\operatorname{sen}(0{,}01))^2$

65. **[T]** $(1{,}01)^{-3}$

66. **[T]** $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10}$

67. **[T]** $\sqrt{8{,}99}$

En los siguientes ejercicios, calcule el diferencial de la función.

68. $y = 3x^4 + x^2 - 2x + 1$

69. $y = x \cos x$

70. $y = \sqrt{1 + x}$

71. $y = \frac{x^2+2}{x-1}$

En los siguientes ejercicios, calcule el diferencial y evalúe para x y dx.

72. $y = 3x^2 - x + 6$, $x = 2$, $dx = 0{,}1$

73. $y = \frac{1}{x+1}$, $x = 1$, $dx = 0{,}25$

74. $y = \tan x$, $x = 0$, $dx = \frac{\pi}{10}$

75. $y = \frac{3x^2+2}{\sqrt{x+1}}$, $x = 0$, $dx = 0{,}1$

76. $y = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$, $x = \pi$, $dx = 0{,}25$

77. $y = x^3 + 2x + \frac{1}{x}$, $x = 1$, $dx = 0{,}05$

En los siguientes ejercicios, calcule el cambio de volumen dV o en área superficial dA.

78. dV si los lados de un cubo cambian de 10 a 10,1.

79. dA si los lados de un cubo cambian de x a $x + dx$.

80. dA si el radio de una esfera cambia de r mediante dr.

81. dV si el radio de una esfera cambia de r mediante dr.

82. dV si un cilindro circular con $r = 2$ cambia la altura de 3 cm a $3{,}05$ cm.

83. dV si un cilindro circular de altura 3 pasa de $r = 2$ a $r = 1{,}9$ cm.

En los siguientes ejercicios, utilice los diferenciales para estimar el error máximo y relativo al calcular el área superficial o el volumen.

84. Se mide que el radio de una pelota de golf esférica es de 5 mm, con un posible error de medición de $0{,}1$ mm. ¿Cuál es el cambio posible de volumen?

85. Una piscina tiene una base rectangular de 10 pies por 20 pies y una profundidad de 6 pies. ¿Cuál es el cambio de volumen si solo se llena hasta 5,5 pies?

86. Un cono de helado tiene una altura de 4 pulgadas y un radio de 1 pulgada. Si el cono tiene un grosor de 0,1 pulgadas, ¿cuál es la diferencia entre el volumen del cono, incluida la cáscara, y el volumen del helado que puede caber dentro de la cáscara?

En los siguientes ejercicios, confirme las aproximaciones utilizando la aproximación lineal en $x = 0$.

87. $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

88. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1$

89. $\sqrt{c^2 + x^2} \approx c$

4.3 Máximos y mínimos

Objetivos de aprendizaje

- **4.3.1** Definir los extremos absolutos.
- **4.3.2** Definir los extremos locales.
- **4.3.3** Explicar cómo encontrar los puntos críticos de una función en un intervalo cerrado.
- **4.3.4** Describir cómo utilizar los puntos críticos para localizar los extremos absolutos en un intervalo cerrado.

Dada una función concreta, con frecuencia nos interesa determinar los valores más grandes y más pequeños de la función. Esta información es importante para crear gráficos precisos. Encontrar los valores máximos y mínimos de una función también tiene importancia práctica porque podemos utilizar este método para resolver problemas de optimización, como maximizar el beneficio, minimizar la cantidad de material utilizado en la fabricación de una lata de aluminio o encontrar la altura máxima que puede alcanzar un cohete. En esta sección, veremos cómo utilizar las derivadas para encontrar los valores mayores y menores de una función.

Extremos absolutos

Considere la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Dado que $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \infty$. Por lo tanto, la función no tiene un mayor valor. Sin embargo, como $x^2 + 1 \geq 1$ para todos los números reales x y $x^2 + 1 = 1$ cuando $x = 0$, la función tiene un valor mínimo, 1, cuando $x = 0$. Decimos que 1 es el mínimo absoluto de $f(x) = x^2 + 1$ y se produce en $x = 0$. Decimos que $f(x) = x^2 + 1$ no tiene un máximo absoluto (vea la siguiente figura).

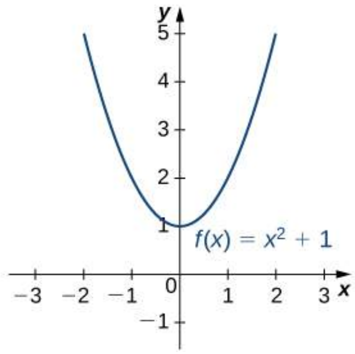


Figura 4.12 La función dada tiene un mínimo absoluto de 1 en $x = 0$. La función no tiene un máximo absoluto.

Definición

Supongamos que f es una función definida en un intervalo I y supongamos que $c \in I$. Decimos f tiene un **máximo absoluto** en I a las c si $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Decimos f tiene un **mínimo absoluto** en I a las c si $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Si f tiene un máximo absoluto en I a las c o un mínimo absoluto en I a las c, decimos f tiene un **extremo absoluto** en I a las c.

Antes de continuar, señalemos dos cuestiones importantes con respecto a esta definición. En primer lugar, el término *absoluto* aquí no se refiere al valor absoluto. Un extremo absoluto puede ser positivo, negativo o cero. En segundo lugar, si una función f tiene un extremo absoluto en un intervalo I a las c, el extremo absoluto es $f(c)$. El número real c es un punto del dominio en el que se produce el extremo absoluto. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Dado que

$$f(0) = 1 \geq \frac{1}{x^2 + 1} = f(x)$$

para todos los números reales x, decimos f tiene un máximo absoluto sobre $(-\infty, \infty)$ en $x = 0$. El máximo absoluto es $f(0) = 1$. Se produce en $x = 0$, como se muestra en la Figura 4.13(b).

Una función puede tener tanto un máximo como un mínimo absoluto, solo un extremo, o ninguno. La Figura 4.13 muestra varias funciones y algunas de las distintas posibilidades con respecto a los extremos absolutos. Sin embargo, el siguiente teorema, llamado **teorema del valor extremo**, garantiza que una función continua f en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ tiene un máximo y un mínimo absolutos.

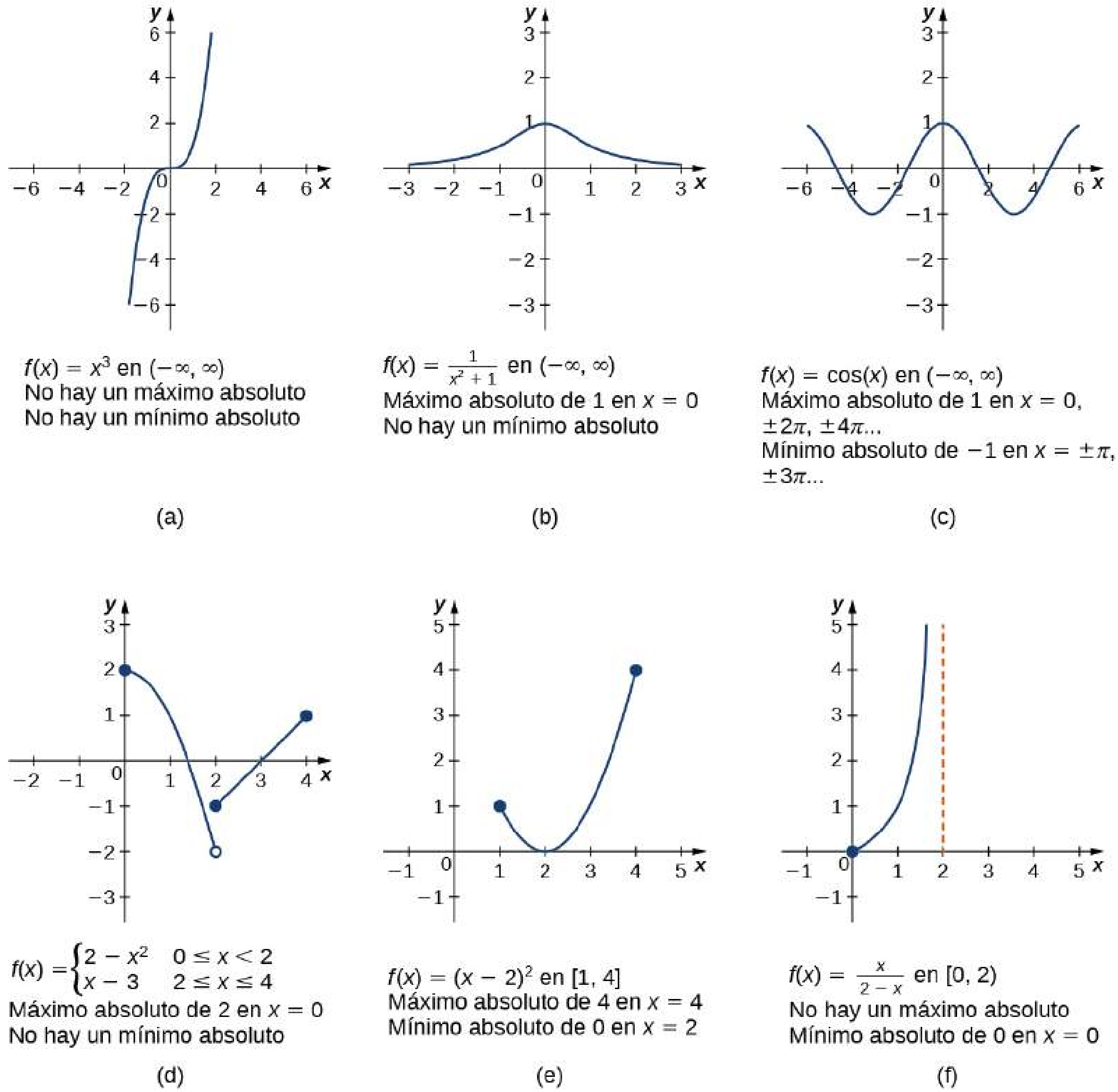


Figura 4.13 Los gráficos (a), (b) y (c) muestran varias posibilidades de extremos absolutos para funciones con un dominio de $(-\infty, \infty)$. Los gráficos (d), (e) y (f) muestran varias posibilidades de extremos absolutos para funciones con un dominio que es un intervalo acotado.

Teorema 4.1

Teorema del valor extremo

Si los valores de f es una función continua sobre el intervalo cerrado y delimitado $[a, b]$, entonces hay un punto en $[a, b]$ en los que f tiene un máximo absoluto sobre $[a, b]$ y hay un punto en $[a, b]$ en los que f tiene un mínimo absoluto en $[a, b]$.

La demostración del teorema del valor extremo está fuera del alcance de este texto. Normalmente, se demuestra en un curso de análisis real. Hay un par de puntos clave a tener en cuenta sobre el enunciado de este teorema. Para que se aplique el teorema del valor extremo, la función debe ser continua en un intervalo cerrado y acotado. Si el intervalo I es abierto o la función tiene incluso un punto de discontinuidad, la función no puede tener un máximo absoluto o un mínimo absoluto en I. Por ejemplo, considere las funciones mostradas en la Figura 4.13(d), (e) y (f). Estas tres funciones están definidas en intervalos acotados. Sin embargo, la función del gráfico (e) es la única que tiene tanto un máximo como un mínimo absoluto en su dominio. El teorema del valor extremo no puede aplicarse a las funciones de los gráficos (d) y (f) porque ninguna de estas funciones es continua en un intervalo cerrado y acotado. Aunque la función del gráfico (d) está definida en el intervalo cerrado $[0, 4]$, la función es discontinua en $x = 2$. La función tiene un máximo absoluto en $[0, 4]$ pero no tiene un mínimo absoluto. La función en el gráfico (f) es continua en el intervalo semiabierto $[0, 2)$, pero no se define en $x = 2$, y, por tanto, no es continua en un intervalo cerrado y acotado. La función tiene un mínimo absoluto en $[0, 2)$, pero no tiene un máximo absoluto en $[0, 2)$. Estos dos gráficos ilustran por qué una función en un intervalo acotado puede no tener un máximo o un mínimo absoluto.

Antes de ver cómo encontrar los extremos absolutos, vamos a examinar el concepto relacionado de extremos locales. Esta idea es útil para determinar dónde se producen los extremos absolutos.

Extremos locales y puntos críticos

Considere la función f se muestra en la Figura 4.14. El gráfico puede describirse como dos montañas con un valle en el centro. El valor máximo absoluto de la función se produce en el pico más alto, en $x = 2$. Sin embargo, el que $x = 0$ es también un punto de interés. Aunque $f(0)$ no es el mayor valor de f, el valor $f(0)$ es mayor que $f(x)$ para todo x cerca de 0. Decimos que f tiene un máximo local en $x = 0$. Del mismo modo, la función f no tiene un mínimo absoluto, pero sí un mínimo local en $x = 1$ porque $f(1)$ es menor que $f(x)$ para x cerca de 1.

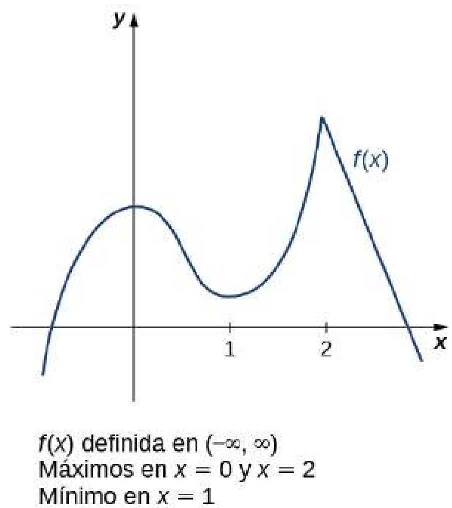


Figura 4.14 Esta función f tiene dos máximos y un mínimo locales. El máximo local en $x = 2$ es también el máximo absoluto.

Definición

Una función f tiene un **máximo** local en c si existe un intervalo abierto I que contiene c de manera que I está contenida en el dominio de f como $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Una función f tiene un **mínimo local** en c si existe un intervalo abierto I que contiene c de manera que I está contenida en el dominio de f como $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Una función f tiene un **extremo local** en c si f tiene un máximo local en c o f tiene un mínimo local en c.

Observe que si f tiene un extremo absoluto en c como f se define en un intervalo que contiene c, entonces $f(c)$ también se considera un extremo local. Si un extremo absoluto de una función f se produce en un punto extremo, no lo consideramos un extremo local, sino que nos referimos a él como un extremo final.

Dado el gráfico de una función f, a veces es fácil ver dónde se produce un máximo o un mínimo local. Sin embargo, no siempre es fácil de ver, ya que las características interesantes del gráfico de una función pueden no ser visibles porque se producen a una escala muy pequeña. Además, es posible que no tengamos un gráfico de la función. En estos casos, ¿cómo podemos utilizar la fórmula de una función para determinar dónde se producen estos extremos?

Para responder esta pregunta, veamos de nuevo la Figura 4.14. Los extremos locales se producen en $x = 0$, $x = 1$, y $x = 2$. Observe que en $x = 0$ y $x = 1$, la derivada $f'(x) = 0$. A $x = 2$, la derivada $f'(x)$ no existe, ya que la función f tiene una esquina allí. De hecho, si f tiene un extremo local en un punto $x = c$, la derivada $f'(c)$ debe cumplir una de las siguientes condiciones: o bien $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ es indefinida. Este valor c se conoce como punto crítico y es importante para encontrar los valores extremos de las funciones.

Definición

Supongamos que c es un punto interior en el dominio de f. Decimos que c es un **número crítico** de f si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ es indefinida. Llamamos al punto $(c, f(c))$ un punto crítico de f. Tenga en cuenta que estos dos términos se utilizan, a menudo, indistintamente en este libro de texto y en otros.

Como se mencionó anteriormente, si f tiene un extremo local en un punto $x = c$, entonces c debe ser un punto crítico de f. Este hecho se conoce como **el teorema de Fermat**.

Teorema 4.2

Teorema de Fermat
Si los valores de f tiene un extremo local en c como f es diferenciable en c, entonces $f'(c) = 0$.

Prueba

Supongamos que f tiene un extremo local en c como f es diferenciable en c. Tenemos que demostrar que $f'(c) = 0$. Para ello, demostraremos que $f'(c) \geq 0$ y $f'(c) \leq 0$, y por lo tanto $f'(c) = 0$. Dado que f tiene un extremo local en c, f tiene un máximo o un mínimo local en c. Supongamos que f tiene un máximo local en c. El caso en el que f tiene un mínimo local en c se puede manejar de manera similar. Existe entonces un intervalo abierto I de manera que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$. Dado que f es diferenciable en c, de la definición de la derivada, sabemos que

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Como este límite existe, los dos límites unilaterales también existen y son iguales $f'(c)$. Por lo tanto,

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \tag{4.4}$$

y

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \tag{4.5}$$

Dado que $f(c)$ es un máximo local, vemos que $f(x) - f(c) \leq 0$ por x cerca de c. Por lo tanto, para x cerca de c, pero $x > c$, tenemos $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$. De la Ecuación 4.4 concluimos que $f'(c) \leq 0$. Del mismo modo, se puede demostrar que $f'(c) \geq 0$. Por lo tanto, $f'(c) = 0$.

□

Del teorema de Fermat, concluimos que si f tiene un extremo local en c, entonces $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ es indefinida. En otras palabras, los extremos locales solo pueden ocurrir en los puntos críticos.

Note que este teorema no afirma que una función f debe tener un extremo local en un punto crítico. Más bien, afirma que los puntos críticos son candidatos a extremos locales. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^3$. Tenemos $f'(x) = 3x^2 = 0$ cuando $x = 0$. Por lo tanto, $x = 0$ es un punto crítico. Sin embargo, $f(x) = x^3$ aumenta en $(-\infty, \infty)$, y por lo tanto f no tienen un extremo local en $x = 0$. En la Figura 4.15, vemos varias posibilidades de puntos críticos. En algunos de estos casos, las funciones tienen extremos locales en los puntos críticos, pero en otros casos no los tienen. Note que estos gráficos no muestran todas las posibilidades de comportamiento de una función en un punto crítico.

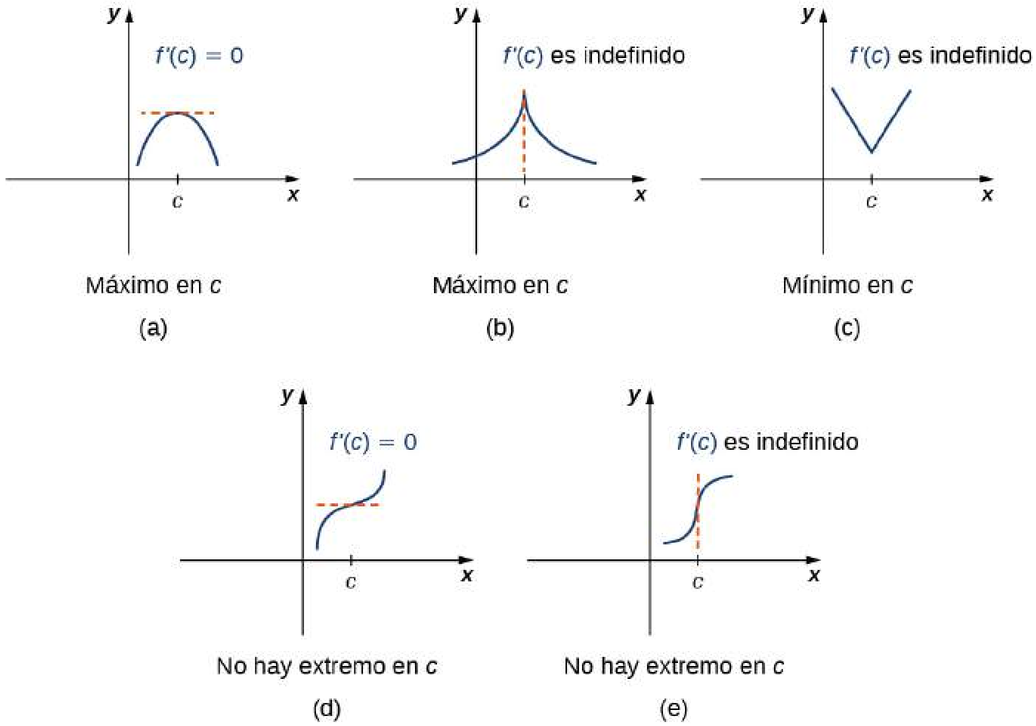


Figura 4.15 (a-e) Una función f tiene un punto crítico en c si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ es indefinida. Una función puede tener o no un extremo local en un punto crítico.

Más adelante en este capítulo veremos métodos analíticos para determinar si realmente una función tiene un extremo local en un punto crítico. Por ahora, vamos a centrarnos en la búsqueda de puntos críticos. Utilizaremos observaciones gráficas para determinar si un punto crítico está asociado a un extremo local.

EJEMPLO 4.12

Localización de puntos críticos

En cada una de las siguientes funciones, halle todos los puntos críticos. Utilice una herramienta gráfica para determinar si la función tiene un extremo local en cada uno de los puntos críticos.

a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$
b. $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^3$
c. $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$

Solución

a. La derivada $f'(x) = x^2 - 5x + 4$ se define para todos los números reales x. Por lo tanto, solo tenemos que hallar los valores de x donde $f'(x) = 0$. Dado que $f'(x) = x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$, los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 4$. A partir del gráfico de f en la Figura 4.16, vemos que f tiene un máximo local en $x = 1$ y un mínimo local en $x = 4$.

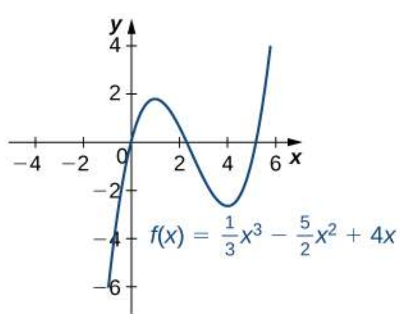


Figura 4.16 Esta función tiene un máximo y un mínimo local.

b. Utilizando la regla de la cadena, vemos que la derivada es

$$f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)^2 (2x) = 6x\left(x^2 - 1\right)^2.$$

Por lo tanto, f tiene puntos críticos cuando $x = 0$ y cuando $x^2 - 1 = 0$. Concluimos que los puntos críticos son $x = 0, \pm 1, 1$. A partir del gráfico de f en la Figura 4.17, vemos que f tiene un mínimo local (y absoluto) en $x = 0$, pero no tiene un extremo local en $x = 1$ o $x = -1$.

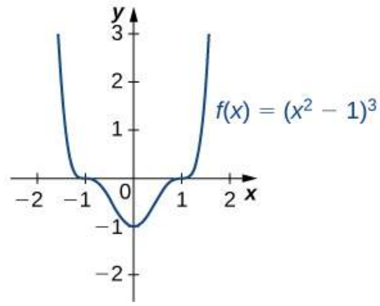


Figura 4.17 Esta función tiene tres puntos críticos: $x = 0$, $x = 1$, y $x = -1$. La función tiene un mínimo local (y absoluto) en $x = 0$, pero no tiene extremos en los otros dos puntos críticos.

c. Según la regla del cociente, vemos que la derivada es

$$f'(x) = \frac{\left(1 + x^2\right)(4) - 4x(2x)}{\left(1 + x^2\right)^2} = \frac{4 - 4x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}.$$

La derivada está definida en todas partes. Por lo tanto, solo tenemos que encontrar valores para x donde $f'(x) = 0$. Resolución de problemas $f'(x) = 0$, vemos que $4 - 4x^2 = 0$, lo que implica $x = \pm 1$. Por lo tanto, los puntos críticos son $x = \pm 1$. A partir del gráfico de f en la Figura 4.18, vemos que f tiene un máximo absoluto en $x = 1$ y un mínimo absoluto en $x = -1$. Por lo tanto, f tiene un máximo local en $x = 1$ y un mínimo local en $x = -1$. (Tenga en cuenta que si f tiene un extremo absoluto en un intervalo I en un punto c que no es un punto extremo de I, entonces f tiene un extremo local en c.)

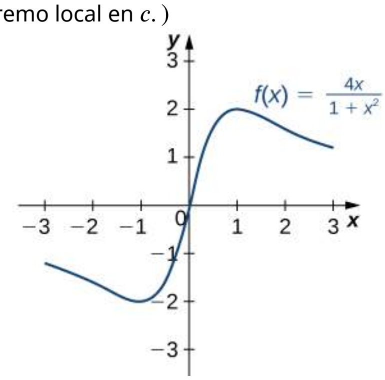


Figura 4.18 Esta función tiene un máximo y un mínimo absolutos.

4.12 Halle todos los puntos críticos para $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

Localización de extremos absolutos

El teorema del valor extremo establece que una función continua en un intervalo cerrado y acotado tiene un máximo y un mínimo absolutos. Como se muestra en la Figura 4.13, uno o ambos extremos absolutos podrían ocurrir en un punto extremo. Sin embargo, si un extremo absoluto no ocurre en un punto extremo, debe ocurrir en un punto interior, en cuyo caso el extremo absoluto es un extremo local. Por lo tanto, mediante el Teorema de Fermat el punto c en el que se produce el extremo local debe ser un punto crítico. Resumimos este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 4.3

Localización de los extremos absolutos
Supongamos que f es una función continua en un intervalo cerrado y acotado I. El máximo absoluto de f en I y el mínimo absoluto de f en I debe producirse en los puntos extremos de I o en puntos críticos de f en I.

Teniendo esto en cuenta, vamos a examinar un procedimiento para localizar los extremos absolutos.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Localización de extremos absolutos en un intervalo cerrado
Consideremos una función continua f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$.

1. Evalúe f en los puntos finales $x = a$ y $x = b$.
2. Halle todos los puntos críticos de f que se encuentran en el intervalo (a, b) y evalúe f en esos puntos críticos.
3. Compare todos los valores encontrados en (1) y (2). A partir de la Localización de los extremos absolutos, estos deben producirse en los puntos extremos o críticos. Por lo tanto, el mayor de estos valores es el máximo absoluto de f. El menor de estos valores es el mínimo absoluto de f.

Ahora veamos cómo utilizar esta estrategia para encontrar los valores máximos y mínimos absolutos de las funciones continuas.

EJEMPLO 4.13

Localización de extremos absolutos
En cada una de las siguientes funciones, calcule el máximo absoluto y el mínimo absoluto en el intervalo especificado e indique dónde se producen esos valores.

a. $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ en $[1, 3]$.
b. $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$ en $[0, 2]$.

Solución

a. Paso 1. Evalúe f en los puntos finales $x = 1$ y $x = 3$.

$$f(1) = 0 \text{ y } f(3) = -2$$

Paso 2. Dado que $f'(x) = -2x + 3$, f' se define para todos los números reales x. Por lo tanto, no hay puntos críticos donde la derivada sea indefinida. Queda por comprobar dónde $f'(x) = 0$. Dado que $f'(x) = -2x + 3 = 0$ a las $x = \frac{3}{2}$ y $\frac{3}{2}$ esté en el intervalo $[1, 3]$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ es un candidato a extremo absoluto de f en $[1, 3]$. Evaluamos $f\left(\frac{3}{2}\right)$ y hallamos

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Paso 3. Establecemos la tabla siguiente para comparar los valores encontrados en los pasos 1 y 2

x	$f(x)$	Conclusión
1	0	
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	Máximo absoluto
3	-2	Mínimo absoluto

Gracias a la tabla, hallamos que el máximo absoluto de f en el intervalo [1, 3] es $\frac{1}{4}$, y se produce en $x = \frac{3}{2}$. El mínimo absoluto de f en el intervalo [1, 3] es -2, y se produce en $x = 3$ como se muestra en la siguiente gráfica.

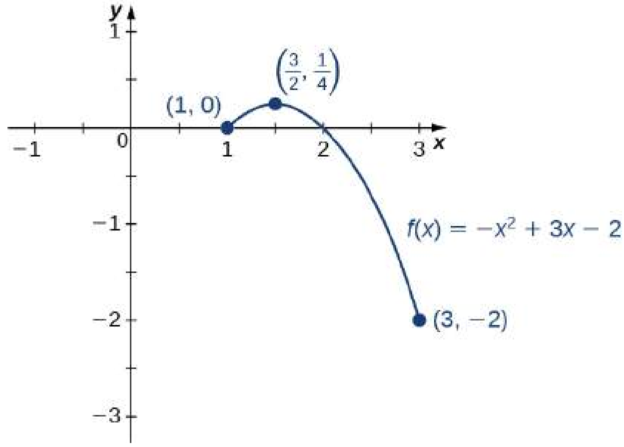


Figura 4.19 Esta función tiene un máximo y un mínimo absolutos.

b. Paso 1. Evalúe f en los puntos finales $x = 0$ y $x = 2$.

$$f(0) = 0 \text{ y } f(2) = 4 - 3\sqrt[3]{4} \approx -0{,}762$$

Paso 2. La derivada de f está dada por

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^{1/3}} = \frac{2x^{4/3} - 2}{x^{1/3}}$$

para $x \neq 0$. La derivada es cero cuando $2x^{4/3} - 2 = 0$, lo que implica $x = \pm 1$. La derivada es indefinida en $x = 0$. Por lo tanto, los puntos críticos de f son $x = 0, 1, -1$. El punto $x = 0$ es un punto extremo, por lo que ya evaluamos $f(0)$ en el paso 1. El punto $x = -1$ no está en el intervalo de interés, por lo que solo tenemos que evaluar $f(1)$. Encontramos que

$$f(1) = -2.$$

Paso 3. Comparamos los valores encontrados en los pasos 1 y 2, en la siguiente tabla

x	$f(x)$	**Conclusión**
0	0	Máximo absoluto
1	-2	Mínimo absoluto
2	$-0{,}762$	

Concluimos que el máximo absoluto de f en el intervalo [0, 2] es cero, y se produce en $x = 0$. El mínimo absoluto es -2, y se produce en $x = 1$ como se muestra en la siguiente gráfica.

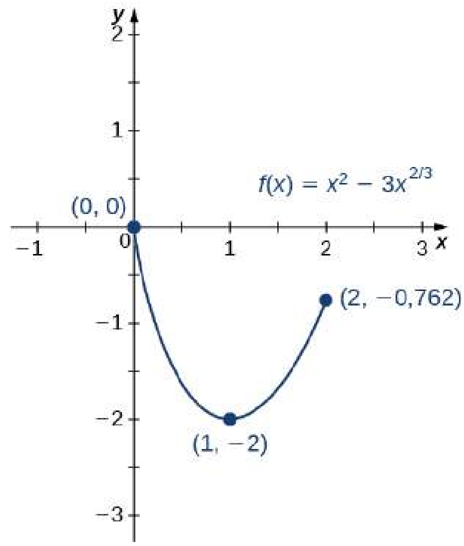


Figura 4.20 Esta función tiene un máximo absoluto en un punto extremo del intervalo.

4.13 Halle el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el intervalo $[1, 4]$.

En este punto, sabemos cómo localizar los extremos absolutos de las funciones continuas en intervalos cerrados. También hemos definido los extremos locales y hemos determinado que si una función f tiene un extremo local en un punto c, entonces c debe ser un punto crítico de f. Sin embargo, el que c sea un punto crítico no es una condición suficiente para f para tener un extremo local en c. Más adelante en este capítulo, mostraremos cómo determinar si una función tiene realmente un extremo local en un punto crítico. Sin embargo, primero debemos presentar el teorema del valor medio, que nos ayudará a analizar el comportamiento del gráfico de una función.

SECCIÓN 4.3 EJERCICIOS

90. En precálculo, aprendió una fórmula para hallar la posición del máximo o del mínimo de una ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, que era $h = -\frac{b}{(2a)}$. Demuestre esta fórmula utilizando el cálculo.

91. Si tiene que hallar un mínimo absoluto en un intervalo $[a, b]$, ¿por qué necesita comprobar los puntos extremos? Dibuje un gráfico que sustente su hipótesis.

92. Si está examinando una función en un intervalo (a, b), por a y b finito, ¿es posible que no exista un máximo absoluto o un mínimo absoluto?

93. Cuando compruebe los puntos críticos, explique por qué debe determinar también los puntos en los que $f'(x)$ es indefinida. Dibuje un gráfico que apoye su explicación.

94. ¿Se puede tener un máximo absoluto finito para $y = ax^2 + bx + c$ en $(-\infty, \infty)$? Explique por qué o por qué no utilizando argumentos gráficos.

95. ¿Se puede tener un máximo absoluto finito para $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ en $(-\infty, \infty)$ asumiendo que a es distinto de cero? Explique por qué o por qué no utilizando argumentos gráficos.

96. Supongamos que m es el número de mínimos locales y que M es el número de máximos locales. ¿Se puede crear una función en la que $M > m + 2$? Dibuje un gráfico para apoyar su explicación.

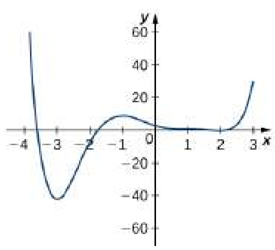
97. ¿Es posible tener más de un máximo absoluto? Utilice un argumento gráfico para demostrar su hipótesis.

98. ¿Es posible que una función no tenga un mínimo o un máximo absoluto? Si es así, construya dicha función. Si no es así, explique por qué no es posible.

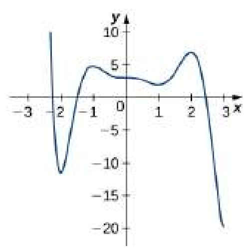
99. **[T]** Represente gráficamente la función $y = e^{ax}$. ¿Para cuáles valores de a, en cualquier dominio infinito, obtendrá un mínimo absoluto y un máximo absoluto?

En los siguientes ejercicios, determine dónde se producen los máximos y mínimos locales y absolutos en el gráfico dado. Supongamos que el gráfico representa la totalidad de cada función.

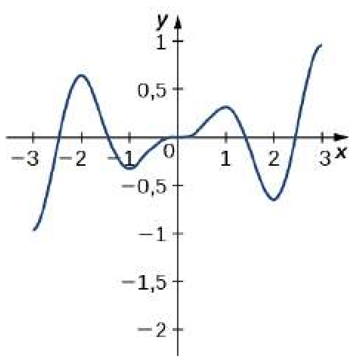
100.



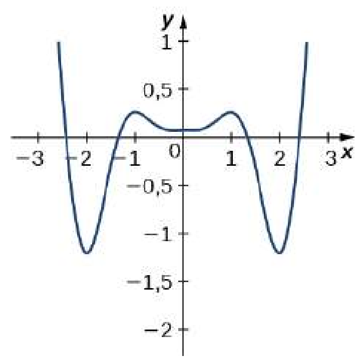
101.



102.



103.



En los siguientes problemas, dibuje los gráficos de $f(x)$, que es continua, en el intervalo $[-4, 4]$ con las siguientes propiedades:

104. Máximo absoluto en $x = 2$ y mínimos absolutos en $x = \pm 3$

105. Mínimo absoluto en $x = 1$ y máximo absoluto en $x = 2$

106. Máximo absoluto en $x = 4$, mínimo absoluto en $x = -1$, máximo local en $x = -2$, y un punto crítico que no es un máximo o un mínimo en $x = 2$

107. Máximos absolutos en $x = 2$ y $x = -3$, mínimo local en $x = 1$, y mínimo absoluto en $x = 4$

En los siguientes ejercicios, halle los puntos críticos en los dominios de las siguientes funciones.

108. $y = 4x^3 - 3x$

109. $y = 4\sqrt{x} - x^2$

110. $y = \frac{1}{x-1}$

111. $y = \ln(x - 2)$

112. $y = \tan(x)$ grandes.

113. $y = \sqrt{4 - x^2}$

114. $y = x^{3/2} - 3x^{5/2}$

115. $y = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$

116. $y = \operatorname{sen}^2(x)$ grandes.

117. $y = x + \frac{1}{x}$

En los siguientes ejercicios, halle los máximos locales o absolutos de las funciones en el dominio especificado.

118. $f(x) = x^2 + 3$ en $[-1, 4]$

119. $y = x^2 + \frac{2}{x}$ en $[1, 4]$

120. $y = \left(x - x^2\right)^2$ en $[-1, 1]$

121. $y = \frac{1}{\left(x-x^2\right)}$ en $(0, 1)$

122. $y = \sqrt{9 - x}$ en $[1, 9]$

123. $y = x + \operatorname{sen}(x)$ en $[0, 2\pi]$

124. $y = \frac{x}{1+x}$ en $[0, 100]$

125. $y = |x + 1| + |x - 1|$ en $[-3, 2]$

126. $y = \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$ en $[0, 4]$

127. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$ en $[0, 2\pi]$

128. $y = 4 \operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta$ en $[0, 2\pi]$

En los siguientes ejercicios, halle los mínimos y máximos locales y absolutos de las funciones en $\left(-\infty, \infty\right)$.

129. $y = x^2 + 4x + 5$

130. $y = x^3 - 12x$

131. $y = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2$

132. $y = x^3(1 - x)^6$

133. $y = \frac{x^2+x+6}{x-1}$

134. $y = \frac{x^2-1}{x-1}$

En las siguientes funciones, utilice una calculadora para graficar la función y estimar los máximos y mínimos absolutos y locales. A continuación, resuélvalos explícitamente.

135. **[T]** $y = 3x\sqrt{1 - x^2}$

136. **[T]** $y = x + \operatorname{sen}(x)$

137. **[T]** $y = 12x^5 + 45x^4 + 20x^3 - 90x^2 - 120x + 3$

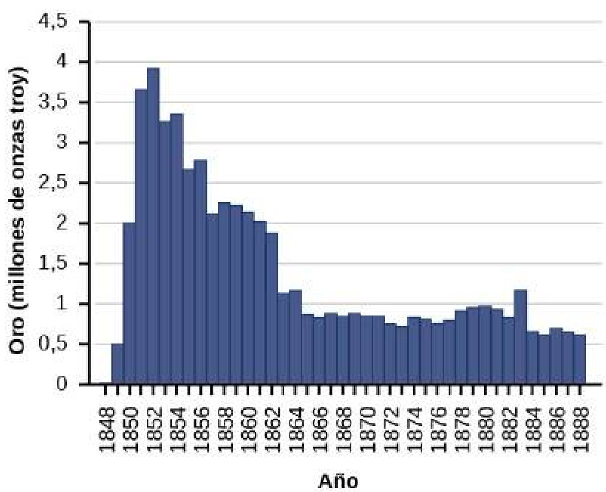
138. **[T]** $y = \frac{x^3+6x^2-x-30}{x-2}$

139. **[T]** $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4+x^2}}$

140. Una empresa que produce teléfonos celulares tiene una función de costos de $C = x^2 - 1200x + 36.400$, donde C es el costo en dólares y x es el número de teléfonos celulares producidos (en miles). ¿Cuántas unidades de teléfono móvil (en miles) minimiza esta función de costo?

141. Se lanza una pelota al aire y su posición viene dada por $h(t) = -4{,}9t^2 + 60t + 5\text{ m}$. Calcule la altura a la que la pelota deja de ascender. ¿Cuánto tiempo después del lanzamiento ocurre eso?

En los siguientes ejercicios, considere la producción de oro durante la fiebre del oro de California (1848-1888). La producción de oro puede ser modelada por $G(t) = \frac{(25t)}{(t^2+16)}$, donde t es el número de años transcurridos desde el inicio de la fiebre del oro $(0 \leq t \leq 40)$ y G son las onzas de oro producidas (en millones). En la siguiente figura se muestra un resumen de los datos.



142. Calcule cuándo se produjo el máximo (local y absoluto) de producción de oro, y la cantidad de oro producida durante ese máximo.

143. Halle el momento en que se produjo la producción mínima (local y absoluta) de oro. ¿Cuál fue la cantidad de oro producida durante este mínimo?

Halle los puntos críticos, máximos y mínimos de las siguientes funciones a trozos.

144. $y = \begin{cases} x^2 - 4x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

145. $y = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & x > 1 \end{cases}$

En los siguientes ejercicios, halle los puntos críticos de las siguientes funciones genéricas. ¿Son máximos, mínimos o ninguno? Indique las condiciones necesarias.

146. $y = ax^2 + bx + c$, dado que $a > 0$

147. $y = (x-1)^a$, dado que $a > 1$ y *a* es un número entero.

4.4 El teorema del valor medio

Objetivos de aprendizaje

- **4.4.1** Explicar el significado del teorema de Rolle.
- **4.4.2** Describir el significado del teorema del valor medio.
- **4.4.3** Indicar tres consecuencias importantes del teorema del valor medio.

El **teorema del valor medio** es uno de los teoremas más importantes del cálculo. Al final de esta sección veremos algunas de sus implicaciones. En primer lugar, empezaremos con un caso especial del teorema del valor medio, llamado teorema de Rolle.

Teorema de Rolle

De manera informal, **el teorema de Rolle** afirma que si las salidas de una función diferenciable f son iguales en los puntos extremos de un intervalo, entonces debe haber un punto interior c donde $f'(c) = 0$. La Figura 4.21 ilustra este teorema.

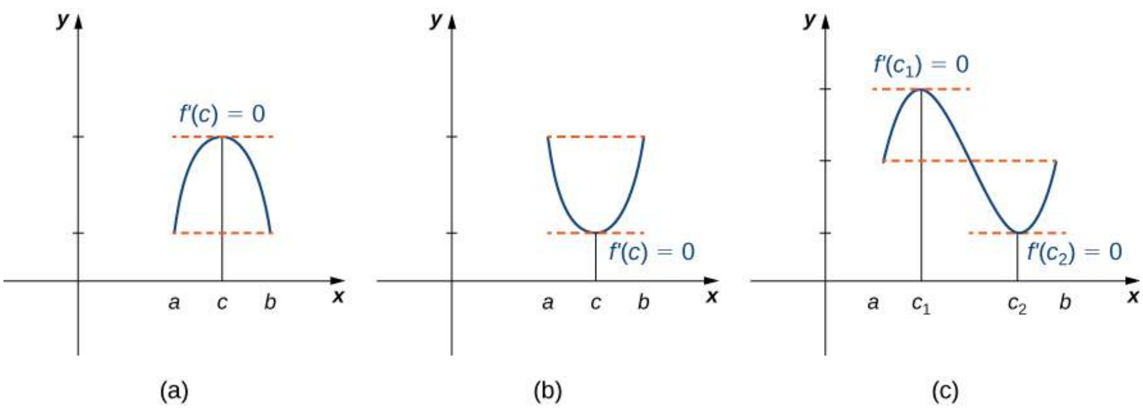


Figura 4.21 Si una función diferenciable *f* satisface $f(a) = f(b)$, entonces su derivada debe ser cero en algún(os) punto(s) entre a y b.

Teorema 4.4

Teorema de Rolle

Supongamos que f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos una $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Prueba

Supongamos que $k = f(a) = f(b)$. Consideramos tres casos:

1. $f(x) = k$ para todos los $x \in (a, b)$.
2. Existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > k$.
3. Existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) < k$.

Caso 1: Si los valores de $f(x) = k$ para todos los $x \in (a, b)$, entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Caso 2: Dado que f es una función continua sobre el intervalo cerrado y delimitado $[a, b]$, por el teorema del valor extremo, tiene un máximo absoluto. Además, como hay un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > k$, el máximo absoluto es mayor que k. Por lo tanto, el máximo absoluto no se produce en ninguno de los dos extremos. En consecuencia, el máximo absoluto debe producirse en un punto interior $c \in (a, b)$. Dado que f tiene un máximo en un punto interior c, y

f es diferenciable en c, por el teorema de Fermat, $f'(c) = 0$.

Caso 3: El caso en el que existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) < k$ es análogo al caso 2, con la sustitución del máximo por el mínimo.

□

Un punto importante del teorema de Rolle es que la diferenciabilidad de la función f es fundamental. Si los valores de f no es diferenciable, incluso en un solo punto, el resultado puede no ser válido. Por ejemplo, la función $f(x) = |x| - 1$ es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 0 = f(1)$, pero $f'(c) \neq 0$ para cualquier $c \in (-1, 1)$ como se muestra en la siguiente figura.

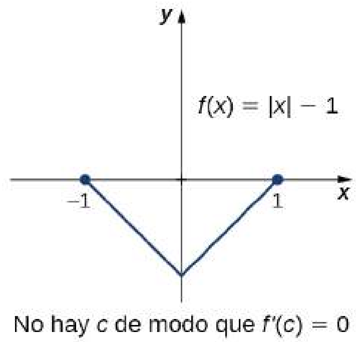


Figura 4.22 Dado que $f(x) = |x| - 1$ no es diferenciable en $x = 0$, no se cumplen las condiciones del teorema de Rolle. De hecho, la conclusión no es válida en este caso; no hay $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Consideremos ahora las funciones que satisfacen las condiciones del teorema de Rolle y calculemos explícitamente los puntos c donde $f'(c) = 0$.

EJEMPLO 4.14

Utilizando el Teorema de Rolle

En cada una de las siguientes funciones, verifique que la función satisfaga los criterios establecidos en el teorema de Rolle y halle todos los valores c en el intervalo dado donde $f'(c) = 0$.

a. $f(x) = x^2 + 2x$ en $[-2, 0]$
b. $f(x) = x^3 - 4x$ en $[-2, 2]$

Solución

a. Dado que f es un polinomio, es continuo y diferenciable en todas partes. Además, $f(-2) = 0 = f(0)$. Por lo tanto, f satisface los criterios del teorema de Rolle. Concluimos que existe al menos un valor $c \in (-2, 0)$ tal que $f'(c) = 0$. Dado que $f'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$, vemos que $f'(c) = 2(c + 1) = 0$ implica $c = -1$ como se muestra en el siguiente gráfico.

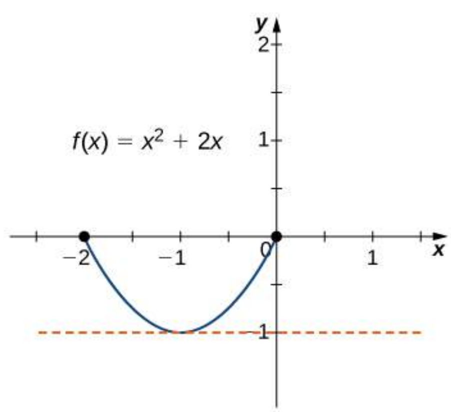


Figura 4.23 Esta función es continua y diferenciable en $[-2, 0]$, $f'(c) = 0$ cuando $c = -1$.

b. Como en la parte a. f es un polinomio y por lo tanto es continuo y diferenciable en todas partes. También, $f(-2) = 0 = f(2)$. Dicho esto, f satisface los criterios del teorema de Rolle. Diferenciando, encontramos que

$f'(x) = 3x^2 - 4$. Por lo tanto, $f'(c) = 0$ cuando $x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Ambos puntos están en el intervalo $[-2, 2]$, y, por lo tanto, ambos puntos satisfacen la conclusión del teorema de Rolle, como se muestra en el siguiente gráfico.

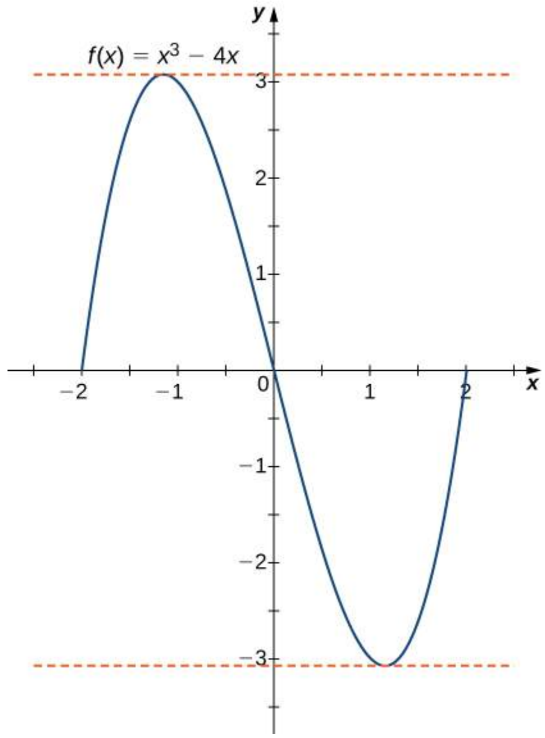


Figura 4.24 Para este polinomio en $[-2, 2]$, $f'(c) = 0$ a las $x = \pm 2/\sqrt{3}$.

4.14 Verifique que la función $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ definida en el intervalo $[1, 3]$ satisface las condiciones del teorema de Rolle. Halle todos los puntos c garantizados por el teorema de Rolle.

El teorema del valor medio y su significado

El teorema de Rolle es un caso especial del teorema del valor medio. En el teorema de Rolle, consideramos funciones diferenciables f definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a) = f(b)$. El teorema del valor medio generaliza el teorema de Rolle al considerar funciones que no tienen necesariamente el mismo valor en los extremos. En consecuencia, podemos considerar el Teorema del Valor Medio como una versión inclinada del teorema de Rolle (Figura 4.25). El teorema del valor medio establece que si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que la línea tangente al gráfico de f en c es paralela a la línea secante que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

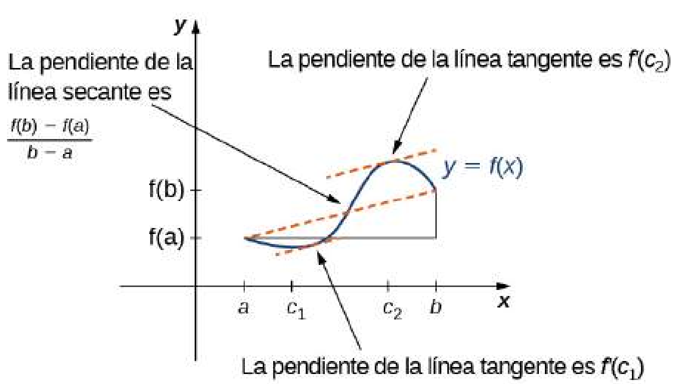


Figura 4.25 El teorema del valor medio dice que para una función que cumple sus condiciones, en algún punto la línea tangente tiene la misma pendiente que la línea secante entre los extremos. Para esta función, hay dos valores c_1 y c_2 tal que la línea tangente a f en c_1 y c_2 tiene la misma pendiente que la línea secante.

Teorema 4.5

Teorema del valor medio

Supongamos que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b). Entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ de manera que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prueba

La prueba se desprende del teorema de Rolle, al presentar una función apropiada que satisface los criterios de este. Considere la línea que conecta $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Como la pendiente de esa línea es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y la línea pasa por el punto $(a, f(a))$, la ecuación de esa línea se puede escribir como

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Supongamos que $g(x)$ denota la diferencia vertical entre el punto $(x, f(x))$ y el punto (x, y) en esa línea. Por lo tanto,

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right].$$

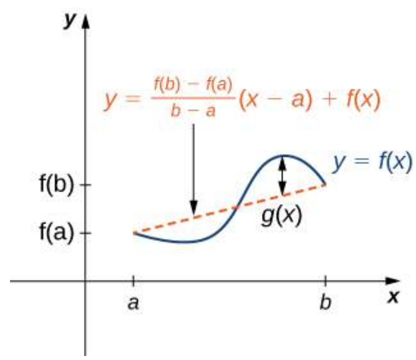


Figura 4.26 El valor $g(x)$ es la diferencia vertical entre el punto $(x, f(x))$ y el punto (x, y) en la línea secante que conecta $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Dado que el gráfico de f interseca la línea secante cuando $x = a$ y $x = b$, vemos que $g(a) = 0 = g(b)$. Dado que f es una función diferenciable sobre (a, b), g es también una función diferenciable en (a, b). Además, como f es continua en $[a, b]$, g también es continua en $[a, b]$. Por lo tanto, g satisface los criterios del teorema de Rolle. En consecuencia, existe un punto $c \in (a, b)$ de manera que $g'(c) = 0$. Dado que

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

vemos que

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dado que $g'(c) = 0$, concluimos que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

En el siguiente ejemplo, mostramos cómo se puede aplicar el teorema del valor medio a la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 9]$. El método es el mismo para otras funciones, aunque a veces con consecuencias más interesantes.

EJEMPLO 4.15

Verificación de la aplicación del teorema del valor medio

Para $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 9]$, demuestre que f satisface la hipótesis del teorema del valor medio, y por tanto existe al menos un valor $c \in (0, 9)$ tal que $f'(c)$ es igual a la pendiente de la línea que une $(0, f(0))$ y $(9, f(9))$. Halle estos valores c garantizados por el teorema del valor medio.

Solución

Sabemos que $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, 9]$ y diferenciable sobre $(0, 9)$. Por lo tanto, f satisface las hipótesis del teorema del valor medio, y debe existir al menos un valor $c \in (0, 9)$ tal que $f'(c)$ es igual a la pendiente de la línea que une $(0, f(0))$ y $(9, f(9))$ (Figura 4.27). Para determinar qué valor(es) de c están garantizados, primero hay que calcular la derivada de f. La derivada $f'(x) = \frac{1}{(2\sqrt{x})}$. La pendiente de la línea que une $(0, f(0))$ y $(9, f(9))$ está dada por

$$\frac{f(9) - f(0)}{9 - 0} = \frac{\sqrt{9} - \sqrt{0}}{9 - 0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Supongamos que se desea calcular c de manera que $f'(c) = \frac{1}{3}$. Es decir, queremos hallar c tal que

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3}.$$

Resolviendo esta ecuación para c, obtenemos $c = \frac{9}{4}$. En este punto, la pendiente de la línea tangente es igual a la pendiente de la línea que une los puntos extremos.

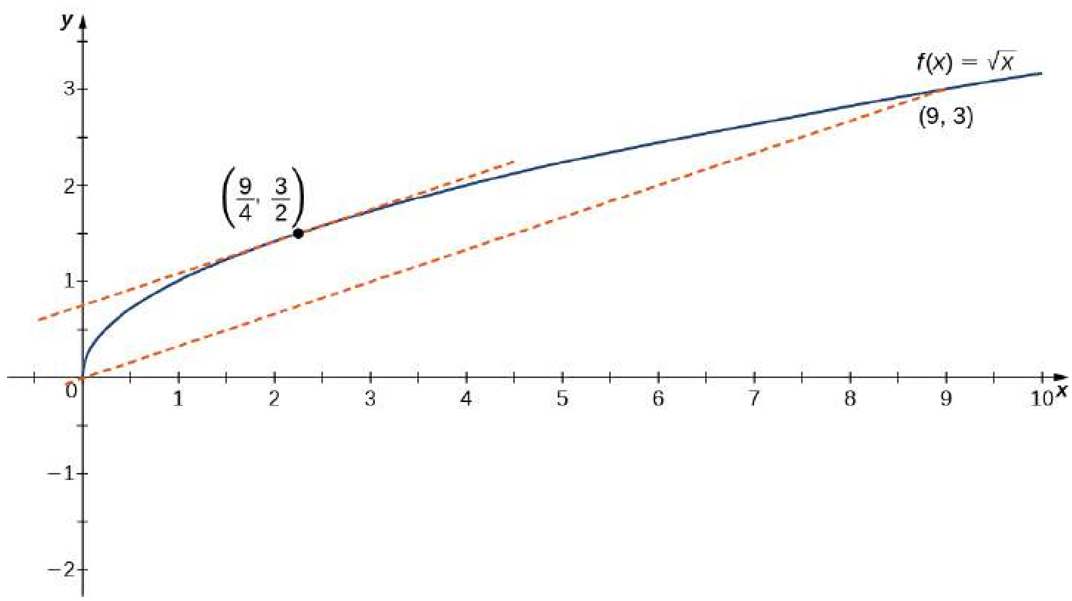


Figura 4.27 La pendiente de la línea tangente en $c = 9/4$ es la misma que la pendiente del segmento de línea que une $(0, 0)$ y $(9, 3)$.

Una aplicación que ayuda a ilustrar el teorema del valor medio involucra la velocidad. Por ejemplo, supongamos que conducimos un automóvil durante 1 h por una carretera recta con una velocidad media de 45 mph. Supongamos que $s(t)$ y $v(t)$ denotan la posición y la velocidad del auto, respectivamente, para $0 \leq t \leq 1$ h. Suponiendo que la función de posición $s(t)$ es diferenciable, podemos aplicar el teorema del valor medio para concluir que, en algún momento $c \in (0, 1)$, la velocidad del auto era exactamente

$$v(c) = s'(c) = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0} = 45 \text{ mph}.$$

EJEMPLO 4.16

Teorema del valor medio y velocidad

Si se deja caer una roca desde una altura de 100 ft, su posición t segundos después de su caída hasta que toque el suelo viene dada por la función $s(t) = -16t^2 + 100$.

a. Determine el tiempo que tarda la roca en llegar al suelo.
b. Halle la velocidad media v_{avg} de la roca para cuando se suelta y para cuando llega al suelo.
c. Halle el tiempo t garantizado por el teorema del valor medio cuando la velocidad instantánea de la roca es v_{avg}.

Solución

a. Cuando la roca toca el suelo, su posición es $s(t) = 0$. Si resolvemos la ecuación $-16t^2 + 100 = 0$ por t, tenemos que $t = \pm\frac{5}{2}$ sec. Dado que solo estamos considerando $t \geq 0$, la roca llegará al suelo $\frac{5}{2}$ segundos después de su caída.
b. La velocidad media viene dada por

$$v_{\text{avg}} = \frac{s(5/2) - s(0)}{5/2 - 0} = \frac{0 - 100}{5/2} = -40 \text{ ft/s}.$$

c. La velocidad instantánea viene dada por la derivada de la función de posición. Por lo tanto, tenemos que encontrar un tiempo t de manera que $v(t) = s'(t) = v_{\text{avg}} = -40$ ft/s. Dado que $s(t)$ es continua en el intervalo $[0, 5/2]$ y diferenciable en el intervalo $(0, 5/2)$, por el teorema del valor medio, se garantiza que hay un punto $c \in (0, 5/2)$ de manera que

$$s'(c) = \frac{s(5/2) - s(0)}{5/2 - 0} = -40.$$

Tomando la derivada de la función de posición $s(t)$, tenemos que $s'(t) = -32t$. Por lo tanto, la ecuación se reduce a $s'(c) = -32c = -40$. Al resolver esta ecuación para c, tenemos $c = \frac{5}{4}$. Por lo tanto, $\frac{5}{4}$ segundos después de la caída de la roca, la velocidad instantánea es igual a la velocidad media de la roca durante su caída libre: -40 ft/s

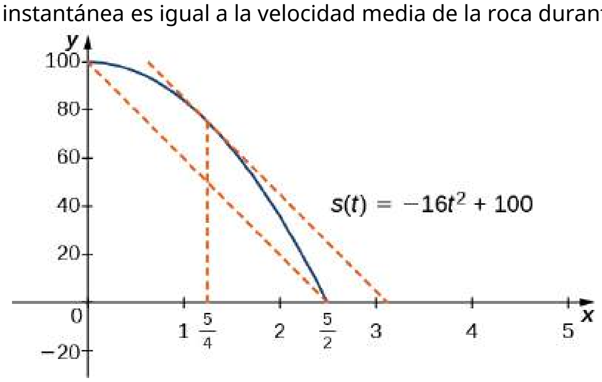


Figura 4.28 En el tiempo $t = 5/4$ s, la velocidad de la roca es igual a su velocidad media desde que se deja caer hasta que toca el suelo.

4.15 Supongamos que se deja caer una pelota desde una altura de 200 ft. Su posición en el tiempo t ¿es $s(t) = -16t^2 + 200$. Halle el tiempo t cuando la velocidad instantánea del balón es igual a su velocidad media.

Corolarios del teorema del valor medio

Veamos ahora tres corolarios del teorema del valor medio. Estos resultados tienen consecuencias sustanciales, que utilizaremos en las próximas secciones.

En este punto, sabemos que la derivada de cualquier función constante es cero. El teorema del valor medio nos permite concluir que lo contrario también es cierto. En particular, si $f'(x) = 0$ para todo x en algún intervalo I, entonces $f(x)$ es constante en ese intervalo. Este resultado puede parecer intuitivamente obvio, pero tiene importantes implicaciones que no son obvias, y las discutiremos en breve.

Teorema 4.6

Corolario 1: Funciones con una derivada de cero
Supongamos que f sea diferenciable en un intervalo I. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces $f(x) =$ constante para todas las $x \in I$.

Prueba

Dado que f es diferenciable sobre I, f debe ser continua durante I. Supongamos que $f(x)$ no es constante para todas las x en I. Entonces existe $a, b \in I$, donde $a \neq b$ y $f(a) \neq f(b)$. Elija la notación para que $a < b$. Por lo tanto,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0.$$

Dado que f es una función diferenciable, por el teorema del valor medio, existe $c \in (a, b)$ de manera que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Por lo tanto, existe $c \in I$ de manera que $f'(c) \neq 0$, lo que contradice la suposición de que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$.

□

De Corolario 1: Funciones con una derivada de cero, se deduce que si dos funciones tienen la misma derivada, difieren como máximo en una constante.

Teorema 4.7

Corolario 2: Teorema de la diferencia constante
Si los valores de f y g son diferenciables en un intervalo I y $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in I$, entonces $f(x) = g(x) + C$ para alguna constante C.

Prueba

Supongamos que $h(x) = f(x) - g(x)$. Entonces, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Según el Corolario 1, existe una constante C de manera que $h(x) = C$ para todos los $x \in I$. Por lo tanto, $f(x) = g(x) + C$ para todos los $x \in I$.

□

El tercer corolario del teorema del valor medio analiza cuándo una función es creciente y cuándo es decreciente. Recordemos que una función f aumenta en I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$, mientras que f disminuye en I si $f(x)_1 > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$. Utilizando el teorema del valor medio, podemos demostrar que si la derivada de una función es positiva, entonces la función es creciente; si la derivada es negativa, entonces la función es decreciente (Figura 4.29). Aprovecharemos este hecho en la siguiente sección, donde mostraremos cómo utilizar la derivada de una función para localizar los valores máximos y mínimos locales de la función, y cómo determinar la forma del gráfico.

Este hecho es importante porque significa que para una función dada f, si existe una función F de manera que $F'(x) = f(x)$; entonces, las únicas otras funciones que tienen una derivada igual a f son $F(x) + C$ para alguna constante C. Más adelante, en este mismo capítulo, analizaremos este resultado con más detalle.

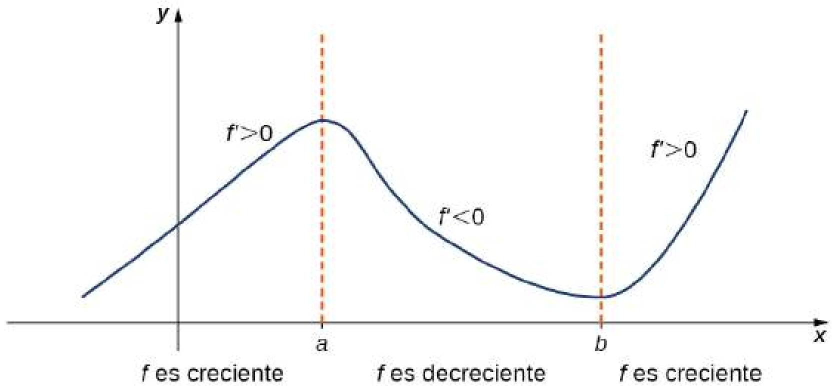


Figura 4.29 Si una función tiene una derivada positiva en algún intervalo I, entonces la función aumenta en ese intervalo I; si la derivada es negativa en algún intervalo I, entonces la función disminuye en ese intervalo I.

Teorema 4.8

Corolario 3: Funciones crecientes y decrecientes

Supongamos que f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) .

i. Si los valores de $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es una función creciente sobre $[a, b]$.
ii. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es una función decreciente sobre $[a, b]$.

Prueba

Demostraremos i.; la prueba de ii. es similar. Supongamos que f no es una función creciente en I. Entonces existe a y b en I de manera que $a < b$, pero $f(a) \geq f(b)$. Dado que f es una función diferenciable sobre I, según el teorema del valor medio existe $c \in (a, b)$ de manera que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dado que $f(a) \geq f(b)$, sabemos que $f(b) - f(a) \leq 0$. También, $a < b$ nos dice que $b - a > 0$. Concluimos que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0.$$

Sin embargo, $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$. Esto es una contradicción, y por lo tanto f debe ser una función creciente en I.

□

SECCIÓN 4.4 EJERCICIOS

148. ¿Por qué es necesaria la continuidad para aplicar el teorema del valor medio? Elabore un contraejemplo.

149. ¿Por qué se necesita la diferenciabilidad para aplicar el teorema del valor medio? Halle un contraejemplo.

150. ¿Cuándo el teorema de Rolle y el teorema del valor medio son equivalentes?

151. Si se tiene una función con una discontinuidad, ¿aún es posible tener $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$? Dibuje un ejemplo de ello o demuestre por qué no.

En los siguientes ejercicios determine en qué intervalos (si los hay) se aplica el teorema del valor medio. Justifique su respuesta.

152. $y = \text{sen}\,(\pi x)$ grandes.

153. $y = \frac{1}{x^3}$

154. $y = \sqrt{4 - x^2}$

155. $y = \sqrt{x^2 - 4}$

156. $y = \ln(3x - 5)$

En los siguientes ejercicios, grafique las funciones en una calculadora y dibuje la línea secante que une los puntos extremos. Estime el número de puntos c de manera que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$.

157. **[T]** $y = 3x^3 + 2x + 1$ en $[-1, 1]$

158. **[T]** $y = \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)$ en $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$

159. **[T]** $y = x^2\cos(\pi x)$ en $[-2, 2]$

160. **[T]** $y = x^6 - \frac{3}{4}x^5 - \frac{9}{8}x^4 + \frac{15}{16}x^3 + \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{1}{32}$ en $[-1, 1]$

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema del valor medio y halle todos los puntos $0 < c < 2$ de manera que $f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$.

161. $f(x) = x^3$

162. $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ grandes.

163. $f(x) = \cos(2\pi x)$ grandes.

164. $f(x) = 1 + x + x^2$

165. $f(x) = (x - 1)^{10}$

166. $f(x) = (x - 1)^9$

En los siguientes ejercicios, demuestre que no existe c de manera que $f(1) - f(-1) = f'(c)(2)$. Explique por qué el teorema del valor medio no se aplica en el intervalo $[-1, 1]$.

167. $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$

168. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

169. $f(x) = \sqrt{|x|}$

170. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (*Pista*: Se denomina *función suelo* y se define de forma que $f(x)$ es el mayor número entero menor o igual a x.)

En los siguientes ejercicios, determine si el teorema del valor medio se aplica a las funciones en el intervalo dado $[a, b]$. Justifique su respuesta.

171. $y = e^x$ en $[0, 1]$

172. $y = \ln(2x + 3)$ en $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$

173. $f(x) = \tan(2\pi x)$ en $[0, 2]$

174. $y = \sqrt{9 - x^2}$ en $[-3, 3]$

175. $y = \frac{1}{|x+1|}$ en $[0, 3]$

176. $y = x^3 + 2x + 1$ en $[0, 6]$

177. $y = \frac{x^2+3x+2}{x}$ en $[-1, 1]$

178. $y = \frac{x}{\text{sen}(\pi x)+1}$ en $[0, 1]$

179. $y = \ln(x + 1)$ en $[0, e - 1]$

180. $y = x\,\text{sen}(\pi x)$ en $[0, 2]$

181. $y = 5 + |x|$ en $[-1, 1]$

En los siguientes ejercicios, tome en cuenta las raíces de la ecuación.

182. Demuestre que la ecuación $y = x^3 + 4x + 16$ tiene exactamente una raíz real. ¿De cuánto es?

183. Halle las condiciones para que haya exactamente una raíz (raíz doble) para la ecuación $y = x^2 + bx + c$

184. Halle las condiciones para que $y = e^x - b$ tenga una raíz. ¿Es posible tener más de una raíz?

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para graficar la función durante el intervalo $[a, b]$ y grafique la línea secante de a al b. Utilice la calculadora para estimar todos los valores de c como los garantiza el teorema del valor medio. A continuación, halle el valor exacto de c, si es posible, o escriba la ecuación final y utilice una calculadora para estimar a cuatro dígitos.

185. **[T]** $y = \tan(\pi x)$ en $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

186. **[T]** $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ en $[0, 3]$

187. **[T]** $y = \left|x^2 + 2x - 4\right|$ en $[-4, 0]$

188. **[T]** $y = x + \frac{1}{x}$ en $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$

189. **[T]** $y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x^2}$ en $[3, 8]$

190. A las 10:17 a. m., pasa a un auto de la policía a 55 mph que está parado en la autopista. A las 10:53 a. m., pasa a un segundo auto de la policía a 55 mph, que se halla a 39 mi del primer auto. Si el límite de velocidad es de 60 mph, ¿la policía puede multarlo por exceso de velocidad?

191. Dos automóviles van de un foco a otro, saliendo a la vez y llegando al mismo tiempo. ¿Hay algún momento en el que vayan a la misma velocidad? Demuéstrelo o refútelo.

192. Demuestre que $y = \sec^2 x$ como $y = \tan^2 x$ tienen la misma derivada. ¿Qué puede decir sobre $y = \sec^2 x - \tan^2 x$?

193. Demuestre que $y = \csc^2 x$ como $y = \cot^2 x$ tienen la misma derivada. ¿Qué puede decir sobre $y = \csc^2 x - \cot^2 x$?

4.5 Las derivadas y la forma de un gráfico

Objetivos de aprendizaje

4.5.1 Explicar cómo el signo de la primera derivada afecta a la forma del gráfico de una función.
4.5.2 Enunciar la prueba de la primera derivada para los puntos críticos.
4.5.3 Utilizar la concavidad y los puntos de inflexión para explicar cómo el signo de la segunda derivada afecta a la forma del gráfico de una función.
4.5.4 Explicar la prueba de concavidad para una función en un intervalo abierto.
4.5.5 Explicar la relación entre una función y sus derivadas primera y segunda.
4.5.6 Enunciar la prueba de la segunda derivada para los extremos locales.

Anteriormente en este capítulo dijimos que si una función f tiene un extremo local en un punto c, entonces c debe ser un punto crítico de f. Sin embargo, no hay garantía de que una función tenga un extremo local en un punto crítico. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ tiene un punto crítico en $x = 0$ dado que $f'(x) = 3x^2$ es cero en $x = 0$, pero f no tienen un extremo local en $x = 0$. Utilizando los resultados de la sección anterior, podremos determinar si un punto crítico de una función corresponde realmente a un valor extremo local. En esta sección, también veremos cómo la segunda derivada proporciona información sobre la forma de un gráfico de una función si al describirlo este se curva hacia arriba o hacia abajo.

La prueba de la primera derivada

El corolario 3 del teorema del valor medio demostró que si la derivada de una función es positiva en un intervalo I entonces la función es creciente en I. Por otro lado, si la derivada de la función es negativa en un intervalo I, entonces la función es decreciente en I como se muestra en la siguiente figura.

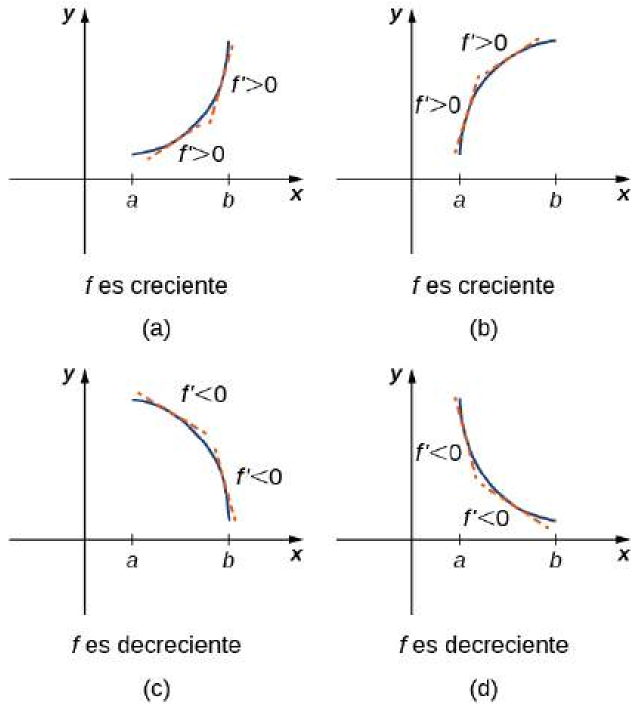


Figura 4.30 Ambas funciones son crecientes en el intervalo (a, b). En cada punto x, la derivada $f'(x) > 0$. Ambas funciones son decrecientes en el intervalo (a, b). En cada punto x, la derivada $f'(x) < 0$.

Una función continua f tiene un máximo local en el punto c si y solo si f pasa de aumentar a disminuir en el punto c. Del mismo modo, f tiene un mínimo local en c si y solo si f pasa de disminuir a aumentar en c. Si f es una función continua en un intervalo I que contiene c y diferenciable sobre I, excepto posiblemente en c, la única manera f puede pasar de creciente a decreciente (o viceversa) en el punto c es si f' cambia de signo cuando x aumenta a través de c. Si f es diferenciable en c, la única manera de que f'. pueda cambiar de signo cuando x aumenta a través de c es si $f'(c) = 0$. Por lo tanto, para una función f que es continua en un intervalo I que contiene c y diferenciable sobre I, excepto posiblemente en c, la única manera f pueda pasar de creciente a decreciente (o viceversa) es si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ es indefinida. En consecuencia, para localizar los extremos locales de una función f, buscamos puntos c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ es indefinida. Recordemos que estos puntos se denominan puntos críticos de f.

Observe que f no necesita tener un extremo local en un punto crítico. Solo los puntos críticos son candidatos a extremos locales. En la Figura 4.31, demostramos que si una función continua f tiene un extremo local, debe ocurrir en un punto crítico, pero es posible que una función no tenga un extremo local en un punto crítico. Demostramos que si f tiene un extremo local en un punto crítico, entonces el signo de f' cambia cuando x aumenta a través de ese punto.

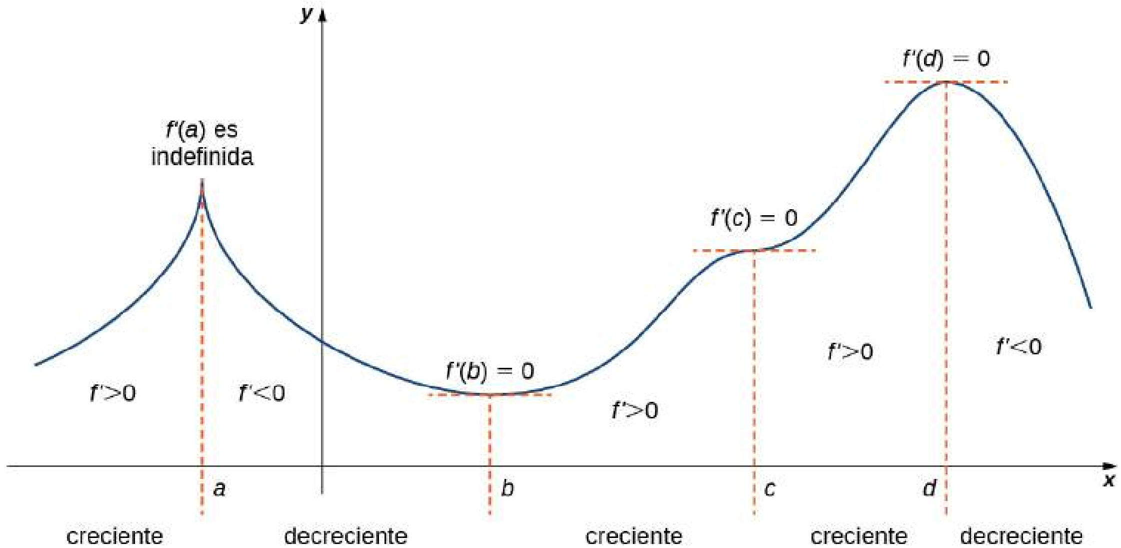


Figura 4.31 La función f tiene cuatro puntos críticos: $a, b, c,$ y d. La función f tiene máximos locales en a y d, y un mínimo local en b. La función f no tienen un extremo local en c. El signo de f' cambia en todos los extremos locales.

Utilizando la Figura 4.31, resumimos los principales resultados relativos a los extremos locales.

- Si una función continua f tiene un extremo local, este debe ocurrir en un punto crítico c.
- La función tiene un extremo local en el punto crítico c si y solo si la derivada f' cambia de signo cuando x aumenta a través de c.
- Por lo tanto, para comprobar si una función tiene un extremo local en un punto crítico c, debemos determinar el signo de $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de c.

Este resultado se conoce como la **prueba de la primera derivada**.

Teorema 4.9

Prueba de la primera derivada

Supongamos que f es una función continua en un intervalo I que contiene un punto crítico c. Si f es diferenciable sobre I, excepto posiblemente en el punto c, entonces $f(c)$ cumple una de los siguientes criterios:

i. Si los valores de f' cambia el signo de positivo cuando $x < c$ a negativo cuando $x > c$, entonces $f(c)$ es un máximo local de f.
ii. Si f' cambia el signo de negativo cuando $x < c$ a positivo cuando $x > c$, entonces $f(c)$ es un mínimo local de f.
iii. Si f' tiene el mismo signo para $x < c$ y $x > c$, entonces $f(c)$ no es ni un máximo ni un mínimo local de f.

Podemos resumir la prueba de la primera derivada como una estrategia para localizar los extremos locales.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Uso de la prueba de la primera derivada

Considere una función f que es continua en un intervalo I.

1. Halle todos los puntos críticos de f y dividimos el intervalo I en intervalos más pequeños utilizando los puntos críticos como puntos extremos.
2. Analice el signo de f' en cada uno de los subintervalos. Si los valores de f' es continua a lo largo de un subintervalo dado (que es el caso típico), entonces el signo de f' en ese subintervalo no cambia y, por lo tanto, se puede determinar eligiendo un punto de prueba arbitrario x en ese subintervalo y evaluando el signo de f' en ese punto de prueba. Utilice el análisis de signos para determinar si f aumenta o disminuye en ese intervalo.
3. Utilice la Prueba de la primera derivada y los resultados del paso 2 para determinar si f tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno en cada uno de los puntos críticos.

Veamos ahora cómo utilizar esta estrategia para localizar todos los extremos locales de determinadas funciones.

EJEMPLO 4.17

Uso de la prueba de la primera derivada para encontrar los extremos locales

Utilice la prueba de la primera derivada para ubicar todos los extremos locales para $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$. Utilice una herramienta gráfica para confirmar sus resultados.

Solución

Paso 1. La derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Para encontrar los puntos críticos, tenemos que encontrar dónde $f'(x) = 0$. Al factorizar el polinomio, concluimos que los puntos críticos deben satisfacer

$$3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1) = 0.$$

Por lo tanto, los puntos críticos son $x = 3, -1$. Ahora divida el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$ en los intervalos más pequeños $\left(-\infty, -1\right), (-1, 3)$ y $\left(3, \infty\right)$.

Paso 2. Dado que f' es una función continua, para determinar el signo de $f'(x)$ sobre cada subintervalo, basta con elegir un punto sobre cada uno de los intervalos $\left(-\infty, -1\right), (-1, 3)$ y $\left(3, \infty\right)$ y determinar el signo de f' en cada uno de estos puntos. Por ejemplo, elijamos $x = -2, x = 0,$ y $x = 4$ como puntos de prueba.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f'(x) = 3(x-3)(x+1)$ en el punto de prueba	Conclusión
$\left(-\infty, -1\right)$ grandes.	$x = -2$	$(+)(-)(-) = +$	f aumenta.
$(-1, 3)$ grandes.	$x = 0$	$(+)(-)(+) = -$	f decrece.
$\left(3, \infty\right)$ grandes.	$x = 4$	$(+)(+)(+) = +$	f aumenta.

Paso 3. Dado que f' cambia el signo de positivo a negativo cuando x aumenta a través de -1, f tiene un máximo local en $x = -1$. Dado que f' cambia el signo de negativo a positivo cuando x aumenta a través de 3, f tiene un mínimo local en $x = 3$. Estos resultados analíticos coinciden con el siguiente gráfico.

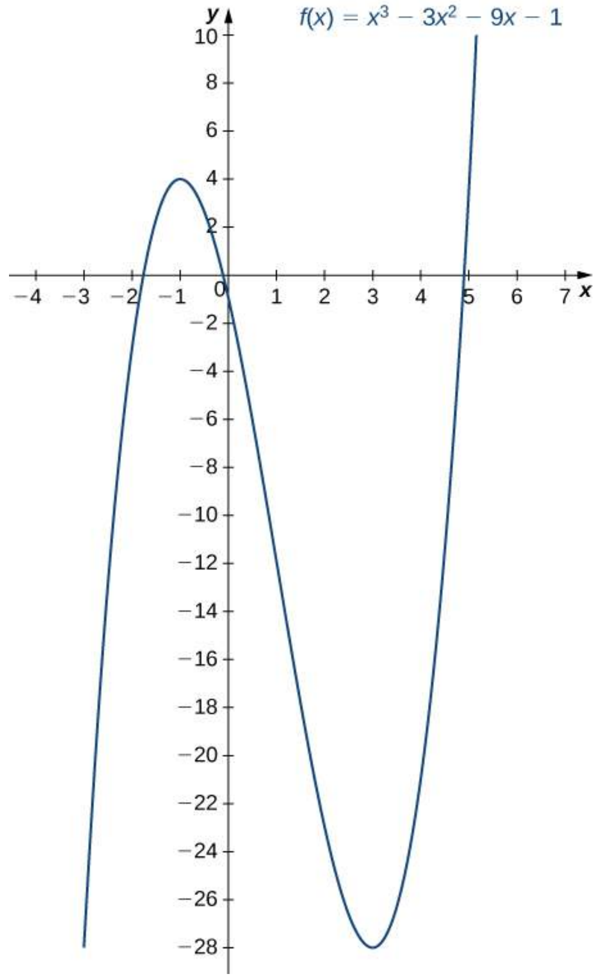


Figura 4.32 La función f tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$

4.16 Utilice la prueba de la primera derivada para localizar todos los extremos locales para $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18x$.

EJEMPLO 4.18

Uso de la prueba de la primera derivada

Utilice la prueba de la primera derivada para ubicar todos los extremos locales para $f(x) = 5x^{1/3} - x^{5/3}$. Utilice una herramienta gráfica para confirmar sus resultados.

Solución

Paso 1. La derivada es

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{-2/3} - \frac{5}{3}x^{2/3} = \frac{5}{3x^{2/3}} - \frac{5x^{2/3}}{3} = \frac{5 - 5x^{4/3}}{3x^{2/3}} = \frac{5\left(1 - x^{4/3}\right)}{3x^{2/3}}.$$

La derivada $f'(x) = 0$ cuando $1 - x^{4/3} = 0$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ a las $x = \pm 1$. La derivada $f'(x)$ es indefinida en $x = 0$. Por lo tanto, tenemos tres puntos críticos $x = 0$, $x = 1$, y $x = -1$. En consecuencia, divida el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$ en los intervalos más pequeños $\left(-\infty, -1\right)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, y $\left(1, \infty\right)$.

Paso 2: Dado que f' es continua en cada subintervalo, basta con elegir un punto de prueba x en cada uno de los intervalos del paso 1 y determinar el signo de f' en cada uno de estos puntos. Los puntos

$x = -2, x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2},$ y $x = 2$ son puntos de prueba para estos intervalos.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f'(x) = \frac{5\left(1-x^{4/3}\right)}{3x^{2/3}}$ en el punto de prueba	Conclusión
$\left(-\infty, -1\right)$ grandes.	$x = -2$	$\frac{(+)(-)}{+} = -$	f decrece.
$(-1, 0)$ grandes.	$x = -\frac{1}{2}$	$\frac{(+)(+)}{+} = +$	f aumenta.
$(0, 1)$ grandes.	$x = \frac{1}{2}$	$\frac{(+)(+)}{+} = +$	f aumenta.
$\left(1, \infty\right)$ grandes.	$x = 2$	$\frac{(+)(-)}{+} = -$	f decrece.

Paso 3: Dado que f es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -1\right)$ y creciente en el intervalo $(-1, 0)$, f tiene un mínimo local en $x = -1$. Dado que f es creciente en el intervalo $(-1, 0)$ y el intervalo $(0, 1)$, f no tienen un extremo local en $x = 0$. Dado que f es creciente en el intervalo $(0, 1)$ y decreciente en el intervalo $\left(1, \infty\right)$, f tiene un máximo local en $x = 1$. Los resultados analíticos coinciden con el siguiente gráfico.

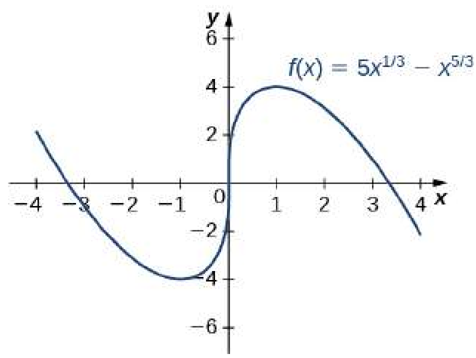


Figura 4.33 La función f tiene un mínimo local en $x = -1$ y un máximo local en $x = 1$.

4.17 Utilice la prueba de la primera derivada para encontrar todos los extremos locales para $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$.

Concavidad y puntos de inflexión

Ahora sabemos cómo determinar si una función es creciente o decreciente. Sin embargo, hay otra cuestión a tener en cuenta respecto a la forma del gráfico de una función. Si el gráfico se curva, ¿lo hace hacia arriba o hacia abajo? Esta noción se denomina **concavidad** de la función.

La Figura 4.34(a) muestra una función f con un gráfico que se curva hacia arriba. A medida que x aumenta, la pendiente de la línea tangente aumenta. Por lo tanto, dado que la derivada aumenta a medida que x aumenta, f' es una función creciente. Decimos que esta función f es cóncava hacia arriba. La Figura 4.34(b) muestra una función f que se curva hacia abajo. A medida que x aumenta, la pendiente de la línea tangente disminuye. Dado que la derivada disminuye a medida que x aumenta, f' es una función decreciente. Decimos que esta función f es cóncava hacia abajo.

Definición

Supongamos que f es una función diferenciable en un intervalo abierto I. Si f' aumenta en I, decimos f es **cóncava hacia arriba** en I. Si f' disminuye en I, decimos f es **cóncava hacia abajo** en I.

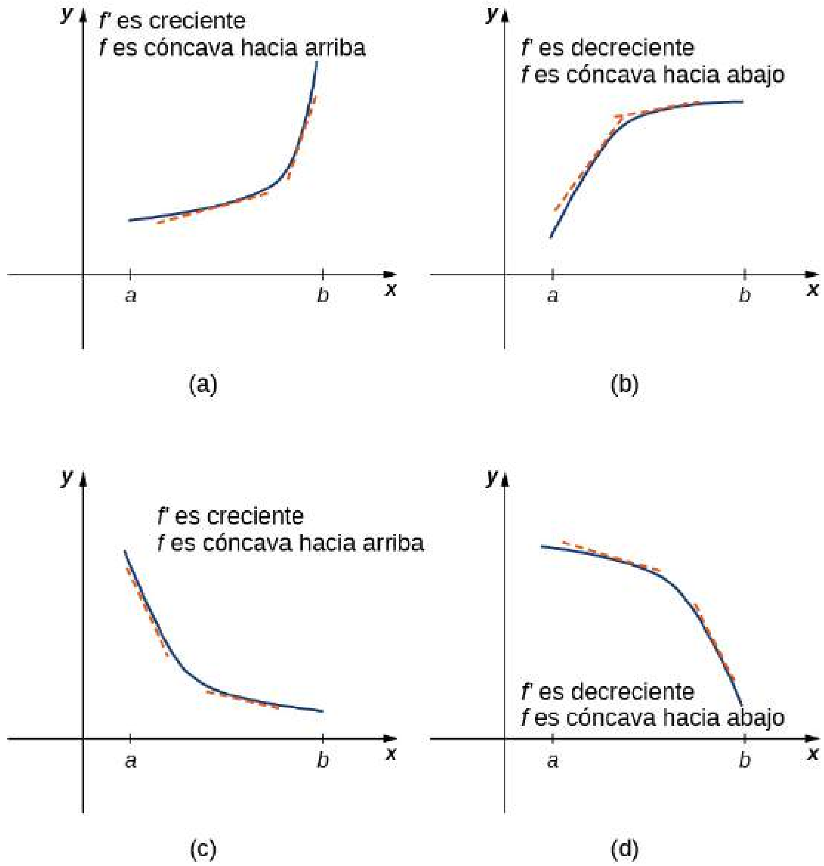


Figura 4.34 (a), (c) Ya que f' es creciente en el intervalo (a, b) , decimos f es cóncava hacia arriba en (a, b) . (b), (d) Ya que f' es decreciente en el intervalo (a, b) , decimos f es cóncava hacia abajo en (a, b) .

En general, sin tener el gráfico de una función f, ¿cómo podemos determinar su concavidad? Por definición, una función f es cóncava hacia arriba si f' aumenta. Por el corolario 3, sabemos que si f' es una función diferenciable, entonces f' es creciente si su derivada $f''(x) > 0$. Por lo tanto, una función f que es dos veces diferenciable es cóncava hacia arriba cuando $f''(x) > 0$. Del mismo modo, una función f es cóncava hacia abajo si f' decrece. Sabemos que una función diferenciable f' es decreciente si su derivada $f''(x) < 0$. Por lo tanto, una función dos veces diferenciable f es cóncava hacia abajo cuando $f''(x) < 0$. La aplicación de esta lógica se conoce como la **prueba de concavidad**.

Teorema 4.10

Prueba de concavidad
Supongamos que f es una función doblemente diferenciable en un intervalo I.

i. Si los valores de $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava hacia arriba en I.
ii. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava hacia abajo en I.

Concluimos que podemos determinar la concavidad de una función f mirando la segunda derivada de f. Además, observamos que una función f puede cambiar de concavidad (Figura 4.35). Sin embargo, una función continua puede cambiar de concavidad solo en un punto x si $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ es indefinida. En consecuencia, para determinar los intervalos en los que una función f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, buscamos aquellos valores de x donde $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ es indefinida. Una vez determinados estos puntos, dividimos el dominio de f en intervalos más pequeños y determinamos el signo de f'' en cada uno de estos intervalos más pequeños. Si los valores de f'' cambia de signo al pasar por un punto x, entonces f cambia la concavidad. Es importante recordar que una función f no puede cambiar la concavidad en un punto x incluso si $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ es indefinida. Sin embargo, si, f sí cambia la concavidad en un punto a y f es continua en a, decimos que el punto $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de f.

Definición

Si f es continua en a y f cambia la concavidad en a, el punto $(a, f(a))$ es un **punto de inflexión** de f.

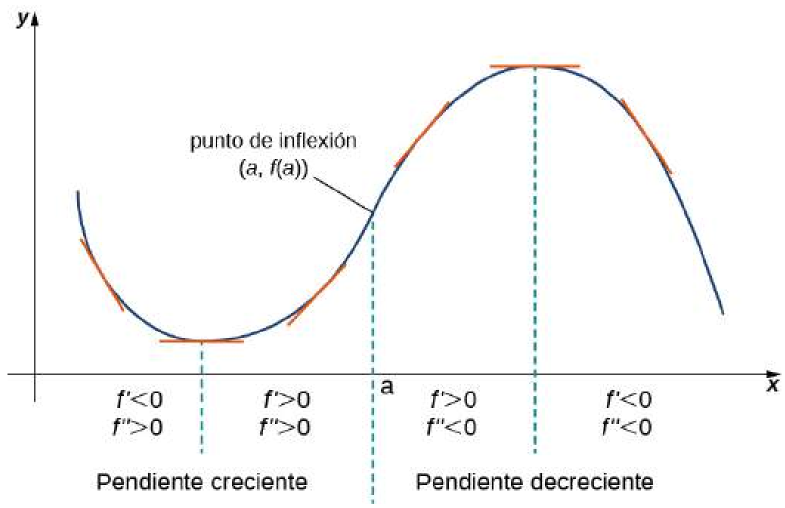


Figura 4.35 Dado que $f''(x) > 0$ por $x < a$, la función f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, a)$. Dado que $f''(x) < 0$ por $x > a$, la función f es cóncava hacia abajo en el intervalo (a, ∞). El punto $(a, f(a))$ es un punto de inflexión de f.

EJEMPLO 4.19

Prueba de concavidad

Para que la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$, determine todos los intervalos en los que f es cóncavo hacia arriba y todos los intervalos donde f es cóncava hacia abajo. Enumere todos los puntos de inflexión para f. Utilice una herramienta gráfica para confirmar sus resultados.

Solución

Para determinar la concavidad, necesitamos encontrar la segunda derivada $f''(x)$. La primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, por lo que la segunda derivada es $f''(x) = 6x - 12$. Si la función cambia de concavidad, esto ocurre ya sea cuando $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ es indefinida. Dado que f'' se define para todos los números reales x, solo tenemos que encontrar dónde $f''(x) = 0$. Si resolvemos la ecuación $6x - 12 = 0$, vemos que $x = 2$ es el único lugar donde f puede cambiar la concavidad. Ahora probamos los puntos sobre los intervalos $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$ para determinar la concavidad de f. Los puntos $x = 0$ y $x = 3$ son puntos de prueba para estos intervalos.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f''(x) = 6x - 12$ en el punto de prueba	Conclusión
$(-\infty, 2)$ grandes.	$x = 0$	$-$	f es cóncava hacia abajo
$(2, \infty)$ grandes.	$x = 3$	$+$	f es cóncava hacia arriba.

Concluimos que f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 2)$ y cóncava hacia arriba en el intervalo $(2, \infty)$. Dado que f cambia la concavidad en $x = 2$, el punto $(2, f(2)) = (2, 32)$ es un punto de inflexión. La Figura 4.36 confirma los resultados analíticos.

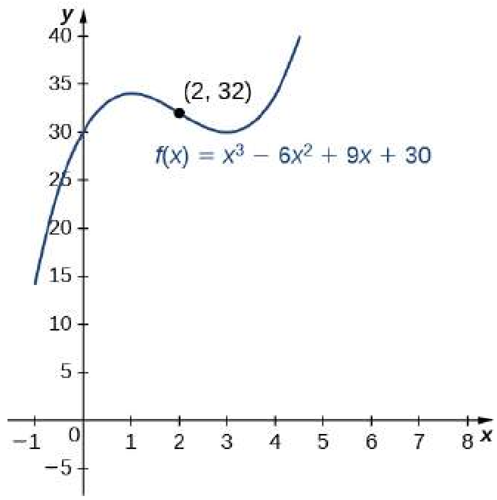


Figura 4.36 La función dada tiene un punto de inflexión en $(2, 32)$ donde el gráfico cambia de concavidad.

4.18 Para $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 18x$, halle todos los intervalos en los que f es cóncavo hacia arriba y todos los intervalos donde f es cóncava hacia abajo.

Ahora resumimos en la Tabla 4.1, la información que las derivadas primera y segunda de una función f proporcionan sobre el gráfico de f, e ilustramos esta información en la Figura 4.37.

Signo de f'	Signo de f''	¿Es f ¿aumenta o disminuye?	Concavidad
Positivo	Positivo	Creciente	Cóncava hacia arriba
Positivo	Negativo	Creciente	Cóncava hacia abajo
Negativo	Positivo	Decreciente	Cóncava hacia arriba
Negativo	Negativo	Decreciente	Cóncava hacia abajo

Tabla 4.1 **Lo que las derivadas nos dicen sobre los gráficos**

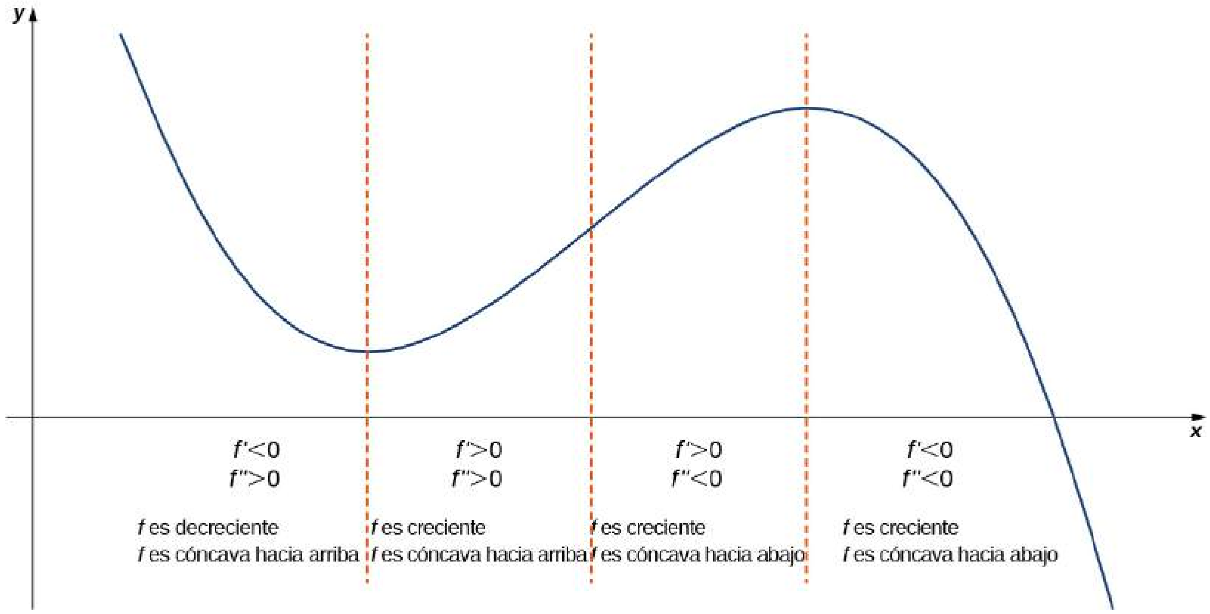


Figura 4.37 Consideremos una función dos veces diferenciable f en un intervalo abierto I. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, la función es creciente en I. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, la función es decreciente en I. Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, la función es cóncava hacia arriba. Si los valores de $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, la función es cóncava hacia abajo en I.

La prueba de la segunda derivada

La prueba de la primera derivada proporciona una herramienta analítica para encontrar los extremos locales, pero la segunda derivada también puede utilizarse para localizar los valores extremos. Utilizar la segunda derivada puede ser a veces un método más sencillo que utilizar la primera derivada.

Sabemos que si una función continua tiene un extremo local, este debe producirse en un punto crítico. Sin embargo, una función no necesita tener un extremo local en un punto crítico. Aquí examinamos cómo se puede utilizar la **prueba de la segunda derivada** para determinar si una función tiene un extremo local en un punto crítico. Supongamos que f es una función dos veces diferenciable tal que $f'(a) = 0$ y f'' es continua en un intervalo abierto I que contiene a. Supongamos que $f''(a) < 0$. Dado que f'' es continua en I, $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ (Figura 4.38). Entonces, por el corolario 3, f' es una función decreciente sobre I. Dado que $f'(a) = 0$, concluimos que para todo $x \in I$, $f'(x) > 0$ si $x < a$ y $f'(x) < 0$ si $x > a$. Por lo tanto, mediante la prueba de la primera derivada, f tiene un máximo local en $x = a$. Por otro lado, supongamos que existe un punto b de manera que $f'(b) = 0$ pero $f''(b) > 0$. Dado que f'' es continua en un intervalo abierto I que contiene b, entonces $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ (Figura 4.38). Entonces, por el corolario 3, f' es una función creciente sobre I. Dado que $f'(b) = 0$, concluimos que para todo $x \in I$, $f'(x) < 0$ si $x < b$ y $f'(x) > 0$ si $x > b$. Por lo tanto, mediante la prueba de la primera derivada, f tiene un mínimo local en $x = b$.

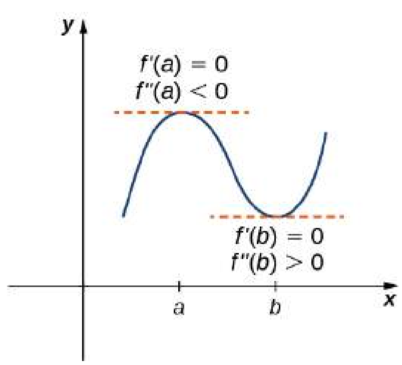


Figura 4.38 Consideremos una función dos veces diferenciable f tal que f'' es continuo. Dado que $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, hay un intervalo I que contiene a tal que para todo x en I, f es creciente si $x < a$ y f es decreciente si $x > a$. Como resultado, f tiene un máximo local en $x = a$. Dado que $f'(b) = 0$ y $f''(b) > 0$, hay un intervalo I que contiene b tal que para todo x en I, f es decreciente si $x < b$ y f es creciente si $x > b$. Como resultado, f tiene un mínimo local en $x = b$.

Teorema 4.11

Prueba de la segunda derivada

Supongamos que $f'(c) = 0$, f'' es continua en un intervalo que contiene c.

i. Si los valores de $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.
ii. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.
iii. Si $f''(c) = 0$, entonces la prueba no es concluyente.

Note que en el caso iii., cuando $f''(c) = 0$, entonces f puede tener un máximo local, un mínimo local o ninguno de los dos en c. Por ejemplo, las funciones $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, y $f(x) = -x^4$ todas tienen puntos críticos en $x = 0$. En cada caso, la segunda derivada es cero en $x = 0$. Sin embargo, la función $f(x) = x^4$ tiene un mínimo local en $x = 0$ mientras que la función $f(x) = -x^4$ tiene un máximo local en x, y la función $f(x) = x^3$ no tienen un extremo local en $x = 0$.

Veamos ahora cómo utilizar la prueba de la segunda derivada para determinar si f tiene un máximo local o un mínimo local en un punto crítico c donde $f'(c) = 0$.

EJEMPLO 4.20

Usar la prueba de la segunda derivada

Utilice la segunda derivada para encontrar la ubicación de todos los extremos locales para $f(x) = x^5 - 5x^3$.

Solución

Para aplicar la prueba de la segunda derivada, primero tenemos que encontrar los puntos críticos c donde $f'(c) = 0$. La derivada es $f'(x) = 5x^4 - 15x^2$. Por lo tanto, $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2\left(x^2 - 3\right) = 0$ cuando $x = 0, \pm 3, \ldots\sqrt{3}$.

Para determinar si f tiene un extremo local en cualquiera de estos puntos, tenemos que evaluar el signo de f'' en estos puntos. La segunda derivada es

$$f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x\left(2x^2 - 3\right).$$

En la siguiente tabla, evaluamos la segunda derivada en cada uno de los puntos críticos y utilizamos la prueba de la segunda derivada para determinar si f tiene un máximo local o un mínimo local en cualquiera de estos puntos.

x	$f''(x)$	Conclusión
$-\sqrt{3}$	$-30\sqrt{3}$	Máximo
0	0	La prueba de la segunda derivada no es concluyente
$\sqrt{3}$	$30\sqrt{3}$	Mínimo

Mediante la prueba de la segunda derivada, concluimos que f tiene un máximo local en $x = -\sqrt{3}$ y f tiene un mínimo local en $x = \sqrt{3}$. La prueba de la segunda derivada no es concluyente en $x = 0$. Para determinar si f tiene un extremo local en $x = 0$, aplicamos la prueba de la primera derivada. Para evaluar el signo de $f'(x) = 5x^2\left(x^2 - 3\right)$ para $x \in \left(-\sqrt{3}, 0\right)$ y $x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$, supongamos que $x = -1$ y $x = 1$ son los dos puntos de prueba. Dado que $f'(-1) < 0$ y $f'(1) < 0$, concluimos que f es decreciente en ambos intervalos y, por tanto, f no tiene un extremo local en $x = 0$ como se muestra en la siguiente gráfica.

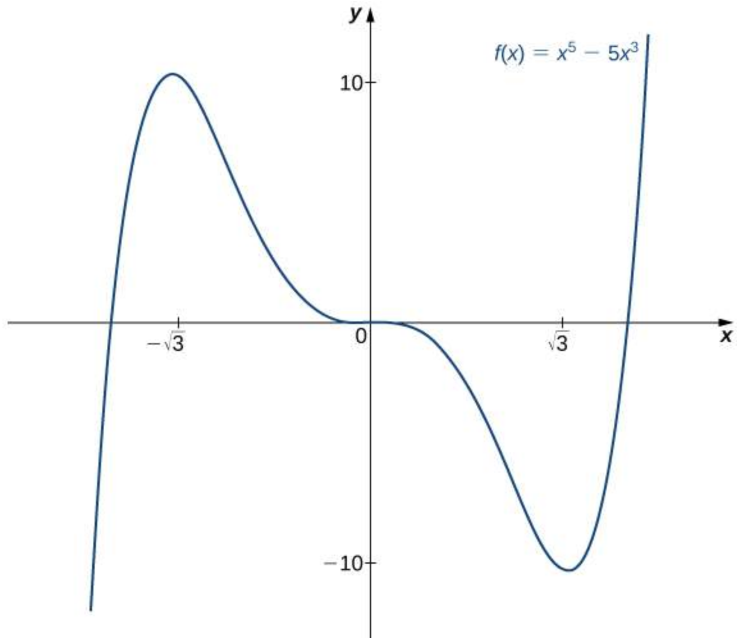


Figura 4.39 La función f tiene un máximo local en $x = -\sqrt{3}$ y un mínimo local en $x = \sqrt{3}$

4.19 Considere la función $f(x) = x^3 - \left(\frac{3}{2}\right)x^2 - 18x$. Los puntos $c = 3, -2$ satisfacen $f'(c) = 0$. Utilice la prueba de la segunda derivada para determinar si f tiene un máximo o un mínimo local en esos puntos.

Ahora hemos desarrollado las herramientas que necesitamos para determinar dónde una función es creciente y decreciente una, así como hemos adquirido una comprensión de la forma básica del gráfico. En la siguiente sección discutiremos lo que ocurre con una función cuando $x \to \pm\infty$. En ese momento, tenemos suficientes herramientas para proporcionar gráficos precisos de una gran variedad de funciones.

SECCIÓN 4.5 EJERCICIOS

194. Si los valores de c es un punto crítico de $f(x)$, ¿cuándo no hay un máximo o un mínimo local en c? Explique.

195. Para que la función $y = x^3$, ¿es x $x = 0$ tanto un punto de inflexión como un máximo/mínimo local?

196. Para que la función $y = x^3$, ¿es x $x = 0$ ¿un punto de inflexión?

197. ¿Es posible que un punto c sea a la vez un punto de inflexión y un extremo local de una función dos veces diferenciable?

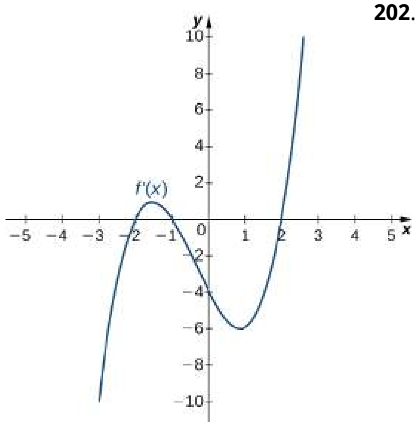
198. ¿Por qué se necesita continuidad para la prueba de la primera derivada? Proponga un ejemplo.

199. Explique si una función cóncava hacia abajo tiene que cruzar $y = 0$ para algún valor de x.

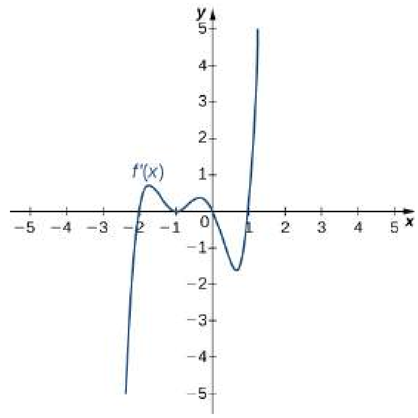
200. Explique si un polinomio de grado 2 puede tener un punto de inflexión.

Para los siguientes ejercicios, analice los gráficos de f' *, y, a continuación, enumere todos los intervalos en los que* f *es creciente o decreciente.*

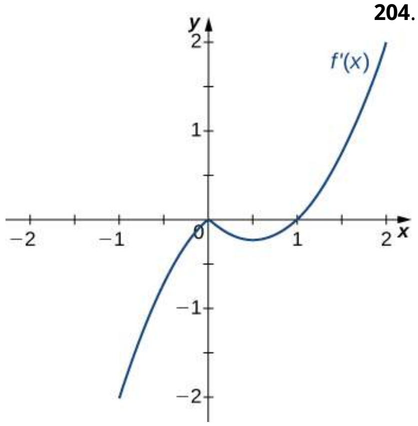
201.



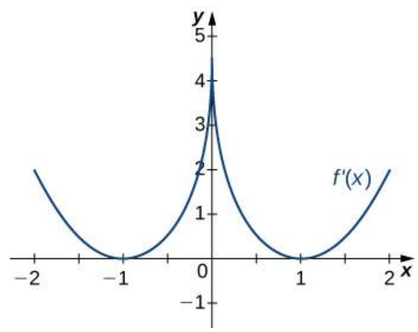
202.



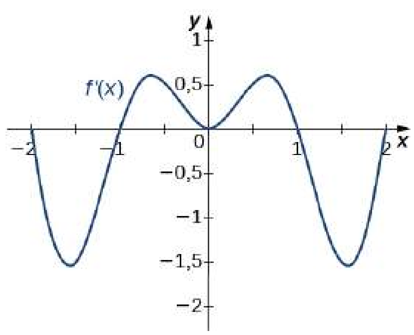
203.



204.



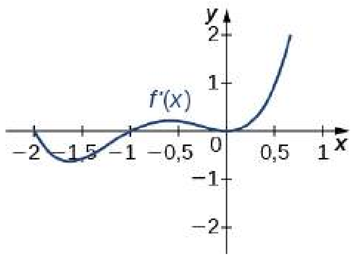
205.



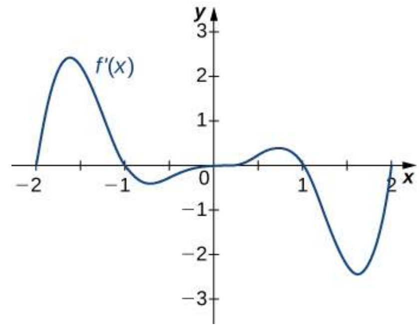
Para los siguientes ejercicios, analice los gráficos de f' *, y, a continuación, enumere todos los intervalos en los que*

a. f aumenta y disminuye y
b. los mínimos y los máximos están localizados.

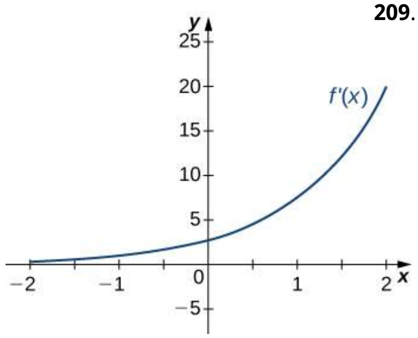
206.



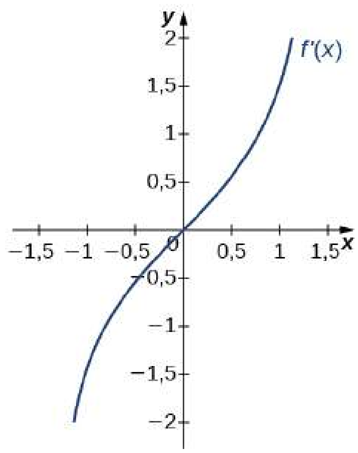
207.



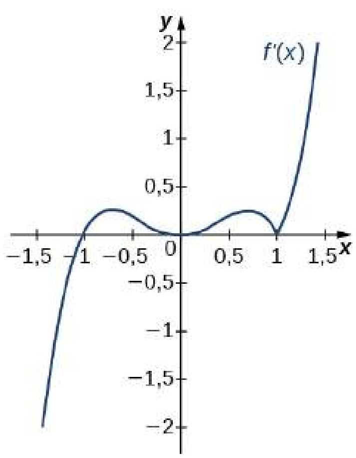
208.



209.

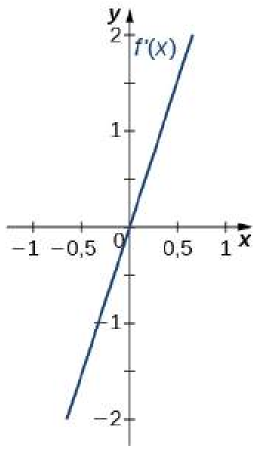


210.

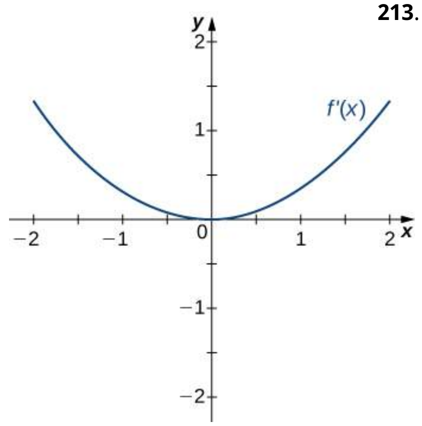


Para los siguientes ejercicios, analice los gráficos de f', y, a continuación, haga una lista de todos los puntos de inflexión e intervalos f que son cóncavos hacia arriba y cóncavos hacia abajo.

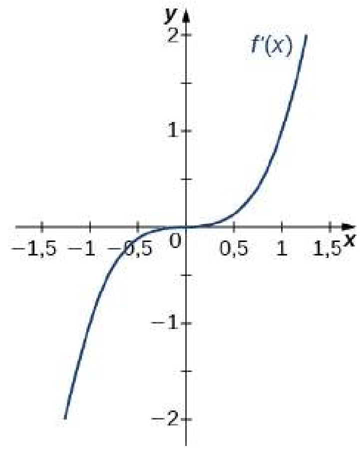
211.



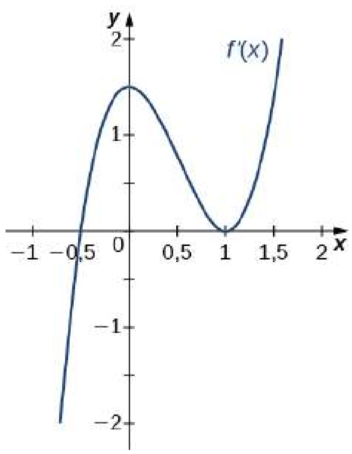
212.



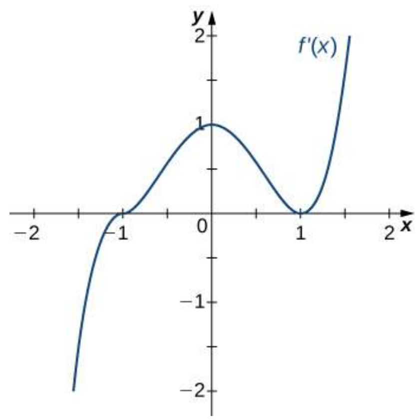
213.



214.



215.



En los siguientes ejercicios, dibuje un gráfico que satisfaga las especificaciones dadas para el dominio $x\epsilon[-3, 3]$. La función no tiene que ser continua ni diferenciable.

216. $f(x) > 0, f'(x) > 0$ en $x > 1, -3 < x < 0, f'(x) = 0$ en $0 < x < 1$

217. $f'(x) > 0$ en $x > 2, -3 < x < -1, f'(x) < 0$ en $-1 < x < 2, f''(x) < 0$ para todo x

218. $f''(x) < 0$ en $-1 < x < 1, f''(x) > 0, -3 < x < -1, 1 < x < 3,$ máximo local en $x = 0$, mínimos locales en $x = \pm 2$

219. Hay un máximo local en $x = 2$, mínimo local en $x = 1$, y el gráfico no es cóncavo hacia arriba ni cóncavo hacia abajo.

220. Hay máximos locales en $x = \pm 1$, la función es cóncava hacia arriba para toda x, y la función sigue siendo positiva para toda x.

Para los siguientes ejercicios, determine

a. intervalos en los que f aumenta o disminuye y
b. mínimos y máximos locales de f.

221. $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^3 x$ en $-\pi < x < \pi$

222. $f(x) = x^2 + \cos x$

En los siguientes ejercicios, determine a. los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo, y b. los puntos de inflexión de f.

223. $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 2$

Para los siguientes ejercicios, determine

a. intervalos en los que f es creciente o decreciente.
b. mínimos y máximos locales de f,
c. intervalos en los que f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo y
d. los puntos de inflexión de f.

224. $f(x) = x^2 - 6x$

225. $f(x) = x^3 - 6x^2$

226. $f(x) = x^4 - 6x^3$

227. $f(x) = x^{11} - 6x^{10}$

228. $f(x) = x + x^2 - x^3$

229. $f(x) = x^2 + x + 1$

230. $f(x) = x^3 + x^4$

Para los siguientes ejercicios, determine

a. intervalos en los que f es creciente o decreciente.
b. mínimos y máximos locales de f,
c. intervalos en los que f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo y
d. los puntos de inflexión de f. Dibuje la curva y luego utilice una calculadora para comparar tu respuesta. Si no puede determinar la respuesta exacta de forma analítica, utilice una calculadora.

231. **[T]** $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) - \cos(\pi x)$ en $x = [-1, 1]$

232. **[T]** $f(x) = x + \operatorname{sen}(2x)$ en $x = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

233. **[T]** $f(x) = \operatorname{sen} x + \tan x$ en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

234. **[T]** $f(x) = (x-2)^2(x-4)^2$

235. **[T]** $f(x) = \frac{1}{1-x}, x \neq 1$

236. **[T]** $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x = [2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$

237. $f(x) = \operatorname{sen}(x)e^x$ en $x = [-\pi, \pi]$

238. $f(x) = \ln x \sqrt{x}, x > 0$

239. $f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{x}, x > 0$

240. $f(x) = \frac{e^x}{x}, x \neq 0$

En los siguientes ejercicios, interprete las frases en términos de f, f', y f''.

241. La población crece más lentamente. Aquí f es la población.

242. Una moto acelera más rápido, pero un automóvil va más rápido. Aquí $f =$ Posición de la moto menos la posición del automóvil.

243. El avión aterriza sin problemas. Aquí f es la altitud del avión.

244. Los precios de las acciones están en su punto más alto. Aquí f es el precio de las acciones.

245. La economía se está acelerando. Aquí f es una medida de la economía, como el PIB.

En los siguientes ejercicios, considere un polinomio de tercer grado $f(x)$, que tiene las propiedades $f'(1) = 0, f'(3) = 0$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

246. $f(x) = 0$ para algunos $1 \le x \le 3$

247. $f''(x) = 0$ para algunos $1 \le x \le 3$

248. No hay un máximo absoluto en $x = 3$

249. Si $f(x)$ tiene tres raíces, entonces tiene 1 punto de inflexión.

250. Si los valores de $f(x)$ tiene un punto de inflexión, entonces tiene tres raíces reales.

4.6 Límites al infinito y asíntotas

Objetivos de aprendizaje

- **4.6.1** Calcular el límite de una función a medida que x aumenta o disminuye sin límites.
- **4.6.2** Reconocer una asíntota horizontal en el gráfico de una función.
- **4.6.3** Estimar el comportamiento final de una función cuando x aumenta o disminuye sin límites.
- **4.6.4** Reconocer una asíntota oblicua en el gráfico de una función.
- **4.6.5** Analizar una función y sus derivadas para dibujar su gráfico.

Hemos mostrado cómo utilizar la primera y la segunda derivadas de una función para describir la forma de un gráfico. Para graficar una función f definida en un dominio no limitado, también necesitamos conocer el comportamiento de f cuando $x \to \pm\infty$. En esta sección, definiremos los límites en el infinito y mostramos cómo estos límites afectan a el gráfico de una función. Al final de esta sección, describiremos una estrategia para graficar una función arbitraria f.

Límites al infinito

Comenzamos examinando qué significa que una función tenga un límite finito al infinito. A continuación, estudiamos la idea de una función con un límite infinito al infinito. Ya en la Introducción a funciones y gráficos vimos las asíntotas verticales; en esta sección tratamos las asíntotas horizontales y oblicuas.

Límites al infinito y asíntotas horizontales

Recordemos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L siempre y cuando x esté lo suficientemente cerca de a. Podemos extender esta idea a los límites al infinito. Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$. Como se puede ver de manera gráfico en la Figura 4.40 y numéricamente en la Tabla 4.2, cuando los valores de x aumentan, los valores de $f(x)$ se acercan a 2. Decimos que el límite cuando x tiende a ∞ de $f(x)$ ¿es 2 y se escribe $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2$. Del mismo modo, para $x < 0$, cuando los valores $|x|$ aumentan, los valores de $f(x)$ se acerca a 2. Decimos que el límite cuando x se acerca a $-\infty$ de $f(x)$ ¿es 2 y se escribe $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

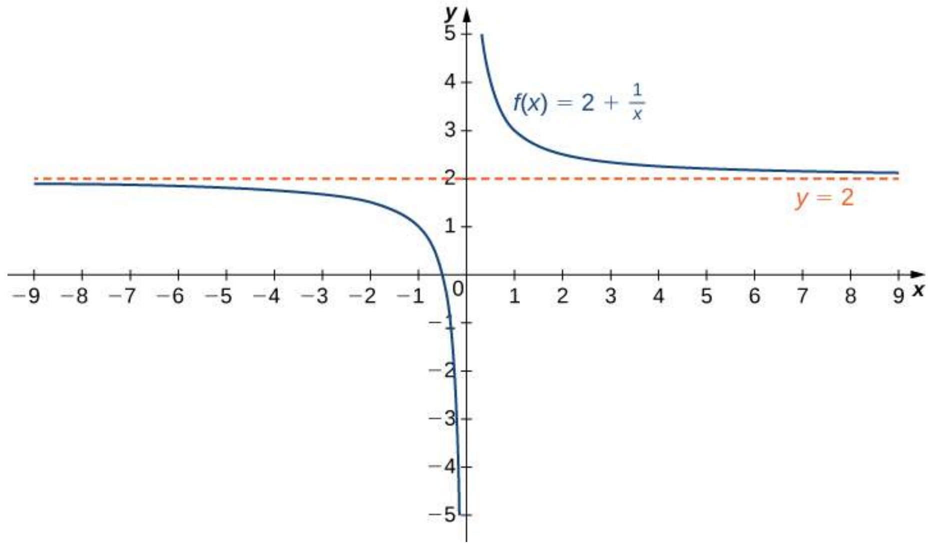


Figura 4.40 La función se acerca a la asíntota $y = 2$ cuando x se aproxima a $\pm\infty$.

x	10	100	1.000	10.000
$2 + \frac{1}{x}$	2,1	2,01	2,001	2,0001
x	-10	-100	-1000	-10000
$2 + \frac{1}{x}$	1,9	1,99	1,999	1,9999

Tabla 4.2 Valores de una función f cuando $x \to \pm\infty$

De forma más general, para cualquier función f, decimos que el límite, cuando $x \to \infty$ de $f(x)$ ¿es L si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L siempre y cuando x es suficientemente grande. En ese caso, escribimos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$. Del mismo modo, decimos que el límite cuando $x \to -\infty$ de $f(x)$ ¿es L si $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L siempre y cuando $x < 0$ y $|x|$ es suficientemente grande. En ese caso, escribimos $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$. Ahora veremos la definición de una función que tiene un límite al infinito.

Definición

(Informal) Si los valores de $f(x)$ se acercan arbitrariamente a L a medida que x se hace suficientemente grande, decimos que la función f tiene un **límite al infinito** y se escribe

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L.$$

Si los valores de $f(x)$ se acerca arbitrariamente a L por $x < 0$ cuando $|x|$ se hace suficientemente grande, decimos que la función f tiene un límite al infinito negativo y se escribe

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Si los valores $f(x)$ se acercan arbitrariamente a algún valor finito L a medida que $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, el gráfico de f se acerca a la línea $y = L$. En ese caso, la línea $y = L$ es una asíntota horizontal de f (Figura 4.41). Por ejemplo, en la función $f(x) = \frac{1}{x}$, dado que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, la línea $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Definición

Si los valores de $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, decimos que la línea $y = L$ es una **asíntota horizontal** de f.

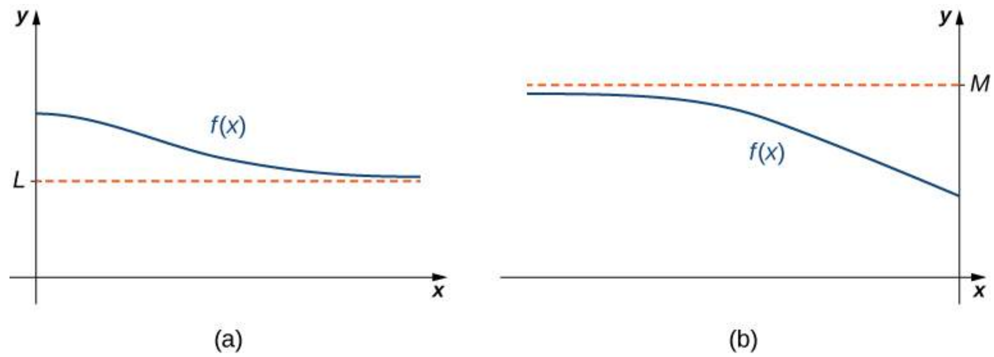


Figura 4.41 (a) Cuando $x \to \infty$, los valores de f se acercan arbitrariamente a L. La línea $y = L$ es una asíntota horizontal de f. (b) Cuando $x \to -\infty$, los valores de f se acercan arbitrariamente a M. La línea $y = M$ es una asíntota horizontal de f.

Una función no puede cruzar una asíntota vertical porque el gráfico debe acercarse al infinito (o $-\infty$) desde al menos una dirección cuando x se acerca a la asíntota vertical. Sin embargo, una función puede intersecar una asíntota horizontal. De hecho, una función puede intersecar una asíntota horizontal un número ilimitado de veces. Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{(\cos x)}{x} + 1$ que se muestra en la Figura 4.42 interseca la asíntota horizontal $y = 1$ un número infinito de veces al oscilar alrededor de la asíntota con una amplitud cada vez menor.

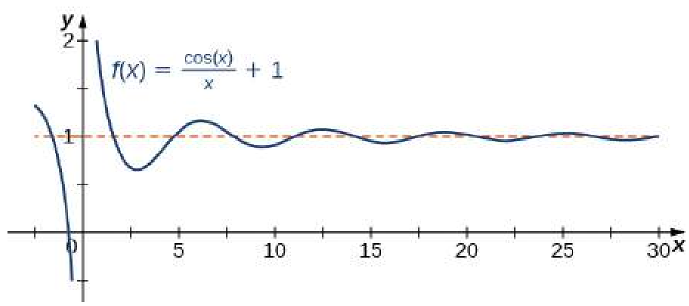


Figura 4.42 El gráfico de $f(x) = (\cos x)/x + 1$ interseca su asíntota horizontal $y = 1$ un número infinito de veces.

Las leyes algebraicas de los límites y el teorema del emparedado que presentamos en la Introducción a los límites también se aplican a los límites al infinito. Ilustramos cómo utilizar estas leyes para calcular varios límites al infinito.

EJEMPLO 4.21

Cálculo de los límites al infinito

Para cada una de las siguientes funciones f, evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. Determine la(s) asíntota(s) horizontal(es) de f.

a. $f(x) = 5 - \frac{2}{x^2}$
b. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
c. $f(x) = \tan^{-1}(x)$

Solución

a. Utilizando las leyes algebraicas de los límites, tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}5-2\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)=5-2.0=5.$$

Del mismo modo, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5$. Por lo tanto, $f(x)=5-\frac{2}{x^2}$ tiene una asíntota horizontal de $y=5$ y f se acerca a esta asíntota horizontal cuando $x\to\pm\infty$ como se muestra en la siguiente gráfica.

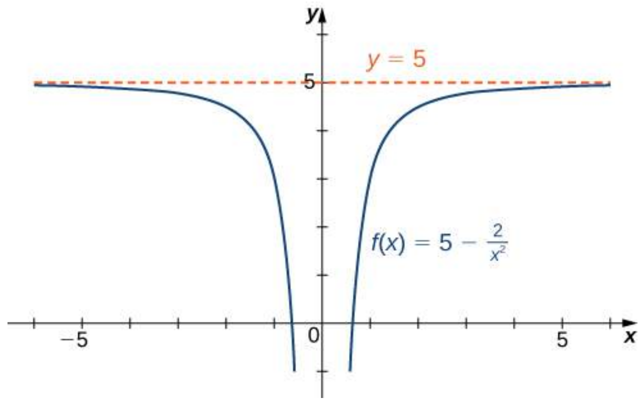


Figura 4.43 Esta función se aproxima a una asíntota horizontal cuando $x\to\pm\infty$.

b. Dado que $-1\le \operatorname{sen} x\le 1$ para todo x, tenemos

$$\frac{-1}{x}\le\frac{\operatorname{sen} x}{x}\le\frac{1}{x}$$

para todas las $x\ne 0$. Además, ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x}=0=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x},$$

podemos aplicar el teorema del emparedado para concluir que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0.$$

Igualmente,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0.$$

Por lo tanto, $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiene una asíntota horizontal de $y=0$ y $f(x)$ se acerca a esta asíntota horizontal cuando $x\to\pm\infty$ como se muestra en la siguiente gráfica.

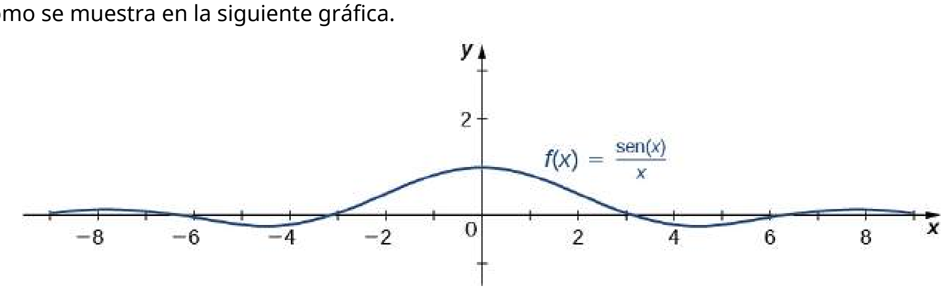


Figura 4.44 Esta función interseca su asíntota horizontal varias veces.

c. Para evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \tan^{-1}(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \tan^{-1}(x)$, primero consideramos el gráfico de $y = \tan(x)$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ como se muestra en la siguiente gráfica.

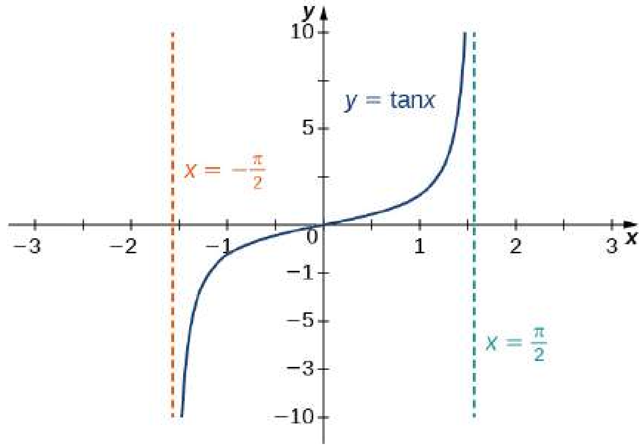


Figura 4.45 El gráfico de $\tan x$ tiene asíntotas verticales en $x = \pm\frac{\pi}{2}$

Dado que

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = \infty,$$

se deduce que

$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Del mismo modo, ya que

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \tan x = -\infty,$$

se deduce que

$$\lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Como resultado, $y = \frac{\pi}{2}$ y $y = -\frac{\pi}{2}$ son asíntotas horizontales de $f(x) = \tan^{-1}(x)$ como se muestra en la siguiente gráfica.

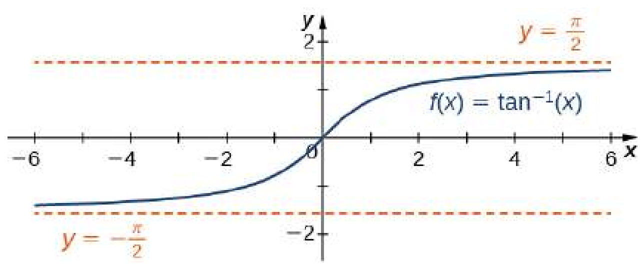


Figura 4.46 Esta función tiene dos asíntotas horizontales.

4.20 Evalúe $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3 + \frac{4}{x}\right)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 + \frac{4}{x}\right)$. Determine las asíntotas horizontales de $f(x) = 3 + \frac{4}{x}$, si las hay.

Límites infinitos al infinito

A veces los valores de una función f se vuelven arbitrariamente grandes a medida que $x \to \infty$ (o cuando $x \to -\infty$). En este caso, escribimos $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$). Por otro lado, si los valores de f son negativos, pero su magnitud se vuelve arbitrariamente grande cuando $x \to \infty$ (o cuando $x \to -\infty$), escribimos $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ (o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$).

Por ejemplo, consideremos la función $f(x) = x^3$. Como se ve en la Tabla 4.3 y en la Figura 4.47, cuando $x \to \infty$ los valores $f(x)$ se vuelven arbitrariamente grandes. Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$. Por otro lado, cuando $x \to -\infty$, los valores de $f(x) = x^3$ son negativos, pero su magnitud aumenta arbitrariamente. En consecuencia, $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.

x	10	20	50	100	1.000
x^3	1.000	8.000	125.000	1.000.000	1.000.000.000
x	−10	−20	−50	−100	−1000
x^3	−1000	–8.000	–125.000	−1000000	−1.000.000.000

Tabla 4.3 Valores de una función potencia cuando $x \to \pm\infty$

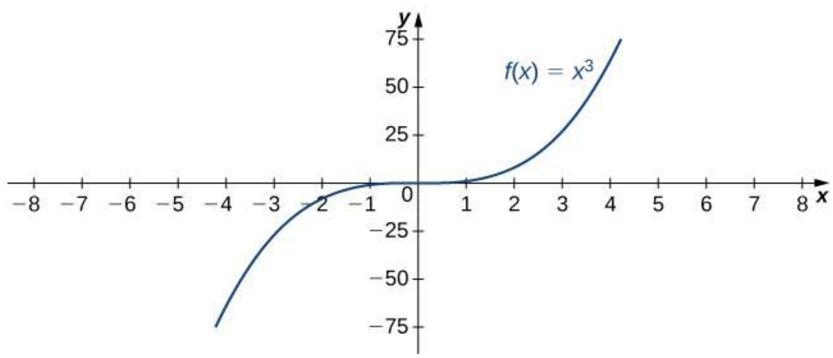


Figura 4.47 Para esta función, los valores funcionales tienden a infinito cuando $x \to \pm\infty$.

Definición

(Informal) Decimos que una función f tiene un límite infinito al infinito y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

si $f(x)$ se vuelve arbitrariamente grande para x suficientemente grande. Decimos que una función tiene un límite infinito negativo en el infinito y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

si $f(x) < 0$ y $|f(x)|$ se vuelve arbitrariamente grande para x suficientemente grande. Del mismo modo, podemos definir los límites infinitos cuando $x \to -\infty$.

Definiciones formales

Anteriormente, utilizamos los términos *arbitrariamente cercano*, *arbitrariamente grande* y *suficientemente grande* para definir los límites al infinito de manera informal. Aunque estos términos proporcionan descripciones precisas de los límites al infinito, no son precisos desde el punto de vista matemático. Aquí hay definiciones más formales de los límites al infinito. A continuación, veremos cómo utilizarlas para demostrar resultados que involucran límites al infinito.

Definición

(Formal) Decimos que una función f tiene un **límite al infinito**, si existe un número real L tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

para todos los $x > N$. En ese caso, escribimos

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

(vea la Figura 4.48).

Decimos que una función f tiene un límite al infinito negativo si existe un número real L tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N < 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

para todos los $x < N$. En ese caso, escribimos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

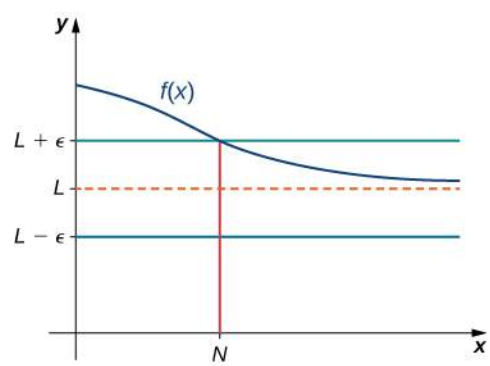


Figura 4.48 Para una función con límite al infinito, para toda $x > N$, $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Anteriormente en esta sección, utilizamos pruebas gráficas en la Figura 4.40 y pruebas numéricas en la Tabla 4.2 para concluir que $\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$. Aquí utilizamos la definición formal de límite al infinito para demostrar este resultado de manera rigurosa.

EJEMPLO 4.22

Ejemplo de límite finito al infinito

Utilice la definición formal de límite en el infinito para demostrar que $\lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$.

Solución

Supongamos que $\varepsilon > 0$. Supongamos que $N = \frac{1}{\varepsilon}$. Por lo tanto, para todo $x > N$, tenemos

$$\left|2 + \frac{1}{x} - 2\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \varepsilon.$$

4.21 Utilice la definición formal de límite en el infinito para demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3.$

Ahora nos centraremos en una definición más precisa para un límite infinito al infinito.

Definición

(Formal) Decimos que una función f tiene un **límite infinito al infinito** y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

si para todo $M>0$, existe un $N>0$ tal que

$$f(x)>M$$

para todos los $x>N$ (vea la Figura 4.49).

Decimos que una función tiene un límite infinito negativo en el infinito y escribimos

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

si para todo $M<0$, existe un $N>0$ tal que

$$f(x)<M$$

para todos los $x>N$.

Del mismo modo, podemos definir los límites cuando $x\to-\infty$.

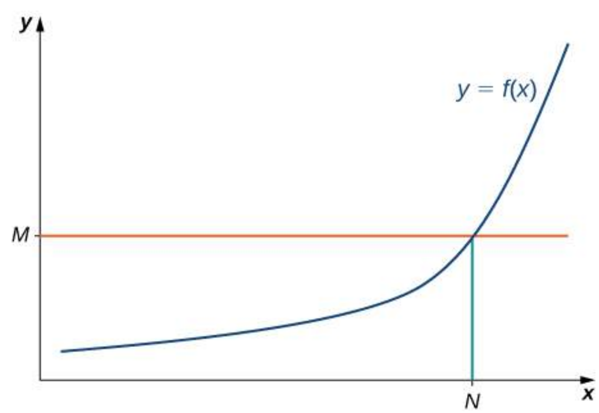


Figura 4.49 Para una función con límite infinito al infinito, para toda $x>N$, $f(x)>M$.

Anteriormente, utilizamos pruebas gráficas (Figura 4.47) y numéricas (Tabla 4.3) para concluir que $\lim\limits_{x\to\infty} x^3=\infty$. Aquí utilizamos la definición formal de límite infinito al infinito para demostrar ese resultado.

EJEMPLO 4.23

Un límite infinito al infinito

Utilice la definición formal de límite infinito en el infinito para demostrar que $\lim\limits_{x\to\infty} x^3=\infty$.

Solución

Supongamos que $M>0$. Supongamos que $N=\sqrt[3]{M}$. Entonces, para todos los $x>N$, tenemos

$$x^3 > N^3 = \left(\sqrt[3]{M}\right)^3 = M.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

4.22 Utilice la definición formal de límite infinito en el infinito para demostrar que $\lim\limits_{x \to \infty} 3x^2 = \infty$.

Comportamiento final

El comportamiento de una función cuando $x \to \pm\infty$ se denomina **comportamiento final** de la función. En cada uno de sus extremos, la función podría demostrar uno de los siguientes tipos de comportamiento:

1. La función $f(x)$ se acerca a una asíntota horizontal $y = L$.
2. La función $f(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$.
3. La función no se acerca a un límite finito, ni se acerca a ∞ o $-\infty$. En este caso, la función puede tener un comportamiento oscilante.

Consideremos varias clases de funciones y veamos los diferentes tipos de comportamientos finales de estas funciones.

Comportamiento final de las funciones polinómicas

Considere la función potencia $f(x) = x^n$ donde n es un número entero positivo. En la Figura 4.50 y la Figura 4.51, vemos que

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty; n = 1, 2, 3, \ldots$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty; n = 2, 4, 6, \ldots \\ -\infty; n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}.$$

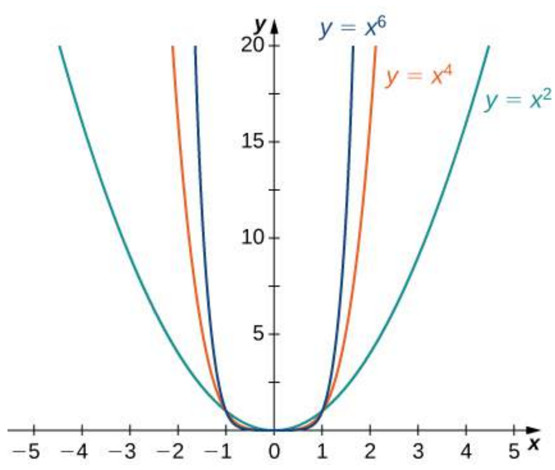


Figura 4.50 Para las funciones potencia con una potencia par de n, $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty = \lim\limits_{x \to -\infty} x^n$.

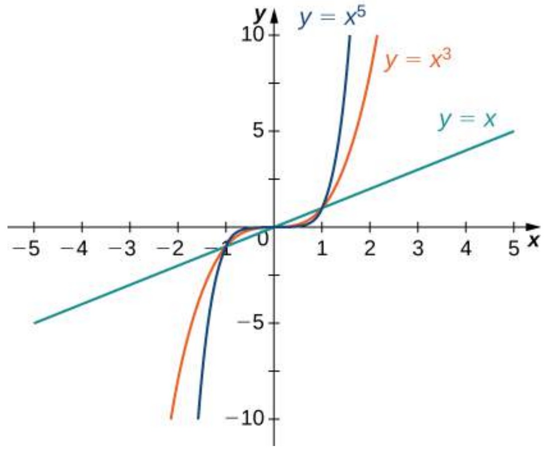


Figura 4.51 Para las funciones potencia con una potencia impar de n, $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

Con estos datos, no es difícil evaluar $\lim\limits_{x \to \infty} cx^n$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} cx^n$, donde c es una constante cualquiera y n es un número entero positivo. Si los valores de $c > 0$, el gráfico de $y = cx^n$ es un estiramiento o compresión vertical de $y = x^n$, y por lo tanto

$$\lim_{x \to \infty} cx^n = \lim_{x \to \infty} x^n \text{ y } \lim_{x \to -\infty} cx^n = \lim_{x \to -\infty} x^n \text{ si } c > 0.$$

Si los valores de $c < 0$, el gráfico de $y = cx^n$ es un estiramiento o compresión vertical combinado con una reflexión sobre el eje x, y por lo tanto

$$\lim_{x \to \infty} cx^n = -\lim_{x \to \infty} x^n \text{ y } \lim_{x \to -\infty} cx^n = -\lim_{x \to -\infty} x^n \text{ si } c < 0.$$

Si los valores de $c = 0$, $y = cx^n = 0$, en cuyo caso $\lim\limits_{x \to \infty} cx^n = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} cx^n$.

EJEMPLO 4.24

Límites al infinito para las funciones potencia

Para cada función f, evalúe $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

a. $f(x) = -5x^3$
b. $f(x) = 2x^4$

Solución

a. Dado que el coeficiente de x^3 ¿es -5, el gráfico de $f(x) = -5x^3$ implica un estiramiento vertical y una reflexión del gráfico de $y = x^3$ alrededor del eje x. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(-5x^3\right) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-5x^3\right) = \infty$.

b. Dado que el coeficiente de x^4 ¿es 2, el gráfico de $f(x) = 2x^4$ es un estiramiento vertical del gráfico de $y = x^4$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to \infty} 2x^4 = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^4 = \infty$.

4.23 Supongamos que $f(x) = -3x^4$. Halle $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Ahora veremos cómo los límites al infinito de las funciones potencia pueden utilizarse para determinar $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ para cualquier función polinómica f. Considere una función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

de grado $n \geq 1$ por lo que $a_n \neq 0$. Factorizando, vemos que

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}\right).$$

Dado que $x \to \pm\infty$, todos los términos dentro de los paréntesis se aproximan a cero excepto el primer término. Concluimos que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n.$$

Por ejemplo, la función $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4$ se comporta como $g(x) = 5x^3$ cuando $x \to \pm\infty$ como se muestra en la Figura 4.52 y la Tabla 4.4.

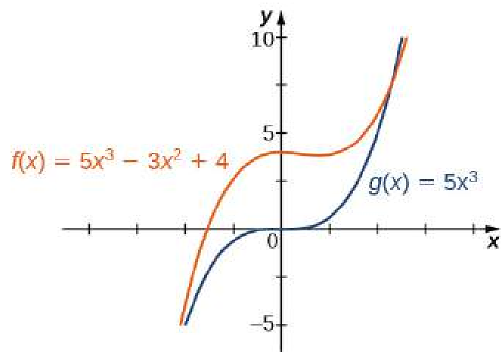


Figura 4.52 El comportamiento final de un polinomio se determina por el comportamiento del término con mayor exponente.

x	10	100	1.000
$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4$	4704	$4.970.004$	$4.997.000.004$
$g(x) = 5x^3$	5.000	5000000	$5.000.000.000$
x	-10	-100	-1000
$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 4$	-5296	-5029996	-5002999996
$g(x) = 5x^3$	-5.000	$-5.000.000$	$-5.000.000.000$

Tabla 4.4 El comportamiento final de un polinomio se determina por el término de mayor exponente.

Comportamiento final de las funciones algebraicas

El comportamiento final de las funciones racionales y de las funciones con radicales es un poco más complicado que el de los polinomios. En el Ejemplo 4.25, mostramos que los límites al infinito de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ dependen de la relación entre el grado del numerador y el grado del denominador. Para evaluar los límites al infinito de una función racional, dividimos el numerador y el denominador por la mayor potencia de x que aparece en el denominador. Esto determina qué término de la expresión global domina el comportamiento de la función a grandes valores de x.

EJEMPLO 4.25

Determinación del comportamiento final de las funciones racionales

Para cada una de las siguientes funciones, determine los límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$. A continuación, utilice esta información para describir el comportamiento final de la función.

a. $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$ (*Nota:* El grado del numerador y del denominador es el mismo).
b. $f(x) = \frac{3x^2+2x}{4x^3-5x+7}$ (*Nota:* El grado del numerador es menor que el grado del denominador).
c. $f(x) = \frac{3x^2+4x}{x+2}$ (*Nota:* El grado del numerador es mayor que el grado del denominador).

Solución

a. La mayor potencia de x en el denominador es x. Por lo tanto, al dividir el numerador y el denominador por x y aplicando las leyes algebraicas de los límites, vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-1}{2x+5} &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-1/x}{2+5/x} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} (3-1/x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} (2+5/x)} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\pm\infty} 1/x}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\pm\infty} 5/x} \\ &= \frac{3-0}{2+0} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Dado que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{3}{2}$, sabemos que $y = \frac{3}{2}$ es una asíntota horizontal para esta función como se muestra en el siguiente gráfico

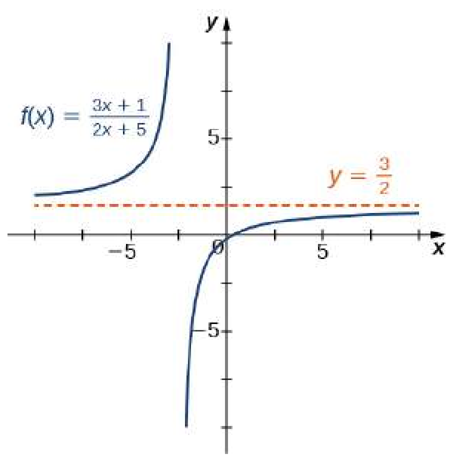


Figura 4.53 El gráfico de esta función racional se aproxima a una asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$.

b. Dado que la mayor potencia de x que aparece en el denominador es x^3, divida el numerador y el denominador entre x^3. Después de hacerlo y aplicando las leyes algebraicas de los límites, obtenemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+2x}{4x^3-5x+7} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3/x+2/x^2}{4-5/x^2+7/x^3} = \frac{3(0).+2(0).}{4-5(0).+7(0).} = 0.$$

Por lo tanto f tiene una asíntota horizontal de $y = 0$ como se muestra en la siguiente gráfica.

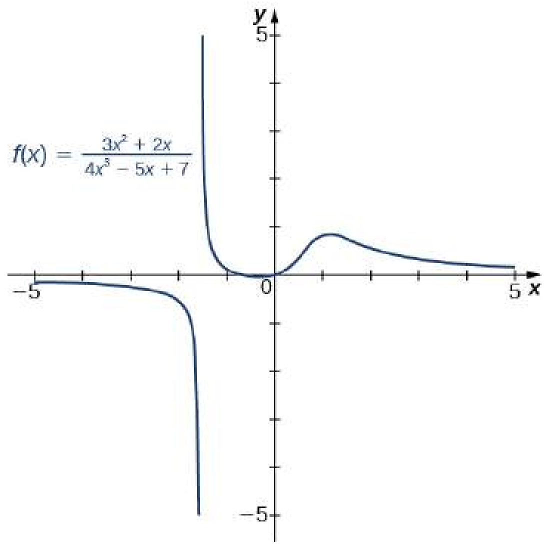


Figura 4.54 El gráfico de esta función racional se aproxima a la asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \to \pm\infty$.

c. Dividiendo el numerador y el denominador entre x, tenemos

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 4x}{x + 2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x + 4}{1 + 2/x}.$$

Cuando $x \to \pm\infty$, el denominador se acerca a 1. Dado que $x \to \infty$, el numerador se acerca $+\infty$. Dado que $x \to -\infty$, el numerador se acerca $-\infty$. Por lo tanto $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, mientras que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ como se muestra en la siguiente figura.

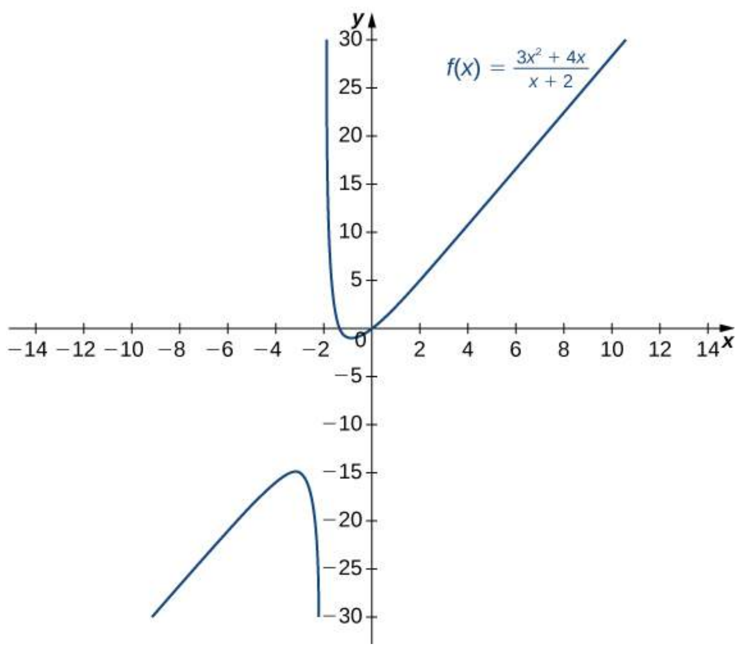


Figura 4.55 Cuando $x \to \infty$, los valores $f(x) \to \infty$. Dado que $x \to -\infty$, los valores $f(x) \to -\infty$.

4.24 Evalúe $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{5x^2 - 4x + 7}$ y utilice estos límites para determinar el comportamiento final de

$$f(x) = \frac{3x^2+2x-1}{5x^2-4x+7}.$$

Antes de continuar, considere el gráfico de $f(x) = \frac{\left(3x^2+4x\right)}{(x+2)}$ que se muestra en la Figura 4.56. Cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$, el gráfico de f parece casi lineal. Aunque f no es ciertamente una función lineal, ahora investigamos por qué el gráfico de f parece acercarse a una función lineal. En primer lugar, utilizando la división larga de polinomios, podemos escribir

$$f(x) = \frac{3x^2+4x}{x+2} = 3x - 2 + \frac{4}{x+2}.$$

Dado que $\frac{4}{(x+2)} \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, concluimos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (3x-2)) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x+2} = 0.$$

Por lo tanto, el gráfico de f se acerca a la línea $y = 3x - 2$ cuando $x \to \pm\infty$. Esta línea se conoce como **asíntota oblicua** para f (Figura 4.56).

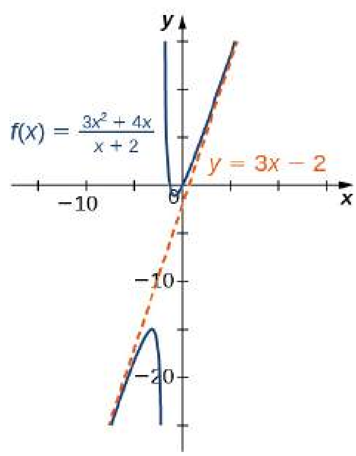


Figura 4.56 El gráfico de la función racional $f(x) = \left(3x^2+4x\right)/(x+2)$ se acerca a la asíntota oblicua $y = 3x - 2$ cuando $x \to \pm\infty$.

Podemos resumir los resultados del Ejemplo 4.25 para llegar a la siguiente conclusión sobre el comportamiento final de las funciones racionales. Consideremos una función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

donde $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$.

1. Si el grado del numerador es igual al grado del denominador $(n = m)$, entonces f tiene una asíntota horizontal de $y = a_n/b_m$ cuando $x \to \pm\infty$.
2. Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador $(n < m)$, entonces f tiene una asíntota horizontal de $y = 0$ cuando $x \to \pm\infty$.
3. Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador $(n > m)$, entonces f no tiene una asíntota horizontal. Los límites al infinito son infinitos positivos o negativos, dependiendo de los signos de los términos principales. Además, utilizando la división larga, la función puede reescribirse como
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

   donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. Como resultado, $\lim_{x\to\pm\infty} r(x)/q(x) = 0$. Por lo tanto, los valores de $[f(x) - g(x)]$ se acercan a cero a medida que $x \to \pm\infty$. Si el grado de $p(x)$ es exactamente un grado más que el grado de $q(x)$ $(n = m + 1)$, la función $g(x)$ es una función lineal. En este caso, denominamos a $g(x)$ como asíntota oblicua.

Ahora vamos a considerar el comportamiento final de las funciones que implican un radical.

EJEMPLO 4.26

Determinación del comportamiento final de una función que incluye un radical

Calcule los límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$ por $f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2+5}}$ y describa el comportamiento final de f.

Solución

Utilicemos la misma estrategia que para las funciones racionales: dividir el numerador y el denominador por una potencia de x. Para determinar la potencia adecuada de x, considere la expresión $\sqrt{4x^2 + 5}$ en el denominador. Dado que

$$\sqrt{4x^2 + 5} \approx \sqrt{4x^2} = 2|x|$$

para grandes valores de x, en efecto x aparece solo a la primera potencia en el denominador. Por lo tanto, dividimos el numerador y el denominador entre $|x|$. Entonces, utilizando el hecho de que $|x| = x$ para $x > 0$, $|x| = -x$ para $x < 0$, y $|x| = \sqrt{x^2}$ para todas las x, calculamos los límites de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2+5}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(1/|x|)(3x-2)}{(1/|x|)\sqrt{4x^2+5}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(1/x)(3x-2)}{\sqrt{\left(1/x^2\right)\left(4x^2+5\right)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{3-2/x}{\sqrt{4+5/x^2}} = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} \\
\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{\sqrt{4x^2+5}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(1/|x|)(3x-2)}{(1/|x|)\sqrt{4x^2+5}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{(-1/x)(3x-2)}{\sqrt{\left(1/x^2\right)\left(4x^2+5\right)}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+2/x}{\sqrt{4+5/x^2}} = \frac{-3}{\sqrt{4}} = \frac{-3}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x)$ se acerca a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{2}$ cuando $x \to \infty$ y la asíntota horizontal $y = -\frac{3}{2}$ cuando $x \to -\infty$ como se muestra en la siguiente gráfica.

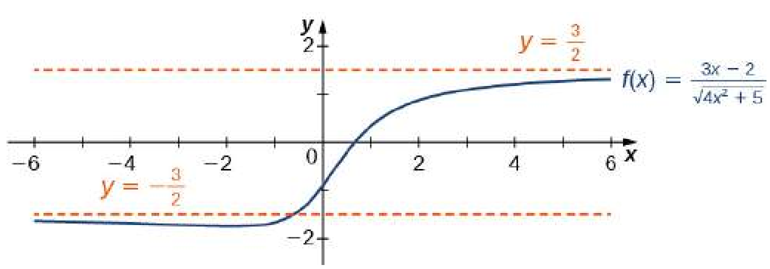


Figura 4.57 Esta función tiene dos asíntotas horizontales e interseca una de las asíntotas.

4.25 Evalúe $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+4}}{x+6}$.

Determinación del comportamiento final de las funciones trascendentales

Las seis funciones trigonométricas básicas son periódicas y no se acercan a un límite finito como $x \to \pm\infty$. Por ejemplo,

$\operatorname{sen} x$ oscila entre 1 y -1 (Figura 4.58). La función tangente x tiene un número infinito de asíntotas verticales cuando $x \to \pm\infty$; por lo tanto, no se acerca a un límite finito ni a $\pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$ como se muestra en la Figura 4.59.

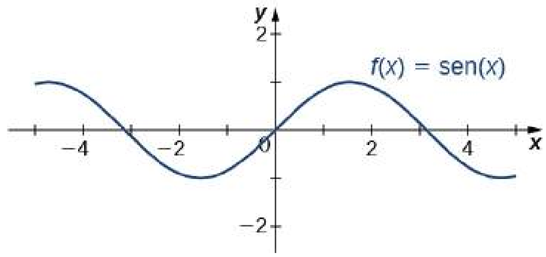


Figura 4.58 La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ oscila entre 1 y -1 cuando $x \to \pm\infty$

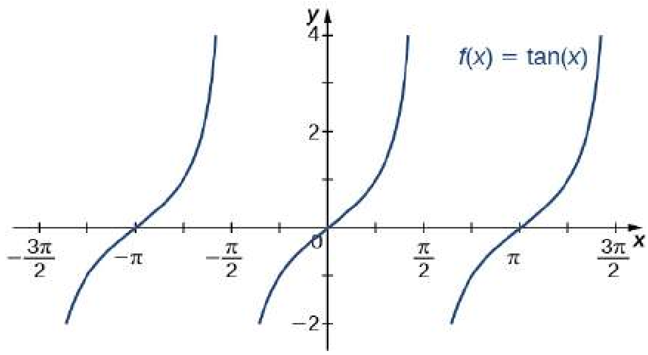


Figura 4.59 La función $f(x) = \tan x$ no se acerca a un límite y no se acerca a $\pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$

Recuerde que para cualquier base $b > 0, b \neq 1$, la función $y = b^x$ es una función exponencial con dominio $(-\infty, \infty)$ y rango $(0, \infty)$. Si $b > 1$, $y = b^x$ aumenta en ` $(-\infty, \infty)$. Si $0 < b < 1$, $y = b^x$ disminuye en $(-\infty, \infty)$. Para la función exponencial natural $f(x) = e^x$, $e \approx 2{,}718 > 1$. Por lo tanto, $f(x) = e^x$ es creciente en ` $(-\infty, \infty)$ y el rango es ` $(0, \infty)$. La función exponencial $f(x) = e^x$ tiende a ∞ cuando $x \to \infty$ y se acerca a 0 cuando $x \to -\infty$ como se muestra en la Tabla 4.5 y la Figura 4.60.

x	-5	-2	0	2	5
e^x	$0{,}00674$	$0{,}135$	1	$7{,}389$	$148{,}413$

Tabla 4.5 Comportamiento final de la función exponencial natural

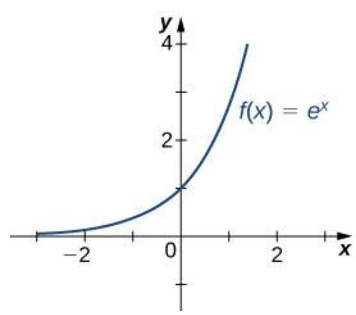


Figura 4.60 La función exponencial se acerca a cero cuando $x \to -\infty$ y se acerca a ∞ cuando $x \to \infty$.

Recordemos que la función logaritmo natural $f(x) = \ln(x)$ es la inversa de la función exponencial natural $y = e^x$. Por lo tanto, el dominio de $f(x) = \ln(x)$ es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$. El gráfico de $f(x) = \ln(x)$ es el reflejo del gráfico de $y = e^x$ sobre la línea $y = x$. Por lo tanto, $\ln(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$ y $\ln(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ como se muestra en la Figura 4.61 y la Tabla 4.6.

x	0,01	0,1	1	10	100
$\ln(x)$	−4,605	−2,303	0	2,303	4,605

Tabla 4.6 Comportamiento final de la función logaritmo natural

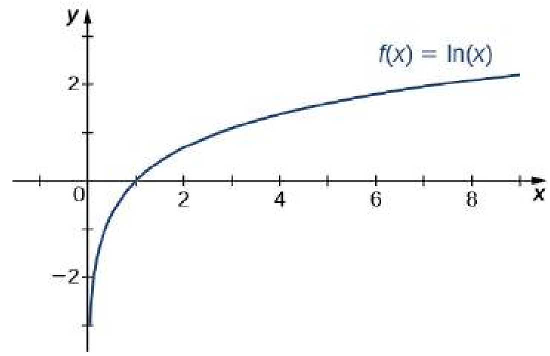


Figura 4.61 La función del logaritmo natural se acerca a ∞ cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 4.27

Determinación del comportamiento final de una función trascendental

Calcule los límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$ por $f(x) = \frac{(2+3e^x)}{(7-5e^x)}$ y describa el comportamiento final de f.

Solución

Para hallar el límite cuando $x \to \infty$, divida el numerador y el denominador entre e^x:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{2+3e^x}{7-5e^x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(2/e^x)+3}{(7/e^x)-5}. \end{aligned}$$

Como se muestra en la Figura 4.60, $e^x \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{7}{e^x}.$$

Concluimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{3}{5}$, y el gráfico de f se acerca a la asíntota horizontal $y = -\frac{3}{5}$ a medida que $x \to \infty$. Para hallar el límite cuando $x \to -\infty$, utilice el hecho de que $e^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$ para concluir que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2}{7}$, y por tanto el gráfico se acerca a la asíntota horizontal $y = \frac{2}{7}$ a medida que $x \to -\infty$.

4.26 Calcule los límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$ por $f(x) = \frac{(3e^x-4)}{(5e^x+2)}$.

Pautas para dibujar el gráfico de una función

Ahora tenemos suficientes herramientas analíticas para dibujar los gráficos de una gran variedad de funciones algebraicas y trascendentales. Antes de mostrar cómo graficar funciones específicas, veamos una estrategia general cuando se grafica cualquier función.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Dibujar el gráfico de una función
Dada una función f, utilice los siguientes pasos para dibujar un gráfico de f:

1. Determine el dominio de la función.
2. Localice el x y y.
3. Evalúe $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ para determinar el comportamiento final. Si cualquiera de estos límites es un número finito L, entonces $y = L$ es una asíntota horizontal. Si alguno de estos límites es ∞ o $-\infty$, determine si f tiene una asíntota oblicua. Si los valores de f es una función racional tal que $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, entonces f puede escribirse como
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$
donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. Los valores de $f(x)$ se acercan a los valores de $g(x)$ cuando $x \to \pm\infty$. Si $g(x)$ es una función lineal, se conoce como *asíntota oblicua*.
4. Determine si f tiene alguna asíntota vertical.
5. Calcule f'. Halle todos los puntos críticos y determine los intervalos en los que f aumenta y donde f decrece. Determine si f tiene algún extremo local.
6. Calcule f''. Determine los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba y donde f es cóncava hacia abajo. Utilice esta información para determinar si f tiene algún punto de inflexión. La segunda derivada también puede utilizarse como medio alternativo para determinar o verificar que f tiene un extremo local en un punto crítico.

Ahora vamos a utilizar esta estrategia para graficar varias funciones diferentes. Comenzamos graficando una función polinómica.

EJEMPLO 4.28

Trazado del gráfico de un polinomio
Dibuje un gráfico de $f(x) = (x-1)^2 (x+2)$.

Solución
Paso 1. Dado que f es un polinomio, el dominio es el conjunto de todos los números reales.

Paso 2. Cuando $x = 0$, $f(x) = 2$. Por lo tanto, la intersección en y es $(0, 2)$. Para calcular la intersección en x–intercepciones, tenemos que resolver la ecuación $(x-1)^2 (x+2) = 0$, nos da las intersecciones en x $(1, 0)$ y $(-2, 0)$

Paso 3. Tenemos que evaluar el comportamiento final de f. Dado que $x \to \infty$, $(x-1)^2 \to \infty$ y $(x+2) \to \infty$. Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Dado que $x \to -\infty$, $(x-1)^2 \to \infty$ y $(x+2) \to -\infty$. Por lo tanto, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Para obtener más información sobre el comportamiento final de f, podemos multiplicar los factores de f. Al hacerlo, vemos que
$$f(x) = (x-1)^2 (x+2) = x^3 - 3x + 2.$$
Dado que el término principal de f ¿es x^3, concluimos que f se comporta como $y = x^3$ cuando $x \to \pm\infty$.

Paso 4. Dado que f es una función polinómica, no tiene asíntotas verticales.

Paso 5. La primera derivada de f es
$$f'(x) = 3x^2 - 3.$$

Por lo tanto, f tiene dos puntos críticos: $x = 1, -1$. Divida el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$ en tres intervalos más pequeños $\left(-\infty, -1\right)$, $(-1, 1)$, y $\left(1, \infty\right)$. A continuación, elija los puntos de prueba $x = -2$, $x = 0$, y $x = 2$ de estos intervalos y evalúe el signo de $f'(x)$ en cada uno de estos puntos de prueba, como se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de derivada $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$	Conclusión
$\left(-\infty, -1\right)$ grandes.	$x = -2$	$(+)(-)(-) = +$	f aumenta.
$(-1, 1)$ grandes.	$x = 0$	$(+)(-)(+) = -$	f decrece.
$\left(1, \infty\right)$ grandes.	$x = 2$	$(+)(+)(+) = +$	f aumenta.

En la tabla, vemos que f tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$. Si evaluamos $f(x)$ en esos dos puntos, encontramos que el valor máximo local es $f(-1) = 4$ y el valor mínimo local es $f(1) = 0$.

Paso 6. La segunda derivada de f es

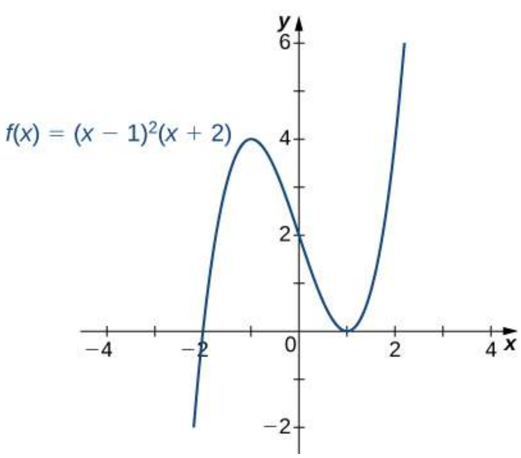
$$f''(x) = 6x.$$

La segunda derivada es cero en $x = 0$. Por lo tanto, para determinar la concavidad de f, dividimos el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$ en los intervalos más pequeños $\left(-\infty, 0\right)$ y $\left(0, \infty\right)$, y elija los puntos de prueba $x = -1$ y $x = 1$ para determinar la concavidad de f en cada uno de estos intervalos más pequeños, como se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f''(x) = 6x$	Conclusión
$\left(-\infty, 0\right)$ grandes.	$x = -1$	$-$	f es cóncava hacia abajo.
$\left(0, \infty\right)$ grandes.	$x = 1$	$+$	f es cóncava hacia arriba.

Observamos que la información del cuadro anterior confirma el hecho, que se confirma en el paso 5, que f tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$. Además, la información encontrada en el paso 5, a saber, f tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$, y $f'(x) = 0$ en esos puntos, combinado con el hecho de que f'' cambia de signo solo en $x = 0$, lo que confirma los resultados encontrados en el paso 6 en la concavidad de f.

Combinando esta información, llegamos al gráfico de $f(x) = (x-1)^2(x + 2)$ que se muestra en el siguiente gráfico.



4.27 Dibuje un gráfico de $f(x) = (x-1)^3 (x+2)$.

EJEMPLO 4.29

Trace una función racional

Dibuje la gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)}$.

Solución

Paso 1. La función f se define siempre que el denominador no sea cero. Por lo tanto, el dominio es el conjunto de todos los números reales x excepto $x = \pm 1$.

Paso 2. Calcule las intersecciones. Si los valores de $x = 0$, entonces $f(x) = 0$, por lo que 0 es una intersección. Si los valores de $y = 0$, entonces $\frac{x^2}{(1-x^2)} = 0$, lo que implica $x = 0$. Por lo tanto, $(0, 0)$ es la única intersección.

Paso 3. Evalúe los límites en el infinito. Dado que f es una función racional, divida el numerador y el denominador por la mayor potencia del denominador: x^2. Obtenemos

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - 1} = -1.$$

Por lo tanto, f tiene una asíntota horizontal de $y = -1$ cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

Paso 4. Para determinar si f tiene alguna asíntota vertical, compruebe en primer lugar si el denominador tiene algún cero. Encontramos que el denominador es cero cuando $x = \pm 1$. Para determinar si las líneas $x = 1$ o $x = -1$ son asíntotas verticales de f, evalúe $\lim_{x \to 1} f(x)$ y $\lim_{x \to -1} f(x)$. Al considerar cada límite unilateral cuando $x \to 1$, vemos que

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty \text{ y } \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = \infty.$$

Además, al considerar cada límite unilateral cuando $x \to -1$, hallamos que

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = \infty \text{ y } \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty.$$

Paso 5. Calcule la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(1-x^2)(2x) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

Los puntos críticos se producen en los puntos x donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ es indefinida. Vemos que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$. La derivada f' no está indefinida en ningún punto del dominio de f. Sin embargo, el que $x = \pm 1$ no son del dominio de f. Por lo tanto, para determinar dónde f aumenta y donde f decrece, divida el intervalo $(-\infty, \infty)$ en cuatro intervalos más pequeños: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, y $(1, \infty)$, y elija un punto de prueba en cada intervalo para determinar el signo de $f'(x)$ en cada uno de estos intervalos. Los valores $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, y $x = 2$ son buenas opciones para los puntos de prueba, como se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$	Conclusión
$(-\infty, -1)$ grandes.	$x = -2$	$-/+ = -$	f decrece.
$(-1, 0)$ grandes.	$x = -1/2$	$-/+ = -$	f decrece.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$	Conclusión
$(0, 1)$ grandes.	$x = 1/2$	$+/+ = +$	f aumenta.
$\left(1, \infty\right)$ grandes.	$x = 2$	$+/+ = +$	f aumenta.

De este análisis, concluimos que f tiene un mínimo local en $x = 0$ y ningún máximo local.

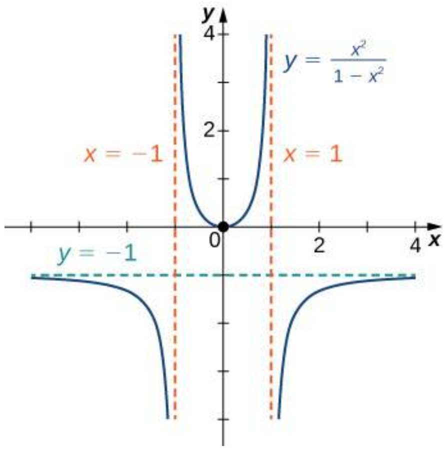
Paso 6. Calcule la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(1-x^2\right)^2(2)-2x\left(2\left(1-x^2\right)(-2x)\right)}{\left(1-x^2\right)^4} \\ &= \frac{\left(1-x^2\right)\left[2\left(1-x^2\right)+8x^2\right]}{\left(1-x^2\right)^4} \\ &= \frac{2\left(1-x^2\right)+8x^2}{\left(1-x^2\right)^3} \\ &= \frac{6x^2+2}{\left(1-x^2\right)^3}. \end{aligned}$$

Para determinar los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba y donde f es cóncava hacia abajo, primero tenemos que hallar todos los puntos x donde $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ es indefinida. Dado que el numerador $6x^2 + 2 \neq 0$ para cualquier x, $f''(x)$ nunca es cero. Además, f'' no está indefinido para ninguna x en el dominio de f. Sin embargo, como se comentó anteriormente, $x = \pm 1$ no son del dominio de f. Por lo tanto, para determinar la concavidad de f, dividimos el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$ en tres intervalos más pequeños $\left(-\infty, -1\right)$, $(-1, -1)$, y $\left(1, \infty\right)$, y elegimos un punto de prueba en cada uno de estos intervalos para evaluar el signo de $f''(x)$. en cada uno de estos intervalos. Los valores $x = -2$, $x = 0$, y $x = 2$ son posibles puntos de prueba como se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$	Conclusión
$\left(-\infty, -1\right)$ grandes.	$x = -2$	$+/- = -$	f es cóncava hacia abajo.
$(-1, -1)$ grandes.	$x = 0$	$+/+ = +$	f es cóncava hacia arriba.
$\left(1, \infty\right)$ grandes.	$x = 2$	$+/- = -$	f es cóncava hacia abajo.

Combinando toda esta información, llegamos al gráfico de f que se muestra a continuación. Tenga en cuenta que, aunque f cambia la concavidad en $x = -1$ y $x = 1$, no hay puntos de inflexión en ninguno de estos lugares ya que f no es continua en $x = -1$ o $x = 1$.



4.28 Dibuje un gráfico de $f(x) = \frac{(3x+5)}{(8+4x)}$.

EJEMPLO 4.30

Trazado de una función racional con asíntota oblicua

Dibuje la gráfica de $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)}$

Solución

Paso 1. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales x excepto $x = 1$.

Paso 2. Calcule las intersecciones. Podemos ver que cuando $x = 0$, $f(x) = 0$, tal que $(0, 0)$ es la única intersección.

Paso 3. Evalúe los límites en el infinito. Ya que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, f debe tener una asíntota oblicua. Para hallar la asíntota oblicua, utilice la división larga de polinomios para escribir

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Dado que $1/(x-1) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$, $f(x)$ se acerca a la línea $y = x + 1$ cuando $x \to \pm\infty$. La línea $y = x + 1$ es una asíntota oblicua para f.

Paso 4. Para comprobar la existencia de asíntotas verticales, observe dónde el denominador es cero. Aquí el denominador es cero en $x = 1$. Observando los dos límites unilaterales cuando $x \to 1$, tenemos

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \infty \text{ y } \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

Por lo tanto, $x = 1$ es una asíntota vertical, y determinamos el comportamiento de f cuando x se acerca a 1 por la derecha y por la izquierda.

Paso 5. Calcule la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Tenemos $f'(x) = 0$ cuando $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$. Por lo tanto, $x = 0$ y $x = 2$ son puntos críticos. Dado que f es indefinida en $x = 1$, tenemos que dividir el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$ en los intervalos más pequeños $\left(-\infty, 0\right)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, y $\left(2, \infty\right)$, y elija un punto de prueba de cada intervalo para evaluar el signo de $f'(x)$ en cada uno de estos intervalos más pequeños. Por ejemplo, supongamos que $x = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, y $x = 3$ son los puntos de prueba como se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$	Conclusión
$\left(-\infty, 0\right)$ grandes.	$x = -1$	$(-)(-)/+ = +$	f aumenta.
$(0, 1)$ grandes.	$x = 1/2$	$(+)(-)/+ = -$	f decrece.
$(1, 2)$ grandes.	$x = 3/2$	$(+)(-)/+ = -$	f decrece.
$\left(2, \infty\right)$ grandes.	$x = 3$	$(+)(+)/+ = +$	f aumenta.

En esta tabla, vemos que f tiene un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 2$. El valor de f en el máximo local es $f(0) = 0$ y el valor de f en el mínimo local es $f(2) = 4$. Por lo tanto, $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos importantes en el gráfico.

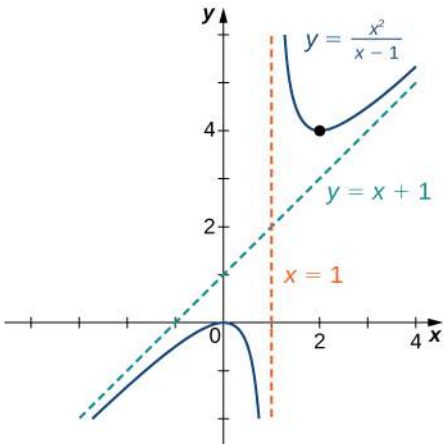
Paso 6. Calcule la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x-1)^2(2x-2)-\left(x^2-2x\right)(2(x-1))}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(x-1)\left[(x-1)(2x-2)-2\left(x^2-2x\right)\right]}{(x-1)^4} \\
&= \frac{(x-1)(2x-2)-2\left(x^2-2x\right)}{(x-1)^3} \\
&= \frac{2x^2-4x+2-\left(2x^2-4x\right)}{(x-1)^3} \\
&= \frac{2}{(x-1)^3}.
\end{aligned}$$

Vemos que $f''(x)$ nunca es cero o indefinido para x en el dominio de f. Dado que f es indefinida en $x = 1$, para comprobar la concavidad simplemente dividimos el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$ en dos intervalos más pequeños $\left(-\infty, 1\right)$ y $\left(1, \infty\right)$, y elija un punto de prueba de cada intervalo para evaluar el signo de $f''(x)$ en cada uno de estos intervalos. Los valores $x = 0$ y $x = 2$ son posibles puntos de prueba como se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$	Conclusión
$\left(-\infty, 1\right)$ grandes.	$x = 0$	$+/- = -$	f es cóncava hacia abajo.
$\left(1, \infty\right)$ grandes.	$x = 2$	$+/+ = +$	f es cóncava hacia arriba.

A partir de la información recopilada, llegamos al siguiente gráfico para f.



4.29 Halle la asíntota oblicua para $f(x) = \frac{(3x^3-2x+1)}{(2x^2-4)}$.

EJEMPLO 4.31

Trazado del gráfico de una función con cúspide

Dibuje un gráfico de $f(x) = (x-1)^{2/3}$.

Solución

Paso 1. Como la función raíz cúbica está definida para todos los números reales x y $(x-1)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2$, el dominio de f son todos números reales.

Paso 2: Para calcular la intersección en y, evalúe $f(0)$. Dado que $f(0) = 1$, la columna y es $(0, 1)$. Para calcular la intersección en x resuelva $(x-1)^{2/3} = 0$. La solución de esta ecuación es $x = 1$, por lo que la intersección en x es $(1, 0)$.

Paso 3: Dado que $\lim_{x\to\pm\infty} (x-1)^{2/3} = \infty$, la función sigue creciendo sin límites cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$.

Paso 4: La función no tiene asíntotas verticales.

Paso 5: Para determinar dónde f aumenta o disminuye, calcule f'. Hallamos

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} = \frac{2}{3(x-1)^{1/3}}.$$

Esta función no es cero en ningún sitio, pero es indefinida cuando $x = 1$. Por lo tanto, el único punto crítico es $x = 1$. Divida el intervalo $(-\infty, \infty)$ en los intervalos más pequeños $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$, y elija los puntos de prueba en cada uno de estos intervalos para determinar el signo de $f'(x)$ en cada uno de estos intervalos más pequeños. Supongamos que $x = 0$ y $x = 2$ son los puntos de prueba como se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f'(x) = \frac{2}{3(x-1)^{1/3}}$	Conclusión
$(-\infty, 1)$ grandes.	$x = 0$	$+/- = -$	f decrece.
$(1, \infty)$ grandes.	$x = 2$	$+/+ = +$	f aumenta.

Concluimos que f tiene un mínimo local en $x = 1$. Si evaluamos f en $x = 1$, encontramos que el valor de f en el mínimo local es cero. Observe que $f'(1)$ es indefinido, por lo que para determinar el comportamiento de la función en este punto crítico, tenemos que examinar $\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$. Al observar los límites unilaterales tenemos

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{3(x-1)^{1/3}} = \infty \text{ y } \lim_{x \to 1^-} \frac{2}{3(x-1)^{1/3}} = -\infty.$$

Por lo tanto, f tiene una cúspide en $x = 1$.

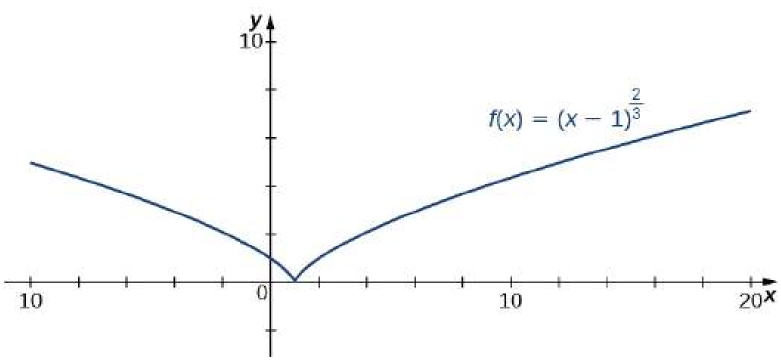
Paso 6: Para determinar la concavidad, calculamos la segunda derivada de f:

$$f''(x) = -\frac{2}{9}(x-1)^{-4/3} = \frac{-2}{9(x-1)^{4/3}}.$$

Tenemos que $f''(x)$ se define para todos las x, pero es indefinido cuando $x = 1$. Por lo tanto, divida el intervalo $\left(-\infty, \infty\right)$ en los intervalos más pequeños $\left(-\infty, 1\right)$ y $\left(1, \infty\right)$, y elija los puntos de prueba para evaluar el signo de $f''(x)$ en cada uno de estos intervalos. Como hicimos anteriormente, dejemos que $x = 0$ y $x = 2$ sean los puntos de prueba tal como se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Punto de prueba	Signo de $f''(x) = \frac{-2}{9(x-1)^{4/3}}$	Conclusión
$\left(-\infty, 1\right)$ grandes.	$x = 0$	$-/+ = -$	f es cóncava hacia abajo.
$\left(1, \infty\right)$ grandes.	$x = 2$	$-/+ = -$	f es cóncava hacia abajo.

De este cuadro se deduce que f es cóncavo hacia abajo en todas partes. Combinando toda esta información, llegamos al siguiente gráfico para f.

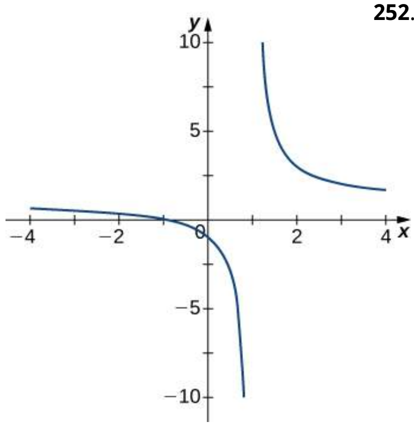


4.30 Considere la función $f(x) = 5 - x^{2/3}$. Determine el punto de el gráfico donde se encuentra una cúspide. Determine el comportamiento final de f.

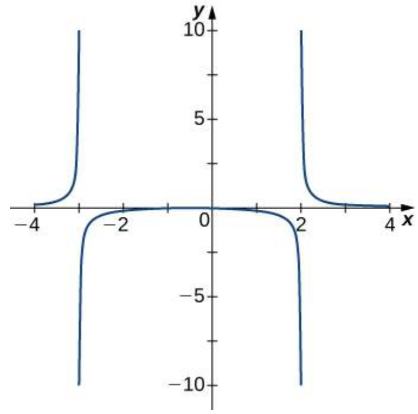
SECCIÓN 4.6 EJERCICIOS

Examine los gráficos en los siguientes ejercicios. Identifique dónde se encuentran las asíntotas verticales.

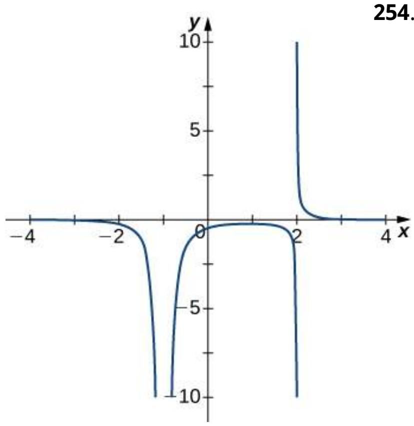
251.



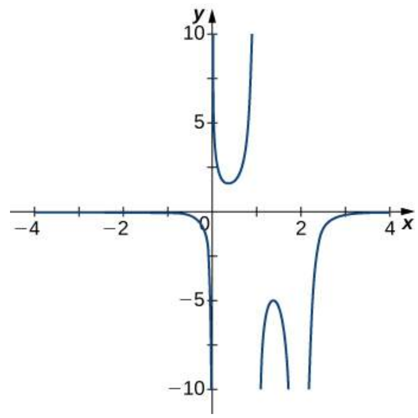
252.



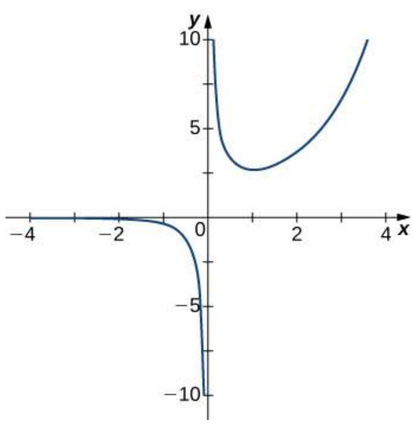
253.



254.



255.



En las siguientes funciones $f(x)$, determine si existe una asíntota en $x = a$. Justifique su respuesta sin graficarla en una calculadora.

256. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+5x+4}, a = -1$

257. $f(x) = \frac{x}{x-2}, a = 2$

258. $f(x) = (x+2)^{3/2}, a = -2$

259. $f(x) = (x-1)^{-1/3}, a = 1$

260. $f(x) = 1 + x^{-2/5}, a = 1$

En los siguientes ejercicios, evalúe el límite.

261. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{3x+6}$

262. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-5}{4x}$

263. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+5}{x+2}$

264. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^3-2x}{x^2+2x+8}$

265. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-4x^3+1}{2-2x^2-7x^4}$

266. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$

267. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x+2}$

268. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}$

269. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2-1}}$

270. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$

En los siguientes ejercicios, halle las asíntotas horizontales y verticales.

271. $f(x) = x - \frac{9}{x}$

272. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

273. $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$

274. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+1}$

275. $f(x) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(2x)$

276. $f(x) = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x)$ grandes.

277. $f(x) = \frac{x\operatorname{sen}(x)}{x^2-1}$

278. $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$ grandes.

279. $f(x) = \frac{1}{x^3+x^2}$

280. $f(x) = \frac{1}{x-1} - 2x$

281. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^3-1}$

282. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

283. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$

284. $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$

En los siguientes ejercicios, construya una función $f(x)$ que tiene las asíntotas dadas.

285. $x = 1$ y $y = 2$

286. $x = 1$ y $y = 0$

287. $y = 4,\ x = -1$

288. $x = 0$

En los siguientes ejercicios, grafique la función en una calculadora gráfica en la ventana $x = [-5, 5]$ y estime la asíntota horizontal o límite. A continuación, calcule la asíntota o límite horizontal real.

289. **[T]** $f(x) = \frac{1}{x+10}$

290. **[T]** $f(x) = \frac{x+1}{x^2+7x+6}$

291. **[T]** $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + 10x + 25$

292. **[T]** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2+7x+6}$

293. **[T]** $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x+5}$

En los siguientes ejercicios, dibuje el gráfico de las funciones sin utilizar la calculadora. Asegúrese de observar todas las características importantes del gráfico: máximos y mínimos locales, puntos de inflexión y comportamiento asintótico.

294. $y = 3x^2 + 2x + 4$

295. $y = x^3 - 3x^2 + 4$

296. $y = \frac{2x+1}{x^2+6x+5}$

297. $y = \frac{x^3+4x^2+3x}{3x+9}$

298. $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-3x-4}$

299. $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

300. $y = 2x\sqrt{16 - x^2}$

301. $y = \frac{\cos x}{x}$, sobre $x = [-2\pi, 2\pi]$

302. $y = e^x - x^3$

303. $y = x \tan x, x = [-\pi, \pi]$

304. $y = x \ln(x), x > 0$

305. $y = x^2 \operatorname{sen}(x), x = [-2\pi, 2\pi]$

306. Para $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ para tener una asíntota en $y = 2$ entonces los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ ¿qué relación debe tener?

307. Para $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ para tener una asíntota en $x = 0$, entonces los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$. ¿qué relación debe tener?

308. Si $f'(x)$ tiene asíntotas en $y = 3$ y $x = 1$, entonces $f(x)$ ¿qué asíntotas tiene?

309. Tanto $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ y $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ tienen asíntotas en $x = 1$ y $y = 0$. ¿Cuál es la diferencia más evidente entre estas dos funciones?

310. Verdadero o falso: Todo cociente de un polinomio tiene asíntotas verticales.

4.7 Problemas de optimización aplicados

Objetivos de aprendizaje

4.7.1 Establecer y resolver problemas de optimización en varios campos aplicados.

Una aplicación común del cálculo es el cálculo del valor mínimo o máximo de una función. Por ejemplo, con frecuencia las empresas desean minimizar los costos de producción o maximizar los ingresos. En la fabricación, con frecuencia es conveniente minimizar la cantidad de material utilizado para envasar un producto con un determinado volumen. En esta sección, mostraremos cómo plantear estos tipos de problemas de minimización y maximización y resolverlos utilizando las herramientas desarrolladas en este capítulo.

Resolución de problemas de optimización en un intervalo cerrado y acotado

La idea básica de los **problemas de optimización** que siguen es la misma. Tenemos una cantidad concreta que nos interesa maximizar o minimizar. Sin embargo, también tenemos alguna condición adicional que debe satisfacerse. Por ejemplo, en el Ejemplo 4.32, estamos interesados en maximizar el área de un jardín rectangular. Ciertamente, si seguimos ampliando las longitudes laterales del jardín, la superficie seguirá siendo mayor. Sin embargo, ¿qué pasa si tenemos alguna restricción en cuanto a la cantidad de vallas que podemos utilizar para el perímetro? En este caso, no podemos hacer el jardín tan grande como queremos. Veamos cómo podemos maximizar el área de un rectángulo sujeto a alguna restricción en el perímetro.

EJEMPLO 4.32

Cómo maximizar la superficie de un jardín

Se va a construir un jardín rectangular utilizando una pared de roca como un lado del jardín y vallas de alambre para los otros tres lados (Figura 4.62). Dados 100 ft de alambrado, determine las dimensiones que crearían un jardín de máxima superficie. ¿Cuál es el área máxima?

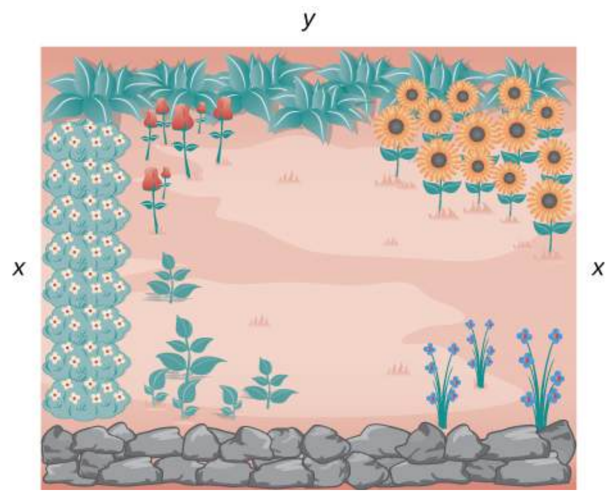


Figura 4.62 Queremos determinar las medidas x como y que crearán un jardín con una superficie máxima utilizando 100 pies de valla.

Solución

Supongamos que x denota la longitud del lado del jardín perpendicular a la pared de roca y y denota la longitud del lado paralelo a la pared de roca. Entonces la superficie del jardín es

$$A = x.y.$$

Queremos hallar la máxima superficie posible sujeta a la condición de que el total del cercado sea de $100\,\text{pies}$. Según la Figura 4.62, la cantidad total de alambrado utilizado será $2x + y$. Por lo tanto, la ecuación de restricción es

$$2x + y = 100.$$

Resolviendo esta ecuación para y, tenemos $y = 100 - 2x$. Así, podemos escribir el área como

$$A(x) = x.(100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Antes de intentar maximizar la función de área $A(x) = 100x - 2x^2$, tenemos que determinar el dominio considerado. Para construir un jardín rectangular, ciertamente necesitamos que las longitudes de ambos lados sean positivas. Por lo tanto, necesitamos $x > 0$ y $y > 0$. Dado que $y = 100 - 2x$, si $y > 0$, entonces $x < 50$. Por lo tanto, estamos tratando de determinar el valor máximo de $A(x)$ para x sobre el intervalo abierto $(0, 50)$. No sabemos que una función tenga necesariamente un valor máximo en un intervalo abierto. Sin embargo, sabemos que una función continua tiene un máximo absoluto (y un mínimo absoluto) en un intervalo cerrado. Por lo tanto, consideremos la función $A(x) = 100x - 2x^2$ sobre el intervalo cerrado $[0, 50]$. Si el valor máximo se produce en un punto interior, entonces hemos encontrado el valor x en el intervalo abierto $(0, 50)$ que maximiza la superficie del jardín. Por lo tanto, analizaremos el siguiente problema:

Maximice $A(x) = 100x - 2x^2$ en el intervalo $[0, 50]$.

Como se mencionó anteriormente, ya que A es una función continua en un intervalo cerrado y acotado, según el teorema del valor extremo, tiene un máximo y un mínimo. Estos valores extremos se producen en los puntos extremos o en los puntos críticos. En los puntos extremos, $A(x) = 0$. Dado que el área es positiva para todos las x en el intervalo abierto $(0, 50)$, el máximo debe producirse en un punto crítico. Diferenciación de la función $A(x)$, obtenemos

$$A'(x) = 100 - 4x.$$

Por lo tanto, el único punto crítico es $x = 25$ (Figura 4.63). Llegamos a la conclusión de que el área máxima debe producirse cuando $x = 25$. Entonces tenemos $y = 100 - 2x = 100 - 2(25) = 50$. Para maximizar la superficie del jardín, supongamos que $x = 25$ ft y $y = 50\,\text{pies}$. La superficie de este jardín es de $1.250\,\text{pies}^2$.

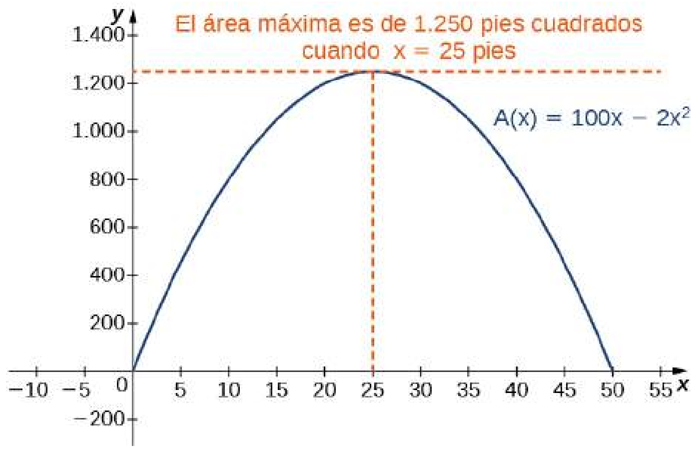


Figura 4.63 Para maximizar el área del jardín, necesitamos hallar el valor máximo de la función $A(x) = 100x - 2x^2$.

4.31 Determine el área máxima si queremos hacer el mismo jardín rectangular que en la Figura 4.63, pero tenemos 200 pies de valla.

Veamos ahora una estrategia general para resolver problemas de optimización similares al Ejemplo 4.32.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Resolución de problemas de optimización

1. Introduzca todas las variables. Si corresponde, dibuje una figura y marque todas las variables.
2. Determine qué cantidad debe ser maximizada o minimizada, y para qué rango de valores de las otras variables (si se puede determinar en este momento).
3. Escriba una fórmula para la cantidad a maximizar o minimizar en términos de las variables. Esta fórmula puede incluir más de una variable.
4. Escriba cualquier ecuación que relacione las variables independientes en la fórmula del paso 3. Utilice estas ecuaciones para escribir la cantidad a maximizar o minimizar en función de una variable.
5. Identifique el dominio de consideración de la función en el paso 4 en función del problema físico que hay que resolver.
6. Localice el valor máximo o mínimo de la función a partir del paso 4. Este paso suele implicar la búsqueda de puntos críticos y la evaluación de una función en los puntos extremos.

Ahora apliquemos esta estrategia para maximizar el volumen de una caja abierta dada una restricción en la cantidad de material a utilizar.

EJEMPLO 4.33

Cómo maximizar el volumen de una caja

La caja abierta se fabricará de 24 in por 36 in de cartón quitando un cuadrado de cada esquina de la caja y doblando las solapas de cada lado. ¿De qué tamaño es el cuadrado que hay que cortar en cada esquina para obtener una caja con el máximo volumen?

Solución

Paso 1: Supongamos que x es la longitud del lado del cuadrado que hay que quitar de cada esquina (Figura 4.64). A continuación, las cuatro solapas restantes pueden plegarse para formar una caja con tapa abierta. Supongamos que V es el volumen de la caja resultante.

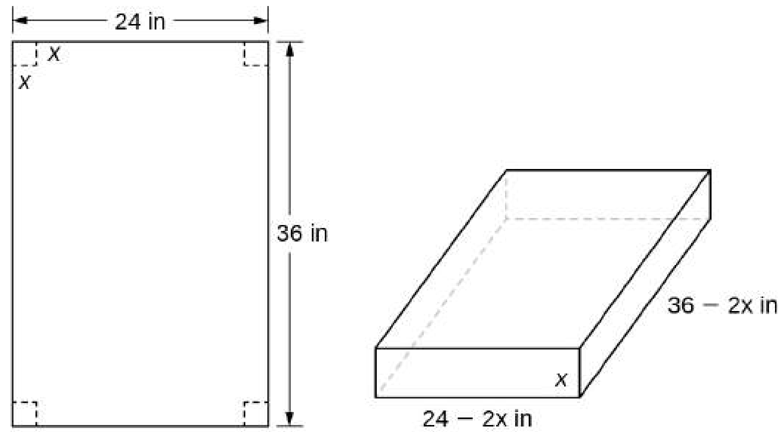


Figura 4.64 Se retira un cuadrado con longitud de lado de x in de cada esquina del trozo de cartón. Las solapas restantes se doblan para formar una caja con tapa abierta.

Paso 2: Intentaremos maximizar el volumen de una caja. Por lo tanto, el problema es maximizar V.

Paso 3: Como se menciona en el paso 2, se intenta maximizar el volumen de una caja. El volumen de una caja es $V = L.W.H$, donde $L, W,$ y H son la longitud, la anchura y la altura, respectivamente.

Paso 4: En la Figura 4.64, vemos que la altura de la caja es x in, la longitud es de $36 - 2x$ in, y el ancho es $24 - 2x$ pulgadas. Por lo tanto, el volumen de la caja es

$$V(x) = (36 - 2x)(24 - 2x)x = 4x^3 - 120x^2 + 864x.$$

Paso 5: Para determinar el dominio de consideración, examinemos la Figura 4.64. En efecto, necesitamos $x > 0$. Además, la longitud del lado del cuadrado no puede ser mayor o igual que la mitad de la longitud del lado más corto, 24 in; de lo contrario, una de las solapas quedaría completamente cortada. Por lo tanto, estamos tratando de determinar si hay un volumen máximo de la caja para x sobre el intervalo abierto $(0, 12)$. Dado que V es una función continua en el intervalo cerrado $[0, 12]$, sabemos que V tendrá un máximo absoluto en el intervalo cerrado. Por lo tanto, consideramos V sobre el intervalo cerrado $[0, 12]$ y comprobar si el máximo absoluto se produce en un punto interior.

Paso 6: Dado que $V(x)$ es una función continua sobre el intervalo cerrado y delimitado $[0, 12]$, V debe tener un máximo absoluto (y un mínimo absoluto). Dado que $V(x) = 0$ en los puntos extremos y $V(x) > 0$ por $0 < x < 12$, el máximo debe producirse en un punto crítico. La derivada es

$$V'(x) = 12x^2 - 240x + 864.$$

Para hallar los puntos críticos, tenemos que resolver la ecuación

$$12x^2 - 240x + 864 = 0.$$

Si dividimos ambos lados de esta ecuación entre 12, el problema se simplifica a la resolución de la ecuación

$$x^2 - 20x + 72 = 0.$$

Al utilizar la fórmula cuadrática, encontramos que los puntos críticos son

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(72)}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{112}}{2} = \frac{20 \pm 4\sqrt{7}}{2} = 10 \pm 2\sqrt{7}.$$

Dado que $10 + 2\sqrt{7}$ no está en el dominio de consideración, el único punto crítico que debemos considerar es $10 - 2\sqrt{7}$. Por lo tanto, el volumen se maximiza si dejamos que $x = 10 - 2\sqrt{7}$ in. El volumen máximo es $V\left(10 - 2\sqrt{7}\right) = 640 + 448\sqrt{7} \approx 1.825 \text{ in.}^3$ como se muestra en el siguiente gráfico.

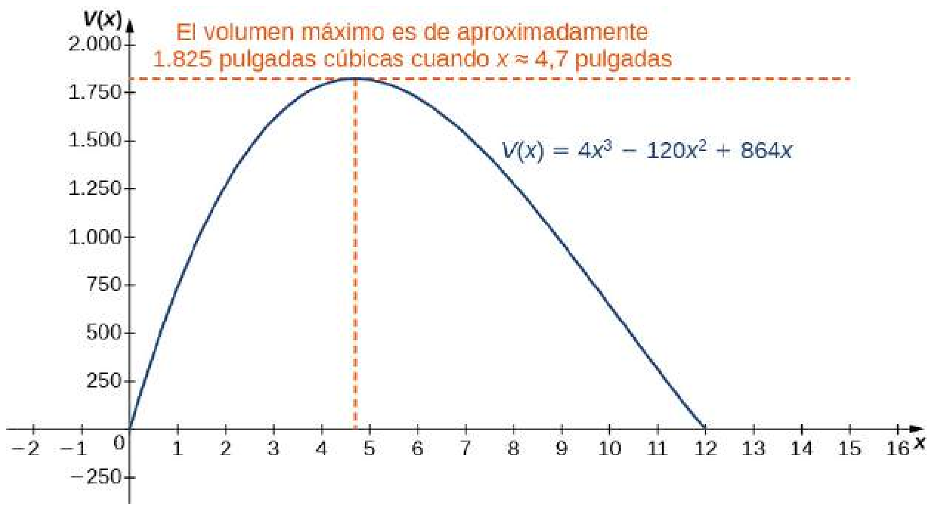


Figura 4.65 Maximizar el volumen de la caja lleva a hallar el valor máximo de un polinomio cúbico.

MEDIOS

Vea un video (http://www.openstax.org/l/20_boxvolume) sobre la optimización del volumen de una caja.

4.32 Supongamos que las dimensiones del cartón en el Ejemplo 4.33 son de 20 in por 30 in. Supongamos que x es la longitud de los lados de cada cuadrado y escriba el volumen de la caja abierta en función de x. Determine el dominio de consideración para x.

EJEMPLO 4.34

Minimizar el tiempo de viaje

Una isla está a 2 mi hacia el norte de su punto más cercano a lo largo de una línea de costa recta. Un visitante se aloja en una cabaña en la costa que está a 6 mi al oeste de ese punto. El visitante planea ir de la cabaña a la isla. Supongamos que el visitante corre a una tasa de 8 mph y nada a una tasa de 3 mph. ¿Qué distancia debe correr el visitante antes de nadar para minimizar el tiempo que tarda en llegar a la isla?

Solución

Paso 1: Supongamos que x es la distancia que tiene que correr y que y es la distancia que tiene que nadar (Figura 4.66). Supongamos que T es el tiempo que el visitante tarda en ir de la cabaña a la isla.

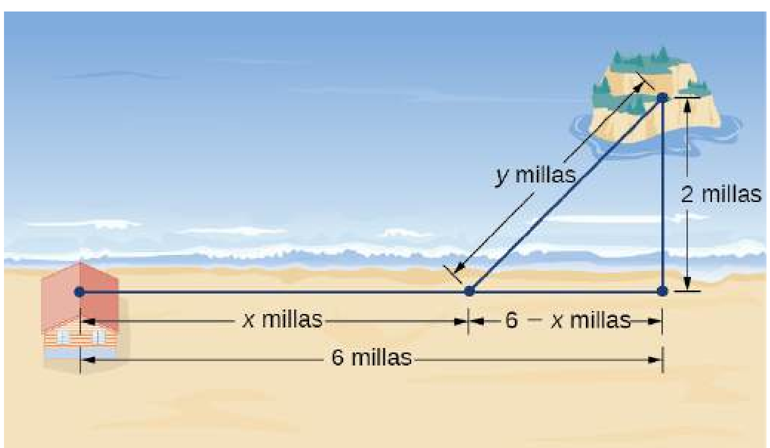


Figura 4.66 ¿Cómo podemos elegir x como y para minimizar el tiempo de viaje desde la cabaña hasta la isla?

Paso 2: El problema es minimizar T.

Paso 3: Para hallar el tiempo empleado en ir de la cabaña a la isla, sume el tiempo empleado en correr y el tiempo empleado en nadar. Desde la distancia = Tasa $\times$ Tiempo ($D = R \times T$), el tiempo dedicado a correr es

$$T_{\text{corriendo}} = \frac{D_{\text{corriendo}}}{R_{\text{corriendo}}} = \frac{x}{8},$$

y el tiempo de natación es

$$T_{\text{nadando}} = \frac{D_{\text{nadando}}}{R_{\text{nadando}}} = \frac{y}{3}.$$

Por lo tanto, el tiempo total de viaje es

$$T = \frac{x}{8} + \frac{y}{3}.$$

Paso 4: Según la Figura 4.66, el segmento de línea de y millas forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 2 mi y $6 - x$ mi. Por lo tanto, según el teorema de Pitágoras, $2^2 + (6 - x)^2 = y^2$, y obtenemos $y = \sqrt{(6 - x)^2 + 4}$. Así, el tiempo total de viaje viene dado por la función

$$T(x) = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{(6 - x)^2 + 4}}{3}.$$

Paso 5: En la Figura 4.66, vemos que $0 \leq x \leq 6$. Por lo tanto, $[0, 6]$ es el dominio de consideración.

Paso 6: Dado que $T(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado y acotado, tiene un máximo y un mínimo. Empecemos por buscar los puntos críticos de T en el intervalo $[0, 6]$. La derivada es

$$T'(x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \frac{\left[(6 - x)^2 + 4\right]^{-1/2}}{3} . 2(6 - x) = \frac{1}{8} - \frac{(6 - x)}{3\sqrt{(6 - x)^2 + 4}}.$$

Si los valores de $T'(x) = 0$, entonces

$$\frac{1}{8} = \frac{6 - x}{3\sqrt{(6 - x)^2 + 4}}.$$

Por lo tanto,

$$3\sqrt{(6 - x)^2 + 4} = 8(6 - x). \tag{4.6}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación, vemos que si x satisface esta ecuación, entonces x debe satisfacer

$$9\left[(6 - x)^2 + 4\right] = 64(6 - x)^2,$$

lo que implica

$$55(6 - x)^2 = 36.$$

Concluimos que si x es un punto crítico, entonces x satisface

$$(x - 6)^2 = \frac{36}{55}.$$

Por lo tanto, las posibilidades de puntos críticos son

$$x = 6 \pm \frac{6}{\sqrt{55}}.$$

Dado que $x = 6 + 6/\sqrt{55}$ no está en el dominio, esta no es una posibilidad para un punto crítico. Por otro lado, $x = 6 - 6/\sqrt{55}$ está en el dominio. Como hemos elevado al cuadrado ambos lados de la Ecuación 4.6 para llegar a los posibles puntos críticos, queda por comprobar que $x = 6 - 6/\sqrt{55}$ satisface la Ecuación 4.6. Dado que $x = 6 - 6/\sqrt{55}$ sí satisface esa ecuación, concluimos que $x = 6 - 6/\sqrt{55}$ es un punto crítico, y es el único. Para justificar que el tiempo se minimiza para este valor de x, solo tenemos que comprobar los valores de $T(x)$ en los puntos finales $x = 0$ y $x = 6$, y compararlos con el valor de $T(x)$ en el punto crítico $x = 6 - 6/\sqrt{55}$. Hallamos que $T(0) \approx 2{,}108$ h y $T(6) \approx 1{,}417$ h, mientras que $T\left(6 - 6/\sqrt{55}\right) \approx 1{,}368$ h. Por lo tanto, concluimos que T tiene un mínimo local en $x \approx 5{,}19$ mi.

4.33 Supongamos que la isla está a 1 mi desde la costa, y que la distancia desde la cabaña hasta el punto de la costa más cercano a la isla es de 15 mi. Supongamos que un visitante nada a la tasa de $2{,}5$ mph y corre a una tasa de 6 mph. Supongamos que x denota la distancia que el visitante correrá antes de nadar, y halle una función para el tiempo que tarda el visitante en llegar de la cabaña a la isla.

En los negocios, las empresas están interesadas en maximizar los ingresos. En el siguiente ejemplo, analizamos un escenario en el que una empresa ha recopilado datos sobre el número de autos que puede alquilar, en función del precio que cobra a sus clientes por alquilárselos. Utilicemos estos datos para determinar el precio que debe cobrar la empresa para maximizar la cantidad de dinero que ingresa.

EJEMPLO 4.35

Maximizando los ingresos

Los propietarios de una empresa de alquiler de autos han determinado que si cobran a los clientes p dólares diarios por el alquiler un auto, donde $50 \le p \le 200$, el número de autos n que alquilan por día puede ser modelada por la función lineal $n(p) = 1.000 - 5p$. Si cobran $\$50$ por día o menos, alquilarán todos sus automóviles. Si cobran $\$200$ por día o más, no alquilarán ningún automóvil. Suponiendo que los propietarios planeen cobrar a los clientes entre \$50 diarios y $\$200$ diarios por el alquiler de un auto, ¿cuánto deberían cobrar para maximizar sus ingresos?

Solución

Paso 1: Supongamos que p es el precio que se cobra por auto y por día, y que n es el número de autos alquilados por día. Supongamos que R son los ingresos por día.

Paso 2: El problema es maximizar R.

Paso 3: Los ingresos (diarios) son iguales al número de autos alquilados por día multiplicado por el precio cobrado por auto por día, es decir, $R = n \times p$.

Paso 4: Dado que el número de autos alquilados diariamente se modela mediante la función lineal $n(p) = 1.000 - 5p$, los ingresos R puede representarse mediante la función

$$R(p) = n \times p = (1.000 - 5p)\,p = -5p^2 + 1.000p.$$

Paso 5: Dado que los propietarios planean cobrar entre $\$50$ por automóvil por día y $\$200$ por automóvil por día, el problema es hallar el máximo ingreso $R(p)$ por p en el intervalo cerrado $[50, 200]$.

Paso 6: Dado que R es una función continua sobre el intervalo cerrado y delimitado $[50, 200]$, tiene un máximo absoluto (y un mínimo absoluto) en ese intervalo. Para hallar el valor máximo, busque los puntos críticos. La derivada es $R'(p) = -10p + 1.000$. Por lo tanto, el punto crítico es $p = 100$ Cuando $p = 100$, $R(100) = \$50\,000$. Cuando $p = 50$, $R(p) = \$37.500$. Cuando $p = 200$, $R(p) = \$0$. Por lo tanto, el máximo absoluto se produce en $p = \$100$. La empresa de alquiler de autos debería cobrar $\$100$ diarios por auto para maximizar los ingresos, como se muestra en la siguiente figura.

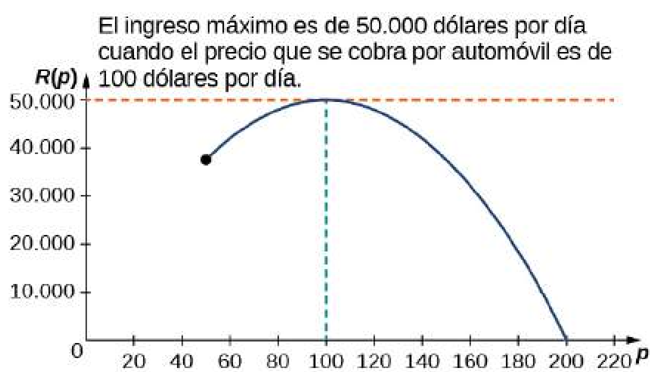


Figura 4.67 Para maximizar los ingresos, una empresa de alquiler de autos tiene que equilibrar el precio del alquiler con el número de autos que se alquilarán a ese precio.

4.34 Una empresa de alquiler de autos cobra a sus clientes p dólares por día, donde $60 \le p \le 150$. Se concluye que el número de autos que se alquilan por día puede modelarse mediante la función lineal

$n(p) = 750 - 5p$. ¿Cuánto debe cobrar la empresa a cada cliente para maximizar los ingresos?

EJEMPLO 4.36

Cómo maximizar el área de un rectángulo inscrito

Un rectángulo debe inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para maximizar su área? ¿Cuál es el área máxima?

Solución

Paso 1: Para que un rectángulo se inscriba en la elipse, los lados del rectángulo deben ser paralelos a los ejes. Supongamos que L es la longitud del rectángulo y que W es su anchura. Supongamos que A es el área del rectángulo.

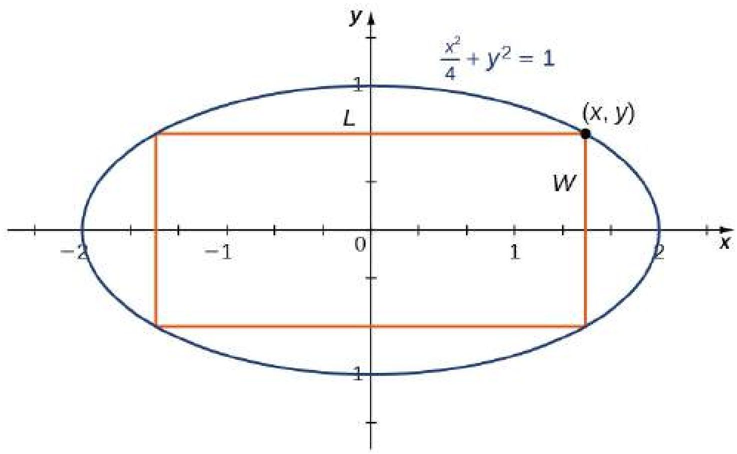


Figura 4.68 Queremos maximizar el área de un rectángulo inscrito en una elipse.

Paso 2: El problema es maximizar A.

Paso 3: El área del rectángulo es $A = LW$.

Paso 4: Supongamos que (x, y) es la esquina del rectángulo que se encuentra en el primer cuadrante, como se muestra en la Figura 4.68. Podemos escribir la longitud $L = 2x$ y la anchura $W = 2y$. Dado que $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y $y > 0$, tenemos $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Por lo tanto, el área es

$$A = LW = (2x)(2y) = 4x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = 2x\sqrt{4 - x^2}.$$

Paso 5: En la Figura 4.68, vemos que para inscribir un rectángulo en la elipse, la coordenada $x$de la esquina en el primer cuadrante debe satisfacer $0 < x < 2$. Por lo tanto, el problema se reduce a buscar el valor máximo de $A(x)$ sobre el intervalo abierto $(0, 2)$. Dado que $A(x)$ tendrá un máximo absoluto (y un mínimo absoluto) en el intervalo cerrado $[0, 2]$, consideramos $A(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}$ en el intervalo $[0, 2]$. Si el máximo absoluto ocurre en un punto interior, entonces hemos encontrado un máximo absoluto en el intervalo abierto.

Paso 6: Como se mencionó anteriormente, $A(x)$ es una función continua sobre el intervalo cerrado y delimitado $[0, 2]$. Por lo tanto, tiene un máximo (y un mínimo) absoluto. En los puntos extremos $x = 0$ y $x = 2$, $A(x) = 0$. Para $0 < x < 2$, $A(x) > 0$. Por lo tanto, el máximo debe producirse en un punto crítico. Tomando la derivada de $A(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} A'(x) &= 2\sqrt{4 - x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}(-2x) \\ &= 2\sqrt{4 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \\ &= \frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}}. \end{aligned}$$

Para hallar los puntos críticos, tenemos que encontrar dónde $A'(x) = 0$. Podemos ver que si x es una solución de

$$\frac{8 - 4x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0, \tag{4.7}$$

entonces x debe satisfacer

$$8 - 4x^2 = 0.$$

Por lo tanto, $x^2 = 2$. Por lo tanto, $x = \pm\sqrt{2}$ son las posibles soluciones de la Ecuación 4.7. Dado que estamos considerando x en el intervalo $[0, 2]$, $x = \sqrt{2}$ es una posibilidad para un punto crítico, pero $x = -\sqrt{2}$ no lo es. Por lo tanto, comprobamos si $\sqrt{2}$ es una solución de la Ecuación 4.7. Dado que $x = \sqrt{2}$ es una solución de la Ecuación 4.7, concluimos que $\sqrt{2}$ es el único punto crítico de $A(x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Por lo tanto, $A(x)$ debe tener un máximo absoluto en el punto crítico $x = \sqrt{2}$. Para determinar las dimensiones del rectángulo, necesitamos hallar la longitud L y la anchura W. Si $x = \sqrt{2}$ entonces

$$y = \sqrt{1 - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, las dimensiones del rectángulo son $L = 2x = 2\sqrt{2}$ y $W = 2y = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. El área de este rectángulo es $A = LW = \left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right) = 4$.

4.35 Modificar la función de área A si el rectángulo debe inscribirse en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$. ¿Cuál es el dominio de consideración?

Resolución de problemas de optimización cuando el intervalo no es cerrado o no está acotado

En los ejemplos anteriores, hemos considerado funciones sobre dominios cerrados y acotados. En consecuencia, por el teorema del valor extremo, teníamos la garantía de que las funciones tenían extremos absolutos. Consideremos ahora las funciones cuyo dominio no es ni cerrado ni acotado.

Muchas funciones siguen teniendo al menos un extremo absoluto, incluso si el dominio no es cerrado o no está acotado. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + 4$ en $\left(-\infty, \infty\right)$ tiene un mínimo absoluto de 4 en $x = 0$. Por lo tanto, todavía podemos considerar funciones sobre dominios no acotados o intervalos abiertos y determinar si tienen algún extremo absoluto. En el siguiente ejemplo, trataremos de minimizar una función sobre un dominio no acotado. Veremos que, aunque el dominio de consideración es $\left(0, \infty\right)$, la función tiene un mínimo absoluto.

En el siguiente ejemplo, veremos la construcción de una caja de mínima superficie con un volumen prescrito. No es difícil demostrar que para una caja de tapa cerrada, por simetría, entre todas las cajas con un volumen determinado, un cubo tendrá la menor área superficial. En consecuencia, consideraremos el problema modificado de determinar qué caja abierta con un volumen especificado tiene la menor área superficial.

EJEMPLO 4.37

Minimizar el área superficial

Se construirá una caja rectangular con una base cuadrada, una tapa abierta y un volumen de 216 in^3. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para minimizar su área superficial? ¿Cuál es el área superficial mínima?

Solución

Paso 1: Dibuje una caja rectangular e introduzca la variable x para representar la longitud de cada lado de la base cuadrada; supongamos que y representa la altura de la caja. Supongamos que S denota el área superficial de la caja abierta.

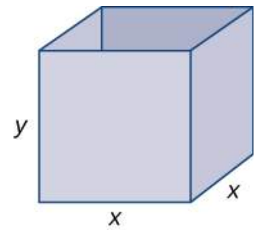


Figura 4.69 Queremos minimizar el área superficial de una caja de base cuadrada con un volumen determinado.

Paso 2: Tenemos que minimizar el área superficial. Por lo tanto, tenemos que minimizar S.

Paso 3: Como la caja tiene la parte superior abierta, solo tenemos que determinar el área de los cuatro lados verticales y la base. El área de cada uno de los cuatro lados verticales es $x.\ y$. El área de la base es x^2. Por lo tanto, el área superficial de la caja es

$$S = 4xy + x^2.$$

Paso 4: Como el volumen de esta caja es x^2y y el volumen viene dado por 216 in.^3 , la ecuación de restricción es

$$x^2y = 216.$$

Al resolver la ecuación de la restricción para y, tenemos $y = \frac{216}{x^2}$. Por lo tanto, podemos escribir el área superficial en función de x solamente:

$$S(x) = 4x\left(\frac{216}{x^2}\right) + x^2.$$

Por lo tanto, $S(x) = \frac{864}{x} + x^2$.

Paso 5: Dado que requerimos que $x^2y = 216$, no podemos tener $x = 0$. Por lo tanto, necesitamos $x > 0$. Por otro lado, x puede tener cualquier valor positivo. Observe que, a medida que x se hace grande, la altura de la caja y se vuelve proporcionalmente pequeña, de modo que $x^2y = 216$. Del mismo modo, como x se hace pequeño, la altura de la caja se hace consecuentemente grande. Concluimos que el dominio es el intervalo abierto y no acotado $\left(0, \infty\right)$. Observe que, a diferencia de los ejemplos anteriores, no podemos reducir nuestro problema a la búsqueda de un máximo o un mínimo absoluto en un intervalo cerrado y acotado. Sin embargo, en el siguiente paso, descubrimos por qué esta función debe tener un mínimo absoluto en el intervalo $\left(0, \infty\right)$.

Paso 6: Observe que, a medida que $x \to 0^+$, $S(x) \to \infty$. Además, como $x \to \infty$, $S(x) \to \infty$. Dado que S es una función continua que se acerca al infinito en los extremos, debe tener un mínimo absoluto en alguna $x \in \left(0, \infty\right)$. Este mínimo debe producirse en un punto crítico de S. La derivada es

$$S'(x) = -\frac{864}{x^2} + 2x.$$

Por lo tanto, $S'(x) = 0$ cuando $2x = \frac{864}{x^2}$. Al resolver esta ecuación para x, obtenemos $x^3 = 432$, por lo que $x = \sqrt[3]{432} = 6\sqrt[3]{2}$. Dado que este es el único punto crítico de S, el mínimo absoluto debe producirse en $x = 6\sqrt[3]{2}$ (vea la Figura 4.70). Cuando $x = 6\sqrt[3]{2}$, $y = \frac{216}{\left(6\sqrt[3]{2}\right)^2} = 3\sqrt[3]{2}$ in. Por lo tanto, las dimensiones de la caja deben ser $x = 6\sqrt[3]{2}$ in. y $y = 3\sqrt[3]{2}$ in. Con estas dimensiones, el área superficial es

$$S\left(6\sqrt[3]{2}\right) = \frac{864}{6\sqrt[3]{2}} + \left(6\sqrt[3]{2}\right)^2 = 108\sqrt[3]{4} \text{ in.}^2$$

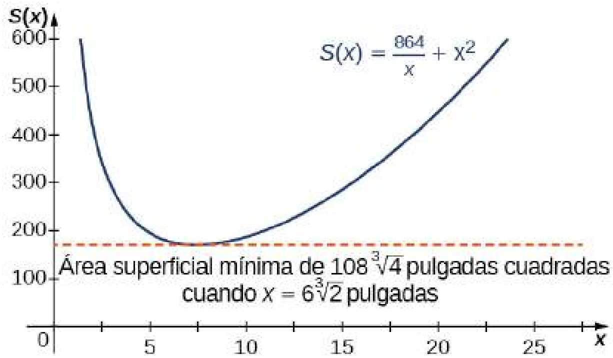


Figura 4.70 Podemos utilizar un gráfico para determinar las dimensiones de una caja con un volumen y área superficial mínima dados.

4.36 Consideremos la misma caja abierta, que debe tener un volumen 216 in.^3 . Supongamos que el costo del material para la base es $20¢/\text{in.}^2$ y el costo del material para los laterales es $30¢/\text{in.}^2$ y estamos tratando de minimizar el costo de esta caja. Escriba el costo en función de las longitudes de los lados de la base. (Supongamos que x es la longitud del lado de la base y y es la altura de la caja)

SECCIÓN 4.7 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, responda mediante una prueba, un contraejemplo o una explicación.

311. Cuando halla el máximo de un problema de optimización, ¿por qué hay que comprobar el signo de la derivada alrededor de los puntos críticos?

312. ¿Por qué hay que comprobar los puntos extremos en los problemas de optimización?

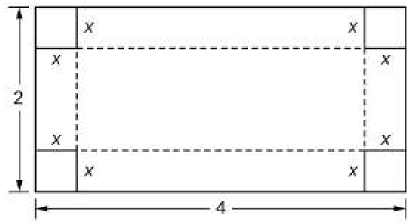
313. *Verdadero o falso*. Para toda función continua no lineal, se puede hallar el valor x que maximiza la función.

314. *Verdadero o falso*. En toda función continua no constante en un dominio cerrado y finito, existe al menos una x que minimiza o maximiza la función.

En los siguientes ejercicios, establezca y evalúe cada problema de optimización.

315. Para llevar una maleta en un avión, la longitud $+\text{ancho}+$ altura de la caja debe ser menor o igual a 62 in. Suponiendo que la base de la maleta es cuadrada, demuestre que el volumen es $V = h\left(31 - \left(\frac{1}{2}\right) h\right)^2$. ¿Qué altura le permite tener el mayor volumen?

316. Está construyendo una caja de cartón con dimensiones 2 m por 4 m. A continuación, corte cuadrados de igual tamaño de cada esquina para poder doblar los bordes. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen?



317. Calcule el número entero positivo que minimiza la suma del número y su recíproco.

318. Calcule dos números enteros positivos tales que su suma sea 10, y minimice y maximice la suma de sus cuadrados.

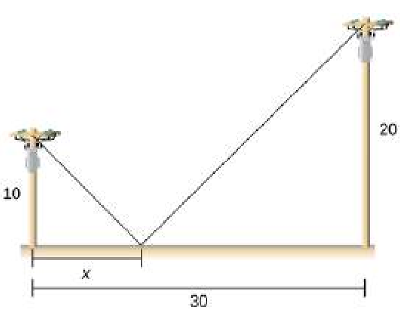
En los siguientes ejercicios, considere la construcción de un corral para encerrar un área.

319. Usted tiene 400 pies de vallas para construir un corral rectangular para el ganado. ¿Cuáles son las dimensiones del corral para maximizar el área?

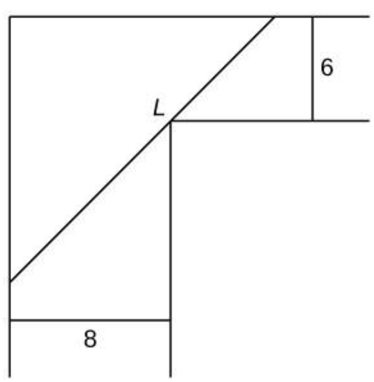
320. Usted tiene 800 pies de vallas para construir un corral para cerdos. Si tiene un río en un lado de su propiedad, ¿cuál es la dimensión del corral rectangular que maximiza la superficie?

321. Es necesario construir una valla alrededor de una zona de 1.600 pies^2. ¿Cuáles son las dimensiones del corral rectangular para minimizar la cantidad de material necesario?

322. Dos polos están conectados por un cable que también está conectado a la tierra. El primer polo tiene 20 pies de altura y el segundo poste tiene 10 pies de altura. Hay una distancia de 30 pies entre los dos polos. ¿Dónde debe anclarse el cable al suelo para minimizar la cantidad de cable necesaria?



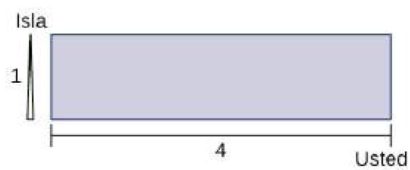
323. **[T]** Se está mudando a un nuevo apartamento y nota que hay una esquina donde el pasillo se estrecha de 8 ft a 6 ft. ¿Cuál es la longitud del artículo más largo que puede pasar horizontalmente por la esquina?



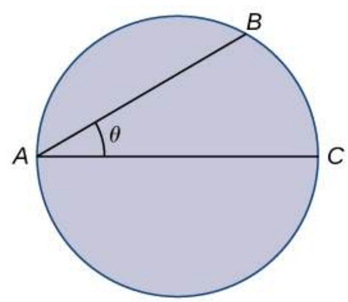
324. El pulso de un paciente es de $70 \text{ lpm}, 80 \text{ lpm}, \text{ y luego de } 120 \text{ lpm}.$ Para determinar una medida precisa del pulso, el médico debe saber qué valor minimiza la expresión $(x-70)^2+(x-80)^2+(x-120)^2$? ¿Qué valor lo minimiza?

325. En el problema anterior, supongamos que el paciente estaba nervioso durante la tercera medición, por lo que solo ponderamos ese valor la mitad que los demás. ¿Cuál es el valor que minimiza $(x-70)^2+(x-80)^2+\frac{1}{2}(x-120)^2$?

326. Usted y sus amigos pueden correr a una velocidad de 6 mph y nadar a una velocidad de 3 mph y se encuentran en la orilla, 4 millas al este de una isla que está a 1 milla al norte de la costa. ¿A qué distancia deben correr hacia el oeste para minimizar el tiempo necesario para llegar a la isla?



En los siguientes problemas, considere un socorrista en una piscina circular con diámetro de 40 m. *Debe alcanzar a alguien que se está ahogando en el lado opuesto de la piscina, en la posición* C. *El socorrista nada con una velocidad* v *y corre alrededor de la piscina a una velocidad* $w=3v$.



327. Halle una función que mida el tiempo total que se tarda en llegar al ahogado en función del ángulo de nado, θ.

328. Halle en qué ángulo θ el socorrista debe nadar para llegar al ahogado en el menor tiempo posible.

329. Un camión utiliza la gasolina como $g(v)=av+\frac{b}{v}$, donde v representa la velocidad del camión y g representa los galones de combustible por milla. ¿A qué velocidad se minimiza el consumo de combustible?

En los siguientes ejercicios, considere una limusina que logre $m(v) = \frac{(120-2v)}{5}$ mi/gal *a velocidad* v, *los costos del chófer son de* $\$15/\text{h}$, *y los de la gasolina son de* $\$3{,}5/\text{gal}$.

330. Halle el costo por milla a la velocidad v.

331. Halle la velocidad de conducción más económica.

En los siguientes ejercicios, considere una pizzería que vende pizzas por un ingreso de $R(x) = ax$ *y costos* $C(x) = b + cx + dx^2$, *donde* x *representa el número de pizzas.*

332. Halle la función de beneficio para el número de pizzas. ¿Cuántas pizzas dan el mayor beneficio por pizza?

333. Supongamos que $R(x) = 10x$ y $C(x) = 2x + x^2$. ¿Cuántas pizzas vendidas maximizan el beneficio?

334. Supongamos que $R(x) = 15x$, y $C(x) = 60 + 3x + \frac{1}{2}x^2$. ¿Cuántas pizzas vendidas maximizan el beneficio?

En los siguientes ejercicios, considere un cable de 4 pies *de largo cortado en dos trozos. Una pieza forma un círculo de radio r y la otra forma un cuadrado de lado* x.

335. Elija x para maximizar la suma de sus áreas.

336. Elija x para minimizar la suma de sus áreas.

En los siguientes ejercicios, considere dos números no negativos x *como* y *de manera que* $x + y = 10$. *Maximice y minimice las cantidades.*

337. xy

338. x^2y^2

339. $y - \frac{1}{x}$

340. $x^2 - y$

En los siguientes ejercicios, dibuje el problema de optimización dado y resuélvalo.

341. Halle el volumen del cilindro circular recto más grande que quepa en una esfera de radio 1.

342. Halle el volumen del cono recto más grande que quepa en una esfera de radio 1.

343. Halle el área del rectángulo más grande que quepa en un triángulo de lados $x = 0$, $y = 0$ y $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$.

344. Halle el volumen más grande de un cilindro que quepa en un cono que tiene un radio de base R y altura h.

345. Halle las dimensiones del volumen del cilindro cerrado $V = 16\pi$ que tenga la menor área superficial.

346. Halle las dimensiones de un cono recto con un área superficial $S = 4\pi$ que tenga el mayor volumen.

En los siguientes ejercicios, considere los puntos de los gráficos dadas. Utilice una calculadora para representar gráficamente las funciones.

347. **[T]** ¿Dónde está la línea $y = 5 - 2x$ más cercana al origen?

348. **[T]** ¿Dónde está la línea $y = 5 - 2x$ más cercano al punto $(1, 1)$?

349. **[T]** ¿Dónde está la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(2, 0)$?

350. **[T]** ¿Dónde está la parábola $y = x^2$ más cercano al punto $(0, 3)$?

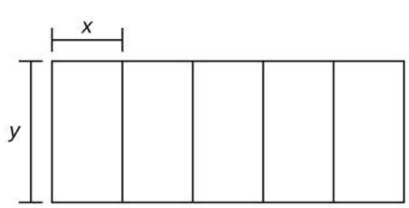
En los siguientes ejercicios, establezca, pero no evalúe, cada problema de optimización.

351. Una ventana se compone de un semicírculo colocado sobre un rectángulo. Si tiene 20 pies de materiales para el marco exterior de la ventana, ¿cuál es el tamaño máximo de la ventana que puede obtener? Utilice la sustitución en r para representar el radio del semicírculo.

352. Tiene una hilera en el jardín de 20 plantas de sandía que producen un promedio de 30 sandías cada una. Por cada planta de sandía adicional que se plante, la producción por planta de sandía disminuye en una sandía. ¿Cuántas plantas de sandía adicionales debe plantar?

353. Está construyendo una caja para que su gato duerma. El material de felpa para el fondo cuadrado de la caja cuesta $\$5/\text{pies}^2$ y el material para los laterales cuesta $\$2/\text{pies}^2$. Necesita una caja con un volumen de 4 pies^3. Halle las dimensiones de la caja que minimicen el costo. Utilice la sustitución en x para representar la longitud del lado de la caja.

354. Está construyendo cinco corrales idénticos uno al lado del otro con una superficie total de 1.000 m^2, como se muestra en la siguiente figura. ¿Qué dimensiones debe utilizar para minimizar la cantidad de vallas?



355. Usted es el administrador de un complejo de apartamentos de 50. Cuando fija el alquiler en $\$800/\text{mes}$, todos los apartamentos están alquilados. Cuando aumenta la renta en $\$25/\text{mes}$, alquila un apartamento menos. Los costos de mantenimiento son $\$50/\text{mes}$ por cada unidad ocupada. ¿Cuál es el monto de alquiler que maximiza la cantidad total de beneficios?

4.8 La regla de L'Hôpital

Objetivos de aprendizaje

4.8.1 Reconocer cuándo aplicar la regla de L'Hôpital.
4.8.2 Identificar las formas indeterminadas producidas por cocientes, productos, restas y potencias, y aplicar la regla de L'Hôpital en cada caso.
4.8.3 Describir las tasas de crecimiento relativas de las funciones.

En esta sección, examinaremos una poderosa herramienta para evaluar los límites. Esta herramienta, conocida como **la regla de L'Hôpital,** utiliza derivadas para calcular los límites. Con esta regla, podremos evaluar muchos límites que aún no hemos podido determinar. En vez de basarnos en pruebas numéricas para conjeturar que existe un límite, demostraremos definitivamente que existe un límite y determinaremos su valor exacto.

Aplicación de la regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital puede utilizarse para evaluar límites que implican el cociente de dos funciones. Considere

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2 \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}.$$

Sin embargo, ¿qué ocurre si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$? A esta la llamamos una de las **formas indeterminadas**, del tipo $\frac{0}{0}$. Se considera una forma indeterminada porque no podemos determinar el comportamiento exacto de $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $x \to a$ sin mayor análisis. Ya hemos visto ejemplos de esto en el texto. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ y } \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

En el primero de estos ejemplos, podemos evaluar el límite factorizando el numerador y escribiendo

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Para $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ pudimos demostrar, mediante un argumento geométrico, que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Aquí utilizamos una técnica diferente para evaluar este tipo de límites, que no solo proporciona una manera más fácil de evaluarlos, sino que también, y esto es lo más importante, nos brinda una manera de evaluar muchos otros límites que no podíamos calcular anteriormente.

La idea que subyace a la regla de L'Hôpital puede explicarse mediante aproximaciones lineales locales. Consideremos dos funciones diferenciables f y g de manera que $\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$ y tal que $g'(a) \neq 0$ Para x cerca de a, podemos escribir

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

y

$$g(x) \approx g(a) + g'(a)(x - a).$$

Por lo tanto,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f(a) + f'(a)(x - a)}{g(a) + g'(a)(x - a)}.$$

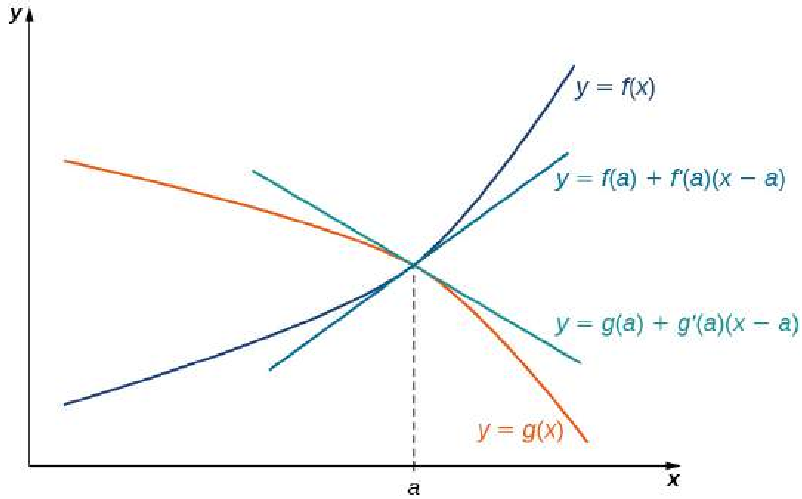


Figura 4.71 Si los valores de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces la relación $f(x)/g(x)$ es aproximadamente igual a la relación de sus aproximaciones lineales cerca de a.

Dado que f es diferenciable en a, entonces f es continua en a, y por lo tanto $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Del mismo modo, $g(a) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Si además suponemos que f' y g' son continuas en $x = a$, entonces $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$ y $g'(a) = \lim\limits_{x\to a} g'(x)$. Al utilizar estas ideas, concluimos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)(x-a)}{g'(x)(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tenga en cuenta que la suposición de que f' y g' son continuas en a y $g'(a) \neq 0$ puede relajarse. Enunciamos la regla de L'Hôpital formalmente para la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. También hay que tener en cuenta que la notación $\frac{0}{0}$ no significa que estemos dividiendo realmente cero entre cero. Más bien, utilizamos la notación $\frac{0}{0}$ para representar un cociente de límites, cada uno de los cuales es cero.

Teorema 4.12

Regla de L'Hôpital (Caso 0/0)

Supongamos que f y g son funciones diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene a, excepto posiblemente en a. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

asumiendo que el límite de la derecha existe o es ∞ o $-\infty$. Este resultado también es válido si consideramos límites unilaterales, o si $a = \infty$ y $-\infty$.

Prueba

Proporcionamos una demostración de este teorema en el caso especial en el que f, g, f', y g' son todos continuos en un intervalo abierto que contiene a. En ese caso, ya que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ y f y g son continuas en a, se deduce que $f(a) = 0 = g(a)$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} && \text{dado que } f(a)=0=g(a)\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} && \text{álgebra}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} && \text{límite de un cociente}\\
&= \frac{f'(a)}{g'(a)} && \text{definición de la derivada}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to a}f'(x)}{\lim\limits_{x\to a}g'(x)} && \text{continuidad de } f' \text{ y } g'\\
&= \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. && \text{límite de un cociente}
\end{aligned}
$$

Observe que la regla de L'Hôpital establece que podemos calcular el límite de un cociente $\frac{f}{g}$ considerando el límite del cociente de las derivadas $\frac{f'}{g'}$. Es importante percatarse de que no estamos calculando la derivada del cociente $\frac{f}{g}$.

□

EJEMPLO 4.38

Aplicación de la regla de L'Hôpital (caso 0/0)

Evalúe cada uno de los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$
b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\ln x}$
c. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}$
d. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x^2}$

Solución

a. Dado que el numerador $1-\cos x\to 0$ y el denominador $x\to 0$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital para evaluar este límite. Tenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(1-\cos x)}{\frac{d}{dx}(x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x)}{\lim\limits_{x\to 0}(1)}\\
&= \frac{0}{1}=0,
\end{aligned}
$$

b. Dado que $x\to 1$, el numerador $\operatorname{sen}(\pi x)\to 0$ y el denominador $\ln(x)\to 0$. Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Obtenemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\ln x} &= \lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos(\pi x)}{1/x}\\
&= \lim_{x\to 1}(\pi x)\cos(\pi x)\\
&= (\pi.\,1)(-1)=-\pi.
\end{aligned}
$$

c. Dado que $x\to\infty$, el numerador $e^{1/x}-1\to 0$ y el denominador $\left(\frac{1}{x}\right)\to 0$. Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{1/x} = e^0 = 1.$$

d. Dado que $x \to 0$, tanto el numerador como el denominador se acercan a cero. Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x}.$$

Dado que el numerador y el denominador de este nuevo cociente se aproximan a cero a medida que $x \to 0$, volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital. Al hacerlo, vemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} = 0.$$

4.37 Evalúe $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$.

También podemos utilizar la regla de L'Hôpital para evaluar los límites de los cocientes $\frac{f(x)}{g(x)}$ en la que $f(x) \to \pm\infty$ y $g(x) \to \pm\infty$. Los límites de esta forma se clasifican como *formas indeterminadas del tipo* ∞/∞. Note de nuevo que en realidad no estamos dividiendo ∞ entre ∞. Dado que ∞ no es un número real, eso es imposible; más bien, ∞/∞. se utiliza para representar un cociente de límites, cada uno de los cuales es ∞ o $-\infty$.

Teorema 4.13

La regla de L'Hôpital (∞/∞ Caso)

Supongamos que f y g son funciones diferenciables sobre un intervalo abierto que contiene a, excepto posiblemente en a. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ (o $-\infty$) y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (o $-\infty$). Entonces,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

asumiendo que el límite de la derecha existe o es ∞ o $-\infty$. Este resultado también es válido si el límite es infinito, si $a = \infty$ o $-\infty$, o el límite es unilateral.

EJEMPLO 4.39

Aplicación de la regla de L'Hôpital (∞/∞ Caso)

Evalúe cada uno de los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital.

a. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{2x+1}$

b. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\cot x}$

Solución

a. Dado que $3x+5$ y $2x+1$ son polinomios de primer grado con coeficientes líderes positivos, $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)=\infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)=\infty$. Por lo tanto, aplicamos la regla de L'Hôpital y obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Observe que este límite también puede calcularse sin recurrir a la regla de L'Hôpital. Anteriormente en el capítulo mostramos cómo evaluar dicho límite dividiendo el numerador y el denominador por la mayor potencia de x en el denominador. Al hacerlo, vimos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+5/x}{2x+1/x}=\frac{3}{2}.$$

La regla de L'Hôpital nos proporciona un medio alternativo para evaluar este tipo de límite.

b. Aquí, $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to0^+}\cot x=\infty$. Por tanto, podemos aplicar la regla de L'Hôpital y obtener

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-\csc^2 x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{-x\csc^2 x}.$$

Ahora, dado que $x\to0^+$, $\csc^2 x\to\infty$. Por lo tanto, el primer término del denominador se acerca a cero y el segundo término se hace muy grande. En ese caso, puede ocurrir cualquier cosa con el producto. Por lo tanto, todavía no podemos sacar ninguna conclusión. Para evaluar el límite, utilizamos la definición de $\csc x$ para escribir

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{-x\csc^2 x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x}.$$

Ahora $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sen}^2 x=0$ y $\lim\limits_{x\to0^+}x=0$, por lo que volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital. Encontramos

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\operatorname{sen}x\cos x}{-1}=\frac{0}{-1}=0.$$

Concluimos que

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\cot x}=0.$$

4.38 Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{5x}$.

Como se ha dicho, la regla de L'Hôpital es una herramienta muy útil para evaluar los límites. Sin embargo, es importante recordar que para aplicar la regla de L'Hôpital a un cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$, es fundamental que el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ sea de la forma $\frac{0}{0}$ o ∞/∞. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.40

Casos en que no se aplica la regla de L'Hôpital

Considere que $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+5}{3x+4}$. Demuestre que el límite no se puede evaluar aplicando la regla de L'Hôpital.

Solución

Como los límites del numerador y del denominador no son ambos cero y no son ambos infinitos, no podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Si intentamos hacerlo, obtendremos

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)=2x$$

y

$$\frac{d}{dx}(3x+4)=3.$$

En ese momento concluiríamos erróneamente que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5}{3x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{3}=\frac{2}{3}.$$

Sin embargo, como $\lim_{x\to 1}\left(x^2+5\right)=6$ y $\lim_{x\to 1}(3x+4)=7$, en realidad tenemos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5}{3x+4}=\frac{6}{7}.$$

Podemos concluir que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5}{3x+4}\neq\lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}\left(x^2+5\right)}{\frac{d}{dx}(3x+4)}.$$

4.39 Explique por qué no podemos aplicar la regla de L'Hôpital para evaluar $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x}$. Evalúe $\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{x}$ por otros medios.

Otras formas indeterminadas

La regla de L'Hôpital es muy útil para evaluar los límites que implican las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ y ∞/∞. Sin embargo, también podemos utilizar la regla de L'Hôpital para ayudar a evaluar los límites que involucran otras formas indeterminadas que surgen al evaluar los límites. Las expresiones $0.\,\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, ∞^0, y 0^0 se consideran formas indeterminadas. Estas expresiones no son números reales. Más bien, representan formas que surgen al intentar evaluar ciertos límites. A continuación nos daremos cuenta de por qué son formas indeterminadas y luego entenderemos cómo utilizar la regla de L'Hôpital en estos casos. La idea clave es que debemos reescribir las formas indeterminadas de tal manera que lleguemos a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.

Forma indeterminada del tipo $0.\,\infty$

Supongamos que queremos evaluar $\lim_{x\to a}\left(f(x)\,.\,g(x)\right)$, donde $f(x)\to 0$ y $g(x)\to\infty$ (o $-\infty$) cuando $x\to a$. Dado que un término del producto se aproxima a cero pero el otro término se hace arbitrariamente grande (en magnitud), al producto le puede pasar cualquier cosa. Utilizamos la notación $0.\,\infty$ para denotar la forma que surge en esta situación.

La expresión $0.\,\infty$ se considera indeterminada porque sin más análisis no podemos determinar el comportamiento exacto del producto $f(x)\,g(x)$ cuando $x\to a$. Por ejemplo, supongamos que n es un número entero positivo y considere

$$f(x)=\frac{1}{(x^n+1)}\text{ y }g(x)=3x^2.$$

Dado que $x\to\infty$, $f(x)\to 0$ y $g(x)\to\infty$. Sin embargo, el límite cuando $x\to\infty$ de $f(x)\,g(x)=\frac{3x^2}{(x^n+1)}$ varía, dependiendo de n. Si $n=2$, entonces $\lim_{x\to\infty}f(x)\,g(x)=3$. Si $n=1$, entonces $\lim_{x\to\infty}f(x)\,g(x)=\infty$. Si n n $=3$, entonces

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\,g(x) = 0$. Aquí consideramos otro límite que implica la forma indeterminada $0.\,\infty$ y mostramos cómo reescribir la función como cociente para utilizar la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 4.41

Forma indeterminada del tipo $0.\,\infty$

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$.

Solución

En primer lugar, reescriba la función $x\ln x$ como cociente para aplicar la regla de L'Hôpital. Si escribimos

$$x\ln x = \frac{\ln x}{1/x},$$

vemos que $\ln x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$ y $\frac{1}{x} \to \infty$ cuando $x \to 0^+$. Por tanto, podemos aplicar la regla de L'Hôpital y obtener

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln x)}{\frac{d}{dx}(1/x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Concluimos que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0.$$

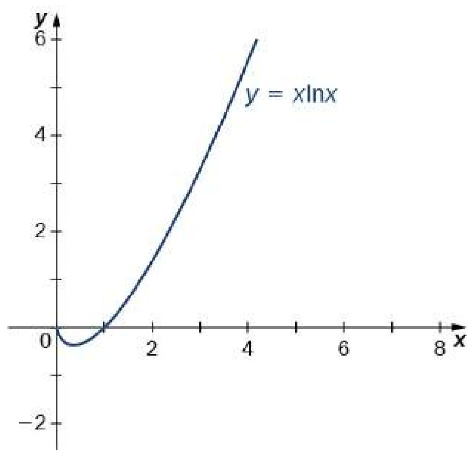


Figura 4.72 Encontrar el límite en $x = 0$ de la función $f(x) = x\ln x$.

4.40 Evalúe $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$.

Forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$

Otro tipo de forma indeterminada es $\infty - \infty$. Considere el siguiente ejemplo. Supongamos que n es un número entero positivo y que $f(x) = 3x^n$ y $g(x) = 3x^2 + 5$. Dado que $x \to \infty$, $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$. Estamos interesados en $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x))$. Dependiendo de si $f(x)$ crece más rápido, $g(x)$ crece más rápido, o crecen a la misma tasa, y como veremos a continuación, cualquier cosa puede suceder en este límite. Dado que $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$, escribimos $\infty - \infty$ para denotar la forma de este límite. Al igual que con nuestras otras formas indeterminadas, $\infty - \infty$ no tiene ningún significado por sí mismo y debemos hacer más análisis para determinar el valor del límite. Por ejemplo, supongamos que el exponente n en la función $f(x) = 3x^n$ es n n $= 3$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\,(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to\infty}\,\left(3x^3-3x^2-5\right) = \infty.$$

Por otro lado, si $n = 2$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\,(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to\infty}\,\left(3x^2-3x^2-5\right) = -5.$$

Sin embargo, si $n = 1$, entonces

$$\lim_{x\to\infty}\,(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to\infty}\,\left(3x-3x^2-5\right) = -\infty.$$

Por lo tanto, el límite no puede determinarse considerando únicamente $\infty - \infty$. A continuación vemos cómo reescribir una expresión que implica la forma indeterminada $\infty - \infty$ como fracción para aplicar la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 4.42

Forma indeterminada del tipo $\infty - \infty$

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan x}\right)$.

Solución

Al combinar las fracciones, podemos escribir la función como un cociente. Dado que el mínimo común denominador es $x^2\tan x$, tenemos

$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan x} = \frac{(\tan x)-x^2}{x^2\tan x}.$$

Dado que $x \to 0^+$, el numerador $\tan x - x^2 \to 0$ y el denominador $x^2\tan x \to 0$. Por lo tanto, podemos aplicar la regla de L'Hôpital. Tomando las derivadas del numerador y del denominador, tenemos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\tan x)-x^2}{x^2\tan x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sec^2 x\right)-2x}{x^2\sec^2 x+2x\tan x}.$$

Dado que $x \to 0^+$, $\left(\sec^2 x\right)-2x \to 1$ y $x^2\sec^2 x+2x\tan x \to 0$. Dado que el denominador es positivo cuando x se acerca a cero por la derecha, concluimos que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\sec^2 x\right)-2x}{x^2\sec^2 x+2x\tan x} = \infty.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan x}\right) = \infty.$$

4.41 Evalúe $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$.

Otro tipo de forma indeterminada que surge al evaluar límites involucra a los exponentes. Las expresiones 0^0, ∞^0, y 1^∞ son todas formas indeterminadas. Por sí solas, estas expresiones no tienen sentido porque no podemos evaluarlas como lo haríamos con una expresión que incluya números reales. Más bien, estas expresiones representan formas que surgen al encontrar los límites. Ahora examinaremos cómo podemos utilizar la regla de L'Hôpital para evaluar los límites que implican estas formas indeterminadas.

Dado que la regla de L'Hôpital se aplica a los cocientes, utilizamos la función logarítmica natural y sus propiedades para reducir un problema que evalúa un límite que involucra exponentes a un problema relacionado que involucra un límite de un cociente. Por ejemplo, supongamos que queremos evaluar $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ y llegamos a la forma indeterminada ∞^0.

(Las formas indeterminadas 0^0 y 1^∞ se pueden manejar de manera similar) Procedamos de la siguiente manera. Supongamos que

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Entonces,

$$\ln y = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x)\ln(f(x)).$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to a}[\ln(y)] = \lim_{x\to a}[g(x)\ln(f(x))].$$

Dado que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, sabemos que $\lim\limits_{x\to a}\ln(f(x)) = \infty$. Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln(f(x))$ es de la forma indeterminada $0. \infty$, y podemos utilizar las técnicas discutidas anteriormente para reescribir la expresión $g(x)\ln(f(x))$ de manera tal que podamos aplicar la regla de L'Hôpital. Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln(f(x)) = L$, donde L puede ser ∞ o $-\infty$. Entonces

$$\lim_{x\to a}[\ln(y)] = L.$$

Dado que la función logarítmica natural es continua, concluimos que

$$\ln\left(\lim_{x\to a} y\right) = L,$$

que nos da

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^L.$$

EJEMPLO 4.43

Forma indeterminada del tipo ∞^0

Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$.

Solución

Supongamos que $y = x^{1/x}$. Entonces,

$$\ln\left(x^{1/x}\right) = \frac{1}{x}\ln x = \frac{\ln x}{x}.$$

Tenemos que evaluar $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$. Aplicando la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\ln y = 0$. Dado que la función logarítmica natural es continua, concluimos que

$$\ln\left(\lim_{x\to\infty} y\right) = 0,$$

lo que lleva a

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = e^0 = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1.$$

4.42 Evalúe $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\ln(x)}$.

EJEMPLO 4.44

Forma indeterminada del tipo 0^0

Evalúe $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$.

Solución

Supongamos que

$$y = x^{\operatorname{sen} x}.$$

Por lo tanto,

$$\ln y = \ln\left(x^{\operatorname{sen} x}\right) = \operatorname{sen} x \ln x.$$

Ahora evaluamos $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$. Dado que $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, tenemos la forma indeterminada $0.\,\infty$. Para aplicar la regla de L'Hôpital, tenemos que reescribir $\operatorname{sen} x \ln x$ como fracción. Podríamos escribir

$$\operatorname{sen} x \ln x = \frac{\operatorname{sen} x}{1/\ln x}$$

o

$$\operatorname{sen} x \ln x = \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen} x} = \frac{\ln x}{\csc x}.$$

Consideremos la primera opción. En este caso, al aplicar la regla de L'Hôpital, obtendríamos

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{1/\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{-1/\left(x(\ln x)^2\right)} = \lim_{x\to 0^+} \left(-x(\ln x)^2 \cos x\right).$$

Desafortunadamente, no solo tenemos otra expresión que implica la forma indeterminada $0.\,\infty$, sino que el nuevo límite es aún más complicado de evaluar que aquel con el que empezamos. En su lugar, probamos la segunda opción. Al escribir

$$\operatorname{sen} x \ln x = \frac{\ln x}{1/\operatorname{sen} x} = \frac{\ln x}{\csc x},$$

y aplicar la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x \csc x \cot x}.$$

Si utilizamos el hecho de que $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ y $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, podemos reescribir la expresión del lado derecho como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}.(-\tan x)\right] = \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right).\left(\lim_{x\to 0^+} (-\tan x)\right) = 1.\,0 = 0.$$

Concluimos que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = 0$. Por lo tanto, $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0^+} y\right) = 0$ y tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = 1.$$

4.43 Evalúe $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$.

Tasas de crecimiento de las funciones

Supongamos que las funciones f y g ambas se acercan al infinito como $x \to \infty$. Aunque los valores de ambas funciones se vuelven arbitrariamente grandes a medida que los valores de x se hacen lo suficientemente grandes, a veces una función crece más rápido que la otra. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ ambas se acercan al infinito como $x \to \infty$. Sin embargo, como se muestra en la siguiente tabla, los valores de x^3 crecen mucho más rápido que los valores de x^2.

x	10	100	1.000	10.000
$f(x) = x^2$	100	10.000	1.000.000	100.000.000
$g(x) = x^3$	1.000	1.000.000	1.000.000.000	1.000.000.000.000

Tabla 4.7 Comparación de las tasas de crecimiento de x^2 y x^3

De hecho,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \infty} x = \infty. \text{ o, de forma equivalente, } \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

En consecuencia, decimos que x^3 crece más rápidamente que x^2 cuando $x \to \infty$. Por otro lado, para $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x^2 + 4x + 1$, aunque los valores de $g(x)$ son siempre mayores que los valores de $f(x)$ para $x > 0$, cada valor de $g(x)$ es aproximadamente tres veces el valor correspondiente de $f(x)$ cuando $x \to \infty$, como se muestra en la siguiente tabla. De hecho,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{3x^2 + 4x + 1} = \frac{1}{3}.$$

x	10	100	1.000	10.000
$f(x) = x^2$	100	10.000	1.000.000	100.000.000
$g(x) = 3x^2 + 4x + 1$	341	30.401	3004001	300.040.001

Tabla 4.8 Comparación de las tasas de crecimiento de x^2 y $3x^2 + 4x + 1$

En este caso, decimos que x^2 y $3x^2 + 4x + 1$ crecen a la misma tasa que $x \to \infty$.

En términos más generales, supongamos que f y g son dos funciones que se aproximan al infinito dado que $x \to \infty$. Decimos g crece más rápidamente que f cuando $x \to \infty$ si

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty; \text{ o, de forma equivalente, } \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Por otro lado, si existe una constante $M \neq 0$ tal que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M,$$

decimos que f y g crecen a la misma tasa que $x \to \infty$.

A continuación veremos cómo utilizar la regla de L'Hôpital para comparar las tasas de crecimiento de las funciones potencia, exponencial y logarítmica.

EJEMPLO 4.45

Comparación de las tasas de crecimiento de $\ln(x)$, x^2, y e^x

Para cada uno de los siguientes pares de funciones, utilice la regla de L'Hôpital para evaluar $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$.

a. $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$
b. $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = x^2$

Solución

a. Dado que $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, podemos utilizar la regla de L'Hôpital para evaluar $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{e^x}\right]$. Obtenemos

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}.$$

Dado que $\lim\limits_{x\to\infty} 2x = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$, podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital. Dado que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} = 0.$$

Por lo tanto, e^x crece más rápidamente que x^2 cuando $x \to \infty$ (Vea la Figura 4.73 y la Tabla 4.9)

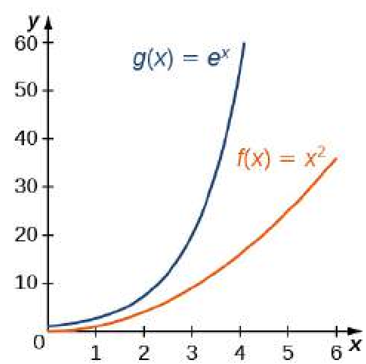


Figura 4.73 Una función exponencial crece más rápido que una función potencia.

x	5	10	15	20
x^2	25	100	225	400
e^x	148	22026	3269017	485165195

Tabla 4.9 Tasas de crecimiento de una función potencia y una función exponencial.

b. Dado que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ y $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$, podemos utilizar la regla de L'Hôpital para evaluar $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$. Obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Por lo tanto, x^2 crece más rápidamente que $\ln x$ a medida que $x \to \infty$ (vea la Figura 4.74 y la Tabla 4.10)

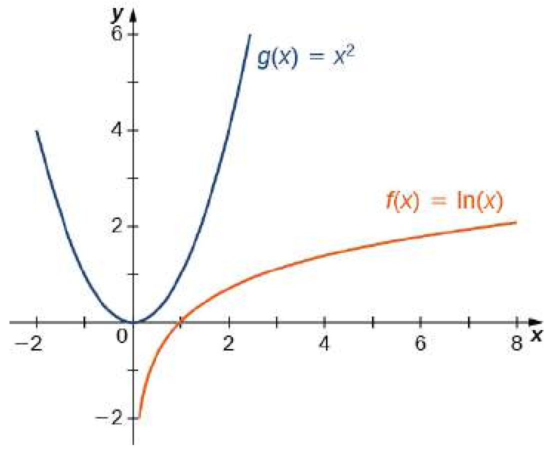


Figura 4.74 Una función potencia crece más rápido que una función logarítmica.

x	10	100	1.000	10.000
$\ln(x)$	2,303	4,605	6,908	9,210
x^2	100	10.000	1.000.000	100.000.000

Tabla 4.10 Tasas de crecimiento de una función potencia y de una función logarítmica

4.44 Compare las tasas de crecimiento de x^{100} y 2^x.

Utilizando las mismas ideas que en el Ejemplo 4.45a. no es difícil demostrar que e^x crece más rápidamente que x^p para cualquier $p > 0$. En la Figura 4.75 y la Tabla 4.11, comparamos e^x con la x^3 y x^4 cuando $x \to \infty$.

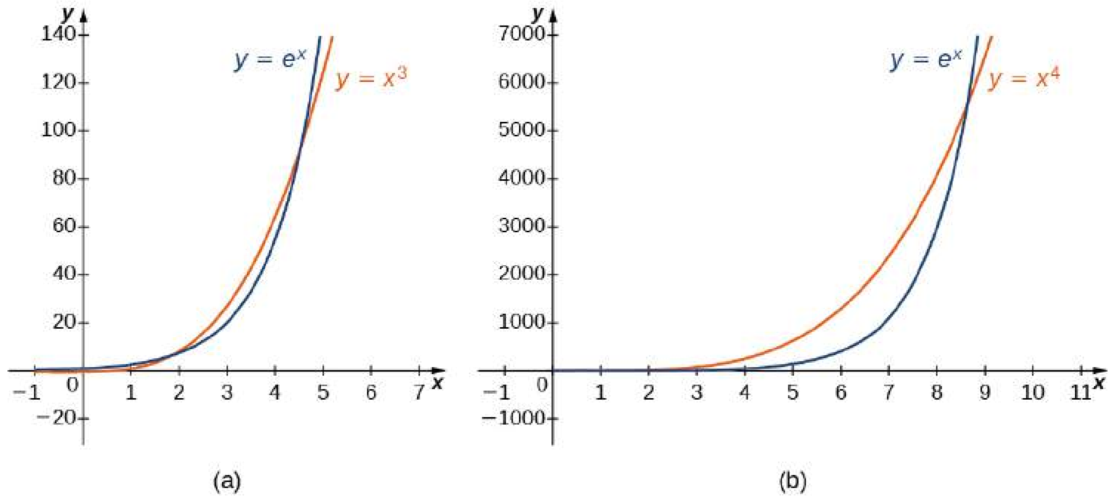


Figura 4.75 La función exponencial e^x crece más rápido que x^p para cualquier $p > 0$. (a) Una comparación de e^x con la x^3. (b) Una comparación de e^x con la x^4.

x	5	10	15	20
x^3	125	1.000	3375	8.000
x^4	625	10.000	50.625	160.000
e^x	148	22026	3269017	485165195

Tabla 4.11 Una función exponencial crece más rápido que cualquier función potencia

Del mismo modo, no es difícil demostrar que x^p crece más rápidamente que $\ln x$ para cualquier $p > 0$. En la Figura 4.76 y la Tabla 4.12, comparamos $\ln x$ con la $\sqrt[3]{x}$ y $\sqrt{x}$.

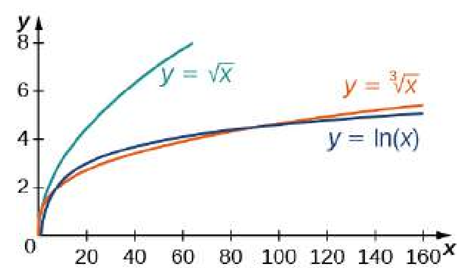


Figura 4.76 La función $y = \ln(x)$ crece más lentamente que x^p para cualquier $p > 0$ cuando $x \to \infty$.

x	10	100	1.000	10.000
$\ln(x)$	2,303	4,605	6,908	9,210
$\sqrt[3]{x}$	2,154	4,642	10	21,544
$\sqrt{x}$	3,162	10	31,623	100

Tabla 4.12 Una función logarítmica crece a un ritmo más lento que cualquier función raíz

SECCIÓN 4.8 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, evalúe el límite.

356. Evalúe el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$.

357. Evalúe el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^k}$.

358. Evalúe el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^k}$.

359. Evalúe el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^2-a^2}, \quad a \neq 0.$

360. Evalúe el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^3-a^3}, \quad a \neq 0.$

361. Evalúe el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^n-a^n}, \quad a \neq 0.$

En los siguientes ejercicios, determine si puede aplicar directamente la regla de L'Hôpital. Explique por qué sí o por qué no. A continuación, indique si hay alguna forma de modificar el límite para poder aplicar la regla de L'Hôpital.

362. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

363. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

364. $\lim\limits_{x\to 0} x^{2/x}$

365. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1/x}$

366. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$

En los siguientes ejercicios, evalúe los límites con la regla de L'Hôpital o con los métodos previamente aprendidos.

367. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

368. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x+3}$

369. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{-2}-1}{x}$

370. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

371. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{x-\pi}{\operatorname{sen} x}$

372. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\operatorname{sen} x}$

373. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1}{x}$

374. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^n-1-nx}{x^2}$

375. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x-\tan x}{x^3}$

376. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

377. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}$

378. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\tan x}{\sqrt{x}}$

379. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$

380. $\lim\limits_{x\to 0} (x+1)^{1/x}$

381. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x-1}$

382. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2x}$

383. $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ grandes.

384. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x-x}{x^2}$

385. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln\left(x^4\right)$ grandes.

386. $\lim\limits_{x\to\infty} (x-e^x)$ grandes.

387. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

388. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-2^x}{x}$

389. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+1/x}{1-1/x}$

390. $\lim\limits_{x\to \pi/4} (1-\tan x)\cot x$

391. $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{1/x}$

392. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/\cos x}$

393. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/x}$

394. $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

395. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para graficar la función y estimar el valor del límite, luego use la regla de L'Hôpital para encontrar el límite directamente.

396. **[T]** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

397. **[T]** $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ grandes.

398. **[T]** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{1-\cos(\pi x)}$

399. **[T]** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{e^{(x-1)}-1}{x-1}$

400. **[T]** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{\ln x}$

401. **[T]** $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$

402. **[T]** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\csc x - \frac{1}{x}\right)$

403. **[T]** $\lim\limits_{x \to 0^+} \tan\left(x^x\right)$ grandes.

404. **[T]** $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

405. **[T]** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

4.9 Método de Newton

Objetivos de aprendizaje

- **4.9.1** Describir los pasos del método de Newton.
- **4.9.2** Explicar qué significa un proceso iterativo.
- **4.9.3** Reconocer cuando el método de Newton no funciona.
- **4.9.4** Aplicar procesos iterativos en diversas situaciones.

En muchas áreas de la matemática pura y aplicada, nos interesa encontrar soluciones a una ecuación de la forma $f(x) = 0$. Para la mayoría de las funciones, sin embargo, es difícil (si no imposible) calcular sus ceros explícitamente. En esta sección, echamos un vistazo a una técnica que proporciona una forma muy eficiente de aproximar los ceros de las funciones. Esta técnica usa aproximaciones de rectas tangentes y está detrás del método utilizado a menudo por calculadoras y computadoras para encontrar ceros.

Descripción del método de Newton

Consideremos la tarea de encontrar las soluciones de $f(x) = 0$. Si f es el polinomio de primer grado $f(x) = ax + b$, entonces la solución de $f(x) = 0$ está dado por la fórmula $x = -\frac{b}{a}$. Si f es el polinomio de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, las soluciones de $f(x) = 0$ pueden hallarse utilizando la fórmula cuadrática. Sin embargo, en los polinomios de grado 3 o más, hallar raíces de f es más complicado. Aunque existen fórmulas para los polinomios de tercer y cuarto grado, son bastante complicadas. Además, si f es un polinomio de grado 5 o mayor, sabemos que tales fórmulas no existen. Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = x^5 + 8x^4 + 4x^3 - 2x - 7.$$

No existe ninguna fórmula que nos permita encontrar las soluciones de $f(x) = 0$. Existen dificultades similares para las funciones no polinómicas. Por ejemplo, consideremos la tarea de encontrar soluciones para $\tan(x) - x = 0$. No existe ninguna fórmula sencilla para las soluciones de esta ecuación. En estos casos, podemos utilizar el método de Newton para aproximar las raíces.

El método de Newton utiliza la siguiente idea para aproximar las soluciones de $f(x) = 0$. Trazando un gráfico de f, podemos estimar una raíz de $f(x) = 0$. Llamemos a esta estimación x_0. A continuación, trazamos la línea tangente a f en x_0. Si $f'(x_0) \neq 0$, esta línea tangente se cruza con el eje x en algún momento $(x_1, 0)$. Ahora supongamos que x_1 es la siguiente aproximación a la raíz real. Típicamente, x_1 está más cerca que x_0 a una raíz real. A continuación trazamos la línea tangente a f en x_1. Si $f'(x_1) \neq 0$, esta línea tangente también se interseca con el eje x, produciendo otra aproximación, x_2. Continuamos así, derivando una lista de aproximaciones $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Normalmente, los números $x_0, x_1, x_2, \ldots$ se acercan rápidamente a una raíz real x^*, como se muestra en la siguiente figura.

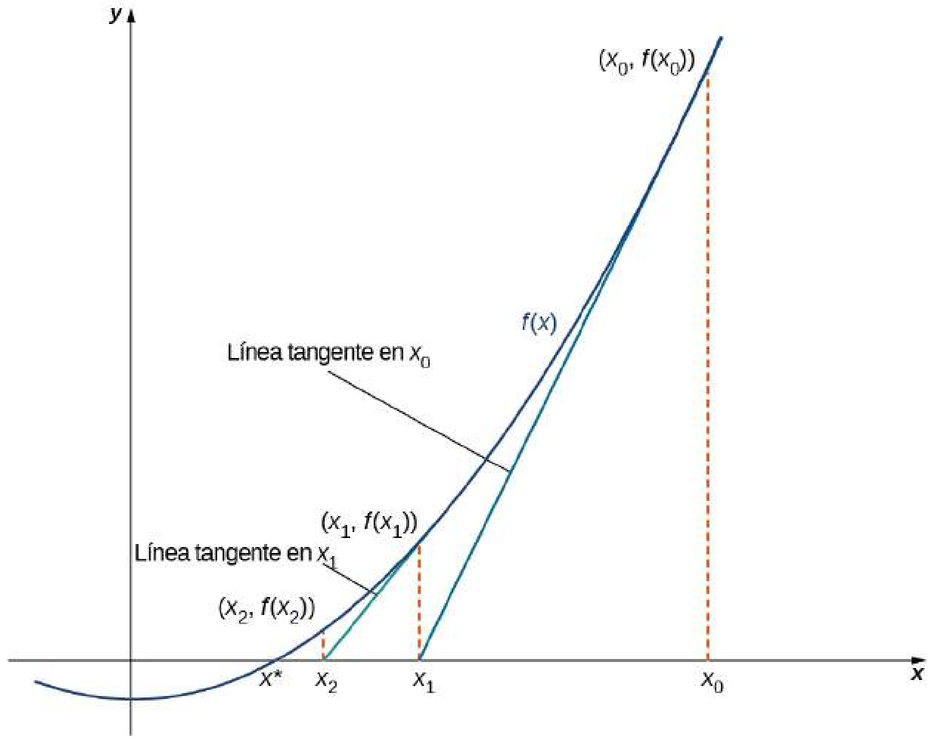


Figura 4.77 Las aproximaciones $x_0, x_1, x_2, \ldots$ se acercan a la raíz real x^*. Las aproximaciones se obtienen mirando las rectas tangentes al gráfico de f.

Veamos ahora cómo calcular las aproximaciones $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Si x_0 es nuestra primera aproximación, la aproximación x_1 se define dejando que $(x_1, 0)$ es la intersección en x de la línea tangente a f en x_0. La ecuación de esta línea tangente viene dada por

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Por lo tanto, x_1 deben satisfacer

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

Resolviendo esta ecuación para x_1, concluimos que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Del mismo modo, el punto $(x_2, 0)$ es la intersección en x de la línea tangente a f en x_1. Por lo tanto, x_2 satisface la ecuación

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

En general, para $n > 0, x_n$ satisface

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \qquad (4.8)$$

A continuación veremos cómo hacer uso de esta técnica para aproximar la raíz del polinomio $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

EJEMPLO 4.46

Encontrar la raíz de un polinomio

Utilice el método de Newton para aproximar una raíz de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[1, 2]$. Supongamos que $x_0 = 2$ y calculemos x_1, x_2, x_3, x_4, y x_5.

Solución

En la Figura 4.78, vemos que f tiene una raíz en el intervalo $(1, 2)$. Por lo tanto $x_0 = 2$ parece una primera aproximación razonable. Para encontrar la siguiente aproximación, utilizamos la Ecuación 4.8. Dado que $f(x) = x^3 - 3x + 1$, la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$. Utilizando la Ecuación 4.8 con $n = 1$ (y una calculadora que muestre 10 dígitos), obtenemos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 – \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{3}{9} \approx 1{,}666666667.$$

Para encontrar la siguiente aproximación, x_2, utilizamos la Ecuación 4.8 con $n = 2$ y el valor de x_1 almacenado en la calculadora. Tenemos que

$$x_2 = x_1 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1{,}548611111.$$

Al continuar de esta manera, obtenemos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 1{,}666666667 \\ x_2 &\approx 1{,}548611111 \\ x_3 &\approx 1{,}532390162 \\ x_4 &\approx 1{,}532088989 \\ x_5 &\approx 1{,}532088886 \\ x_6 &\approx 1{,}532088886. \end{aligned}$$

Observamos que obtuvimos el mismo valor para x_5 y x_6. Por lo tanto, cualquier aplicación posterior del método de Newton dará muy probablemente el mismo valor para x_n.

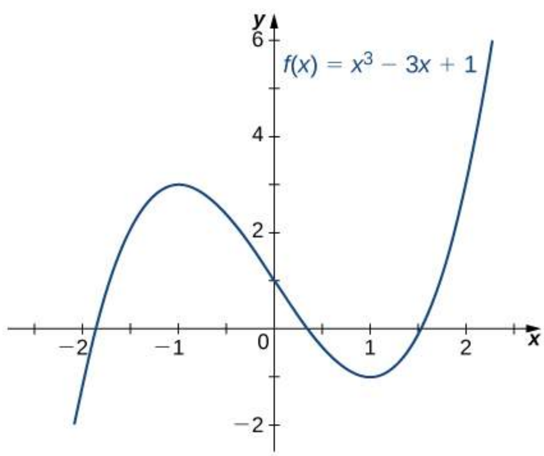


Figura 4.78 La función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ tiene una raíz en el intervalo $[1, 2]$.

4.45 Suponiendo que $x_0 = 0$, utilizaremos el método de Newton para aproximar la raíz de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$ calculando x_1 y x_2.

El método de Newton también puede utilizarse para aproximar raíces cuadradas. Aquí mostramos cómo aproximar $\sqrt{2}$. Este método puede ser modificado para aproximar la raíz cuadrada de cualquier número positivo.

EJEMPLO 4.47

Encontrar una raíz cuadrada

Utilice el método de Newton para aproximar $\sqrt{2}$ (Figura 4.79). Supongamos que $f(x) = x^2 - 2$, supongamos que $x_0 = 2$, y calcule x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. (Observamos que como $f(x) = x^2 - 2$ tiene un cero en $\sqrt{2}$, el valor inicial $x_0 = 2$ es una opción razonable para aproximar $\sqrt{2}$.)

Solución

Para $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$. Por la Ecuación 4.8, sabemos que

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \\ &= x_{n-1} - \frac{x^2{}_{n-1} - 2}{2x_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) = 1{,}5 \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right) \approx 1{,}416666667. \end{aligned}$$

Al continuar de esta manera, hallamos que

$$\begin{aligned} x_1 &= 1{,}5 \\ x_2 &\approx 1{,}416666667 \\ x_3 &\approx 1{,}414215686 \\ x_4 &\approx 1{,}414213562 \\ x_5 &\approx 1{,}414213562. \end{aligned}$$

Como obtuvimos el mismo valor para x_4 y x_5, es poco probable que el valor x_n cambie en cualquier aplicación posterior del método de Newton. Concluimos que $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$.

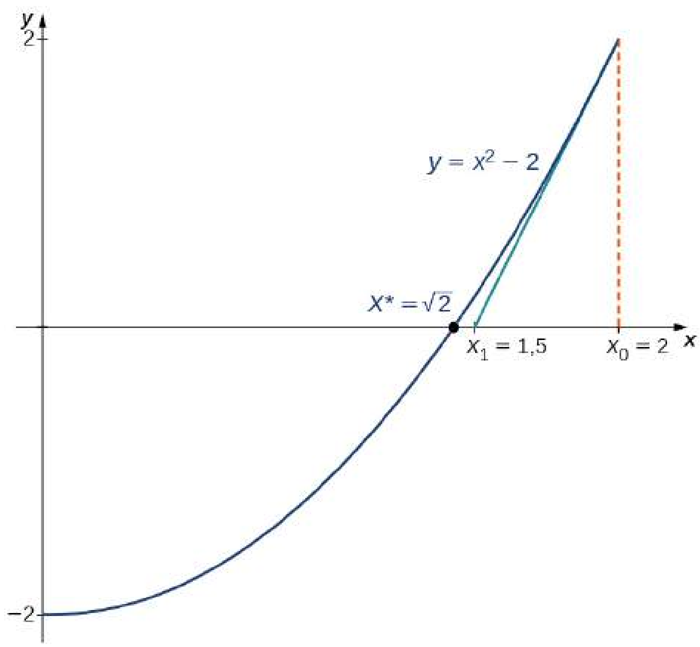


Figura 4.79 Podemos utilizar el método de Newton para hallar $\sqrt{2}$.

4.46 Utilice el método de Newton para aproximar $\sqrt{3}$ suponiendo que $f(x) = x^2 - 3$ y $x_0 = 3$. Halle x_1 y x_2.

Cuando se utiliza el método de Newton, cada aproximación después de la conjetura inicial se define en términos de la aproximación anterior utilizando la misma fórmula. En particular, al definir la función $F(x) = x - \left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$, podemos reescribir la Ecuación 4.8 como $x_n = F(x_{n-1})$. Este tipo de proceso, en el que cada x_n se define en términos de x_{n-1} repitiendo la misma función, es un ejemplo de **proceso iterativo**. En breve, examinaremos otros procesos iterativos. En primer lugar, veamos las razones por las que el método de Newton podría no encontrar una raíz.

Fallos del método de Newton

Normalmente, el método de Newton se utiliza para hallar las raíces con bastante rapidez. Sin embargo, las cosas pueden salir mal. Algunas de las razones por las que el método de Newton puede fallar son las siguientes:

1. En una de las aproximaciones x_n, la derivada f' es cero en x_n, pero $f(x_n) \neq 0$. Como resultado, la línea tangente de f en x_n no se interseca con el eje x. Por lo tanto, no podemos continuar el proceso iterativo.
2. Las aproximaciones $x_0, x_1, x_2, \ldots$ puede acercarse a una raíz diferente. Si se grafica la función f tiene más de una raíz, es posible que nuestras aproximaciones no se acerquen a la que estamos buscando, sino que se acerquen a una raíz diferente (ver la Figura 4.80). Este hecho se produce con mayor frecuencia cuando no elegimos la aproximación x_0 lo suficientemente cerca de la raíz deseada.
3. Las aproximaciones pueden no acercarse completamente a una raíz. En el Ejemplo 4.48, proporcionamos un ejemplo de una función y una conjetura inicial x_0 tal que las aproximaciones sucesivas nunca se acercan a una raíz porque las aproximaciones sucesivas siguen alternando entre dos valores.

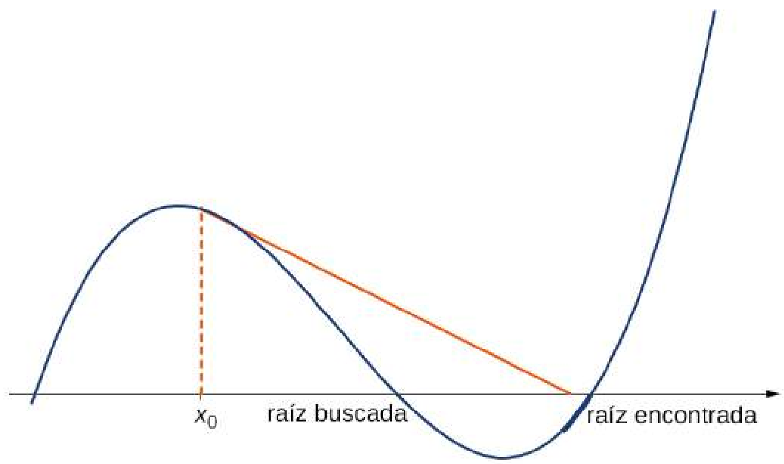


Figura 4.80 Si la suposición inicial x_0 está demasiado lejos de la raíz buscada, puede llevarnos a aproximaciones que se acerquen a una raíz diferente.

EJEMPLO 4.48

Cuando el método de Newton falla

Considere la función $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Supongamos que $x_0 = 0$. Demuestre que la secuencia $x_1, x_2, \ldots$ no se acerca a una raíz de f.

Solución

Para $f(x) = x^3 - 2x + 2$, la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 2$. Por lo tanto,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{2}{-2} = 1.$$

En el siguiente paso,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{1}{1} = 0.$$

En consecuencia, los números $x_0, x_1, x_2, \ldots$ siguen rebotando de un lado a otro entre 0 y 1 y nunca se acercan a la raíz de f que está en el intervalo $[-2, -1]$ (vea la Figura 4.81). Afortunadamente, si elegimos una aproximación inicial x_0 más cerca de la raíz real, podemos evitar esta situación.

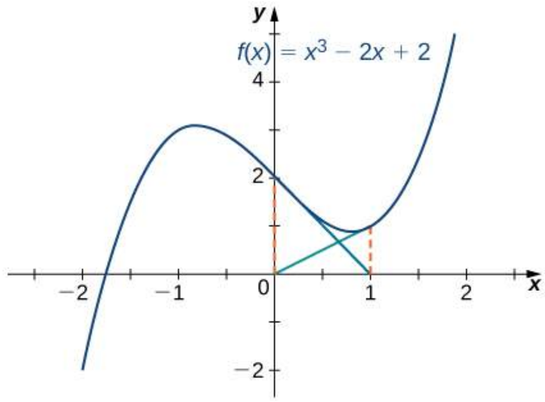


Figura 4.81 Las aproximaciones siguen alternando entre 0 y 1 y nunca se acercan a la raíz de f.

4.47 Para $f(x) = x^3 - 2x + 2$, supongamos que $x_0 = -1{,}5$ y hallar x_1 y x_2.

En el Ejemplo 4.48, vemos que el método de Newton no siempre funciona. Sin embargo, cuando lo hace, la secuencia de aproximaciones se acerca a la raíz muy rápidamente. En los textos de análisis numérico se discute la rapidez con la que la secuencia de aproximaciones se acerca a una raíz encontrada mediante el método de Newton.

Otros procesos iterativos

Como se ha mencionado anteriormente, el método de Newton es un tipo de proceso iterativo. Ahora veremos un ejemplo de un tipo diferente de proceso iterativo.

Considere una función F y un número inicial x_0. Defina los números siguientes x_n mediante la fórmula $x_n = F(x_{n-1})$. Este proceso es un proceso iterativo que crea una lista de números $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Esta lista de números puede acercarse a un número finito x^* a medida que n se hace más grande, o es posible que no lo haga. En el Ejemplo 4.49, vemos un ejemplo de función F y una conjetura inicial x_0 de manera que la lista de números resultante se aproxime a un valor finito.

EJEMPLO 4.49

Encontrar un límite para un proceso iterativo

Supongamos que $F(x) = \frac{1}{2}x + 4$ y supongamos que $x_0 = 0$. Para todo $n \geq 1$, supongamos que $x_n = F(x_{n-1})$. Halle los valores x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Haga una conjetura sobre lo que ocurre con esta lista de números $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n, \ldots$ cuando $n \to \infty$. Si la lista de números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se acerca a un número finito x^*, entonces x^* satisface $x^* = F(x^*)$, y x^* se llama punto fijo de F.

Solución

Si los valores de $x_0 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(0) + 4 = 4 \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(4) + 4 = 6 \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}(6) + 4 = 7 \\ x_4 &= \tfrac{1}{2}(7) + 4 = 7{,}5 \\ x_5 &= \tfrac{1}{2}(7{,}5) + 4 = 7{,}75 \\ x_6 &= \tfrac{1}{2}(7{,}75) + 4 = 7{,}875 \\ x_7 &= \tfrac{1}{2}(7{,}875) + 4 = 7{,}9375 \\ x_8 &= \tfrac{1}{2}(7{,}9375) + 4 = 7{,}96875 \\ x_9 &= \tfrac{1}{2}(7{,}96875) + 4 = 7{,}984375. \end{aligned}$$

A partir de esta lista, hacemos la conjetura de que los valores x_n se acercan a 8.

La Figura 4.82 proporciona un argumento gráfico de que los valores se aproximan 8 cuando $n \to \infty$. A partir del punto (x_0, x_0), trazamos una línea vertical hasta el punto $(x_0, F(x_0))$. El siguiente número de nuestra lista es $x_1 = F(x_0)$. Utilizamos x_1 para calcular x_2. Por lo tanto, trazamos una línea horizontal que une (x_0, x_1) al punto (x_1, x_1) en la línea $y = x$, y luego dibujar una línea vertical que conecte (x_1, x_1) al punto $(x_1, F(x_1))$. La salida $F(x_1)$ se convierte en x_2. Si continuamos de esta manera, podríamos crear un número infinito de segmentos de línea. Estos segmentos de línea están atrapados entre las líneas $F(x) = \frac{x}{2} + 4$ en tanto que $y = x$. Los segmentos de línea se acercan al punto de intersección de estas dos líneas, lo que ocurre cuando $x = F(x)$. Si resolvemos la ecuación $x = \frac{x}{2} + 4$, concluimos que se intersecan en $x = 8$. Por lo tanto, nuestra evidencia gráfica concuerda con nuestra evidencia numérica de que la lista de números $x_0, x_1, x_2, \ldots$ se acerca a $x^* = 8$ cuando $n \to \infty$.

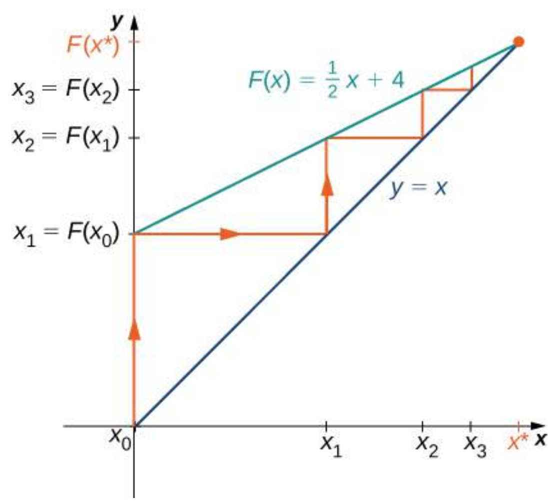


Figura 4.82 Este proceso iterativo se acerca al valor $x^* = 8$.

4.48 Considere la función $F(x) = \frac{1}{3}x + 6$. Supongamos que $x_0 = 0$ y supongamos que $x_n = F(x_{n-1})$ por $n \geq 2$. Halle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Haga una conjetura sobre lo que ocurre con la lista de números $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ cuando $n \to \infty$.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Procesos iterativos y caos

Los procesos iterativos pueden tener un comportamiento muy interesante. En esta sección, hemos visto varios ejemplos de procesos iterativos que convergen en un punto fijo. También hemos visto en el Ejemplo 4.48 que el proceso iterativo rebota entre dos valores. A este tipo de comportamiento lo llamamos 2–*ciclo*. Los procesos iterativos pueden converger en ciclos con diversas periodicidades, como $2-\text{ciclos},\ 4-\text{ciclos}$ (donde el proceso iterativo repite una secuencia de cuatro valores), 8 ciclos, etc.

Algunos procesos iterativos dan lugar a lo que los matemáticos llaman *caos*. En este caso, el proceso iterativo salta de un valor a otro de forma aparentemente aleatoria y nunca converge ni se asienta en un ciclo. Aunque una exploración completa del caos está más allá del alcance de este texto, en este proyecto examinamos una de las propiedades clave de un proceso iterativo caótico: la dependencia sensible de las condiciones iniciales. Esta propiedad se refiere al concepto de que pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden generar un comportamiento drásticamente diferente en el proceso iterativo.

Probablemente el ejemplo más conocido de caos es el conjunto de Mandelbrot (vea la Figura 4.83), llamado así por Benoit Mandelbrot (1924-2010), que investigó sus propiedades y ayudó a popularizar el campo de la teoría del caos. El conjunto de Mandelbrot suele generarse por computadora y muestra detalles fascinantes al ampliarse, incluida la autorreplicación del conjunto. Varias versiones coloreadas del conjunto se han expuesto en museos y pueden encontrarse en Internet y en libros populares sobre el tema.

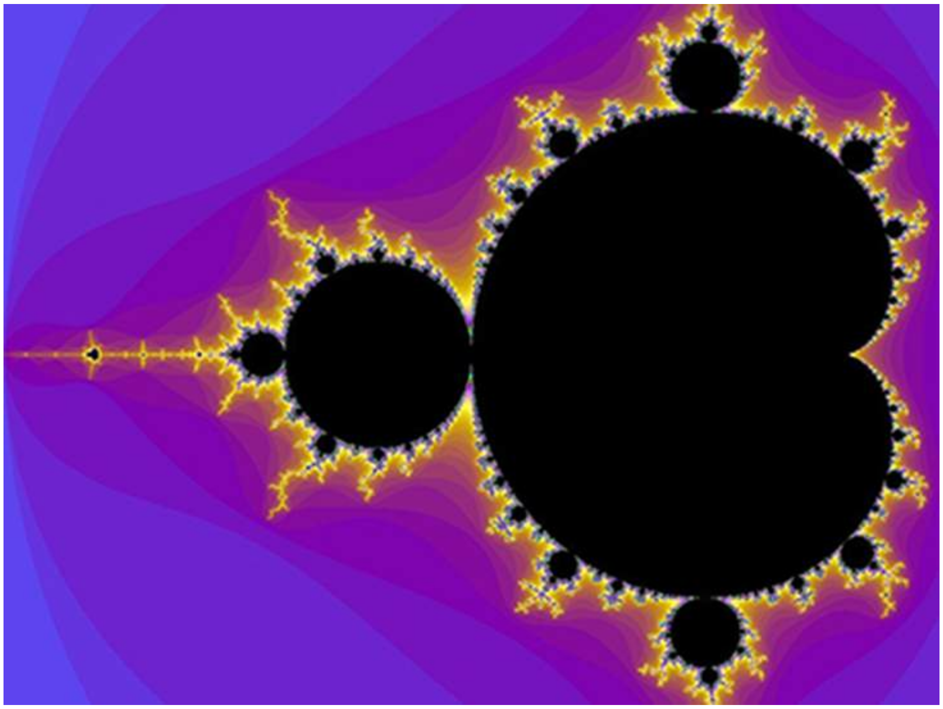


Figura 4.83 El conjunto de Mandelbrot es un ejemplo bien conocido de un conjunto de puntos generados por el comportamiento caótico iterativo de una función relativamente simple.

En este proyecto utilizamos el mapa logístico

$$f(x) = rx(1-x),\ \text{donde } x \in [0,1]\ \text{ y } r > 0$$

como la función en nuestro proceso iterativo. El mapa logístico es una función aparentemente sencilla, pero dependiendo del valor de r, el proceso iterativo resultante muestra un comportamiento muy interesante. Puede conducir a puntos fijos, ciclos e incluso al caos.

Para visualizar el comportamiento a largo plazo del proceso iterativo asociado al mapa logístico, utilizaremos una herramienta llamada *diagrama de telaraña*. Tal como hicimos con el proceso iterativo que examinamos anteriormente en esta sección, primero trazaremos una línea vertical desde el punto $(x_0, 0)$ al punto $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$. A continuación, trazamos una línea horizontal desde ese punto hasta el punto (x_1, x_1) , luego dibujamos una línea vertical a $(x_1, f(x_1)) = (x_1, x_2)$, y continuamos el proceso hasta que el comportamiento a largo plazo del sistema se haga evidente. La Figura 4.84 muestra el comportamiento a largo plazo del mapa logístico cuando $r = 3{,}55$ y $x_0 = 0{,}2$. (Las primeras 100 iteraciones no están representadas). El comportamiento a largo plazo de este proceso iterativo es un 8–ciclo.

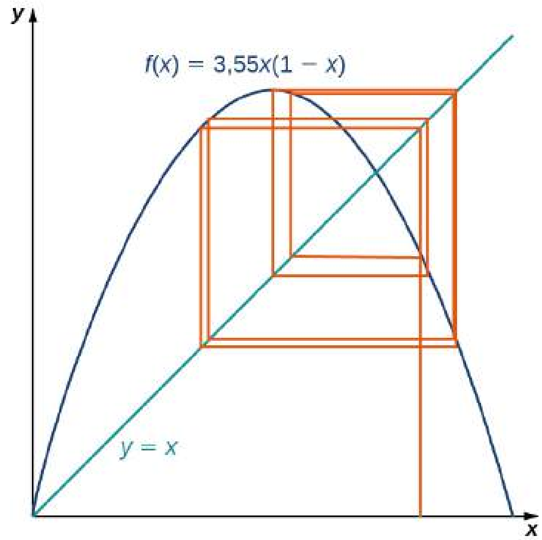


Figura 4.84 Un diagrama de telaraña para $f(x) = 3{,}55x(1 - x)$ se presenta aquí. La secuencia de valores da lugar a un 8–ciclo.

1. Supongamos que $r = 0{,}5$ y elegir $x_0 = 0{,}2$. Calcule, a mano o con una computadora, los primeros 10 valores en la secuencia. ¿Parece que la secuencia converge? Si es así, ¿a qué valor? ¿Resulta un ciclo? Si es así, ¿qué tipo de ciclo (por ejemplo, $2 - \text{ciclo},\ 4 - \text{ciclo}.$)?
2. ¿Qué sucede cuando $r = 2$?
3. Para $r = 3{,}2$ y $r = 3{,}5$, calcule los primeros 100 valores de la secuencia. Genere un diagrama de telaraña para cada proceso iterativo. (Existen varias miniaplicaciones gratuitas en línea que generan diagramas de telaraña para el mapa logístico). ¿Cuál es el comportamiento a largo plazo en cada uno de estos casos?
4. Ahora supongamos que $r = 4$. Calcule los primeros 100 valores de la secuencia y genere un diagrama de telaraña. ¿Cuál es el comportamiento a largo plazo en este caso?
5. Repita el proceso para $r = 4$, pero suponga que $x_0 = 0{,}201$. ¿Cómo se compara este comportamiento con el de $x_0 = 0{,}2$?

SECCIÓN 4.9 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, escriba la fórmula de Newton como $x_{n+1} = F(x_n)$ para resolver $f(x) = 0$.

406. $f(x) = x^2 + 1$

407. $f(x) = x^3 + 2x + 1$

408. $f(x) = \operatorname{sen} x$

409. $f(x) = e^x$

410. $f(x) = x^3 + 3xe^x$

En los siguientes ejercicios, resuelva $f(x) = 0$ utilizando la iteración $x_{n+1} = x_n - cf(x_n)$, la cual difiere ligeramente del método de Newton. Halle una c que funcione y una c que no converja, con la excepción de $c = 0$.

411. $f(x) = x^2 - 4$, con la $x_0 = 0$

412. $f(x) = x^2 - 4x + 3$, con la $x_0 = 2$

413. ¿Cuál es el valor de “c” en el método de Newton?

En los siguientes ejercicios, comience en

a. $x_0 = 0{,}6$ *y*

b. $x_0 = 2$.

Calcule x_1 *y* x_2 *utilizando el método iterativo especificado.*

414. $x_{n+1} = {x_n}^2 - \frac{1}{2}$

415. $x_{n+1} = 2x_n\,(1 - x_n)$

416. $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$

417. $x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n}}$

418. $x_{n+1} = 3x_n\,(1 - x_n)$ grandes.

419. $x_{n+1} = {x_n}^2 + x_n - 2$

420. $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$

421. $x_{n+1} = |x_n|$

En los siguientes ejercicios, resuelva con cuatro decimales utilizando el método de Newton y una computadora o calculadora. Elija cualquier conjetura inicial x_0 *que no sea la raíz exacta.*

422. $x^2 - 10 = 0$

423. $x^4 - 100 = 0$

424. $x^2 - x = 0$

425. $x^3 - x = 0$

426. $x + 5\cos(x) = 0$

427. $x + \tan(x) = 0$, elija $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ grandes.

428. $\frac{1}{1-x} = 2$

429. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 2$

430. $x^3 + (x+1)^3 = 10^3$

431. $x = \operatorname{sen}^2(x)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, utilice el método de Newton para encontrar los puntos fijos de la función donde $f(x) = x$*; redondee a tres decimales.*

432. $\operatorname{sen} x$

433. $\tan(x)$ sobre $x = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ grandes.

434. $e^x - 2$

435. $\ln(x) + 2$

El método de Newton puede utilizarse para encontrar los máximos y los mínimos de las funciones, además de las raíces. En este caso aplique el método de Newton a la función derivada $f'(x)$ *para encontrar sus raíces, en vez de la función original. En los siguientes ejercicios, considere la formulación del método.*

436. Para encontrar candidatos a máximos y mínimos, necesitamos encontrar los puntos críticos $f'(x) = 0$. Demuestre que para resolver los puntos críticos de una función $f(x)$, El método de Newton viene dado por $x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$.

437. ¿Qué restricciones adicionales son necesarias en la función f?

En los siguientes ejercicios, utilice el método de Newton para encontrar la ubicación de los mínimos o máximos locales de las siguientes funciones; redondee a tres decimales.

438. Un mínimo de $f(x) = x^2 + 2x + 4$

439. Un mínimo de $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 16$

440. Un mínimo de $f(x) = x^2 e^x$

441. Máximo de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

442. Máximo de $f(x) = x^3 + 10x^2 + 15x - 2$

443. Máximo de $f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x}$

444. Un mínimo de $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$, mínimo diferente a cero más cercano a $x = 0$

445. Un mínimo de $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + 12x + 6$

En los siguientes ejercicios, utilice el método especificado para resolver la ecuación. Si no funciona, explique por qué.

446. Método de Newton, $x^2 + 2 = 0$

447. Método de Newton, $0 = e^x$

448. Método de Newton, $0 = 1 + x^2$ a partir de $x_0 = 0$

449. Resolver $x_{n+1} = -x_n{}^3$ a partir de $x_0 = -1$

En los siguientes ejercicios, utilice el método de la secante, un método iterativo alternativo al método de Newton. La fórmula viene dada por

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}.$$

450. Halle una raíz para $0 = x^2 - x - 3$ con una precisión de tres decimales.

451. Halle una raíz para $0 = \operatorname{sen} x + 3x$ con una precisión de cuatro decimales.

452. Halle una raíz para $0 = e^x - 2$ con una precisión de cuatro decimales.

453. Halle una raíz para $\ln(x + 2) = \frac{1}{2}$ con una precisión de cuatro decimales.

454. ¿Por qué utilizar el método de la secante en lugar del método de Newton? ¿Cuáles son las restricciones necesarias para f?

En los siguientes ejercicios, utilice tanto el método de Newton como el método de la secante para calcular la raíz de las siguientes ecuaciones. Utilice una calculadora o una computadora para calcular cuántas iteraciones de cada una son necesarias para llegar a tres decimales de la respuesta exacta. En el método de la secante, utilice la primera conjetura del método de Newton.

455. $f(x) = x^2 + 2x + 1, x_0 = 1$

456. $f(x) = x^2, x_0 = 1$

457. $f(x) = \operatorname{sen} x, x_0 = 1$

458. $f(x) = e^x - 1, x_0 = 2$

459. $f(x) = x^3 + 2x + 4, x_0 = 0$

En los siguientes ejercicios, considere la ecuación de Kepler relativa a las órbitas planetarias, $M = E - \varepsilon \operatorname{sen}(E)$, donde M es la anomalía media, E es una anomalía excéntrica, y ε mide la excentricidad.

460. Utilice el método de Newton para resolver la anomalía excéntrica E cuando la anomalía media $M = \frac{\pi}{3}$ y la excentricidad de la órbita $\varepsilon = 0{,}25$; redondee a tres decimales.

461. Utilice el método de Newton para resolver la anomalía excéntrica E cuando la anomalía media $M = \frac{3\pi}{2}$ y la excentricidad de la órbita $\varepsilon = 0{,}8$; redondee a tres decimales.

Los dos ejercicios siguientes consideran una inversión bancaria. La inversión inicial es de $\$10.000$. Después de 25 años, la inversión se triplicó hasta $\$30.000$.

462. Utilice el método de Newton para determinar el tipo de interés si este se calcula anualmente.

463. Utilice el método de Newton para determinar el tipo de interés si este se calcula continuamente.

464. El costo de impresión de un libro expresarse mediante la ecuación $C(x) = 1.000 + 12x + \left(\frac{1}{2}\right) x^{2/3}$. Utilice el método de Newton para encontrar el punto de equilibrio si la imprenta vende cada libro por $\$20$.

4.10 Antiderivadas

Objetivos de aprendizaje

4.10.1 Encontrar la antiderivada general de una función dada.
4.10.2 Explicar los términos y la notación utilizada para una integral indefinida.
4.10.3 Enunciar la regla de la potencia para integrales.
4.10.4 Utilizar la antidiferenciación para resolver problemas sencillos de valor inicial.

En este punto ya hemos visto cómo calcular las derivadas de muchas funciones y se nos presentó una variedad de sus aplicaciones. Ahora haremos una pregunta que da la vuelta a este proceso: Dada una función f, ¿cómo encontramos una función con la derivada f y por qué nos interesa esa función?

Responderemos a la primera parte de esta pregunta definiendo las antiderivadas. La antiderivada de una función f es una función con una derivada f. ¿Por qué nos interesan las antiderivadas? La necesidad de las antiderivadas surge en muchas situaciones, y a lo largo del texto veremos varios ejemplos. Aquí examinaremos un ejemplo específico que implica un movimiento rectilíneo. En nuestro análisis del movimiento rectilíneo en Derivadas, demostramos que dada una función de posición $s(t)$ de un objeto, entonces su función de velocidad $v(t)$ es la derivada de $s(t)$–es decir, $v(t) = s'(t)$. Además, la aceleración $a(t)$ es la derivada de la velocidad $v(t)$–es decir, $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Supongamos ahora que nos dan una función de aceleración a, pero no la función de velocidad v o la función de posición s. Dado que $a(t) = v'(t)$, determinar la función de velocidad nos obliga a encontrar una antiderivada de la función de aceleración. Luego, dado que $v(t) = s'(t)$, determinar la función de posición nos obliga a encontrar una antiderivada de la función de velocidad. El movimiento rectilíneo es solo un caso en el que surge la necesidad de las antiderivadas. Veremos muchos más ejemplos a lo largo del resto del texto. Por ahora, veremos la terminología y la notación de las antiderivadas, y determinaremos las antiderivadas de varios tipos de funciones. Más adelante en el texto (Introducción a técnicas de integración (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-2/pages/3-introduccion)) examinaremos varias técnicas para encontrar antiderivadas de funciones más complicadas.

El inverso de la diferenciación

En este punto ya sabemos cómo encontrar las derivadas de varias funciones. Ahora nos preguntamos lo contrario. Dada una función f, ¿cómo podemos encontrar una función con derivada f? Si podemos encontrar una función F con derivada f, llamamos F como antiderivada de f.

Definición

Una función F es una **antiderivada** de la función f si

$$F'(x) = f(x)$$

para todos los x en el dominio de f.

Considere la función $f(x) = 2x$. Ya que conocemos la regla de la potencia de la diferenciación, concluimos que $F(x) = x^2$ es una antiderivada de f dado que $F'(x) = 2x$. ¿Existen otras antiderivadas de f? Sí, ya que la derivada de cualquier constante C es cero, $x^2 + C$ es también una antiderivada de $2x$. Por lo tanto, $x^2 + 5$ y $x^2 - \sqrt{2}$ también son antiderivadas. ¿Hay otras que no sean de la forma $x^2 + C$ para alguna constante C? No. Del corolario 2 del teorema del valor medio, sabemos que si F y G son funciones diferenciables tales que $F'(x) = G'(x)$, entonces $F(x) - G(x) = C$ para alguna constante C. Este hecho nos lleva al siguiente teorema de importancia.

Teorema 4.14

Forma general de una antiderivada
Supongamos que F es una antiderivada de f en un intervalo I. Entonces,

i. para cada constante C, la función $F(x) + C$ es también una antiderivada de f en I;
ii. si G es una antiderivada de f en I, hay una constante C para la cual $G(x) = F(x) + C$ en I.

En otras palabras, la forma más general de la antiderivada de f en I ¿es $F(x) + C$.

Usamos este hecho y nuestro conocimiento de las derivadas para hallar todas las antiderivadas de varias funciones.

EJEMPLO 4.50

Encontrar antiderivadas
Para cada una de las siguientes funciones, halle todas las antiderivadas.

a. $f(x) = 3x^2$
b. $f(x) = \frac{1}{x}$
c. $f(x) = \cos x$
d. $f(x) = e^x$

Solución

a. Porque

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$$

entonces $F(x) = x^3$ es una antiderivada de $3x^2$. Por lo tanto, toda antiderivada de $3x^2$ es de la forma $x^3 + C$ para alguna constante C, y toda función de la forma $x^3 + C$ es una antiderivada de $3x^2$.

b. Supongamos que $f(x) = \ln|x|$. Para $x > 0$, $f(x) = \ln(x)$ y

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$$

Para $x < 0$, $f(x) = \ln(-x)$ y

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}.$$

Por lo tanto, $F(x) = \ln|x|$ es una antiderivada de $\frac{1}{x}$. Por lo tanto, toda antiderivada de $\frac{1}{x}$ es de la forma $\ln|x| + C$ para alguna constante C y toda función de la forma $\ln|x| + C$ es una antiderivada de $\frac{1}{x}$.

c. Tenemos

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x,$$

así que $F(x) = \operatorname{sen} x$ es una antiderivada de $\cos x$. Por lo tanto, toda antiderivada de $\cos x$ es de la forma $\operatorname{sen} x + C$ para alguna constante C y toda función de la forma $\operatorname{sen} x + C$ es una antiderivada de $\cos x$.

d. Dado que

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x,$$

entonces $F(x) = e^x$ es una antiderivada de e^x. Por lo tanto, toda antiderivada de e^x es de la forma $e^x + C$ para alguna constante C y toda función de la forma $e^x + C$ es una antiderivada de e^x.

4.49 Calcule todas las antiderivadas de $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Integrales indefinidas

A continuación veremos la notación formal utilizada para representar las antiderivadas y examinaremos algunas de sus propiedades, las cuales nos permiten encontrar antiderivadas de funciones más complicadas. Dada una función f, utilizamos la notación $f'(x)$ o $\frac{df}{dx}$ para denotar la derivada de f. Aquí presentamos la notación para las antiderivadas. Si los valores de F es una antiderivada de f, decimos que $F(x) + C$ es la antiderivada más general de f y escribimos

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

El símbolo $\int$ se llama *signo integral*, y $\int f(x)\,dx$ se denomina integral indefinida de f.

Definición

Dada una función f, la **integral indefinida** de f, denotada

$$\int f(x)\,dx,$$

es la antiderivada más general de f. Si F es una antiderivada de f, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

La expresión $f(x)$ se denomina *integrando* y la variable x es la *variable de integración*.

Dada la terminología presentada en esta definición, el acto de encontrar las antiderivadas de una función f se denomina normalmente *integración* f.

Para una función f y una antiderivada F, las funciones $F(x) + C$, donde C es un número real cualquiera, se suele denominar *familia de antiderivadas de* f. Por ejemplo, ya que x^2 es una antiderivada de $2x$ y cualquier antiderivada de $2x$ es de la forma $x^2 + C$, escribimos

$$\int 2x\,dx = x^2 + C.$$

La colección de todas las funciones de la forma $x^2 + C$, donde C es un número real cualquiera, se conoce como la *familia de antiderivadas de* $2x$. La Figura 4.85 muestra un gráfico de esta familia de antiderivadas.

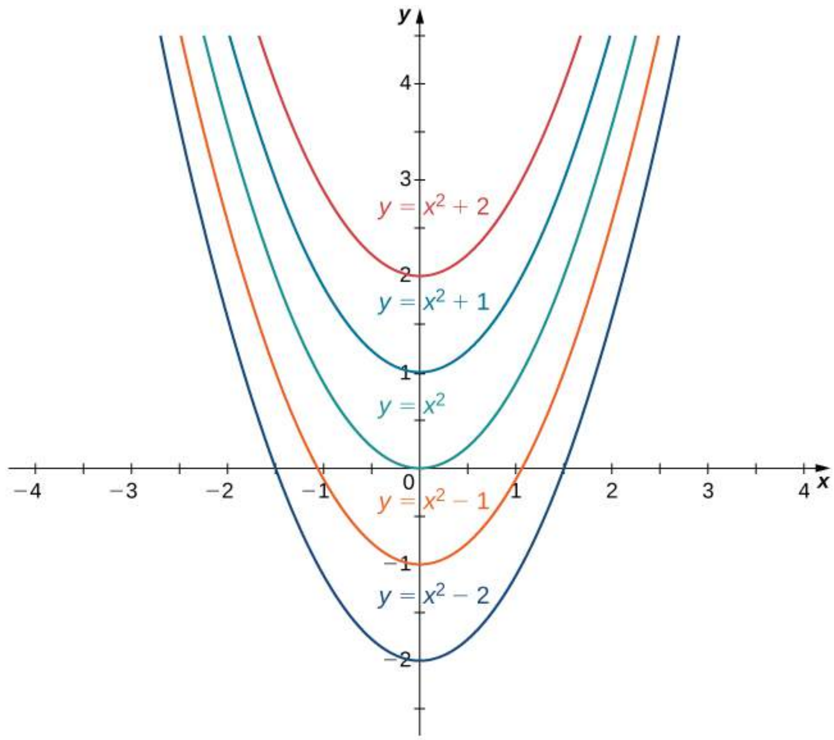


Figura 4.85 La familia de antiderivadas de $2x$ consiste en todas las funciones de la forma $x^2 + C$, donde C es un número real cualquiera.

En algunas funciones, la evaluación de integrales indefinidas se deduce directamente de las propiedades de las derivadas. Por ejemplo, para $n \neq -1$,

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

que viene directamente de

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = (n+1)\,\frac{x^n}{n+1} = x^n.$$

Este hecho se conoce como *la regla de la potencia para integrales*.

Teorema 4.15

Regla de la potencia para integrales

Para $n \neq -1$,

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

La evaluación de integrales indefinidas para algunas otras funciones también es un cálculo sencillo. La siguiente tabla enumera las integrales indefinidas de varias funciones comunes. En el Apéndice B figura una lista más completa.

Fórmula de diferenciación	Integral Indefinida
$\frac{d}{dx}(k) = 0$	$\int k\,dx = \int kx^0\,dx = kx + C$

Tabla 4.13 Fórmulas de integración

Fórmula de diferenciación	Integral Indefinida
$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por $n \neq -1$
$\frac{d}{dx}(\ln \lvert x \rvert) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln \lvert x \rvert + C$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x + C$
$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$
$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} \lvert x \rvert\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} \lvert x \rvert + C$

Tabla 4.13 Fórmulas de integración

A partir de la definición de integral indefinida de f, sabemos que

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

si y solo si F es una antiderivada de f. Por lo tanto, al afirmar que

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

es importante verificar si esta afirmación es correcta comprobando que $F'(x) = f(x)$.

EJEMPLO 4.51

Verificación de una integral indefinida

Cada uno de los siguientes enunciados es de la forma $\int f(x) \, dx = F(x) + C$. Compruebe que cada afirmación es correcta demostrando que $F'(x) = f(x)$.

a. $\int \left(x + e^x\right) dx = \frac{x^2}{2} + e^x + C$

b. $\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C$ (carbono 14).

Solución

a. Dado que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + e^x + C\right) = x + e^x,$$

la afirmación

$$\int \left(x + e^x\right) dx = \frac{x^2}{2} + e^x + C$$

es correcta.

Observe que estamos verificando una integral indefinida para una suma. Además, $\frac{x^2}{2}$ y e^x son antiderivadas de x y e^x, respectivamente, y la suma de las antiderivadas es una antiderivada de la suma. Volveremos a hablar de este hecho más adelante en esta sección.

b. Utilizando la regla del producto, vemos que

$$\frac{d}{dx}\left(xe^x - e^x + C\right) = e^x + xe^x - e^x = xe^x.$$

Por lo tanto, la afirmación

$$\int xe^x\, dx = xe^x - e^x + C$$

es correcto.

Note que estamos verificando una integral indefinida para un producto. La antiderivada $xe^x - e^x$ no es un producto de las antiderivadas. Además, el producto de las antiderivadas, $x^2e^x/2$ no es una antiderivada de xe^x ya que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2e^x}{2}\right) = xe^x + \frac{x^2e^x}{2} \neq xe^x.$$

En general, el producto de las antiderivadas no es la antiderivada de un producto.

4.50 Verifique que $\int x\cos x\, dx = x\,\text{sen}\, x + \cos x + C$.

En la Tabla 4.13, enumeramos las integrales indefinidas de muchas funciones elementales. Pasemos ahora a evaluar integrales indefinidas para funciones más complicadas. Por ejemplo, considere hallar la antiderivada de la suma $f + g$. En el Ejemplo 4.51a. demostramos que una antiderivada de la suma $x + e^x$ viene dada por la suma $\left(\frac{x^2}{2}\right) + e^x$ es decir, la antiderivada de una suma viene dada por una suma de antiderivadas. Este resultado no es específico de este ejemplo. En general, si F y G son antiderivadas de cualquier función f y g, respectivamente, entonces

$$\frac{d}{dx}(F(x) + G(x)) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Por lo tanto, $F(x) + G(x)$ es una antiderivada de $f(x) + g(x)$ y tenemos

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = F(x) + G(x) + C.$$

De la misma manera,

$$\int (f(x) - g(x))\, dx = F(x) - G(x) + C.$$

Además, consideremos la tarea de encontrar una antiderivada de $kf(x)$, donde k es un número real cualquiera. Dado que

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}F(x) = kf'(x)$$

para cualquier número real k, concluimos que

$$\int kf(x)\, dx = kF(x) + C.$$

Estas propiedades se resumen a continuación.

Teorema 4.16

Propiedades de las integrales indefinidas

Supongamos que F y G son antiderivadas de f y g, respectivamente y supongamos que k es cualquier número real.

Sumas y diferencias

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = F(x) \pm G(x) + C$$

Múltiples constantes

$$\int kf(x)\, dx = kF(x) + C$$

A partir de este teorema, podemos evaluar cualquier integral que implique una suma, diferencia o múltiplo constante de funciones con antiderivadas conocidas. La evaluación de integrales que implican productos, cocientes o composiciones es más complicada (vea el Ejemplo 4.51b., que involucra la antiderivada de un producto). En la Introducción a la integración veremos y trataremos las integrales que involucran estas funciones más complicadas. En el siguiente ejemplo, examinaremos cómo utilizar este teorema para calcular las integrales indefinidas de varias funciones.

EJEMPLO 4.52

Evaluación de integrales indefinidas

Evalúe cada una de las siguientes integrales indefinidas:

a. $\int \left(5x^3 - 7x^2 + 3x + 4\right) dx$

b. $\int \frac{x^2 + 4\sqrt[3]{x}}{x} dx$

c. $\int \frac{4}{1 + x^2} dx$

d. $\int \tan x \cos x\, dx$

Solución

a. Utilizando las Propiedades de las integrales indefinidas, podemos integrar cada uno de los cuatro términos del integrando por separado. Obtenemos

$$\int \left(5x^3 - 7x^2 + 3x + 4\right) dx = \int 5x^3\, dx - \int 7x^2\, dx + \int 3x\, dx + \int 4dx.$$

A partir de la segunda parte de las Propiedades de las integrales indefinidas, cada coeficiente puede escribirse delante del signo de la integral, lo que da

$$\int 5x^3\, dx - \int 7x^2\, dx + \int 3x\, dx + \int 4dx = 5\int x^3\, dx - 7\int x^2\, dx + 3\int x\, dx + 4\int 1dx.$$

Utilizando la regla de la potencia para las integrales, concluimos que

$$\int \left(5x^3 - 7x^2 + 3x + 4\right) dx = \frac{5}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + C.$$

b. Reescriba el integrando como

$$\frac{x^2 + 4\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{x}.$$

Entonces, integre cada uno de estos términos por separado para evaluar la integral. Utilizando la regla de la potencia, tenemos

$$\begin{aligned}\int \left(x + \frac{4}{x^{2/3}}\right) dx &= \int x\,dx + 4\int x^{-2/3}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 4\frac{1}{\left(\frac{-2}{3}\right)+1}x^{(-2/3)+1} + C \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 12x^{1/3} + C.\end{aligned}$$

c. Utilizando las Propiedades de las integrales indefinidas, escriba la integral como

$$4\int \frac{1}{1 + x^2}dx.$$

Entonces, utilice el hecho de que $\tan^{-1}(x)$ es una antiderivada de $\frac{1}{\left(1+x^2\right)}$ para concluir que

$$\int \frac{4}{1 + x^2}dx = 4\tan^{-1}(x) + C.$$

d. Reescriba el integrando como

$$\tan x \cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cos x = \operatorname{sen} x.$$

Por lo tanto,

$$\int \tan x \cos x = \int \operatorname{sen} x = -\cos x + C.$$

4.51 Evalúe $\int \left(4x^3 - 5x^2 + x - 7\right) dx.$

Problemas de valor inicial

Más adelante veremos las técnicas para integrar una gran variedad de funciones que implican productos, cocientes y composiciones. A continuación, nos ocuparemos de un uso común de las antiderivadas que surge a menudo en muchas aplicaciones: la resolución de ecuaciones diferenciales.

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que relaciona una función desconocida y una o varias de sus derivadas. La ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{4.9}$$

es un ejemplo sencillo de ecuación diferencial. Resolver esta ecuación significa encontrar una función y con una derivada f. Por lo tanto, las soluciones de la Ecuación 4.9 son las antiderivadas de f. Si F es una antiderivada de f, toda función de la forma $y = F(x) + C$ es una solución de esa ecuación diferencial. Por ejemplo, las soluciones de

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2$$

vienen dadas por

$$y = \int 6x^2\,dx = 2x^3 + C.$$

A veces nos interesa determinar si una curva de solución particular pasa por un punto determinado (x_0, y_0)–es decir, $y(x_0) = y_0$. El problema de encontrar una función y que satisfaga una ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{4.10}$$

con la condición adicional

$$y(x_0) = y_0 \tag{4.11}$$

es un ejemplo de **problema de valor inicial**. La condición $y(x_0) = y_0$ se conoce como *condición inicial*. Por ejemplo, al buscar una función y que satisfaga la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2$$

y la condición inicial

$$y(1) = 5$$

es un ejemplo de problema de valor inicial. Dado que las soluciones de la ecuación diferencial son $y = 2x^3 + C$, para encontrar una función y que también satisfaga la condición inicial, necesitamos encontrar C de manera que $y(1) = 2(1)^3 + C = 5$. De esta ecuación, vemos que $C = 3$, y concluimos que $y = 2x^3 + 3$ es la solución de este problema de valor inicial como se muestra en el siguiente gráfico.

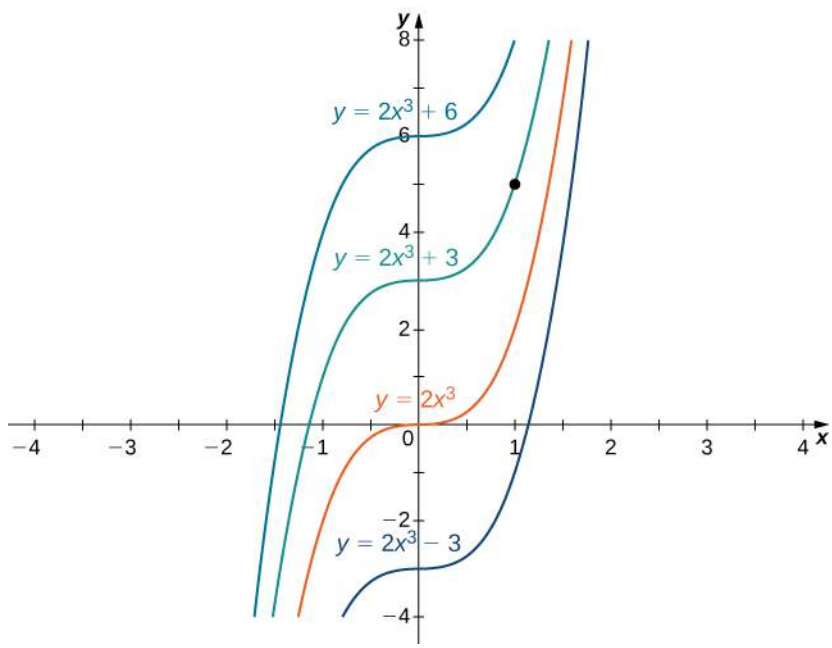


Figura 4.86 Se muestran algunas de las curvas de solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 6x^2$. La función $y = 2x^3 + 3$ satisface la ecuación diferencial y la condición inicial $y(1) = 5$.

EJEMPLO 4.53

Resolución de un problema de valor inicial

Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x,\ y(0) = 5.$$

Solución

Primero tenemos que resolver la ecuación diferencial. Si los valores de $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$, entonces

$$y = \int \operatorname{sen}(x)\,dx = -\cos x + C.$$

A continuación tenemos que buscar una solución y que satisfaga la condición inicial. La condición inicial $y(0) = 5$

significa que necesitamos una constante C de manera que $-\cos x + C = 5$. Por lo tanto,

$$C = 5 + \cos(0) = 6.$$

La solución del problema de valor inicial es $y = -\cos x + 6$.

4.52 Resuelva el problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2}, y(1) = 2$.

Los problemas de valor inicial surgen en muchas aplicaciones. A continuación consideraremos un problema en el que un conductor usa los frenos en un automóvil. Nos interesa saber cuánto tiempo tarda el automóvil en detenerse. Recordemos que la función de velocidad $v(t)$ es la derivada de una función de posición $s(t)$, y la aceleración $a(t)$ es la derivada de la función de velocidad. En los ejemplos anteriores del texto, pudimos calcular la velocidad a partir de la posición y luego la aceleración a partir de la velocidad. En el siguiente ejemplo trabajaremos de manera inversa. Dada una función de aceleración, calcularemos la función de velocidad. A continuación, utilizaremos la función de velocidad para determinar la función de posición.

EJEMPLO 4.54

Auto en desaceleración

Un auto viaja a la velocidad de 88 ft/s $(60$ mph$)$ cuando se aplican los frenos. El automóvil comienza a desacelerar a una velocidad constante de 15 ft/s^2.

a. ¿Cuántos segundos pasan antes de que el auto se detenga?
b. ¿Qué distancia recorre el auto en ese tiempo?

Solución

a. Primero introducimos las variables para este problema. Supongamos que t es el tiempo (en segundos) después de aplicar los frenos por primera vez. Supongamos que $a(t)$ es la aceleración del automóvil (en pies por segundos al cuadrado) en el tiempo t. Supongamos que $v(t)$ es la velocidad del auto (en pies por segundo) en el tiempo t. Supongamos que $s(t)$ es la posición del auto (en pies) más allá del punto donde se aplican los frenos en el momento t.
El auto se desplaza a una velocidad de 88 ft/s. Por lo tanto, la velocidad inicial es $v(0) = 88$ ft/s. Como el auto está desacelerando, la aceleración es

$$a(t) = -15 \text{ ft/s}^2.$$

La aceleración es la derivada de la velocidad,

$$v'(t) = -15.$$

Por lo tanto, tenemos un problema de valor inicial que resolver:

$$v'(t) = -15, v(0) = 88.$$

Integrando, encontramos que

$$v(t) = -15t + C.$$

Dado que $v(0) = 88, C = 88$. Así, la función de velocidad es

$$v(t) = -15t + 88.$$

Para encontrar el tiempo que tarda el auto en detenerse, tenemos que encontrar el tiempo t tal que la velocidad sea cero. Resolver $-15t + 88 = 0$, obtenemos $t = \frac{88}{15}$ seg.

b. Para encontrar la distancia que recorre el auto durante este tiempo, tenemos que encontrar su posición después de $\frac{88}{15}$ seg. Sabemos que la velocidad $v(t)$ es la derivada de la posición $s(t)$. Considere que la posición inicial es $s(0) = 0$. Por lo tanto, tenemos que resolver el problema de valor inicial

$$s'(t) = -15t + 88, s(0) = 0.$$

Integrando, tenemos

$$s(t) = -\frac{15}{2}t^2 + 88t + C.$$

Dado que $s(0) = 0$, la constante es $C = 0$. Por lo tanto, la función de posición es

$$s(t) = -\frac{15}{2}t^2 + 88t.$$

Después de $t = \frac{88}{15}$ segundos, la posición es $s\left(\frac{88}{15}\right) \approx 258{,}133$ pies.

4.53 Supongamos que el auto se desplaza a la velocidad de 44 ft/s. ¿Cuánto tiempo tarda en detenerse? ¿Qué distancia recorrerá el auto?

SECCIÓN 4.10 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, demuestre que $F(x)$ son antiderivadas de $f(x)$.

465. $F(x) = 5x^3 + 2x^2 + 3x + 1,\ f(x) = 15x^2 + 4x + 3$

466. $F(x) = x^2 + 4x + 1,\ f(x) = 2x + 4$

467. $F(x) = x^2 e^x,\ f(x) = e^x\left(x^2 + 2x\right)$
grandes.

468. $F(x) = \cos x,\ f(x) = -\operatorname{sen} x$

469. $F(x) = e^x,\ f(x) = e^x$

En los siguientes ejercicios, halle la antiderivada de la función.

470. $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$

471. $f(x) = e^x - 3x^2 + \operatorname{sen} x$

472. $f(x) = e^x + 3x - x^2$

473. $f(x) = x - 1 + 4\operatorname{sen}(2x)$
grandes.

En los siguientes ejercicios, halle la antiderivada $F(x)$ de cada función $f(x)$.

474. $f(x) = 5x^4 + 4x^5$

475. $f(x) = x + 12x^2$

476. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

477. $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^3$

478. $f(x) = x^{1/3} + (2x)^{1/3}$

479. $f(x) = \frac{x^{1/3}}{x^{2/3}}$

480. $f(x) = 2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(2x)$
grandes.

481. $f(x) = \sec^2(x) + 1$

482. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$

483. $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)$
grandes.

484. $f(x) = 0$

485. $f(x) = \frac{1}{2}\csc^2(x) + \frac{1}{x^2}$

486. $f(x) = \csc x \cot x + 3x$

487. $f(x) = 4\csc x \cot x - \sec x \tan x$

488. $f(x) = 8\sec x(\sec x - 4\tan x)$
grandes.

489. $f(x) = \frac{1}{2}e^{-4x} + \operatorname{sen} x$

En los siguientes ejercicios, evalúe la integral.

490. $\int (-1)\,dx$

491. $\int \operatorname{sen} x\,dx$

492. $\int \left(4x + \sqrt{x}\right) dx$

493. $\int \frac{3x^2 + 2}{x^2} dx$

494. $\int (\sec x \tan x + 4x)\,dx$

495. $\int \left(4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}\right) dx$

496. $\int \left(x^{-1/3} - x^{2/3}\right) dx$

497. $\int \frac{14x^3 + 2x + 1}{x^3} dx$

498. $\int \left(e^x + e^{-x}\right) dx$

En los siguientes ejercicios, resuelva el problema de valor inicial.

499. $f'(x) = x^{-3}, f(1) = 1$

500. $f'(x) = \sqrt{x} + x^2, f(0) = 2$

501. $f'(x) = \cos x + \sec^2(x), f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

502. $f'(x) = x^3 - 8x^2 + 16x + 1, f(0) = 0$

503. $f'(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{x^2}{2}, f(1) = 0$

En los siguientes ejercicios, halle dos posibles funciones f dadas las derivadas de segundo o tercer orden.

504. $f''(x) = x^2 + 2$

505. $f''(x) = e^{-x}$

506. $f''(x) = 1 + x$

507. $f'''(x) = \cos x$

508. $f'''(x) = 8e^{-2x} - \operatorname{sen} x$

509. Un auto va a una velocidad de 40 mph cuando se aplican los frenos. El auto decelera a una velocidad constante de 10 pies/seg^2. ¿Cuánto tiempo falta para que el auto se detenga?

510. En el problema anterior, calcule la distancia que recorre el auto en el tiempo que tarda en detenerse.

511. Está entrando en la autopista, acelerando a una velocidad constante de 12 pies/seg^2. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la velocidad de incorporación a 60 mph?

512. Según el problema anterior, ¿qué distancia recorre el auto para alcanzar la velocidad de incorporación?

513. Una empresa de automóviles quiere asegurarse de que su modelo más reciente pueda detenerse en 8 segundos cuando va a 75 mph. Si suponemos una deceleración constante, halle el valor de la deceleración que la produce.

514. Una empresa de automóviles quiere asegurarse de que su modelo más reciente pueda detenerse en menos de 450 ft cuando va a 60 mph. Si suponemos una deceleración constante, halle el valor de la deceleración que la produce.

En los siguientes ejercicios, halle la antiderivada de la función, suponiendo $F(0) = 0$.

515. **[T]** $f(x) = x^2 + 2$

516. **[T]** $f(x) = 4x - \sqrt{x}$

517. **[T]** $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x$

518. **[T]** $f(x) = e^x$

519. **[T]** $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

520. **[T]** $f(x) = e^{-2x} + 3x^2$

En los siguientes ejercicios, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Demuestre que es verdadera o halle un contraejemplo si es falsa.

521. Si los valores de $f(x)$ es la antiderivada de $v(x)$, entonces $2f(x)$ es la antiderivada de $2v(x)$.

522. Si los valores de $f(x)$ es la antiderivada de $v(x)$, entonces $f(2x)$ es la antiderivada de $v(2x)$.

523. Si $f(x)$ es la antiderivada de $v(x)$, entonces $f(x) + 1$ es la antiderivada de $v(x) + 1$.

524. Si los valores de $f(x)$ es la antiderivada de $v(x)$, entonces $(f(x))^2$ es la antiderivada de $(v(x))^2$.

Revisión del capítulo

Términos clave

antiderivada una función F de manera que $F'(x) = f(x)$ para todo x en el dominio de f es una antiderivada de f

aproximación de la línea tangente (linealización) ya que la aproximación lineal de f en $x = a$ se define mediante la ecuación de la línea tangente, la aproximación lineal de f en $x = a$ también se conoce como la aproximación de la línea tangente a f en $x = a$

aproximación lineal la función lineal $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ es la aproximación lineal de f en $x = a$

asíntota horizontal si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, entonces $y = L$ es una asíntota horizontal de f

asíntota oblicua la línea $y = mx + b$ si $f(x)$ se acerca a ella cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$

comportamiento final el comportamiento de una función cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$

cóncava hacia abajo si f es diferenciable en un intervalo I y f' disminuye en I, entonces f es cóncava hacia abajo en I

concavidad la curva ascendente o descendente gráfico de una función

cóncavo hacia arriba si f es diferenciable en un intervalo I y f' aumenta en I, entonces f es cóncava hacia arriba en I

diferencial el diferencial dx es una variable independiente a la que se puede asignar cualquier número real distinto de cero; el diferencial dy se define como $dy = f'(x)dx$

error porcentual el error relativo expresado en porcentaje

error propagado el error que resulta de una cantidad calculada $f(x)$ resultante de un error de medición *dx*

error relativo dado un error absoluto Δq para una cantidad determinada, $\frac{\Delta q}{q}$ es el error relativo.

extremo absoluto si f tiene un máximo absoluto o un mínimo absoluto en c, decimos f tiene un extremo absoluto en c

extremo local si f tiene un máximo o un mínimo local en c, decimos f tiene un extremo local en c

forma diferencial dada una función diferenciable $y = f'(x)$, la ecuación $dy = f'(x)dx$ es la forma diferencial de la derivada de y con respecto a x

formas indeterminadas al evaluar un límite, las formas $\frac{0}{0}$, ∞/∞, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, y 1^∞ se consideran indeterminadas porque se requiere un análisis adicional para determinar si el límite existe y, en caso afirmativo, cuál es su valor

integral indefinida la antiderivada más usual de $f(x)$ es la integral indefinida de f; utilizamos la notación $\int f(x)\,dx$ para denotar la integral indefinida de f

La regla de L'Hôpital si f y g son funciones diferenciables sobre un intervalo a, excepto posiblemente en a, y $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ o $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ son infinitos, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, asumiendo que el límite de la derecha existe o es ∞ o $-\infty$

límite al infinito el valor límite, si existe, de una función cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$

límite infinito al infinito una función que se hace arbitrariamente grande a medida que *x* se hace grande

máximo absoluto si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f, decimos f tiene un máximo absoluto en c

máximo local si existe un intervalo I de manera que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$, decimos f tiene un máximo local en c

método de Newton método de aproximación a las raíces de $f(x) = 0$; utilizando una conjetura inicial x_0; cada aproximación posterior se define por la ecuación $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$

mínimo absoluto si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f, decimos f tiene un mínimo absoluto en c

mínimo local si existe un intervalo I de manera que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$, decimos f tiene un mínimo local en c

problema de valor inicial problema que requiere encontrar una función y que satisfaga la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x)$ junto con la condición inicial $y(x_0) = y_0$

problemas de optimización problemas que se resuelven encontrando el valor máximo o mínimo de una función

proceso iterativo proceso en el que una lista de números $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ se genera empezando por un número x_0 y definiendo $x_n = F(x_{n-1})$ por $n \geq 1$

prueba de concavidad supongamos que f es dos veces diferenciable en un intervalo I; si $f'' > 0$ en I, entonces f es cóncava hacia arriba en I; si $f'' < 0$ en I, entonces f es cóncava hacia abajo en I

prueba de la primera derivada supongamos que f es una función continua en un intervalo I que contiene un punto crítico c de manera que f es diferenciable sobre I excepto posiblemente en c; si f' cambia de signo de positivo a negativo a medida que x aumenta a través de c, entonces f tiene un máximo local en c; si f' cambia el signo de negativo a positivo a medida que x aumenta a través de c, entonces f tiene un mínimo local en c; si f' no cambia de signo cuando x aumenta a través de c, entonces f no tienen un extremo local en c

prueba de la segunda derivada supongamos que $f'(c) = 0$ y f'' es continua en un intervalo que contiene c; si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c; si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c; si $f''(c) = 0$, entonces la prueba no es concluyente

punto crítico el punto $(c, f(c))$ un punto crítico de f

punto crítico si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ es indefinido, decimos que c es un número crítico de f

punto de inflexión si f es continua en c como f cambia la concavidad en c, el punto $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f

tasas relacionadas son tasas de cambio asociadas a dos o más cantidades relacionadas que cambian con el tiempo

teorema de Fermat si f tiene un extremo local en c, entonces c es un punto crítico de f

teorema de Rolle si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), y si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$

teorema del valor extremo si f es una función continua en un intervalo finito y cerrado, entonces f tiene un máximo y un mínimo absolutos

teorema del valor medio si f es continua en $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ de manera que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ecuaciones clave

Aproximación lineal	$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$
Un diferencial	$dy = f'(x)dx.$

Conceptos clave

4.1 Tasas relacionadas

- Para resolver un problema de tasas relacionadas, primero haga un dibujo que ilustre la relación entre las dos o más cantidades relacionadas que están cambiando con respecto al tiempo.
- En cuanto a las cantidades, indique la información dada y la tasa que se debe encontrar.
- Halle una ecuación que relacione las cantidades.
- Utilice la diferenciación, aplicando la regla de la cadena si es necesario, para hallar una ecuación que relacione las tasas.
- Asegúrese de no sustituir una cantidad variable por una de las variables hasta después de hallar una ecuación que relacione las tasas.

4.2 Aproximaciones lineales y diferenciales

- Una función diferenciable $y = f(x)$ se puede aproximar a a mediante la función lineal
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$
- Para una función $y = f(x)$, si x cambia de a a $a + dx$, entonces
$$dy = f'(x)dx$$
es una aproximación al cambio en y. El cambio real en y es
$$\Delta y = f(a + dx) - f(a).$$
- Un error de medición dx puede provocar un error en una cantidad calculada $f(x)$. El error en la cantidad calculada se conoce como *error propagado*. El error propagado puede estimarse mediante
$$dy \approx f'(x)dx.$$
- Para estimar el error relativo de una determinada cantidad q, estimamos $\frac{\Delta q}{q}$.

4.3 Máximos y mínimos

- Una función puede tener tanto un máximo como un mínimo absoluto, tener solamente un extremo absoluto o no tener ni máximo ni mínimo absoluto.
- Si una función tiene un extremo local, el punto en el que se produce debe ser un punto crítico. Sin embargo, no es necesario que una función tenga un extremo local en un punto crítico.
- Una función continua en un intervalo cerrado y acotado tiene un máximo y un mínimo absolutos. Cada extremo se produce en un punto crítico o en un punto extremo.

4.4 El teorema del valor medio

- Si los valores de f es continua en $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b) y $f(a) = 0 = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Este es el teorema de Rolle.
- Si los valores de f es continua en $[a, b]$ y diferenciable sobre (a, b), entonces existe un punto $c \in (a, b)$ de manera que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$
Este es el teorema del valor medio.
- Si los valores de $f'(x) = 0$ en un intervalo I, entonces f es constante en I.
- Si dos funciones diferenciables f y g satisfacen $f'(x) = g'(x)$ en I, entonces $f(x) = g(x) + C$ para alguna constante C.
- Si $f'(x) > 0$ en un intervalo I, entonces f aumenta en I. Si $f'(x) < 0$ en I, entonces f disminuye en I.

4.5 Las derivadas y la forma de un gráfico

- Si los valores de c es un punto crítico de f como $f'(x) > 0$ por $x < c$ como $f'(x) < 0$ por $x > c$, entonces f tiene un máximo local en c.
- Si los valores de c es un punto crítico de f como $f'(x) < 0$ por $x < c$ como $f'(x) > 0$ por $x > c$, entonces f tiene un mínimo local en c.
- Si $f''(x) > 0$ en un intervalo I, entonces f es cóncava hacia arriba en I.
- Si $f''(x) < 0$ en un intervalo I, entonces f es cóncava hacia abajo en I.
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c.
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c.
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) = 0$, evalúe entonces $f'(x)$ en un punto de prueba x a la izquierda de c y en un punto de prueba x a la derecha de c, para determinar si f tiene un extremo local en c.

4.6 Límites al infinito y asíntotas

- El límite de $f(x)$ ¿es L a medida que $x \to \infty$ (o cuando $x \to -\infty$) si los valores $f(x)$ se acercan arbitrariamente a L a medida que x aumenta lo suficiente.
- El límite de $f(x)$ ¿es ∞ cuando $x \to \infty$ si $f(x)$ aumenta arbitrariamente a medida que la x aumenta lo suficiente. El límite de $f(x)$ ¿es $-\infty$ cuando $x \to \infty$ si $f(x) < 0$ y $|f(x)|$ aumenta arbitrariamente a medida que x aumenta lo suficiente. Podemos definir el límite de $f(x)$ cuando x se acerca a $-\infty$ de forma similar.
- Para una función polinómica $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, donde $a_n \neq 0$, el comportamiento final está determinado por el término principal $a_n x^n$. Si $n \neq 0$, $p(x)$ se acerca a ∞ o $-\infty$ en cada extremo.
- Para una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, el comportamiento final está determinado por la relación entre el grado de p y el grado de q. Si el grado de p es menor que el grado de q, la línea $y = 0$ es una asíntota horizontal para f. Si el grado de p es igual al grado de q, entonces la línea $y = \frac{a_n}{b_n}$ es una asíntota horizontal, donde a_n y b_n son los coeficientes principales de p y q, respectivamente. Si el grado de p es mayor que el grado de q, entonces f se acerca a ∞ o $-\infty$ en cada extremo.

4.7 Problemas de optimización aplicados

- Para resolver un problema de optimización, hay que empezar por hacer un dibujo e introducir variables.
- Halle una ecuación que relacione las variables.
- Halle una función de una variable para describir la cantidad que se quiere minimizar o maximizar.
- Busque los puntos críticos para localizar los extremos locales.

4.8 La regla de L'Hôpital

- La regla de L'Hôpital puede utilizarse para evaluar el límite de un cociente cuando aparece la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.
- La regla de L'Hôpital también se puede aplicar a otras formas indeterminadas si se pueden reescribir en términos de un límite que implique un cociente que tenga la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o ∞/∞.
- La función exponencial e^x crece más rápido que cualquier función potencia x^p, $p > 0$.
- La función logarítmica $\ln x$ crece más lentamente que cualquier función potencia x^p, $p > 0$.

4.9 Método de Newton

- El método de Newton aproxima las raíces de $f(x) = 0$ partiendo de una aproximación inicial x_0, utilice entonces las rectas tangentes al gráfico de f para crear una secuencia de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
- Por lo general, el método de Newton es un método eficaz para encontrar una raíz determinada. En ciertos casos, el método de Newton no funciona porque la lista de números $x_0, x_1, x_2, \ldots$ no se aproxima a un valor finito o se aproxima a un valor distinto de la raíz buscada.
- Cualquier proceso en el que una lista de números $x_0, x_1, x_2, \ldots$ se genera definiendo un número inicial x_0 y definiendo los números siguientes por la ecuación $x_n = F(x_{n-1})$ para alguna función F es un proceso iterativo. El método de Newton es un ejemplo de proceso iterativo, donde la función $F(x) = x - \left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$ para una función determinada f.

4.10 Antiderivadas

- Si los valores de F es una antiderivada de f, entonces toda antiderivada de f es de la forma $F(x) + C$ para alguna constante C.
- Resolución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x), y(x_0) = y_0$$

nos exige encontrar primero el conjunto de antiderivadas de f y luego buscar la antiderivada específica que también satisface la condición inicial.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo. Supongamos que $f(x)$ es continua y diferenciable a menos que se indique lo contrario.

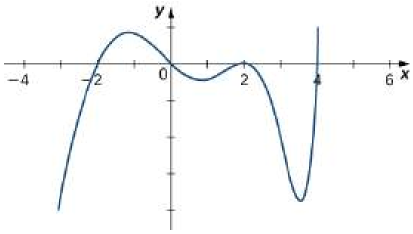
525. Si los valores de $f(-1) = -6$ y $f(1) = 2$, entonces existe al menos un punto $x \in [-1, 1]$ de manera que $f'(x) = 4$.

526. Si los valores de $f'(c) = 0$, hay un máximo o un mínimo en $x = c$.

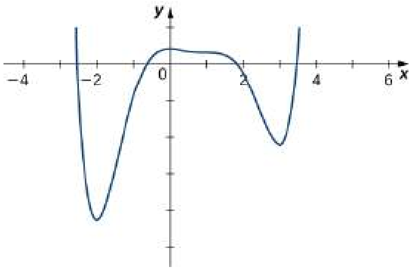
527. Existe una función tal que $f(x) < 0$, $f'(x) > 0$, y $f''(x) < 0$. (Se acepta una "prueba" gráfica para esta respuesta).

528. Existe una función tal que hay tanto un punto de inflexión como un punto crítico para algún valor $x = a$.

529. Dado el gráfico de f', determine dónde f es creciente o decreciente.



530. El gráfico de f se indica a continuación. Dibuje f'.



531. Halle la aproximación lineal $L(x)$ a $y = x^2 + \tan(\pi x)$ cerca de $x = \frac{1}{4}$.

532. Halle la diferencial de $y = x^2 - 5x - 6$ y evalúe para $x = 2$ con la $dx = 0{,}1$.

Halle los puntos críticos y los extremos locales y absolutos de las siguientes funciones en el intervalo dado.

533. $f(x) = x + \operatorname{sen}^2(x)$ en $[0, \pi]$

534. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 6$ en $[-3, 3]$

Determine en qué intervalos las siguientes funciones son crecientes, decrecientes, cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo.

535. $x(t) = 3t^4 - 8t^3 - 18t^2$

536. $y = x + \operatorname{sen}(\pi x)$ grandes.

537. $g(x) = x - \sqrt{x}$

538. $f(\theta) = \operatorname{sen}(3\theta)$

Evalúe los siguientes límites.

539. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}}$

540. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ grandes.

541. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\operatorname{sen}(\pi x)}$ grandes.

542. $\lim\limits_{x\to\infty} (3x)^{1/x}$

Utilice el método de Newton para encontrar las dos primeras iteraciones, dado el punto de partida.

543. $y = x^3 + 1, x_0 = 0{,}5$

544. $y = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}, x_0 = 0$

Halle las antiderivadas $F(x)$ de las siguientes funciones.

545. $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x^2}$

546. $f(x) = 2x + 6\cos x, F(\pi) = \pi^2 + 2$

Grafique las siguientes funciones a mano. Asegúrese de marcar los puntos de inflexión, los puntos críticos, los ceros y las asíntotas.

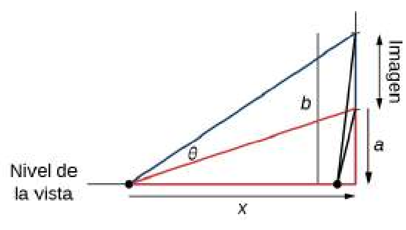
547. $y = \frac{1}{x(x+1)^2}$

548. $y = x - \sqrt{4 - x^2}$

549. Se compacta un auto en un sólido rectangular. El volumen disminuye a una tasa de 2 m^3/s. La longitud y la anchura del compactador son cuadradas, pero la altura no tiene la misma longitud que la anchura. Si las paredes de longitud y anchura se mueven una hacia la otra a una velocidad de $0{,}25$ m/s, halle la velocidad a la que cambia la altura cuando la longitud y la anchura son 2 m y la altura es $1{,}5$ m.

550. Se lanza un cohete al espacio; su energía cinética viene dada por $K(t) = \left(\frac{1}{2}\right) m(t)\, v(t)^2$, donde K es la energía cinética en julios, m es la masa del cohete en kilogramos, y v es la velocidad del cohete en metros/segundo. Supongamos que la velocidad aumenta a una tasa de 15 m/s^2 y la masa disminuye a una tasa de 10 kg/s porque el combustible se está consumiendo. ¿A qué velocidad cambia la energía cinética del cohete cuando la masa es 2000 kg y la velocidad es 5.000 m/s? Indique su respuesta en megajulios por segundo (MJ/s), lo que equivale a 10^6 J/s.

551. El famoso problema de Regiomontano para la maximización de ángulos fue propuesto durante el siglo XV. Un cuadro está colgado en una pared con la parte inferior del cuadro a una distancia de a ft sobre el nivel de los ojos, y la parte superior b ft sobre el nivel de los ojos. ¿Qué distancia x (en pies) desde la pared debe situarse el espectador para maximizar el ángulo subtendido por el cuadro, θ?



552. Una compañía aérea vende boletos de Tokio a Detroit por $\$1200$. Hay 500 asientos disponibles y un vuelo corriente reserva 350 asientos. Por cada $\$10$ de disminución del precio, la aerolínea nota que se venden cinco asientos adicionales. ¿Cuál debería ser el precio del boleto para maximizar el beneficio? ¿Cuántos pasajeros habría a bordo?

5 INTEGRACIÓN

Figura 5.1 La navegación sobre hielo es un deporte de invierno muy popular en algunas zonas del norte de Estados Unidos y Europa (créditos: modificación del trabajo de Carter Brown, Flickr).

Esquema del capítulo

Introducción

Los botes deslizadores sobre hielo son una visión habitual en los lagos de Wisconsin y Minnesota los fines de semana de invierno. Estos botes son similares a los de vela, pero están equipados con patines y están diseñados para deslizarse sobre el hielo, en vez de sobre el agua. Pueden desplazarse muy rápidamente, y muchos entusiastas de la navegación sobre hielo se sienten atraídos por este deporte debido a la velocidad. Los mejores navegadores de estas embarcaciones pueden alcanzar velocidades de hasta cinco veces la velocidad del viento. Si sabemos a qué velocidad se mueve un bote deslizador sobre hielo, podemos utilizar la integración para determinar la distancia que recorre. Volveremos a tratar esta cuestión más adelante en el capítulo (consulte el Ejemplo 5.27).

Determinar la distancia a partir de la velocidad es solo una de las muchas aplicaciones de la integración. De hecho, las integrales se utilizan en una gran variedad de aplicaciones mecánicas y físicas. En este capítulo, comenzaremos presentando la teoría detrás de la integración y utilizaremos las integrales para calcular áreas. A partir de ahí, desarrollaremos el teorema fundamental del cálculo, que relaciona la diferenciación y la integración. A continuación, estudiaremos algunas técnicas básicas de integración y examinamos brevemente algunas aplicaciones.

5.1 Aproximación de áreas

Objetivos de aprendizaje

- **5.1.1** Utilizar la notación sigma (notación de sumatoria) para calcular sumas y potencias de números enteros.
- **5.1.2** Utilizar la suma de áreas rectangulares para aproximar el área bajo una curva.
- **5.1.3** Utilizar las sumas de Riemann para aproximar el área.

AArquímedes le fascinaba calcular las áreas de diversas formas, es decir, la cantidad de espacio dentro de la forma. Utilizó un procedimiento que llegó a conocerse como el *método de agotamiento* que utilizaba formas cada vez más pequeñas, cuyas áreas podían calcularse con exactitud, para rellenar una región irregular y obtener así aproximaciones cada vez más cercanas al área total. En este proceso, un área delimitada por curvas se rellena con rectángulos, triángulos y formas con fórmulas de área exactas. Estas áreas se suman para hacer una aproximación del área de la región curva.

En esta sección, desarrollaremos técnicas para aproximar el área entre una curva, definida por una función $f(x)$, y el eje *x* en un intervalo cerrado $[a, b]$. Al igual que Arquímedes, primero aproximamos el área bajo la curva utilizando formas de área conocida (es decir, rectángulos). Utilizando rectángulos cada vez más pequeños, conseguimos aproximaciones cada vez más cercanas al área. Tomar un límite nos permite calcular el área exacta bajo la curva.

Empecemos por introducir algunas notaciones para facilitar los cálculos. A continuación, consideraremos el caso en el que $f(x)$ es continua y no negativa. Más adelante en el capítulo, atenuaremos algunas de estas restricciones y desarrollaremos técnicas que se aplican en casos más generales.

Notación sigma (notación de sumatoria)

Como dijimos, utilizaremos formas de área conocida para aproximar el área de una región irregular limitada por curvas. Este proceso suele requerir la suma de largas cadenas de números. Para facilitar la escritura de estas largas sumas, aquí veremos una nueva notación, llamada **notación sigma** (también conocida como **notación de sumatoria**). La letra mayúscula griega Σ, sigma, se utiliza para expresar sumas largas de valores de forma compacta. Por ejemplo, si queremos sumar todos los enteros del 1 al 20 sin notación sigma, tenemos que escribir

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+20.$$

Probablemente omitiríamos la escritura de un par de términos y escribiríamos

$$1+2+3+4+\cdots+19+20,$$

que es mejor, pero sigue siendo engorroso. Con la notación sigma, escribimos esta suma como

$$\sum_{i=1}^{20} i,$$

que es mucho más compacta.

Normalmente, la notación sigma se presenta en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

donde a_i describe los términos a añadir, y la *i* se denomina *índice*. Se evalúa cada término y luego se suman todos los valores, empezando por el valor cuando $i = 1$ y terminando con el valor cuando $i = n$. Por ejemplo, una expresión como $\sum_{i=2}^{7} s_i$ se interpreta como $s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6 + s_7$. Tenga en cuenta que el índice solo se utiliza para llevar la cuenta de los términos que se van a sumar; no entra en el cálculo de la suma en sí. Por lo tanto, el índice se denomina *variable ficticia*. Podemos utilizar la letra que queramos para el índice. Normalmente, los matemáticos utilizan *i*, *j*, *k*, *m* y *n* para los índices.

Probemos un par de ejemplos de uso de la notación sigma.

EJEMPLO 5.1

Uso de la notación sigma

a. Escriba en notación sigma y evalúe la suma de términos 3^i por $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
b. Escriba la suma en notación sigma

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}.$$

Solución

a. Escriba

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} 3^i &= 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 \\ &= 363.\end{aligned}$$

b. El denominador de cada término es un cuadrado perfecto. Utilizando la notación sigma, esta suma puede escribirse como $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2}$.

5.1 Escriba en notación sigma y evalúe la suma de los términos 2^i para $i = 3, 4, 5, 6$.

Las propiedades asociadas al proceso de suma se dan en la siguiente regla.

Regla: propiedades de la notación sigma

Supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ representan dos secuencias de términos y supongamos *c* una constante. Las siguientes propiedades se cumplen para todos los enteros positivos *n* y para los enteros *m*, con $1 \le m \le n$.

1.
$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \tag{5.1}$$

2.
$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{5.2}$$

3.
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{5.3}$$

4.
$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{5.4}$$

5.
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \tag{5.5}$$

Prueba

Demostramos aquí las propiedades 2. y 3., y dejamos la demostración de las demás propiedades para los Ejercicios.

2. Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} ca_i &= ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n \\ &= c\,(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c \sum_{i=1}^{n} a_i.\end{aligned}$$

3. Tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

□

Unas cuantas fórmulas más para las funciones más frecuentes simplifican aún más el proceso de suma. Estas se muestran en la siguiente regla: **sumas y potencias de números enteros**, y las utilizamos en el siguiente conjunto de ejemplos.

Regla: sumas de potencias de números enteros

1. La suma de n números enteros viene dada por
$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$
2. La suma de enteros consecutivos al cuadrado viene dada por
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$
3. La suma de enteros consecutivos elevada al cubo viene dada por
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}.$$

EJEMPLO 5.2

Evaluación mediante la notación sigma

Escriba utilizando la notación sigma y evalúe:

a. La suma de los términos $(i-3)^2$ por $i = 1, 2, \ldots, 200$.
b. La suma de los términos $\left(i^3 - i^2\right)$ por $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Solución

a. Multiplicando $(i-3)^2$, podemos descomponer la expresión en tres términos

$$\sum_{i=1}^{200}(i-3)^2 = \sum_{i=1}^{200}\left(i^2-6i+9\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{200} i^2 - \sum_{i=1}^{200} 6i + \sum_{i=1}^{200} 9 \\
&= \sum_{i=1}^{200} i^2 - 6\sum_{i=1}^{200} i + \sum_{i=1}^{200} 9 \\
&= \frac{200(200+1)(400+1)}{6} - 6\left[\frac{200(200+1)}{2}\right] + 9\,(200) \\
&= 2686700 - 120.600 + 1800 \\
&= 2567900
\end{aligned}$$

b. Utilice la propiedad iv de la notación sigma y las reglas de la suma de términos al cuadrado y las de la suma de términos al cubo

$$\sum_{i=1}^{6}\left(i^3-i^2\right) = \sum_{i=1}^{6} i^3 - \sum_{i=1}^{6} i^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{6^2(6+1)^2}{4} - \frac{6(6+1)(2(6)+1)}{6} \\
&= \frac{1764}{4} - \frac{546}{6} \\
&= 350
\end{aligned}$$

5.2 Halle la suma de los valores de $4+3i$ por $i=1,2,\ldots,100.$

EJEMPLO 5.3

Hallar la suma de los valores de la función

Halle la suma de los valores de $f\,(x)=x^3$ sobre los enteros $1,2,3,\ldots,10.$

Solución

Con la fórmula tenemos

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = \frac{(10)^2(10+1)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{100(121)}{4} \\
&= 3025.
\end{aligned}$$

5.3 Evalúe la suma indicada por la notación $\sum_{k=1}^{20}(2k+1)$.

Aproximación del área

Ahora que tenemos la notación necesaria, volvamos al problema que nos ocupa: aproximar el área bajo una curva. Supongamos que $f\,(x)$ es una función continua y no negativa definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Queremos aproximar el área A delimitada por $f\,(x)$ arriba, el *eje* abajo, la línea $x=a$ a la izquierda, y la línea $x=b$ a la derecha

(Figura 5.2).

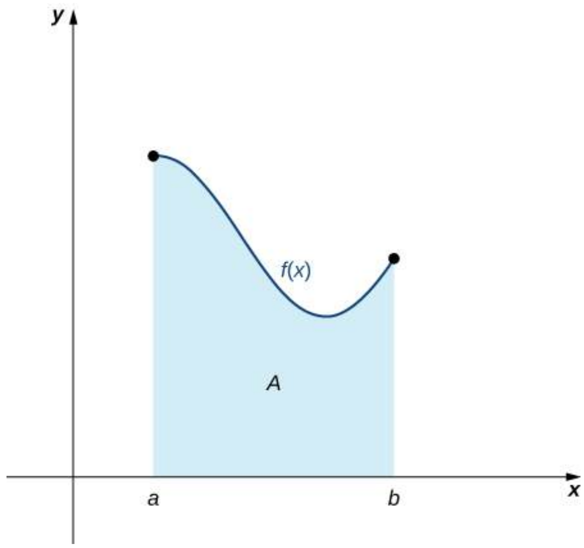


Figura 5.2 El área (región sombreada) delimitada por la curva $f(x)$ en la parte superior, el eje *x* en la parte inferior, la línea $x = a$ a la izquierda, y la línea $x = b$ a la derecha.

¿Cómo podemos aproximar el área que está debajo esta curva? El enfoque es geométrico. Al dividir una región en muchas formas pequeñas que tienen fórmulas de área conocidas, podemos sumar estas áreas y obtener una estimación razonable del área verdadera. Comenzamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en *n* subintervalos de anchos iguales, $\frac{b-a}{n}$. Lo hacemos seleccionando puntos igualmente espaciados $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ con la $x_0 = a, x_n = b$, y

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

por $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Denotamos la anchura de cada subintervalo con la notación Δ*x*, por lo que $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y

$$x_i = x_0 + i\Delta x$$

por $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Esta noción de dividir un intervalo $[a, b]$ en subintervalos mediante la selección de puntos dentro del intervalo se utiliza con bastante frecuencia en la aproximación del área bajo una curva, así que vamos a definir alguna terminología relevante.

Definición

Un conjunto de puntos $P = \{x_i\}$ por $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, que divide el intervalo $[a, b]$ en subintervalos de la forma $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ se llama una **partición** de $[a, b]$. Si todos los subintervalos tienen la misma anchura, el conjunto de puntos forma una **partición regular** del intervalo $[a, b]$.

Podemos utilizar esta partición regular como base de un método para estimar el área bajo la curva. A continuación examinamos dos métodos: aproximación en el punto del extremo izquierdo y la aproximación en el punto del extremo derecho.

Regla: aproximación del extremo izquierdo

En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$), construya un rectángulo con anchura Δ*x* y altura igual a $f(x_{i-1})$, que es el valor de la función en el punto del extremo izquierdo del subintervalo. Entonces el área de este rectángulo es $f(x_{i-1})\Delta x$. Al sumar las áreas de todos estos rectángulos, obtenemos un valor aproximado de *A* (Figura 5.3). Utilizamos la notación L_n para denotar que se trata de una **aproximación del punto del extremo izquierdo** de *A* utilizando *n* subintervalos.

$$A \approx L_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x \tag{5.6}$$

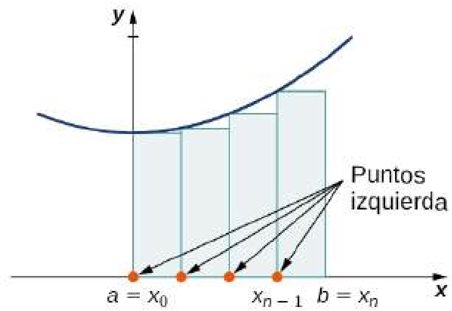


Figura 5.3 En la aproximación del punto del extremo izquierdo del área bajo una curva, la altura de cada rectángulo está determinada por el valor de la función a la izquierda de cada subintervalo.

El segundo método para aproximar el área bajo una curva es la aproximación del punto del extremo derecho. Es casi lo mismo que la aproximación del punto del extremo izquierdo, pero ahora las alturas de los rectángulos están determinadas por los valores de la función a la derecha de cada subintervalo.

Regla: aproximación del extremo derecho

Construir un rectángulo en cada subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, solo que esta vez la altura del rectángulo está determinada por el valor de la función $f(x_i)$ en el punto del extremo derecho del subintervalo. Entonces, el área de cada rectángulo es $f(x_i)\Delta x$ y la aproximación para *A* está dada por

$$A \approx R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x. \tag{5.7}$$

La notación R_n indica que se trata de una **aproximación en el punto del extremo derecho** de *A* (Figura 5.4).

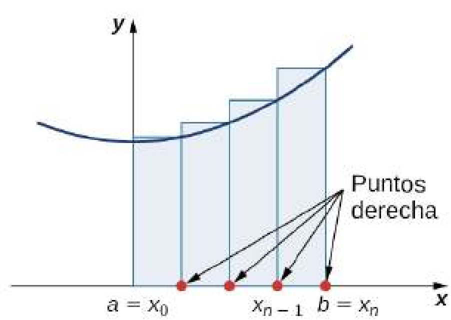


Figura 5.4 En la aproximación del punto del extremo derecho del área bajo una curva, la altura de cada rectángulo está determinada por el valor de la función a la derecha de cada subintervalo. Nótese que la aproximación del punto del extremo derecho difiere de la aproximación del punto del extremo izquierdo en la Figura 5.3.

Los gráficos de la Figura 5.5 representan la curva $f(x) = \frac{x^2}{2}$. En el gráfico (a) dividimos la región representada por el intervalo $[0, 3]$ en seis subintervalos, cada uno de ellos con una anchura de 0,5. Así, $\Delta x = 0{,}5$. A continuación, formamos seis rectángulos trazando líneas verticales perpendiculares al x_{i-1}, punto del extremo izquierdo de cada subintervalo. Determinamos la altura de cada rectángulo calculando $f\left(x_{i-1}\right)$ por $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Los intervalos son $[0, 0{,}5], [0{,}5, 1], [1, 1{,}5], [1{,}5, 2], [2, 2{,}5], [2{,}5, 3]$. Encontramos el área de cada rectángulo multiplicando la altura por la anchura. Entonces, la suma de las áreas rectangulares se aproxima al área entre $f(x)$ y el eje *x*. Cuando se utilizan los puntos del extremo izquierdo para calcular la altura, tenemos una aproximación del punto del extremo izquierdo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A \approx L_6 &= \sum_{i=1}^{6} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x + f(x_5)\Delta x \\ &= f(0)\,0{,}5 + f(0{,}5)\,0{,}5 + f(1)\,0{,}5 + f(1{,}5)\,0{,}5 + f(2)\,0{,}5 + f(2{,}5)\,0{,}5 \\ &= (0)\,0{,}5 + (0{,}125)\,0{,}5 + (0{,}5)\,0{,}5 + (1{,}125)\,0{,}5 + (2)\,0{,}5 + (3{,}125)\,0{,}5 \\ &= 0 + 0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}5625 + 1 + 1{,}5625 \\ &= 3{,}4375. \end{aligned}$$

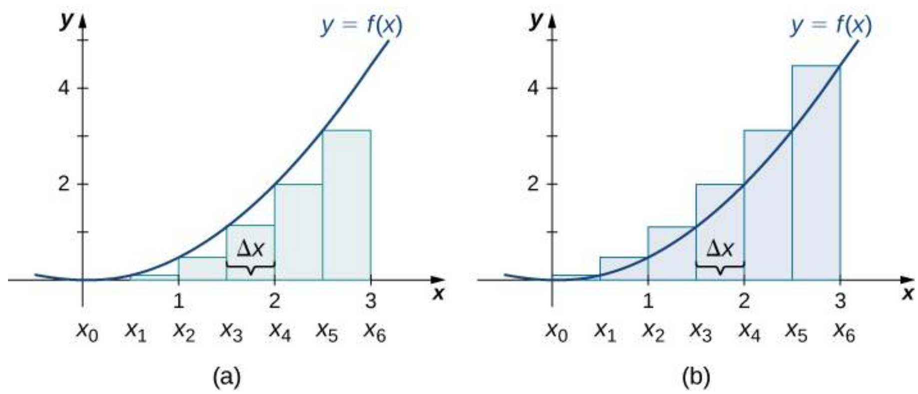


Figura 5.5 Métodos de aproximación del área bajo una curva utilizando (a) los puntos extremos de la izquierda y (b) los puntos extremos de la derecha.

En la Figura 5.5(b), dibujamos líneas verticales perpendiculares a x_i de manera que x_i es el punto final derecho de cada subintervalo, y calculamos $f(x_i)$ por $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Multiplicamos cada $f(x_i)$ por Δx para hallar las áreas rectangulares, y luego sumarlas. Se trata de una aproximación del punto del extremo derecho del área bajo $f(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A \approx R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x + f(x_5)\Delta x + f(x_6)\Delta x \\ &= f(0{,}5)\,0{,}5 + f(1)\,0{,}5 + f(1{,}5)\,0{,}5 + f(2)\,0{,}5 + f(2{,}5)\,0{,}5 + f(3)\,0{,}5 \\ &= (0{,}125)\,0{,}5 + (0{,}5)\,0{,}5 + (1{,}125)\,0{,}5 + (2)\,0{,}5 + (3{,}125)\,0{,}5 + (4{,}5)\,0{,}5 \\ &= 0{,}0625 + 0{,}25 + 0{,}5625 + 1 + 1{,}5625 + 2{,}25 \\ &= 5{,}6875. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.4

Aproximación del área bajo una curva

Utilice las aproximaciones del punto del extremo izquierdo y del punto del extremo derecho para aproximar el área bajo la curva de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 2]$; utilice $n = 4$.

Solución

En primer lugar, divida el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos iguales. Utilizando $n = 4$, $\Delta x = \frac{(2-0)}{4} = 0{,}5$. Esta es la anchura de cada rectángulo. Los intervalos $[0, 0{,}5]$, $[0{,}5, 1]$, $[1, 1{,}5]$, $[1{,}5, 2]$ se muestran en la Figura 5.6. Utilizando una aproximación al punto del extremo izquierdo, las alturas son $f(0) = 0$, $f(0{,}5) = 0{,}25$, $f(1) = 1$, $f(1{,}5) = 2{,}25$. Entonces,

$$\begin{aligned} L_4 &= f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x \\ &= 0\,(0{,}5) + 0{,}25\,(0{,}5) + 1\,(0{,}5) + 2{,}25\,(0{,}5) \\ &= 1{,}75. \end{aligned}$$

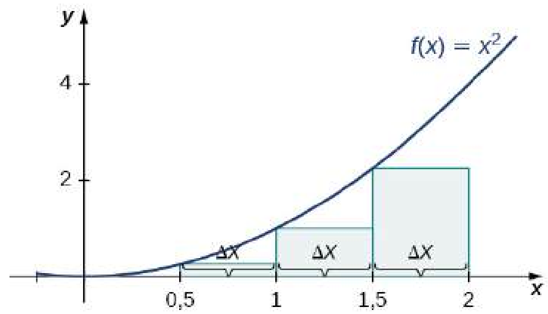


Figura 5.6 El gráfico muestra la aproximación de los puntos del extremo izquierdo del área bajo $f(x) = x^2$ de 0 a 2.

La aproximación del punto del extremo derecho se muestra en la Figura 5.7. Los intervalos son los mismos, $\Delta x = 0{,}5$, pero ahora se utiliza el punto del extremo derecho para calcular la altura de los rectángulos. Tenemos

$$\begin{aligned} R_4 &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x \\ &= 0{,}25\,(0{,}5) + 1\,(0{,}5) + 2{,}25\,(0{,}5) + 4\,(0{,}5) \\ &= 3{,}75. \end{aligned}$$

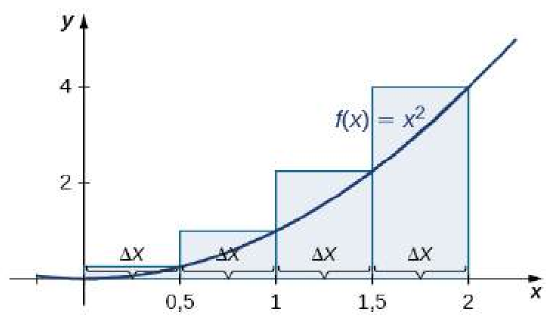


Figura 5.7 El gráfico muestra la aproximación del punto del extremo derecho del área bajo $f(x) = x^2$ de 0 a 2.

La aproximación del extremo izquierdo es 1,75; la aproximación del extremo derecho es 3,75.

5.4 Esbozar las aproximaciones del punto del extremo izquierdo y del punto del extremo derecho para $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 2]$; utilice $n = 4$. Aproxime el área utilizando ambos métodos.

Al observar la Figura 5.5 y los gráficos en el Ejemplo 5.4, podemos ver que cuando utilizamos un número pequeño de intervalos, ni la aproximación del punto del extremo izquierdo ni la aproximación del punto del extremo derecho son una estimación especialmente precisa del área bajo la curva. Sin embargo, parece lógico que si aumentamos el número de puntos en nuestra partición, nuestra estimación de *A* mejorará. Tendremos más rectángulos, pero cada rectángulo será más fino, por lo que podremos ajustar los rectángulos a la curva con mayor precisión.

Podemos demostrar la mejora de la aproximación obtenida mediante intervalos más pequeños con un ejemplo. Exploremos la idea de aumentar *n*, primero con una aproximación del punto del extremo izquierdo con cuatro rectángulos, luego con ocho rectángulos y finalmente con 32 rectángulos. A continuación, hagamos lo mismo en una aproximación del punto del extremo derecho, utilizando los mismos conjuntos de intervalos de la misma región curva. La Figura 5.8 muestra el área de la región bajo la curva $f(x) = (x-1)^3 + 4$ en el intervalo $[0, 2]$ utilizando una aproximación del punto del extremo izquierdo donde $n = 4$. La anchura de cada rectángulo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}.$$

El área se aproxima por la suma de las áreas de los rectángulos, o

$$\begin{aligned} L_4 &= f(0)(0{,}5) + f(0{,}5)(0{,}5) + f(1)(0{,}5) + f(1{,}5)\,0{,}5 \\ &= 7{,}5. \end{aligned}$$

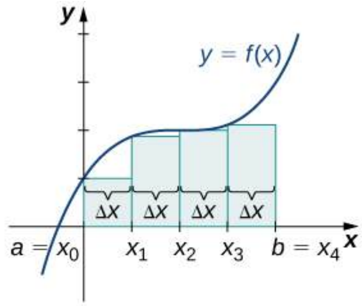


Figura 5.8 Con una aproximación al extremo izquierdo y dividiendo la región de *a* a *b* en cuatro intervalos iguales, el área bajo la curva es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos.

La Figura 5.9 muestra la misma curva dividida en ocho subintervalos. Al comparar el gráfico con cuatro rectángulos en la Figura 5.8 con este gráfico con ocho rectángulos, observamos que aparentemente hay menos espacio en blanco bajo la curva cuando $n = 8$. Este espacio en blanco es el área bajo la curva que no podemos incluir utilizando nuestra aproximación. El área de los rectángulos es

$$\begin{aligned} L_8 &= f(0)(0{,}25) + f(0{,}25)(0{,}25) + f(0{,}5)(0{,}25) + f(0{,}75)(0{,}25) \\ &\quad + f(1)(0{,}25) + f(1{,}25)(0{,}25) + f(1{,}5)(0{,}25) + f(1{,}75)(0{,}25) \\ &= 7{,}75. \end{aligned}$$

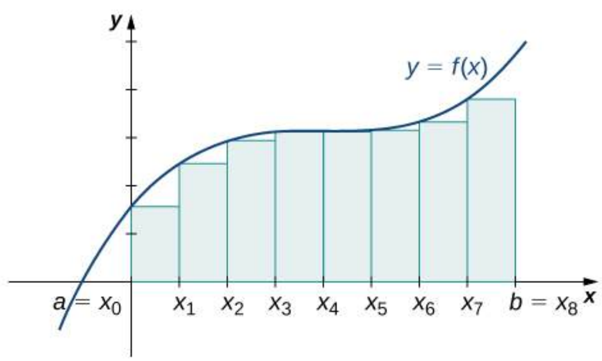


Figura 5.9 La región bajo la curva se divide en áreas rectangulares $n = 8$ de igual anchura para una aproximación al extremo izquierdo.

El gráfico en la Figura 5.10 muestra la misma función con 32 rectángulos inscritos bajo la curva. Parece que queda poco espacio en blanco. El área ocupada por los rectángulos es

$$\begin{aligned} L_{32} &= f(0)(0{,}0625) + f(0{,}0625)(0{,}0625) + f(0{,}125)(0{,}0625) + \cdots + f(1{,}9375)(0{,}0625) \\ &= 7{,}9375. \end{aligned}$$

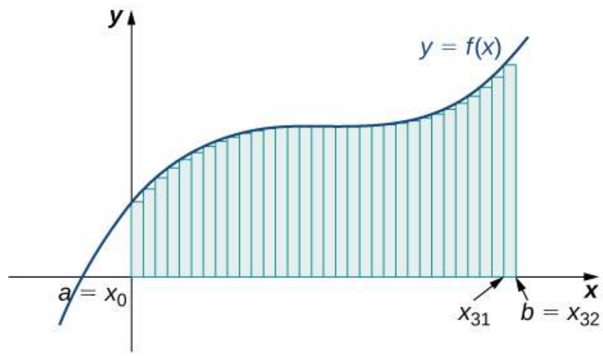


Figura 5.10 En este caso, se inscriben 32 rectángulos bajo la curva para una aproximación al punto del extremo izquierdo.

Podemos realizar un proceso similar para el método de aproximación del punto del extremo derecho. Una aproximación al extremo derecho de la misma curva, utilizando cuatro rectángulos (Figura 5.11), produce un área

$$\begin{aligned} R_4 &= f(0{,}5)(0{,}5) + f(1)(0{,}5) + f(1{,}5)(0{,}5) + f(2)(0{,}5) \\ &= 8{,}5. \end{aligned}$$

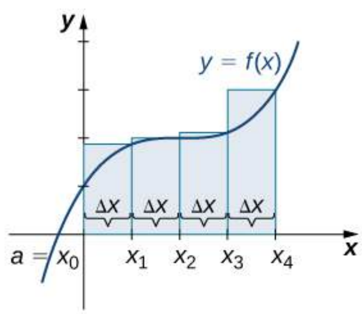


Figura 5.11 Ahora dividimos el área bajo la curva en cuatro subintervalos iguales para una aproximación al punto del extremo derecho.

Dividiendo la región en el intervalo $[0, 2]$ en ocho rectángulos da como resultado $\Delta x = \frac{2-0}{8} = 0{,}25$. El gráfico se muestra en la Figura 5.12. El área es

$$\begin{aligned} R_8 &= f(0{,}25)(0{,}25) + f(0{,}5)(0{,}25) + f(0{,}75)(0{,}25) + f(1)(0{,}25) \\ &\quad + f(1{,}25)(0{,}25) + f(1{,}5)(0{,}25) + f(1{,}75)(0{,}25) + f(2)(0{,}25) \\ &= 8{,}25. \end{aligned}$$

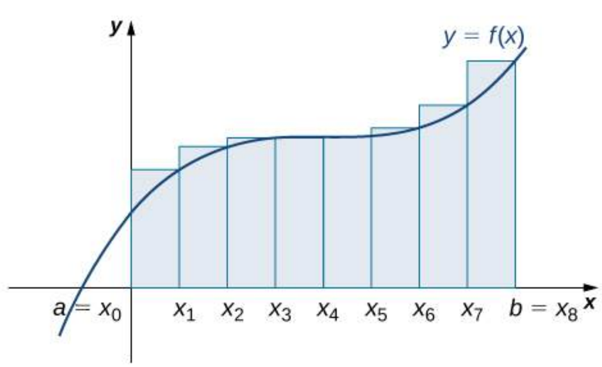


Figura 5.12 Aquí utilizamos la aproximación del punto del extremo derecho para un área dividida en ocho subintervalos iguales.

Por último, la aproximación del punto del extremo derecho con $n = 32$ se acerca al área real (Figura 5.13). El área es aproximadamente

$$\begin{aligned} R_{32} &= f(0{,}0625)(0{,}0625) + f(0{,}125)(0{,}0625) + f(0{,}1875)(0{,}0625) + \cdots + f(2)(0{,}0625) \\ &= 8{,}0625. \end{aligned}$$

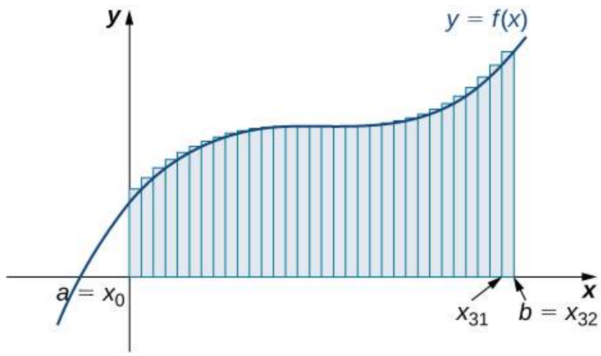


Figura 5.13 La región se divide en 32 subintervalos iguales para una aproximación al extremo derecho.

Con base en estas cifras y cálculos, parece que vamos por buen camino; los rectángulos parecen aproximarse mejor al área bajo la curva a medida que *n* aumenta. Además, a medida que aumenta *n*, tanto la aproximación del punto del extremo izquierdo como la del derecho parecen acercarse a un área de 8 unidades cuadradas. La Tabla 5.1 muestra una comparación numérica de los métodos del punto del extremo izquierdo y del derecho. La idea de que las aproximaciones del área bajo la curva son cada vez mejores a medida que *n* se hace más grande es muy importante, y exploraremos esa idea con más detalle.

Los valores de n	Área aproximada L_n	Área aproximada R_n
$n = 4$	7,5	8,5
$n = 8$	7,75	8,25
$n = 32$	7,94	8,06

Tabla 5.1 Valores convergentes de las aproximaciones de los puntos del extremo izquierdo y derecho cuando *n* aumenta.

Formulación de sumas de Riemann

Hasta ahora utilizamos rectángulos para aproximar el área bajo una curva. Las alturas de estos rectángulos se determinaron evaluando la función en los extremos derecho o izquierdo del subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. En realidad, no hay ninguna razón para restringir la evaluación de la función solo a uno de estos dos puntos. Podríamos evaluar la función en cualquier punto x_i del subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, y usamos $f\left(x_i^*\right)$ como la altura de nuestro rectángulo. Esto nos da una estimación del área de la forma

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Una suma de esta forma se llama suma de Riemann, en honor al matemático del siglo XIX Bernhard Riemann, que desarrolló la idea.

Definición

Supongamos que $f(x)$ se define en un intervalo cerrado $[a, b]$ y que *P* sea una partición regular de $[a, b]$. Sea Δx la anchura de cada subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ y para cada *i*, supongamos que x_i^* es cualquier punto en $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Una **suma de Riemann** se define para $f(x)$ como

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Recordemos que con las aproximaciones de los puntos extremos izquierdo y derecho, las estimaciones parecen ser cada vez mejores a medida que *n* se hace más grande. Lo mismo ocurre con las sumas de Riemann. Estas sumas dan mejores aproximaciones para valores mayores de *n*. Ahora estamos preparados para definir el área bajo una curva en términos de sumas de Riemann.

Definición

Supongamos que $f(x)$ es una función continua y no negativa en un intervalo $[a, b]$, y supongamos que $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$ es una suma de Riemann para $f(x)$. Entonces, el **área bajo la curva** $y = f(x)$ sobre $[a, b]$ viene dada por

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x.$$

MEDIOS

Vea una demostración gráfica (http://www.openstax.org/l/20_riemannsums) de la construcción de una suma de Riemann.

Vale la pena hablar sobre algunas sutilezas. En primer lugar, hay que tener en cuenta que tomar el límite de una suma difiere un poco de tomar el límite de una función $f(x)$ a medida que x llega al infinito. Los límites de las sumas se analizan en detalle en el capítulo Secuencias y series (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-2/pages/5-introduccion); pero por ahora podemos asumir que las técnicas computacionales que usamos para calcular límites de funciones también se pueden usar para calcular límites de sumas.

En segundo lugar, debemos considerar qué hacer si la expresión converge a límites diferentes para distintas elecciones de $\{x_i^*\}$. Afortunadamente, esto no ocurre. Aunque la prueba está fuera del alcance de este texto, se puede demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$ existe y es único (es decir, no depende de la opción de $\{x_i^*\}$).

En breve veremos algunos ejemplos, pero antes dediquemos un momento para hablar de algunas opciones específicas para $\{x_i^*\}$. Aunque cualquier opción para $\{x_i^*\}$ nos da una estimación del área bajo la curva, no sabremos necesariamente si esa estimación es demasiado alta (sobreestimación) o demasiado baja (subestimación). Si es importante saber si nuestra estimación es alta o baja, podemos seleccionar nuestro valor para $\{x_i^*\}$ a fin de garantizar un resultado u otro.

Si queremos una sobreestimación, por ejemplo, podemos elegir $\{x_i^*\}$ tal que para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $f(x_i^*) \geq f(x)$ para todo $x \in [x_{i-1}, x_i]$. En otras palabras, elegimos $\{x_i^*\}$ de manera que para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $f(x_i^*)$ es el valor máximo de la función en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si seleccionamos $\{x_i^*\}$ de esta manera, entonces la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x$ se denomina **suma superior**. Del mismo modo, si queremos una subestimación, podemos elegir $\{x_i^*\}$ de manera que para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $f(x_i^*)$ es el valor mínimo de la función en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En este caso, la suma de Riemann correspondiente se llama **suma inferior**. Observe que si $f(x)$ aumenta o disminuye a lo largo del intervalo $[a, b]$, entonces los valores máximos y mínimos de la función se encuentran en los puntos de los extremos de los subintervalos, por lo que las sumas superiores e inferiores son iguales a las aproximaciones de los puntos de los extremos izquierdo y derecho.

EJEMPLO 5.5

Hallar sumas inferiores y superiores

Halle una suma inferior para $f(x) = 10 - x^2$ en $[1, 2]$; supongamos que $n = 4$ subintervalos.

Solución

Con $n = 4$ en el intervalo $[1, 2]$, $\Delta x = \frac{1}{4}$. Podemos enumerar los intervalos como $[1, 1{,}25]$, $[1{,}25, 1{,}5]$, $[1{,}5, 1{,}75]$, $[1{,}75, 2]$. Ya que la función es decreciente en el intervalo $[1, 2]$, la Figura 5.14 muestra que se obtiene una suma inferior utilizando los puntos del extremo derecho.

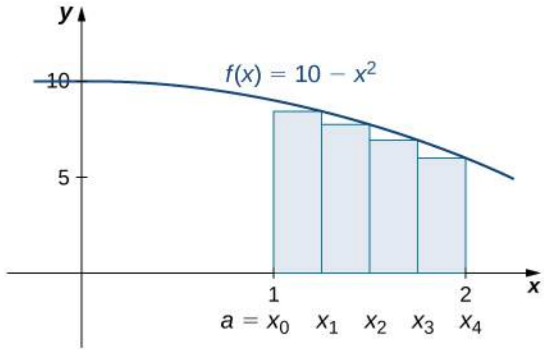


Figura 5.14 El gráfico de $f(x) = 10 - x^2$ se establece para una aproximación del punto del extremo derecho del área limitada por la curva y el eje *x* en $[1, 2]$, y muestra una suma inferior.

La suma de Riemann es

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}\left(10 - x^2\right)(0{,}25) &= 0{,}25\left[10 - (1{,}25)^2 + 10 - (1{,}5)^2 + 10 - (1{,}75)^2 + 10 - (2)^2\right]\\ &= 0{,}25\,[8{,}4375 + 7{,}75 + 6{,}9375 + 6]\\ &= 7{,}28.\end{aligned}$$

La superficie de 7,28 es una suma inferior y una subestimación.

5.5 a. Halle una suma superior para $f(x) = 10 - x^2$ en $[1, 2]$; supongamos que $n = 4$.
b. Dibuje la aproximación.

EJEMPLO 5.6

Halle sumas inferiores y superiores para $f(x) = \operatorname{sen} x$

Halle una suma inferior para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; supongamos que $n = 6$.

Solución

Veamos primero el gráfico en la Figura 5.15 para tener una mejor idea del área de interés.

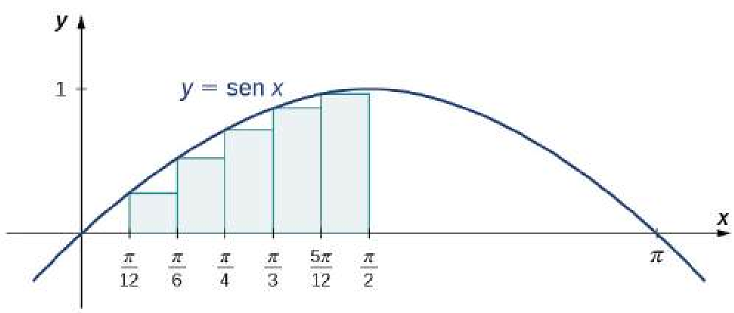


Figura 5.15 El gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ se divide en seis regiones: $\Delta x = \frac{\pi/2}{6} = \frac{\pi}{12}$.

Los intervalos son $\left[0, \frac{\pi}{12}\right]$, $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}\right]$, y $\left[\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right]$. Observe que $f(x) = \operatorname{sen} x$ es creciente en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que una aproximación al extremo izquierdo nos da la suma inferior. Una aproximación al extremo izquierdo es la suma de Riemann $\sum_{i=0}^{5} \operatorname{sen} x_i \left(\frac{\pi}{12}\right)$. Tenemos

$$\begin{aligned}A &\approx \operatorname{sen}(0)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\tfrac{5\pi}{12}\right)\left(\tfrac{\pi}{12}\right)\\ &= 0{,}863.\end{aligned}$$

5.6 Al utilizar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, halle una suma superior; supongamos que $n = 6$.

SECCIÓN 5.1 EJERCICIOS

1. Indique si las sumas dadas son iguales o desiguales.

a. $\sum_{i=1}^{10} i$ y $\sum_{k=1}^{10} k$

b. $\sum_{i=1}^{10} i$ y $\sum_{i=6}^{15} (i-5)$
grandes.

c. $\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$ y $\sum_{j=0}^{9} (j+1)j$

d. $\sum_{i=1}^{10} i(i-1)$ y
$\sum_{k=1}^{10} \left(k^2 - k\right)$

En los siguientes ejercicios, utilice las reglas de las sumas de potencias de números enteros para calcular las sumas.

2. $\sum_{i=5}^{10} i$

3. $\sum_{i=5}^{10} i^2$

Supongamos que $\sum_{i=1}^{100} a_i = 15$ *y* $\sum_{i=1}^{100} b_i = -12$. *En los siguientes ejercicios, calcule las sumas.*

4. $\sum_{i=1}^{100} (a_i + b_i)$ grandes.

5. $\sum_{i=1}^{100} (a_i - b_i)$ grandes.

6. $\sum_{i=1}^{100} (3a_i - 4b_i)$ grandes.

7. $\sum_{i=1}^{100} (5a_i + 4b_i)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, utilice las propiedades de la suma y las fórmulas para reescribir y evaluar las sumas.

8. $\sum_{k=1}^{20} 100\left(k^2 - 5k + 1\right)$
grandes.

9. $\sum_{j=1}^{50} \left(j^2 - 2j\right)$ grandes.

10. $\sum_{j=11}^{20} \left(j^2 - 10j\right)$ grandes.

11. $\sum_{k=1}^{25} \left[(2k)^2 - 100k\right]$

Supongamos que L_n denota la suma del punto del extremo izquierdo utilizando n subintervalos y que R_n denotan la suma correspondiente del punto del extremo derecho. En los siguientes ejercicios, calcule las sumas a la izquierda y a la derecha indicadas para las funciones dadas en el intervalo indicado.

12. L_4 para $f(x) = \frac{1}{x-1}$ sobre $[2, 3]$

13. R_4 para $g(x) = \cos(\pi x)$ sobre $[0, 1]$

14. L_6 para $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ sobre $[2, 5]$

15. R_6 para $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ sobre $[2, 5]$

16. R_4 para $\frac{1}{x^2+1}$ sobre $[-2, 2]$

17. L_4 para $\frac{1}{x^2+1}$ sobre $[-2, 2]$

18. R_4 para $x^2 - 2x + 1$ sobre $[0, 2]$

19. L_8 para $x^2 - 2x + 1$ sobre $[0, 2]$

20. Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_4 y R_4, respectivamente, para $f(x) = (2 - |x|)$ sobre $[-2, 2]$. Calcule su valor promedio medio y compárelo con el área bajo el gráfico de *f*.

21. Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_6 y R_6, respectivamente, para $f(x) = (3 - |3 - x|)$ sobre $[0, 6]$. Calcule su valor promedio medio y compárelo con el área bajo el gráfico de *f*.

22. Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_4 y R_4, respectivamente, para $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$ y compare sus valores.

23. Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_6 y R_6, respectivamente, para $f(x) = \sqrt{9 - (x - 3)^2}$ en $[0, 6]$ y compare sus valores.

Exprese las siguientes sumas de puntos finales en notación sigma, pero no las evalúe.

24. L_{30} para $f(x) = x^2$ en $[1, 2]$

25. L_{10} para $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 2]$

26. R_{20} para $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

27. R_{100} para $\ln x$ en $[1, e]$

En los siguientes ejercicios, grafique la función y luego utilice una calculadora o un programa de computadora para evaluar las siguientes sumas de los extremos izquierdo y derecho. ¿El área bajo la curva en el intervalo dado se aproxima mejor mediante la suma de Riemann izquierda o la suma de Riemann derecha? Si los dos están de acuerdo, coloque "ninguno".

28. **[T]** L_{100} y R_{100} para $y = x^2 - 3x + 1$ en el intervalo $[-1, 1]$

29. **[T]** L_{100} y R_{100} para $y = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$

30. **[T]** L_{50} y R_{50} para $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ en el intervalo $[2, 4]$

31. **[T]** L_{100} y R_{100} para $y = x^3$ en el intervalo $[-1, 1]$

32. **[T]** L_{50} y R_{50} para $y = \tan(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

33. **[T]** L_{100} y R_{100} para $y = e^{2x}$ en el intervalo $[-1, 1]$

34. Sea t_j el tiempo que tardó Tejay van Garteren en recorrer la etapa *j* del Tour de Francia en 2014. Si hubiera un total de 21 etapas, interprete $\sum_{j=1}^{21} t_j$.

35. Supongamos que r_j denota la precipitación total en Portland en el día *j* del año en 2009. Interprete $\sum_{j=1}^{31} r_j$.

36. Supongamos que d_j denotan las horas de luz y δ_j el aumento de las horas de luz desde el día $j-1$ hasta el día *j* en Fargo, Dakota del Norte, en el día *j* del año. Interprete $d_1 + \sum_{j=2}^{365} \delta_j$.

37. Para ponerse en forma, Joe recibe un nuevo par de zapatillas para correr. Si Joe corre 1 mi cada día en la semana 1 y añade $\frac{1}{10}$ mi a su rutina diaria cada semana, ¿cuál es el millaje total de los zapatos de Joe después de 25 semanas?

38. La siguiente tabla ofrece valores aproximados de la tasa promedio anual del aumento del dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera por cada década desde 1960, en partes por millón (ppm). Calcule el aumento total del CO_2 atmosférico entre 1964 y 2013.

Década	Ppm/año
1964-1973	1,07
1974-1983	1,34
1984-1993	1,40
1994-2003	1,87
2004-2013	2,07

Tabla 5.2 Aumento anual promedio del CO_2 atmosférico, 1964-2013
Fuente: http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/.

39. La siguiente tabla indica el aumento aproximado del nivel del mar en pulgadas a lo largo de 20 años a partir de un año determinado. Calcule el cambio neto en el nivel medio del mar desde 1870 hasta 2010.

Año de inicio	Cambio en 20 años
1870	0,3
1890	1,5
1910	0,2
1930	2,8
1950	0,7
1970	1,1
1990	1,5

Tabla 5.3 Aumentos aproximados del nivel del mar en 20 años, 1870-1990
Fuente: http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs10712-011-9119-1

40. La siguiente tabla muestra el aumento aproximado en dólares del precio promedio del galón de gasolina por década desde 1950. Si el precio promedio de un galón de gasolina en 2010 era de 2,60 dólares, ¿cuál era el precio promedio de un galón de gasolina en 1950?

Año de inicio	Cambio en 10 años
1950	0,03
1960	0,05
1970	0,86
1980	−0,03
1990	0,29
2000	1,12

Tabla 5.4 Aumentos aproximados del precio del gas en 10 años, 1950-2000 *Fuente*: http://epb.lbl.gov/homepages/Rick_Diamond/docs/lbnl55011-trends.pdf.

41. La siguiente tabla indica el porcentaje de crecimiento de la población estadounidense a partir de julio del año indicado. Si la población de Estados Unidos era de 281.421.906 habitantes en julio de 2000, calcule la población de Estados Unidos en julio de 2010.

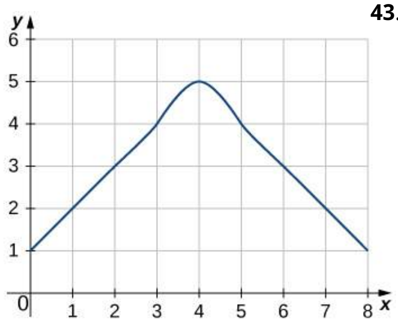
Año	% de cambio/año
2000	1,12
2001	0,99
2002	0,93
2003	0,86
2004	0,93
2005	0,93
2006	0,97
2007	0,96
2008	0,95
2009	0,88

Tabla 5.5 Crecimiento porcentual anual de la población estadounidense, 2000-2009 *Fuente*: http://www.census.gov/popest/data.

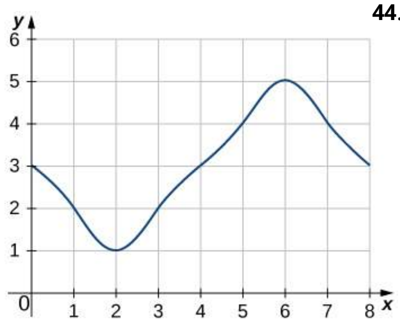
(*Pista:* Para obtener la población en julio de 2001, multiplique la población en julio de 2000 por 1,0112 para obtener 284.573.831).

En los siguientes ejercicios, estime las áreas bajo las curvas calculando las sumas de Riemann de la izquierda, L_8.

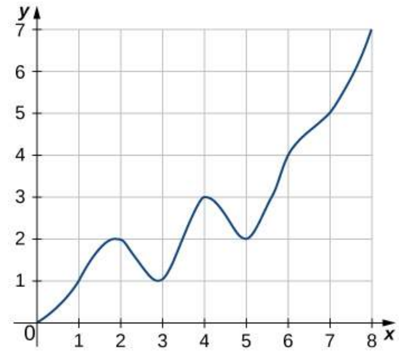
42.



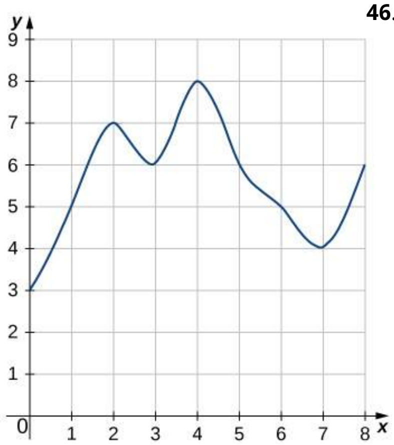
43.



44.



45.



46. **[T]** Utiliza un sistema de álgebra computacional para calcular la suma de Riemann, L_N, por $N = 10, 30, 50$ por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ en $[-1, 1]$.

47. **[T]** Utilice un sistema de álgebra computacional para calcular la suma de Riemann, L_N, para $N = 10, 30, 50$ por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ en $[-1, 1]$.

48. **[T]** Utilice un sistema de álgebra computacional para calcular la suma de Riemann, L_N, para $N = 10, 30, 50$ por $f(x) = \text{sen}^2 x$ en $[0, 2\pi]$. Compara estas estimaciones con π.

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora o un programa de computadora para evaluar las sumas de los puntos finales R_N y L_N para $N = 1{,}10{,}100$. ¿Cómo se comparan estas estimaciones con las respuestas exactas que puede hallar mediante la geometría?

49. **[T]** $y = \cos(\pi x)$ en el intervalo $[0, 1]$

50. **[T]** $y = 3x + 2$ en el intervalo $[3, 5]$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora o un programa de ordenador para evaluar las sumas de los puntos finales R_N y L_N para $N = 1{,}10{,}100$.

51. **[T]** $y = x^4 - 5x^2 + 4$ en el intervalo $[-2, 2]$, que tiene un área exacta de $\frac{32}{15}$

52. **[T]** $y = \ln x$ en el intervalo $[1, 2]$, que tiene un área exacta de $2\ln(2) - 1$

53. Explique por qué, si $f(a) \geq 0$ y f es creciente en $[a, b]$, que la estimación del punto del extremo izquierdo es un límite inferior para el área bajo el gráfico de f en $[a, b]$.

54. Explique por qué, si $f(b) \geq 0$ y f es decreciente en $[a, b]$, que la estimación del punto del extremo izquierdo es un límite superior para el área bajo el gráfico de f en $[a, b]$.

55. Demuestre que, en general, $R_N - L_N = (b\text{–}a) \times \frac{f(b)-f(a)}{N}$.

56. Explique por qué, si f es creciente en $[a, b]$, el error entre L_N o R_N y el área A bajo el gráfico de f es como máximo $(b\text{–}a)\frac{f(b)-f(a)}{N}$.

57. Para cada uno de los tres gráficos:

a. Obtenga un límite inferior $L(A)$ para el área encerrada por la curva sumando las áreas de los cuadrados *encerrados completamente* por la curva.
b. Obtener un límite superior $U(A)$ para el área añadiendo a $L(A)$ las áreas $B(A)$ de los cuadrados *encerrados parcialmente* por la curva
.

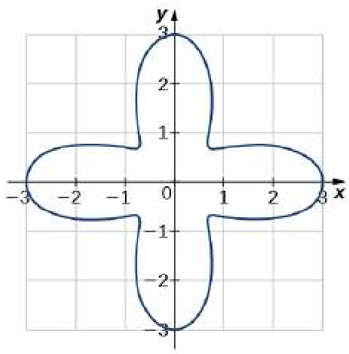


Gráfico 1

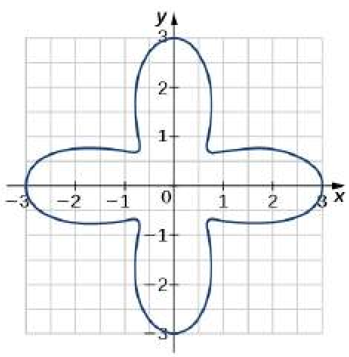


Gráfico 2

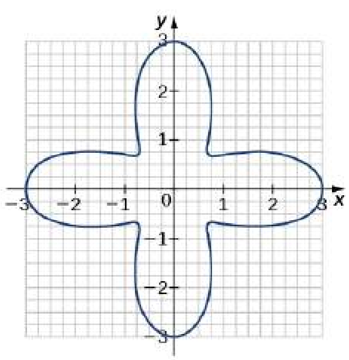
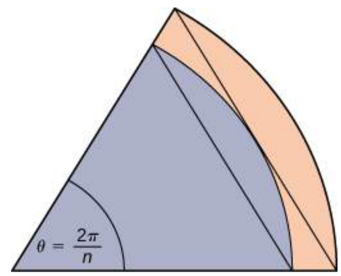


Gráfico 3

58. En el ejercicio anterior, explique por qué $L(A)$ no se hace más pequeño mientras $U(A)$ no se hace más grande al subdividir los cuadrados en cuatro casillas de áreas iguales.

59. Un círculo unitario está formado por cuñas *n* equivalentes a la cuña interior de la figura. La base del triángulo interior es 1 unidad y su altura es $\operatorname{sen}\left(\frac{2}{\pi}\right)$. La base del triángulo exterior es $B = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$ y la altura es $H = B\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Utiliza esta información para argumentar que el área de un círculo unitario es igual a *π*.



5.2 La integral definida

Objetivos de aprendizaje

5.2.1 Enunciar la definición de la integral definida.
5.2.2 Explicar los términos integrando, límites de integración y variable de integración.
5.2.3 Explicar cuándo una función es integrable.
5.2.4 Describir la relación entre la integral definida y el área neta.
5.2.5 Utilizar la geometría y las propiedades de las integrales definidas para evaluarlas.
5.2.6 Calcular el valor promedio de una función.

En el apartado anterior definimos el área bajo una curva en términos de las sumas de Riemann:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x.$$

Sin embargo, esta definición tenía restricciones. Necesitábamos que $f(x)$ fuera continua y no negativa. Desafortunadamente, los problemas del mundo real no siempre se ajustan a estas restricciones. En esta sección, veremos cómo aplicar el concepto de área bajo la curva a un conjunto más amplio de funciones mediante el uso de la integral definida.

Definición y notación

La integral definida generaliza el concepto de área bajo una curva. Eliminamos los requisitos de que $f(x)$ sea continua y no negativa, y definimos la integral definida como sigue.

Definición

Si $f(x)$ es una función definida en un intervalo $[a, b]$, la **integral definida** de *f* de *a* a *b* viene dada por

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x, \tag{5.8}$$

siempre que exista el límite. Si este límite existe, la función $f(x)$ se dice que es integrable en $[a, b]$, o que es una **función integrable**.

El símbolo de la integral en la definición anterior debería resultar familiar. Hemos visto una notación similar en el capítulo Aplicaciones de las derivadas, donde utilizamos el símbolo de integral indefinida (sin la *a* y la *b* arriba y abajo) para representar una antiderivada. Aunque la notación para las integrales indefinidas puede parecer similar a la notación para una integral definida, no son lo mismo. Una integral definida es un número. Una integral indefinida es una familia de funciones. Más adelante en este capítulo examinaremos cómo se relacionan estos conceptos. Sin embargo, siempre hay que prestar mucha atención a la notación para saber si estamos trabajando con una integral definida o con una indefinida.

La notación integral se remonta a finales del siglo XVII y es una de las aportaciones de Gottfried Wilhelm Leibniz, a quien se suele considerar el codescubridor del cálculo, junto con Isaac Newton. El símbolo de integración ∫ es una S alargada, que indica sigma o suma. En una integral definida, por encima y por debajo del símbolo de la suma están los límites del intervalo, $[a, b]$. Los números *a* y *b* son valores de *x* y se denominan **límites de integración**; específicamente, *a* es el límite inferior y *b* es el límite superior. Para precisar, estamos utilizando la palabra *límite* de dos maneras diferentes en el contexto de la integral definida. En primer lugar, hablamos del límite de una suma dado que $n \to \infty$. En segundo lugar, los límites de la región se denominan *límites de integración*.

Llamamos a la función $f(x)$ el **integrando**, y la *dx* indica que $f(x)$ es una función con respecto a *x*, que se denomina **variable de integración**. Tenga en cuenta que, al igual que el índice en una suma, la variable de integración es una variable ficticia, y no tiene ninguna consecuencia en el cálculo de la integral. Podemos utilizar cualquier variable que queramos como variable de integración:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(u)\, du$$

Anteriormente, discutimos el hecho de que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces el límite $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$ existe y es único. Esto nos conduce al siguiente teorema, que enunciamos sin pruebas.

Teorema 5.1

Las funciones continuas son integrables

Si los valores de $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces *f* es integrable en $[a, b]$.

Funciones que no son continuas en $[a, b]$ puede seguir siendo integrable, lo que depende de la naturaleza de las discontinuidades. Por ejemplo, las funciones con un número finito de discontinuidades de salto en un intervalo cerrado son integrables.

También cabe destacar aquí que hemos mantenido el uso de una partición regular en las sumas de Riemann. Esta restricción no es estrictamente necesaria. Puede utilizarse cualquier partición para formar una suma de Riemann. Sin embargo, si se utiliza una partición no regular para definir la integral definida, no basta con tomar el límite a medida que el número de subintervalos llega al infinito. En cambio, debemos tomar el límite a medida que la anchura del subintervalo más grande llega a cero. Esto introduce una notación un poco más compleja en nuestros límites y hace los cálculos más difíciles sin obtener realmente mucha información adicional, así que nos quedamos con las particiones regulares para las sumas de Riemann.

EJEMPLO 5.7

Evaluación de una integral mediante la definición

Utilice la definición de la integral definida para evaluar $\int_0^2 x^2 dx$. Utilice una aproximación al extremo derecho para generar la suma de Riemann.

Solución

Primero queremos establecer una suma de Riemann. Con base en los límites de integración, tenemos $a = 0$ y $b = 2$. Para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[0, 2]$. Entonces

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2}{n}.$$

Como estamos utilizando una aproximación al punto del extremo derecho para generar sumas de Riemann, para cada *i*, necesitamos calcular el valor de la función en el punto del extremo derecho del intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. El punto del extremo derecho del intervalo es x_i, y como *P* es una partición regular,

$$x_i = x_0 + i\Delta x = 0 + i\left[\frac{2}{n}\right] = \frac{2i}{n}.$$

Por lo tanto, el valor de la función en el extremo derecho del intervalo es

$$f(x_i) = x_i^2 = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 = \frac{4i^2}{n^2}.$$

Entonces la suma de Riemann toma la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{8i^2}{n^3} = \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Utilizando la fórmula de la suma para $\sum_{i=1}^{n} i^2$, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] \\
&= \frac{8}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right] \\
&= \frac{16n^3+24n^2+8n}{6n^3} \\
&= \frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}.
\end{aligned}$$

Ahora, para calcular la integral definida, necesitamos tomar el límite dado que $n \to \infty$. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x^2 dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}+\frac{4}{n}+\frac{8}{6n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{6n^2}\right) \\
&= \frac{8}{3}+0+0=\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

5.7 Utilice la definición de la integral definida para evaluar $\int_0^3 (2x-1)\,dx$. Utilice una aproximación al extremo derecho para generar la suma de Riemann.

Evaluación de integrales definidas

Evaluar las integrales definidas de esta manera puede ser bastante tedioso debido a la complejidad de los cálculos. Más adelante en este capítulo desarrollaremos técnicas para evaluar integrales definidas *sin* tomar límites de las sumas de Riemann. Sin embargo, por ahora podemos confiar en el hecho de que las integrales definidas representan el área bajo la curva, y podemos evaluar las integrales definidas utilizando fórmulas geométricas para calcular esa área. Hacemos esto para confirmar que las integrales definidas representan en efecto áreas, de modo que podamos discutir qué hacer en el caso de una curva de una función que cae por debajo del eje *x*.

EJEMPLO 5.8

Uso de fórmulas geométricas para calcular integrales definidas

Utilice la fórmula del área de un círculo para evaluar $\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx$.

Solución

La función describe un semicírculo con radio 3. Para hallar

$$\int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2}\,dx,$$

queremos hallar el área bajo la curva en el intervalo $[3, 6]$. La fórmula del área de un círculo es $A = \pi r^2$. El área de un semicírculo es justo la mitad del área de un círculo, o $A = \left(\frac{1}{2}\right)\pi r^2$. El área sombreada en la Figura 5.16 cubre la mitad del semicírculo, o $A = \left(\frac{1}{4}\right) \pi r^2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_3^6 \sqrt{9-(x-3)^2} &= \frac{1}{4}\pi(3)^2 \\ &= \frac{9}{4}\pi \\ &\approx 7{,}069. \end{aligned}$$

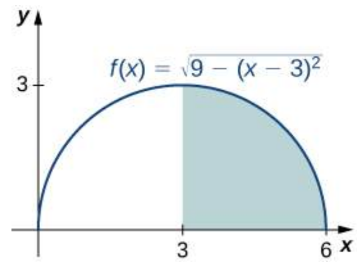


Figura 5.16 El valor de la integral de la función $f(x)$ en el intervalo $[3, 6]$ es el área de la región sombreada.

5.8 Utilice la fórmula del área de un trapecio para evaluar $\int_2^4 (2x+3)\,dx$.

El área y la integral definida

Cuando definimos la integral definida, eliminamos el requisito de que $f(x)$ sea no negativo. Pero ¿cómo interpretamos "el área bajo la curva" cuando $f(x)$ es negativo?

Área neta señalada

Volvamos a la suma de Riemann. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x) = 2 - 2x^2$ (que se muestra en la Figura 5.17) en el intervalo $[0, 2]$. Utilice $n = 8$ y elegir $\{x_i^*\}$ como punto del extremo izquierdo de cada intervalo. Construya un rectángulo en cada subintervalo de altura $f\left(x_i^*\right)$ y de anchura Δx. Cuando $f\left(x_i^*\right)$ es positivo, el producto $f\left(x_i^*\right)\Delta x$ representa el área del rectángulo, igual que antes. Cuando $f\left(x_i^*\right)$ es negativo, sin embargo, el producto $f\left(x_i^*\right)\Delta x$ representa el *negativo* del área del rectángulo. La suma de Riemann se convierte entonces en

$$\sum_{i=1}^{8} f\left(x_i^*\right)\Delta x = \left(\text{Área de los rectángulos sobre el eje } x\right) - \left(\text{Área de los rectángulos por debajo del eje } x\right)$$

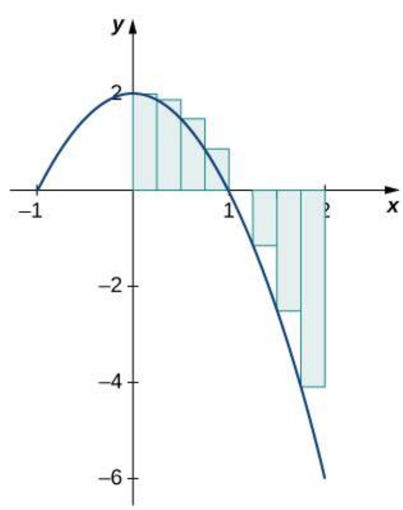


Figura 5.17 Para una función que es parcialmente negativa, la suma de Riemann es el área de los rectángulos por

encima del eje *x* menos el área de los rectángulos por debajo del eje *x*.

Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, la suma de Riemann se aproxima al área entre la curva por encima del eje *x* y el eje *x*, menos el área entre la curva por debajo del eje *x* y el eje *x*, como se muestra en la Figura 5.18. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \\ &= A_1 - A_2.\end{aligned}$$

La cantidad $A_1 - A_2$ se denomina **área neta señalada**.

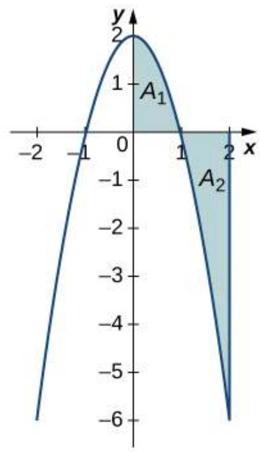


Figura 5.18 En el límite, la integral definida es igual al área A_1 menos el área A_2, o el área neta señalada.

Observe que el área neta señalada puede ser positiva, negativa o cero. Si el área sobre el eje *x* es mayor, el área neta señalada es positiva. Si el área bajo el eje *x* es mayor, el área neta señalada es negativa. Si las áreas por encima y por debajo del eje *x* son iguales, el área neta señalada es cero.

EJEMPLO 5.9

Hallar el área neta señalada

Calcule el área neta señalada entre la curva de la función $f(x) = 2x$ y el eje *x* en el intervalo $[-3, 3]$.

Solución

La función produce una línea recta que forma dos triángulos: uno de $x = -3$ al $x = 0$ y el otro de $x = 0$ hasta $x = 3$ (Figura 5.19). Utilizando la fórmula geométrica del área de un triángulo, $A = \frac{1}{2}bh$, el área del triángulo A_1, sobre el eje, es

$$A_1 = \frac{1}{2}3(6) = 9,$$

donde 3 es la base y $2(3) = 6$ es la altura. El área del triángulo A_2, por debajo del eje, es

$$A_2 = \frac{1}{2}(3)(6) = 9,$$

donde 3 es la base y 6 la altura. Así, el área neta es

$$\int_{-3}^{3} 2x\,dx = A_1 - A_2 = 9 - 9 = 0.$$

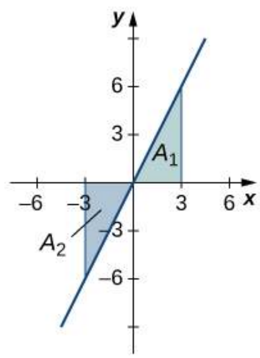
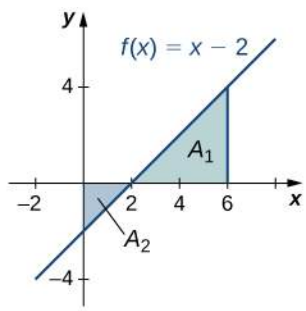


Figura 5.19 El área por encima de la curva y por debajo del eje *x* es igual al área por debajo de la curva y por encima del eje *x*.

Análisis

Si A_1 es el área por encima del eje *x* y A_2 es el área por debajo del eje *x*, entonces el área neta es $A_1 - A_2$. Como las áreas de los dos triángulos son iguales, el área neta es cero.

5.9 Halle el área neta señalada de $f(x) = x - 2$ en el intervalo $[0, 6]$, que se ilustra en la siguiente imagen.



Área total

Una aplicación de la integral definida es hallar el desplazamiento cuando se da una función de velocidad. Si los valores de $v(t)$ represente la velocidad de un objeto en función del tiempo, donde el área bajo la curva nos dice lo lejos que está el objeto de su posición original. Esta es una aplicación muy importante de la integral definida, y más adelante en el capítulo la examinamos con más detalle. Por ahora, solo vamos a ver algunos aspectos básicos para tener una idea de cómo funciona esto al estudiar las velocidades constantes.

Cuando la velocidad es una constante, el área bajo la curva es simplemente la velocidad por el tiempo. Esta idea es bastante conocida. Si un automóvil se aleja de su posición inicial en línea recta a una velocidad de 70 mph durante 2 horas, entonces se aleja 140 mi de su posición original (Figura 5.20). Utilizando la notación integral, tenemos

$$\int_0^2 70dt = 140.$$

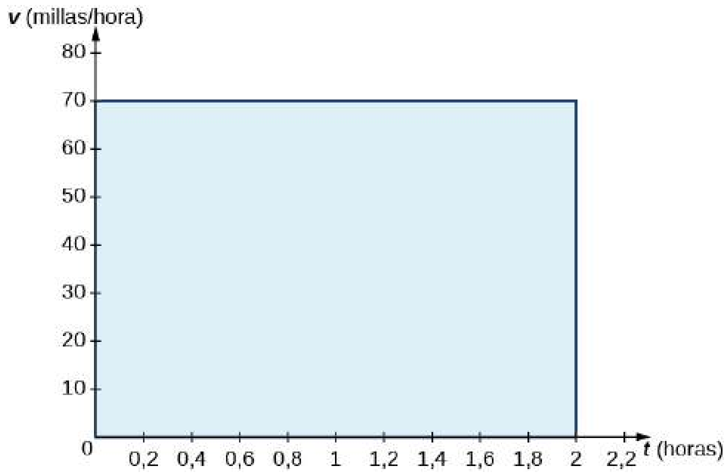


Figura 5.20 El área bajo la curva $v(t) = 75$ nos indica a qué distancia se encuentra el automóvil desde su punto de partida en un momento dado.

En el contexto del desplazamiento, el área neta señalada nos permite tener en cuenta la dirección. Si un automóvil viaja en línea recta hacia el norte a una velocidad de 60 mph durante 2 horas, se encuentra a 120 millas al norte de su posición inicial. Si el automóvil da la vuelta y viaja hacia el sur a una velocidad de 40 mph durante 3 horas, volverá a su posición inicial (Figura 5.21). De nuevo, utilizando la notación integral, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^2 60dt + \int_2^5 -40dt &= 120 - 120 \\ &= 0,\end{aligned}$$

En este caso el desplazamiento es cero.

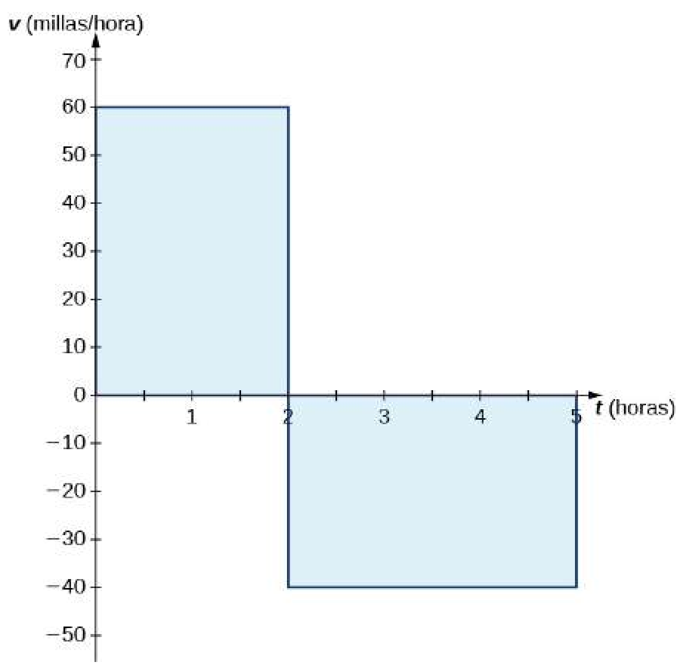


Figura 5.21 El área por encima del eje y el área por debajo del eje son iguales, por lo que el área neta señalada es cero.

Supongamos que queremos saber qué distancia recorre el automóvil en total, sin importar su dirección. En este caso, queremos conocer el área entre la curva y el eje *x*, independientemente de que esa área esté por encima o por debajo del eje. Esto se denomina el **área total**.

Gráficamente, es más fácil pensar en calcular el área total sumando las áreas por encima del eje y las áreas por debajo del eje (en vez de restar las áreas por debajo del eje, como hicimos con el área neta señalada). Para lograrlo matemáticamente, utilizamos la función de valor absoluto. Por lo tanto, la distancia total recorrida por el automóvil es

$$\int_0^2 |60|\,dt + \int_2^5 |-40|\,dt = \int_0^2 60dt + \int_2^5 40dt$$
$$= 120 + 120$$
$$= 240.$$

Integrando estas ideas formalmente, enunciamos las siguientes definiciones.

Definición

Supongamos que $f(x)$ es una función integrable definida en un intervalo $[a, b]$. Supongamos que A_1 representa el área entre $f(x)$ y el eje *x* que se encuentra *por encima* del eje y que A_2 representa el área entre $f(x)$ y el eje *x* que se encuentra *debajo* del eje. Entonces, el **área neta señalada** entre $f(x)$ y el eje *x* viene dado por

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2.$$

El **área total** entre $f(x)$ y el eje *x* viene dado por

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = A_1 + A_2.$$

EJEMPLO 5.10

Hallar el área total

Halle el área total entre $f(x) = x - 2$ y el eje *x* en el intervalo $[0, 6]$.

Solución

Calcule la intersección *x* como $(2, 0)$ (establezca $y = 0$, resuelva para *x*). Para hallar el área total, tome el área bajo el eje *x* sobre el subintervalo $[0, 2]$ y añádalo al área sobre el eje *x* en el subintervalo $[2, 6]$ (Figura 5.22).

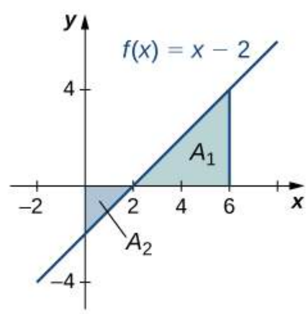


Figura 5.22 El área total entre la línea y el eje x sobre $[0, 6]$ es A_2 más A_1.

Tenemos

$$\int_0^6 |(x-2)|\,dx = A_2 + A_1.$$

Entonces, utilizando la fórmula del área de un triángulo, obtenemos

$$A_2 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}.2.2 = 2$$
$$A_1 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}.4.4 = 8.$$

El área total, entonces, es

$$A_1 + A_2 = 8 + 2 = 10.$$

5.10 Halle el área total entre la función $f(x) = 2x$ y el eje *x* en el intervalo $[-3, 3]$.

Propiedades de la integral definida

Las propiedades de las integrales indefinidas se aplican también a las integrales definidas. Las integrales definidas también tienen propiedades relacionadas con los límites de integración. Estas propiedades, junto con las reglas de integración que examinaremos más adelante en este capítulo, nos ayudan a manipular expresiones para evaluar integrales definidas.

Regla: propiedades de la integral definida

1. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{5.9}$$

   Si los límites de integración son los mismos, la integral es solo una línea y no contiene área.

2. $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \tag{5.10}$$

   Si los límites se invierten, se coloca un signo negativo delante de la integral.

3. $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.11}$$

   La integral de una suma es la suma de las integrales.

4. $$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \tag{5.12}$$

   La integral de una diferencia es la diferencia de las integrales.

5. $$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x) \tag{5.13}$$

   para la constante *c*. La integral del producto de una constante y una función es igual a la constante multiplicada por la integral de la función.

6. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{5.14}$$

   Aunque esta fórmula se aplica normalmente cuando *c* está entre *a* y *b*, la fórmula es válida para todos los valores de *a*, *b* y *c*, siempre que $f(x)$ sea integrable en el intervalo mayor.

EJEMPLO 5.11

Usar las propiedades de la integral definida

Utilice las propiedades de la integral definida para expresar la integral definida de $f(x) = -3x^3 + 2x + 2$ en el intervalo $[-2, 1]$ como la suma de tres integrales definidas.

Solución

Utilizando la notación integral, tenemos $\int_{-2}^{1} \left(-3x^3 + 2x + 2\right) dx$. Aplicamos las propiedades 3. y 5. para obtener

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1}\left(-3x^3+2x+2\right)dx &= \int_{-2}^{1}-3x^3dx+\int_{-2}^{1}2xdx+\int_{-2}^{1}2dx\\ &= -3\int_{-2}^{1}x^3dx+2\int_{-2}^{1}xdx+\int_{-2}^{1}2dx.\end{aligned}$$

5.11 Utilice las propiedades de la integral definida para expresar la integral definida de $f(x)=6x^3-4x^2+2x-3$ en el intervalo $[1,3]$ como la suma de cuatro integrales definidas.

EJEMPLO 5.12

Usar las propiedades de la integral definida

Si se sabe que $\int_0^8 f(x)\,dx=10$ y $\int_0^5 f(x)\,dx=5$, halle el valor de $\int_5^8 f(x)\,dx$.

Solución

Por la propiedad 6.,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^8 f(x)\,dx &= \int_0^5 f(x)\,dx+\int_5^8 f(x)\,dx\\ 10 &= 5+\int_5^8 f(x)\,dx\\ 5 &= \int_5^8 f(x)\,dx.\end{aligned}$$

5.12 Si se sabe que $\int_1^5 f(x)\,dx=-3$ y $\int_2^5 f(x)\,dx=4$, halle el valor de $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Propiedades de comparación de las integrales

A veces, una imagen puede decirnos más sobre una función que los resultados de los cálculos. La comparación de las funciones por sus gráficos y sus expresiones algebraicas puede dar a menudo un nuevo enfoque del proceso de integración. Intuitivamente, podríamos decir que si una función $f(x)$ está por encima de otra función $g(x)$, entonces el área entre $f(x)$ y el eje x es mayor que el área entre $g(x)$ y el eje x. Esto es cierto según el intervalo en el que se hace la comparación. Las propiedades de las integrales definidas son válidas si $a<b$, $a=b$, o $a>b$. Las siguientes propiedades, sin embargo, solo se refieren al caso $a\le b$, y se utilizan cuando queremos comparar los tamaños de las integrales.

Teorema 5.2

Teorema de comparación

i. Si los valores de $f(x)\ge 0$ por $a\le x\le b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge 0.$$

ii. Si $f(x)\ge g(x)$ para $a\le x\le b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx.$$

iii. Si m y M son constantes tales que $m \leq f(x) \leq M$ por $a \leq x \leq b$, entonces

$$m(b–a) \leq \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\leq M(b–a).$$

EJEMPLO 5.13

Comparación de dos funciones en un intervalo dado

Compare $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ y $g(x) = \sqrt{1 + x}$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución

Es necesario graficar estas funciones para entender cómo se comparan en el intervalo $[0, 1]$. Inicialmente, cuando se grafica en una calculadora gráfica, $f(x)$ parece estar por encima de $g(x)$ en todas partes. Sin embargo, en el intervalo $[0, 1]$, los gráficos parecen estar superpuestos. Tenemos que acercarnos para ver que, en el intervalo $[0, 1]$, $g(x)$ está por encima de $f(x)$. Las dos funciones se intersecan en $x = 0$ y $x = 1$ (Figura 5.23).

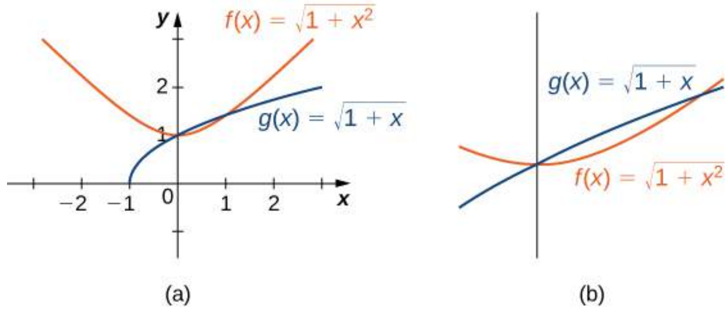


Figura 5.23 (a) La función $f(x)$ aparece sobre la función $g(x)$ excepto en el intervalo $[0, 1]$ (b) La visualización del mismo gráfico con una mayor ampliación lo muestra más claramente.

Podemos ver en el gráfico que en el intervalo $[0, 1]$, $g(x) \geq f(x)$. Comparación de las integrales en el intervalo especificado $[0, 1]$, también vemos que $\int_0^1 g(x)\,dx \geq \int_0^1 f(x)\,dx$ (Figura 5.24). La zona delgada y sombreada en rojo muestra cuánta diferencia hay entre estas dos integrales en el intervalo $[0, 1]$.

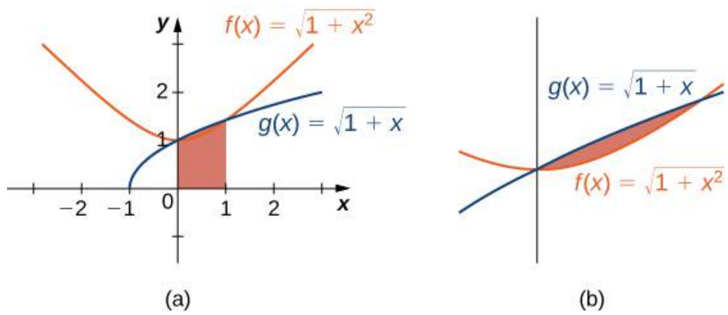


Figura 5.24 (a) El gráfico muestra que en el intervalo $[0, 1]$, $g(x) \geq f(x)$, donde la igualdad se mantiene solo en los puntos extremos del intervalo. (b) La visualización del mismo gráfico con una mayor ampliación muestra esto más claramente.

Valor promedio de una función

A menudo necesitamos hallar el promedio de un conjunto de números, como la nota promedio de un examen. Supongamos que obtuvo las siguientes puntuaciones en su clase de álgebra: 89, 90, 56, 78, 100 y 69. La nota del semestre es el promedio de los resultados de los exámenes y quiere saber qué nota obtendrá. Podemos hallar el promedio sumando todas las puntuaciones y dividiendo por el número de puntuaciones. En este caso, hay seis resultados de pruebas. Por lo tanto,

$$\frac{89+90+56+78+100+69}{6}=\frac{482}{6}\approx 80{,}33.$$

Por lo tanto, la nota promedio del examen es de aproximadamente 80,33, lo que se traduce en una calificación notable en la mayoría de las escuelas.

Supongamos, sin embargo, que tenemos una función $v(t)$ que nos da la velocidad de un objeto en cualquier momento *t*, y queremos hallar la rapidez media del objeto. La función $v(t)$ adopta un número infinito de valores, por lo que no podemos utilizar el proceso que acabamos de describir. Por fortuna, podemos utilizar una integral definida para hallar el valor promedio de una función como esta.

Supongamos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que $[a, b]$ se divide en *n* subintervalos de anchura $\Delta x=(b-a)/n$. Elija un representante x_i^* en cada subintervalo y calcule $f\left(x_i^*\right)$ por $i=1,2,\ldots,n$. En otras palabras, considere cada $f\left(x_i^*\right)$ como un muestreo de la función en cada subintervalo. El valor promedio de la función puede entonces aproximarse como

$$\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{n},$$

que es básicamente la misma expresión utilizada para calcular la media de los valores discretos.

Pero sabemos que $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, por lo que $n=\frac{b-a}{\Delta x}$, y obtenemos

$$\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{n}=\frac{f\left(x_1^*\right)+f\left(x_2^*\right)+\cdots+f\left(x_n^*\right)}{\frac{(b-a)}{\Delta x}}.$$

Siguiendo con el álgebra, el numerador es una suma que se representa como $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)$, y estamos dividiendo por una fracción. Para dividir por una fracción, invierta el denominador y multiplique. Así, un valor aproximado del valor promedio de la función viene dado por

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)}{\frac{(b-a)}{\Delta x}} &= \left(\frac{\Delta x}{b-a}\right)\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\\ &= \left(\frac{1}{b-a}\right)\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x.\end{aligned}$$

Se trata de una suma de Riemann. Luego, para obtener el valor promedio *exacto*, se toma el límite a medida que *n* llega al infinito. Así, el valor promedio de una función viene dado por

$$\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Definición

Supongamos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces, el **valor promedio de la función** $f(x)$ (o $\boldsymbol{f_{\text{ave}}}$) en $[a, b]$ viene dada por

$$f_{\text{ave}}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 5.14

Hallar el valor promedio de una función lineal

Calcule el valor promedio de $f(x)=x+1$ en el intervalo $[0, 5]$.

Solución

En primer lugar, grafique la función en el intervalo indicado, como se muestra en la Figura 5.25.

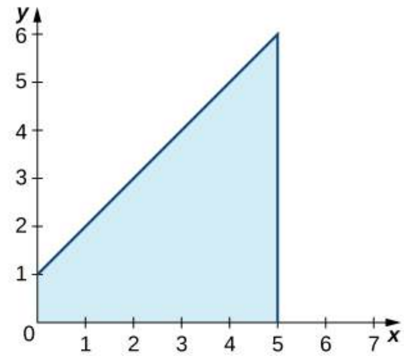


Figura 5.25 El gráfico muestra el área bajo la función $f(x) = x + 1$ en $[0, 5]$.

La región es un trapecio recostado sobre su lado, por lo que podemos utilizar la fórmula del área de un trapecio $A = \frac{1}{2}h(a + b)$, donde *h* representa la altura, y *a* y *b* representan los dos lados paralelos. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^5 x + 1dx &= \tfrac{1}{2}h(a + b) \\ &= \tfrac{1}{2}.5.(1 + 6) \\ &= \tfrac{35}{2}. \end{aligned}$$

Así, el valor promedio de la función es

$$\frac{1}{5 - 0}\int_0^5 x + 1dx = \frac{1}{5}.\frac{35}{2} = \frac{7}{2}.$$

5.13 Calcule el valor promedio de $f(x) = 6 - 2x$ en el intervalo $[0, 3]$.

SECCIÓN 5.2 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, expresa los límites como integrales.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^*)\,\Delta x$ en $[1, 3]$

61. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(5(x_i^*)^2 - 3(x_i^*)^3\right)\Delta x$ en $[0, 2]$

62. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}^2(2\pi x_i^*)\,\Delta x$ en $[0, 1]$

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \cos^2(2\pi x_i^*)\,\Delta x$ en $[0, 1]$

En los siguientes ejercicios, dados L_n o R_n como se indica, exprese sus límites dado que $n \to \infty$ como integrales definidas, identificando los intervalos correctos.

64. $L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i - 1}{n}$

65. $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}$

66. $L_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(1 + 2\frac{i - 1}{n}\right)$ grandes.

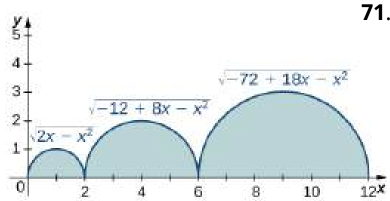
67. $R_n \text{ n} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(3 + 3\frac{i}{n}\right)$
grandes.

68. $L_n = \frac{2\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\frac{i-1}{n}\cos\left(2\pi\frac{i-1}{n}\right)$
grandes.

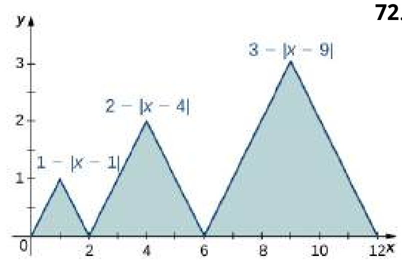
69. $R_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{i}{n}\right)\log\left(\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2\right)$
grandes.

En los siguientes ejercicios, evalúe las integrales de las funciones graficadas utilizando las fórmulas de áreas de triángulos y círculos, y restando las áreas bajo el eje x.

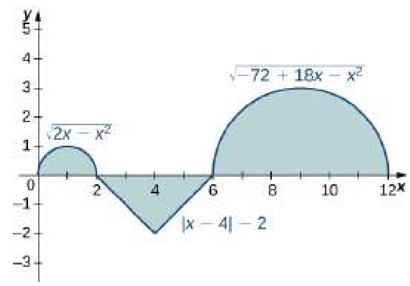
70.



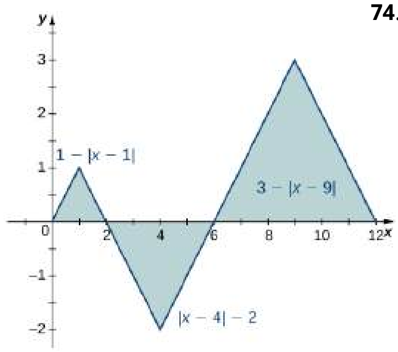
71.



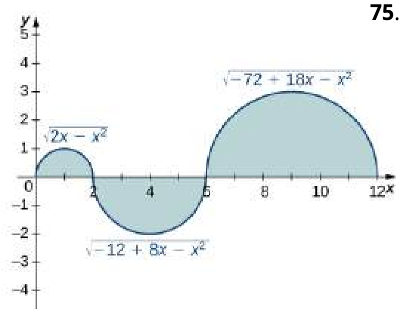
72.



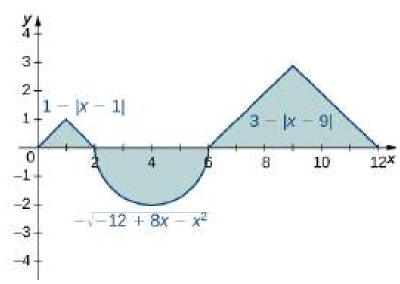
73.



74.



75.



En los siguientes ejercicios, evalúe la integral utilizando las fórmulas de área.

76. $\int_0^3 (3 - x)\,dx$

77. $\int_2^3 (3 - x)\,dx$

78. $\int_{-3}^3 (3 - |x|)\,dx$

79. $\int_0^6 (3 - |x - 3|)\,dx$

80. $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

81. $\int_1^5 \sqrt{4 - (x - 3)^2}\,dx$

82. $\int_0^{12} \sqrt{36 - (x - 6)^2}\,dx$

83. $\int_{-2}^3 (3 - |x|)\,dx$

En los siguientes ejercicios, utilice los promedios de los valores en los extremos izquierdo (L) y derecho (R) para calcular las integrales de las funciones lineales a trozos con gráficos que pasan por la lista de puntos dada en los intervalos indicados.

84. $\{(0,0), (2,1), (4,3), (5,0), (6,0), (8,3)\}$
en $[0, 8]$

85. $\{(0,2), (1,0), (3,5), (5,5), (6,2), (8,0)\}$
en $[0, 8]$

86. $\{(-4,-4), (-2,0), (0,-2), (3,3), (4,3)\}$ en $[-4, 4]$

87. $\{(-4,0), (-2,2), (0,0), (1,2), (3,2), (4,0)\}$ en $[-4, 4]$

Supongamos que $\int_0^4 f(x)\,dx = 5$ y $\int_0^2 f(x)\,dx = -3$, y $\int_0^4 g(x)\,dx = -1$ y $\int_0^2 g(x)\,dx = 2$. En los siguientes ejercicios, calcule las integrales.

88. $\int_0^4 (f(x) + g(x))\,dx$

89. $\int_2^4 (f(x) + g(x))\,dx$

90. $\int_0^2 (f(x) - g(x))\,dx$

91. $\int_2^4 (f(x) - g(x))\,dx$

92. $\int_0^2 (3f(x) - 4g(x))\,dx$

93. $\int_2^4 (4f(x) - 3g(x))\,dx$

En los siguientes ejercicios, utilice la identidad $\int_{-A}^{A} f(x)\,dx = \int_{-A}^{0} f(x)\,dx + \int_0^A f(x)\,dx$ para calcular las integrales.

94. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}\,dt$
(Pista: $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t)$).
grandes.

95. $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \frac{t}{1+\cos t}\,dt$

En los siguientes ejercicios, halle el área neta señalada entre $f(x)$ y el eje x.

96. $\int_1^3 (2 - x)\,dx$ (*Pista:* Mire el gráfico de *f*).

97. $\int_2^4 (x-3)^3\,dx$ (*Pista:* Mire el gráfico de *f*.)

En los siguientes ejercicios, dado que $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, y $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$, calcular las integrales.

98. $\int_0^1 \left(1 + x + x^2 + x^3\right) dx$

99. $\int_0^1 \left(1 - x + x^2 - x^3\right) dx$

100. $\int_0^1 (1-x)^2\,dx$

101. $\int_0^1 (1-2x)^3\,dx$

102. $\int_0^1 \left(6x - \frac{4}{3}x^2\right) dx$

103. $\int_0^1 \left(7 - 5x^3\right) dx$

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema de comparación.

104. Demuestre que $\int_0^3 \left(x^2 - 6x + 9\right) dx \geq 0.$

105. Demuestre que $\int_{-2}^{3} (x-3)(x+2)\,dx \leq 0.$

106. Demuestre que $\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx.$

107. Demuestre que $\int_1^2 \sqrt{1+x}\,dx \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,dx.$

108. Demuestre que $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\,dt \geq \frac{\pi}{4}.$
(Pista: $\operatorname{sen} t \geq \frac{2t}{\pi}$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

109. Demuestre que $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t\,dt \geq \pi\sqrt{2}/4.$

En los siguientes ejercicios, halle el valor promedio f_{ave} de f entre a y b, y halle un punto c, donde $f(c) = f_{\text{ave}}$.

110. $f(x) = x^2, a = -1, b = 1$

111. $f(x) = x^5, a = -1, b = 1$

112. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, a = 0, b = 2$

113. $f(x) = (3 - |x|), a = -3, b = 3$

114. $f(x) = \operatorname{sen} x, a = 0, b = 2\pi$

115. $f(x) = \cos x, a = 0, b = 2\pi$

En los siguientes ejercicios, aproxime el valor promedio utilizando las sumas de Riemann L_{100} and R_{100}. ¿Cómo se compara su respuesta con la respuesta exacta dada?

116. **[T]** $y = \ln(x)$ en el intervalo $[1, 4]$; la solución exacta es $\frac{\ln(256)}{3} - 1$.

117. **[T]** $y = e^{x/2}$ en el intervalo $[0, 1]$; la solución exacta es $2\left(\sqrt{e} - 1\right)$.

118. **[T]** $y = \tan x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; la solución exacta es $\frac{2\ln(2)}{\pi}$.

119. **[T]** $y = \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ en el intervalo $[-1, 1]$; la solución exacta es $\frac{\pi}{6}$.

En los siguientes ejercicios, calcule el valor promedio utilizando las sumas de Riemann izquierdas L_N para $N = 1, 10, 100$. ¿Cómo se compara la exactitud con el valor exacto dado?

120. **[T]** $y = x^2 - 4$ en el intervalo $[0, 2]$; la solución exacta es $-\frac{8}{3}$.

121. **[T]** $y = xe^{x^2}$ en el intervalo $[0, 2]$; la solución exacta es $\frac{1}{4}\left(e^4 - 1\right)$.

122. **[T]** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en el intervalo $[0, 4]$; la solución exacta es $\frac{15}{64\ln(2)}$.

123. **[T]** $y = x \operatorname{sen}\left(x^2\right)$ en el intervalo $[-\pi, 0]$; la solución exacta es $\frac{\cos\left(\pi^2\right) - 1}{2\pi}$.

124. Supongamos que $A = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt$ y $B = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt$. Demuestre que $A + B = 2\pi$ y $A = B$.

125. Supongamos que $A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 t\,dt = \pi$ y $B = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan^2 t\,dt$. Demuestre que $A - B = \frac{\pi}{2}$.

126. Demuestre que el valor promedio de $\operatorname{sen}^2 t$ en $[0, 2\pi]$ es igual a 1/2. Sin hacer más cálculos, determine si el valor promedio de $\operatorname{sen}^2 t$ en $[0, \pi]$ también es igual a 1/2.

127. Demuestre que el valor promedio de $\cos^2 t$ en $[0, 2\pi]$ es igual a 1/2. Sin hacer más cálculos, determine si el valor promedio de $\cos^2(t)$ en $[0, \pi]$ también es igual a 1/2.

128. Explique por qué los gráficos de una función cuadrática (parábola) $p(x)$ y una función lineal $\ell(x)$ pueden intersecarse como máximo en dos puntos. Supongamos que $p(a) = \ell(a)$ y $p(b) = \ell(b)$, y que $\int_a^b p(t)\,dt > \int_a^b \ell(t)\,dt$. Explique por qué $\int_c^d p(t) > \int_c^d \ell(t)\,dt$ siempre que $a \le c < d \le b$.

129. Supongamos que la parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$ se abre hacia abajo $(a < 0)$ y tiene un vértice de $y = \frac{-b}{2a} > 0$. ¿Para qué intervalo $[A, B]$ es $\int_A^B \left(ax^2 + bx + c\right) dx$ lo más grande posible?

130. Supongamos que $[a, b]$ se puede subdividir en subintervalos $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_N = b$ de manera que $f \geq 0$ en $\left[a_{i-1}, a_i\right]$ o $f \leq 0$ en $\left[a_{i-1}, a_i\right]$. Establezca $A_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,dt$.

a. Explique por qué $\int_a^b f(t)\,dt = A_1 + A_2 + \cdots + A_N$.

b. Luego, explique por qué $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

131. Supongamos que f y g son funciones continuas tales que $\int_c^d f(t)\,dt \leq \int_c^d g(t)\,dt$ para cada subintervalo $[c, d]$ de $[a, b]$. Explique por qué $f(x) \leq g(x)$ para todos los valores de *x*.

132. Supongamos que el valor promedio de *f* sobre $[a, b]$ es 1 y el valor promedio de *f* sobre $[b, c]$ es 1 donde $a < c < b$. Demuestre que el valor promedio de *f* sobre $[a, c]$ también es 1.

133. Supongamos que $[a, b]$ se puede dividir. Al tomar $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ tal que el valor promedio de *f* en cada subintervalo $\left[a_{i-1}, a_i\right] = 1$ es igual a 1 por cada $i = 1, \ldots, N$. Explique por qué el valor promedio de *f* sobre $[a, b]$ también es igual a 1.

134. Supongamos que para cada *i* tal que $1 \leq i \leq N$ se tiene $\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt = i$. Demuestre que $\int_0^N f(t)\,dt = \frac{N(N+1)}{2}$.

135. Supongamos que para cada *i* tal que $1 \leq i \leq N$ se tiene $\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt = i^2$. Demuestre que $\int_0^N f(t)\,dt = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

136. **[T]** Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha L_{10} y R_{10} y su promedio $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ por $f(t) = t^2$ en $[0, 1]$. Dado que $\int_0^1 t^2\,dt = 0{,}3\overline{3}$, ¿hasta cuántos decimales es $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ precisa?

137. **[T]** Calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha, L_{10} y R_{10}, y su promedio $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ por $f(t) = \left(4 - t^2\right)$ en $[1, 2]$. Dado que $\int_1^2 \left(4 - t^2\right) dt = 1{,}6\overline{6}$, ¿hasta cuántos decimales es $\frac{L_{10}+R_{10}}{2}$ precisa?

138. Si los valores de $\int_1^5 \sqrt{1 + t^4}\,dt = 41{,}7133...$, ¿qué es $\int_1^5 \sqrt{1 + u^4}\,du$?

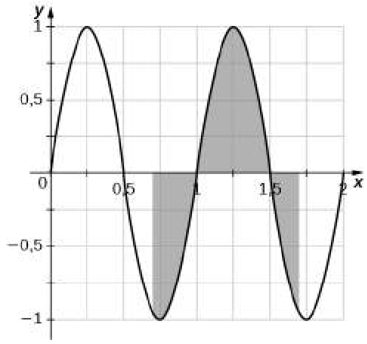
139. Estime $\int_0^1 t\,dt$ utilizando las sumas de los extremos izquierdo y derecho, cada una con un solo rectángulo. ¿Cómo se compara el promedio de estas sumas de los extremos izquierdo y derecho con el valor real $\int_0^1 t\,dt$?

140. Estime $\int_0^1 t\,dt$ por comparación con el área de un único rectángulo con altura igual al valor de *t* en el punto medio $t = \frac{1}{2}$. ¿Cómo se compara esta estimación del punto medio con el valor real $\int_0^1 t\,dt$?

141. A partir del gráfico de $\text{sen}\,(2\pi x)$ que se muestra:

a. Explique por qué $\displaystyle\int_0^1 \text{sen}\,(2\pi t)\,dt = 0.$

b. Explique por qué, en general, $\displaystyle\int_a^{a+1} \text{sen}\,(2\pi t)\,dt = 0$ para cualquier valor de *a*.



142. Si *f* es 1-periódica $(f\,(t+1) = f\,(t))$, impar, e integrable sobre $[0, 1]$, ¿es siempre cierto que $\displaystyle\int_0^1 f\,(t)\,dt = 0?$

143. Si *f* es 1-periódica y $\displaystyle\int_0^1 f\,(t)\,dt = A$, ¿es necesariamente cierto que $\displaystyle\int_a^{1+a} f\,(t)\,dt = A$ para todos las *A*?

5.3 El teorema fundamental del cálculo

Objetivos de aprendizaje

5.3.1 Describir el significado del teorema del valor medio para integrales.
5.3.2 Indicar el significado del teorema fundamental del cálculo, parte 1.
5.3.3 Utilizar el teorema fundamental del cálculo, parte 1, para evaluar derivadas de integrales.
5.3.4 Indicar el significado del teorema fundamental del cálculo, parte 2.
5.3.5 Utilizar el teorema fundamental del cálculo, parte 2, para evaluar integrales definidas.
5.3.6 Explicar la relación entre diferenciación e integración.

En los dos apartados anteriores vimos la integral definida y su relación con el área bajo la curva de una función. Desafortunadamente, hasta ahora las únicas herramientas de que disponemos para calcular el valor de una integral definida son las fórmulas geométricas de área y los límites de las sumas de Riemann, y ambas aproximaciones son extremadamente engorrosas. En esta sección veremos algunas técnicas más potentes y útiles para evaluar integrales definidas.

Estas nuevas técnicas se basan en la relación entre diferenciación e integración. Esta relación fue descubierta y explorada tanto por Sir Isaac Newton como por Gottfried Wilhelm Leibniz (entre otros) a finales de 1600 y principios de 1700, y está codificada en lo que ahora llamamos el **teorema fundamental del cálculo**, que tiene dos partes que examinamos en esta sección. Su propio nombre indica lo fundamental que es este teorema para todo el desarrollo del cálculo.

MEDIOS

Las aportaciones de Isaac Newtona las matemáticas y la física cambiaron nuestra forma de ver el mundo. Las relaciones que descubrió, codificadas como las leyes de Newton y la ley de la gravitación universal, se siguen enseñando como material fundamental en la física actual, y su cálculo ha dado lugar a ámbitos completos dentro de las matemáticas. Para saber más, lea una breve biografía (http://www.openstax.org/l/20_newtonbio) de Newton con videos multimedia.

Sin embargo, antes de llegar a este teorema crucial, vamos a examinar otro teorema importante, el teorema del valor medio para integrales, que es necesario para demostrar el teorema fundamental del cálculo.

Teorema del valor medio para integrales

El **teorema del valor medio para integrales** afirma que una función continua en un intervalo cerrado toma su valor medio en algún punto de ese intervalo. El teorema garantiza que si $f\,(x)$ es continua, existe un punto *c* en un intervalo

$[a, b]$ tal que el valor de la función en *c* es igual al valor medio de $f(x)$ en $[a, b]$. Enunciamos este teorema matemáticamente con la ayuda de la fórmula del valor medio de una función que presentamos al final del apartado anterior.

Teorema 5.3

Teorema del valor medio para integrales

Si los valores de $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces hay al menos un punto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{5.15}$$

Esta fórmula también puede expresarse como

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Prueba

Dado que $f(x)$ es continua en $[a, b]$, por el teorema del valor extremo (consulte Máximos y mínimos), asume valores mínimos y máximos —*m* y *M*, respectivamente— en $[a, b]$. Entonces, para toda *x* en $[a, b]$, tenemos $m \le f(x) \le M$. Por lo tanto, por el teorema de comparación (consulte La integral definida), tenemos

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Al dividir entre $b-a$ nos da

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Dado que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ es un número entre *m* y *M*, y ya que $f(x)$ es continua y asume los valores *m* y *M* en $[a, b]$, por el teorema del valor intermedio (consulte Continuidad), existe un número *c* en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

y la prueba está completa.

□

EJEMPLO 5.15

Encontrar el valor medio de una función

Calcule el valor promedio de la función $f(x) = 8 - 2x$ en el intervalo $[0, 4]$ y halle *c* de modo que $f(c)$ es igual al valor promedio de la función sobre $[0, 4]$.

Solución

La fórmula indica el valor medio de $f(x)$ está dada por

$$\frac{1}{4-0}\int_0^4 (8-2x)\,dx.$$

Podemos ver en la Figura 5.26 que la función representa una línea recta y forma un triángulo rectángulo delimitado por los ejes *x* y *y*. El área del triángulo es $A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$. Tenemos

$$A = \frac{1}{2}(4)(8) = 16.$$

El valor medio se obtiene multiplicando el área por $1/(4-0)$. Así, el valor medio de la función es

$$\frac{1}{4}(16) = 4.$$

Establezca el valor medio igual a $f(c)$ y resuelva para *c*.

$$\begin{aligned} 8 - 2c &= 4 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

A $c = 2, f(2) = 4.$

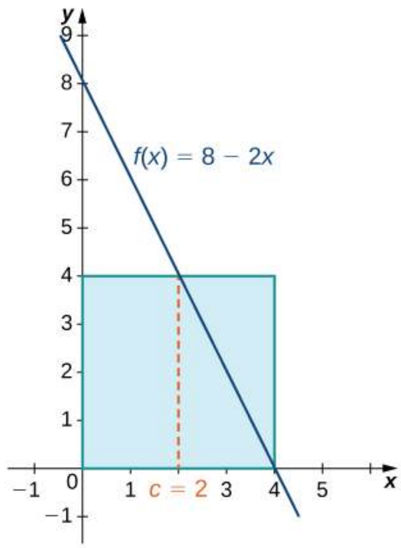


Figura 5.26 Por el teorema del valor medio, la función continua $f(x)$ toma su valor medio en *c* al menos una vez en un intervalo cerrado.

5.14 Calcule el valor promedio de la función $f(x) = \frac{x}{2}$ en el intervalo $[0, 6]$ y halle *c* de modo que $f(c)$ es igual al valor promedio de la función sobre $[0, 6]$.

EJEMPLO 5.16

Cómo encontrar el punto en el que una función toma su valor medio

Dados $\int_0^3 x^2 dx = 9$, halle *c* de modo que $f(c)$ es igual al valor promedio de $f(x) = x^2$ en $[0, 3]$.

Solución

Buscamos el valor de *c* tal que

$$f(c) = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}(9) = 3.$$

Sustitución de $f(c)$ con c^2, tenemos

$$\begin{aligned} c^2 &= 3 \\ c &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dado que $-\sqrt{3}$ está fuera del intervalo, toma solo el valor positivo. Así, $c = \sqrt{3}$ (Figura 5.27).

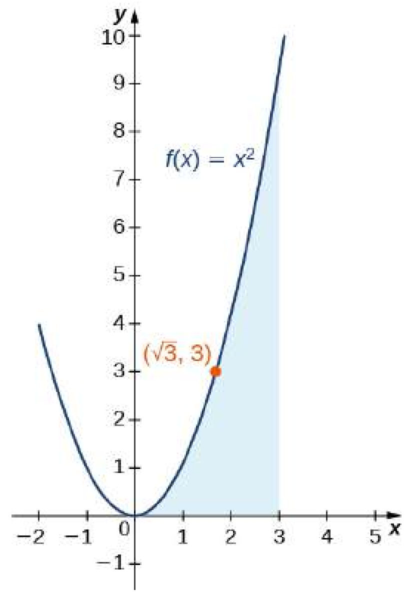


Figura 5.27 En el intervalo $[0, 3]$, la función $f(x) = x^2$ adquiere su valor medio en $c = \sqrt{3}$.

5.15 Dados $\int_0^3 \left(2x^2 - 1\right) dx = 15$, halle *c* de modo que $f(c)$ es igual al valor promedio de $f(x) = 2x^2 - 1$ en $[0, 3]$.

Teorema fundamental del cálculo, parte 1: Integrales y antiderivadas

Como se dijo anteriormente, el teorema fundamental del cálculo es un teorema extremadamente poderoso que establece la relación entre la diferenciación y la integración, y nos da una manera de evaluar integrales definidas sin usar sumas de Riemann o calcular áreas. El teorema consta de dos partes, la primera de las cuales, el **teorema fundamental del cálculo, parte 1**, se enuncia aquí. La Parte 1 establece la relación entre diferenciación e integración.

Teorema 5.4

Teorema fundamental del cálculo, parte 1

Si los valores de $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, y la función $F(x)$ se define por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \tag{5.16}$$

entonces $F'(x) = f(x)$ en $[a, b]$.

Antes de profundizar en la prueba, vale la pena mencionar un par de sutilezas. En primer lugar, un comentario sobre la notación. Observe que hemos definido una función, $F(x)$, como la integral definida de otra función, $f(t)$, desde el punto *a* hasta el punto *x*. A primera vista es confuso, porque hemos dicho varias veces que una integral definida es un número, y aquí parece que es una función. La clave aquí es darse cuenta que para cualquier valor particular de *x*, la integral definida es un número. Así que la función $F(x)$ responde con un número (el valor de la integral definida) para cada valor de *x*.

En segundo lugar, merece la pena comentar algunas de las implicaciones clave de este teorema. Por algo se llama teorema *fundamental* del cálculo. No solo establece una relación entre integración y diferenciación, sino que también garantiza que cualquier función integrable tiene una antiderivada. En concreto, garantiza que cualquier función continua tiene una antiderivada.

Prueba

Al aplicar la definición de la derivada, tenemos

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt + \int_x^{a} f(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Si observamos atentamente esta última expresión, vemos $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ es solo el valor medio de la función $f(x)$ en el intervalo $[x, x+h]$. Por lo tanto, por el Teorema del valor medio para integrales, hay algún número *c* en $[x, x+h]$ tal que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(c).$$

Además, como *c* está entre *x* y *x* + *h*, *c* se aproxima a *x* a medida que *h* se acerca a cero. Además, como $f(x)$ es continua, tenemos $\lim_{h\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$. Uniendo todas estas piezas, tenemos

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,dx \\
&= \lim_{h\to 0} f(c) \\
&= f(x),
\end{aligned}$$

y la prueba está completa.

□

EJEMPLO 5.17

Halle una derivada con el teorema fundamental del cálculo

Utilice el Teorema fundamental del cálculo, parte 1 para encontrar la derivada de

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt.$$

Solución

Según el teorema fundamental del cálculo, la derivada viene dada por

$$g'(x) = \frac{1}{x^3+1}.$$

5.16 Utilice el teorema fundamental del cálculo, parte 1 para encontrar la derivada de $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2+4}\,dx$.

EJEMPLO 5.18

Uso del teorema fundamental y la regla de la cadena para calcular derivadas

Supongamos que $F(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \operatorname{sen} t\, dt$. Calcule $F'(x)$.

Solución

Suponiendo que $u(x) = \sqrt{x}$, tenemos $F(x) = \int_1^{u(x)} \operatorname{sen} t\, dt$. Así, por el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \operatorname{sen}(u(x)) \tfrac{du}{dx} \\ &= \operatorname{sen}(u(x)) \cdot \left(\tfrac{1}{2} x^{-1/2}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

5.17 Supongamos que $F(x) = \int_1^{x^3} \cos t\, dt$. Calcule $F'(x)$.

EJEMPLO 5.19

Uso del teorema fundamental del cálculo con los límites de integración de dos variables

Supongamos que $F(x) = \int_x^{2x} t^3\, dt$. Calcule $F'(x)$.

Solución

Tenemos $F(x) = \int_x^{2x} t^3\, dt$. Ambos límites de integración son variables, por lo que necesitamos dividir esto en dos integrales. Obtenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} t^3\, dt \\ &= \int_x^0 t^3\, dt + \int_0^{2x} t^3\, dt \\ &= -\int_0^x t^3\, dt + \int_0^{2x} t^3\, dt. \end{aligned}$$

Al diferenciar el primer término, obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^3\, dt\right] = -x^3.$$

A diferenciar el segundo término, primero suponemos que $u(x) = 2x$. Entonces,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{2x} t^3\, dt\right] &= \tfrac{d}{dx}\left[\int_0^{u(x)} t^3\, dt\right] \\ &= (u(x))^3 \tfrac{du}{dx} \\ &= (2x)^3 \cdot 2 \\ &= 16x^3. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}\left[-\int_0^x t^3\,dt\right] + \frac{d}{dx}\left[\int_0^{2x} t^3\,dt\right] \\ &= -x^3 + 16x^3 \\ &= 15x^3. \end{aligned}$$

5.18 Supongamos que $F(x) = \int_x^{x^2} \cos t\,dt$. Calcule $F'(x)$.

Teorema fundamental del cálculo, parte 2: El teorema de evaluación

El teorema fundamental del cálculo, parte 2, es quizás el teorema más importante del cálculo. Tras los incansables esfuerzos de los matemáticos durante aproximadamente 500 años, surgieron nuevas técnicas que proporcionaron a los científicos las herramientas necesarias para explicar muchos fenómenos. Gracias al cálculo, los astrónomos al fin pudieron determinar las distancias en el espacio y trazar las órbitas planetarias. Los problemas financieros cotidianos, como el cálculo de los costos marginales o la predicción de los beneficios totales, podían ahora tratarse con sencillez y precisión. Los ingenieros podían calcular la resistencia a la flexión de los materiales o el movimiento tridimensional de los objetos. Nuestra visión del mundo cambió para siempre con el cálculo.

Después de encontrar las áreas aproximadas sumando las áreas de rectángulos *n*, la aplicación de este teorema es sencilla por comparación. Casi parece demasiado sencillo que el área de toda una región curva pueda calcularse simplemente evaluando una antiderivada en el primer y último punto final de un intervalo.

Teorema 5.5

El teorema fundamental del cálculo, parte 2

Si *f* es continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{5.17}$$

A menudo vemos la notación $F(x)\big|_a^b$ para denotar la expresión $F(b) - F(a)$. Utilizamos esta barra vertical y los límites *a* y *b* asociados para indicar que debemos evaluar la función $F(x)$ en el límite superior (en este caso, *b*), y restar el valor de la función $F(x)$ evaluado en el límite inferior (en este caso, *a*).

El **teorema fundamental del cálculo, parte 2** (también conocido como el **teorema de evaluación**) establece que si podemos encontrar una antiderivada para el integrando, entonces podemos evaluar la integral definida evaluando la antiderivada en los puntos extremos del intervalo y restando.

Prueba

Supongamos que $P = \{x_i\}, i = 0, 1,\ldots, n$ es una partición regular de $[a, b]$. Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \ldots + [F(x_1) - F(x_0)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[F(x_i) - F\left(x_{i-1}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ahora, sabemos que *F* es una antiderivada de *f* en $[a, b]$, así que mediante el teorema del valor medio (consulte el teorema del valor medio) para $i = 0, 1,\ldots, n$ podemos encontrar c_i en $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ tal que

$$F(x_i) - F\left(x_{i-1}\right) = F'(c_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) = f(c_i)\,\Delta x.$$

Entonces, sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x.$$

Tomando el límite de ambos lados cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 5.20

Evaluación de una integral con el teorema fundamental del cálculo

Utilice el El teorema fundamental del cálculo, parte 2 para evaluar

$$\int_{-2}^{2} \left(t^2 - 4\right) dt.$$

Solución

Recordemos la regla de la potencia para las antiderivadas:

$$\text{Si } y = x^n,\ \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Utilice esta regla para encontrar la antiderivada de la función y luego aplique el teorema. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \left(t^2 - 4\right) dt &= \tfrac{t^3}{3} - 4t\Big|_{-2}^{2} \\ &= \left[\tfrac{(2)^3}{3} - 4(2)\right] - \left[\tfrac{(-2)^3}{3} - 4(-2)\right] \\ &= \left(\tfrac{8}{3} - 8\right) - \left(-\tfrac{8}{3} + 8\right) \\ &= \tfrac{8}{3} - 8 + \tfrac{8}{3} - 8 \\ &= \tfrac{16}{3} - 16 \\ &= -\tfrac{32}{3}. \end{aligned}$$

Análisis

Observe que no incluimos el término "+ C" cuando escribimos la antiderivada. La razón es que, según el teorema fundamental del cálculo, parte 2, *cualquier* antiderivada funciona. Así que, por comodidad, elegimos la antiderivada con $C = 0$. Si hubiéramos elegido otra antiderivada, el término constante se habría anulado. Esto siempre ocurre al evaluar una integral definida.

La región del área que acabamos de calcular se representa en la Figura 5.28. Note que toda la región entre la curva y el eje *x* está por debajo del eje *x*. El área es siempre positiva, pero una integral definida puede producir un número negativo (un área neta con signo). Por ejemplo, si se tratara de una función de beneficios, un número negativo indica que la empresa está operando con pérdidas en el intervalo dado.

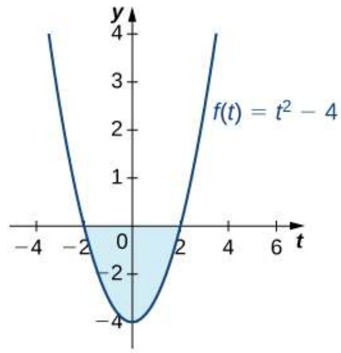


Figura 5.28 La evaluación de una integral definida puede producir un valor negativo aunque el área sea siempre positiva.

EJEMPLO 5.21

Evaluación de una integral definida mediante el teorema fundamental del cálculo, parte 2

Evalúe la siguiente integral utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte 2:

$$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx.$$

Solución

Primero elimine el radical reescribiendo la integral usando exponentes racionales. Luego, separe los términos del numerador escribiendo cada uno sobre el denominador:

$$\int_1^9 \frac{x-1}{x^{1/2}}dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}}\right)dx.$$

Utilice las propiedades de los exponentes para simplificar:

$$\int_1^9 \left(\frac{x}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}}\right)dx = \int_1^9 \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right)dx.$$

Ahora, integre usando la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}\int_1^9 \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right)dx &= \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^9 \\ &= \left[\frac{(9)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{(9)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] - \left[\frac{(1)^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{(1)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \left[\frac{2}{3}(27) - 2(3)\right] - \left[\frac{2}{3}(1) - 2(1)\right] \\ &= 18 - 6 - \frac{2}{3} + 2 \\ &= \frac{40}{3}.\end{aligned}$$

Vea el Figura 5.29.

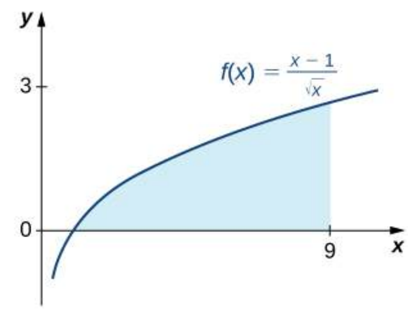


Figura 5.29 El área bajo la curva de $x = 1$ a $x = 9$ se puede calcular evaluando una integral definida.

5.19 Utilice El teorema fundamental del cálculo, parte 2 (teorema fundamental del cálculo) para evaluar $\int_1^2 x^{-4}\,dx.$

EJEMPLO 5.22

Una carrera de patinaje

James y Kathy están patinando. Lo hacen a lo largo de una pista larga y recta, y quien llegue más lejos después de 5 segundos gana un premio. Si James puede patinar a una velocidad de $f(t) = 5 + 2t$ ft/s y Kathy puede patinar a una velocidad de $g(t) = 10 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ ft/s, ¿quién va a ganar la carrera?

Solución

Tenemos que integrar ambas funciones en el intervalo $[0, 5]$ y ver qué valor es mayor. Con respecto a James, queremos calcular

$$\int_0^5 (5 + 2t)\,dt.$$

Utilizando la regla de la potencia, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^5 (5 + 2t)\,dt &= \left(5t + t^2\right)\Big|_0^5 \\ &= (25 + 25) = 50.\end{aligned}$$

Así, James patinó 50 ft en 5 segundos. Volviendo a Kathy, queremos calcular

$$\int_0^5 10 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)dt.$$

Sabemos que $\operatorname{sen} t$ es una antiderivada de $\cos t$, por lo que es razonable esperar que una antiderivada de $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ implicaría $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Sin embargo, cuando diferenciamos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, obtenemos $\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ como resultado de la regla de la cadena, por lo que tenemos que tener en cuenta este coeficiente adicional cuando integramos. Obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^5 10 + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)dt &= \left(10t + \tfrac{2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)\right)\Big|_0^5 \\ &= \left(50 + \tfrac{2}{\pi}\right) - \left(0 - \tfrac{2}{\pi}\operatorname{sen} 0\right) \\ &\approx 50{,}6.\end{aligned}$$

Kathy patinó aproximadamente 50,6 ft en 5 segundos. ¡Kathy gana, pero no por mucho!

5.20 Supongamos que James y Kathy tienen una revancha, pero esta vez el árbitro detiene la contienda a solo 3 segundos. ¿Cambia esto el resultado?

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Un paracaidista en caída libre

Figura 5.30 Los paracaidistas pueden ajustar la velocidad de su inmersión cambiando la posición de su cuerpo durante la caída libre (créditos: Jeremy T. Lock).

Julie es una paracaidista apasionada. Tiene más de 300 saltos en su haber y ha dominado el arte de cambiar la posición de su cuerpo en el aire para controlar la velocidad de caída. Si arquea la espalda y apunta su vientre hacia el suelo, alcanza una velocidad límite de aproximadamente 120 mph (176 ft/s). Si más bien orienta su cuerpo con la cabeza hacia abajo, cae más rápido, alcanzando una velocidad límite de 150 mph (220 ft/s).

Como Julie se moverá (caerá) en dirección descendente, asumimos que la dirección descendente es positiva para simplificar nuestros cálculos. Julie ejecuta sus saltos desde una altitud de 12.500 ft. Al saltar de la aeronave, inmediatamente comienza a caer a una velocidad dada por $v(t) = 32t$. Ella continúa acelerando según esta función de velocidad hasta que alcanza la velocidad límite. Cuando alcanza la velocidad límite, su velocidad se mantiene constante hasta que tira de la cuerda de seguridad y reduce la velocidad para aterrizar.

En su primer salto del día, Julie se orienta en la posición más lenta "panza abajo" (la velocidad límite es de 176 ft/s). Con esta información, responda las siguientes preguntas.

1. ¿Cuánto tiempo después de saltar del avión Julie alcanza la velocidad límite?
2. Con base en su respuesta a la pregunta 1, establezca una expresión que implique una o más integrales que representen la distancia a la que cae Julie después de 30 segundos.
3. Si Julie tira de su cuerda de seguridad a una altitud de 3.000 ft, ¿cuánto tiempo pasa en caída libre?
4. Julie tira de su cuerda de seguridad a 3.000 ft. El paracaídas tarda 5 segundos en abrirse por completo y en frenar, tiempo durante el cual cae otros 400 ft. Después de que su casquete está completamente abierto, su velocidad se reduce a 16 ft/s. Halle el tiempo total que Julie pasa en el aire, desde que sale del avión hasta que sus pies tocan el suelo.
   En el segundo salto del día, Julie decide que quiere caer un poco más rápido y se orienta en la posición "cabeza abajo". Su velocidad límite en esta posición es de 220 ft/s. Responda a estas preguntas con base en esta velocidad:
5. En este caso ¿cuánto tarda Julie en alcanzar la velocidad límite?

6. Antes de tirar de la cuerda de seguridad, Julie reorienta su cuerpo en la posición "panza abajo" para no moverse tan rápido cuando se abra el paracaídas. Si comienza esta maniobra a una altitud de 4.000 ft, ¿cuánto tiempo pasa en caída libre antes de comenzar la reorientación?

   Algunos saltadores llevan "trajes de alas" (vea la Figura 5.31). Estos trajes tienen paneles de tela entre los brazos y las piernas y permiten al usuario deslizarse en caída libre, como una ardilla voladora. (De hecho, los trajes se llaman a veces "trajes de ardilla voladora"). Cuando se llevan estos trajes, la velocidad límite puede reducirse a unos 30 mph (44 ft/s), lo que permite a los usuarios un tiempo mucho más largo en el aire. Los pilotos de wingsuit (traje de alas) siguen utilizando paracaídas para aterrizar; aunque las velocidades verticales están dentro del margen de seguridad, las horizontales pueden superar las 70 mph, demasiado rápido para aterrizar con seguridad.

Figura 5.31 Los paneles de tela de los brazos y las piernas de un wingsuit sirven para reducir la velocidad vertical de caída de un paracaidista (créditos: Richard Schneider).

Responda la siguiente pregunta con base en la velocidad con un wingsuit.

7. Si Julie se pone un wingsuit antes de su tercer salto del día y hala su cuerda de seguridad a una altitud de 3.000 ft, ¿cuánto tiempo puede pasar planeando en el aire?

SECCIÓN 5.3 EJERCICIOS

144. Considere la posibilidad de que dos atletas corran a velocidades variables $v_1(t)$ y $v_2(t)$. Los corredores comienzan y terminan una carrera exactamente a la misma hora. Explique por qué los dos corredores deben ir a la misma velocidad en algún momento.

145. Dos alpinistas comienzan su ascenso en el campamento base y toman dos rutas diferentes, una más empinada que la otra, y llegan a la cima exactamente al mismo tiempo. ¿Es necesariamente cierto que, en algún momento, ambos escaladores aumentaron su altitud al mismo ritmo?

146. Para entrar en una determinada autopista de peaje, un conductor debe llevar una tarjeta en la que figura el punto de entrada de la milla. La tarjeta también tiene una marca de tiempo. Al dirigirse a la salida y pagar el peaje, el conductor se sorprende al recibir una multa por exceso de velocidad junto con el peaje. Explique cómo pudo ocurrir eso.

147. Establezca $F(x) = \int_1^x (1-t)\,dt$. Calcule $F'(2)$ y el valor promedio de F' en $[1, 2]$.

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema fundamental del cálculo, parte 1, para encontrar cada derivada.

148. $\frac{d}{dx}\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

149. $\frac{d}{dx}\int_1^x e^{\cos t}\,dt$

150. $\frac{d}{dx}\int_3^x \sqrt{9-y^2}\,dy$

151. $\frac{d}{dx}\int_4^x \frac{ds}{\sqrt{16-s^2}}$

152. $\frac{d}{dx}\int_x^{2x} t\,dt$

153. $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} t\,dt$

154. $\frac{d}{dx}\int_0^{\operatorname{sen} x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

155. $\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$

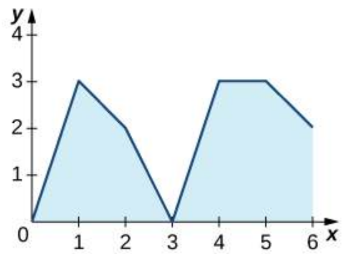
156. $\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{t^2}{1+t^4}\,dt$

157. $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,dt$

158. $\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} e^t\,dt$

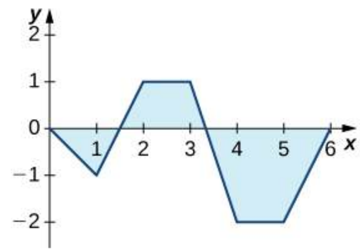
159. $\frac{d}{dx}\int_1^{e^x} \ln u^2\,du$

160. El gráfico de $y=\int_0^x f(t)dt$, donde f es una función constante a trozos, se muestra aquí.



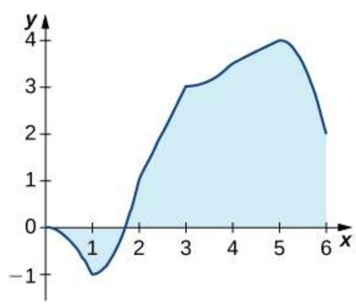
a. ¿En qué intervalos f es positiva? ¿En qué intervalos es negativa? ¿En qué intervalos, si los hay, es igual a cero?
b. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de f?
c. ¿Cuál es el valor promedio de f?

161. El gráfico de $y=\int_0^x f(t)dt$, donde f es una función constante por partes, se muestra aquí.



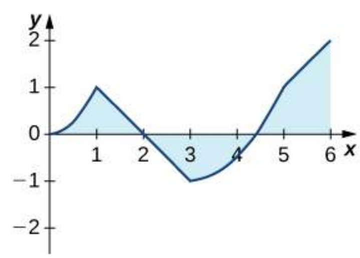
a. ¿En qué intervalos f es positiva? ¿En qué intervalos es negativa? ¿En qué intervalos, si los hay, es igual a cero?
b. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de f?
c. ¿Cuál es el valor promedio de f?

162. El gráfico de $y=\int_0^x \ell(t)dt$, donde ℓ es una función lineal a trozos, se muestra aquí.



a. ¿En qué intervalos ℓ es positiva? ¿En qué intervalos es negativa? ¿En cuáles, si hay alguno, es cero?
b. ¿En qué intervalos es ℓ creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? ¿En qué intervalo es constante, si es que lo es?
c. ¿Cuál es el valor promedio de ℓ?

163. El gráfico de $y=\int_0^x \ell(t)dt$, donde ℓ es una función lineal por partes, se muestra aquí.



a. ¿En qué intervalos ℓ es positiva? ¿En qué intervalos es negativa? ¿En cuáles, si hay alguno, es cero?
b. ¿En qué intervalos es ℓ creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? ¿En qué intervalos, si los hay, es constante?
c. ¿Cuál es el valor promedio de ℓ?

En los siguientes ejercicios utilice una calculadora para estimar el área debajo de la curva calculando T_{10}, el promedio de las sumas de Riemann de los extremos izquierdo y derecho utilizando rectángulos $N=10$. Luego, utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte 2, determine el área exacta.

164. **[T]** $y=x^2$ en $[0,4]$

165. **[T]** $y=x^3+6x^2+x-5$ en $[-4,2]$

166. **[T]** $y=\sqrt{x^3}$ en $[0,6]$

167. **[T]** $y=\sqrt{x}+x^2$ en $[1,9]$

168. **[T]** $\int(\cos x-\operatorname{sen} x)dx$ en $[0,\pi]$

169. **[T]** $\int \frac{4}{x^2}dx$ en $[1,4]$

En los siguientes ejercicios, evalúe cada integral definida utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte 2.

170. $\int_{-1}^{2} \left(x^2 - 3x\right) dx$

171. $\int_{-2}^{3} \left(x^2 + 3x - 5\right) dx$

172. $\int_{-2}^{3} (t+2)(t-3)\, dt$

173. $\int_{2}^{3} \left(t^2 - 9\right)\left(4 - t^2\right) dt$

174. $\int_{1}^{2} x^9\, dx$

175. $\int_{0}^{1} x^{99}\, dx$

176. $\int_{4}^{8} \left(4t^{5/2} - 3t^{3/2}\right) dt$

177. $\int_{1/4}^{4} \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$

178. $\int_{1}^{2} \frac{2}{x^3} dx$

179. $\int_{1}^{4} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

180. $\int_{1}^{4} \frac{2 - \sqrt{t}}{t^2} dt$

181. $\int_{1}^{16} \frac{dt}{t^{1/4}}$

182. $\int_{0}^{2\pi} \cos\theta d\theta$

183. $\int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta d\theta$

184. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2\theta d\theta$

185. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta d\theta$

186. $\int_{\pi/3}^{\pi/4} \csc\theta \cot\theta d\theta$

187. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2\theta d\theta$

188. $\int_{1}^{2} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt$

189. $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3}\right) dt$

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema de evaluación para expresar la integral como una función $F(x)$.

190. $\int_{a}^{x} t^2 dt$

191. $\int_{1}^{x} e^t\, dt$

192. $\int_{0}^{x} \cos t dt$

193. $\int_{-x}^{x} \operatorname{sen} t dt$

En los siguientes ejercicios, identifique las raíces del integrando para eliminar los valores absolutos, y luego evalúe utilizando el teorema fundamental del cálculo, parte 2.

194. $\int_{-2}^{3} |x|\, dx$

195. $\int_{-2}^{4} \left|t^2 - 2t - 3\right| dt$

196. $\int_{0}^{\pi} |\cos t|\, dt$

197. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} t|\, dt$

198. Supongamos que el número de horas de luz en un día determinado en Seattle se modela mediante la función $-3{,}75\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 12{,}25$, con t expresado en meses y $t = 0$ correspondiente al solsticio de invierno.

a. ¿Cuál es el número medio de horas de luz al año?
b. En qué momentos t_1 y t_2, donde $0 \le t_1 < t_2 < 12$, ¿el número de horas de luz es igual al número promedio?
c. Escriba una integral que exprese el número total de horas de luz en Seattle entre t_1 y t_2.
d. Calcule la media de horas de luz en Seattle entre t_1 y t_2, donde $0 \le t_1 < t_2 < 12$, y luego entre t_2 y t_1, y demuestre que el promedio de las dos es igual a la duración promedio del día.

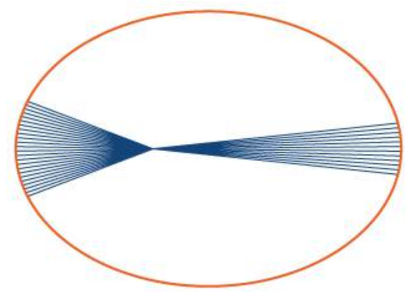
199. Supongamos que la tasa de consumo de gasolina a lo largo de un año en Estados Unidos puede modelarse mediante una función sinusoidal de la forma $\left(11{,}21 - \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) \times 10^9$ gal/mo.

a. ¿Cuál es el consumo promedio mensual y para qué valores de t la tasa en el momento t es igual a la tasa promedio?
b. ¿Cuál es el número de galones de gasolina que se consumen en Estados Unidos en un año?
c. Escriba una integral que exprese el consumo medio mensual de gasolina en Estados Unidos en la parte del año comprendida entre el comienzo de abril $(t = 3)$ y el final de septiembre $(t = 9)$.

200. Explique por qué, si f es continua sobre $[a, b]$, hay al menos un punto $c \in [a, b]$ de manera que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$.

201. Explique por qué, si f es continua sobre $[a, b]$ y no es igual a una constante, hay al menos un punto $M \in [a, b]$ de manera que $f(M) > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$ y al menos un punto $m \in [a, b]$ de manera que $f(m) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt$.

202. La primera ley de Kepler establece que los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco. El punto más cercano de una órbita planetaria al Sol se llama *perihelio* (en el caso de la Tierra, se produce actualmente alrededor del 3 de enero) y el punto más alejado se denomina *afelio* (en el caso de la Tierra, se produce actualmente alrededor del 4 de julio). La segunda ley de Kepler establece que los planetas barren áreas iguales de sus órbitas elípticas en tiempos iguales. Así, los dos arcos indicados en la siguiente figura se barren en tiempos iguales. ¿En qué momento del año la Tierra se mueve más rápido en su órbita? ¿Cuándo se mueve más lentamente?



203. Un punto de una elipse con eje mayor de longitud 2*a* y eje menor de longitud 2*b* tiene las coordenadas $(a\cos\theta, b\,\text{sen}\,\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

a. Demuestre que la distancia de este punto al foco en $(-c, 0)$ ¿es $d(\theta) = a + c\cos\theta$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
b. Utilice estas coordenadas para demostrar que la distancia promedio $\overline{d}$ desde un punto de la elipse hasta el foco en $(-c, 0)$, con respecto al ángulo *θ*, es *a*.

204. Como se dijo antes, según las leyes de Kepler, la órbita de la Tierra es una elipse en uno de cuyos focos está el Sol. El perihelio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es de 147.098.290 km y el afelio es de 152.098.232 km.

a. Colocando el eje mayor a lo largo del eje *x*, halle la distancia promedio de la Tierra al Sol.
b. La definición clásica de unidad astronómica (UA) es la distancia de la Tierra al Sol, y su valor se calculó como el promedio de las distancias del perihelio y del afelio. ¿Está justificada esta definición?

205. La fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y un planeta es $F(\theta) = \frac{GmM}{r^2(\theta)}$, donde *m* es la masa del planeta, *M* es la masa del Sol, *G* es una constante universal y $r(\theta)$ es la distancia entre el Sol y el planeta cuando éste se halla en un ángulo *θ* con el eje mayor de su órbita. Suponiendo que *M*, *m* y los parámetros de la elipse *a* y *b* (semilongitudes de los ejes mayor y menor) están dados, establezca —pero no evalúe— una integral que exprese en términos de G, m, M, a, b la fuerza gravitatoria promedio entre el Sol y el planeta.

206. El desplazamiento desde el reposo de una masa unida a un resorte satisface la ecuación de movimiento armónico simple $x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$, donde ϕ es una constante de fase, ω es la frecuencia angular y A es la amplitud. Halle la velocidad media, la rapidez media (magnitud de la velocidad), el desplazamiento medio y la distancia media desde el reposo (magnitud del desplazamiento) de la masa.

5.4 Fórmulas de integración y el teorema del cambio neto

Objetivos de aprendizaje

5.4.1 Aplicar las fórmulas básicas de integración.
5.4.2 Explicar el significado del teorema del cambio neto.
5.4.3 Utilizar el teorema del cambio neto para resolver problemas aplicados.
5.4.4 Aplicar las integrales de funciones pares e impares.

En esta sección, utilizaremos algunas fórmulas básicas de integración estudiadas anteriormente para resolver algunos problemas clave aplicados. Es importante señalar que estas fórmulas se presentan en términos de integrales *indefinidas*. Aunque las integrales definidas e indefinidas están estrechamente relacionadas, hay algunas diferencias clave que hay que tener en cuenta. Una integral definida es un número (cuando los límites de integración son constantes) o una función única (cuando uno o ambos límites de integración son variables). Una integral indefinida representa una familia de funciones, todas las cuales difieren en una constante. A medida que se vaya familiarizando con la integración, sabrá cuándo utilizar las integrales definidas o las indefinidas. Sin pensar demasiado en ello, seleccionará naturalmente el enfoque correcto para un determinado problema Sin embargo, mientras internaliza estos conceptos, piense cuidadosamente si necesita una integral definida o una indefinida y asegúrese de utilizar la notación adecuada según su elección.

Fórmulas básicas de integración

Recordemos las fórmulas de integración dadas en la tabla de antiderivadas y la regla sobre las propiedades de las integrales definidas. Veamos algunos ejemplos de cómo se aplican estas reglas.

EJEMPLO 5.23

Integración de una función mediante la regla de la potencia

Utilice la regla de la potencia para integrar la función $\int_1^4 \sqrt{t}\,(1+t)\,dt$.

Solución

El primer paso es reescribir la función y simplificarla para aplicar la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)dt &= \int_1^4 t^{1/2}(1+t)dt \\ &= \int_1^4 \left(t^{1/2}+t^{3/2}\right) dt.\end{aligned}$$

Ahora aplique la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(t^{1/2}+t^{3/2}\right) dt &= \left(\tfrac{2}{3}t^{3/2}+\tfrac{2}{5}t^{5/2}\right)\Big|_1^4 \\ &= \left[\tfrac{2}{3}(4)^{3/2}+\tfrac{2}{5}(4)^{5/2}\right]-\left[\tfrac{2}{3}(1)^{3/2}+\tfrac{2}{5}(1)^{5/2}\right] \\ &= \tfrac{256}{15}.\end{aligned}$$

5.21 Calcule la integral definida de $f(x)=x^2-3x$ en el intervalo $[1,3]$.

El teorema del cambio neto

El **teorema del cambio neto** considera la integral de un *tasa de cambio*. Dice que cuando una cantidad cambia, el nuevo valor es igual al valor inicial más la integral de la tasa de cambio de esa cantidad. La fórmula puede expresarse de dos maneras. La segunda nos es familiar; se trata simplemente de la integral definida.

Teorema 5.6

Teorema del cambio neto

El nuevo valor de una cantidad cambiante es igual al valor inicial más la integral de la tasa de cambio:

$$F(b)=F(a)+\int_a^b F'(x)\,dx \tag{5.18}$$

o

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

Restando $F(a)$ de ambos lados de la primera ecuación da como resultado la segunda ecuación. Puesto que son fórmulas equivalentes, la que utilicemos dependerá de la aplicación.

La importancia del teorema del cambio neto radica en los resultados. El cambio neto puede aplicarse al área, la distancia y el volumen, por nombrar solo algunas aplicaciones. El cambio neto contabiliza automáticamente las cantidades negativas sin tener que escribir más de una integral. Para ilustrarlo, aplicaremos el teorema del cambio neto a una función de velocidad en la que el resultado es el desplazamiento.

Vimos un ejemplo sencillo de esto en La integral definida. Supongamos que un auto va hacia el norte (la dirección positiva) a 40 mph entre las 2 p. m. y las 4 p. m., luego se dirige al sur a 30 mph entre las 4 p. m. y las 5 p. m. Podemos graficar este movimiento como se muestra en la Figura 5.32.

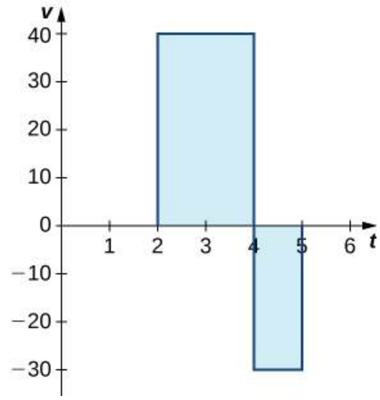


Figura 5.32 El gráfico muestra la velocidad en función del tiempo para el movimiento dado de un automóvil.

Al igual que antes, podemos utilizar integrales definidas para calcular el desplazamiento neto y la distancia total recorrida. El desplazamiento neto viene dado por

$$\begin{aligned}\int_2^5 v(t)dt &= \int_2^4 40dt + \int_4^5 -30dt \\ &= 80 - 30 \\ &= 50.\end{aligned}$$

Así, a las 5 p. m., el auto está a 50 millas al norte de su posición de partida. La distancia total recorrida viene dada por

$$\begin{aligned}\int_2^5 |v(t)|\, dt &= \int_2^4 40dt + \int_4^5 30dt \\ &= 80 + 30 \\ &= 110.\end{aligned}$$

Por lo tanto, entre las 2 p. m. y las 5 p. m., el auto recorrió un total de 110 millas.

En resumen, el desplazamiento neto puede incluir tanto valores positivos como negativos. En otras palabras, la función de velocidad toma en cuenta tanto la distancia hacia delante como hacia atrás. Para encontrar el desplazamiento neto, integre la función de velocidad en el intervalo. En cambio, la distancia total recorrida es siempre positiva. Para encontrar la distancia total recorrida por un objeto, independientemente de la dirección, tenemos que integrar el valor absoluto de la función de velocidad.

EJEMPLO 5.24

Hallar el desplazamiento neto

Dada una función de velocidad $v(t) = 3t - 5$ (en metros por segundo) para una partícula en movimiento desde el tiempo $t = 0$ hasta el tiempo $t = 3$, halle el desplazamiento neto de la partícula.

Solución

Si aplicamos el teorema del cambio neto, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^3 (3t - 5)\, dt &= \left.\frac{3t^2}{2} - 5t\right|_0^3 \\ &= \left[\frac{3(3)^2}{2} - 5(3)\right] - 0 \\ &= \frac{27}{2} - 15 \\ &= \frac{27}{2} - \frac{30}{2} \\ &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

El desplazamiento neto es $-\frac{3}{2}$ m (Figura 5.33).

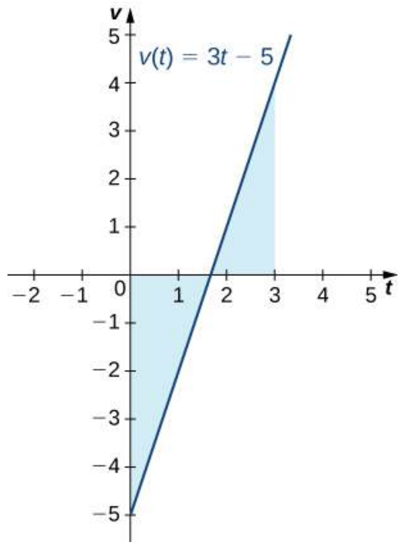


Figura 5.33 El gráfico muestra la velocidad en función del tiempo de una partícula que se mueve con una función de velocidad lineal.

EJEMPLO 5.25

Hallar la distancia total recorrida

Utilice el Ejemplo 5.24 para encontrar la distancia total recorrida por una partícula según la función de velocidad $v(t) = 3t - 5$ m/s en un intervalo de tiempo $[0, 3]$.

Solución

La distancia total recorrida incluye tanto los valores positivos como los negativos. Por eso debemos integrar el valor absoluto de la función de velocidad para encontrar la distancia total recorrida.

Para continuar con el ejemplo, utilice dos integrales para encontrar la distancia total. En primer lugar, halle la intersección *t*de la función, ya que allí se produce la división del intervalo. Establezca la ecuación igual a cero y resuelva para *t*. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 3t - 5 &= 0 \\ 3t &= 5 \\ t &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Los dos subintervalos son $\left[0, \frac{5}{3}\right]$ y $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$. Para encontrar la distancia total recorrida, integre el valor absoluto de la función. Como la función es negativa en el intervalo $\left[0, \frac{5}{3}\right]$, tenemos $|v(t)| = -v(t)$ en ese intervalo. En $\left[\frac{5}{3}, 3\right]$, la función es positiva, por lo que $|v(t)| = v(t)$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^3 |v(t)|\,dt &= \int_0^{5/3} -v(t)dt + \int_{5/3}^3 v(t)dt \\
&= \int_0^{5/3} 5-3t dt + \int_{5/3}^3 3t-5dt \\
&= \left(5t-\frac{3t^2}{2}\right)\Big|_0^{5/3} + \left(\frac{3t^2}{2}-5t\right)\Big|_{5/3}^3 \\
&= \left[5\left(\frac{5}{3}\right)-\frac{3(5/3)^2}{2}\right] - 0 + \left[\frac{27}{2}-15\right] - \left[\frac{3(5/3)^2}{2}-\frac{25}{3}\right] \\
&= \frac{25}{3}-\frac{25}{6}+\frac{27}{2}-15-\frac{25}{6}+\frac{25}{3} \\
&= \frac{41}{6}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la distancia total recorrida es $\frac{41}{6}$ m.

5.22 Halle el desplazamiento neto y la distancia total recorrida en metros dada la función de velocidad $f(t)=\frac{1}{2}e^t-2$ en el intervalo $[0,2]$.

Aplicación del teorema del cambio neto

El teorema del cambio neto puede aplicarse al flujo y al consumo de fluidos, como se muestra en el Ejemplo 5.26.

EJEMPLO 5.26

¿Cuántos galones de gasolina se consumen?

Si el motor de una lancha se pone en marcha en $t=0$ y la lancha consume gasolina a una tasa de $5–t^3$ gal/h, ¿qué cantidad de gasolina se consume en las primeras 2 horas?

Solución

Exprese el problema como una integral definida, integre y evalúe utilizando el teorema fundamental del cálculo. Los límites de la integración son los puntos extremos del intervalo $[0,2]$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \left(5–t^3\right)dt &= \left(5t–\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^2 \\
&= \left[5\left(2\right)–\frac{(2)^4}{4}\right]–0 \\
&= 10–\frac{16}{4} \\
&= 6
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la lancha consume 6 galones de gasolina en 2 horas.

EJEMPLO 5.27

Inicio del capítulo: Botes deslizadores sobre hielo

Figura 5.34 (créditos: modificación del trabajo de Carter Brown, Flickr).

Como vimos al principio del capítulo, los mejores corredores de botes de hielo (Figura 5.1) pueden alcanzar velocidades de hasta cinco veces la velocidad del viento. Sin embargo, Andrew es un navegador de nivel intermedio, por lo que alcanza velocidades equivalentes a solo el doble de la velocidad del viento. Supongamos que Andrew saca su bote una mañana en la que ha soplado una ligera brisa de 5 mph durante toda la mañana. Sin embargo, mientras prepara su bote de hielo, el viento empieza a arreciar. Durante su primera media hora de navegación sobre hielo, la velocidad del viento aumenta según la función $v(t) = 20t + 5$. En la segunda media hora de la salida de Andrew, el viento se mantiene estable en 15 mph. En otras palabras, la velocidad del viento viene dada por

$$v(t) = \begin{cases} 20t + 5 & \text{para} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 15 & \text{para} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Si recordamos que el bote de Andrew viaja al doble de la velocidad del viento, y suponemos que se mueve en línea recta desde su punto de partida, ¿a qué distancia de su punto de partida se encuentra después de 1 hora?

Solución

Para saber qué distancia ha recorrido Andrew, tenemos que integrar su velocidad, que es el doble de la velocidad del viento. Entonces

$$\text{Distancia} = \int_0^1 2v(t)\,dt.$$

Sustituyendo las expresiones proporcionadas para $v(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 2v(t)\,dt &= \int_0^{1/2} 2v(t)\,dt + \int_{1/2}^1 2v(t)\,dt \\ &= \int_0^{1/2} 2(20t+5)\,dt + \int_{1/3}^1 2(15)\,dt \\ &= \int_0^{1/2} (40t+10)\,dt + \int_{1/2}^1 30dt \\ &= \left[20t^2 + 10t\right]\Big|_0^{1/2} + \left[30t\right]\Big|_{1/2}^1 \\ &= \left(\frac{20}{4} + 5\right) - 0 + (30 - 15) \\ &= 25. \end{aligned}$$

Pasada 1 hora, Andrew está a 25 millas de su punto de partida.

5.23 Supongamos que, en vez de permanecer estable durante la segunda media hora de la salida de Andrés, el viento empieza a amainar según la función $v(t) = -10t + 15$. En otras palabras, la velocidad del viento viene dada por

$$v(t) = \begin{cases} 20t + 5 & \text{para} \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ -10t + 15 & \text{para} \quad \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

En estas condiciones, ¿a qué distancia de su punto de partida se encuentra Andrés después de 1 hora?

Integración de funciones pares e impares

En Funciones y gráficos vimos que una función par es aquella en la que $f(-x) = f(x)$ para toda *x* en el dominio, es decir, el gráfico de la curva no cambia cuando se sustituye *x* por −*x*. Los gráficos de las funciones pares son simétricas con respecto al eje *y*. Una función impar es aquella en la que $f(-x) = -f(x)$ para toda *x* en el dominio, y el gráfico de la función es simétrico respecto al origen.

Las integrales de las funciones pares, cuando los límites de la integración son de −*a* a *a*, implican dos áreas iguales, porque son simétricas respecto al eje *y*. Las integrales de funciones impares, cuando los límites de integración son similares $[-a, a]$, se evalúa a cero porque las áreas por encima y por debajo del eje *x* son iguales.

Regla: integrales de funciones pares e impares

Para funciones continuas pares tales que $f(-x) = f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Para funciones continuas impares tales que $f(-x) = -f(x)$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

EJEMPLO 5.28

Integrar una función par

Integre la función par $\int_{-2}^{2} \left(3x^8 - 2\right) dx$ y verifique que la fórmula de integración para funciones pares se cumpla.

Solución

La simetría aparece en los gráficos en la Figura 5.35. El gráfico (a) muestra la región por debajo de la curva y por encima del eje *x*. Hay que ampliar mucho este gráfico para ver la región. El gráfico (b) muestra la región por encima de la curva y por debajo del eje *x*. El área con signo de esta región es negativa. Ambas vistas ilustran la simetría en torno al eje *y* de una función par. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \left(3x^8 - 2\right) dx &= \left(\frac{x^9}{3} - 2x\right)\Big|_{-2}^{2} \\ &= \left[\frac{(2)^9}{3} - 2(2)\right] - \left[\frac{(-2)^9}{3} - 2(-2)\right] \\ &= \left(\frac{512}{3} - 4\right) - \left(-\frac{512}{3} + 4\right) \\ &= \frac{1.000}{3}. \end{aligned}$$

Para verificar la fórmula de integración de las funciones pares, podemos calcular la integral de 0 a 2 y duplicarla, y luego comprobar que obtenemos la misma respuesta.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(3x^8 - 2\right) dx &= \left(\frac{x^9}{3} - 2x\right)\Big|_0^2 \\ &= \frac{512}{3} - 4 \\ &= \frac{500}{3}\end{aligned}$$

Dado que $2.\ \frac{500}{3} = \frac{1.000}{3}$, hemos comprobado la fórmula de las funciones pares en este ejemplo concreto.

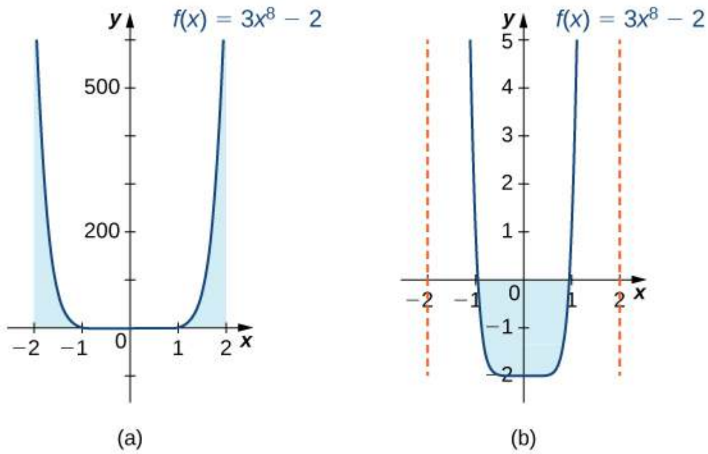


Figura 5.35 El gráfico (a) muestra el área positiva entre la curva y el eje *x*, mientras que el gráfico (b) muestra el área negativa entre la curva y el eje *x*. Ambas vistas muestran la simetría en torno al eje *y*.

EJEMPLO 5.29

Integrar una función impar

Evalúe la integral definida de la función impar $-5\,\text{sen}\,x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Solución

El gráfico se muestra en la Figura 5.36. Podemos ver la simetría respecto al origen por el área positiva sobre el eje *x* en $[-\pi, 0]$, y el área negativa por debajo del eje *x* en $[0, \pi]$. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} -5\,\text{sen}\,x\,dx &= -5\,(-\cos x)|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 5\cos x|_{-\pi}^{\pi} \\ &= [5\cos \pi] - [5\cos(-\pi)] \\ &= -5 - (-5) \\ &= 0.\end{aligned}$$

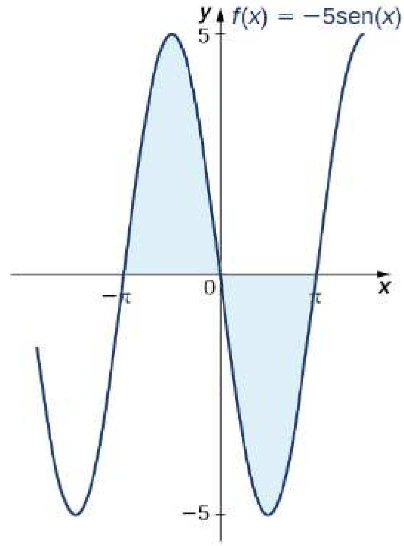


Figura 5.36 El gráfico muestra las áreas entre una curva y el eje x para una función impar.

5.24 Integre la función $\int_{-2}^{2} x^4 \, dx$.

SECCIÓN 5.4 EJERCICIOS

Utilice las fórmulas básicas de integración para calcular las siguientes antiderivadas o integrales definidas.

207. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

208. $\int \left(e^{2x} - \frac{1}{2}e^{x/2}\right) dx$

209. $\int \frac{dx}{2x}$

210. $\int \frac{x-1}{x^2} dx$

211. $\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\, dx$

212. $\int_0^{\pi/2} (x - \operatorname{sen} x)\, dx$

213. Escriba una integral que exprese el aumento del perímetro $P(s)$ de un cuadrado cuando su longitud de lado s aumenta de 2 unidades a 4 unidades y evalúe la integral.

214. Escriba una integral que cuantifique el cambio en el área $A(s) = s^2$ de un cuadrado cuando la longitud de sus lados se duplica de S unidades a $2S$ unidades y evalúe la integral.

215. Un *N-gono* regular (un polígono de *N* lados que tienen igual longitud *s*, como un pentágono o un hexágono) tiene un perímetro *Ns*. Escriba una integral que exprese el aumento del perímetro de un *N*–gono regular cuando la longitud de cada lado aumenta de 1 unidad a 2 unidades y evalúe la integral.

216. El área de un pentágono regular de lado $a > 0$ es pa^2 con $p = \frac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}.$ El Pentágono en Washington, DC, tiene lados interiores de 360 ft y lados exteriores de 920 ft de longitud. Escriba una integral para expresar el área del techo del Pentágono según estas dimensiones y evalúe esa área.

217. Un dodecaedro es un sólido platónico cuya superficie está formada por 12 pentágonos de igual superficie. ¿En cuánto aumenta el área superficial de un dodecaedro cuando la longitud de los lados de cada pentágono se duplica de 1 a 2 unidades?

218. Un icosaedro es un sólido platónico cuya superficie está formada por 20 triángulos equiláteros. ¿En cuánto aumenta el área superficial de un icosaedro cuando la longitud de los lados de cada triángulo se duplica de la unidad *a* a 2*a* unidades?

219. Escriba una integral que cuantifique el cambio en el área de la superficie de un cubo cuando su longitud lateral se duplica de la unidad *s* a 2*s* unidades y evalúe la integral.

220. Escriba una integral que cuantifique el aumento del volumen de un cubo cuando la longitud del lado se duplica de la unidad *s* a unidades 2*s* y evalúe la integral.

221. Escriba una integral que cuantifique el aumento del área superficial de una esfera cuando su radio se duplica de la unidad *R* a unidades 2*R* y evalúe la integral.

222. Escriba una integral que cuantifique el aumento del volumen de una esfera cuando su radio se duplica de la unidad *R* a unidades 2*R* y evalúe la integral.

223. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad $v(t) = 4–2t$, donde $0 \le t \le 2$ (en metros por segundo). Calcule el desplazamiento en el tiempo *t* y la distancia total recorrida hasta $t = 2.$

224. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad definida por $v(t) = t^2 - 3t - 18,$ donde $0 \le t \le 6$ (en metros por segundo). Calcule el desplazamiento en el tiempo *t* y la distancia total recorrida hasta $t = 6.$

225. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una velocidad definida por $v(t) = |2t - 6|$, donde $0 \le t \le 6$ (en metros por segundo). Calcule el desplazamiento en el tiempo *t* y la distancia total recorrida hasta $t = 6.$

226. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración definida por $a(t) = t - 3,$ donde $0 \le t \le 6$ (en metros por segundo). Halle la velocidad y el desplazamiento en el tiempo *t* y la distancia total recorrida hasta $t = 6$ si $v(0) = 3$ y $d(0) = 0.$

227. Se lanza un balón hacia arriba desde una altura de 1,5 m con una rapidez inicial de 40 m/s. La aceleración resultante de la gravedad es de −9,8 m/s^2. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, resuelva la velocidad $v(t)$ y la altura $h(t)$ del balón *t* segundos después de ser lanzado y antes de que vuelva al suelo.

228. Se lanza un balón hacia arriba desde una altura de 3 m con una rapidez inicial de 60 m/s. La aceleración resultante de la gravedad es de -9,8 m/seg^2. Sin tener en cuenta la resistencia del aire, resuelva la velocidad $v(t)$ y la altura $h(t)$ del balón t segundos después de ser lanzado y antes de que vuelva al suelo.

229. La zona $A(t)$ de forma circular crece a un ritmo constante. Si el área aumenta de 4π unidades a 9π unidades entre tiempos $t = 2$ y $t = 3$, calcule el cambio neto en el radio durante ese tiempo.

230. Un globo esférico se infla a un ritmo constante. Si el volumen del globo cambia de 36π in^3 a 288π in^3 entre el tiempo $t = 30$ y $t = 60$ segundos, halle el cambio neto en el radio del globo durante ese tiempo.

231. El agua fluye en un tanque cónico con un área transversal πx^2 a una altura x y un volumen $\frac{\pi x^3}{3}$ hasta la altura x. Si el agua entra en el depósito a una velocidad de 1m^3/min, halle la altura del agua en el depósito después de 5 min. Halle el cambio de altura entre 5 min y 10 min.

232. Un depósito cilíndrico horizontal tiene una sección transversal $A(x) = 4\left(6x - x^2\right) m^2$ a una altura de x metros sobre el fondo cuando $x \leq 3$.

a. El volumen V entre las alturas a y b es $\int_a^b A(x)\,dx$. Halle el volumen en las alturas comprendidas entre 2 m y 3 m.

b. Supongamos que se está bombeando aceite al tanque a una velocidad de 50 L/min. Utilizando la regla de la cadena, $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dV}\frac{dV}{dt}$, ¿a cuántos metros por minuto cambia la altura del aceite en el depósito, expresada en términos de x, cuando la altura está a x metros?

c. ¿Cuánto tiempo se tarda en llenar el depósito hasta 3 m partiendo de un nivel de llenado de 2 m?

233. La siguiente tabla muestra la potencia eléctrica en gigavatios (la tasa de consumo de energía) que se utiliza en una ciudad en diferentes horas del día, en un periodo típico de 24 horas, donde la hora 1 va desde la medianoche hasta la 1 a. m.

Hora	Potencia	Hora	Potencia
1	28	13	48
2	25	14	49
3	24	15	49
4	23	16	50
5	24	17	50
6	27	18	50
7	29	19	46
8	32	20	43
9	34	21	42
10	39	22	40
11	42	23	37
12	46	24	34

Halle la cantidad total de energía en gigavatios-hora (gW-h) que la ciudad consume en un periodo típico de 24 horas.

234. El uso promedio de energía eléctrica residencial (en cientos de vatios) por hora se indica en la siguiente tabla.

Hora	Potencia	Hora	Potencia
1	8	13	12
2	6	14	13
3	5	15	14
4	4	16	15
5	5	17	17
6	6	18	19
7	7	19	18
8	8	20	17
9	9	21	16
10	10	22	16
11	10	23	13
12	11	24	11

a. Calcule la energía total promedio utilizada en un día en kilovatios-hora (kWh).
b. Si una tonelada de carbón genera 1842 kWh, ¿cuánto tiempo tarda una residencia común en quemar una tonelada de carbón?
c. Explique por qué los datos pueden encajar en un gráfico de la forma $p\left(t\right)=11{,}5-7{,}5\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

235. Los datos de la siguiente tabla se utilizan para estimar la potencia media producida por Peter Sagan en cada uno de los últimos 18 segundos de la Etapa 1 del Tour de Francia de 2012.

Segundo	Vatios	Segundo	Vatios
1	600	10	1200
2	500	11	1170
3	575	12	1125
4	1050	13	1.100
5	925	14	1075
6	950	15	1.000
7	1050	16	950
8	950	17	900
9	1.100	18	780

Tabla 5.6 Potencia promedio de salida
Fuente: sportsexercisengineering.com

Calcule la energía neta utilizada en kilojulios (kJ), teniendo en cuenta que 1W = 1 J/s, y la potencia media producida por Sagan durante este intervalo de tiempo.

236. Los datos de la siguiente tabla se utilizan para estimar la potencia media producida por Peter Sagan en cada intervalo de 15 minutos de la Etapa 1 del Tour de Francia de 2012.

Minutos	Vatios	Minutos	Vatios
15	200	165	170
30	180	180	220
45	190	195	140
60	230	210	225
75	240	225	170
90	210	240	210
105	210	255	200
120	220	270	220
135	210	285	250
150	150	300	400

Tabla 5.7 Potencia promedio de salida
Fuente: sportsexercisengineering.com

Calcule la energía neta utilizada en kilojulios, teniendo en cuenta que 1W = 1 J/s.

237. En la siguiente tabla se muestran los ingresos en Estados Unidos a partir de 2012 en incrementos de 5.000 dólares. La fila k–ésima indica el porcentaje de hogares con ingresos entre $\$5.000xk$ y $5.000xk + 4.999$. La fila $k = 40$ contiene todos los hogares con ingresos entre 200.000 y 250.000 dólares.

0	3,5	21	1,5
1	4,1	22	1,4
2	5,9	23	1.3
3	5,7	24	1.3
4	5,9	25	1,1
5	5,4	26	1,0
6	5,5	27	0,75
7	5,1	28	0,8
8	4,8	29	1,0
9	4,1	30	0,6
10	4,3	31	0,6
11	3,5	32	0,5
12	3,7	33	0,5
13	3,2	34	0,4
14	3,0	35	0,3
15	2,8	36	0,3
16	2,5	37	0,3
17	2,2	38	0,2
18	2,2	39	1,8
19	1,8	40	2,3
20	2,1		

Tabla 5.8 Distribución de los ingresos
Fuente: http://www.census.gov/prod/2013pubs/p60-245.pdf

a. Estime el porcentaje de hogares estadounidenses en 2012 con ingresos inferiores a 55.000 dólares.
b. ¿Qué porcentaje de hogares tiene ingresos superiores a 85.000 dólares?
c. Grafique los datos e intente ajustar su forma a la de un gráfico de la forma $a\,(x + c)\,e^{-b(x+e)}$ para que corresponda a a, b, c.

238. La ley de la gravedad de Newton establece que la fuerza gravitatoria ejercida por un objeto de masa *M* y otro de masa *m* con centros separados por una distancia *r* es $F = G\frac{mM}{r^2}$, con *G* como constante empírica $G = 6{,}67x10^{-11}\ m^3/\left(kg.\ s^2\right)$. El trabajo realizado por una fuerza variable en un intervalo $[a, b]$ se define como $W = \int_a^b F(x)\,dx$. Si la Tierra tiene masa de $5{,}97219 \times 10^{24}$ y radio de 6371 km, calcule la cantidad de trabajo para elevar un satélite meteorológico polar de masa 1.400 kg hasta su altitud de órbita de 850 km sobre la Tierra.

239. En un vehículo de cierto tipo de motor, la desaceleración máxima alcanzable por el frenado es de aproximadamente 7 m/s^2 en hormigón seco. En el asfalto húmedo, es de aproximadamente 2,5 m/s^2. Dado que 1 mph corresponde a 0,447 m/s, halle la distancia total que recorre un auto en metros sobre hormigón seco después de aplicar los frenos hasta que se detiene por completo si la velocidad inicial es de 67 mph (30 m/s) o si la velocidad inicial de frenado es de 56 mph (25 m/s). Halle las distancias correspondientes si la superficie es asfalto húmedo y resbaladizo.

240. John tiene 25 años y pesa 160 lb. Quema $500 - 50t$ calorías/h mientras monta en bicicleta durante *t* horas. Si una galleta de avena tiene 55 cal y Juan se come 4t galletas durante la t–ésima hora, ¿cuántas calorías netas pierde después de 3 horas montando en bicicleta?

241. Sandra tiene 25 años y pesa 120 libras. Quema $300 - 50t$ cal/h mientras se ejercita en su máquina caminadora. Su consumo de calorías al beber Gatorade es de 100t calorías durante la t–ésima hora. ¿Cuál es su disminución neta de calorías después de caminar por 3 horas?

242. Un automóvil tiene una eficiencia máxima de 33 mpg a una velocidad de crucero de 40 mph. La eficiencia cae a un ritmo de 0,1 mpg/mph entre 40 mph y 50 mph, y a una tasa de 0,4 mpg/mph entre 50 mph y 80 mph. ¿Cuál es la eficiencia en millas por galón si el auto va a una velocidad de crucero de 50 mph? ¿Cuál es la eficiencia en millas por galón si el auto va a 80 mph? Si la gasolina cuesta 3,50 $/gal, ¿cuál es el costo del combustible para recorrer 50 millas a 40 mph, a 50 mph y a 80 mph?

243. Aunque algunos motores son más eficientes con una potencia determinada en caballos de fuerza que otros, en promedio, la eficiencia del combustible disminuye con la potencia a una tasa de $1/25$ mpg/caballo de fuerza Si un motor típico de 50 caballos de fuerza tiene un rendimiento medio de combustible de 32 mpg, ¿cuál es el rendimiento medio de combustible de un motor con los siguientes caballos de fuerza? ¿150, 300, 450?

244. **[T]** La siguiente tabla muestra el calendario de 2013 del impuesto federal sobre la renta en función de la renta imponible.

Rango de la renta imponible	El impuesto es...	... Por la cantidad superior a
$0-$8.925	10 %	$0
$8.925-$36.250	$892,50 + 15 %	$8.925
$36.250-$87.850	$4.991,25 + 25 %	$36.250
$87.850-$183.250	$17.891,25 + 28 %	$87.850
$183.250-$398.350	$44.603,25 + 33 %	$183.250
$398.350-$400.000	$115.586,25 + 35 %	$398.350
> $400.000	$116.163,75 + 39,6 %	$400.000

Tabla 5.9 Impuesto federal sobre la renta en función de la renta imponible *Fuente*: http://www.irs.gov/pub/irs-prior/i1040tt--2013.pdf.

Supongamos que Steve acaba de recibir un aumento de 10.000 dólares. ¿Cuánto queda de este aumento después de los impuestos federales si el salario de Steve antes de recibir el aumento era de 40.000 dólares? ¿Si era de 90.000 dólares? ¿Si era de 385.000 dólares?

245. **[T]** La siguiente tabla proporciona datos hipotéticos sobre el nivel de servicio de cierta autopista.

Rango de velocidad en autopista (mph)	Vehículos por hora por carril	Rango de densidad (vehículos/mi)
> 60	< 600	< 10
60–57	600–1.000	10–20
57–54	1.000–1.500	20–30
54–46	1.500–1.900	30–45
46–30	1.900–2.100	45–70
< 30	Es inestable	70–200

Tabla 5.10

a. Represente los vehículos por hora por carril en el eje x y la velocidad de la autopista en el eje y.
b. Calcule la disminución promedio en la velocidad (en millas por hora) por unidad de aumento en la congestión (vehículos por hora por carril) a medida que esta última aumenta de 600 a 1.000, de 1.000 a 1.500 y de 1.500 a 2.100. ¿La disminución de las millas por hora depende linealmente del aumento de los vehículos por hora por carril?
c. Grafique los minutos por milla (60 veces el recíproco de las millas por hora) en función de los vehículos por hora por carril. ¿Esta función es lineal?

En los dos ejercicios siguientes utilice los datos de la siguiente tabla, que muestra las poblaciones de águila calva desde 1963 hasta 2000 en el territorio continental de Estados Unidos.

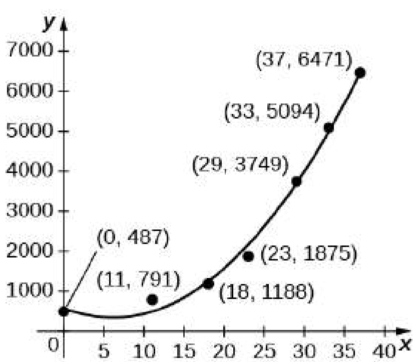
Año	Población de parejas reproductoras de águilas calvas
1963	487
1974	791

Tabla 5.11 Población de parejas reproductoras de águilas calvas *Fuente*: http://www.fws.gov/Midwest/eagle/population/chtofprs.html.

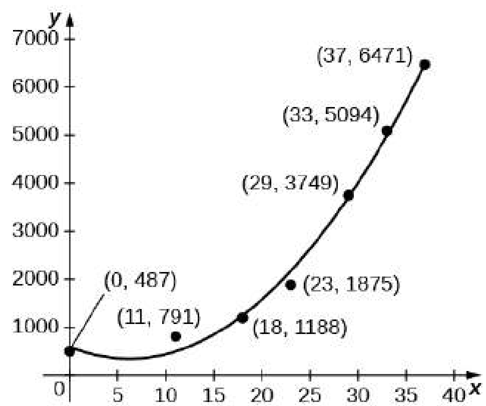
Año	Población de parejas reproductoras de águilas calvas
1981	1188
1986	1875
1992	3749
1996	5094
2000	6471

Tabla 5.11 Población de parejas reproductoras de águilas calvas *Fuente*: http://www.fws.gov/Midwest/eagle/population/chtofprs.html.

246. **[T]** El siguiente gráfico traza la curva cuadrática $p(t) = 6{,}48t^2 - 80{,}3\,1t + 585{,}69$ contra los datos de la tabla anterior, normalizados de manera que $t = 0$ corresponde a 1963. Estime el número medio de águilas calvas por año presentes durante los 37 años calculando el valor promedio de p sobre $[0, 37]$.

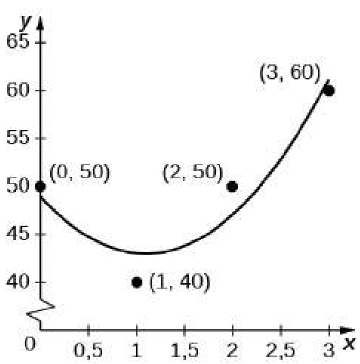


247. **[T]** El siguiente gráfico representa la curva cúbica $p(t) = 0{,}07t^3 + 2{,}42t^2 - 25{,}63t + 521{,}23$ con los datos de la tabla anterior, normalizados de forma que $t = 0$ corresponde a 1963. Estime el número medio de águilas calvas por año presentes durante los 37 años calculando el valor promedio de p sobre $[0, 37]$.



248. **[T]** Suponga que hace un viaje por carretera y registra tu velocidad cada media hora, como se recoge en la siguiente tabla. El mejor ajuste cuadrático a los datos es $q(t) = 5x^2 - 11x + 49$, que se muestra en el gráfico adjunto. Integre q para estimar la distancia total recorrida en 3 horas.

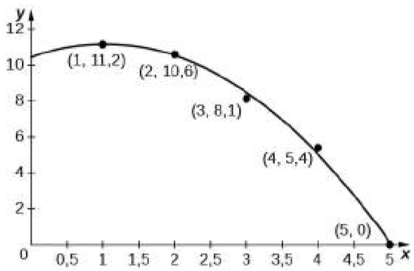
Tiempo (h)	Velocidad (mph)
0 (inicio)	50
1	40
2	50
3	60



Cuando un auto acelera, no lo hace a un ritmo constante, sino que la aceleración es variable. En los siguientes ejercicios, utilice la siguiente tabla, que muestra la aceleración medida en cada segundo mientras un conductor se incorpora a una autopista.

Tiempo (s)	Aceleración (mph/s)
1	11,2
2	10,6
3	8,1
4	5,4
5	0

249. **[T]** El gráfico adjunto muestra el mejor ajuste cuadrático, $a(t) = -0{,}70t^2 + 1{,}44t + 10{,}44$, a los datos de la tabla anterior. Calcule el valor promedio de $a(t)$ para estimar la aceleración media entre $t = 0$ y $t = 5$.

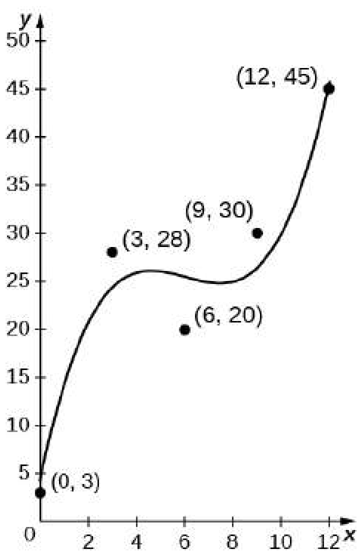


250. **[T]** Usando su ecuación de aceleración del ejercicio anterior, halle la ecuación de velocidad correspondiente. Suponiendo que la velocidad final es de 0 mph, halle la velocidad en el tiempo $t = 0$.

251. **[T]** Utilizando su ecuación de velocidad del ejercicio anterior, halle la ecuación de distancia correspondiente, asumiendo que su distancia inicial es 0 mi. ¿Qué distancia recorrió mientras aceleraba su auto? (*Pista:* Tendrá que convertir las unidades de tiempo).

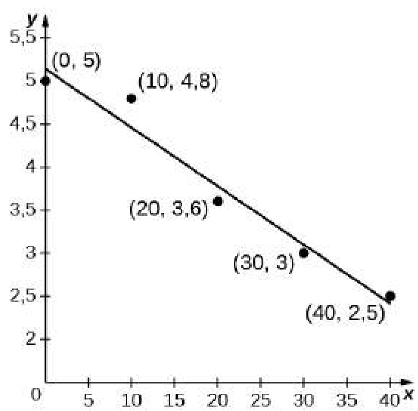
252. **[T]** El número de hamburguesas que se venden en un restaurante a lo largo del día se muestra en la siguiente tabla, con un gráfico adjunto que representa el mejor ajuste cúbico a los datos, $b(t) = 0{,}12t^3 - 2{,}13t^3 + 12{,}13t + 3{,}91$, con la $t = 0$ correspondiente a las 9 a. m. y $t = 12$ correspondiente a las 9 p. m. Calcule el valor medio de $b(t)$ para estimar el número promedio de hamburguesas vendidas por hora.

Horas después de la medianoche	Número de hamburguesas vendidas
9	3
12	28
15	20
18	30
21	45



253. **[T]** Una atleta corre junto a un detector de movimiento que registra su velocidad, como se muestra en la siguiente tabla. El mejor ajuste lineal a estos datos, $\ell(t) = -0{,}068t + 5{,}14$, se muestra en el gráfico adjunto. Utilice el valor medio de $\ell(t)$ entre $t = 0$ y $t = 40$ para estimar la velocidad media de la corredora

Minutos	Velocidad (m/s)
0	5
10	4,8
20	3,6
30	3,0
40	2,5



5.5 Sustitución

Objetivos de aprendizaje

5.5.1 Utilizar la sustitución para evaluar integrales indefinidas.
5.5.2 Utiliza la sustitución para evaluar integrales definidas.

El teorema fundamental del cálculo nos dio un método para evaluar integrales sin usar las sumas de Riemann. Este método no obstante tiene el inconveniente de que debemos ser capaces de encontrar una antiderivada, y esto no siempre es fácil. En esta sección examinaremos una técnica, llamada **integración por sustitución**, que nos ayudará a encontrar antiderivadas. En concreto, este método nos ayuda a encontrar las antiderivadas cuando el integrando es el resultado de una derivada en cadena.

Al principio, el planteamiento del procedimiento de sustitución puede no parecer lo bastante evidente. Sin embargo, es una tarea principalmente visual, es decir, el integrando le muestra lo que debe hacer; es cuestión de reconocer la forma de la función. Entonces, ¿qué se supone que debemos ver? Buscamos un integrando de la forma $f\left[g(x)\right]g'(x)dx$. Por ejemplo, en la integral $\int \left(x^2-3\right)^3 2xdx$, tenemos $f(x)=x^3$, $g(x)=x^2-3$, y $g'(x)=2x$. Entonces,

$$f\left[g(x)\right]g'(x)=\left(x^2-3\right)^3(2x),$$

y vemos que nuestro integrando está en la forma correcta.

El método se llama *de sustitución* porque sustituimos parte del integrando por la variable *u* y parte del integrando por *du*. También se denomina **cambio de variables** porque cambiamos las variables para obtener una expresión más fácil de trabajar para aplicar las reglas de integración.

Teorema 5.7

Sustitución con integrales indefinidas

Supongamos que $u=g(x)$, , donde $g'(x)$ es continua en un intervalo, supongamos que $f(x)$ es continua en el rango correspondiente de *g*, y que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx &= \int f(u)\,du \\ &= F(u)+C \\ &= F(g(x))+C.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Prueba

Sean *f*, *g*, *u* y *F* los especificados en el teorema. Entonces

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dx}F(g(x)) &= F'(g(x))g'(x) \\ &= f\left[g(x)\right]g'(x).\end{aligned}$$

Al integrar ambos lados con respecto a *x*, vemos que

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx=F(g(x))+C.$$

Si ahora sustituimos $u=g(x)$, y $du=g'(x)\,dx$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx &= \int f(u)\,du \\ &= F(u)+C \\ &= F(g(x))+C.\end{aligned}$$

□

Volviendo al problema que analizamos originalmente, supongamos que $u=x^2-3$ y luego $du=2xdx$. Reescriba la integral en términos de *u*:

$$\int \underbrace{\left(x^2-3\right)}_{u}{}^{3}\underbrace{(2xdx)}_{du}=\int u^3\,du.$$

Al utilizar la regla de la potencia para las integrales, tenemos

$$\int u^3\,du=\frac{u^4}{4}+C.$$

Sustituya la expresión original de *x* en la solución:

$$\frac{u^4}{4}+C=\frac{\left(x^2-3\right)^4}{4}+C.$$

Podemos generalizar el procedimiento en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Integración por sustitución

1. Fíjese bien en el integrando y seleccione una expresión $g(x)$ dentro del integrando para establecerlo igual a *u*. Seleccionemos $g(x)$. de manera que $g'(x)$ también forma parte del integrando.
2. Sustituya $u=g(x)$ y $du=g'(x)dx$. en la integral.
3. Ahora deberíamos ser capaces de evaluar la integral con respecto a *u*. Si la integral no puede ser evaluada, tenemos que devolvernos y seleccionar una expresión diferente para usarla como *u*.
4. Evalúe la integral en términos de *u*.
5. Escriba el resultado en términos de *x* y la expresión $g(x)$.

EJEMPLO 5.30

Uso de la sustitución para encontrar una antiderivada

Utilice la sustitución para calcular la antiderivada $\int 6x\left(3x^2+4\right)^4 dx.$

Solución

El primer paso es elegir una expresión para *u*. Elegimos $u=3x^2+4$ porque entonces $du=6xdx$, y ya tenemos *du* en el integrando. Escriba la integral en términos de *u*:

$$\int 6x\left(3x^2+4\right)^4 dx=\int u^4 du.$$

Recuerde que *du* es la derivada de la expresión elegida para *u*, sin importar lo que haya dentro del integrando. Ahora podemos evaluar la integral con respecto a *u*:

$$\begin{aligned}\int u^4 du &= \frac{u^5}{5}+C\\ &= \frac{\left(3x^2+4\right)^5}{5}+C.\end{aligned}$$

Análisis

Podemos comprobar nuestra respuesta tomando la derivada del resultado de la integración. Deberíamos obtener el integrando. Escogiendo un valor para *C* de 1, suponemos que $y=\frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^5+1$. Tenemos

$$y=\frac{1}{5}\left(3x^2+4\right)^5+1,$$

así que

$$\begin{aligned}y' &= \left(\tfrac{1}{5}\right)5\left(3x^2+4\right)^4 6x\\ &= 6x\left(3x^2+4\right)^4.\end{aligned}$$

Esta es exactamente la expresión con la que empezamos dentro del integrando.

5.25 Utilice la sustitución para calcular la antiderivada $\int 3x^2\left(x^3-3\right)^2 dx.$

A veces tenemos que ajustar las constantes de nuestra integral si no coinciden exactamente con las expresiones que estamos sustituyendo.

EJEMPLO 5.31

Utilizar la sustitución con la alteración

Utilice la sustitución para calcular $\int z\sqrt{z^2-5}\,dz$.

Solución

Reescriba la integral como $\int z\left(z^2-5\right)^{1/2}dz$. Supongamos que $u=z^2-5$ y $du=2z\,dz$. Ahora tenemos un problema porque $du=2z\,dz$ y la expresión original solo tiene $z\,dz$. Tenemos que alterar nuestra expresión para *du* o la integral en *u* será el doble de grande de lo que debería ser. Si multiplicamos ambos lados de la ecuación *du* por $\frac{1}{2}$. podemos resolver este problema. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u &= z^2-5 \\ du &= 2z\,dz \\ \tfrac{1}{2}du &= \tfrac{1}{2}(2z)\,dz = z\,dz. \end{aligned}$$

Escriba la integral en términos de *u*, pero saque la $\frac{1}{2}$ fuera del símbolo de integración:

$$\int z\left(z^2-5\right)^{1/2}dz = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du.$$

Integre la expresión en *u*:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}du &= \left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)u^{3/2}+C \\ &= \tfrac{1}{3}u^{3/2}+C \\ &= \tfrac{1}{3}\left(z^2-5\right)^{3/2}+C. \end{aligned}$$

5.26 Utilice la sustitución para calcular $\int x^2\left(x^3+5\right)^9dx$.

EJEMPLO 5.32

Uso de la sustitución con integrales de funciones trigonométricas

Utilice la sustitución para evaluar la integral $\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}dt$.

Solución

Sabemos que la derivada de $\cos t$ ¿es $-\operatorname{sen} t$, así que establecemos $u=\cos t$. Entonces $du=-\operatorname{sen} t\,dt$. Sustituyendo en la integral, tenemos

$$\int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}dt = -\int \frac{du}{u^3}.$$

Al evaluar la integral, obtenemos

$$\begin{aligned} -\int \frac{du}{u^3} &= -\int u^{-3}\,du \\ &= -\left(-\tfrac{1}{2}\right) u^{-2} + C. \end{aligned}$$

Volviendo a poner la respuesta en términos de *t*, obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^3 t}\,dt &= \frac{1}{2u^2} + C \\ &= \frac{1}{2\cos^2 t} + C. \end{aligned}$$

5.27 Utilice la sustitución para evaluar la integral $\displaystyle\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt.$

A veces necesitamos manipular una integral de forma más complicada que simplemente multiplicar por o dividir entre una constante. Tenemos que eliminar todas las expresiones dentro del integrando que están en términos de la variable original. Cuando finalicemos, *u* debería ser la única variable en el integrando. En algunos casos, esto significa resolver la variable original en términos de *u*. El siguiente ejemplo debería aclararnos esta técnica.

EJEMPLO 5.33

Cómo encontrar una antiderivada mediante la sustitución en *u*

Utilice la sustitución para calcular la antiderivada $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx.$

Solución

Supongamos que $u = x-1$, entonces $du = dx$. Pero esto no tiene en cuenta la *x* en el numerador del integrando. Necesitamos expresar *x* en términos de *u*. Si los valores de $u = x-1$, entonces $x = u + 1$. Ahora podemos reescribir la integral en términos de *u*:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \int \frac{u+1}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \int \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\ &= \int \left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right) du. \end{aligned}$$

A continuación integramos de la forma habitual, sustituimos *u* por la expresión original, y factorizamos y simplificamos el resultado. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right) du &= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + 2u^{1/2} + C \\ &= \tfrac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + C \\ &= (x-1)^{1/2}\left[\tfrac{2}{3}(x-1) + 2\right] + C \\ &= (x-1)^{1/2}\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3} + \tfrac{6}{3}\right) \\ &= (x-1)^{1/2}\left(\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}\right) \\ &= \tfrac{2}{3}(x-1)^{1/2}(x+2) + C. \end{aligned}$$

5.28 Utilice la sustitución para evaluar la integral indefinida $\int \cos^3 t \operatorname{sen} t \, dt$.

Sustitución de integrales definidas

La sustitución también se puede utilizar con las integrales definidas. Sin embargo, el uso de la sustitución para evaluar una integral definida exige un cambio en los límites de integración. Si cambiamos las variables en el integrando, los límites de integración también cambian.

Teorema 5.8

Sustitución con integrales definidas

Supongamos que $u = g(x)$ y supongamos que g' es continua en un intervalo $[a, b]$, y que f es continua en el rango de $u = g(x)$. Entonces,

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Aunque no demostraremos formalmente este teorema, lo justificamos con algunos cálculos. A partir de la regla de sustitución de integrales indefinidas, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, tenemos

$$\int f(g(x))\, g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b f[g(x)]\, g'(x) dx &= F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du, \end{aligned} \tag{5.20}$$

y obtenemos el resultado deseado.

EJEMPLO 5.34

Uso de la sustitución para evaluar una integral definida

Utilice la sustitución para evaluar $\int_0^1 x^2 \left(1 + 2x^3\right)^5 dx$.

Solución

Supongamos que $u = 1 + 2x^3$, así que $du = 6x^2 dx$. Como la función original incluye un factor de x^2 y $du = 6x^2 dx$, multiplicamos ambos lados de la ecuación *du* por $1/6$. Entonces,

$$\begin{aligned} du &= 6x^2 dx \\ \frac{1}{6} du &= x^2 dx. \end{aligned}$$

Para ajustar los límites de la integración, tenga en cuenta que cuando $x = 0, u = 1 + 2(0) = 1$, y cuando $x = 1, u = 1 + 2(1) = 3$. Entonces

$$\int_0^1 x^2 \left(1 + 2x^3\right)^5 dx = \frac{1}{6} \int_1^3 u^5 du.$$

Al evaluar esta expresión, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}\int_1^3 u^5\,du &= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{u^6}{6}\right)\Big|_1^3 \\ &= \frac{1}{36}\left[(3)^6-(1)^6\right] \\ &= \frac{182}{9}.\end{aligned}$$

5.29 Utilice la sustitución para evaluar la integral definida $\int_{-1}^{0} y\left(2y^2-3\right)^5 dy.$

EJEMPLO 5.35

Uso de la sustitución con una función exponencial

Utilice la sustitución para evaluar $\int_0^1 xe^{4x^2+3}dx.$

Solución

Supongamos que $u=4x^2+3$. Entonces, $du=8xdx$. Para ajustar los límites de integración, observamos que cuando $x=0, u=3$, y cuando $x=1, u=7$. Así que nuestra sustitución da como resultado

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{4x^2+3}dx &= \frac{1}{8}\int_3^7 e^u\,du \\ &= \frac{1}{8}e^u\Big|_3^7 \\ &= \frac{e^7-e^3}{8} \\ &\approx 134{,}568.\end{aligned}$$

5.30 Utilice la sustitución para evaluar $\int_0^1 x^2\cos\left(\frac{\pi}{2}x^3\right)dx.$

La sustitución puede ser solo una de las técnicas necesarias para evaluar una integral definida. Todas las propiedades y reglas de integración se aplican de forma independiente, y puede ser necesario reescribir las funciones trigonométricas utilizando una identidad trigonométrica antes de aplicar la sustitución. Además, tenemos la opción de sustituir la expresión original por *u* después de encontrar la antiderivada, lo que significa que no tenemos que cambiar los límites de integración. Estos dos enfoques se muestran en el Ejemplo 5.36.

EJEMPLO 5.36

Uso de la sustitución para evaluar una integral trigonométrica

Utilice la sustitución para evaluar $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta.$

Solución

Utilicemos primero una identidad trigonométrica para reescribir la integral. La identidad trigonométrica $\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ nos permite reescribir la integral como

$$\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta.$$

Entonces,

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta.$$

Podemos evaluar la primera integral tal cual, pero para evaluar la segunda integral necesitamos hacer una sustitución. Supongamos que $u = 2\theta$. Entonces, $du = 2d\theta$, o $\frac{1}{2}du = d\theta$. Además, cuando $\theta = 0, u = 0$, y cuando $\theta = \pi/2, u = \pi$. Expresando la segunda integral en términos de *u*, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi} \cos u du \\ &= \frac{\theta}{2}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} u\Big|_{u=0}^{u=\theta} \\ &= \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + (0 - 0) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

SECCIÓN 5.5 EJERCICIOS

254. ¿Por qué la sustitución en *u* se denomina *cambio de variable*?

255. 2. Si los valores de $f = g \circ h$, al invertir la regla de la cadena, $\frac{d}{dx}(g \circ h)(x) = g'(h(x))h'(x)$, debe tomar $u = g(x)$ o $u = h(x)$?

En los siguientes ejercicios, compruebe cada identidad utilizando la diferenciación. Entonces, utilizando la sustitución en u indicada, identifique f tal que la integral tome la forma $\int f(u)\, du$.

256. $\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{15}(x+1)^{3/2}(3x-2) + C; u = x+1$

257. Para $x > 1 : \int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{2}{15}\sqrt{x-1}\left(3x^2+4x+8\right) + C; u = x-1$

258. $\int x\sqrt{4x^2+9}dx = \frac{1}{12}\left(4x^2+9\right)^{3/2} + C; u = 4x^2+9$

259. $\int \frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}dx = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2+9} + C; u = 4x^2+9$

260. $\int \frac{x}{(4x^2+9)^2}dx = -\frac{1}{8(4x^2+9)}; u = 4x^2+9$

En los siguientes ejercicios calcule la antiderivada mediante la sustitución indicada.

261. $\int (x+1)^4 dx; u = x+1$

262. $\int (x-1)^5 dx; u = x-1$

263. $\int (2x-3)^{-7} dx; u = 2x-3$

264. $\int (3x-2)^{-11}\,dx; u = 3x-2$

265. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx; u = x^2+1$

266. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx; u = 1-x^2$

267. $\int (x-1)\left(x^2-2x\right)^3 dx; u = x^2-2x$

268. $\int \left(x^2-2x\right)\left(x^3-3x^2\right)^2 dx; u = x^3-3x^2$

269. $\int \cos^3\theta d\theta; u = \operatorname{sen}\theta$
(Pista: $\cos^2\theta = 1-\operatorname{sen}^2\theta$).
grandes.

270. $\int \operatorname{sen}^3\theta d\theta; u = \cos\theta$
(Pista: $\operatorname{sen}^2\theta = 1-\cos^2\theta$).

En los siguientes ejercicios, utilice un cambio de variables adecuado para determinar la integral indefinida.

271. $\int x(1-x)^{99}\,dx$

272. $\int t\left(1-t^2\right)^{10}dt$

273. $\int (11x-7)^{-3}\,dx$

274. $\int (7x-11)^4\,dx$

275. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta d\theta$

276. $\int \operatorname{sen}^7\theta \cos\theta d\theta$

277. $\int \cos^2(\pi t)\operatorname{sen}(\pi t)\,dt$

278. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x dx$
(Pista: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$).
grandes.

279. $\int t\operatorname{sen}\left(t^2\right)\cos\left(t^2\right)dt$

280. $\int t^2\cos^2\left(t^3\right)\operatorname{sen}\left(t^3\right)dt$

281. $\int \frac{x^2}{\left(x^3-3\right)^2}dx$

282. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

283. $\int \frac{y^5}{\left(1-y^3\right)^{3/2}}dy$

284. $\int \cos\theta(1-\cos\theta)^{99}\operatorname{sen}\theta d\theta$

285. $\int \left(1-\cos^3\theta\right)^{10}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta d\theta$

286. $\int (\cos\theta-1)\left(\cos^2\theta-2\cos\theta\right)^3\operatorname{sen}\theta d\theta$

287. $\int \left(\operatorname{sen}^2\theta-2\operatorname{sen}\theta\right)\left(\operatorname{sen}^3\theta-3\operatorname{sen}^2\theta\right)^3\cos\theta d\theta$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para estimar el área bajo la curva utilizando sumas de Riemann a la izquierda con 50 términos, y luego use la sustitución para hallar la respuesta exacta.

288. **[T]** $y = 3(1-x)^2$ en $[0,2]$

289. **[T]** $y = x\left(1-x^2\right)^3$ en $[-1,2]$

290. **[T]** $y = \operatorname{sen}x(1-\cos x)^2$ en $[0,\pi]$

291. **[T]** $y = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}$ en $[-1,1]$

En los siguientes ejercicios, utilice un cambio de variables para evaluar la integral definida.

292. $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$

293. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

294. $\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{5+t^2}}dt$

295. $\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1+t^3}}dt$

296. $\int_0^{\pi/4} \sec^2\theta \tan\theta d\theta$

297. $\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta}d\theta$

En los siguientes ejercicios, evalúe la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ con constante $C = 0$ utilizando la sustitución en u. Luego, grafique la función y la antiderivada sobre el intervalo indicado. Si es posible, estime un valor de C que habría que añadir a la antiderivada para hacerla igual a la integral definida $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, con a el punto final izquierdo del intervalo dado.

298. **[T]** $\int (2x+1)\, e^{x^2+x-6}dx$ en $[-3, 2]$

299. **[T]** $\int \frac{\cos(\ln(2x))}{x}dx$ en $[0, 2]$

300. **[T]** $\int \frac{3x^2+2x+1}{\sqrt{x^3+x^2+x+4}}dx$ en $[-1, 2]$

301. **[T]** $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}dx$ en $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$

302. **[T]** $\int (x+2)\, e^{-x^2-4x+3}\, dx$ en $[-5, 1]$

303. **[T]** $\int 3x^2\sqrt{2x^3+1}dx$ en $[0, 1]$

304. Si los valores de $h(a) = h(b)$ en $\int_a^b g'(h(x))\, h'(x)\, dx$, ¿qué puede decir sobre el valor de la integral?

305. ¿Es la sustitución $u = 1 - x^2$ en la integral definida $\int_0^2 \frac{x}{1-x^2}dx$ es correcta? Si no, ¿por qué no?

En los siguientes ejercicios, utilice un cambio de variables para demostrar que cada integral definida es igual a cero.

306. $\int_0^{\pi} \cos^2(2\theta) \operatorname{sen}(2\theta)\, d\theta$

307. $\int_0^{\sqrt{\pi}} t\cos\left(t^2\right) \operatorname{sen}\left(t^2\right)\, dt$

308. $\int_0^1 (1-2t)\, dt$

309. $\int_0^1 \frac{1-2t}{\left(1+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right)}dt$

310. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)dt$

311. $\int_0^2 (1-t)\cos(\pi t)\, dt$

312. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^2 t \cos t\, dt$

313. Demuestre que el valor promedio de $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ es el mismo que el valor medio de $f(cx)$ en el intervalo $\left[\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right]$ por $c > 0$.

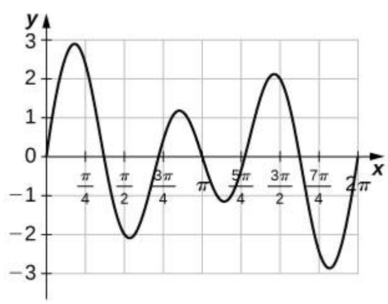
314. Halle el área bajo el gráfico de $f(t) = \frac{t}{\left(1+t^2\right)^a}$ entre $t = 0$ y $t = x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$ es fijo, y evalúe el límite como $x \to \infty$.

315. Halle el área bajo el gráfico de $g(t) = \frac{t}{(1-t^2)^a}$ entre $t = 0$ y $t = x$, donde $0 < x < 1$ y $a > 0$ es fijo. Evalúe el límite como $x \to 1$.

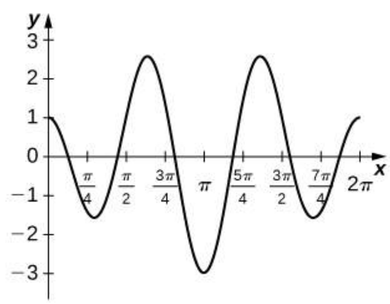
316. El área de un semicírculo de radio 1 puede expresarse como $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$. Utilice la sustitución $x = \cos t$ para expresar el área de un semicírculo como la integral de una función trigonométrica. No es necesario calcular la integral.

317. El área de la mitad superior de una elipse con un eje mayor que es el eje *x* de $x = -a$ a $x = a$ y con un eje menor que es el eje *y* de $y = -b$ al $y = b$ se puede escribir como $\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$. Utilice la sustitución $x = a\cos t$ para expresar esta área en términos de una integral de una función trigonométrica. No es necesario calcular la integral.

318. **[T]** El siguiente gráfico es de una función de la forma $f(t) = a\,\text{sen}(nt) + b\,\text{sen}(mt)$. Estime los coeficientes *a* y *b*, y los parámetros de frecuencia *n* y *m*. Utilice estas estimaciones para aproximar $\int_0^{\pi} f(t)\,dt$.



319. **[T]** El siguiente gráfico es de una función de la forma $f(x) = a\cos(nt) + b\cos(mt)$. Estime los coeficientes *a* y *b* y los parámetros de frecuencia *n* y *m*. Utilice estas estimaciones para aproximar $\int_0^{\pi} f(t)\,dt$.



5.6 Integrales con funciones exponenciales y logarítmicas

Objetivos de aprendizaje

5.6.1 Integrar funciones que impliquen funciones exponenciales.
5.6.2 Integrar funciones que impliquen funciones logarítmicas.

Las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan para modelar el crecimiento de la población, el crecimiento celular y el crecimiento financiero, así como la depreciación, el decaimiento radiactivo y el consumo de recursos, por nombrar solo algunas aplicaciones. En esta sección, exploraremos la integración con funciones exponenciales y logarítmicas.

Integrales de funciones exponenciales

La función exponencial es quizás la función más eficiente en cuanto a las operaciones de cálculo. La función exponencial $y = e^x$, es su propia derivada y su propia integral.

Regla: integrales de funciones exponenciales

Las funciones exponenciales se pueden integrar mediante las siguientes fórmulas.

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (5.21)$$

EJEMPLO 5.37

Hallar una antiderivada de una función exponencial

Halle la antiderivada de la función exponencial e^{-x}.

Solución

Utilice la sustitución, estableciendo $u = -x$, y luego $du = -1dx$. Multiplique la ecuación *du* por -1, por lo que ahora tiene $-du = dx$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int e^{-x}\,dx &= -\int e^u\,du \\ &= -e^u + C \\ &= -e^{-x} + C.\end{aligned}$$

5.31 Halle la antiderivada de la función mediante la sustitución: $x^2 e^{-2x^3}$.

Un error común al tratar con expresiones exponenciales es tratar el exponente en *e* de la misma manera que tratamos los exponentes en las expresiones polinómicas. No podemos utilizar la regla de la potencia para el exponente en *e*. Esto puede ser especialmente confuso cuando tenemos tanto exponenciales como polinomios en la misma expresión, como en el punto de control anterior. En estos casos, siempre debemos verificar que estemos utilizando las reglas correctas en las funciones que estamos integrando.

EJEMPLO 5.38

Raíz cuadrada de una función exponencial

Halle la antiderivada de la función exponencial $e^x\sqrt{1+e^x}$.

Solución

Primero reescriba el problema utilizando un exponente racional:

$$\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \int e^x\left(1+e^x\right)^{1/2}dx.$$

Utilizando la sustitución, elija $u = 1 + e^x$. Entonces, $du = e^x\,dx$. Tenemos (Figura 5.37)

$$\int e^x\left(1+e^x\right)^{1/2}dx = \int u^{1/2}\,du.$$

Entonces

$$\int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}\left(1+e^x\right)^{3/2} + C.$$

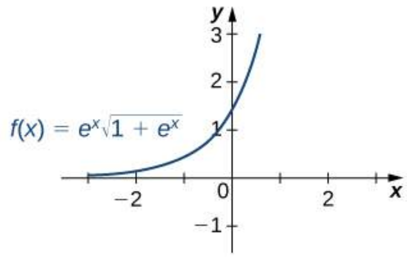


Figura 5.37 El gráfico muestra una función exponencial por la raíz cuadrada de una función exponencial.

5.32 Encuentre la antiderivada de $e^x(3e^x - 2)^2$.

EJEMPLO 5.39

Uso de la sustitución con una función exponencial

Utilice la sustitución para evaluar la integral indefinida $\int 3x^2 e^{2x^3}\,dx$.

Solución

Aquí optamos por dejar que *u* sea igual a la expresión en el exponente sobre *e*. Supongamos que $u = 2x^3$ y $du = 6x^2\,dx.$. De nuevo, *du* se desvía por un multiplicador constante; la función original contiene un factor de $3x^2$, no de $6x^2$. Multiplique ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{2}$ para que el integrando en *u* sea igual al integrando en *x*. Por lo tanto,

$$\int 3x^2 e^{2x^3}\,dx = \frac{1}{2}\int e^u\,du.$$

Integre la expresión en *u* y luego sustituya la expresión original en *x* de nuevo en la integral de *u*:

$$\frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2x^3} + C.$$

5.33 Evalúe la integral indefinida $\int 2x^3 e^{x^4}\,dx$.

Como se mencionó al principio de esta sección, las funciones exponenciales se utilizan en muchas aplicaciones de la vida real. El número *e* se asocia a menudo con el crecimiento compuesto o acelerado, como hemos visto en las secciones anteriores sobre la derivada. Aunque la derivada representa una tasa de cambio o una tasa de crecimiento, la integral representa el cambio total o el crecimiento total. Veamos un ejemplo en el que la integración de una función exponencial resuelve una aplicación empresarial común.

Una función precio-demanda nos indica la relación entre la cantidad de la demanda de un producto y el precio del mismo. En general, el precio disminuye a medida que aumenta la cantidad demandada. La función precio-demanda marginal es la derivada de la función precio-demanda y nos indica la rapidez con la que cambia el precio a un nivel de producción determinado. Las empresas utilizan estas funciones para determinar la elasticidad del precio de la demanda y para determinar si el cambio en los niveles de producción sería rentable.

EJEMPLO 5.40

Hallar una ecuación precio-demanda

Halle la ecuación precio-demanda para una marca concreta de pasta de dientes en una cadena de supermercados cuando la demanda es de 50 tubos por semana a 2,35 dólares el tubo, dado que la función marginal precio-demanda, $p'(x)$, para un número *x* de tubos por semana, se da como

$$p'(x) = -0{,}015e^{-0{,}01x}.$$

Si la cadena de supermercados vende 100 tubos a la semana, ¿qué precio debe fijar?

Solución

Para hallar la ecuación precio-demanda, se integra la función marginal precio-demanda. Primero halle la antiderivada y luego observe los detalles. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} p(x) &= \int -0{,}015e^{-0{,}01x}\,dx \\ &= -0{,}015 \int e^{-0{,}01x}\,dx. \end{aligned}$$

Utilizando la sustitución, supongamos que $u = -0{,}01x$ y $du = -0{,}01dx$. Luego, divida ambos lados de la ecuación *du* por -0,01. Esto da

$$\begin{aligned} \frac{-0{,}015}{-0{,}01} \int e^u\,du &= 1{,}5 \int e^u\,du \\ &= 1{,}5e^u + C \\ &= 1{,}5e^{-0{,}01x} + C. \end{aligned}$$

El siguiente paso es resolver *C*. Sabemos que cuando el precio es de 2,35 dólares por tubo, la demanda es de 50 tubos por semana. Esto significa que

$$\begin{aligned} p(50) &= 1{,}5e^{-0{,}01(50)} + C \\ &= 2{,}35. \end{aligned}$$

Ahora, solo hay que resolver para *C*:

$$\begin{aligned} C &= 2{,}35 - 1{,}5e^{-0{,}5} \\ &= 2{,}35 - 0{,}91 \\ &= 1{,}44. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$p(x) = 1{,}5e^{-0{,}01x} + 1{,}44.$$

Si el supermercado vende 100 tubos de pasta de dientes a la semana, el precio sería

$$p(100) = 1{,}5e^{-0{,}01(100)} + 1{,}44 = 1{,}5e^{-1} + 1{,}44 \approx 1{,}99.$$

El supermercado debería cobrar 1,99 dólares por tubo si vende 100 tubos a la semana.

EJEMPLO 5.41

Evaluación de una integral definida que incluye una función exponencial

Evalúe la integral definida $\int_1^2 e^{1-x}\,dx.$

Solución

De nuevo, la sustitución es el método a utilizar. Supongamos que $u = 1 - x$, así que $du = -1dx$ o $-du = dx$. Entonces $\int e^{1-x}\,dx = -\int e^u\,du$. A continuación, cambie los límites de integración. Si utilizamos la ecuación $u = 1 - x$, tenemos

$$\begin{aligned} u &= 1 - (1) = 0 \\ u &= 1 - (2) = -1. \end{aligned}$$

La integral se convierte entonces en

$$\begin{aligned}\int_1^2 e^{1-x}\,dx &= -\int_0^{-1} e^u\,du \\ &= \int_{-1}^0 e^u\,du \\ &= e^u\Big|_{-1}^0 \\ &= e^0 - \left(e^{-1}\right) \\ &= -e^{-1} + 1\end{aligned}$$

Vea el Figura 5.38.

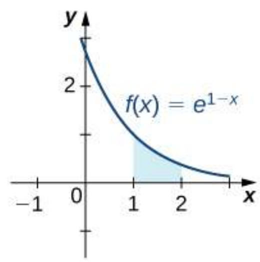


Figura 5.38 El área indicada se puede calcular evaluando una integral definida mediante una sustitución.

5.34 Evalúe $\int_0^2 e^{2x}\,dx.$

EJEMPLO 5.42

Crecimiento de las bacterias en un cultivo

Supongamos que la tasa de crecimiento de las bacterias en una placa de Petri viene dada por $q(t) = 3^t$, donde t está expresado en horas y $q(t)$ en miles de bacterias por hora. Si un cultivo comienza con 10.000 bacterias, halle una función $Q(t)$ que dé el número de bacterias en la placa de Petri en cualquier tiempo t. ¿Cuántas bacterias hay en la placa después de 2 horas?

Solución

Tenemos

$$Q(t) = \int 3^t\,dt = \frac{3^t}{\ln 3} + C.$$

Entonces, en $t = 0$ tenemos $Q(0) = 10 = \frac{1}{\ln 3} + C$, por lo que $C \approx 9{,}090$ y obtenemos

$$Q(t) = \frac{3^t}{\ln 3} + 9{,}090.$$

En el tiempo $t = 2$, tenemos

$$\begin{aligned}Q(2) &= \frac{3^2}{\ln 3} + 9{,}090 \\ &= 17{,}282.\end{aligned}$$

Después de 2 horas, hay 17.282 bacterias en la placa.

5.35 A partir del Ejemplo 5.42, supongamos que las bacterias crecen a una tasa de $q(t) = 2^t$. Supongamos que el cultivo aún comienza con 10.000 bacterias. Halle $Q(t)$. ¿Cuántas bacterias hay en la placa después de 3 horas?

EJEMPLO 5.43

Crecimiento de la población de moscas de la fruta

Supongamos que una población de moscas de la fruta aumenta a un ritmo de $g(t) = 2e^{0{,}02t}$, de moscas al día. Si la población inicial de moscas de la fruta es de 100 individuos, ¿cuántas moscas hay en la población después de 10 días?

Solución

Supongamos que $G(t)$ representa el número de moscas en la población en el tiempo *t*. Si aplicamos el teorema del cambio neto, tenemos

$$\begin{aligned} G(10) &= G(0) + \int_0^{10} 2e^{0{,}02t}\,dt \\ &= 100 + \left[\frac{2}{0{,}02}e^{0{,}02t}\right]\Big|_0^{10} \\ &= 100 + \left[100e^{0{,}02t}\right]\Big|_0^{10} \\ &= 100 + 100e^{0{,}2} - 100 \\ &\approx 122. \end{aligned}$$

Pasados 10 días hay 122 moscas en la población.

5.36 Supongamos que la tasa de crecimiento de la población de moscas viene dada por $g(t) = e^{0{,}01t}$, y la población inicial es de 100 moscas. ¿Cuántas moscas hay en la población después de 15 días?

EJEMPLO 5.44

Evaluación de una integral definida mediante la sustitución

Evalúe la integral definida utilizando la sustitución $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx.$

Solución

Este problema requiere reescribirse para simplificar la aplicación de las propiedades. Primero, reescriba el exponente en *e* como una potencia de *x*, luego lleve la x^2 en el denominador hasta el numerador usando un exponente negativo. Tenemos

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \int_1^2 e^{x^{-1}} x^{-2}\,dx.$$

Supongamos que $u = x^{-1}$, es el exponente en *e*. Entonces

$$\begin{aligned} du &= -x^{-2}\,dx \\ -du &= x^{-2}\,dx. \end{aligned}$$

Llevando el signo negativo fuera del signo de la integral, el problema ahora se lee

$$-\int e^u\,du.$$

A continuación, cambie los límites de integración:

$$u = (1)^{-1} = 1$$
$$u = (2)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Observe que ahora los límites comienzan con el número mayor, lo que significa que debemos multiplicar por -1 e intercambiar los límites. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -\int_1^{1/2} e^u\, du &= \int_{1/2}^1 e^u\, du \\ &= e^u \Big|_{1/2}^1 \\ &= e - e^{1/2} \\ &= e - \sqrt{e}. \end{aligned}$$

5.37 Evalúe la integral definida utilizando la sustitución $\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{4x^{-2}}\, dx.$

Integrales con funciones logarítmicas

Integrar funciones de la forma $f(x) = x^{-1}$ dan como resultado el valor absoluto de la función logarítmica natural, como se muestra en la siguiente regla. Las fórmulas integrales para otras funciones logarítmicas, tales como $f(x) = \ln x$ y $f(x) = \log_a x$, también se incluyen en la regla.

Regla: fórmulas de integración que implican funciones logarítmicas

Las siguientes fórmulas se pueden utilizar para evaluar integrales que implican funciones logarítmicas.

$$\begin{aligned} \int x^{-1}\, dx &= \ln|x| + C \\ \int \ln x\, dx &= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C \\ \int \log_a x\, dx &= \frac{x}{\ln a}(\ln x - 1) + C \end{aligned} \tag{5.22}$$

EJEMPLO 5.45

Encontrar una antiderivada que implique $\ln x$

Halle la antiderivada de la función $\frac{3}{x-10}$.

Solución

Primero factorice el 3 fuera del símbolo de la integral. Entonces utilice la regla u^{-1}. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x-10}dx &= 3\int \frac{1}{x-10}dx \\ &= 3\int \frac{du}{u} \\ &= 3\ln|u| + C \\ &= 3\ln|x-10| + C, x \neq 10.\end{aligned}$$

Vea el Figura 5.39.

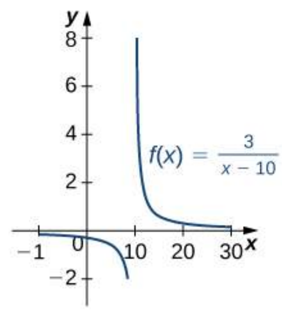


Figura 5.39 El dominio de esta función es $x \neq 10$.

5.38 Encuentre la antiderivada de $\frac{1}{x+2}$.

EJEMPLO 5.46

Encontrar una antiderivada de una función racional

Encuentre la antiderivada de $\frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2}$.

Solución

Esto se puede reescribir como $\int \left(2x^3+3x\right)\left(x^4+3x^2\right)^{-1}dx$. Utilice la sustitución. Supongamos que $u = x^4+3x^2$, entonces $du = 4x^3+6x$. Modifique du mediante la factorización del 2. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} du &= \left(4x^3+6x\right)dx \\ &= 2\left(2x^3+3x\right)dx \\ \frac{1}{2}du &= \left(2x^3+3x\right)dx. \end{aligned}$$

Reescriba el integrando en u:

$$\int \left(2x^3+3x\right)\left(x^4+3x^2\right)^{-1}dx = \frac{1}{2}\int u^{-1}du.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int u^{-1}du &= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^4+3x^2\right| + C.\end{aligned}$$

EJEMPLO 5.47

Hallar una antiderivada de una función logarítmica

Halle la antiderivada de la función logarítmica $\log_2 x$.

Solución

Siga el formato de la fórmula que aparece en la regla sobre fórmulas de integración que implican funciones logarítmicas. Con base en este formato, tenemos

$$\int \log_2 x dx = \frac{x}{\ln 2}(\ln x - 1) + C.$$

5.39 Encuentre la antiderivada de $\log_3 x$.

El Ejemplo 5.48 es una integral definida de una función trigonométrica. Con las funciones trigonométricas, a menudo tenemos que aplicar una propiedad trigonométrica o una identidad antes de avanzar. Hallar la forma correcta del integrando suele ser la clave para una integración sin problemas.

EJEMPLO 5.48

Evaluación de una integral definida

Calcule la integral definida de $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} dx$.

Solución

Necesitamos la sustitución para evaluar este problema. Supongamos que $u = 1 + \cos x$, , así que $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Reescriba la integral en términos de *u*, cambiando también los límites de integración. Por lo tanto,

$$u = 1 + \cos(0) = 2$$
$$u = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} &= -\int_2^1 u^{-1} du \\ &= \int_1^2 u^{-1} du \\ &= \ln|u|\Big|_1^2 \\ &= [\ln 2 - \ln 1] \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

SECCIÓN 5.6 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule cada integral indefinida.

320. $\int e^{2x} dx$

321. $\int e^{-3x} dx$

322. $\int 2^x dx$

323. $\int 3^{-x} dx$

324. $\int \frac{1}{2x} dx$

325. $\int \frac{2}{x} dx$

326. $\int \frac{1}{x^2} dx$

327. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

En los siguientes ejercicios, halle cada integral indefinida utilizando las sustituciones adecuadas.

328. $\int \frac{\ln x}{x} dx$

329. $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

330. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ $(x > 1)$ grandes.

331. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ grandes.

332. $\int \tan \theta \, d\theta$

333. $\int \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x}{x \cos x} dx$

334. $\int \frac{\ln (\operatorname{sen} x)}{\tan x} dx$

335. $\int \ln(\cos x) \tan x dx$

336. $\int x e^{-x^2} dx$

337. $\int x^2 e^{-x^3} dx$

338. $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x dx$

339. $\int e^{\tan x} \sec^2 x dx$

340. $\int e^{\ln x} \frac{dx}{x}$

341. $\int \frac{e^{\ln(1-t)}}{1-t} dt$

En los siguientes ejercicios, verifique por diferenciación que $\int \ln x \, dx = x\,(\ln x - 1) + C$, *entonces utilice los cambios de variables apropiados para calcular la integral.*

342. $\int x \ln x dx$
(Pista: $\int \mathrm{x} \ln x dx = \frac{1}{2} \int x \ln \left(x^2\right) dx$; x>0)

343. $\int x^2 \ln(x^2)\, dx$

344. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
(Pista: Establezca $u = \frac{1}{x}$.).
grandes.

345. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
(Pista: Establezca $u = \sqrt{x}$.).
grandes.

346. Escriba una integral para expresar el área bajo el gráfico de $y = \frac{1}{t}$ a partir de $t = 1$ a e^x y evalúe la integral.

347. Escriba una integral para expresar el área bajo el gráfico de $y = e^t$ entre $t = 0$ y $t = \ln x$, y evalúe la integral.

En los siguientes ejercicios, utilice las sustituciones adecuadas para expresar las integrales trigonométricas en términos de composiciones con logaritmos.

348. $\int \tan (2x)\, dx$

349. $\int \frac{\operatorname{sen} (3x) - \cos (3x)}{\operatorname{sen} (3x) + \cos (3x)} dx$

350. $\int \frac{x \operatorname{sen} \left(x^2\right)}{\cos \left(x^2\right)} dx$

351. $\int x \csc \left(x^2\right) dx$

352. $\int \ln (\cos x) \tan x \, dx$

353. $\int \ln (\csc x) \cot x dx$

354. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

En los siguientes ejercicios, evalúe la integral definida.

355. $\int_1^2 \frac{1 + 2x + x^2}{3x + 3x^2 + x^3} dx$

356. $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

357. $\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} dx$

358. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc x dx$

359. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot x dx$

En los siguientes ejercicios, integre utilizando la sustitución indicada.

360. $\int \frac{x}{x - 100} dx; u = x - 100$

361. $\int \frac{y - 1}{y + 1} dy; u = y + 1$

362. $\int \frac{1 - x^2}{3x - x^3} dx; u = 3x - x^3$

363. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x} dx; u = \operatorname{sen} x - \cos x$

364. $\int e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} dx; u = e^{2x}$

365. $\int \ln(x) \frac{\sqrt{1 - (\ln x)^2}}{x} dx; u = \ln x$

En los siguientes ejercicios, ¿la aproximación del extremo derecho sobrestima o subestima el área exacta? Calcule la estimación del punto extremo derecho R_{50} y resuelva el área exacta.

366. **[T]** $y = e^x$ en $[0, 1]$

367. **[T]** $y = e^{-x}$ en $[0, 1]$

368. **[T]** $y = \ln(x)$ en $[1, 2]$

369. **[T]** $y = \frac{x+1}{x^2+2x+6}$ en $[0, 1]$

370. **[T]** $y = 2^x$ en $[-1, 0]$

371. **[T]** $y = -2^{-x}$ en $[0, 1]$

En los siguientes ejercicios, $f(x) \geq 0$ por $a \leq x \leq b$. Halle el área bajo el gráfico de $f(x)$ entre los valores dados a y b mediante la integración.

372. $f(x) = \frac{\log_{10}(x)}{x}; a = 10, b = 100$

373. $f(x) = \frac{\log_2(x)}{x}; a = 32, b = 64$

374. $f(x) = 2^{-x}; a = 1, b = 2$

375. $f(x) = 2^{-x}; a = 3, b = 4$

376. Halle el área bajo el gráfico de la función $f(x) = xe^{-x^2}$ entre $x = 0$ y $x = 5$.

377. Calcule la integral de $f(x) = xe^{-x^2}$ y calcule el menor valor de N tal que el área debajo del gráfico $f(x) = xe^{-x^2}$ entre $x = N$ y $x = N + 1$ es, como máximo, de 0,01.

378. Halle el límite, cuando *N* tiende a infinito, del área bajo el gráfico de $f(x) = xe^{-x^2}$ entre $x = 0$ y $x = N$.

379. Demuestre que $\int_a^b \frac{dt}{t} = \int_{1/b}^{1/a} \frac{dt}{t}$ cuando $0 < a \le b$.

380. Supongamos que $f(x) > 0$ para toda *x* y que *f* y *g* son diferenciables. Utilice la identidad $f^g = e^{g \ln f}$ y la regla de la cadena para encontrar la derivada de f^g.

381. Utilice el ejercicio anterior para encontrar la antiderivada de $h(x) = x^x(1 + \ln x)$ y evalúe $\int_2^3 x^x(1 + \ln x)\,dx$.

382. Demuestre que si $c > 0$, entonces la integral de $1/x$ de *ac* a *bc* $(0 < a < b)$ es la misma que la integral de $1/x$ de *a* a *b*.

Los siguientes ejercicios pretenden derivar las propiedades fundamentales del logaritmo natural partiendo de la definición $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$*, utilizando las propiedades de la integral definida y sin hacer más suposiciones.*

383. Utilice la identidad $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ para derivar la identidad $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.

384. Utilice un cambio de variable en la integral $\int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt$ para demostrar que $\ln xy = \ln x + \ln y$ para $x, y > 0$.

385. Utilice la identidad $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ para demostrar que $\ln(x)$ es una función creciente de *x* en $[0, \infty)$, y utilice los ejercicios anteriores para demostrar que el rango de $\ln(x)$ es $\left(-\infty, \infty\right)$. Sin más suposiciones, concluya que $\ln(x)$ tiene una función inversa definida en $\left(-\infty, \infty\right)$.

386. Imagine, por el momento, que no sabemos que e^x es la función inversa de $\ln(x)$, pero tenga en cuenta que $\ln(x)$ tiene una función inversa definida en $\left(-\infty, \infty\right)$. Llamémoslo *E*. Use la identidad $\ln xy = \ln x + \ln y$ para deducir que $E(a + b) = E(a)\,E(b)$ para cualquier número real *a*, *b*.

387. Imagine, por el momento, que no sabemos que e^x es la función inversa de $\ln x$, pero tenga en cuenta que $\ln x$ tiene una función inversa definida en $\left(-\infty, \infty\right)$. Llamémoslo *E*. Demuestre que $E'(t) = E(t)$.

388. La integral de seno, definida como $S(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ es una cantidad importante en ingeniería. Aunque no tiene una fórmula cerrada simple, es posible estimar su comportamiento para grandes *x*. Demuestre que para $k \geq 1, |S(2\pi k) - S(2\pi(k+1))| \leq \frac{1}{k(2k+1)\pi}$. $(\text{Pista: } \operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t)$.

389. **[T]** La distribución normal en probabilidad viene dada por $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$, donde σ es la desviación típica y μ es el promedio. La *distribución normal estándar* en probabilidad, p_s, corresponde a $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Calcule las estimaciones del punto extremo correcto R_{10} y R_{100} de $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^{2/2}} dx$.

390. **[T]** Calcule las estimaciones del punto extremo derecho R_{50} y R_{100} de $\int_{-3}^{5} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/8}$.

5.7 Integrales que resultan en funciones trigonométricas inversas

Objetivos de aprendizaje

5.7.1 Integrar funciones que dan lugar a funciones trigonométricas inversas.

En esta sección nos centramos en las integrales que dan lugar a funciones trigonométricas inversas. Ya hemos trabajado con estas funciones. Recordemos que en Funciones y gráficos las funciones trigonométricas no son biunívocas, a menos que los dominios estén restringidos. Al trabajar con las inversas de funciones trigonométricas, siempre hay que tener en cuenta estas restricciones. También en Derivadas, desarrollamos fórmulas para derivadas de funciones trigonométricas inversas. Las fórmulas que se desarrollaron allí generan directamente fórmulas de integración que implican funciones trigonométricas inversas.

Integrales que dan lugar a funciones senoidales inversas

Comencemos esta última sección del capítulo con las tres fórmulas. Junto con estas fórmulas, utilizamos la sustitución para evaluar las integrales. Demostramos la fórmula de la integral inversa de seno.

Regla: fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas

Las siguientes fórmulas de integración generan funciones trigonométricas inversas. Supongamos que $a > 0$:

1.
$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{|a|} + C \tag{5.23}$$

2.
$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C \tag{5.24}$$

3.

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{|a|}\sec^{-1}\frac{|u|}{a} + C(\text{carbono 14}). \tag{5.25}$$

Prueba

Supongamos que $y = \text{sen}^{-1}\frac{x}{a}$. Entonces $a\,\text{sen}\,y = x$. Ahora utilicemos la diferenciación implícita. Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a\,\text{sen}\,y) &= \frac{d}{dx}(x) \\ a\cos y\,\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{a\cos y}. \end{aligned}$$

Para $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \cos y \geq 0$. Así, aplicando la identidad pitagórica $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, tenemos $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}$. Esto da

$$\begin{aligned} \frac{1}{a\cos y} &= \frac{1}{a\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - a^2\,\text{sen}^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Entonces para $-a \leq x \leq a$, y generalizando a *u*, tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C.$$

□

EJEMPLO 5.49

Evaluación de una integral definida mediante funciones trigonométricas inversas

Evalúe la integral definida $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Solución

Podemos ir directamente a la fórmula de la antiderivada en la regla de las fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas, y luego evaluar la integral definida. Tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= \text{sen}^{-1} x\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \text{sen}^{-1}\frac{1}{2} - \text{sen}^{-1} 0 \\ &= \frac{\pi}{6} - 0 \\ &= \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

5.40 Halle la antiderivada de $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 16x^2}}$.

EJEMPLO 5.50

Encontrar una antiderivada que implique una función trigonométrica inversa

Evalúe la integral $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Solución

Sustituya $u = 3x$. Entonces $du = 3dx$ y tenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}}.$$

Aplicando la fórmula con $a = 2$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

5.41 Halle la integral indefinida utilizando una función trigonométrica inversa y la sustitución de $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

EJEMPLO 5.51

Evaluación de una integral definida

Evalúe la integral definida $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Solución

El formato del problema coincide con la fórmula de seno inverso. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \operatorname{sen}^{-1} u\Big|_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \left[\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] - \left[\operatorname{sen}^{-1}(0)\right] \\ &= \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Integrales que resultan en otras funciones trigonométricas inversas

Hay seis funciones trigonométricas inversas. Sin embargo, en la regla sobre fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas solo se anotan tres fórmulas de integración porque las tres restantes son versiones negativas de las que utilizamos. La única diferencia es si el integrando es positivo o negativo. En vez de memorizar tres fórmulas más, si el integrando es negativo, simplemente factorice −1 y evalúe la integral usando una de las fórmulas ya proporcionadas. Para cerrar esta sección, examinaremos una fórmula más: la integral que resulta de la función tangente inversa.

EJEMPLO 5.52

Encontrar una antiderivada que implique la función tangente inversa

Encontrar una antiderivada de $\int \frac{1}{1+4x^2}dx$.

Solución

Comparando este problema con las fórmulas indicadas en la regla sobre las fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas, el integrando se parece a la fórmula de $\tan^{-1} u + C$. Así que utilizamos la sustitución, suponiendo que $u = 2x$, entonces $du = 2dx$ y $1/2du = dx$. Entonces, tenemos

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\tan^{-1} u + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x) + C.$$

5.42 Utilice la sustitución para calcular la antiderivada $\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

EJEMPLO 5.53

Aplicación de las fórmulas de integración

Encuentre la antiderivada de $\int \frac{1}{9+x^2}dx$.

Solución

Aplique la fórmula con $a = 3$. Entonces,

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

5.43 Halle la antiderivada de $\int \frac{dx}{16+x^2}$.

EJEMPLO 5.54

Evaluación de una integral definida

Evalúe la integral definida $\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Solución

Utilice la fórmula de la tangente inversa. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= \tan^{-1} x\Big|_{\sqrt{3}/3}^{\sqrt{3}} \\ &= \left[\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)\right] - \left[\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

5.44 Evalúe la integral definida $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

SECCIÓN 5.7 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, evalúe cada integral en términos de una función trigonométrica inversa.

391. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

392. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

393. $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

394. $\displaystyle\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

395. $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

396. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

En los siguientes ejercicios, halle cada integral indefinida, utilizando las sustituciones adecuadas.

397. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

398. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$

399. $\displaystyle\int \frac{dx}{9+x^2}$

400. $\displaystyle\int \frac{dx}{25+16x^2}$

401. $\displaystyle\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-9}}$

402. $\displaystyle\int \frac{dx}{|x|\sqrt{4x^2-16}}$

403. Explique la relación $-\cos^{-1}t + C = \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{sen}^{-1}t + C.$ ¿Es cierto, en general, que $\cos^{-1}t = -\text{sen}^{-1}t$?

404. Explique la relación $\sec^{-1}t + C = \displaystyle\int \frac{dt}{|t|\sqrt{t^2-1}} = -\csc^{-1}t + C.$ ¿Es cierto, en general, que $\sec^{-1}t = -\csc^{-1}t$?

405. Explique qué falla en la siguiente integral: $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

406. Explique qué falla en la siguiente integral: $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{|t|\sqrt{t^2-1}}.$

En los siguientes ejercicios, resuelva la antiderivada $\int f$ de f con $C = 0$, luego use una calculadora para graficar f y la antiderivada en el intervalo dado $[a, b]$. Identifique un valor de C tal que sumando C a la antiderivada se recupere la integral definida $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

407. **[T]** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ en $[-3, 3]$

408. **[T]** $\displaystyle\int \frac{9}{9+x^2}dx$ en $[-6, 6]$

409. **[T]** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{4+\text{sen}^2 x}dx$ en $[-6, 6]$

410. **[T]** $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ en $[-6, 6]$

En los siguientes ejercicios, calcule la antiderivada utilizando las sustituciones adecuadas.

411. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$

412. $\displaystyle\int \frac{dt}{\operatorname{sen}^{-1} t\sqrt{1-t^2}}$

413. $\displaystyle\int \frac{\tan^{-1}(2t)}{1+4t^2}dt$

414. $\displaystyle\int \frac{t\tan^{-1}\left(t^2\right)}{1+t^4}dt$

415. $\displaystyle\int \frac{\sec^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)}{|t|\sqrt{t^2-4}}dt$

416. $\displaystyle\int \frac{t\sec^{-1}\left(t^2\right)}{t^2\sqrt{t^4-1}}dt$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para graficar la antiderivada $\int f$ con la $C=0$ en el intervalo dado $[a,b]$. Aproxime un valor de C, si es posible, tal que sumando C a la antiderivada se obtenga el mismo valor que la integral definida $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

417. **[T]** $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$ en $[2,6]$

418. **[T]** $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+2)\sqrt{x}}dx$ en $[0,6]$

419. **[T]** $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{sen} x+x\cos x)}{1+x^2\operatorname{sen}^2 x}dx$ en $[-6,6]$

420. **[T]** $\displaystyle\int \frac{2e^{-2x}}{\sqrt{1-e^{-4x}}}dx$ en $[0,2]$

421. **[T]** $\displaystyle\int \frac{1}{x+x\ln^2 x}$ en $[0,2]$

422. **[T]** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ en $[-1,1]$

En los siguientes ejercicios, calcule cada integral utilizando las sustituciones adecuadas.

423. $\displaystyle\int \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}dt$

424. $\displaystyle\int \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt$

425. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}$

426. $\displaystyle\int \frac{dt}{t\left(1+\ln^2 t\right)}$ grandes.

427. $\displaystyle\int \frac{\cos^{-1}(2t)}{\sqrt{1-4t^2}}dt$

428. $\displaystyle\int \frac{e^t\cos^{-1}\left(e^t\right)}{\sqrt{1-e^{2t}}}dt$

En los siguientes ejercicios, calcule cada integral definida.

429. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} t\right)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

430. $\displaystyle\int_{1/4}^{1/2} \frac{\tan\left(\cos^{-1} t\right)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

431. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}\left(\tan^{-1} t\right)}{1+t^2}dt$

432. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\cos\left(\tan^{-1} t\right)}{1+t^2}dt$

433. Para $A>0$, calcule $I(A)=\displaystyle\int_{-A}^{A}\frac{dt}{1+t^2}$ y evalúe $\lim\limits_{a\to\infty} I(A)$, el área bajo el gráfico de $\frac{1}{1+t^2}$ en $\left[-\infty,\infty\right]$.

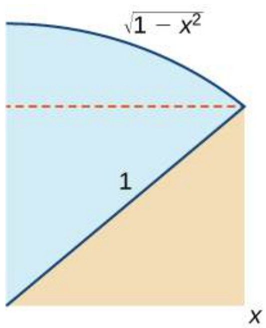
434. Para $1<B<\infty$, calcule $I(B)=\displaystyle\int_1^B \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ y evalúe $\lim\limits_{B\to\infty} I(B)$, el área bajo el gráfico de $\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ en $[1,\infty)$.

435. Utilice la sustitución $u = \sqrt{2}\cot x$ y la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$ para evaluar $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$. (*Pista:* Multiplique la parte superior e inferior del integrando por $\csc^2 x$.).

436. **[T]** Aproxime los puntos en los que los gráficos de $f(x) = 2x^2 - 1$ y $g(x) = \left(1 + 4x^2\right)^{-3/2}$ se intersecan a cuatro decimales y calcule el área entre sus gráficos a tres decimales.

437. 47. **[T]** Aproxime los puntos en los que los gráficos de $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}$ se intersecan a cuatro decimales y calcule el área entre sus gráficos a tres decimales.

438. Utilice el siguiente gráfico para demostrar que $\int_0^x \sqrt{1 - t^2}dt = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\text{sen}^{-1} x.$



Revisión del capítulo

Términos clave

aproximación del punto del extremo derecho aproximación del punto del extremo derecho es una aproximación del área de los rectángulos bajo una curva utilizando el punto del extremo derecho de cada subintervalo para construir los lados verticales de cada rectángulo

aproximación del punto del extremo izquierdo aproximación del área bajo una curva que se calcula utilizando el punto del extremo izquierdo de cada subintervalo para calcular la altura de los lados verticales de cada rectángulo

área neta señalada el área entre una función y el eje *x* tal que el área por debajo del eje *x* se resta del área por encima del eje *x*; el resultado es el mismo que la integral definida de la función

área total el área total entre una función y el eje *x* se calcula sumando el área por encima del eje *x* y el área por debajo del eje *x*; el resultado es el mismo que la integral definida del valor absoluto de la función

cambio de variables sustitución de una variable, como *u*, por una expresión en el integrando

función integrable una función es integrable si el límite que define la integral existe; en otras palabras, si el límite de las sumas de Riemann a medida que *n* llega al infinito existe

integración por sustitución técnica de integración que permite integrar funciones que son el resultado de una derivada en cadena

integral definida una operación primaria del cálculo; el área entre la curva y el eje *x* en un intervalo dado es una integral definida

integrando la función a la derecha del símbolo de integración; el integrando incluye la función que se integra

límites de integración valores que aparecen cerca de la parte superior e inferior del signo de la integral y definen el intervalo sobre el que debe integrarse la función

notación sigma (también, **notación de sumatoria**) la letra griega sigma (Σ) indica la suma de los valores; los valores del índice por encima y por debajo de la sigma indican dónde empezar la suma y dónde terminarla

partición conjunto de puntos que divide un intervalo en subintervalos

partición regular partición en la que los subintervalos tienen todos el mismo ancho

suma de Riemann estimación del área bajo la curva de la forma $A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$

suma inferior suma obtenida utilizando el valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo

suma superior suma obtenida utilizando el valor máximo de $f(x)$ en cada subintervalo

teorema del cambio neto si conocemos la tasa de cambio de una cantidad, el teorema del cambio neto dice que la cantidad futura es igual a la cantidad inicial más la integral de la tasa de cambio de la cantidad

teorema del valor medio para integrales garantiza que existe un punto *c* tal que $f(c)$ es igual al valor medio de la función

teorema fundamental del cálculo teorema central para todo el desarrollo del cálculo, que establece la relación entre la diferenciación y la integración

teorema fundamental del cálculo, parte 1 utiliza una integral definida para definir una antiderivada de una función

teorema fundamental del cálculo, parte 2 (también, **teorema de evaluación**) podemos evaluar una integral definida evaluando la antiderivada del integrando en los puntos extremos del intervalo y restando

valor promedio de una función (o f_{ave}) el valor promedio de una función en un intervalo se puede hallar calculando la integral definida de la función y dividiendo ese valor por la longitud del intervalo

variable de integración indica con respecto a qué variable se está integrando; si es *x*, entonces la función en el integrando va seguida de *dx*

Ecuaciones clave

Propiedades de la notación sigma	$\sum_{i=1}^{n} c = nc$ $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$ $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$ $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i$
Sumas de potencias de números enteros	$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{i=0}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
Aproximación del punto del extremo izquierdo	$A \approx L_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1}\right)\Delta x$
Aproximación del punto del extremo derecho	$A \approx R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
Integral definida	$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x$
Propiedades de la integral definida	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$ $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)$ para la constante c $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
Teorema del valor medio para integrales	Si los valores de $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, entonces hay al menos un punto $c \in [a, b]$ de manera que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema fundamental del cálculo, parte 1	Si los valores de $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$, y la función $F(x)$ se define por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, entonces $F'(x) = f(x)$.
Teorema fundamental del cálculo, parte 2	Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$.
Teorema del cambio neto	$F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)\, dx$ o $\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a)$
Sustitución con integrales indefinidas	$\int f[g(x)]\, g'(x) dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C$
Sustitución con integrales definidas	$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$
Integrales de funciones exponenciales	$\int e^x\, dx = e^x + C$ $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
Fórmulas de integración que implican funciones logarítmicas	$\int x^{-1}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$ $\int \ln x\, dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$ $\int \log_a x\, dx = \frac{x}{\ln a}(\ln x - 1) + C$
Integrales que producen funciones trigonométricas inversas	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

Conceptos clave

5.1 Aproximación de áreas

- El uso de la notación sigma (notación de sumatoria) de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i$ es útil para expresar sumas largas de valores en forma compacta.
- Para una función continua definida en un intervalo $[a, b]$, el proceso de dividir el intervalo en n partes iguales, extender un rectángulo en el gráfico de la función, calcular las áreas de la serie de rectángulos y luego sumar las áreas da una aproximación del área de esa región.
- La anchura de cada rectángulo es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.
- La suma de Riemann es una expresión de la forma $\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right) \Delta x$, y puede utilizarse para estimar el área bajo la

curva $y = f(x)$. Las aproximaciones del punto de los extremos izquierdo y derecho son tipos especiales de sumas de Riemann donde los valores de $\{x_i^*\}$ se eligen entre los extremos izquierdo o derecho de los subintervalos, respectivamente.

- Las sumas de Riemann permiten una gran flexibilidad a la hora de elegir el conjunto de puntos $\{x_i^*\}$ en la que se evalúa la función, a menudo con el objetivo de obtener una suma inferior o una suma superior.

5.2 La integral definida

- La integral definida puede utilizarse para calcular el área neta señalada, que es el área por encima del eje *x*menos el área por debajo del eje *x*. El área neta señalada puede ser positiva, negativa o cero.
- Los componentes de la integral definida son el integrando, la variable de integración y los límites de integración.
- Las funciones continuas en un intervalo cerrado son integrables. Las funciones que no son continuas pueden seguir siendo integrables, dependiendo de la naturaleza de las discontinuidades.
- Las propiedades de las integrales definidas pueden utilizarse para evaluar integrales.
- El área bajo la curva de muchas funciones puede calcularse mediante fórmulas geométricas.
- El valor promedio de una función puede calcularse mediante integrales definidas.

5.3 El teorema fundamental del cálculo

- El teorema del valor medio de las integrales afirma que para una función continua en un intervalo cerrado, existe un valor *c* tal que $f(c)$ es igual al valor medio de la función. Vea el Teorema del valor medio para integrales.
- El teorema fundamental del cálculo, parte 1 muestra la relación entre la derivada y la integral. Vea el Teorema fundamental del cálculo, parte 1.
- El teorema fundamental del cálculo, parte 2 es una fórmula para evaluar una integral definida en términos de una antiderivada de su integrando. El área total bajo una curva se puede encontrar utilizando esta fórmula. Vea el El teorema fundamental del cálculo, parte 2.

5.4 Fórmulas de integración y el teorema del cambio neto

- El teorema del cambio neto establece que cuando una cantidad cambia, el valor final es igual al valor inicial más la integral de la tasa de cambio. El cambio neto puede ser un número positivo, un número negativo o cero.
- El área bajo una función par en un intervalo simétrico se puede calcular duplicando el área sobre el eje *x* positivo. En una función impar, la integral sobre un intervalo simétrico es igual a cero, porque la mitad del área es negativa.

5.5 Sustitución

- La sustitución es una técnica que simplifica la integración de funciones que son el resultado de una derivada en cadena. El término "sustitución" se refiere al cambio de variables o a la sustitución de la variable *u* y *du* por expresiones adecuadas en el integrando.
- Al utilizar la sustitución de una integral definida, es necesario que cambiemos los límites de integración.

5.6 Integrales con funciones exponenciales y logarítmicas

- Las funciones exponenciales y logarítmicas se presentan en muchas aplicaciones del mundo real, especialmente las que implican crecimiento y decaimiento.
- La sustitución se utiliza a menudo para evaluar integrales que implican funciones exponenciales o logaritmos.

5.7 Integrales que resultan en funciones trigonométricas inversas

- Las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas desarrolladas en Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas conducen directamente a fórmulas de integración que implican funciones trigonométricas inversas.
- Utilice las fórmulas indicadas en la regla sobre fórmulas de integración que generan funciones trigonométricas inversas para que coincidan con el formato correcto y haga las modificaciones necesarias para resolver el problema.
- A menudo es necesario hacer sustituciones para poner el integrando en la forma correcta.

Ejercicios de repaso

Verdadero o falso. Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo. Supongamos que todas las funciones f y g son continuas en sus dominios.

439. Si los valores de $f(x) > 0, f'(x) > 0$ para todo x, entonces la regla de la derecha subestima la integral $\int_a^b f(x)$. Utilice un gráfico para justificar su respuesta.

440. $\int_a^b f(x)^2 dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b f(x)dx$

441. Si $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$.

442. Toda función continua tiene una antiderivada.

Evalúe las sumas de Riemann L_4 y R_4 en las siguientes funciones en el intervalo especificado. Compare su respuesta con la respuesta exacta, cuando sea posible, o utilice una calculadora para definir la respuesta.

443. $y = 3x^2 - 2x + 1$ en $[-1, 1]$

444. $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$ en $[0, e]$

445. $y = x^2 \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

446. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ en $[1, 4]$

Evalúe las siguientes integrales.

447. $\int_{-1}^{1} \left(x^3 - 2x^2 + 4x\right) dx$

448. $\int_0^4 \frac{3t}{\sqrt{1 + 6t^2}} dt$

449. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2 \sec(2\theta) \tan(2\theta)\, d\theta$

450. $\int_0^{\pi/4} e^{\cos^2 x} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

Calcule la antiderivada.

451. $\int \frac{dx}{(x + 4)^3}$

452. $\int x \ln\left(x^2\right) dx$

453. $\int \frac{4x^2}{\sqrt{1 - x^6}} dx$

454. $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^{4x}} dx$

Halle la derivada.

455. $\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$

456. $\frac{d}{dx} \int_1^{x^3} \sqrt{4 - t^2} dt$

457. $\frac{d}{dx} \int_1^{\ln(x)} \left(4t + e^t\right) dt$

458. $\frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} e^{t^2} dt$

Los siguientes problemas consideran el costo promedio histórico por gigabyte de RAM en una computadora

Año	Variación en 5 años ($)
1980	0
1985	−5.468.750
1990	−755.495
1995	−73.005
2000	−29.768
2005	−918
2010	−177

459. Si el costo promedio por gigabyte de RAM en 2010 es de 12 dólares, halle el costo medio por gigabyte de RAM en 1980.

460. El costo promedio por gigabyte de RAM puede aproximarse mediante la función $C(t) = 8,500,000(0{,}65)^t$, donde t se mide en años desde 1980 y C es el costo en dólares. Halle el costo promedio por gigabyte de memoria RAM entre 1980 y 2010.

461. Halle el costo promedio de 1GB de RAM entre 2005 y 2010.

462. La velocidad de la bala de un rifle puede aproximarse por $v(t) = 6.400t^2 - 6.505t + 2.686$, donde t es segundos después del disparo y v es la velocidad medida en pies por segundo. Esta ecuación solo modela la velocidad durante el primer medio segundo después del disparo $0 \leq t \leq 0{,}5$. ¿Cuál es la distancia total que recorre la bala en 0,5 segundos?

463. ¿Cuál es la velocidad media de la bala durante el primer medio segundo?

6 APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN

Figura 6.1 La presa Hoover es uno de los lugares emblemáticos de Estados Unidos, y proporciona riego y energía hidroeléctrica a millones de personas en el suroeste del país (créditos: modificación de la obra de Lynn Betts, Wikimedia).

Esquema del capítulo

Introducción

La presa Hoover es una maravilla de la ingeniería. Cuando el lago Mead, el embalse que hay detrás de la presa, está lleno, la presa soporta una gran fuerza. Sin embargo, los niveles de agua del lago varían considerablemente como consecuencia de las sequías y de las distintas demandas de agua. Más adelante en este capítulo utilizaremos las integrales definidas para calcular la fuerza que soporta la presa cuando el embalse está lleno, y examinaremos cómo los cambios en el nivel del agua afectan a esa fuerza (vea el Ejemplo 6.28).

La fuerza hidrostática es solo una de las muchas aplicaciones de las integrales definidas que exploramos en este capítulo. Desde las aplicaciones geométricas como área superficial y volumen, aplicaciones físicas como masa y trabajo, hasta los modelos de crecimiento y decaimiento, las integrales definidas son una herramienta poderosa para ayudarnos a comprender y modelar el mundo que nos rodea.

6.1 Áreas entre curvas

Objetivos de aprendizaje

6.1.1 Determinar el área de una región entre dos curvas integrando con respecto a la variable independiente.
6.1.2 Encontrar el área de una región compuesta.
6.1.3 Determinar el área de una región entre dos curvas integrando con respecto a la variable dependiente.

En Introducción a la integración, desarrollamos el concepto de integral definida para calcular el área bajo una curva en un intervalo dado. En esta sección, ampliaremos esa idea para calcular el área de regiones más complejas. Empezaremos por encontrar el área entre dos curvas que son funciones de x, empezando por el caso simple en el que un valor de la función es siempre mayor que el otro. A continuación, se estudian los casos en los que los gráficos de las funciones se intersecan. Por último, consideraremos cómo calcular el área entre dos curvas que son funciones de y.

Área de una región entre dos curvas

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$ de manera que $f(x) \geq g(x)$ sobre $[a, b]$. Queremos hallar el área entre los gráficos de las funciones, como se muestra en la siguiente figura.

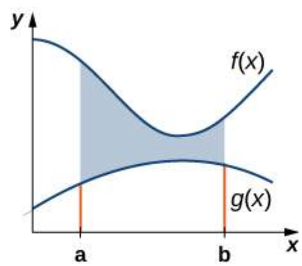


Figura 6.2 El área entre los gráficos de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, en el intervalo $[a, b]$.

Al igual que antes, vamos a dividir el intervalo en el eje x y aproximaremos el área entre los gráficos de las funciones con rectángulos. Entonces, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[a, b]$. Luego, para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, y en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ construya un rectángulo que se extienda verticalmente desde $g(x_i^*)$ al $f(x_i^*)$. La Figura 6.3(a) muestra los rectángulos cuando x_i^* se selecciona para ser el punto extremo izquierdo del intervalo y $n = 10$. La Figura 6.3(b) muestra en detalle un rectángulo representativo.

MEDIOS

Utilice esta calculadora (http://www.openstax.org/l/20_CurveCalc) para saber más sobre las áreas entre dos curvas.

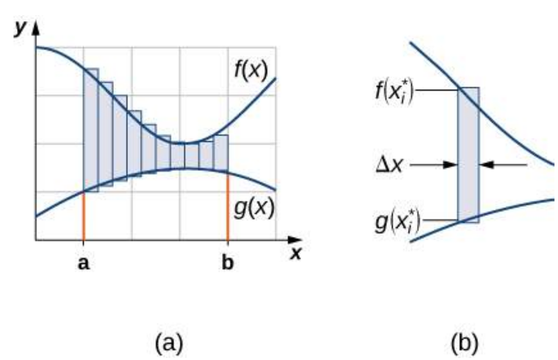


Figura 6.3 (a)Podemos aproximar el área entre los gráficos de dos funciones, $f(x)$ y $g(x)$, con rectángulos. (b) El área de un rectángulo típico va de una curva a la otra.

La altura de cada rectángulo individual es $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ y la anchura de cada rectángulo es Δx. Al sumar las áreas de todos los rectángulos, vemos que el área entre las curvas se aproxima por

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right] \Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann, por lo que tomamos el límite como $n \to \infty$ y obtenemos

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Estas conclusiones se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 6.1

Hallar el área entre dos curvas

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en un intervalo $[a, b]$. Supongamos que R denotan la región delimitada por el gráfico de $f(x)$, abajo por el gráfico de $g(x)$, y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Entonces, el área de R viene dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \tag{6.1}$$

Aplicamos este teorema en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.1

Hallar el área de una región entre dos curvas 1

Si R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x + 4$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 3 - \frac{x}{2}$ en el intervalo $[1, 4]$, calcule el área de la región R.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

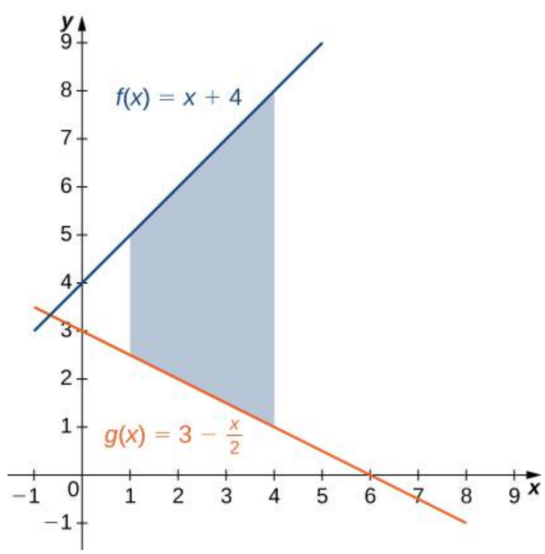


Figura 6.4 Se muestra una región entre dos curvas en la que una de ellas es siempre mayor que la otra.

Tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_1^4 \left[(x+4) - \left(3 - \frac{x}{2}\right)\right] dx = \int_1^4 \left[\frac{3x}{2} + 1\right] dx \\ &= \left[\frac{3x^2}{4} + x\right]\Big|_1^4 = \left(16 - \frac{7}{4}\right) = \frac{57}{4}. \end{aligned}$$

El área de la región es $\frac{57}{4}$ al cuadrado^2.

6.1 Si los valores de R es la región delimitada por los gráficos de las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 5$ y $g(x) = x + \frac{1}{2}$ en el intervalo $[1, 5]$, calcule el área de la región R.

En el Ejemplo 6.1, definimos el intervalo de interés como parte del planteamiento del problema. Sin embargo, frecuentemente queremos definir nuestro intervalo de interés con base en el punto de intersección de los gráficos de las dos funciones. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.2

Hallar el área de una región entre dos curvas 2

Si los valores de R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 9 - (x/2)^2$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 6 - x$, calcule el área de la región R.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

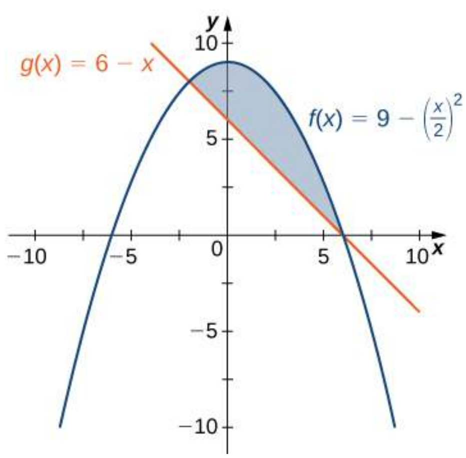


Figura 6.5 Este gráfico muestra la región por debajo del gráfico de $f(x)$ y por encima del gráfico de $g(x)$.

Primero tenemos que calcular dónde se intersecan los gráficos de las funciones. Si establecemos que $f(x) = g(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= 6 - x \\ 9 - \frac{x^2}{4} &= 6 - x \\ 36 - x^2 &= 24 - 4x \\ x^2 - 4x - 12 &= 0 \\ (x-6)(x+2) &= 0, \end{aligned}$$

Los gráficos de las funciones se intersecan cuando $x = 6$ o $x = -2$, por lo que queremos integrar desde -2 al 6. Dado que $f(x) \geq g(x)$ por $-2 \leq x \leq 6,$ obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \\ &= \int_{-2}^{6} \left[9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - (6 - x)\right] dx = \int_{-2}^{6} \left[3 - \frac{x^2}{4} + x\right] dx \\ &= \left[3x - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2}\right]\Big|_{-2}^{6} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

El área de la región es 64/3 unidades^2.

6.2 Si R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = x^4$, calcule el área de la región R.

Áreas de las regiones compuestas

Hasta ahora, hemos requerido $f(x) \geq g(x)$ a lo largo de todo el intervalo de interés, pero ¿qué ocurre si queremos observar las regiones delimitadas por los gráficos de las funciones que se entrecruzan? En ese caso, modificamos el proceso que acabamos de desarrollar utilizando la función de valor absoluto.

Teorema 6.2

Hallar el área de una región entre curvas que se cruzan

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas sobre un intervalo $[a, b]$. Supongamos que R denota la región entre los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$, y está limitado a la izquierda y a la derecha por las rectas $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Entonces, el área de R viene dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

En la práctica, la aplicación de este teorema nos obliga a descomponer el intervalo $[a, b]$ y evaluar varias integrales, dependiendo de cuál de los valores de la función es mayor en una parte determinada del intervalo. Estudiaremos este proceso en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.3

Hallar el área de una región limitada por funciones que se cruzan

Si R es la región entre los gráficos de las funciones $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$, calcule el área de la región R.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

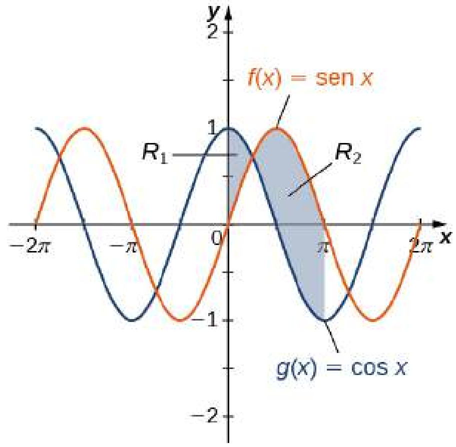


Figura 6.6 La región entre dos curvas puede dividirse en dos subregiones.

Los gráficos de las funciones se cruzan en $x = \pi/4$. Para $x \in [0, \pi/4]$, $\cos x \geq \operatorname{sen} x$, así que

$$|f(x) - g(x)| = |\operatorname{sen} x - \cos x| = \cos x - \operatorname{sen} x.$$

Por otro lado, para $x \in [\pi/4, \pi]$, $\operatorname{sen} x \geq \cos x$, así que

$$|f(x) - g(x)| = |\operatorname{sen} x - \cos x| = \operatorname{sen} x - \cos x.$$

Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \\ &= \int_0^\pi |\operatorname{sen} x - \cos x|\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)\,dx \\ &= [\operatorname{sen} x + \cos x]\,\Big|_0^{\pi/4} + [-\cos x - \operatorname{sen} x]\,\Big|_{\pi/4}^{\pi} \\ &= \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

El área de la región es $2\sqrt{2}$ unidades^2.

6.3 Si R es la región entre los gráficos de las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ en el intervalo $[\pi/2, 2\pi]$, calcule el área de la región R.

EJEMPLO 6.4

Hallar el área de una región compleja

Consideremos la región representada en la Figura 6.7. Calcule el área de R.

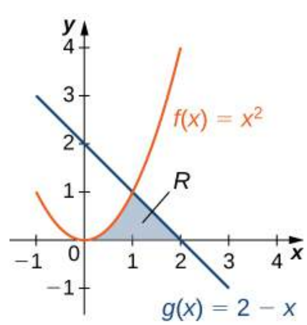


Figura 6.7 Se necesitan dos integrales para calcular el área de esta región.

Solución

Al igual que con el Ejemplo 6.3, tenemos que dividir el intervalo en dos partes. Los gráficos de las funciones se cruzan en $x = 1$ (establezca $f(x) = g(x)$ y resolver para x), así que evaluamos dos integrales separadas: una en el intervalo $[0, 1]$ y uno en el intervalo $[1, 2]$.

En el intervalo $[0, 1]$, la región está limitada arriba por $f(x) = x^2$ y abajo por el eje x, por lo que tenemos

$$A_1 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

En el intervalo $[1, 2]$, la región está limitada arriba por $g(x) = 2 - x$ y abajo por el eje x—eje, por lo que tenemos

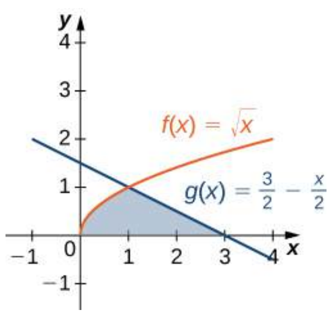
$$A_2 = \int_1^2 (2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]\bigg|_1^2 = \frac{1}{2}.$$

Sumando estas áreas, obtenemos

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

El área de la región es $5/6$ unidades^2.

6.4 Considere la región representada en la siguiente figura. Calcule el área de R.



Regiones definidas con respecto a y

En el Ejemplo 6.4, tuvimos que evaluar dos integrales distintas para calcular el área de la región. Sin embargo, existe otro enfoque que solo requiere una integral. ¿Y si tratamos las curvas como funciones de y, en vez de como funciones de x? Revise la Figura 6.7. Observe que el gráfico de la izquierda, mostrado en rojo, está representado por la función $y = f(x) = x^2$. Podríamos resolver esto con la misma facilidad para x y representar la curva mediante la función $x = v(y) = \sqrt{y}$. (Observe que $x = -\sqrt{y}$ es también una representación válida de la función $y = f(x) = x^2$ en función de y. (No obstante, con base en el gráfico, está claro que nos interesa la raíz cuadrada positiva). Del mismo modo, el gráfico de la derecha está representado por la función $y = g(x) = 2 - x$,, pero también podría representarse con la función $x = u(y) = 2 - y$. Cuando los gráficos se representan como funciones de y, vemos que la región está limitada a la izquierda por el gráfico de una función y a la derecha por el gráfico de la otra función. Por lo tanto, si integramos con respecto a y, necesitamos evaluar una sola integral. Desarrollemos una fórmula para este tipo de integración.

Supongamos que $u(y)$ y $v(y)$ son funciones continuas sobre un intervalo $[c, d]$ de manera que $u(y) \geq v(y)$ para todos los $y \in [c, d]$. Queremos hallar el área entre los gráficos de las funciones, como se muestra en la siguiente figura.

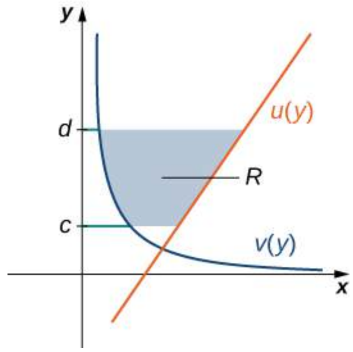


Figura 6.8 Podemos encontrar el área entre los gráficos de dos funciones, $u(y)$ y $v(y)$.

Esta vez, vamos a dividir el intervalo en el eje y y utilizar rectángulos horizontales para aproximar el área entre las funciones. Entonces, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n,$ supongamos que $Q = \{y_i\}$ es una partición regular de $[c, d]$. Luego, para $i = 1, 2,\ldots, n,$ elija un punto $y_i^* \in \left[y_{i-1}, y_i\right]$, entonces en cada intervalo $\left[y_{i-1}, y_i\right]$ construya un rectángulo que se extienda horizontalmente desde $v\left(y_i^*\right)$ al $u\left(y_i^*\right)$. La Figura 6.9(a) muestra los rectángulos cuando y_i^* se selecciona para ser el punto extremo inferior del intervalo y $n = 10.$ La Figura 6.9(b) muestra en detalle un rectángulo representativo.

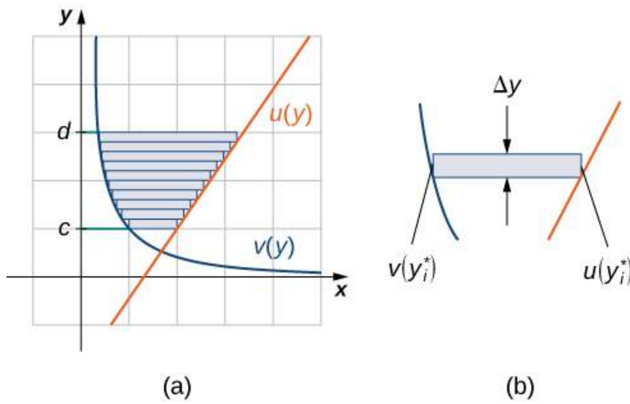


Figura 6.9 (a) Aproximación del área entre los gráficos de dos funciones, $u(y)$ y $v(y)$, con rectángulos. (b) El área de un rectángulo típico.

La altura de cada rectángulo individual es Δy y la anchura de cada rectángulo es $u\left(y_i^*\right) - v\left(y_i^*\right)$. Por lo tanto, el área entre las curvas es aproximadamente

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left[u\left(y_i^*\right) - v\left(y_i^*\right)\right] \Delta y.$$

Se trata de una suma de Riemann, por lo que tomamos el límite como $n \to \infty$, obteniendo

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[u\left(y_i^*\right) - v\left(y_i^*\right)\right] \Delta y = \int_c^d [u(y) - v(y)]\,dy.$$

Estas conclusiones se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 6.3

Hallar el área entre dos curvas, integrando a lo largo del eje y

Supongamos que $u(y)$ y $v(y)$ son funciones continuas tales que $u(y) \geq v(y)$ para todos los $y \in [c, d]$. Supongamos que R denota la región limitada a la derecha por el gráfico de $u(y)$, a la izquierda por el gráfico de $v(y)$, y arriba y abajo por las rectas $y = d$ y $y = c$, respectivamente. Entonces, el área de R viene dada por

$$A = \int_c^d [u(y) - v(y)]\, dy. \tag{6.2}$$

EJEMPLO 6.5

Integrar con respecto a *y*

Volvamos a visitar el Ejemplo 6.4, solo que esta vez integremos con respecto a y. Supongamos que R es la región representada en la Figura 6.10. Calcule el área de R integrando con respecto a y.

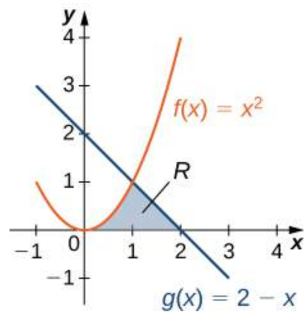


Figura 6.10 La zona de la región R puede calcularse mediante una integral solo cuando las curvas se tratan como funciones de y.

Solución

Primero debemos expresar los gráficos como funciones de y. Como vimos al principio de esta sección, la curva de la izquierda puede representarse por la función $x = v(y) = \sqrt{y}$, y la curva de la derecha puede representarse por la función $x = u(y) = 2 - y$.

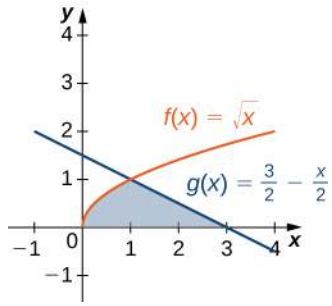
Ahora tenemos que determinar los límites de integración. La región está limitada abajo por el eje x, por lo que el límite inferior de integración es $y = 0$. El límite superior de la integración está determinado por el punto de intersección de los dos gráficos, que es el punto $(1, 1)$, por lo que el límite superior de integración es $y = 1$. Por lo tanto, tenemos $[c, d] = [0, 1]$.

Calculando el área de la región, obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_c^d [u(y) - v(y)]\, dy \\ &= \int_0^1 \left[(2 - y) - \sqrt{y}\right] dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} y^{3/2}\right]\Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

El área de la región es $5/6$ unidades^2.

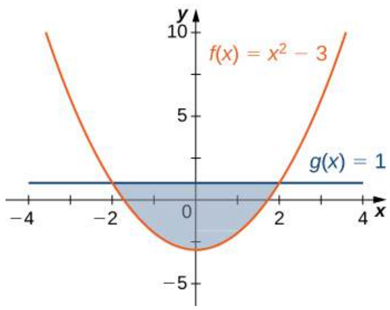
6.5 Volvamos a revisar el punto de control asociado al Ejemplo 6.4, solo que esta vez integremos con respecto a y. Supongamos que R es la región representada en la siguiente figura. Calcule el área de R integrando con respecto a y.



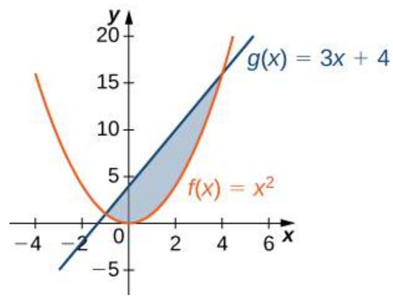
SECCIÓN 6.1 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, determine el área de la región entre las dos curvas de la figura dada integrando sobre el eje x.

1. $y = x^2 - 3$ y $y = 1$

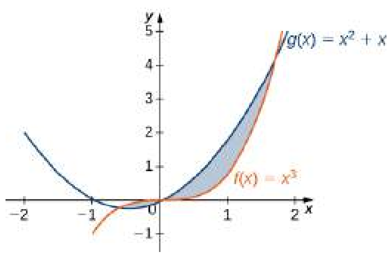


2. $y = x^2$ y $y = 3x + 4$

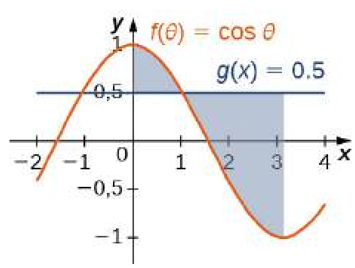


En los siguientes ejercicios, divida la región entre las dos curvas en dos regiones más pequeñas, y luego determine el área integrando sobre el eje x. Tenga en cuenta que tendrá que resolver dos integrales.

3. $y = x^3$ y $y = x^2 + x$

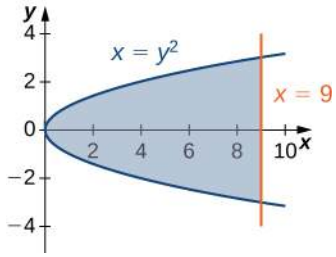


4. $y = \cos\theta$ y $y = 0{,}5$, para $0 \leq \theta \leq \pi$

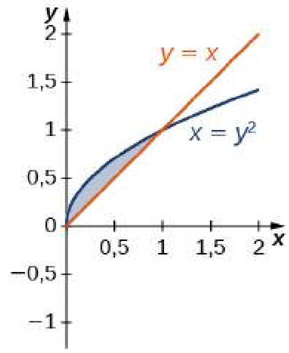


En los siguientes ejercicios, determine el área de la región entre las dos curvas integrando sobre el eje y.

5. $x = y^2$ y $x = 9$



6. $y = x$ y $x = y^2$



Para los siguientes ejercicios, grafique las ecuaciones y sombree el área de la región entre las curvas. Determine su área integrando sobre el eje x.

7. $y = x^2$ y $y = -x^2 + 18x$

8. $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}$, y $x = 3$

9. $y = \cos x$ como $y = \cos^2 x$ sobre $x = [-\pi, \pi]$

10. $y = e^x, y = e^{2x-1}$, y $x = 0$

11. $y = e^x, y = e^{-x}, x = -1$ y $x = 1$

12. $y = e, y = e^x$, y $y = e^{-x}$

13. $y = |x|$ y $y = x^2$

Para los siguientes ejercicios, grafique las ecuaciones y sombree el área de la región entre las curvas. Si es necesario, divida la región en subregiones para determinar toda su superficie.

14. $y = \text{sen}\,(\pi x)\,, y = 2x,$ y $x > 0$

15. $y = 12 - x, y = \sqrt{x}$, y $y = 1$

16. $y = \text{sen}\, x$ como $y = \cos x$ en $x = [-\pi, \pi]$

17. $y = x^3$ y $y = x^2 - 2x$ en $x = [-1, 1]$

18. $y = x^2 + 9$ y $y = 10 + 2x$ en $x = [-1, 3]$

19. $y = x^3 + 3x$ como $y = 4x$

Para los siguientes ejercicios, grafique las ecuaciones y sombree el área de la región entre las curvas. Determine su área integrando sobre el y.

20. $x = y^3$ y $x = 3y - 2$

21. $x = 2y$ y $x = y^3 - y$

22. $x = -3 + y^2$ y $x = y - y^2$

23. $y^2 = x$ y $x = y + 2$

24. $x = |y|$ y $2x = -y^2 + 2$

25. $x = \text{sen}\, y, x = \cos(2y), y = \pi/2$, y $y = -\pi/2$

Para los siguientes ejercicios, grafique las ecuaciones y sombree el área de la región entre las curvas. Determine su área integrando sobre el eje x o el eje y, lo que le parezca más conveniente.

26. $x = y^4$ y $x = y^5$

27. $y = xe^x, y = e^x, x = 0,$ y $x = 1$

28. $y = x^6$ y $y = x^4$

29. $x = y^3 + 2y^2 + 1$ y $x = -y^2 + 1$

30. $y = |x|$ y $y = x^2 - 1$

31. $y = 4 - 3x$ y $y = \frac{1}{x}$

32. $y = \text{sen}\, x, x = -\pi/6, x = \pi/6,$ y $y = \cos^3 x$

33. $y = x^2 - 3x + 2$ y $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$

34. $y = 2\cos^3(3x), y = -1, x = \frac{\pi}{4},$ y $x = -\frac{\pi}{4}$

35. $y + y^3 = x$ y $2y = x$

36. $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = x^2 - 1$

37. $y = \cos^{-1} x, y = \text{sen}^{-1} x, x = -1,$ y $x = 1$

En los siguientes ejercicios, halle el área exacta de la región delimitada por las ecuaciones dadas, si es posible. Si no puede determinar los puntos de intersección analíticamente, utilice una calculadora para aproximar los puntos de intersección con tres decimales y determinar el área aproximada de la región.

38. **[T]** $x = e^y$ y $y = x - 2$

39. **[T]** $y = x^2$ y $y = \sqrt{1 - x^2}$

40. **[T]** $y = 3x^2 + 8x + 9$ y $3y = x + 24$

41. **[T]** $x = \sqrt{4 - y^2}$ y $y^2 = 1 + x^2$

42. **[T]** $x^2 = y^3$ y $x = 3y$

43. **[T]** $y = \text{sen}^3 x + 2, y = \tan x, x = -1{,}5,$ y $x = 1{,}5$

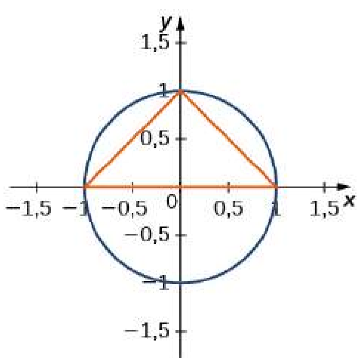
44. **[T]** $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y^2 = x^2$

45. **[T]** $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = x^2 + 2x + 1$

46. **[T]** $x = 4 - y^2$ y $x = 1 + 3y + y^2$

47. **[T]** $y = \cos x, y = e^x, x = -\pi,$ y $x = 0$

48. El mayor triángulo con base en el eje x que encaja dentro de la mitad superior del círculo de la unidad $y^2 + x^2 = 1$ viene dada por $y = 1 + x$ como $y = 1 - x$. Vea la siguiente figura. ¿Cuál es el área dentro del semicírculo pero fuera del triángulo?



49. Una fábrica que vende teléfonos celulares tiene una función de costo marginal $C(x) = 0{,}01x^2 - 3x + 229$, donde x representa el número de teléfonos celulares, y una función de ingreso marginal dada por $R(x) = 429 - 2x$. Halle el área entre los gráficos de estas curvas y $x = 0$. ¿Qué representa esta zona?

50. Un parque de atracciones tiene una función de costo marginal $C(x) = 1.000e^{-x} + 5$, donde x representa el número de entradas vendidas, y una función de ingreso marginal dada por $R(x) = 60 - 0{,}1x$. Halle el beneficio total que se produce al vender 550 entradas. Utilice una calculadora para determinar los puntos de intersección, si es necesario, con dos decimales.

51. La tortuga contra la liebre: La velocidad de la liebre viene dada por la función sinusoidal $H(t) = 1 - \cos((\pi t)/2)$ mientras que la velocidad de la tortuga es $T(t) = (1/2)\tan^{-1}(t/4)$, donde t es el tiempo medido en horas y la velocidad se mide en millas por hora. Halle el área entre las curvas del tiempo $t = 0$ la primera vez después de una hora cuando la tortuga y la liebre viajan a la misma velocidad. ¿Qué representa? Utilice una calculadora para determinar los puntos de intersección, si es necesario, con una precisión de tres decimales.

52. La tortuga contra la liebre: La velocidad de la liebre viene dada por la función sinusoidal $H(t) = (1/2) - (1/2)\cos(2\pi t)$ mientras que la velocidad de la tortuga es $T(t) = \sqrt{t}$, donde t es el tiempo medido en horas y la velocidad se mide en kilómetros por hora. Si la carrera termina en 1 hora, ¿quién ganó la carrera y por qué diferencia? Utilice una calculadora para determinar los puntos de intersección, si es necesario, con una precisión de tres decimales.

En los siguientes ejercicios, halle el área entre las curvas integrando con respecto a x y luego con respecto a y. ¿Es un método más fácil que el otro? ¿Obtiene la misma respuesta?

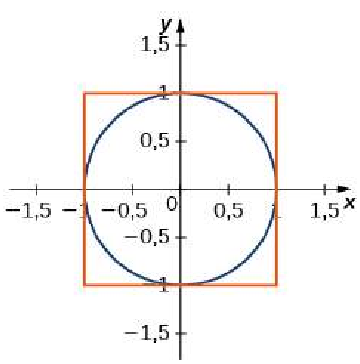
53. $y = x^2 + 2x + 1$ y $y = -x^2 - 3x + 4$

54. $y = x^4$ y $x = y^5$

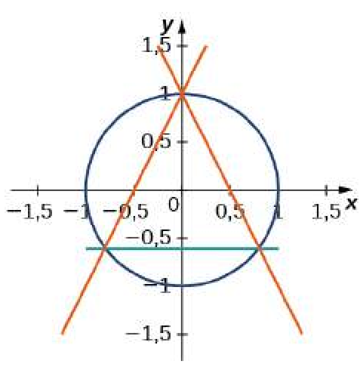
55. $x = y^2 - 2$ y $x = 2y$

En los siguientes ejercicios, resuelva utilizando el cálculo y luego compruebe su respuesta con la geometría.

56. Determine las ecuaciones de los lados del cuadrado que toca la circunferencia unitaria por sus cuatro lados, como se ve en la siguiente figura. Halle el área entre el perímetro de este cuadrado y el círculo unitario. ¿Hay alguna otra forma de resolver esto sin usar el cálculo?



57. Halla el área entre el perímetro del círculo unitario y el triángulo creado a partir de $y = 2x + 1$, $y = 1 - 2x$ como $y = -\frac{3}{5}$, como se ve en la siguiente figura. ¿Hay alguna manera de resolver esto sin usar el cálculo?



6.2 Determinar los volúmenes mediante el corte

Objetivos de aprendizaje

6.2.1 Determinar el volumen de un sólido integrando una sección transversal (método de las rebanadas).
6.2.2 Hallar el volumen de un sólido de revolución utilizando el método de los discos.
6.2.3 Halle el volumen de un sólido de revolución con una cavidad utilizando el método de las arandelas.

En la sección anterior, utilizamos las integrales definidas para hallar el área entre dos curvas. En esta sección, utilizaremos las integrales definidas para hallar los volúmenes de los sólidos tridimensionales. Consideraremos tres enfoques —rebanadas, discos y arandelas— para hallar estos volúmenes en función de las características del sólido.

El volumen y el método de las rebanadas

Así como el área es la medida numérica de una región bidimensional, el volumen es la medida numérica de un sólido tridimensional. La mayoría de nosotros ha calculado los volúmenes de los sólidos utilizando fórmulas geométricas básicas. El volumen de un sólido rectangular, por ejemplo, puede calcularse multiplicando la longitud, la anchura y la altura $V = lwh$. Las fórmulas del volumen de una esfera $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$, un cono $\left(V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\right)$, y una pirámide $\left(V = \frac{1}{3}Ah\right)$ también se ha introducido. Aunque algunas de estas fórmulas se derivaron utilizando únicamente la geometría, todas ellas pueden obtenerse utilizando la integración.

También podemos calcular el volumen de un cilindro. Aunque la mayoría de nosotros piensa que un cilindro tiene una base circular, como una lata de sopa o una barra de metal, en matemáticas la palabra *cilindro* tiene un significado más general. Para hablar de los cilindros en ese contexto más general, antes tenemos que definir algunos términos.

Definimos la **sección transversal** de un sólido como la intersección de un plano con el sólido. Se define un *cilindro* como cualquier sólido que se genera trasladando una región plana a lo largo de una línea perpendicular a la región, denominada *eje* del cilindro. Así, todas las secciones transversales perpendiculares al eje de un cilindro son idénticas. El sólido mostrado en la Figura 6.11 es un ejemplo de cilindro con base no circular. Entonces, para calcular el volumen de un cilindro basta con multiplicar el área de la sección transversal por la altura del cilindro: $V = A.\, h$. En el caso de un cilindro circular recto (como una lata de sopa), esto se convierte en $V = \pi r^2 h$.

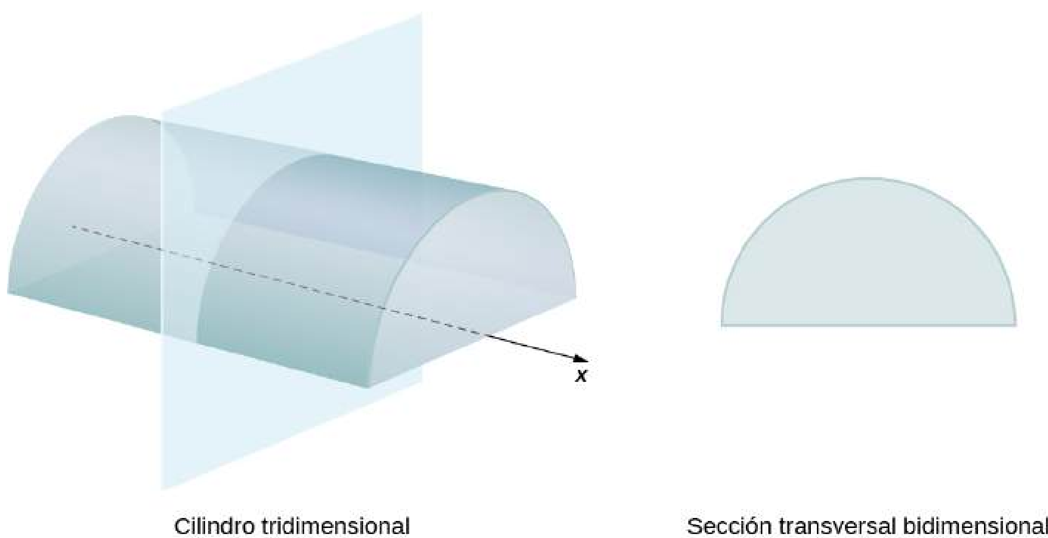


Figura 6.11 Cada sección transversal de un cilindro concreto es idéntica a las demás.

Si un sólido no tiene una sección transversal constante (y no es uno de los otros sólidos básicos), puede que no tengamos una fórmula para su volumen. En ese caso, podemos utilizar una integral definida para calcular el volumen de ese sólido. Para ello, rebanamos el sólido, estimamos el volumen de cada rebanada y luego sumamos esos volúmenes estimados. Las rebanadas deben ser todas paralelas entre sí, y cuando las juntamos todas, deberíamos obtener el sólido completo. Consideremos, por ejemplo, el sólido S que se muestra en la Figura 6.12, que se extiende a lo largo del eje x.

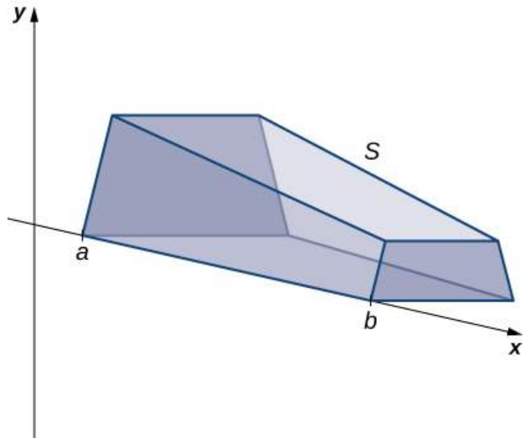


Figura 6.12 Sólido con una sección transversal variable.

Queremos dividir S en rodajas perpendiculares al eje$x$. Como veremos más adelante en el capítulo, puede haber ocasiones en las que queramos cortar el sólido en alguna otra dirección, por ejemplo, en cortes perpendiculares al eje y. La elección de cómo cortar el sólido es muy importante. Si nos equivocamos, los cálculos pueden ser bastante complicados. Más adelante en este capítulo, examinaremos algunas de estas situaciones en detalle y veremos cómo elegir la dirección para cortar el sólido. Sin embargo, a efectos de esta sección, utilizamos cortes perpendiculares al eje x.

Ya que el área de la sección transversal no es constante, suponemos que $A(x)$ representa el área de la sección transversal en el punto x. Ahora supongamos que $P = \{x_0, x_1 \ldots, X_n\}$ es una partición regular de $[a, b]$, y para $i = 1, 2,\ldots n$, supongamos que S_i representan la porción de S que se extiende desde $x_{i-1}\,\text{para}\,x_i$. La siguiente figura muestra el sólido cortado con n $\text{n} = 3$.

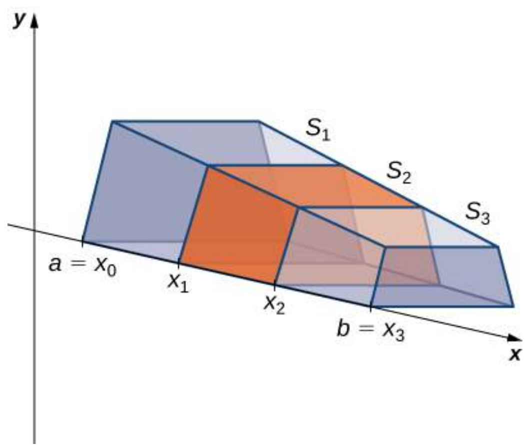


Figura 6.13 El sólido S se dividió en tres cortes perpendiculares al eje$x$.

Por último, para $i = 1, 2,\ldots n$, supongamos que x_i^* es un punto arbitrario en $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Entonces el volumen de la rebanada S_i se puede estimar mediante $V(S_i) \approx A\left(x_i^*\right)\Delta x$. Sumando estas aproximaciones, vemos que el volumen de todo el sólido S puede aproximarse por

$$V(S) \approx \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right)\Delta x.$$

A estas alturas, podemos reconocer esto como una suma de Riemann, y nuestro siguiente paso es tomar el límite como $n \to \infty$. Entonces tenemos

$$V(S) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A\left(x_i^*\right)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx.$$

La técnica que acabamos de describir se llama **método de las rebanadas**. Para aplicarlo, utilizamos la siguiente estrategia.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Búsqueda de volúmenes por el método de las rebanadas

1. Examine el sólido y determine la forma de una sección transversal del mismo. A menudo es útil hacer un dibujo si no lo tiene.
2. Determine una fórmula para el área de la sección transversal.
3. Integre la fórmula del área sobre el intervalo apropiado para obtener el volumen.

Recordemos que en esta sección suponemos que los cortes son perpendiculares al eje$x$. Por lo tanto, la fórmula del área está en términos de x y los límites de integración se encuentran en el eje x. Sin embargo, la estrategia de resolución de problemas mostrada aquí es válida independientemente de cómo decidamos cortar el sólido.

EJEMPLO 6.6

Derivación de la fórmula del volumen de una pirámide

Sabemos por la geometría que la fórmula del volumen de una pirámide es $V = \frac{1}{3}Ah$. Si la pirámide tiene una base cuadrada, esto se convierte en $V = \frac{1}{3}a^2h$, donde a indica la longitud de un lado de la base. Utilicemos el método de las rebanadas para derivar esta fórmula.

Solución

Queremos aplicar ese método a una pirámide de base cuadrada. Para establecer la integral, considere la pirámide mostrada en la Figura 6.14, orientada a lo largo del eje x.

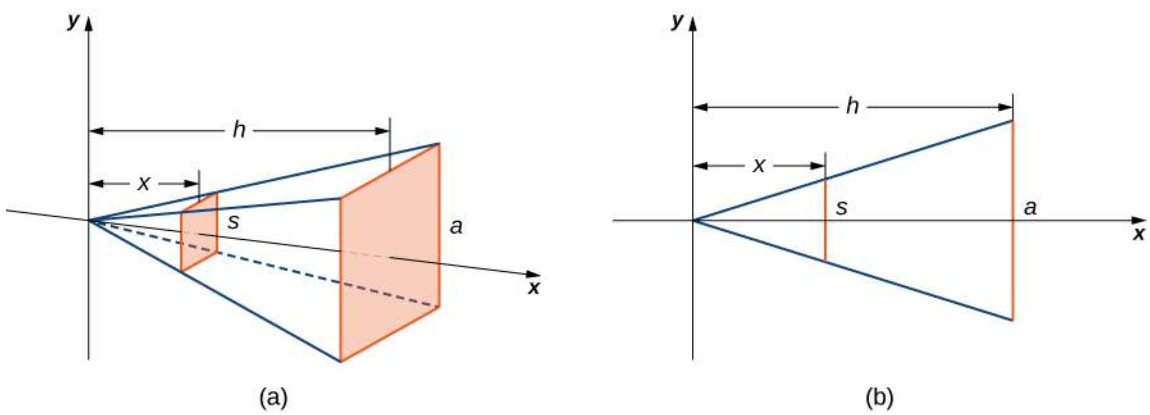


Figura 6.14 (a) Una pirámide de base cuadrada está orientada a lo largo del eje *x*. (b) Hay una vista bidimensional de la pirámide desde un lado.

Primero queremos determinar la forma de una sección transversal de la pirámide. Sabemos que la base es un cuadrado, por lo que las secciones transversales también son cuadradas (paso 1). Ahora queremos determinar una fórmula para el área de uno de estos cuadrados de la sección transversal. Al observar la Figura 6.14(b), y usando una proporción, ya que son triángulos similares, tenemos

$$\frac{s}{a} = \frac{x}{h} \text{ o } s = \frac{ax}{h}.$$

Por lo tanto, el área de uno de los cuadrados del corte transversal es

$$A(x) = s^2 = \left(\frac{ax}{h}\right)^2 \text{(paso 2)}.$$

Entonces encontramos el volumen de la pirámide integrando desde 0 para h (paso 3):

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(x)\,dx \\ &= \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx \\ &= \left[\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\right]\Big|_0^h = \frac{1}{3}a^2 h. \end{aligned}$$

Esta es la fórmula que buscábamos.

6.6 Utilice el método de las rebanadas para obtener la fórmula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ para el volumen de un cono circular.

Sólidos de revolución

Si una región en un plano se hace girar alrededor de una línea en ese plano, el sólido resultante se llama **sólido de revolución**, como se muestra en la siguiente figura.

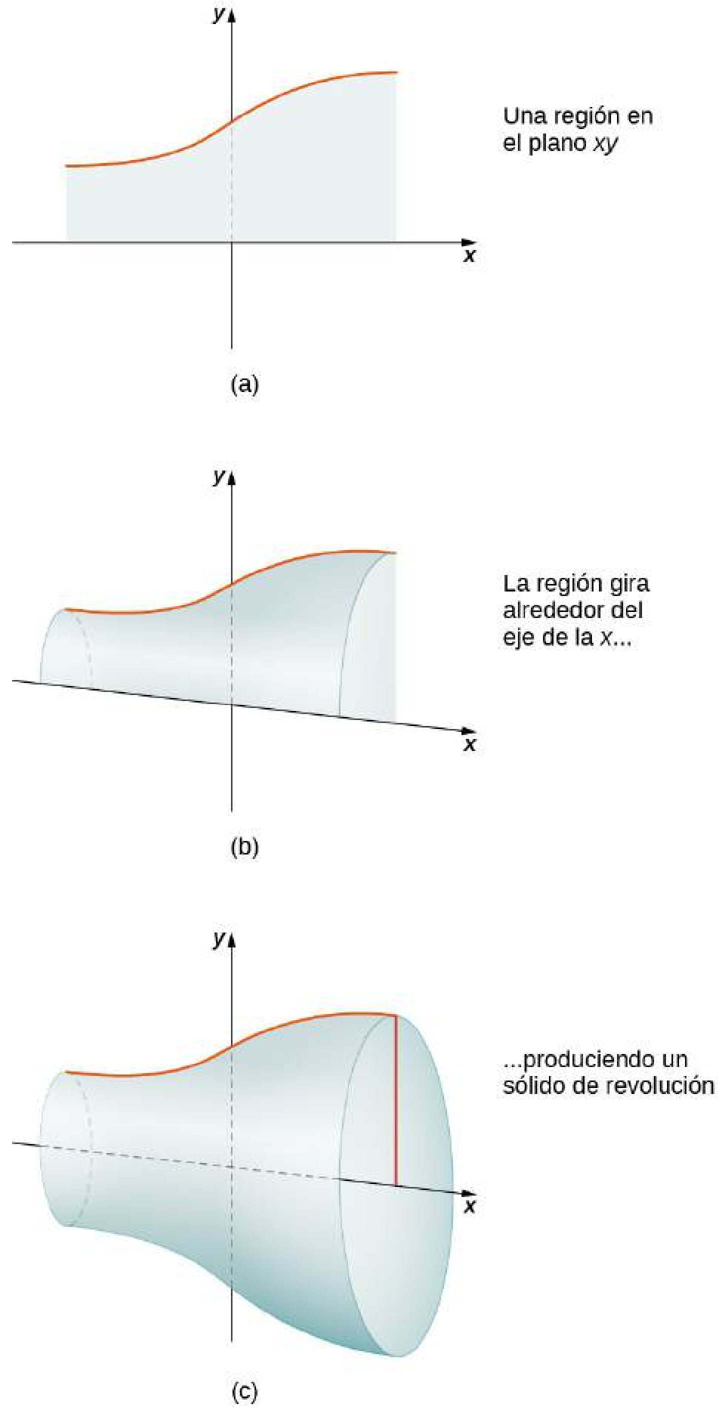


Figura 6.15 (a) Esta es la región que gira alrededor del eje x. (b) A medida que la región comienza a girar alrededor del eje, forma un sólido de revolución. (c) Este es el sólido que resulta cuando se completa la revolución.

Los sólidos de revolución son comunes en aplicaciones mecánicas, como las piezas de máquinas producidas por un torno. Dedicaremos el resto de esta sección a estudiar este tipo de sólidos. El siguiente ejemplo utiliza el método de las rebanadas para calcular el volumen de un sólido de revolución.

MEDIOS

Utilice una [calculadora de integrales (http://www.openstax.org/l/20_IntCalc2)](http://www.openstax.org/l/20_IntCalc2) en línea para saber más.

EJEMPLO 6.7

Uso del método de las rebanadas para hallar el volumen de un sólido de revolución

Utilice el método de las rebanadas para hallar el volumen del sólido de revolución delimitado por las gráficos de $f(x) = x^2 - 4x + 5, x = 1,$ y $x = 4$, y con rotación alrededor del eje$x$.

Solución

Utilizando la estrategia de resolución de problemas, primero dibujamos el gráfico de la función cuadrática sobre el intervalo $[1, 4]$ como se muestra en la siguiente figura.

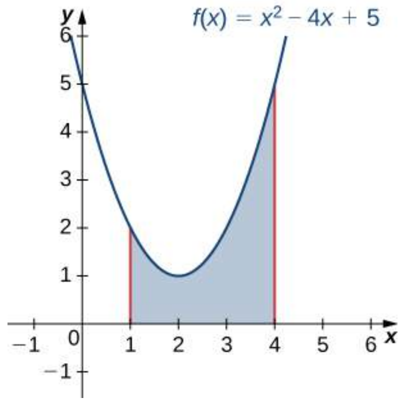


Figura 6.16 Una región utilizada para producir un sólido de revolución.

A continuación, gire la región alrededor del eje *x*, como se muestra en la siguiente figura.

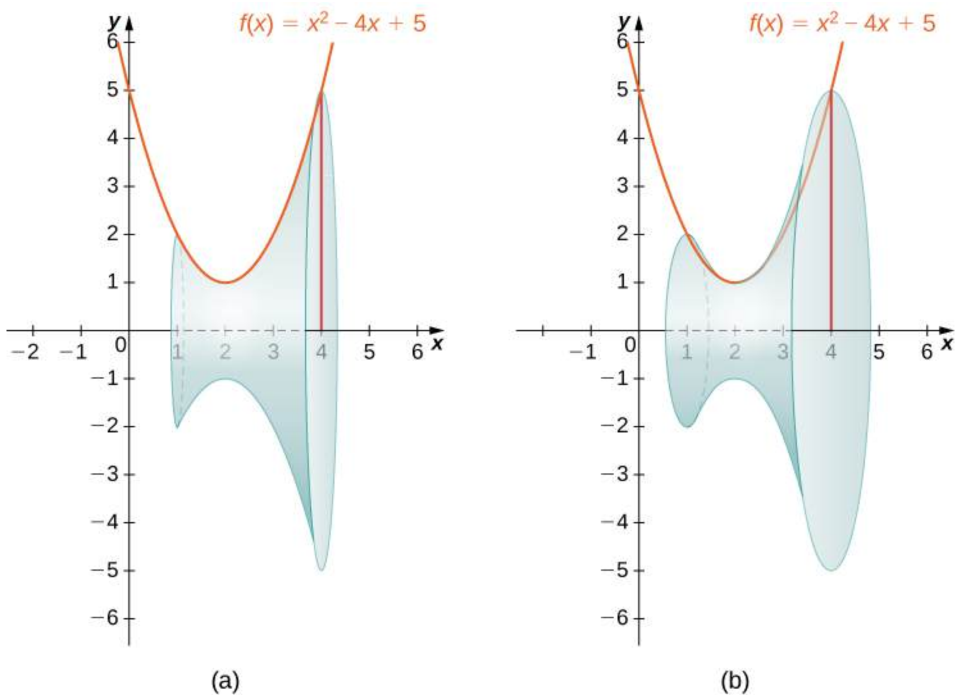


Figura 6.17 Dos vistas, (a) y (b), del sólido de revolución producido al girar la región en la Figura 6.16 alrededor del x.

Como el sólido se formó al girar la región alrededor del eje x—eje, las secciones transversales son círculos (paso 1). El área de la sección transversal, entonces, es el área de un círculo, y el radio del círculo viene dado por $f(x)$. Utilice la fórmula del área del círculo:

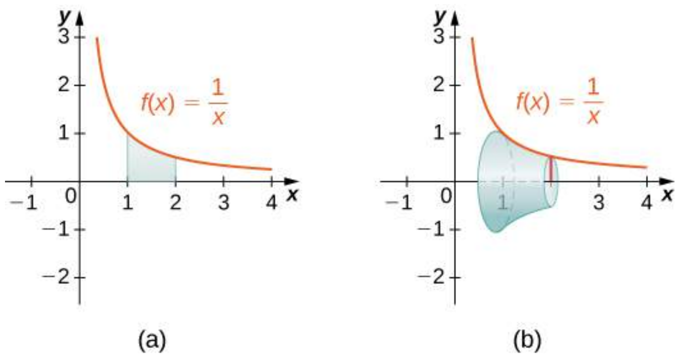
$$A(x) = \pi r^2 = \pi[f(x)]^2 = \pi\left(x^2 - 4x + 5\right)^2 \text{ (paso 2).}$$

El volumen, entonces, es (paso 3)

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_1^4 \pi\left(x^2 - 4x + 5\right)^2 dx = \pi \int_1^4 \left(x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25\right) dx \\ &= \pi\left(\frac{x^5}{5} - 2x^4 + \frac{26x^3}{3} - 20x^2 + 25x\right)\Big|_1^4 = \frac{78}{5}\pi. \end{aligned}$$

El volumen es $78\pi/5$.

6.7 Utilice el método de las rebanadas para hallar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región comprendida entre el gráfico de la función $f(x) = 1/x$ y el eje x en el intervalo $[1, 2]$ alrededor del eje x. Vea la siguiente figura.



El método del disco

Cuando utilizamos el método de las rebanadas con sólidos de revolución, se suele denominar **método de los discos** porque los cortes utilizados para sobre aproximar el volumen de esos sólidos son discos. Para ver esto, considere el sólido de revolución generado al girar la región entre el gráfico de la función $f(x) = (x-1)^2 + 1$ y la intersección en x en el intervalo $[-1, 3]$ alrededor del eje x. El gráfico de la función y un disco representativo se muestran en la Figura 6.18(a) y (b). La región de revolución y el sólido resultante se muestran en la Figura 6.18(c) y (d).

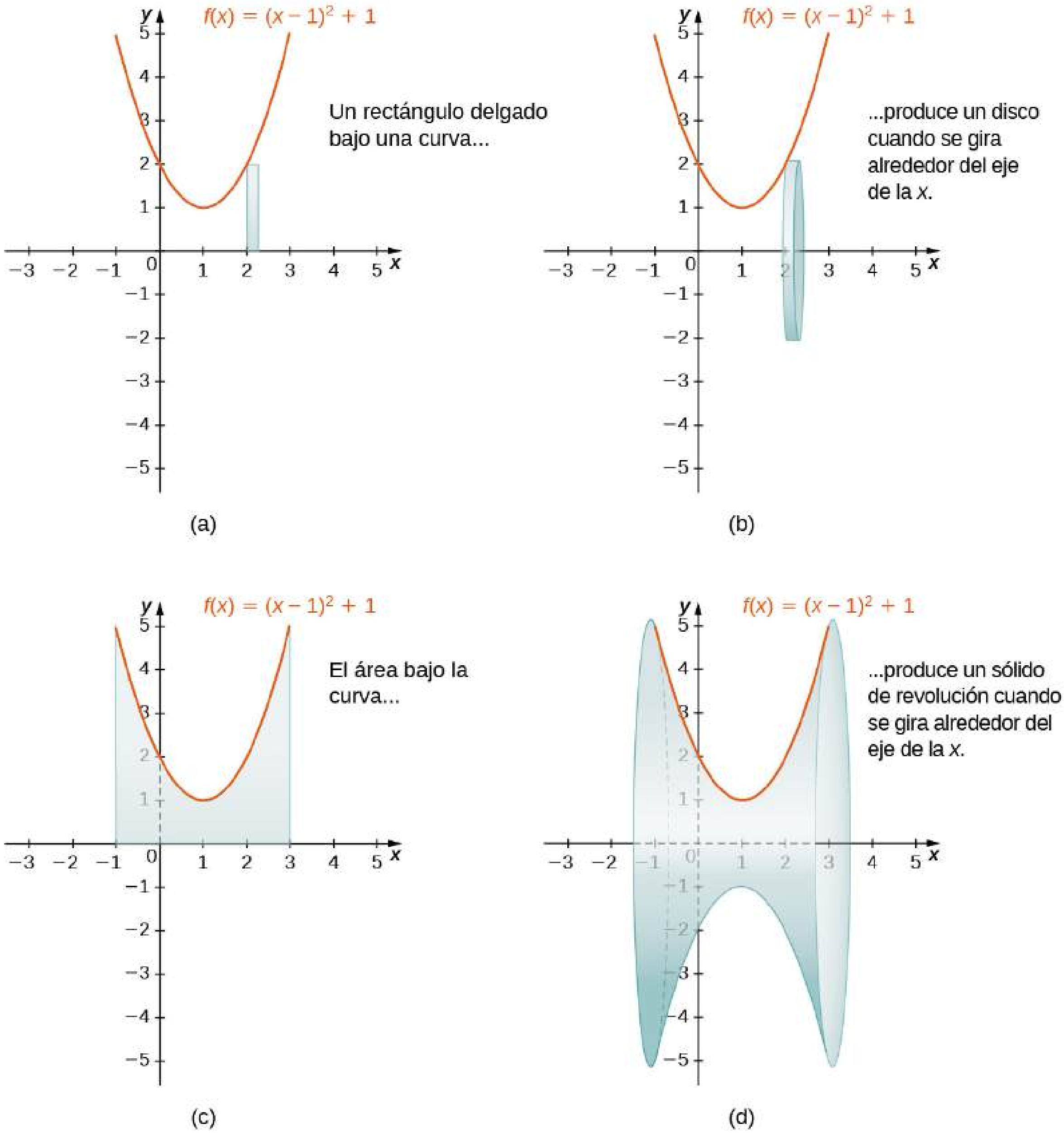


Figura 6.18 (a) Un rectángulo delgado para aproximar el área bajo una curva. (b) Un disco representativo formado al girar el rectángulo alrededor del x. (c) La región bajo la curva gira en torno del x, dando como resultado (d) el sólido de revolución.

Ya utilizamos el desarrollo formal de la suma de Riemann de la fórmula del volumen al desarrollar el método de las rebanadas. Sabemos que

$$V = \int_a^b A(x)\,dx.$$

La única diferencia con el método de los discos es que conocemos de antemano la fórmula del área de la sección transversal, que es el área de un círculo. Esto da la siguiente regla.

Regla: el método del disco

Supongamos que $f(x)$ es continua y no negativa. Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x)$, abajo por el eje x−eje, a la izquierda por la línea $x = a$, y a la derecha por la línea $x = b$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje x viene dada por

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx. \tag{6.3}$$

El volumen del sólido que hemos estudiado (Figura 6.18) viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \\ &= \int_{-1}^{3} \pi\left[(x-1)^2+1\right]^2 dx = \pi \int_{-1}^{3} \left[(x-1)^4 + 2(x-1)^2 + 1\right] dx \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{5}(x-1)^5 + \tfrac{2}{3}(x-1)^3 + x\right]\Big|_{-1}^{3} = \pi\left[\left(\tfrac{32}{5}+\tfrac{16}{3}+3\right) - \left(-\tfrac{32}{5}-\tfrac{16}{3}-1\right)\right] = \tfrac{412\pi}{15} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 6.8

Uso del método de los discos para encontrar el volumen de un sólido de revolución 1

Utilice el método del disco para calcular el volumen del sólido de revolución generado que se forma al girar la región entre el gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ y el eje x en el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje x.

Solución

Los gráficos de la función y del sólido de revolución se muestran en la siguiente figura.

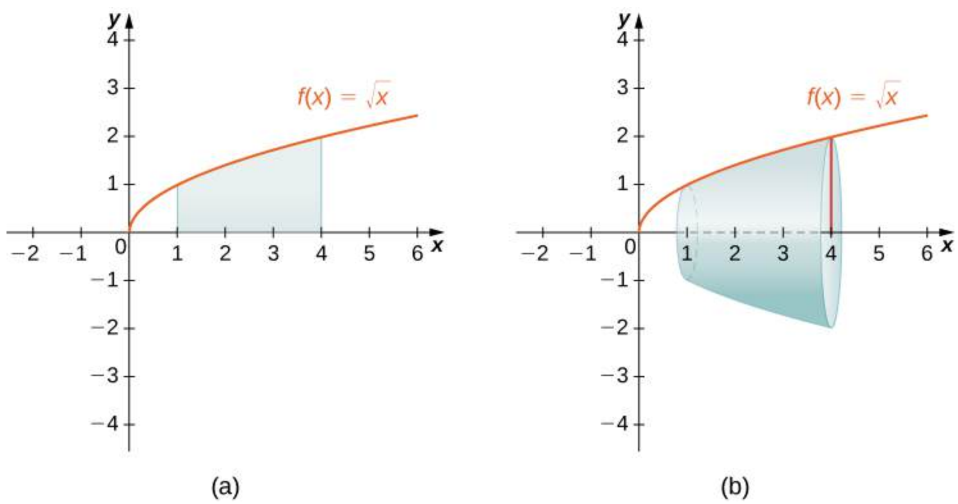


Figura 6.19 (a) La función $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$. b) El sólido de revolución obtenido al girar la región bajo el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x.

Tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \\ &= \int_1^4 \pi\left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi \int_1^4 x\,dx \\ &= \tfrac{\pi}{2}x^2\Big|_1^4 = \tfrac{15\pi}{2}. \end{aligned}$$

El volumen es $(15\pi)/2$ unidades^3.

6.8 Utilice el método del disco para calcular el volumen del sólido de revolución generado que se forma al girar la región entre el gráfico de $f(x) = \sqrt{4-x}$ y el eje x en el intervalo $[0, 4]$ alrededor del eje x.

Hasta ahora, todos nuestros ejemplos se referían a regiones que giraban en torno al eje x−eje, pero podemos generar un sólido de revolución haciendo girar una región plana alrededor de cualquier línea horizontal o vertical. En el siguiente ejemplo, observamos un sólido de revolución que se ha generado girando una región alrededor del eje y. La mecánica del método de los discos es casi la misma que cuando el eje x es el eje de revolución, pero expresamos la función en términos de y y también integramos con respecto a y. Esto se resume en la siguiente regla.

Regla: método de los discos para sólidos de revolución alrededor del eje y

Supongamos que $g(y)$ es continua y no negativa. Defina Q como la región delimitada a la derecha por el gráfico de $g(y)$, a la izquierda por el eje y−eje, abajo por la línea $y = c$, y arriba por la línea $y = d$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje y viene dada por

$$V = \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy. \tag{6.4}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo funciona esta regla en la práctica.

EJEMPLO 6.9

Uso del método de los discos para encontrar el volumen de un sólido de revolución 2

Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de $g(y) = \sqrt{4 - y}$ y la intersección en y sobre el y intervalo $[0, 4]$. Utilice el método de los discos para encontrar el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de R alrededor del eje y.

Solución

La Figura 6.20 muestra la función y un disco representativo que puede utilizarse para estimar el volumen. Observe que como estamos girando la función alrededor del eje y−eje, los discos son horizontales en vez de verticales.

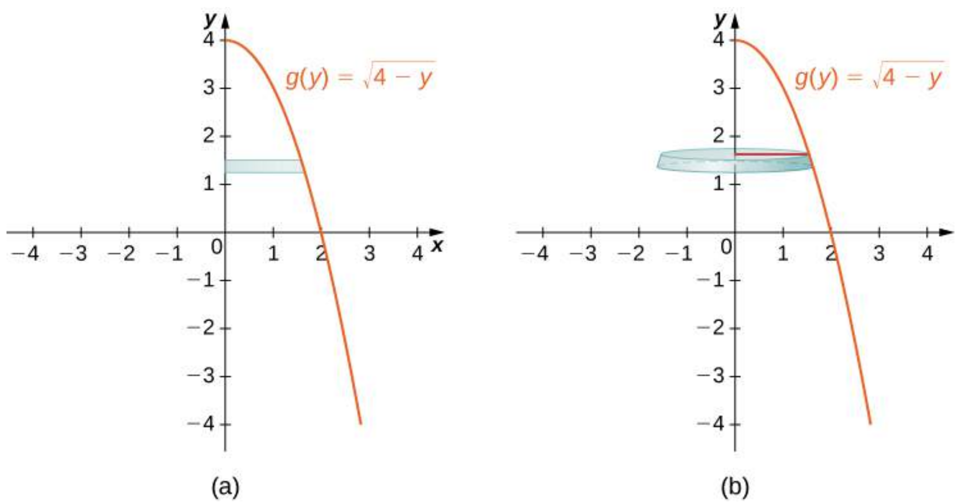


Figura 6.20 (a) Se muestra un rectángulo delgado entre la curva de la función $g(y) = \sqrt{4 - y}$ y la intersección en y. (b) El rectángulo forma un disco representativo después de la revolución alrededor del eje y.

La región que debe girar y el sólido completo de revolución se representan en la siguiente figura.

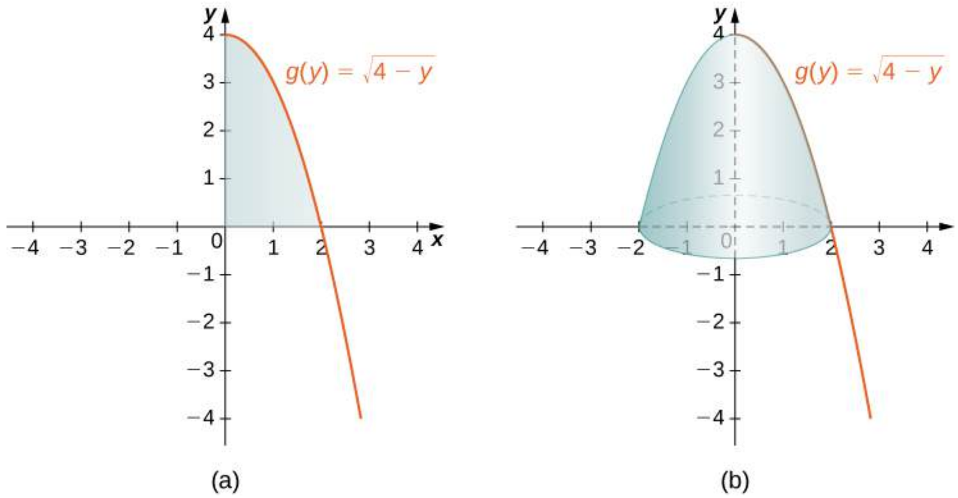


Figura 6.21 (a) La región a la izquierda de la función $g\left(y\right) = \sqrt{4 - y}$ sobre el y intervalo $\left[0, 4\right]$. b) El sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor del eje y.

Para encontrar el volumen, integramos con respecto a y. Obtenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d \pi\left[g\left(y\right)\right]^2 dy \\ &= \int_0^4 \pi\left[\sqrt{4 - y}\right]^2 dy = \pi \int_0^4 \left(4 - y\right) dy \\ &= \pi \left[4y - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^4 = 8\pi. \end{aligned}$$

El volumen es 8π unidades^3.

6.9 Utilice el método del disco para calcular el volumen del sólido de revolución generado que se forma al girar la región entre el gráfico de $g\left(y\right) = y$ y la intersección en y en el intervalo $\left[1, 4\right]$ alrededor del eje y.

El método de arandelas

Algunos sólidos de revolución tienen cavidades en el centro; no son sólidos hasta el eje de revolución. A veces, esto es solo el resultado de la forma de la región de revolución con respecto al eje de revolución. En otros casos, las cavidades surgen cuando la región de revolución se define como la región entre los gráficos de dos funciones. Una tercera forma de que esto ocurra es cuando se selecciona un eje de revolución distinto al eje x o y.

Cuando el sólido de revolución tiene una cavidad en el centro, las rodajas utilizadas para aproximar el volumen no son discos, sino arandelas (discos con agujeros en el centro). Por ejemplo, consideremos la región delimitada arriba por el gráfico de la función $f\left(x\right) = \sqrt{x}$ y abajo por el gráfico de la función $g\left(x\right) = 1$ en el intervalo $\left[1, 4\right]$. Cuando esta región gira en torno al eje x−eje, el resultado es un sólido con una cavidad en el centro, y las rodajas son arandelas. El gráfico de la función y una arandela representativa se muestran en la Figura 6.22(a) y (b). La región de revolución y el sólido resultante se muestran en la Figura 6.22(c) y (d).

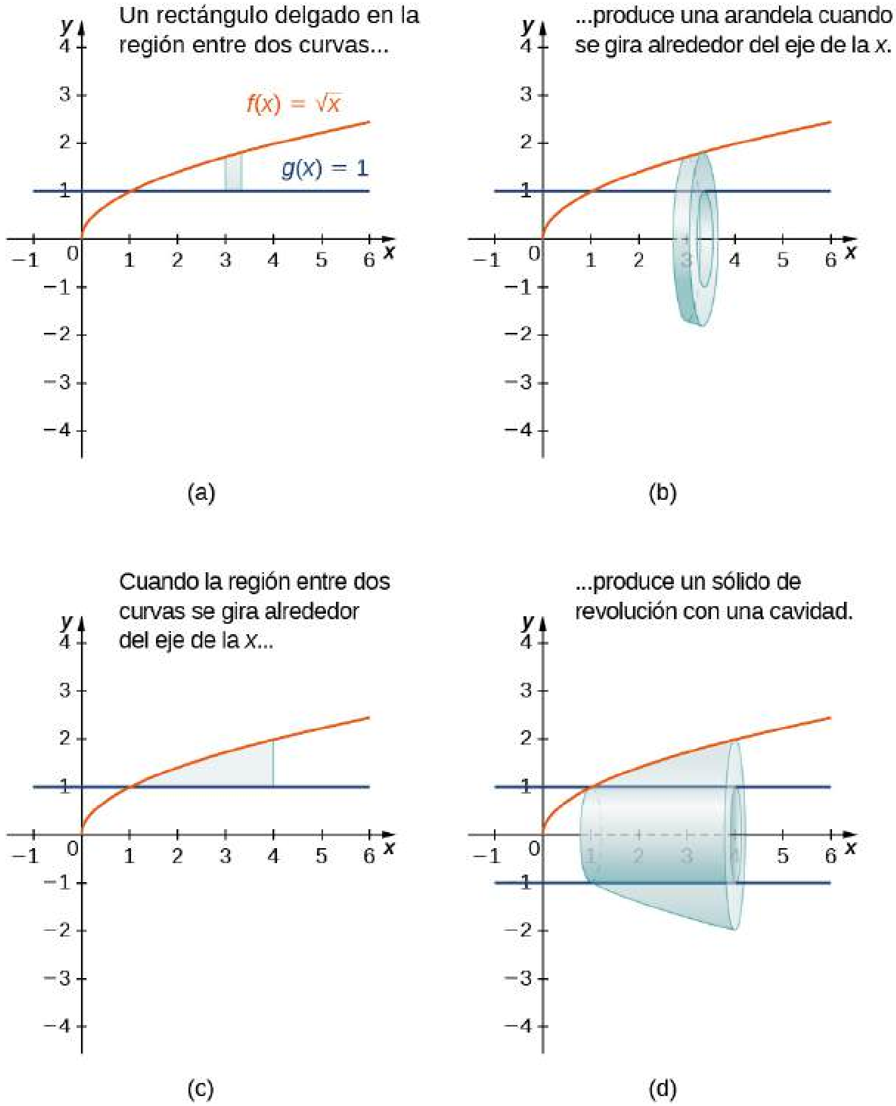


Figura 6.22 (a) Un rectángulo delgado en la región entre dos curvas. (b) Un disco representativo que se forma al girar el rectángulo alrededor del eje x. (c) La región entre las curvas sobre el intervalo dado. (d) El sólido de revolución resultante.

El área de la sección transversal, entonces, es el área del círculo exterior menos el área del círculo interior. En este caso,

$$A(x) = \pi\left(\sqrt{x}\right)^2 - \pi(1)^2 = \pi(x-1).$$

Entonces el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_1^4 \pi(x-1)\,dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - x\right]\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2}\pi \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

Generalizando este proceso se obtiene el **método de las arandelas**.

Regla: el método de las arandelas

Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y no negativas tales que $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$. Supongamos que R denotan la región delimitada por el gráfico de $f(x)$, abajo por el gráfico de $g(x)$, a la izquierda por la línea $x = a$, y a la derecha por la línea $x = b$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R

alrededor del eje x viene dada por

$$V = \int_a^b \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx. \tag{6.5}$$

EJEMPLO 6.10

Utilizar el método de las arandelas

Calcule el volumen de un sólido de revolución que se forma al girar la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x$ y abajo por el gráfico de $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje x.

Solución

Los gráficos de las funciones y el sólido de revolución se muestran en la siguiente figura.

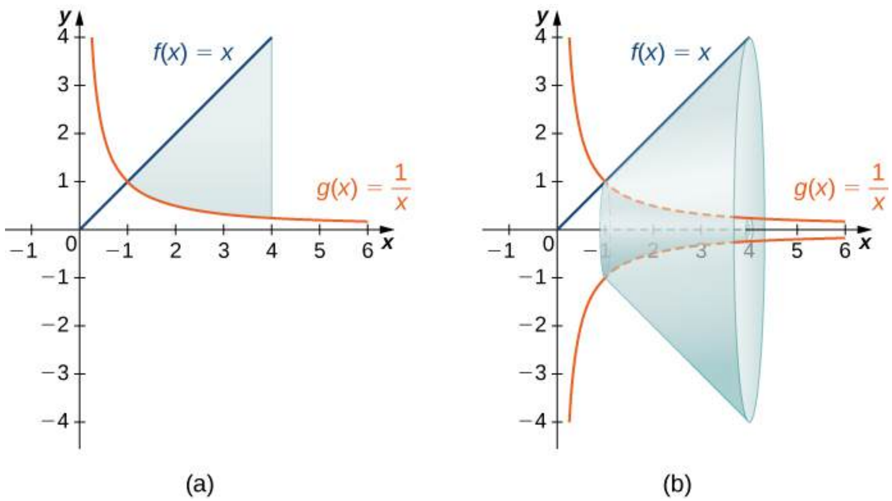


Figura 6.23 (a) La región entre los gráficos de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 4]$. (b) Al girar la región alrededor del eje x se genera un sólido de revolución con una cavidad en el centro.

Tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx \\ &= \pi \int_1^4 \left[x^2 - \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right] dx \ = \pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} \right] \Big|_1^4 = \frac{81\pi}{4} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

6.10 Halle el volumen de un sólido de revolución que se forma al girar la región delimitada por los gráficos de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 3]$ alrededor del eje x.

Al igual que con el método de los discos, también podemos aplicar el método de las arandelas a los sólidos de revolución que resultan de girar una región alrededor del eje *y*. En este caso, se aplica la siguiente regla.

Regla: el método de las arandelas para sólidos de revolución alrededor del eje y

Supongamos que $u(y)$ y $v(y)$ son funciones continuas y no negativas tales que $v(y) \leq u(y)$ por $y \in [c, d]$. Supongamos que Q denota la región limitada a la derecha por el gráfico de $u(y)$, a la izquierda por el gráfico de $v(y)$, abajo por la línea $y = c$, y arriba por la línea $y = d$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje y viene dada por

$$V = \int_c^d \pi \left[(u(y))^2 - (v(y))^2\right] dy.$$

En vez de ver un ejemplo del método de las arandelas con el eje y como eje de revolución, consideramos ahora un ejemplo en el que el eje de revolución es una línea distinta de uno de los dos ejes de coordenadas. Se aplica el mismo método general, pero es posible que tenga que visualizar cómo describir el área de la sección transversal del volumen.

EJEMPLO 6.11

El método de las arandelas con un eje de revolución diferente

Halle el volumen del sólido de revolución fque se forma al girar la región delimitada arriba por $f(x) = 4 - x$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 4]$ alrededor de la línea $y = -2$.

Solución

El gráfico de la región y el sólido de revolución se muestran en la siguiente figura.

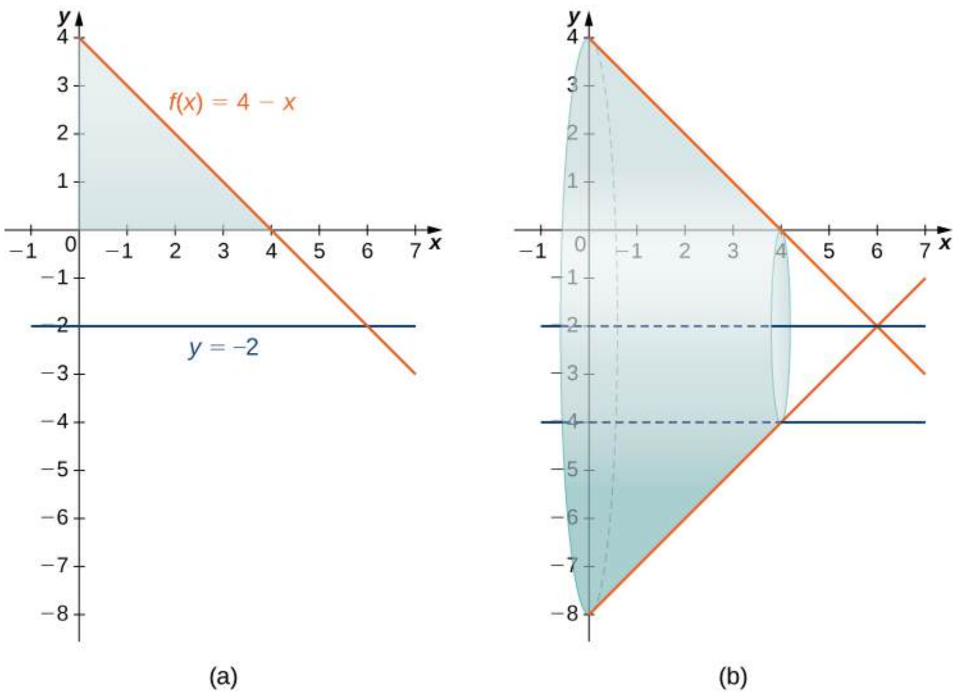


Figura 6.24 (a) La región entre el gráfico de la función $f(x) = 4 - x$ y el eje x en el intervalo $[0, 4]$. (b) Al girar la región alrededor de la línea $y = -2$ se obtiene un sólido de revolución con un agujero cilíndrico en su centro.

No podemos aplicar la fórmula del volumen a este problema directamente porque el eje de revolución no es uno de los ejes de coordenadas. Sin embargo, aún sabemos que el área de la sección transversal es el área del círculo exterior menos el área del círculo interior. Si observamos el gráfico de la función, vemos que el radio del círculo exterior viene dado por $f(x) + 2$, que se simplifica a

$$f(x) + 2 = (4 - x) + 2 = 6 - x.$$

El radio del círculo interior es $g(x) = 2$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \pi \left[(6 - x)^2 - (2)^2\right] dx \\ &= \pi \int_0^4 \left(x^2 - 12x + 32\right) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - 6x^2 + 32x\right]\Bigg|_0^4 = \frac{160\pi}{3} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

6.11 Calcule el volumen de un sólido de revolución que se forma al girar la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x + 2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 3]$ alrededor de la línea $y = -1$.

SECCIÓN 6.2 EJERCICIOS

58. Deduzca la fórmula del volumen de una esfera utilizando el método de las rebanadas.

59. Utilice el método de las rebanadas para obtener la fórmula del volumen de un cono.

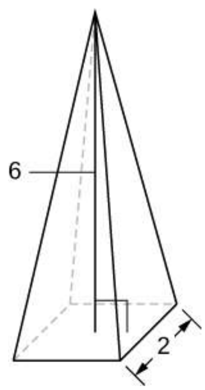
60. Utilice el método de las rebanadas para obtener la fórmula del volumen de un tetraedro de lado a.

61. Utilice el método de los discos para obtener la fórmula del volumen de un cilindro trapezoidal.

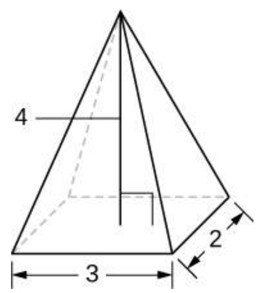
62. Explique cuándo utilizaría el método de los discos en vez del método de las arandelas. ¿Cuándo son intercambiables?

En los siguientes ejercicios, dibuje una rebanada típica y halle el volumen utilizando el método de las rebanadas para el volumen dado.

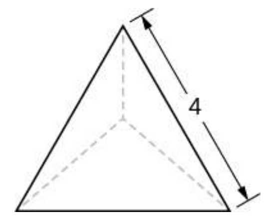
63. Pirámide con altura de 6 unidades y base cuadrada de lado de 2 unidades, como la que se muestra aquí.



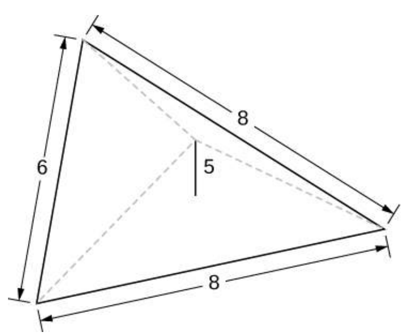
64. Una pirámide con altura de 4 unidades y base rectangular con longitud de 2 unidades y anchura de 3 unidades, como se muestra aquí.



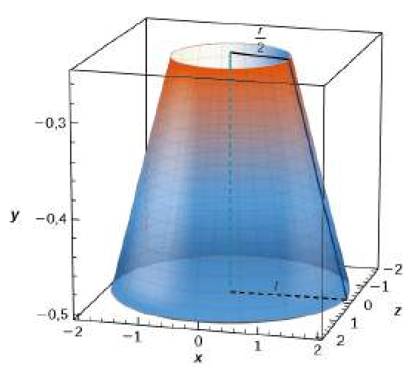
65. Tetraedro con un lado de la base de 4 unidades, como se ve aquí.



66. Pirámide con altura de 5 unidades, y una base triangular isósceles con longitudes de 6 y 8 unidades, como se ve aquí.



67. Un cono de radio r y altura h tiene un cono de radio más pequeño $r/2$ y altura $h/2$ retirado de la parte superior, como se ve aquí. El sólido resultante se denomina *tronco*.



En los siguientes ejercicios, dibuje un contorno del sólido y halle el volumen utilizando el método de las rebanadas.

68. La base es un círculo de radio a. Los cortes perpendiculares a la base son cuadrados.

69. La base es un triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, y $(0, 1)$. Los cortes perpendiculares al eje *x* son semicírculos.

70. La base es la región bajo la parábola $y = 1 - x^2$ en el primer cuadrante. Los cortes perpendiculares al plano *xy* y paralelos al eje y son cuadrados.

71. La base es la región bajo la parábola $y = 1 - x^2$ y por encima del plano x. Las rebanadas perpendiculares al eje y son cuadradas.

72. La base es la región delimitada por $y = x^2$ y $y = 9$. Las rodajas perpendiculares al eje *x* son triángulos isósceles rectos. La intersección de uno de estos cortes con la base es el cateto del triángulo.

73. La base es el área entre $y = x$ como $y = x^2$. Los cortes perpendiculares al eje *x* son semicírculos.

Para los siguientes ejercicios, dibuje la región delimitada por las curvas. A continuación, utilice el método de los discos para encontrar el volumen cuando la región gira alrededor del eje x.

74. $x + y = 8, x = 0,\ \text{y}\ y = 0$

75. $y = 2x^2, x = 0, x = 4,\ \text{y}\ y = 0$

76. $y = e^x + 1, x = 0, x = 1,\ \text{y}\ y = 0$

77. $y = x^4, x = 0,\ \text{y}\ y = 1$

78. $y = \sqrt{x}, x = 0, x = 4,\ \text{y}\ y = 0$

79. $y = \text{sen}\, x, y = \cos x,\ \text{y}\ x = 0$

80. $y = \frac{1}{x}, x = 2,\ \text{y}\ y = 3$

81. $x^2 - y^2 = 9\ \text{y}\ x + y = 9, y = 0\ \text{y}\ x = 0$

Para los siguientes ejercicios, dibuje la región delimitada por las curvas. A continuación, halle el volumen cuando la región gira alrededor del eje y.

82. $y = 4 - \frac{1}{2}x, x = 0,\ \text{y}\ y = 0$

83. $y = 2x^3, x = 0, x = 1,\ \text{y}\ y = 0$

84. $y = 3x^2, x = 0,\ \text{y}\ y = 3$

85. $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0,\ \text{y}\ x = 0$

86. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, x = 0,\ \text{y}\ x = 3$

87. $x = \sec(y)\ \text{y}\ y = \frac{\pi}{4}, y = 0\ \text{y}\ x = 0$

88. $y = \frac{1}{x+1}, x = 0,\ \text{y}\ x = 2$

89. $y = 4 - x, y = x,\ \text{y}\ x = 0$

Para los siguientes ejercicios, dibuje la región delimitada por las curvas. A continuación, halle el volumen cuando la región gira alrededor del eje x.

90. $y = x + 2, y = x + 6, x = 0,\ \text{y}\ x = 5$

91. $y = x^2\ \text{y}\ y = x + 2$

92. $x^2 = y^3\ \text{y}\ x^3 = y^2$

93. $y = 4 - x^2\ \text{y}\ y = 2 - x$

94. **[T]** $y = \cos x, y = e^{-x}, x = 0,\ \text{y}\ x = 1{,}2927$

95. $y = \sqrt{x}\ \text{y}\ y = x^2$

96. $y = \text{sen}\, x, y = 5\, \text{sen}\, x, x = 0\ \text{y}\ x = \pi$

97. $y = \sqrt{1 + x^2}\ \text{y}\ y = \sqrt{4 - x^2}$

Para los siguientes ejercicios, dibuje la región delimitada por las curvas. A continuación, utilice el método de las arandelas para hallar el volumen cuando la región gira alrededor del eje y.

98. $y = \sqrt{x}, x = 4,\ \text{y}\ y = 0$

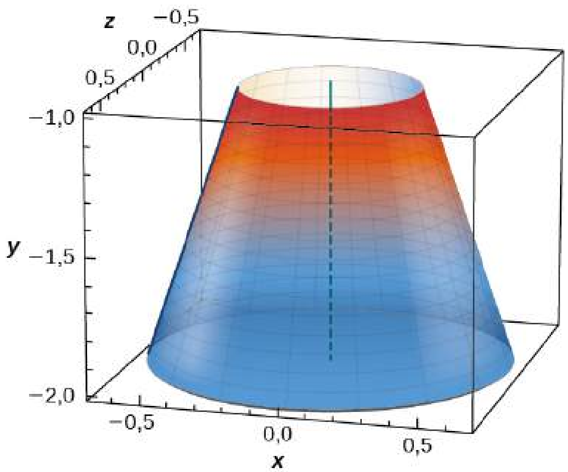
99. $y = x + 2, y = 2x - 1,\ \text{y}\ x = 0$

100. $y = \sqrt[3]{x}\ \text{y}\ y = x^3$

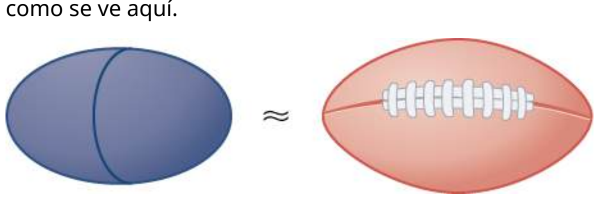
101. $x = e^{2y}, x = y^2, y = 0,\ \text{y}\ y = \ln(2)$

102. $x = \sqrt{9 - y^2}, x = e^{-y}, y = 0,\ \text{y}\ y = 3$

103. Los envases de yogur pueden tener forma de tronco. Gire la línea $y = \frac{1}{m}x$ alrededor del eje *y* para hallar el volumen entre $y = a$ y $y = b$.

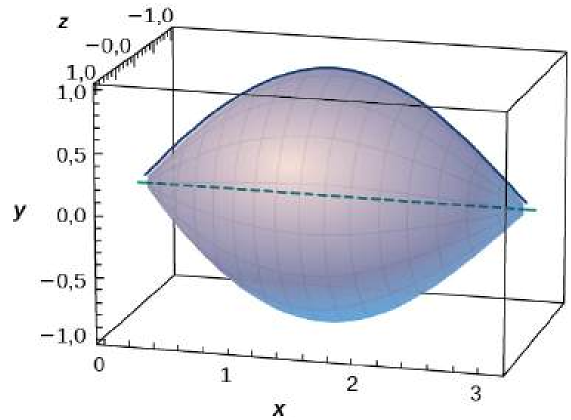


104. Rote la elipse $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1$ alrededor del eje *x* para aproximar el volumen de un balón de fútbol, como se ve aquí.

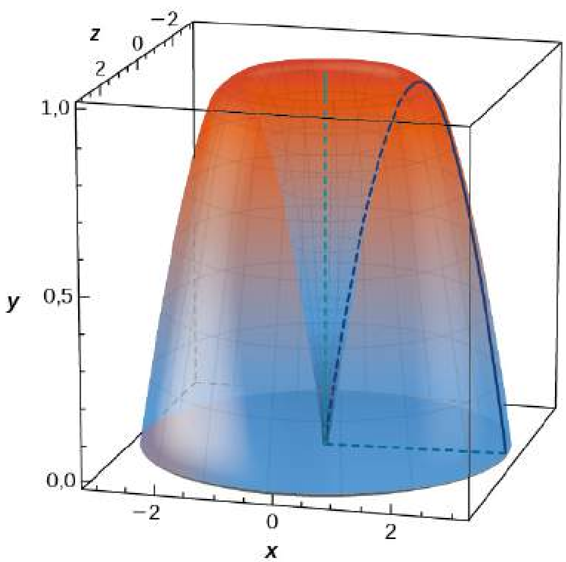


105. Rote la elipse $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1$ alrededor del eje *y* para aproximar el volumen de un balón de fútbol.

106. Una mejor aproximación al volumen de un balón de fútbol viene dada por el sólido que se obtiene al girar $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje *x* de $x = 0$ hasta $x = \pi$. ¿Cuál es el volumen de esta aproximación del balón de fútbol, como se ve aquí?



107. ¿Cuál es el volumen del pastel en forma de anillo que se obtiene al girar $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje *y* de $x = 0$ hasta $x = \pi$?

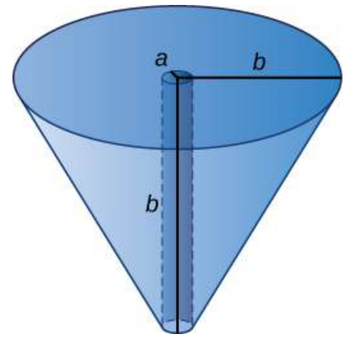


En los siguientes ejercicios, halle el volumen del sólido descrito.

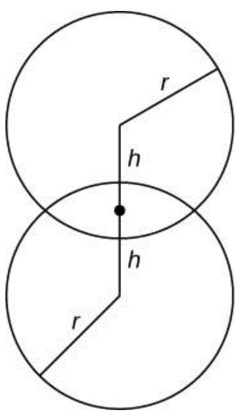
108. La base es la región entre $y = x$ como $y = x^2$. Los cortes perpendiculares al eje *x*son semicírculos.

109. La base es la región delimitada por la elipse genérica $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1$. Los cortes perpendiculares al eje *x*son semicírculos.

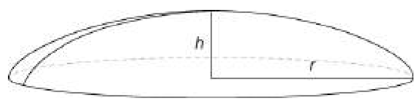
110. Perfore un agujero de radio a por el eje de un cono recto y a través de la base de radio b, como se ve aquí.



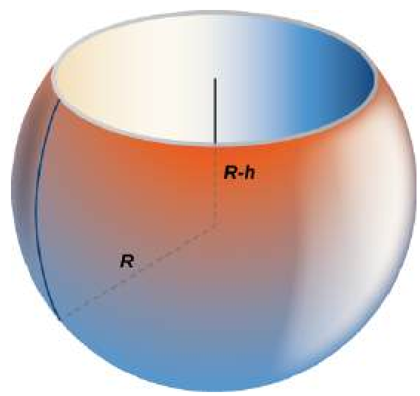
111. Halle el volumen común a dos esferas de radio r con centros que tienen $2h$ de separación, como se muestra aquí.



112. Halle el volumen de un casquete esférico de altura h y radio r donde $h < r$, como se ve aquí.



113. Halle el volumen de una esfera de radio R con un casquete de altura h retirado de la parte superior, como se ve aquí.



6.3 Volúmenes de revolución: capas cilíndricas

Objetivos de aprendizaje

6.3.1 Calcular el volumen de un sólido de revolución por el método de las capas cilíndricas.
6.3.2 Comparar los diferentes métodos para calcular un volumen de revolución.

En esta sección, examinaremos el método de las capas cilíndricas, el último método para hallar el volumen de un sólido de revolución. Podemos utilizar este método en los mismos tipos de sólidos que el método del disco o el método de las arandelas; sin embargo, con los métodos del disco y de las arandelas, integramos a lo largo del eje de coordenadas paralelo al eje de revolución. Con el método de las capas cilíndricas, integramos el eje de coordenadas *perpendicular* al eje de revolución. La posibilidad de elegir qué variable de integración utilizaremos puede ser una ventaja importante con funciones más complicadas. Además, la geometría específica del sólido, a veces, hace que el método de las capas cilíndricas sea más atractivo de usar que el método de las arandelas. En la última parte de esta sección, repasaremos todos los métodos para hallar el volumen que hemos estudiado y establecemos algunas pautas para ayudarlo a determinar qué método debe utilizar en una situación determinada.

El método de las capas cilíndricas

De nuevo, estamos trabajando con un sólido de revolución. Como antes, definimos una región R, delimitada por encima del gráfico de una función $y = f(x)$, abajo por el eje x−eje, y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente, como se muestra en la Figura 6.25(a). A continuación, hacemos girar esta región alrededor del eje *y*, como se muestra en la Figura 6.25(b). Tenga en cuenta que esto es diferente de lo que hicimos anteriormente, cuando las regiones definidas en términos de funciones de x giraban en torno al eje x o a una línea paralela a él.

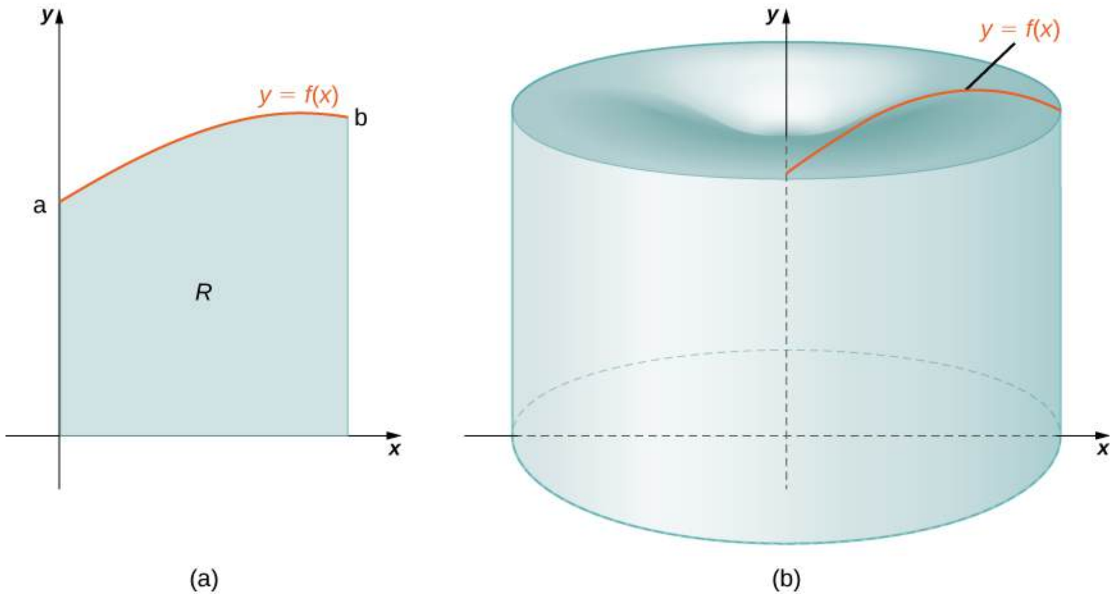


Figura 6.25 (a) Región delimitada por el gráfico de una función de x. b) El sólido de revolución que se forma al girar la región alrededor del y.

Como ya hemos hecho muchas veces, dividimos el intervalo $[a, b]$ utilizando una partición normal, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ y, para $i = 1, 2, \ldots, n$, elija un punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Entonces, construya un rectángulo sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de altura $f(x_i^*)$ y la anchura Δx. En la Figura 6.26(a) se muestra un rectángulo representativo. Cuando ese rectángulo se gira alrededor del eje y, en vez de un disco o una arandela, obtenemos una capa cilíndrica, como se muestra en la siguiente figura.

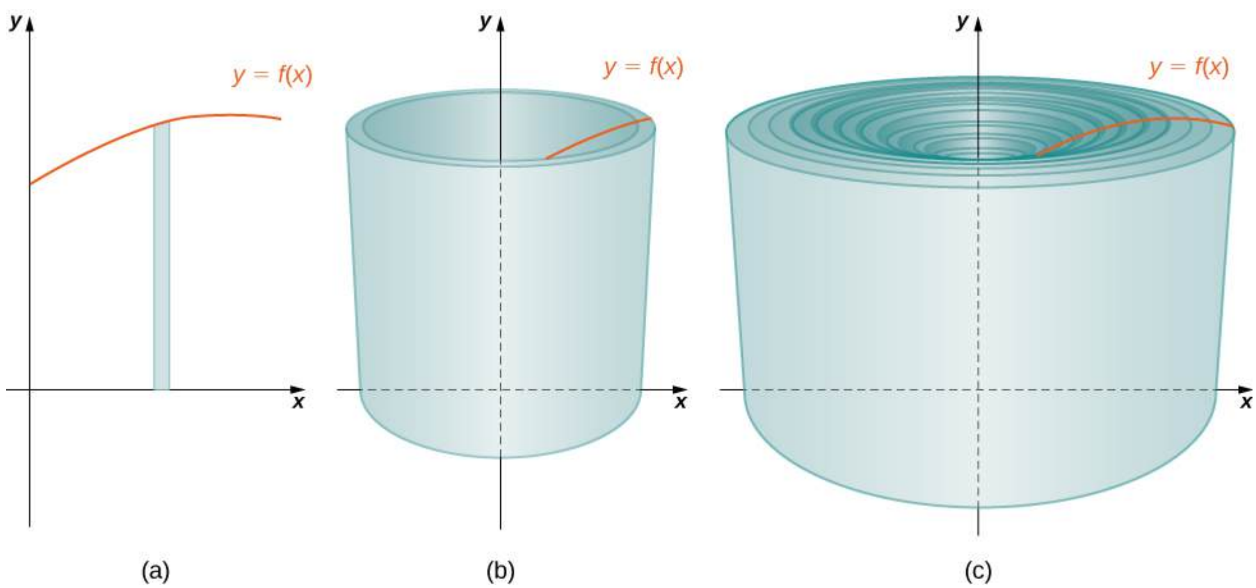


Figura 6.26 (a) Un rectángulo representativo. (b) Cuando este rectángulo gira alrededor del y, el resultado es una capa cilíndrica. (c) Cuando juntamos todas las capas, obtenemos una aproximación del sólido original.

Para calcular el volumen de esta capa, considere la Figura 6.27.

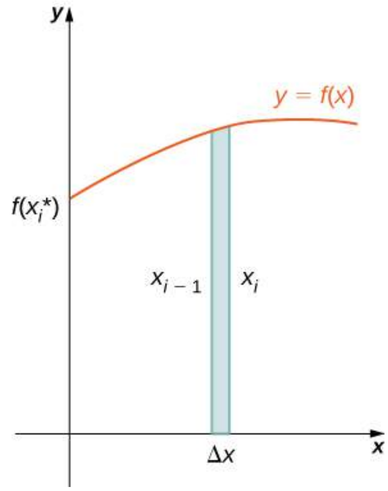


Figura 6.27 Calcular el volumen de la capa.

La capa es un cilindro, por lo que su volumen es el área de la sección transversal multiplicada por la altura del cilindro. Las secciones transversales son anulares (regiones en forma de anillo, esencialmente círculos con un agujero en el centro), con radio exterior x_i y radio interior x_{i-1}. Por lo tanto, el área de la sección transversal es $\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2$. La altura del cilindro es $f(x_i^*)$. Entonces el volumen de la capa es

$$\begin{aligned} V_{\text{capa}} &= f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que $x_i - x_{i-1} = \Delta x$, por lo que tenemos

$$V_{\text{capa}} = 2\pi f(x_i^*)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x.$$

Además, $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ es a la vez el punto medio del intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ y el radio medio de la capa, y podemos aproximar esto por x_i^*. Entonces tenemos

$$V_{\text{capa}} \approx 2\pi f(x_i^*)x_i^*\Delta x.$$

Otra forma de pensar en esto es pensar en hacer un corte vertical en la capa y luego abrirla para formar una placa plana (Figura 6.28).

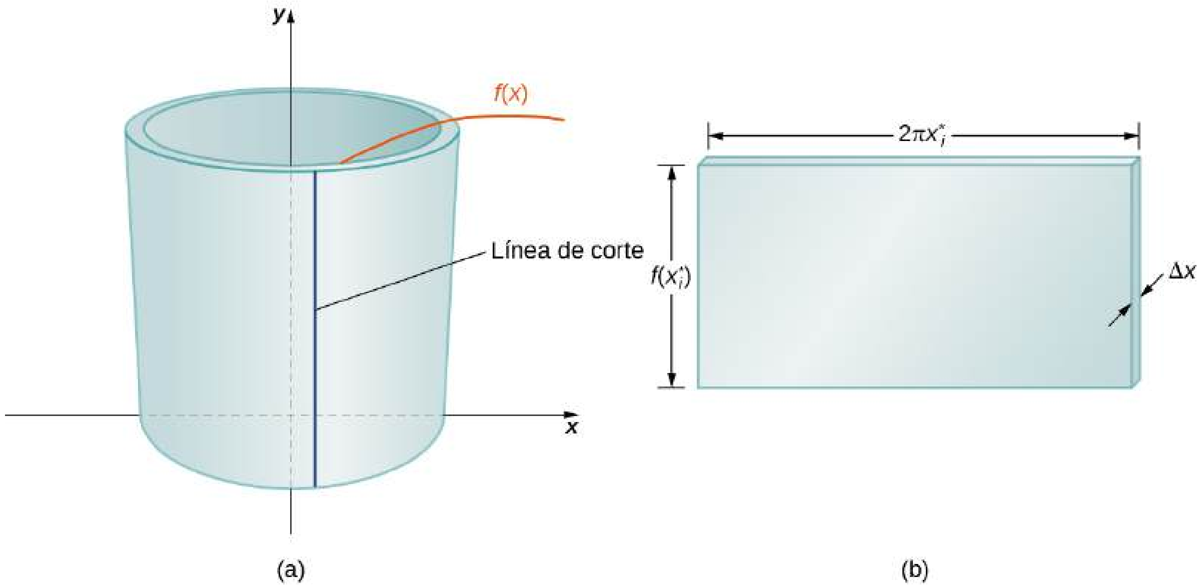


Figura 6.28 (a) Haga un corte vertical en una capa representativa. (b) Abra la capa para formar una placa plana.

En realidad, el radio exterior de la capa es mayor que el radio interior y, por tanto, el borde posterior de la placa sería ligeramente más largo que su borde anterior. Sin embargo, podemos aproximar la capa aplanada por una placa plana de altura $f(x_i^*)$, anchura $2\pi x_i^*$, y espesor Δx (Figura 6.28). El volumen de la capa, entonces, es aproximadamente el volumen de la placa plana. Multiplicando la altura, la anchura y la profundidad de la placa, obtenemos

$$V_{\text{capa}} \approx f(x_i^*)\left(2\pi x_i^*\right)\Delta x,$$

que es la misma fórmula que teníamos antes.

Para calcular el volumen de todo el sólido, sumamos los volúmenes de todas las capas y obtenemos

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\left(2\pi x_i^* f(x_i^*)\Delta x\right).$$

Aquí se nos presenta otra suma de Riemann, esta vez para la función $2\pi x f(x)$. Tomando el límite como $n \to \infty$ nos da

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\left(2\pi x_i^* f(x_i^*)\Delta x\right) = \int_a^b (2\pi x f(x))\,dx.$$

Esto nos lleva a la siguiente regla para el **método de las capas cilíndricas.**

Regla: el método de las capas cilíndricas

Supongamos que $f(x)$ es continua y no negativa. Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x)$, abajo por el eje x, a la izquierda por la línea $x = a$, y a la derecha por la línea $x = b$. Entonces el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R en torno al eje y viene dado por

$$V = \int_a^b (2\pi x f(x))\,dx. \tag{6.6}$$

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 6.12

El método de las capas cilíndricas 1

Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = 1/x$ y abajo por el eje x en el intervalo $[1, 3]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

Solución

Primero debemos graficar la región R y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

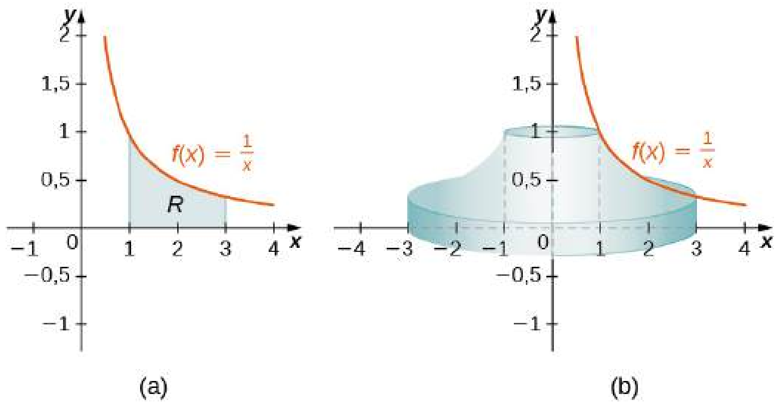


Figura 6.29 (a) La región R bajo el gráfico de $f(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 3]$. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje y.

Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (2\pi x f(x))\, dx \\ &= \int_1^3 \left(2\pi x \left(\frac{1}{x}\right)\right) dx \\ &= \int_1^3 2\pi\, dx = 2\pi x|_1^3 = 4\pi \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

6.12 Definamos R como la región delimitada por el gráfico de $f(x) = x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[1, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

EJEMPLO 6.13

El método de las capas cilíndricas 2

Definamos R como la región delimitada por el gráfico de $f(x) = 2x – x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

Solución

Primer gráfico de la región R y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

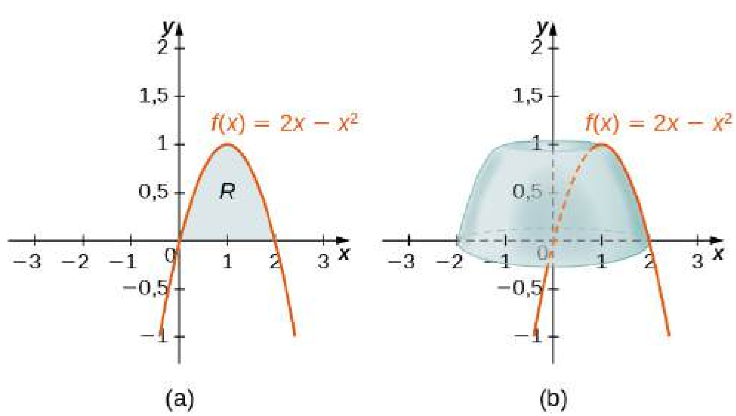


Figura 6.30 (a) La región R bajo el gráfico de $f(x) = 2x – x^2$ en el intervalo $[0, 2]$. b) El volumen de revolución obtenido

al girar R alrededor del eje y.

Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b (2\pi x f(x))\, dx \\ &= \int_0^2 \left(2\pi x \left(2x - x^2\right)\right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(2x^2 - x^3\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2 = \frac{8\pi}{3} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

6.13 Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = 3x - x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

Al igual que con el método de los discos y el de las arandelas, también podemos aplicar el método de las capas cilíndricas a los sólidos de revolución que resultan, que giran alrededor del eje x, cuando queremos integrar con respecto a y. La regla análoga para este tipo de sólido se da aquí.

Regla: método de las capas cilíndricas para sólidos de revolución alrededor del eje x

Supongamos que $g(y)$ es continua y no negativa. Defina Q como la región delimitada a la derecha por el gráfico de $g(y)$, a la izquierda por el eje y, abajo por la línea $y = c$, y arriba por la línea $y = d$. Entonces, el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje x viene dada por

$$V = \int_c^d (2\pi y g(y))\, dy.$$

EJEMPLO 6.14

Método de las capas cilíndricas para un sólido que gira alrededor del eje x

Defina Q como la región delimitada a la derecha por el gráfico de $g(y) = 2\sqrt{y}$ y a la izquierda por el eje y por $y \in [0, 4]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje de la x.

Solución

En primer lugar, debemos graficar la región Q y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

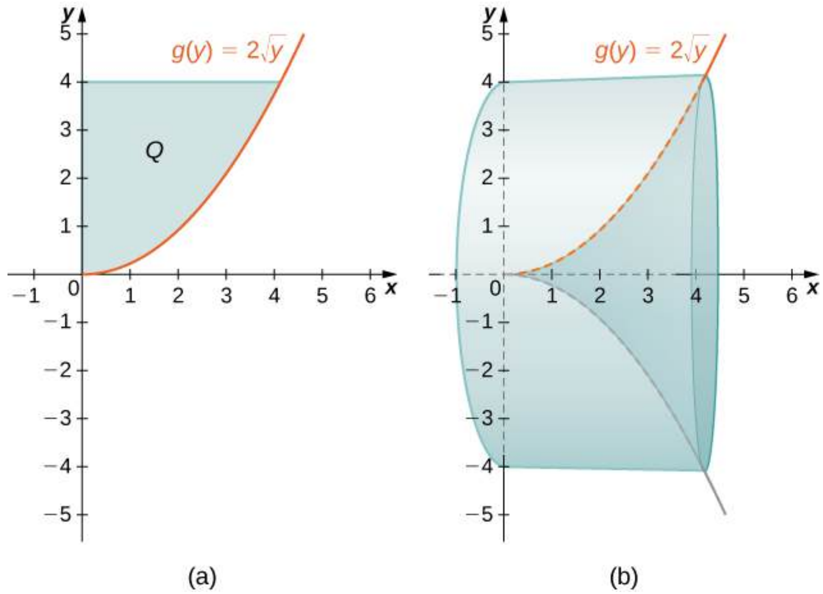


Figura 6.31 (a) La región Q a la izquierda de la función $g(y)$ en el intervalo $[0, 4]$. (b) El sólido de revolución que se genera al girar Q alrededor del eje x.

Rotule la región sombreada Q. Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_c^d (2\pi y g(y))\, dy \\ &= \int_0^4 \left(2\pi y \left(2\sqrt{y}\right)\right) dy = 4\pi \int_0^4 y^{3/2}\, dy \\ &= 4\pi \left[\frac{2y^{5/2}}{5}\right]\Bigg|_0^4 = \frac{256\pi}{5} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

6.14 Defina Q como la región delimitada a la derecha por el gráfico de $g(y) = 3/y$ y a la izquierda por el eje y por $y \in [1, 3]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar Q alrededor del eje x.

En el siguiente ejemplo, observamos un sólido de revolución para el que el gráfico de una función gira en torno a una línea distinta de uno de los dos ejes de coordenadas. Para ello, es necesario volver a examinar el desarrollo del método de las capas cilíndricas. Recordemos que el volumen de una de las capas viene dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{capa}} &= f(x_i^*)(\pi x_i^2 - \pi x_{i-1}^2) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right) \\ &= \pi f(x_i^*)\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right). \end{aligned}$$

Esto se basó en una capa con un radio exterior de x_i y un radio interior de x_{i-1} . Sin embargo, si giramos la región alrededor de una línea que no sea el eje y, tenemos un radio exterior e interior diferente. Supongamos, por ejemplo, que giramos la región alrededor de la línea $x = -k$, donde k es alguna constante positiva. Entonces, el radio exterior de la capa es $x_i + k$ y el radio interior es $x_{i-1} + k$. Sustituyendo estos términos en la expresión del volumen, vemos que cuando una región plana gira alrededor de la línea $x = -k$, el volumen de una capa viene dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{capa}} &= 2\pi f(x_i^*)\left(\frac{(x_i + k) + (x_{i-1} + k)}{2}\right)\left((x_i + k) - \left(x_{i-1} + k\right)\right) \\ &= 2\pi f(x_i^*)\left(\left(\frac{x_i + x_{i-2}}{2}\right) + k\right)\Delta x. \end{aligned}$$

Como antes, observamos que $\frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ es el punto medio del intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ y puede ser aproximado por x_i^*.

Entonces, el volumen aproximado de la capa es

$$V_{\text{capa}} \approx 2\pi \left(x_i^* + k\right) f(x_i^*)\Delta x.$$

El resto del desarrollo procede como antes, y vemos que

$$V = \int_a^b (2\pi (x + k) f(x))\, dx.$$

También podríamos girar la región alrededor de otras rectas horizontales o verticales, como una línea vertical en el semiplano derecho. En cada caso, la fórmula de volumen debe ajustarse en consecuencia. En concreto, el término x en la integral debe sustituirse por una expresión que represente el radio de una capa. Para ver cómo funciona, analice el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.15

Región de revolución que gira en torno a una línea

Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x$ y abajo por el eje x en el intervalo $[1, 2]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la línea $x = -1$.

Solución

En primer lugar, grafique la región R y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

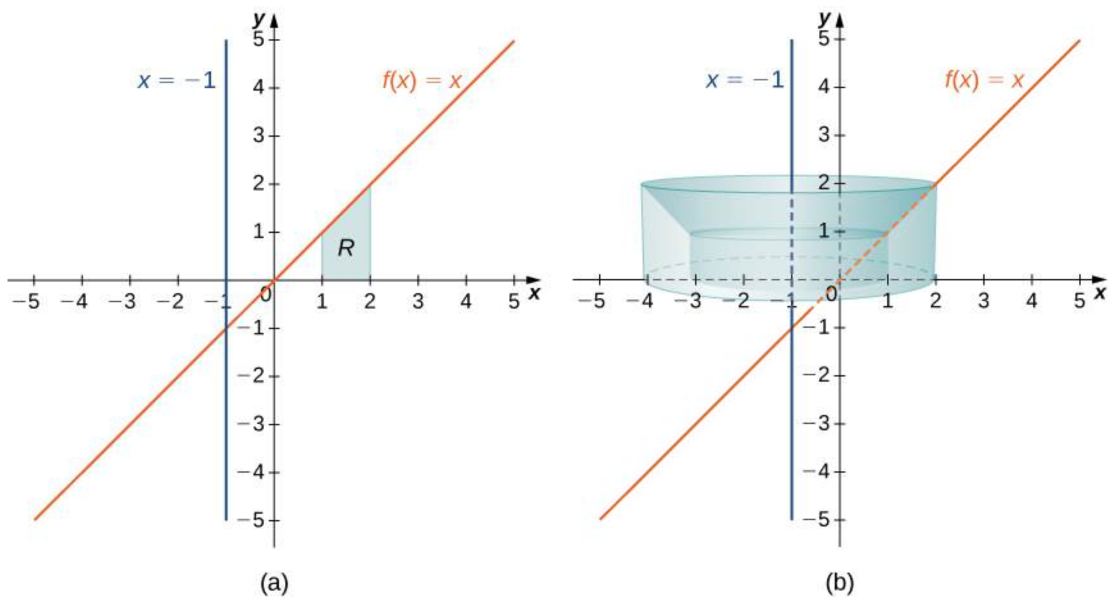


Figura 6.32 (a) La región R entre el gráfico de $f(x)$ y la intersección en eje x en el intervalo $[1, 2]$. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor de la línea $x = -1$.

Observe que el radio de una capa viene dado por $x + 1$. Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 (2\pi (x + 1) f(x))\, dx \\ &= \int_1^2 (2\pi (x + 1)\, x)\, dx = 2\pi \int_1^2 \left(x^2 + x\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{23\pi}{3} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

6.15 Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 1]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor de la línea $x = –2$.

En nuestro último ejemplo en esta sección, veamos el volumen de un sólido de revolución para el que la región de revolución está limitada por los gráficos de dos funciones.

EJEMPLO 6.16

Región de revolución limitada por los gráficos de dos funciones

Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 1/x$ en el intervalo $[1, 4]$. Halle el volumen del sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje y.

Solución

En primer lugar, grafique la región R y el sólido de revolución asociado, como se muestra en la siguiente figura.

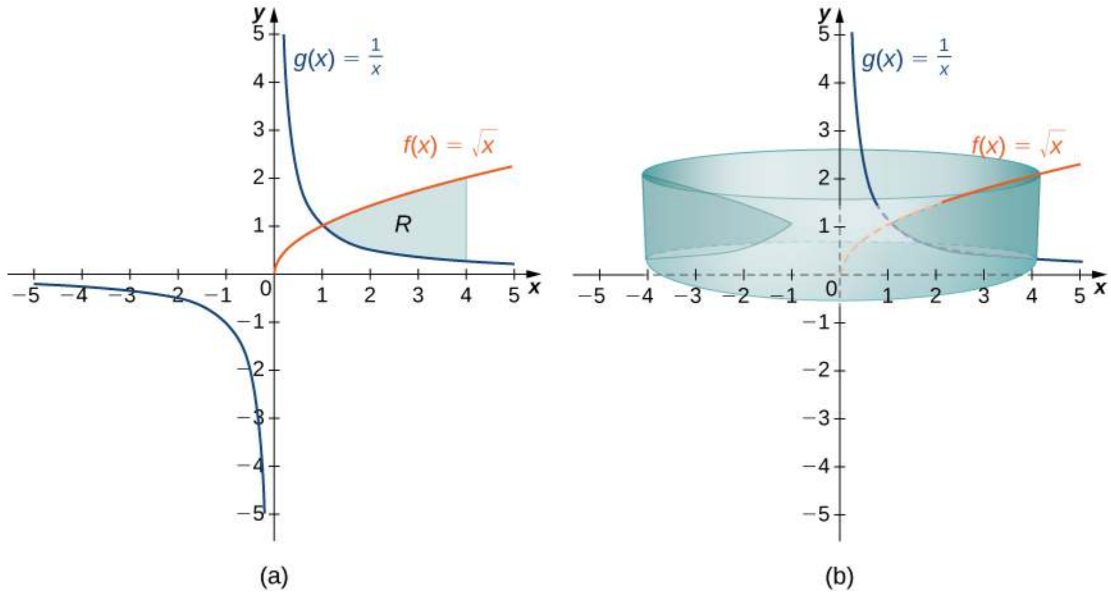


Figura 6.33 (a) La región R entre el gráfico de $f(x)$ y el gráfico de $g(x)$ en el intervalo $[1, 4]$. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje y.

Observe que el eje de revolución es el eje y, por lo que el radio de una capa viene dado simplemente por x. No necesitamos hacer ningún ajuste en el término xde nuestro integrando. Sin embargo, la altura de una capa viene dada por $f(x) - g(x)$, por lo que en este caso tenemos que ajustar el término $f(x)$ del integrando. Entonces el volumen del sólido viene dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_1^4 (2\pi x\,(f(x) - g(x)))\,dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)\right) dx = 2\pi \int_1^4 \left(x^{3/2} - 1\right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{2x^{5/2}}{5} - x\right]\Big|_1^4 = \frac{94\pi}{5} \text{ al cuadrado}^3. \end{aligned}$$

6.16 Defina R como la región delimitada arriba por el gráfico de $f(x) = x$ y abajo por el gráfico de $g(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 1]$. Calcule el volumen del sólido de revolución que se forma al girar R alrededor del eje y.

¿Qué método debemos utilizar?

Ya estudiamos varios métodos para hallar el volumen de un sólido de revolución, pero ¿cómo sabemos qué método utilizar? A menudo se trata de elegir qué integral es más fácil de evaluar. La Figura 6.34 describe los diferentes enfoques para los sólidos de revolución alrededor del eje x. Ahora es momento de que desarrolle la tabla análoga para los sólidos de revolución alrededor del eje y.

Comparación de los métodos para hallar el volumen de un sólido de revolución alrededor del eje de la x

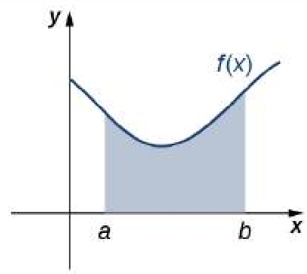
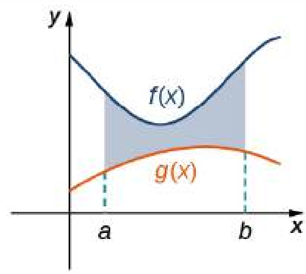
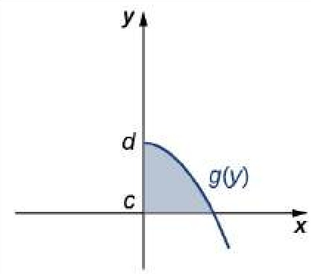
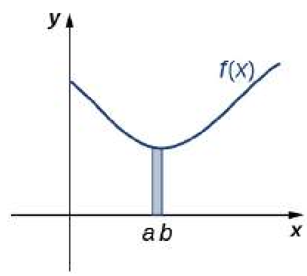
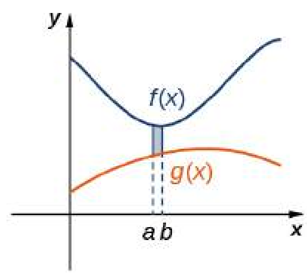
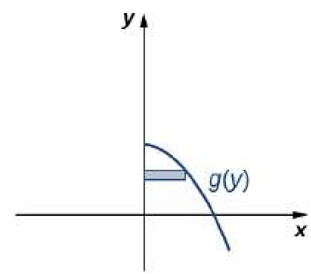
Comparación	Método de disco	Método de arandelas	Método de capa
Fórmula de volumen	$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$	$V=\int_a^b \pi[(f(x))^2-(g(x))^2]\,dx$	$V=\int_c^d 2\pi y\, g(y)\,dy$
Sólido	No hay cavidad en el centro	Cavidad en el centro	Con o sin cavidad en el centro
Intervalo para la partición	$[a, b]$ en el eje de la x	$[a, b]$ en el eje de la x	$[c, d]$ en el eje de la y
Rectángulo	Vertical	Vertical	Horizontal
Región típica			
Elemento típico			

Figura 6.34

Veamos un par de problemas adicionales y decidamos cuál es el mejor enfoque para resolverlos.

EJEMPLO 6.17

Selección del mejor método

Para cada uno de los siguientes problemas, seleccione el mejor método para hallar el volumen de un sólido de revolución generado al girar la región dada alrededor del eje x, y establezca la integral para encontrar el volumen (no evaluar la integral).

a. La región delimitada por los gráficos de $y=x$, $y=2-x$, y la intersección en x.
b. La región delimitada por los gráficos de $y=4x\text{–}x^2$ y el eje x.

Solución

a. En primer lugar, dibuje la región y el sólido de revolución como se muestra.

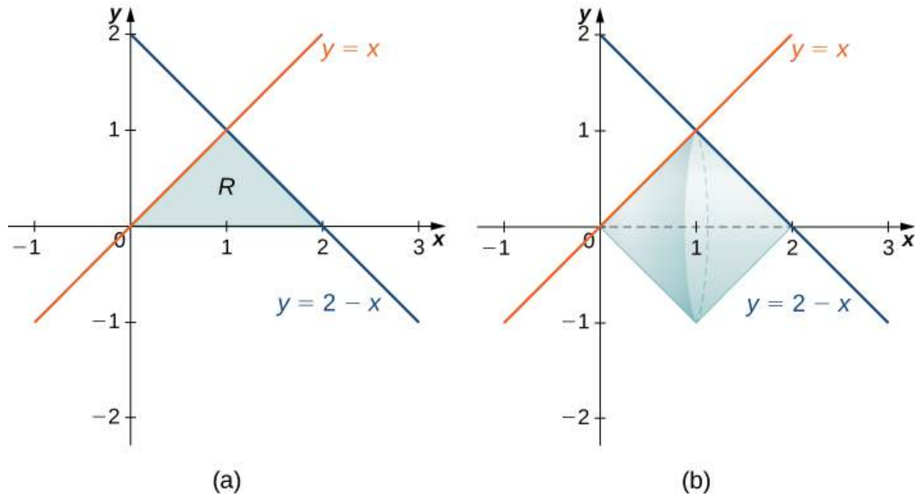


Figura 6.35 (a) La región R delimitado por dos rectas y el eje x. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje x.

Al observar la región, si queremos integrar con respecto a x, tendríamos que dividir la integral en dos partes, porque tenemos diferentes funciones que delimitan la región en $[0, 1]$ y $[1, 2]$. En este caso, utilizando el método de los discos, tendríamos

$$V = \int_0^1 \left(\pi x^2\right) dx + \int_1^2 \left(\pi(2 - x)^2\right) dx.$$

Si en vez de ello utilizáramos el método de las capas, usaríamos funciones de y para representar las curvas, produciendo

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 (2\pi y\,[(2 - y) - y])\,dy \\ &= \int_0^1 (2\pi y\,[2 - 2y])\,dy. \end{aligned}$$

Ninguna de estas integrales es particularmente compleja, pero como el método de las capas requiere solo una integral, y el integrando requiere menos simplificación, es probable que en este caso utilicemos el método de las capas.

b. En primer lugar, dibuje la región y el sólido de revolución como se muestra.

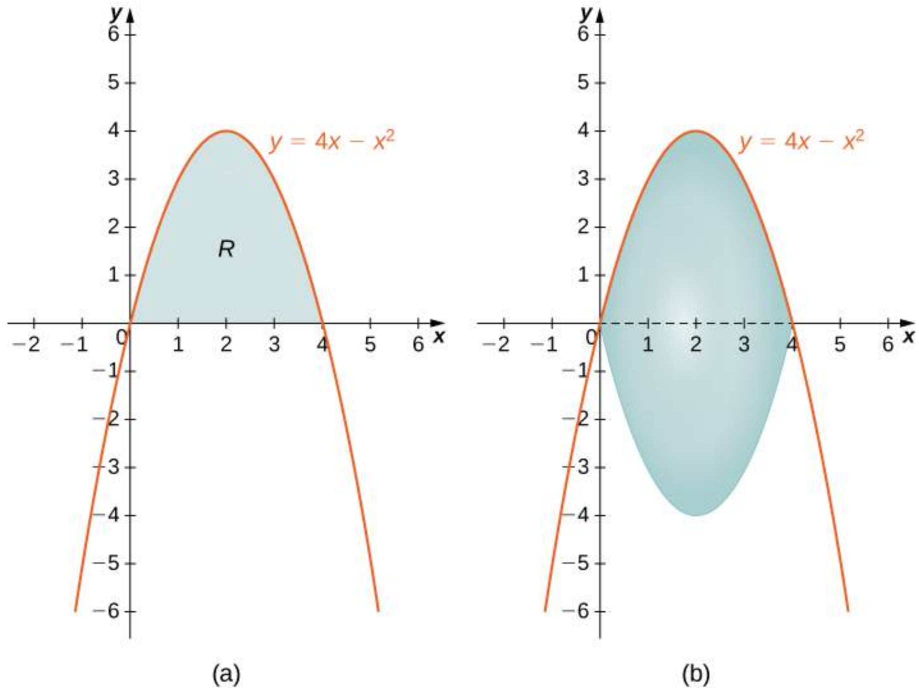


Figura 6.36 (a) La región R entre la curva y el eje x. (b) El sólido de revolución que se genera al girar R alrededor del eje x.

AL observar la región, sería problemático definir un rectángulo horizontal; la región está limitada a la izquierda y a la derecha por la misma función. Por lo tanto, podemos descartar el método de las capas. El sólido no tiene ninguna cavidad en el centro, por lo que podemos utilizar el método de los discos. Entonces

$$V = \int_0^4 \pi\left(4x - x^2\right)^2 dx.$$

6.17 Seleccione el mejor método para hallar el volumen de un sólido de revolución generado al girar la región dada alrededor del eje x, y establecer la integral para hallar el volumen (no evaluar la integral): la región limitada por los gráficos de $y = 2 - x^2$ y $y = x^2$.

SECCIÓN 6.3 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule el volumen generado cuando la región entre las dos curvas se gira alrededor del eje dado. Utilice tanto el método de las capas como el de las arandelas. Utilice la tecnología para graficar las funciones y dibujar un corte típico a mano.

114. **[T]** Limitado por las curvas $y = 3x, x = 0,$ y $y = 3$ girado alrededor del eje y.

115. **[T]** Limitado por las curvas $y = 3x, y = 0,$ y $x = 3$ girado alrededor del eje y.

116. **[T]** Limitado por las curvas $y = 3x, y = 0,$ y $y = 3$ girado alrededor del x.

117. **[T]** Limitado por las curvas $y = 3x, y = 0,$ y $x = 3$ girado alrededor del x.

118. **[T]** Limitado por las curvas $y = 2x^3, y = 0,$ y $x = 2$ girado alrededor del y.

119. **[T]** Limitado por las curvas $y = 2x^3, y = 0,$ y $x = 2$ girado alrededor del x.

En los siguientes ejercicios, utilice las capas para calcular el volumen de los sólidos dados. Observe que las regiones rotadas se encuentran entre la curva y el eje x y se giran alrededor del eje y.

120. $y = 1 - x^2, x = 0, \text{ y } x = 1$

121. $y = 5x^3, x = 0, \text{ y } x = 1$

122. $y = \frac{1}{x}, x = 1, \text{ y } x = 100$

123. $y = \sqrt{1 - x^2}, x = 0, \text{ y } x = 1$

124. $y = \frac{1}{1+x^2}, x = 0, \text{ y } x = 3$

125. $y = \operatorname{sen} x^2, x = 0, \text{ y } x = \sqrt{\pi}$

126. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x = 0, \text{ y } x = \frac{1}{2}$

127. $y = \sqrt{x}, x = 0, \text{ y } x = 1$

128. $y = \left(1 + x^2\right)^3, x = 0, \text{ y } x = 1$

129. $y = 5x^3 - 2x^4, x = 0, \text{ y } x = 2$

En los siguientes ejercicios, utilice las capas para hallar el volumen generado por la rotación de las regiones entre la curva dada y $y = 0$ alrededor del eje x.

130. $y = \sqrt{1 - x^2}, x = 0, \ x = 1$ y el eje *x*

131. $y = x^2, x = 0, \ x = 2$ y el eje *x*

132. $y = \frac{x^3}{2}, \ x = 0, \ x = 2,$ y el eje *x*

133. $y = \frac{2}{x^2}, \ x = 1, \ x = 2,$ y el eje *x*

134. $x = \frac{1}{1+y^2}, y = 1, \text{ y } y = 4$

135. $x = \frac{1+y^2}{y}, y = 1, \ y = 4,$ y el eje *y*

136. $x = \cos y, y = 0, \text{ y } y = \pi$

137. $x = y^3 - 2y^2, \ x = 0, \ x = 9,$ y el eje *y*

138. $x = \sqrt{y} + 1, \ x = 1, \ x = 3,$ y el eje *x*

139. $x = \sqrt[3]{27y} \text{ y } x = \frac{3y}{4}$

En los siguientes ejercicios calcule el volumen generado cuando la región entre las curvas se gira alrededor del eje dado.

140. $y = 3 - x, y = 0, x = 0, \text{ y } x = 2$ girado alrededor del y.

141. $y = x^3, x = 0, \text{ y } y = 8$ girado alrededor del y.

142. $y = x^2, y = x,$ girado alrededor del y.

143. $y = \sqrt{x}, y = 0, \text{ y } x = 1$ girado alrededor de la línea $x = 2$.

144. $y = \frac{1}{4-x}, x = 1, \ x = 2 \text{ y } y = 0$ girado alrededor de la línea $x = 4$.

145. $y = \sqrt{x} \text{ y } y = x^2$ girado alrededor del y.

146. $y = \sqrt{x} \text{ y } y = x^2$ girado alrededor de la línea $x = 2$.

147. $x = y^3, x = \frac{1}{y}, x = 1, \text{ y } x = 2$ girado alrededor del x.

148. $x = y^2 \text{ y } y = x$ girado alrededor de la línea $y = 2$.

149. **[T]** A la izquierda de $x = \operatorname{sen}(\pi y)$, derecha de $y = x$, alrededor del eje y.

En los siguientes ejercicios, utilice la tecnología para graficar la región. Determine qué método cree que sería más fácil de usar para calcular el volumen que se genera cuando la función gira alrededor del eje especificado. A continuación, utilice el método que haya elegido para hallar el volumen.

150. **[T]** $y = x^2$ y $y = 4x$ girado alrededor del y.

151. **[T]** $y = \cos(\pi x)$, $y = \text{sen}(\pi x)$, $x = \frac{1}{4}$, y $x = \frac{5}{4}$ girado alrededor del y. Este ejercicio requiere una técnica avanzada. Puede utilizar la tecnología para realizar la integración.

152. **[T]** $y = x^2 - 2x, x = 2,$ y $x = 4$ girado alrededor del y.

153. **[T]** $y = x^2 - 2x, x = 2,$ y $x = 4$ girado alrededor del x.

154. **[T]** $y = 3x^3 - 2, y = x,$ y $x = 2$ girado alrededor del x.

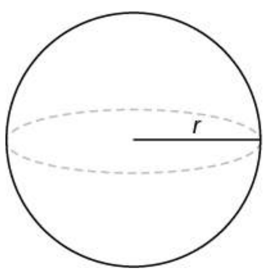
155. **[T]** $y = 3x^3 - 2, y = x,$ y $x = 2$ girado alrededor del y.

156. **[T]** $x = \text{sen}\left(\pi y^2\right)$ y $x = \sqrt{2}y$ girado alrededor del x.

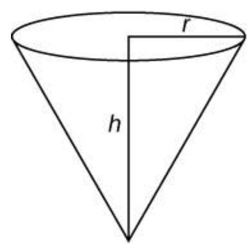
157. **[T]** $x = y^2, x = y^2 - 2y + 1,$ y $x = 2$ girado alrededor del y.

En los siguientes ejercicios, utilice el método de las capas para aproximar los volúmenes de algunos objetos comunes, que están representados en las figuras adjuntas.

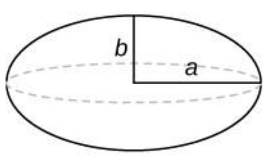
158. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de una esfera de radio r.

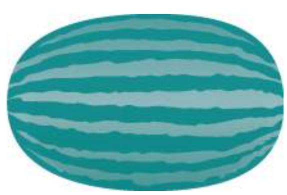


159. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de un cono de radio r y altura h.

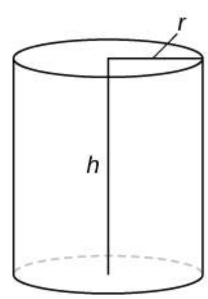


160. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de un elipsoide $\left(x^2/a^2\right) + \left(y^2/b^2\right) = 1$ girado alrededor del x.

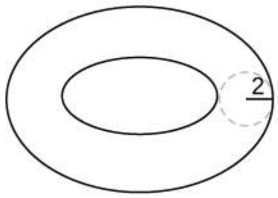




161. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de un cilindro de radio r y altura h.



162. Utilice el método de las capas para hallar el volumen de una rosquilla que se crea cuando el círculo $x^2 + y^2 = 4$ se gira alrededor de la línea $x = 4$.



163. Consideremos la región delimitada por los gráficos de $y = f(x)$, $y = 1 + f(x)$, $x = 0$, $y = 0$, y $x = a > 0$. ¿Cuál es el volumen del sólido que se genera cuando esta región gira alrededor del eje y? Supongamos que la función se define en el intervalo $[0, a]$.

164. Considere la función $y = f(x)$, que disminuye de $f(0) = b$ al $f(1) = 0$. Establezca las integrales para determinar el volumen, utilizando tanto el método de las capas como el de los discos, del sólido generado cuando esta región, con $x = 0$ y $y = 0$, se gira alrededor del y. Demostrar que ambos métodos se aproximan al mismo volumen. ¿Qué método es más fácil de aplicar? (*Pista:* Dado que $f(x)$ es biunívoca, existe un inverso $f^{-1}(y)$.)

6.4 Longitud del arco de una curva y superficie

Objetivos de aprendizaje

6.4.1 Determine la longitud de una curva, $y = f(x)$, entre dos puntos.
6.4.2 Determine la longitud de una curva, $x = g(y)$, entre dos puntos.
6.4.3 Hallar el área superficial de un sólido de revolución.

En esta sección, utilizaremos las integrales definidas para encontrar la longitud de arco de una curva. Podemos pensar en la **longitud de arco** como la distancia que recorreríamos si camináramos por la trayectoria de la curva. Muchas aplicaciones del mundo real implican la longitud de arco. Si se lanza un cohete a lo largo de una trayectoria parabólica, querremos saber qué distancia recorre el cohete. O si una curva en un mapa representa una carretera, desearíamos saber qué distancia tenemos que recorrer para llegar a nuestro destino.

Comenzamos calculando la longitud de arco de las curvas definidas como funciones de x, luego examinamos el mismo proceso para las curvas definidas como funciones de y. (El proceso es idéntico, invirtiendo los roles de x como y). Las técnicas que utilizamos para hallar la longitud de arco pueden ampliarse para hallar el área superficial de una superficie de revolución, y cerramos la sección con un examen de este concepto.

Longitud de arco de la curva $y = f(x)$

En las aplicaciones anteriores de la integración, necesitamos que la función $f(x)$ fuera integrable o como máximo, continua. Sin embargo, para calcular la longitud del arco se nos presenta un requisito más estricto para $f(x)$. En este caso, necesitamos que $f(x)$ sea diferenciable, y además requerimos que su derivada, $f'(x)$, sea continua. Las funciones como esta, que tienen derivadas continuas, se denominan *suaves*. (Esta propiedad volverá a aparecer en capítulos posteriores).

Supongamos que $f(x)$ es una función suave definida sobre $[a, b]$. Queremos calcular la longitud de la curva desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$. Comenzamos utilizando segmentos de línea para aproximar la longitud de la curva.

Para $i = 0,\ 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[a, b]$. Luego, para $i = 1, 2,\ldots, n$, construya un segmento lineal desde el punto $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ al punto $(x_i, f(x_i))$. Aunque podría parecer lógico utilizar segmentos de línea horizontales o verticales, queremos que nuestros segmentos de línea que se aproximen a la curva lo más posible. La Figura 6.37 representa esta construcción para $n = 5$.

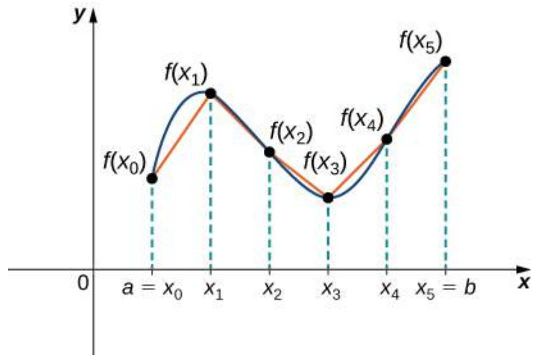


Figura 6.37 Podemos aproximar la longitud de una curva añadiendo segmentos de línea.

Para ayudarnos a encontrar la longitud de cada segmento de línea, debemos observar el cambio en la distancia vertical así como el cambio en la distancia horizontal en cada intervalo. Como utilizamos una partición regular, el cambio en la distancia horizontal en cada intervalo viene dado por Δx. Sin embargo, el cambio en la distancia vertical varía de un intervalo a otro, por lo que utilizamos $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ para representar el cambio de la distancia vertical en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, como se muestra en la Figura 6.38. Tenga en cuenta que algunos (o todos) Δy_i pueden ser negativos.

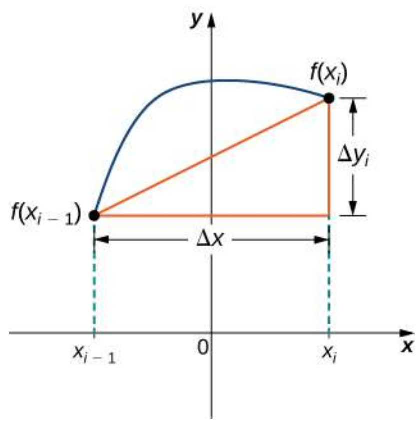


Figura 6.38 Un segmento de línea representativo aproxima la curva en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Según el teorema de Pitágoras, la longitud del segmento de línea es $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}$. También podemos escribirlo como $\Delta x\sqrt{1 + ((\Delta y_i)/(\Delta x))^2}$. Ahora, según el teorema del valor medio, hay un punto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ de manera que $f'(x_i^*) = (\Delta y_i)/(\Delta x)$. Entonces la longitud del segmento de línea viene dada por $\Delta x\sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}$. Sumando las longitudes de todos los segmentos de la línea, obtenemos

$$\text{Longitud de arco} \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann. Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, tenemos

$$\text{Longitud de arco} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Resumimos estas conclusiones en el siguiente teorema.

Teorema 6.4

Longitud de arco para $y = f(x)$

Supongamos que $f(x)$ una función suave en el intervalo $[a, b]$. Entonces la longitud de arco de la porción del gráfico de $f(x)$ desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b,\ f(b))$ está dada por

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx. \tag{6.7}$$

Note que estamos integrando una expresión que implica $f'(x)$, así que tenemos que estar seguros de que $f'(x)$ es integrable. Por eso necesitamos que $f(x)$ sea suave. El siguiente ejemplo muestra cómo aplicar el teorema.

EJEMPLO 6.18

Cálculo de la longitud de arco de una función de *x*

Supongamos que $f(x) = 2x^{3/2}$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$. Redondee la respuesta a tres decimales.

Solución

Tenemos $f'(x) = 3x^{1/2}$, por lo que $\left[f'(x)\right]^2 = 9x$. Entonces, la longitud de arco es

$$\begin{aligned}\text{Longitud de arco} &= \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + 9x}\, dx.\end{aligned}$$

Sustituya $u = 1 + 9x$. Entonces, $du = 9\, dx$. Cuando $x = 0$, entonces $u = 1$, y cuando $x = 1$, entonces $u = 10$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{Longitud de arco} &= \int_0^1 \sqrt{1 + 9x}\, dx \\ &= \frac{1}{9} \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} 9dx = \frac{1}{9} \int_1^{10} \sqrt{u}\, du \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{10} = \frac{2}{27} \left[10\sqrt{10} - 1\right] \approx 2{,}268 \text{ al cuadrado.}\end{aligned}$$

6.18 Supongamos que $f(x) = (4/3)\, x^{3/2}$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$. Redondee la respuesta a tres decimales.

Aunque es bueno tener una fórmula para calcular la longitud de arco, este teorema en particular puede generar expresiones difíciles de integrar. En [Introducción a técnicas de integración (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-2/pages/3-introduccion)](http://openstax.org/books/cálculo-volumen-2/pages/3-introduccion) estudiamos algunas técnicas de integración. En algunos casos, es posible que tengamos que utilizar una computadora o una calculadora para aproximar el valor de la integral.

EJEMPLO 6.19

Utilizar una computadora o una calculadora para determinar la longitud de arco de una función de *x*

Supongamos que $f(x) = x^2$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[1, 3]$.

Solución

Tenemos $f'(x) = 2x$, por lo que $\left[f'(x)\right]^2 = 4x^2$. Entonces la longitud de arco viene dada por

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx = \int_1^3 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Al utilizar una computadora para aproximar el valor de esta integral, obtenemos

$$\int_1^3 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \approx 8{,}26815.$$

6.19 Supongamos que $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $f(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Utilice una computadora o una calculadora para aproximar el valor de la integral.

Longitud de arco de la curva $x = g(y)$

Acabamos de ver cómo aproximar la longitud de una curva con una línea segmentada. Si queremos encontrar la longitud de arco del gráfico de una función de y, podemos repetir el mismo proceso, excepto que dividimos el eje y en lugar del eje x. La Figura 6.39 muestra un segmento de línea representativo.

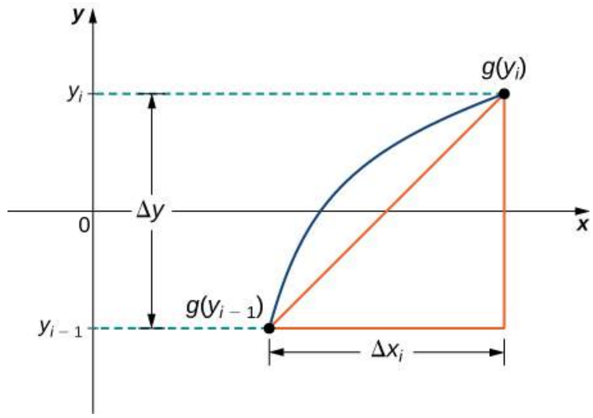


Figura 6.39 Un segmento de línea representativo en el intervalo $[y_{i-1}, y_i]$.

Entonces la longitud del segmento de línea es $\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta x_i)^2}$, que también puede escribirse como $\Delta y \sqrt{1 + ((\Delta x_i)/(\Delta y))^2}$. Si ahora seguimos el mismo desarrollo anterior, obtenemos una fórmula para la longitud de arco de una función $x = g(y)$.

Teorema 6.5

Longitud de arco para $x = g(y)$

Supongamos que $g(y)$ es una función suave sobre un y intervalo $[c, d]$. Entonces, la longitud de arco del gráfico de $g(y)$ desde el punto $(g(d),\ d)$ al punto $(g(c),\ c)$ está dada por

$$\text{Longitud de arco} = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy. \quad (6.8)$$

EJEMPLO 6.20

Cálculo de la longitud de arco de una función de y

Supongamos que $g(y) = 3y^3$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $g(y)$ en el intervalo $[1, 2]$.

Solución

Tenemos $g'(y) = 9y^2$, por lo que $[g'(y)]^2 = 81y^4$. Entonces la longitud de arco es

$$\text{Longitud de arco} = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_1^2 \sqrt{1 + 81y^4}\, dy.$$

Al utilizar una computadora para aproximar el valor de esta integral, obtenemos

$$\int_1^2 \sqrt{1+81y^4}\, dy \approx 21{,}0277.$$

6.20 Supongamos que $g(y) = 1/y$. Calcule la longitud de arco del gráfico de $g(y)$ en el intervalo $[1, 4]$. Utilice una computadora o una calculadora para aproximar el valor de la integral.

Área de una superficie de revolución

Los conceptos que hemos utilizado para hallar la longitud de arco de una curva pueden extenderse para hallar el área superficial de una superficie de revolución. El **área superficial** es el área total de la capa exterior de un objeto. En objetos como cubos o ladrillos, el área superficial del objeto es la suma de las áreas de todas sus caras. En las superficies curvas, la situación es un poco más compleja. Supongamos que $f(x)$ es una función suave no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Queremos encontrar el área superficial de la superficie de revolución que se crea al girar el gráfico de $y = f(x)$ alrededor del eje x como se muestra en la siguiente figura.

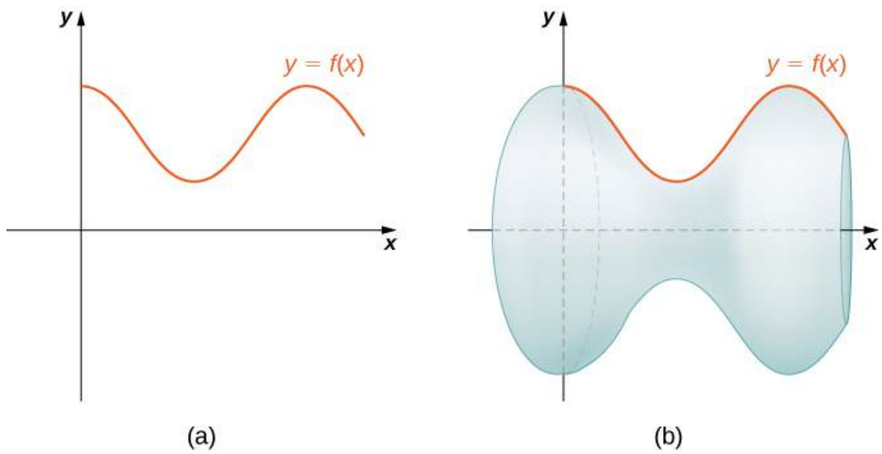


Figura 6.40 (a) Una curva que representa la función $f(x)$. b) La superficie de revolución que se forma al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x.

Como ya hemos hecho muchas veces, vamos a dividir el intervalo $[a, b]$ y aproximar el área superficial calculando la superficie de formas más simples. Comenzamos utilizando segmentos de línea para aproximar la curva, como hicimos anteriormente en esta sección. Para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[a, b]$. Luego, para $i = 1, 2,\ldots, n$, construya un segmento lineal desde el punto $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ al punto $(x_i, f(x_i))$. Ahora, gire estos segmentos de línea alrededor del eje x para generar una aproximación de la superficie de revolución como se muestra en la siguiente figura.

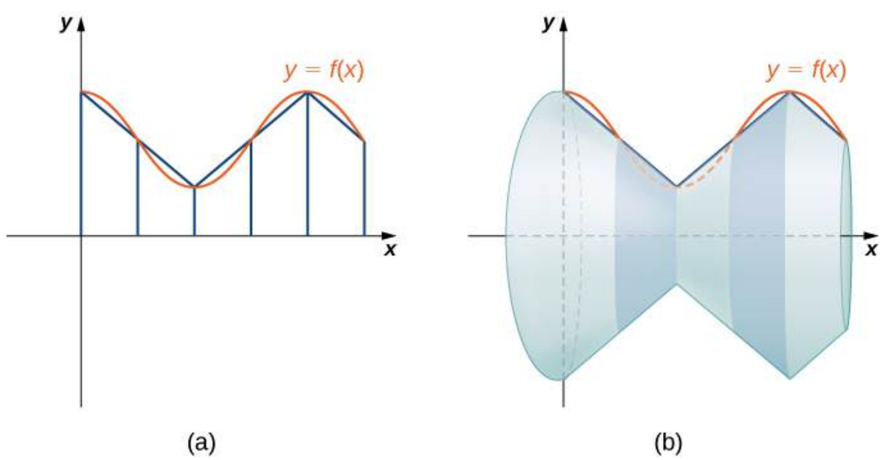


Figura 6.41 (a) Aproximación de $f(x)$ con segmentos de línea. (b) Superficie de revolución formada al girar los segmentos de línea alrededor del eje x.

Observe que, cuando cada segmento de línea gira alrededor del eje, produce una banda. Estas bandas son en realidad trozos de conos (piense en un cono de helado con el extremo puntiagudo cortado). Un trozo de cono como este se denomina **tronco** de cono.

Para encontrar el área superficial de la banda, necesitamos encontrar el área superficial lateral, S, del tronco (solo el área de la superficie exterior inclinada del tronco, sin incluir las áreas de las caras superiores o inferiores). Supongamos que r_1 y r_2 son los radios del extremo ancho y del extremo estrecho del tronco respectivamente, y que l es la altura oblicua del tronco como se muestra en la siguiente figura.

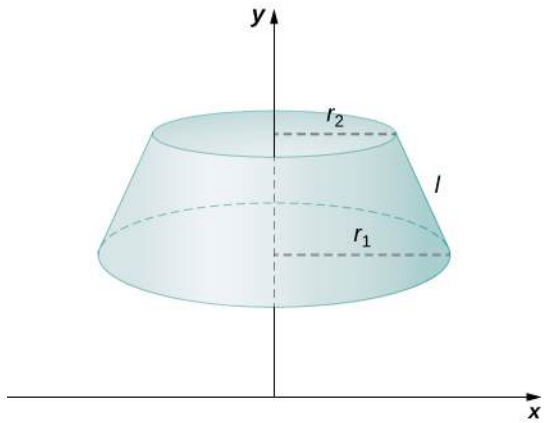


Figura 6.42 El tronco de un cono puede aproximarse a una pequeña parte del área superficial.

Sabemos que el área superficial lateral de un cono viene dada por

$$\text{Área superficial lateral} = \pi r s,$$

donde r es el radio de la base del cono y s es la altura de la inclinación (vea la siguiente figura).

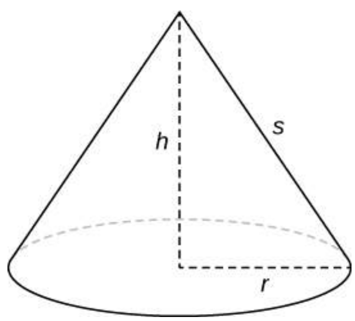


Figura 6.43 El área superficial lateral del cono viene dada por $\pi r s$.

Dado que un tronco puede considerarse como un trozo de cono, el área superficial lateral del tronco viene dada por el área superficial lateral del cono entero menos el área superficial lateral del cono más pequeño (la punta) que se cortó (vea la siguiente figura).

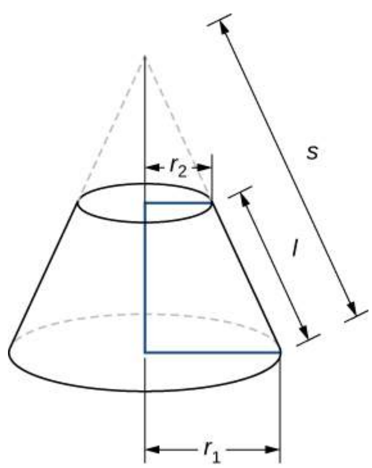


Figura 6.44 Cálculo del área superficial lateral del tronco de un cono.

Las secciones transversales del cono pequeño y del grande son triángulos similares, por lo que vemos que

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{s-l}{s}.$$

Al resolver para s, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{r_2}{r_1} &= \frac{s-l}{s} \\
r_2 s &= r_1 (s-l) \\
r_2 s &= r_1 s - r_1 l \\
r_1 l &= r_1 s - r_2 s \\
r_1 l &= (r_1 - r_2) s \\
\frac{r_1 l}{r_1 - r_2} &= s.
\end{aligned}$$

Entonces el área superficial lateral (SA) del tronco es

$$\begin{aligned}
S &= \text{(SA lateral del cono grande)} - \text{(SA lateral del cono pequeño)} \\
&= \pi r_1 s - \pi r_2 (s-l) \\
&= \pi r_1 \left(\frac{r_1 l}{r_1 - r_2}\right) - \pi r_2 \left(\frac{r_1 l}{r_1 - r_2} - l\right) \\
&= \frac{\pi r_1^2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1 - r_2} + \pi r_2 l \\
&= \frac{\pi r_1^2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1 - r_2} + \frac{\pi r_2 l (r_1 - r_2)}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{\pi r_1^2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1 - r_2} + \frac{\pi r_1 r_2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_2{}^2 l}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{\pi \left(r_1^2 - r_2^2\right) l}{r_1 - r_2} = \frac{\pi (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) l}{r_1 - r_2} = \pi (r_1 + r_2) l.
\end{aligned}$$

Utilicemos ahora esta fórmula para calcular el área superficial de cada una de las bandas que se forman al girar los segmentos de la línea alrededor del eje x. En la siguiente figura se muestra una banda representativa.

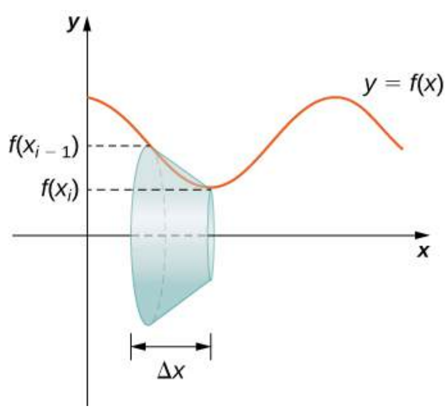


Figura 6.45 Banda representativa utilizada para determinar el área superficial.

Observe que la altura oblicua de este tronco es solo la longitud del segmento de línea que se usa para generarlo. Así, aplicando la fórmula del área superficial, tenemos

$$\begin{aligned}
S &= \pi (r_1 + r_2) l \\
&= \pi \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{\Delta x^2 + (\Delta y_i)^2} \\
&= \pi \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Ahora, como hicimos en el desarrollo de la fórmula de la longitud de arco, aplicamos el teorema del valor medio para seleccionar $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ de manera que $f'(x_i^*) = (\Delta y_i)/\Delta x$. Esto nos da

$$S = \pi \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \Delta x \sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2}.$$

Además, como $f(x)$ es continua, por el teorema del valor intermedio, hay un punto $x_i^{**} \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ de manera que $f(x_i^{**}) = (1/2)\left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right]$, por lo que obtenemos

$$S = 2\pi f(x_i^{**})\Delta x\sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2}.$$

Entonces el área superficial aproximada de toda la superficie de revolución viene dada por

$$\text{Superficie} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^{**})\Delta x\sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2}.$$

Esto *casi* parece una suma de Riemann, excepto que tenemos funciones evaluadas en dos puntos diferentes, x_i^* y x_i^{**}, en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. Aunque no examinamos los detalles aquí, resulta que ya que $f(x)$ es suave, si suponemos que $n \to \infty$, el límite funciona igual que una suma de Riemann incluso con los dos puntos de evaluación diferentes. De manera intuitiva, esto tiene sentido. Tanto x_i^* y x_i^{**} están en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, por lo que tiene sentido que, cuando $n \to \infty$, ambos x_i^* y x_i^{**} se acercan a x. Si le interesan los detalles debe consultar un texto de cálculo avanzado.

Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, obtenemos

$$\text{Superficie} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i^{**})\Delta x\sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2} = \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\right) dx.$$

Al igual que con la longitud de arco, podemos realizar un desarrollo similar para las funciones de y a fin de obtener una fórmula del área superficial de las superficies de revolución alrededor del y. Estas conclusiones se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 6.6

Área superficial de una superficie de revolución

Supongamos que $f(x)$ es una función suave no negativa sobre el intervalo $[a, b]$. Entonces, la superficie de la superficie de revolución que se forma al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x viene dada por

$$\text{Superficie} = \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\right) dx. \tag{6.9}$$

Del mismo modo, supongamos que $g(y)$ es una función suave no negativa sobre el intervalo $[c, d]$. Entonces, la superficie de la superficie de revolución que se forma al girar el gráfico de $g(y)$ alrededor del eje y viene dada por

$$\text{Superficie} = \int_c^d \left(2\pi g(y)\sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\right) dy.$$

EJEMPLO 6.21

Cálculo del área superficial de una superficie de revolución 1

Supongamos que $f(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[1, 4]$. Halle el área de la superficie que se genera al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x. Redondee la respuesta a tres decimales.

Solución

El gráfico de $f(x)$ y la superficie de rotación se muestran en la siguiente figura.

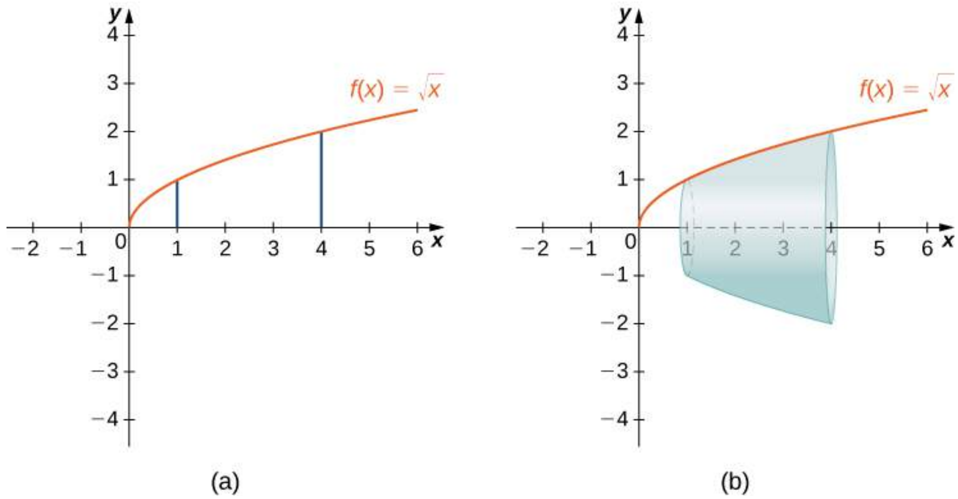


Figura 6.46 (a) El gráfico de $f(x)$. (b) La superficie de revolución.

Tenemos $f(x) = \sqrt{x}$. Entonces, $f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right)$ y $\left(f'(x)\right)^2 = 1/(4x)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Superficie} &= \int_a^b \left(2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\right) dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\right) dx \\ &= \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right) dx. \end{aligned}$$

Supongamos que $u = x + 1/4$. Entonces, $du = dx$. Cuando $x = 1$, $u = 5/4$, y cuando $x = 4$, $u = 17/4$. Esto nos da

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(2\pi\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right) dx &= \int_{5/4}^{17/4} 2\pi\sqrt{u}\, du \\ &= 2\pi\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_{5/4}^{17/4} = \tfrac{\pi}{6}\left[17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right] \approx 30{,}846. \end{aligned}$$

6.21 Supongamos que $f(x) = \sqrt{1-x}$ en el intervalo $[0, 1/2]$. Halle el área de la superficie que se genera al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x. Redondee la respuesta a tres decimales.

EJEMPLO 6.22

Cálculo del área superficial de una superficie de revolución 2

Supongamos que $f(x) = y = \sqrt[3]{3x}$. Considere la parte de la curva donde $0 \le y \le 2$. Halle el área de la superficie que se genera al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje y.

Solución

Observe que estamos girando la curva alrededor del eje y, y el intervalo está en términos de y, por lo que queremos reescribir la función como una función de y. Obtenemos $x = g(y) = (1/3)\,y^3$. La gráfica de $g(y)$ y la superficie de rotación se muestran en la siguiente figura.

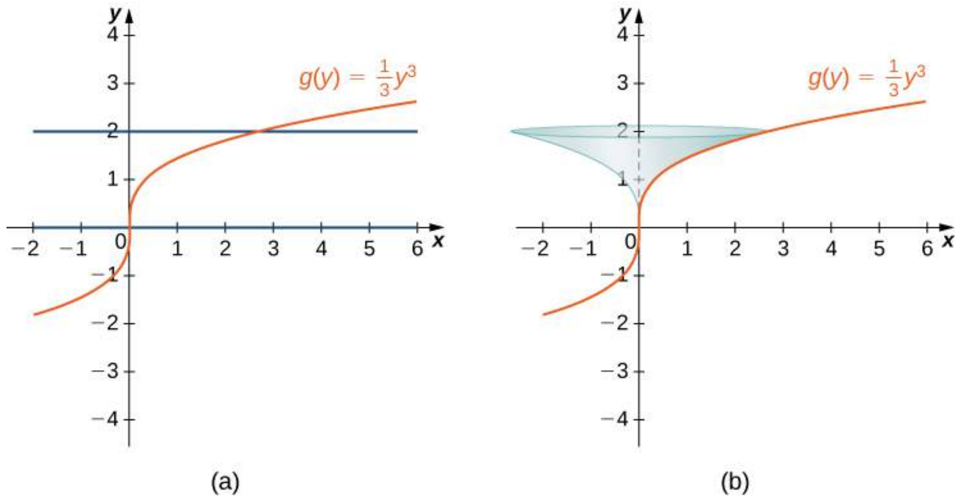


Figura 6.47 (a) El gráfico de $g(y)$. (b) La superficie de revolución.

Tenemos $g(y) = (1/3)\, y^3$, por lo que $g'(y) = y^2$ y $\left(g'(y)\right)^2 = y^4$. Entonces

$$\begin{aligned}\text{Superficie} &= \int_c^d \left(2\pi g(y)\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\right) dy \\ &= \int_0^2 \left(2\pi\left(\frac{1}{3}y^3\right)\sqrt{1+y^4}\right) dy \\ &= \tfrac{2\pi}{3}\int_0^2 \left(y^3\sqrt{1+y^4}\right) dy.\end{aligned}$$

Supongamos que $u = y^4 + 1$. Entonces $du = 4y^3\,dy$. Cuando $y = 0$, $u = 1$, y cuando $y = 2$, $u = 17$. Entonces

$$\begin{aligned}\tfrac{2\pi}{3}\int_0^2 \left(y^3\sqrt{1+y^4}\right) dy &= \tfrac{2\pi}{3}\int_1^{17} \frac{1}{4}\sqrt{u}du \\ &= \tfrac{\pi}{6}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]\Big|_1^{17} = \tfrac{\pi}{9}\left[(17)^{3/2}-1\right] \approx 24{,}118.\end{aligned}$$

6.22 Supongamos que $g(y) = \sqrt{9-y^2}$ en el intervalo $y \in [0, 2]$. Halle el área de la superficie que se genera al girar el gráfico de $g(y)$ alrededor del eje y.

SECCIÓN 6.4 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, halle la longitud de las funciones en el intervalo dado.

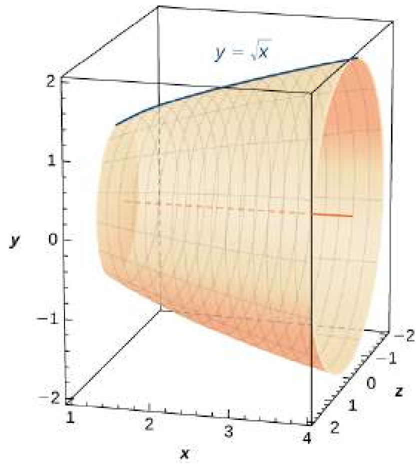
165. $y = 5x$ de $x = 0$ a $x = 2$

166. $y = -\frac{1}{2}x + 25$ de $x = 1$ para $x = 4$

167. $x = 4y$ de $y = -1$ para $y = 1$

168. Elija una función lineal arbitraria $x = g(y)$ en cualquier intervalo de su elección (y_1, y_2). Determine la longitud de la función y luego demuestre que la longitud es correcta utilizando la geometría.

169. Calcule la superficie del volumen generado cuando la curva $y = \sqrt{x}$ gira en torno a eje x a partir de $(1, 1)$ al $(4, 2)$, como se ve aquí.



170. Calcule la superficie del volumen generado cuando la curva $y = x^2$ gira en torno a y a partir de $(1,\ 1)$ al $(3, 9)$.

Para los siguientes ejercicios, calcule las longitudes de las funciones de x en el intervalo dado. Si no puede evaluar la integral exactamente, utilice la tecnología para aproximarla.

171. $y = x^{3/2}$ a partir de $(0, 0)$ para $(1, 1)$ grandes.

172. $y = x^{2/3}$ a partir de $(1, 1)$ para $(8, 4)$ grandes.

173. $y = \frac{1}{3}\left(x^2 + 2\right)^{3/2}$ de $x = 0 \text{ a } x = 1$

174. $y = \frac{1}{3}\left(x^2 - 2\right)^{3/2}$ de $x = 2$ hasta $x = 4$

175. **[T]** $y = e^x$ sobre $x = 0$ hasta $x = 1$

176. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ de $x = 1 \text{ para } x = 3$

177. $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$ de $x = 1 \text{ para } x = 2$

178. $y = \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^{1/2}}{2}$ de $x = 1 \text{ para } x = 4$

179. $y = \frac{1}{27}\left(9x^2 + 6\right)^{3/2}$ de $x = 0 \text{ a } x = 2$

180. **[T]** $y = \text{sen}\, x$ sobre $x = 0 \text{ a } x = \pi$

Para los siguientes ejercicios, calcule las longitudes de las funciones de y en el intervalo dado. Si no puede evaluar la integral exactamente, utilice la tecnología para aproximarla.

181. $y = \frac{5-3x}{4}$ a partir de $y = 0$ al $y = 4$

182. $x = \frac{1}{2}\left(e^y + e^{-y}\right)$ a partir de $y = -1 \text{ para } y = 1$

183. $x = 5y^{3/2}$ a partir de $y = 0$ al $y = 1$

184. **[T]** $x = y^2$ a partir de $y = 0$ al $y = 1$

185. $x = \sqrt{y}$ a partir de $y = 0 \text{ para } y = 1$

186. $x = \frac{2}{3}\left(y^2 + 1\right)^{3/2}$ a partir de $y = 1$ hasta $y = 3$

187. **[T]** $x = \tan y$ a partir de $y = 0$ al $y = \frac{3}{4}$

188. **[T]** $x = \cos^2 y$ a partir de $y = -\frac{\pi}{2}$ al $y = \frac{\pi}{2}$

189. **[T]** $x = 4^y$ a partir de $y = 0 \text{ para } y = 2$

190. **[T]** $x = \ln(y)$ sobre $y = \frac{1}{e}$ al $y = e$

Para los siguientes ejercicios, halle la superficie del área del volumen generado cuando las siguientes curvas giran alrededor del eje x. Si no puede evaluar la integral exactamente, utilice su calculadora para aproximarla.

191. $y = \sqrt{x}$ de $x = 2$ hasta $x = 6$

192. $y = x^3$ a partir de $x = 0$ hasta $x = 1$

193. $y = 7x$ de $x = -1$ para $x = 1$

194. **[T]** $y = \frac{1}{x^2}$ de $x = 1$ para $x = 3$

195. $y = \sqrt{4 - x^2}$ de $x = 0$ a $x = 2$

196. $y = \sqrt{4 - x^2}$ de $x = -1$ para $x = 1$

197. $y = 5x$ de $x = 1$ para $x = 5$

198. **[T]** $y = \tan x$ de $x = -\frac{\pi}{4}$ para $x = \frac{\pi}{4}$

Para los siguientes ejercicios, halle la superficie del área del volumen generado cuando las siguientes curvas giran alrededor del y. Si no puede evaluar la integral exactamente, utilice su calculadora para aproximarla.

199. $y = x^2$ de $x = 0$ a $x = 2$

200. $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ de $x = 0$ a $x = 1$

201. $y = x + 1$ a partir de $x = 0$ a $x = 3$

202. **[T]** $y = \frac{1}{x}$ de $x = \frac{1}{2}$ hasta $x = 1$

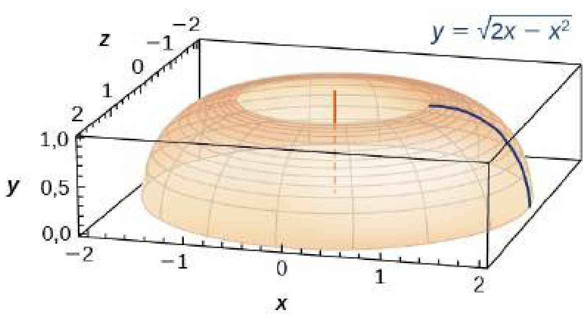
203. $y = \sqrt[3]{x}$ a partir de $x = 1$ para $x = 27$

204. **[T]** $y = 3x^4$ a partir de $x = 0$ hasta $x = 1$

205. **[T]** $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ de $x = 1$ a $x = 3$

206. **[T]** $y = \cos x$ de $x = 0$ hasta $x = \frac{\pi}{2}$

207. La base de una lámpara se construye girando un cuarto de círculo $y = \sqrt{2x - x^2}$ alrededor del eje y a partir de $x = 1$ a $x = 2$, como se ve aquí. Cree una integral para la superficie de esta curva y calcúlela.



208. Una bombilla es una esfera con un radio de $1/2$ in con la parte inferior cortada para que encaje exactamente en un cilindro con un radio de $1/4$ in y longitud $1/3$ in, como se ve aquí. La esfera se corta por la parte inferior para que encaje exactamente en el cilindro, por lo que el radio del corte es de $1/4$ pulgadas Halle el área superficial (sin incluir la parte superior o inferior del cilindro).

209. **[T]** Una pantalla se construye al girar $y = 1/x$ alrededor del eje x a partir de $y = 1$ hasta $y = 2$, como se ve aquí. Determine la cantidad de material que necesitará para construir esta pantalla de lámpara, es decir, el área superficial, con una precisión de cuatro decimales.

210. **[T]** Un ancla se arrastra detrás de un barco según la función $y = 24e^{-x/2} - 24$, donde y representa la profundidad bajo el barco y x es la distancia horizontal del ancla desde la parte trasera del barco. Si el ancla está a 23 ft por debajo del barco, ¿cuánta cuerda hay que tirar para alcanzar el ancla? Redondee su respuesta a tres decimales.

211. **[T]** Está construyendo un puente que abarcará 10 pies. Tiene la intención de añadir una cuerda decorativa en forma de $y = 5\left|\operatorname{sen}\left((x\pi)/5\right)\right|$, donde x es la distancia en pies desde un extremo del puente. Averigüe cuánta cuerda necesita comprar, redondeada al pie más cercano.

En los siguientes ejercicios, halle la longitud de arco exacta para los siguientes problemas sobre el intervalo dado.

212. $y = \ln(\text{sen}\, x)$ de $x = \pi/4$ al $x = (3\pi)/4$. (*Pista:* Recuerde las identidades trigonométricas).

213. Dibuje gráficos de $y = x^2$, $y = x^6$, y $y = x^{10}$. Para $y = x^n$, cuando n aumenta, formule una predicción sobre la longitud del arco a partir de $(0, 0)$ al $(1, 1)$. Ahora, calcule las longitudes de estas tres funciones y determine si su predicción es correcta.

214. Compare las longitudes de la parábola $x = y^2$ y la línea $x = by$ a partir de $(0, 0)$ para $\left(b^2, b\right)$ cuando b aumenta. ¿Qué observa?

215. Resuelva la longitud de $x = y^2$ a partir de $(0, 0)$ para $(1, 1)$. Demuestre que $x = (1/2)\, y^2$ a partir de $(0, 0)$ al $(2,\ 2)$ es el doble de largo. Grafique ambas funciones y explique por qué es así.

216. **[T]** Qué es más largo entre $(1,\ 1)$ y $(2, 1/2)$: la hipérbola $y = 1/x$ o el gráfico de $x + 2y = 3$?

217. Explique por qué el área de superficie es infinita cuando $y = 1/x$ se gira alrededor del eje x por $1 \le x < \infty$, pero el volumen es finito.

6.5 Aplicaciones físicas

Objetivos de aprendizaje

6.5.1 Determinar la masa de un objeto unidimensional a partir de su función de densidad lineal.
6.5.2 Determinar la masa de un objeto circular bidimensional a partir de su función de densidad radial.
6.5.3 Calcular el trabajo realizado por una fuerza variable que actúa a lo largo de una línea.
6.5.4 Calcular el trabajo realizado al bombear un líquido de una altura a otra.
6.5.5 Encontrar la fuerza hidrostática contra una placa vertical sumergida.

En esta sección, examinaremos algunas aplicaciones físicas de la integración. Comenzaremos dándole un vistazo al cálculo de la masa a partir de una función de densidad. A continuación, nos centraremos en el trabajo y cerraremos la sección con un estudio de la fuerza hidrostática.

Masa y Densidad

Podemos utilizar la integración para desarrollar una fórmula para calcular la masa con base en una función de densidad. En primer lugar, pensemos en una varilla o un cable delgado. Se orienta la varilla para que se alinee con el eje x−eje, con el extremo izquierdo de la varilla en $x = a$ y el extremo derecho en $x = b$ (Figura 6.48). Note que, aunque en las figuras representamos la varilla con cierto grosor, a efectos matemáticos suponemos que la varilla es lo suficientemente fina como para ser tratada como un objeto unidimensional.

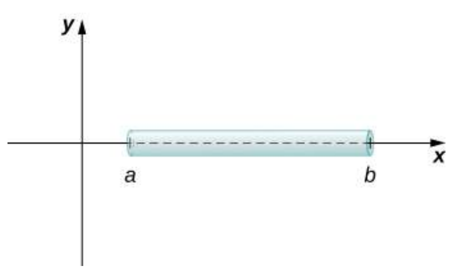


Figura 6.48 Podemos calcular la masa de una varilla delgada orientada a lo largo del eje x integrando su función de densidad.

Si la varilla tiene una densidad constante ρ, dada en términos de masa por unidad de longitud, entonces la masa de la varilla es solo el producto de la densidad y la longitud de la varilla: $(b– a)\, \rho$. Sin embargo, si la densidad de la varilla no es constante, el problema se vuelve un poco más difícil. Cuando la densidad de la varilla varía de un punto a otro, utilizamos una **función de densidad** lineal, $\rho(x)$, para denotar la densidad de la varilla en cualquier punto, x. Supongamos que $\rho(x)$ es una función de densidad lineal integrable. Ahora, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$ supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[a, b]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$ elija un punto arbitrario $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. La Figura 6.49 muestra un segmento representativo de la varilla.

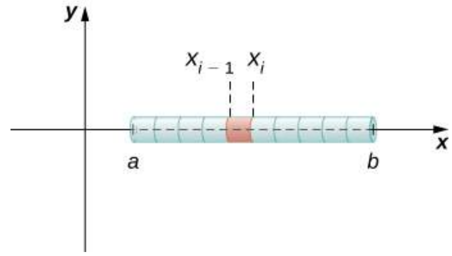


Figura 6.49 Un segmento representativo de la varilla.

La masa m_i del segmento de la varilla de x_{i-1} a x_i se aproxima por

$$m_i \approx \rho(x_i^*)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Sumando las masas de todos los segmentos obtenemos una aproximación a la masa de toda la varilla:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann. Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, obtenemos una expresión de la masa exacta de la varilla:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)\Delta x = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Enunciamos este resultado en el siguiente teorema.

Teorema 6.7

Fórmula masa-densidad de un objeto unidimensional

Dada una varilla delgada orientada a lo largo del eje x en el intervalo $[a, b]$, supongamos que $\rho(x)$ denota una función de densidad lineal que da la densidad de la varilla en un punto x del intervalo. Entonces la masa de la varilla viene dada por

$$m = \int_a^b \rho(x)dx. \qquad \textbf{(6.10)}$$

Aplicamos este teorema en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.23

Cálculo de la masa a partir de la densidad lineal

Consideremos una varilla delgada orientada en el eje x sobre el intervalo $[\pi/2, \pi]$. Si la densidad de la varilla viene dada por $\rho(x) = \text{sen}\, x$, ¿cuál es la masa de la varilla?

Solución

Aplicando directamente la Ecuación 6.10, tenemos

$$m = \int_a^b \rho(x)dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \text{sen}\, x\, dx = -\cos x\Big|_{\pi/2}^{\pi} = 1.$$

6.23 Consideremos una varilla delgada orientada en el eje $x$sobre el intervalo $[1, 3]$. Si la densidad de la varilla viene dada por $\rho(x) = 2x^2 + 3$, ¿cuál es la masa de la varilla?

Ahora extendemos este concepto para hallar la masa de un disco bidimensional de radio r. Al igual que con la varilla del caso unidimensional, aquí suponemos que el disco es lo suficientemente fino como para que, a efectos matemáticos, podamos tratarlo como un objeto bidimensional. Suponemos que la densidad está dada en términos de masa por unidad de superficie (denominada *densidad de área*), y además que la densidad varía solo a lo largo del radio del disco (denominada *densidad radial*). Orientamos el disco en elxy, con el centro en el origen. Entonces, la densidad del disco puede ser tratada como una función de x, denotado $\rho(x)$. Suponemos que $\rho(x)$ es integrable. Como la densidad es una función de x, dividimos el intervalo desde $[0, r]$ a lo largo del eje x. Para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[0, r]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. Ahora, utilice la división para dividir el disco en arandelas finas (bidimensionales). En la siguiente figura se muestra un disco y una arandela representativa.

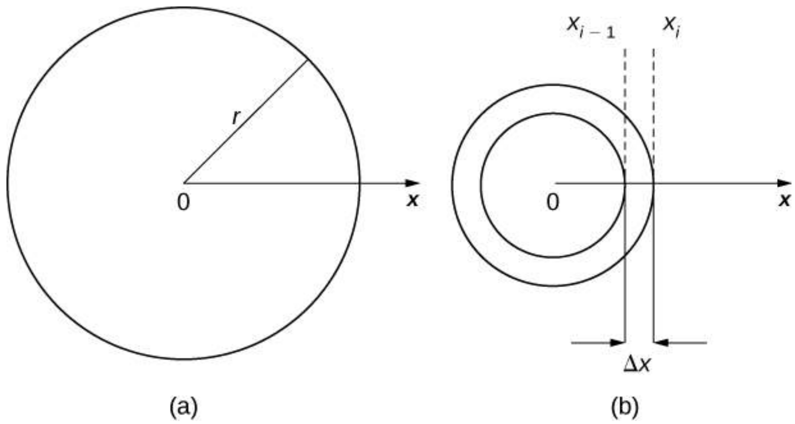


Figura 6.50 (a) Un disco fino en el plano *xy*. (b) Una arandela representativa.

Ahora aproximamos la densidad y el área de la arandela para calcular una masa aproximada, m_i . Observe que el área de la arandela viene dada por

$$\begin{aligned} A_i &= \pi(x_i)^2 - \pi(x_{i-1})^2 \\ &= \pi\left[x_i^2 - x_{i-1}^2\right] \\ &= \pi\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= \pi(x_i + x_{i-1})\Delta x. \end{aligned}$$

Es posible que recuerde que teníamos una expresión similar a esta cuando calculábamos los volúmenes por capas. Como hicimos allí, utilizamos $x_i^* \approx (x_i + x_{i-1})/2$ para aproximar al radio medio de la arandela. Obtenemos

$$A_i = \pi(x_i + x_{i-1})\Delta x \approx 2\pi x_i^* \Delta x.$$

Utilizando $\rho(x_i^*)$ para aproximar la densidad de la arandela, aproximamos la masa de la misma mediante

$$m_i \approx 2\pi x_i^* \rho(x_i^*)\Delta x.$$

Sumando las masas de las arandelas, vemos que la masa m de todo el disco se aproxima por

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \rho(x_i^*)\Delta x.$$

De nuevo reconocemos que se trata de una suma de Riemann, y tomamos el límite como $n \to \infty$. Esto nos da

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i^* \rho(x_i^*)\Delta x = \int_0^r 2\pi x\rho(x)dx.$$

Resumimos estas conclusiones en el siguiente teorema.

Teorema 6.8

Fórmula masa-densidad de un objeto circular

Supongamos que $\rho(x)$ es una función integrable que representa la densidad radial de un disco de radio r. Entonces la masa del disco viene dada por

$$m = \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx. \tag{6.11}$$

EJEMPLO 6.24

Cálculo de la masa a partir de la densidad radial

Supongamos que $\rho(x) = \sqrt{x}$ representan la densidad radial de un disco. Calcule la masa de un disco de radio 4.

Solución

Aplicando la fórmula, hallamos

$$\begin{aligned} m &= \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx \\ &= \int_0^4 2\pi x \sqrt{x} dx = 2\pi \int_0^4 x^{3/2} dx \\ &= 2\pi \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^4 = \frac{4\pi}{5}[32] = \frac{128\pi}{5}. \end{aligned}$$

6.24 Supongamos que $\rho(x) = 3x + 2$ representan la densidad radial de un disco. Calcule la masa de un disco de radio 2.

Trabajo realizado por una fuerza

Ahora consideramos el trabajo. En física, el trabajo está relacionado con la fuerza, que a menudo se define intuitivamente como un empuje o un tirón sobre un objeto. Cuando una fuerza mueve un objeto, decimos que la fuerza realiza un trabajo sobre el objeto. En otras palabras, el trabajo puede considerarse como la cantidad de energía que se necesita para mover un objeto. Según la física, cuando tenemos una fuerza constante, el trabajo puede expresarse como el producto de la fuerza por la distancia.

En el sistema inglés, la unidad de fuerza es la libra y la unidad de distancia es el pie, por lo que el trabajo se da en pies-libra. En el sistema métrico se utilizan los kilogramos y los metros. Un newton es la fuerza necesaria para acelerar 1 kilogramo de masa a una tasa de 1 m/s^2. Así, la unidad de trabajo más común es el newton-metro. Esta misma unidad también se denomina *joule*. Ambos se definen como kilogramos por metros al cuadrado sobre segundos al cuadrado $\left(\text{kg. m}^2/\text{s}^2\right)$.

Cuando tenemos una fuerza constante, las cosas son bastante fáciles. Sin embargo, es raro que una fuerza sea constante. El trabajo realizado para comprimir (o alargar) un resorte, por ejemplo, varía en función de cuánto se lo haya comprimido o estirado. Más adelante, en esta misma sección, se analizan los resortes con más detalle.

Supongamos que tenemos una fuerza variable $F(x)$ que mueve un objeto en dirección positiva a lo largo del eje x desde el punto a al punto b. Para calcular el trabajo realizado, dividimos el intervalo $[a, b]$ y estimamos el trabajo realizado en cada subintervalo. Entonces, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[a, b]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. Calcular el trabajo realizado para mover un objeto desde un punto x_{i-1} al punto x_i, suponemos que la fuerza es aproximadamente constante en el intervalo, y utilizamos $F(x_i^*)$ para aproximar la fuerza. El trabajo realizado en el intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$, entonces, viene dado por

$$W_i \approx F(x_i^*)\left(x_i - x_{i-1}\right) = F(x_i^*)\Delta x.$$

Por lo tanto, el trabajo realizado en el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x.$$

Tomando el límite de esta expresión como $n \to \infty$ nos da el valor exacto del trabajo:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} F(x_i^*)\Delta x = \int_a^b F(x)dx.$$

Así, podemos definir el trabajo de la siguiente manera.

Definición

Si una fuerza variable $F(x)$ mueve un objeto en una dirección positiva a lo largo del eje *x* desde el punto *a* hasta el punto *b*, entonces el **trabajo** realizado sobre el objeto es

$$W = \int_a^b F(x)dx. \tag{6.12}$$

Note que si *F* es constante, la integral se evalúa como $F.(b– a) = F.d$, que es la fórmula que indicamos al principio de esta sección.

Veamos ahora el ejemplo concreto del trabajo realizado para comprimir o alargar un resorte. Consideremos un bloque unido a un resorte horizontal. El bloque se mueve hacia adelante y hacia atrás cuando el resorte se estira y se comprime. Aunque en el mundo real tendríamos que tener en cuenta la fuerza de fricción entre el bloque y la superficie sobre la que se apoya, aquí ignoramos la fricción y suponemos que el bloque está apoyado sobre una superficie sin fricción. Cuando el resorte está en su longitud natural (en reposo), se dice que el sistema está en equilibrio. En este estado, el resorte no se alarga ni se comprime, y en esta posición de equilibrio el bloque no se mueve hasta que se introduce alguna fuerza. Orientamos el sistema de forma que $x = 0$ corresponde a la posición de equilibrio (vea la siguiente figura).

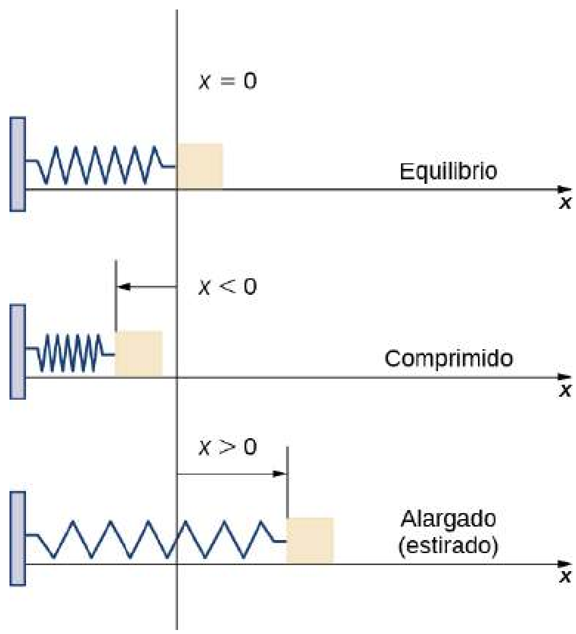


Figura 6.51 Un bloque unido a un resorte horizontal en equilibrio, comprimido y alargado.

Según la **ley de Hooke**, la fuerza necesaria para comprimir o estirar un resorte desde una posición de equilibrio viene dada por $F(x) = kx$, para alguna constante k. El valor de k depende de las características físicas del resorte. La constante k se denomina *constante del resorte* y siempre es positiva. Podemos utilizar esta información para calcular el trabajo realizado para comprimir o alargar un resorte, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.25

El trabajo necesario para estirar o comprimir un resorte

Supongamos que se necesita una fuerza de 10 N (en sentido negativo) para comprimir un resorte $0{,}2$ m de la posición de equilibrio. Cuánto trabajo se hace para estirar el resorte $0{,}5$ m de la posición de equilibrio?

Solución

Primero halle la constante del resorte, k. Cuando $x = -0{,}2$, sabemos que $F(x) = -10$, así que

$$\begin{aligned} F(x) &= kx \\ -10 &= k(-0{,}2) \\ k &= 50 \end{aligned}$$

y $F(x) = 50x$. Entonces, para calcular el trabajo, integramos la función de fuerza, obteniendo

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^{0{,}5} 50x\,dx = 25x^2\Big|_0^{0{,}5} = 6{,}25.$$

El trabajo realizado para estirar el resorte es $6{,}25$ J.

6.25 Supongamos que se necesita una fuerza de 8 lb para estirar un resorte de 6 pulgadas desde la posición de equilibrio. Cuánto trabajo se hace para estirar el resorte 1 pies de la posición de equilibrio?

Trabajo realizado en el bombeo

Considere el trabajo realizado para bombear agua (o algún otro líquido) fuera de un tanque. Los problemas de bombeo son un poco más complicados que los de los resortes porque muchos de los cálculos dependen de la forma y el tamaño del depósito. Además, en vez de preocuparnos por el trabajo realizado para mover una sola masa, nos fijamos en el trabajo realizado para mover un volumen de agua, y se necesita más trabajo para mover el agua desde el fondo del tanque que para mover el agua desde la parte superior del tanque.

Examinamos el proceso en el contexto de un tanque cilíndrico, y luego vemos un par de ejemplos utilizando tanques de diferentes formas. Supongamos un depósito cilíndrico de un radio de 4 m y de 10 m de altura se llena hasta una profundidad de 8 m. ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear toda el agua sobre el borde superior del tanque?

Lo primero que tenemos que hacer es definir un marco de referencia. Supongamos que x representa la distancia vertical por debajo de la parte superior del tanque. Es decir, orientamos el eje x verticalmente, con el origen en la parte superior del tanque y la dirección hacia abajo que es positiva (ver la siguiente figura).

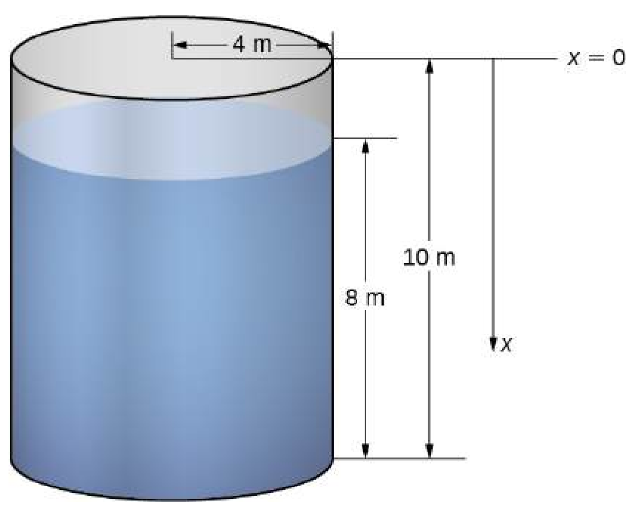


Figura 6.52 ¿Cuánto trabajo se necesita para vaciar un depósito parcialmente lleno de agua?

Utilizando este sistema de coordenadas, el agua se extiende desde $x = 2$ hasta $x = 10$. Por lo tanto, dividimos el intervalo $[2,\ 10]$ y observamos el trabajo necesario para levantar cada "capa" de agua. Entonces, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[2,\ 10]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario

$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. La Figura 6.53 muestra una capa representativa.

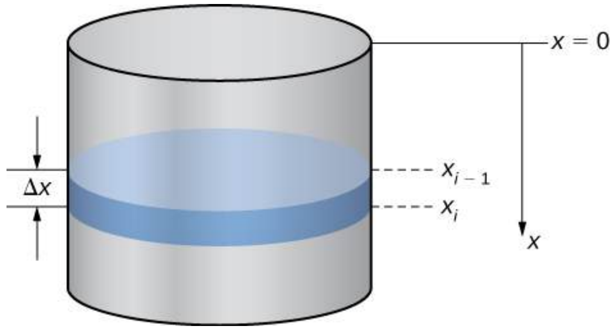


Figura 6.53 Una capa representativa de agua.

En los problemas de bombeo, la fuerza necesaria para elevar el agua hasta la parte superior del depósito es la fuerza necesaria para vencer la gravedad, por lo que es igual al peso del agua. Dado que el peso-densidad del agua es 9800 N/m^3, o 62,4 lb/ft^3, al calcular el volumen de cada capa obtenemos el peso. En este caso, tenemos

$$V = \pi(4)^2 \Delta x = 16\pi\Delta x.$$

Entonces, la fuerza necesaria para levantar cada capa es

$$F = 9800.\,16\pi\Delta x = 156800\pi\Delta x.$$

Tenga en cuenta que este paso se vuelve un poco más difícil si tenemos un tanque no cilíndrico. En el siguiente ejemplo veremos un tanque no cilíndrico.

También necesitamos saber la distancia a la que debe elevarse el agua. Con base en nuestra elección de sistemas de coordenadas, podemos utilizar x_i^* como una aproximación a la distancia que debe levantar la capa. A continuación, el trabajo para levantar la $i-\text{ésima}$ capa de agua W_i es aproximadamente

$$W_i \approx 156800\pi x_i^* \Delta x.$$

Sumando el trabajo de cada capa, vemos que el trabajo aproximado para vaciar el depósito viene dado por

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} 156800\pi x_i^* \Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann, por lo que tomando el límite como $n \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 156800\pi x_i^* \Delta x \\ &= 156800\pi \int_2^{10} x dx \\ &= 156800\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_2^{10} = 7526400\pi \approx 23.644.883. \end{aligned}$$

El trabajo necesario para vaciar el depósito es de aproximadamente 23.650.000 J.

En el caso de los problemas de bombeo, los cálculos varían en función de la forma del depósito o contenedor. La siguiente estrategia de resolución de problemas establece un proceso paso a paso para resolver problemas de bombeo.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Solución de problemas de bombeo

1. Haga un dibujo del tanque y seleccione un marco de referencia adecuado.
2. Calcule el volumen de una capa representativa de agua.
3. Multiplique el volumen por el peso-densidad del agua para obtener la fuerza.
4. Calcule la distancia a la que debe elevarse la capa de agua.
5. Multiplique la fuerza y la distancia para obtener una estimación del trabajo necesario para levantar la capa de

agua.

6. Sume el trabajo necesario para levantar todas las capas. Esta expresión es una estimación del trabajo necesario para bombear la cantidad de agua deseada, y tiene la forma de una suma de Riemann.
7. Tome el límite como $n \to \infty$ y evalúe la integral resultante para obtener el trabajo exacto necesario para bombear la cantidad de agua deseada.

Ahora aplicamos esta estrategia de resolución de problemas en un ejemplo con un tanque no cilíndrico.

EJEMPLO 6.26

Un problema de bombeo con un depósito no cilíndrico

Supongamos un tanque en forma de cono invertido, con una altura de 12 pies y radio de la base de 4 pies. Al principio el depósito está lleno y el agua se bombea sobre su borde superior hasta que la altura del agua que queda en el depósito es de 4 pies. ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear esa cantidad de agua?

Solución

El tanque está representado en la Figura 6.54. Como hicimos en el ejemplo del tanque cilíndrico, orientamos verticalmente el eje x, con el origen en la parte superior del tanque y la dirección hacia abajo siendo positiva (paso 1).

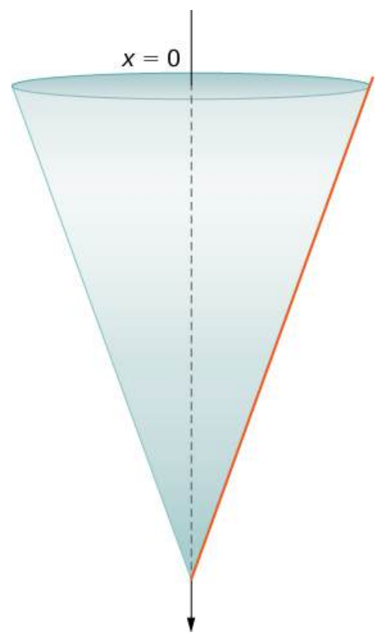


Figura 6.54 Un depósito de agua en forma de cono invertido.

El depósito comienza lleno y termina con 4 ft de agua, por lo que, basándonos en el marco de referencia que hemos elegido, tenemos que dividir el intervalo $[0, 8]$. Luego, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[0, 8]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Podemos aproximar el volumen de una capa utilizando un disco, y luego utilizar triángulos similares para encontrar el radio del disco (vea la siguiente figura).

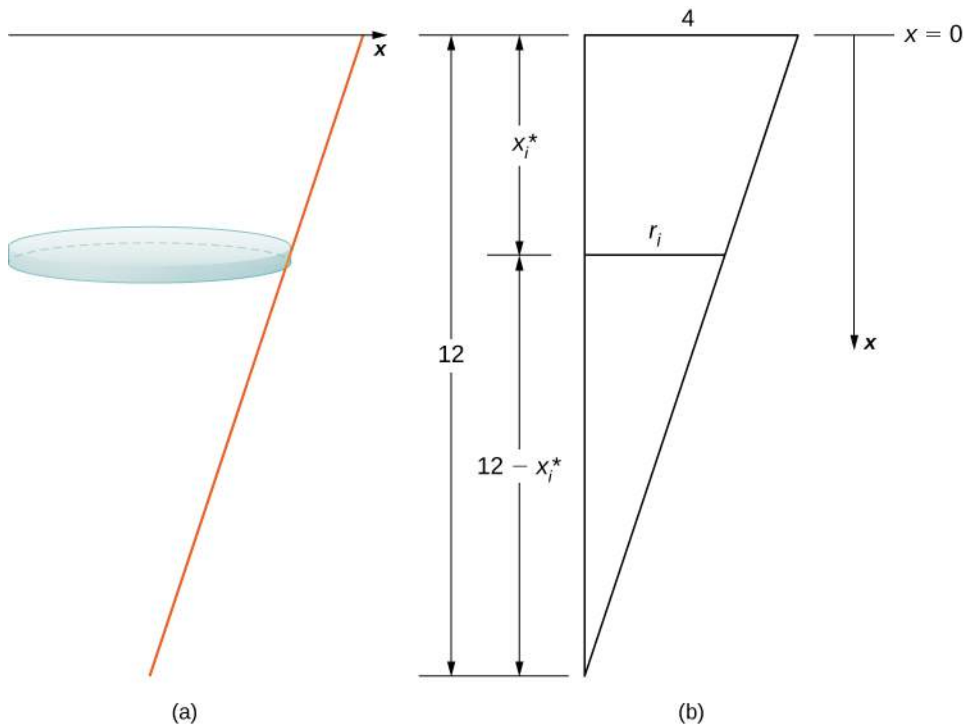


Figura 6.55 Utilizar triángulos semejantes para expresar el radio de un disco de agua.

A partir de las propiedades de los triángulos semejantes, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{r_i}{12-x_i^*} &= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\
3r_i &= 12 - x_i^* \\
r_i &= \frac{12-x_i^*}{3} \\
&= 4 - \frac{x_i^*}{3}.
\end{aligned}$$

Entonces el volumen del disco es

$$V_i = \pi\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (paso 2).}$$

La densidad del peso del agua es 62,4 lb/ft^3, por lo que la fuerza necesaria para levantar cada capa es aproximadamente

$$F_i \approx 62{,}4\pi\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (paso 3).}$$

Según el diagrama, la distancia a la que debe elevarse el agua es de aproximadamente x_i^* ft (paso 4), por lo que el trabajo aproximado necesario para levantar la capa es

$$W_i \approx 62{,}4\pi x_i^*\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (paso 5).}$$

Sumando el trabajo necesario para levantar todas las capas, obtenemos un valor aproximado del trabajo total:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i \approx \sum_{i=1}^{n} 62{,}4\pi x_i^*\left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \text{ (paso 6).}$$

Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$, obtenemos

$$\begin{aligned}
W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 62{,}4\pi x_i^* \left(4 - \frac{x_i^*}{3}\right)^2 \Delta x \\
&= \int_0^8 62{,}4\pi x\left(4 - \frac{x}{3}\right)^2 dx \\
&= 62{,}4\pi \int_0^8 x\left(16 - \frac{8x}{3} + \frac{x^2}{9}\right) dx = 62{,}4\pi \int_0^8 \left(16x - \frac{8x^2}{3} + \frac{x^3}{9}\right) dx \\
&= 62{,}4\pi\left[8x^2 - \frac{8x^3}{9} + \frac{x^4}{36}\right]\Bigg|_0^8 = 10649.6\pi \approx 33.456{,}7.
\end{aligned}$$

Se necesita aproximadamente 33.450 ft-lb de trabajo para vaciar el depósito hasta el nivel deseado.

6.26 Un tanque tiene forma de cono invertido, con una altura de 10 ft y el radio de la base es de 6 ft. El tanque se llena hasta una profundidad de 8 ft para empezar, y el agua se bombea sobre el borde superior del tanque hasta que quedan 3 ft de agua en el tanque. ¿Cuánto trabajo se necesita para bombear esa cantidad de agua?

Fuerza y presión hidrostáticas

En este último apartado, estudiamos la fuerza y la presión que se ejerce sobre un objeto sumergido en un líquido. En el sistema inglés, la fuerza se mide en libras. En el sistema métrico, se mide en newtons. La presión es la fuerza por unidad de superficie, por lo que en el sistema inglés tenemos libras por pie cuadrado (o tal vez más comúnmente, libras por pulgada cuadrada, denotadas psi). En el sistema métrico tenemos newtons por metro cuadrado, también llamados *pascales*.

Empecemos con el caso sencillo de un plato de superficie A sumergido horizontalmente en el agua a una profundidad s (Figura 6.56). Entonces, la fuerza ejercida sobre la placa es simplemente el peso del agua sobre ella, que viene dado por $F = \rho As$, donde ρ es la densidad del peso del agua (peso por unidad de volumen). Para hallar la **presión hidrostática**, es decir, la presión que ejerce el agua sobre un objeto sumergido, dividimos la fuerza entre el área. Así que la presión es $p = F/A = \rho s$.

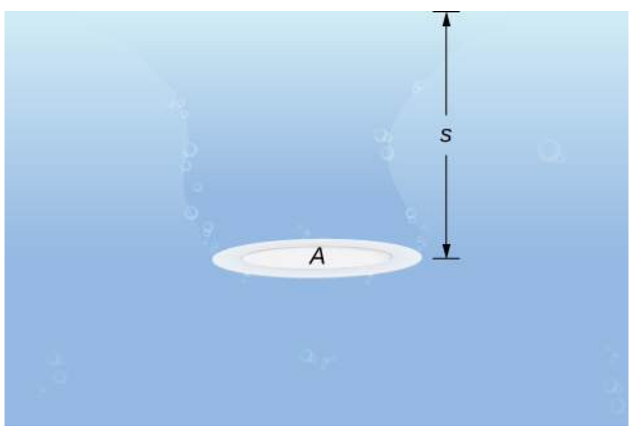


Figura 6.56 Una placa sumergida horizontalmente en el agua.

Según el principio de Pascal, la presión a una profundidad determinada es la misma en todas las direcciones, por lo que no importa si la placa está sumergida horizontal o verticalmente. Así que, mientras conozcamos la profundidad, conoceremos la presión. Podemos aplicar el principio de Pascal para hallar la fuerza ejercida sobre superficies como las presas, que están orientadas verticalmente. No podemos aplicar la fórmula $F = \rho As$ directamente, porque la profundidad varía de un punto a otro en una superficie orientada verticalmente. Así que, como hemos hecho muchas veces antes, hacemos una partición, una suma de Riemann y, en última instancia, una integral definida para calcular la fuerza.

Supongamos que una placa delgada está sumergida en el agua. Elegimos nuestro marco de referencia de tal manera que el eje *x* está orientado verticalmente, con la dirección hacia abajo siendo positiva, y el punto $x = 0$ correspondiente a un punto de referencia lógico. Supongamos que $s(x)$ denota la profundidad en el punto *x*. Tenga en cuenta que a menudo suponemos que $x = 0$ corresponde a la superficie del agua. En este caso, la profundidad en cualquier punto viene dada simplemente por $s(x) = x$. Sin embargo, es posible que en algunos casos queramos seleccionar un punto de referencia diferente para $x = 0$, por lo que procedemos al desarrollo en el caso más general. Por último, supongamos que $w(x)$ denota la anchura de la placa en el punto x.

Supongamos que el borde superior de la placa está en el punto $x = a$ y el borde inferior de la placa en el punto $x = b$. Luego, para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular del intervalo $[a, b]$, y para $i = 1, 2,\ldots, n$, elija un punto arbitrario $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$. La partición divide la placa en varias tiras finas y rectangulares (vea la siguiente figura).

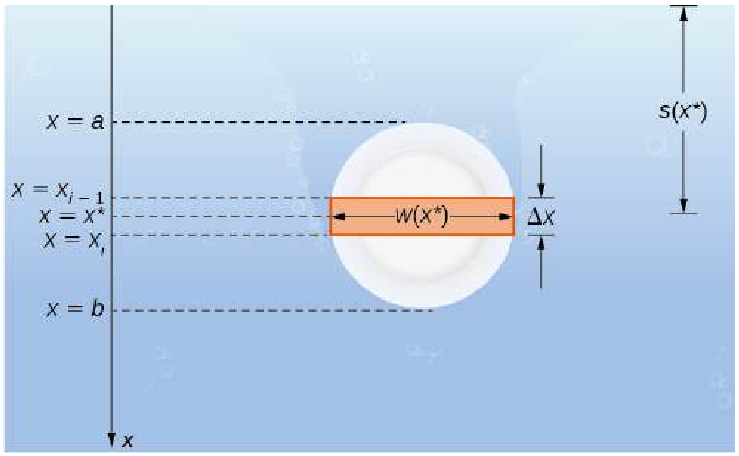


Figura 6.57 Una placa fina sumergida verticalmente en el agua.

Estimemos ahora la fuerza sobre una banda representativa. Si la banda es lo suficientemente fina, podemos tratarla como si estuviera a una profundidad constante, $s(x_i^*)$. Entonces tenemos

$$F_i = \rho A s = \rho \left[w(x_i^*)\Delta x\right] s(x_i^*).$$

Al sumar las fuerzas, obtenemos una estimación de la fuerza sobre la placa:

$$F \approx \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} \rho \left[w(x_i^*)\Delta x\right] s(x_i^*).$$

Se trata de una suma de Riemann, por lo que tomando el límite obtenemos la fuerza exacta. Obtenemos

$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho \left[w(x_i^*)\Delta x\right] s(x_i^*) = \int_a^b \rho w(x)s(x)dx. \tag{6.13}$$

Evaluando esta integral obtenemos la fuerza sobre la placa. Lo resumimos en la siguiente estrategia de resolución de problemas.

Estrategia de resolución de problemas

Estrategia para la resolución de problemas: Calcule la fuerza hidrostática

1. Elabore un dibujo y seleccione un marco de referencia adecuado. (Tenga en cuenta que si seleccionamos un marco de referencia distinto al utilizado anteriormente, es posible que tengamos que ajustar la Ecuación 6.13 en consecuencia).
2. Determine las funciones de profundidad y anchura, $s(x)$ y $w(x)$.
3. Determine el peso-densidad del líquido con el que está trabajando. La densidad del peso del agua es $62{,}4$ lb/ft^3, o 9800 N/m^3.
4. Utilice la ecuación para calcular la fuerza total.

EJEMPLO 6.27

Calcule la fuerza hidrostática

Un abrevadero de 15 ft de largo tiene los extremos en forma de triángulo isósceles invertido, con base de 8 ft y altura de 3 ft. Calcule la fuerza en un extremo de la canaleta si está llena de agua.

Solución

La Figura 6.58 muestra el canal y una vista más detallada de un extremo.

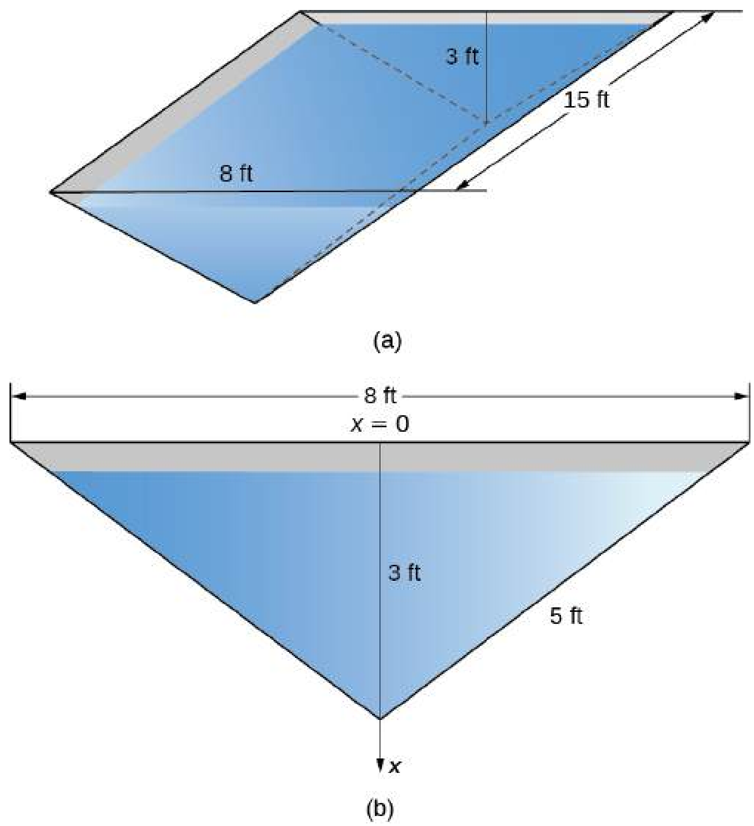


Figura 6.58 (a) Una sección transversal triangular del abrevadero. (b) Dimensiones de un extremo del mismo.

Seleccione un marco de referencia con el eje x orientado verticalmente y la dirección de bajada es positiva. Seleccione la parte superior del abrevadero como el punto correspondiente a $x = 0$ (paso 1). La función de profundidad, entonces, es $s(x) = x$. Utilizando triángulos similares, vemos que $w(x) = 8 - (8/3)\,x$ (paso 2). Ahora, la densidad del peso del agua es 62,4 lb/ft^3 (paso 3), por lo que aplicando la Ecuación 6.13, obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho w(x) s(x) dx \\ &= \int_0^3 62{,}4 \left(8 - \frac{8}{3}x\right) x\,dx = 62{,}4 \int_0^3 \left(8x - \frac{8}{3}x^2\right) dx \\ &= 62{,}4\left[4x^2 - \tfrac{8}{9}x^3\right]\Big|_0^3 = 748{,}8. \end{aligned}$$

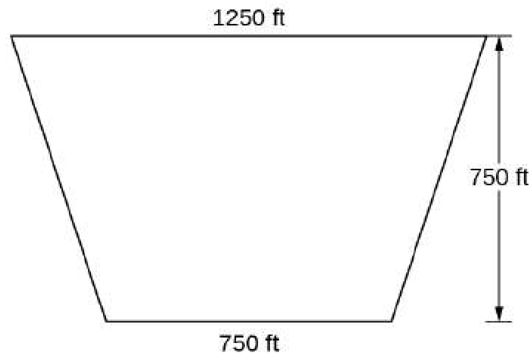
El agua ejerce una fuerza de 748,8 lb sobre el extremo del abrevadero (paso 4).

6.27 Un abrevadero de 12 m de longitud tiene los extremos en forma de triángulo isósceles invertido, con base de 6 m y altura de 4 m. Calcule la fuerza en un extremo de la canaleta si está llena de agua.

EJEMPLO 6.28

Inicio del capítulo: Calcule la fuerza hidrostática

Ahora volvemos a centrarnos en la presa Hoover, mencionada al principio de este capítulo. La presa real es arqueada, en vez de plana, pero vamos a hacer algunas suposiciones simplificadoras para ayudarnos con los cálculos. Supongamos que la cara de la presa Hoover tiene forma de trapecio isósceles con base inferior de 750 ft, base superior de 1.250 ft y altura de 750 ft (vea la siguiente figura).



Cuando el embalse está lleno, la profundidad máxima del lago Mead es de unos 530 ft, y la superficie del lago está a unos 10 ft por debajo de la parte superior de la presa (vea la siguiente figura).

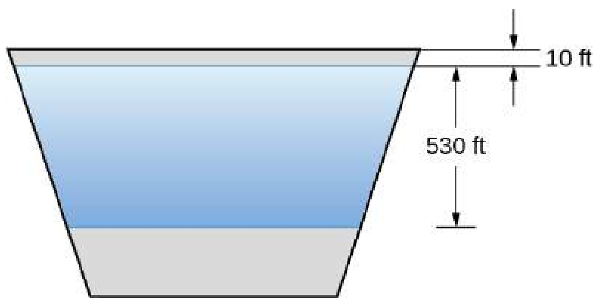


Figura 6.59 Un modelo simplificado de la presa Hoover con dimensiones supuestas.

a. Halle la fuerza en la cara de la presa cuando el embalse está lleno.
b. El suroeste de Estados Unidos ha sufrido una sequía, y la superficie del lago Mead está a unos 125 ft por debajo de donde estaría si el embalse estuviera lleno. ¿Cuál es la fuerza sobre la cara de la represa en estas circunstancias?

Solución

a. Empecemos por establecer un marco de referencia. Como es habitual, optamos por orientar el eje x verticalmente, siendo positiva la dirección de bajada. Esta vez, sin embargo, vamos a permitir que $x = 0$ represente la parte superior de la presa, en vez de la superficie del agua. Cuando el embalse está lleno, la superficie del agua es de 10 ft por debajo de la parte superior de la presa, por lo que $s(x) = x - 10$ (vea la siguiente figura).

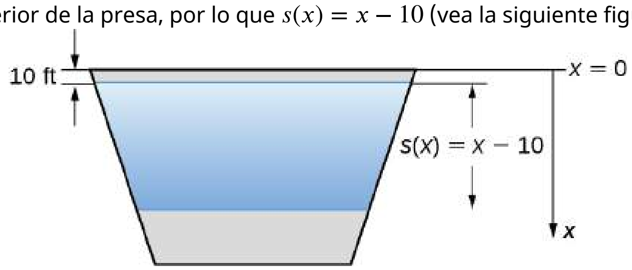


Figura 6.60 Primero elegimos un marco de referencia.

Para encontrar la función de anchura, volvemos a recurrir a los triángulos semejantes, como se muestra en la figura siguiente

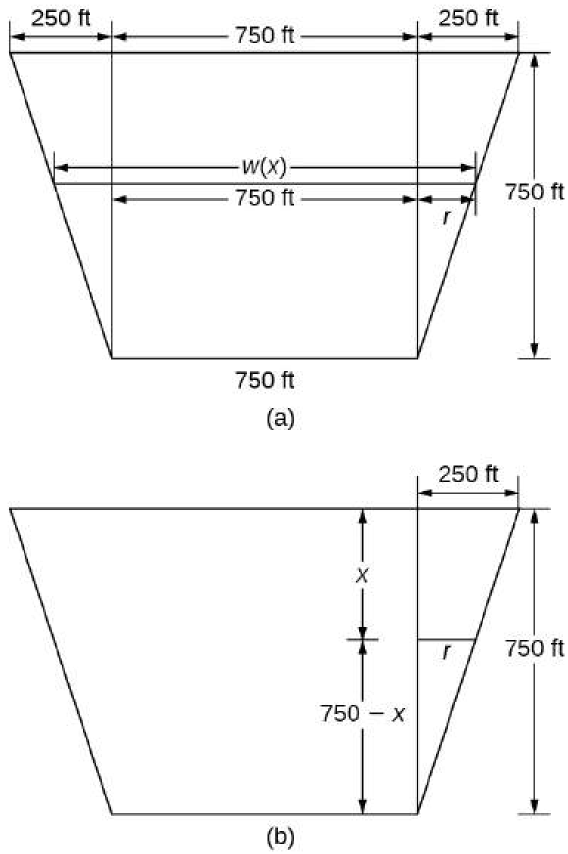


Figura 6.61 Utilizamos triángulos similares para determinar una función para la anchura de la presa. (a) Dimensiones supuestas de la presa; (b) se destacan los triángulos similares.

En la figura, vemos que $w(x) = 750 + 2r$. Utilizando las propiedades de los triángulos semejantes, obtenemos $r = 250 - (1/3)\,x$. Por lo tanto,

$$w(x) = 1.250 - \frac{2}{3}x \text{ (paso 2).}$$

Utilizando una densidad de peso de 62,4 lb/ft^3 (paso 3) y aplicando la Ecuación 6.13, obtenemos

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho w(x)s(x)dx \\ &= \int_{10}^{540} 62{,}4\left(1.250 - \frac{2}{3}x\right)(x-10)\,dx = 62{,}4\int_{10}^{540} -\frac{2}{3}\left[x^2 - 1885x + 18750\right]dx \\ &= -62{,}4\left(\tfrac{2}{3}\right)\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1885x^2}{2} + 18750x\right]\Big|_{10}^{540} \approx 8.832.245.000 \text{ lb} = 4416122.5 \text{ t.} \end{aligned}$$

Observe el cambio de libras a toneladas (2000 lb = 1 ton) (paso 4).

b. Fíjate en que la sequía cambia nuestra función de profundidad, $s(x)$, y nuestros límites de integración. Tenemos $s(x) = x - 135$. El límite inferior de integración es 135. El límite superior sigue siendo 540. Evaluando la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
F &= \int_a^b \rho w(x)s(x)dx \\
&= \int_{135}^{540} 62{,}4\left(1.250 - \frac{2}{3}x\right)(x-135)\,dx \\
&= -62{,}4\left(\tfrac{2}{3}\right)\int_{135}^{540}(x-1875)(x-135)\,dx = -62{,}4\left(\tfrac{2}{3}\right)\int_{135}^{540}\left(x^2-2010x+253125\right)dx \\
&= -62{,}4\left(\tfrac{2}{3}\right)\left[\tfrac{x^3}{3} - 1005x^2 + 253125x\right]\Big|_{135}^{540} \approx 5.015.230.000 \text{ lb} = \ 2507615 \text{ t.}
\end{aligned}$$

6.28 Cuando el embalse está en su nivel medio, la superficie del agua está unos 50 ft por debajo de donde estaría si el embalse estuviera lleno. ¿Cuál es la fuerza sobre la cara de la represa en estas circunstancias?

MEDIOS

Para saber más sobre la presa Hoover, consulte este artículo (http://www.openstax.org/l/20_HooverDam) publicado por History Channel.

SECCIÓN 6.5 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule el trabajo realizado.

218. Halle el trabajo realizado cuando una fuerza constante $F = 12$ lb mueve una silla de $x = 0{,}9$ al $x = 1{,}1$ pies.

219. ¿Cuánto trabajo se realiza cuando una persona levanta 50 lb de cajas de cómics en un camión que está a 3 ft del suelo?

220. ¿Cuál es el trabajo realizado levantando un niño de 20 kg desde el suelo hasta una altura de 2 m? (Tenga en cuenta que una masa de1 kg pesa 9,8 N cerca de la superficie de la Tierra).

221. Halle el trabajo realizado al empujar una caja por el suelo por 2 m, cuando se aplica una fuerza constante de $F = 100$ N.

222. Calcule el trabajo realizado para una fuerza $F = 12/x^2$ N de $x = 1$ a $x = 2$ m.

223. ¿Cuál es el trabajo realizado al mover una partícula desde $x = 0$ hasta $x = 1$ m si la fuerza que actúa sobre ella es $F = 3x^2$ N?

En los siguientes ejercicios, halle la masa del objeto unidimensional.

224. Un cable que tiene 2 pies de largo (a partir de $x = 0$) y tiene una función de densidad de $\rho\,(x) = x^2 + 2x$ lb/ft

225. Una antena de automóvil que tiene 3 ft de largo (a partir de $x = 0$) y tiene una función de densidad de $\rho\,(x) = 3x + 2$ lb/ft

226. Una barra de metal que tiene 8 in de longitud (a partir de $x = 0$) y tiene una función de densidad de $\rho\,(x) = e^{1/2x}$ lb/in.

227. Un lápiz que tiene 4 in. de longitud (a partir de $x = 2$) y tiene una función de densidad de $\rho(x) = 5/x$ oz/in.

228. Una regla que tiene 12 in. de longitud (a partir de $x = 5$) y tiene una función de densidad de $\rho(x) = \ln(x) + (1/2)\,x^2$ oz/in.

En los siguientes ejercicios, halle la masa del objeto bidimensional centrado en el origen.

229. Un disco de hockey de gran tamaño con un radio de 2 in con función de densidad $\rho(x) = x^3 - 2x + 5$

230. Un frisbee con un radio de 6 in con función de densidad $\rho(x) = e^{-x}$

231. Una placa con un radio de radio 10 in con función de densidad $\rho(x) = 1 + \cos(\pi x)$ grandes.

232. Una tapa de tarro con un radio de 3 in con función de densidad $\rho(x) = \ln(x + 1)$

233. Un disco con 5 cm de radio y con función de densidad $\rho(x) = \sqrt{3x}$

234. Un resorte de 12 in se estira hasta 15 in por una fuerza de 75 lb. ¿Cuál es la constante del resorte?

235. Un resorte tiene una longitud natural de 10 cm. Se necesitan 2 J para estirar el resorte hasta 15 cm. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte de 15 cm a 20 cm?

236. Un resorte de 1 m requiere 10 J para estirar el resorte hasta $1{,}1$ m. ¿Cuánto trabajo se necesita para estirar el resorte de 1 m a $1{,}2$ m?

237. Un resorte requiere 5 J para estirar el resorte de 8 cm a 12 cm, y adicionalmente 4 J para estirar el resorte de 12 cm a 14 cm. ¿Cuál es la longitud natural del resorte?

238. Un amortiguador se comprime 1 in por un peso de 1 t. ¿Cuál es la constante del resorte?

239. Una fuerza de $F = 20x – x^3$ N estira un resorte no lineal en x metros. ¿Qué trabajo se requiere para estirar el resorte de $x = 0$ hasta $x = 2$ m?

240. Halle el trabajo realizado al enrollar un cable colgante de una longitud de 100 ft y un peso-densidad de 5 lb/ft.

241. Para el cable del ejercicio anterior, ¿cuánto trabajo se realiza para levantarlo 50 ft?

242. Para el cable del ejercicio anterior, ¿cuánto trabajo adicional se realiza al colgar 200 lb de peso en el extremo del cable?

243. **[T]** Una pirámide de 500 ft de altura tiene una base cuadrada 800 ft por 800 pies. Halle el área A en la altura h. Si la roca utilizada para construir la pirámide pesa aproximadamente $w = 100\ \text{lb/ft}^3$, ¿cuánto trabajo costó levantar toda la roca?

244. **[T]** Para la pirámide del ejercicio anterior, suponga que había 1.000 trabajadores que trabajan cada uno 10 horas al día, 5 días a la semana, 50 semanas al año. Si los trabajadores en promedio levantaron 10 rocas de 100 libras 2 ft/h, ¿cuánto tiempo se tardó en construir la pirámide?

245. **[T]** La fuerza de gravedad sobre una masa m ¿es $F = -\left((GMm)/x^2\right)$ newtons. Para un cohete de masa $m = 1.000\,\text{kg}$, calcule el trabajo para elevarlo desde $x = 6.400$ al $x = 6500$ km. Indique sus respuestas con tres cifras significativas. (*Nota*: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2/\text{kg}^2$ y $M = 6 \times 10^{24}\ \text{kg.}$) grandes.

246. **[T]** Para el cohete del ejercicio anterior, calcule el trabajo para elevarlo desde $x = 6.400$ al $x = \infty$.

247. **[T]** Una presa rectangular tiene 40 ft de altura y 60 ft de ancho. Calcule la fuerza total F en la presa cuando

a. la superficie del agua está en la parte superior de la presa y
b. la superficie del agua está a la mitad de la presa.

248. **[T]** Halle el trabajo necesario para bombear toda el agua de un cilindro que tiene una base circular de un radio de 5 ft y altura de 200 pies. Utilice el hecho de que la densidad del agua es 62 lb/ft^3.

249. **[T]** Halle el trabajo necesario para bombear toda el agua del cilindro en el ejercicio anterior si el cilindro está lleno solo hasta la mitad.

250. **[T]** ¿Cuánto trabajo se requiere para bombear una piscina si el área de la base es de 800 ft^2, el agua es de 4 ft de profundidad, y la parte superior es de 1 ft sobre el nivel del agua? Supongamos que la densidad del agua es de 62 lb/ft^3.

251. Un cilindro de profundidad H y el área de la sección transversal A está lleno de agua a la densidad ρ. Calcule el trabajo para bombear toda el agua afuera por la parte superior.

252. Para el cilindro del ejercicio anterior, calcule el trabajo para bombear toda el agua hasta la parte superior si el cilindro está lleno solo hasta la mitad.

253. Un tanque con forma de cono tiene una sección transversal que aumenta con su profundidad: $A = \left(\pi r^2 h^2\right)/H^3$. Demuestre que el trabajo para vaciarlo es la mitad del trabajo para un cilindro con la misma altura y base.

6.6 Momentos y centros de masa

Objetivos de aprendizaje

6.6.1 Encontrar el centro de masa de objetos distribuidos a lo largo de una línea.
6.6.2 Localizar el centro de masa de una placa delgada.
6.6.3 Utilizar la simetría para ayudar a localizar el centroide de una placa delgada.
6.6.4 Aplicar el teorema de Pappus para el volumen.

En esta sección, analizaremos los centros de masa (también llamados *centroides*, bajo ciertas condiciones) y los momentos. La idea básica del centro de masa es la noción de un punto de equilibrio. Muchos hemos visto a artistas que hacen girar un plato en la punta de un palo e intentan mantener varios de ellos girando sin caerse. Si observamos un plato simple (sin girarlo), hay un punto ideal en el plato donde se equilibra perfectamente en el palo. Si ponemos el palo en cualquier otro lugar que no sea ese punto ideal, el plato no se equilibra y se cae al suelo. (Por eso los artistas los hacen girar: el giro ayuda a que los platos no se caigan aunque el palo no esté exactamente en el lugar correcto). Matemáticamente, ese punto ideal se denomina *centro de masa de la placa*.

En esta sección, primero examinaremos esos conceptos en un contexto unidimensional, y luego ampliaremos nuestro desarrollo para considerar los centros de masa de las regiones bidimensionales y la simetría. Por último, utilizaremos los centroides para encontrar el volumen de ciertos sólidos aplicando el teorema de Pappus.

Centro de masa y momentos

Empecemos por ver el centro de masa en un contexto unidimensional. Piense en un alambre o varilla larga y delgada de masa despreciable que descansa sobre un punto de apoyo, como se muestra en la Figura 6.62(a). Ahora supongamos que colocamos objetos con masas m_1 y m_2 a las distancias d_1 y d_2 del punto de apoyo, respectivamente, como se muestra en la Figura 6.62(b).

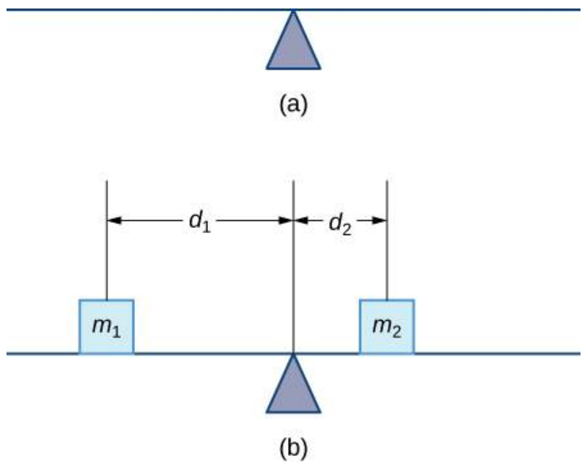


Figura 6.62 (a) Una varilla delgada descansa sobre un punto de apoyo. (b) Se colocan masas sobre la varilla.

El ejemplo más común en la vida real de un sistema de este tipo es el balancín de un parque infantil, con niños de distinto peso sentados a diferentes distancias del centro. En un balancín, si un niño se sienta en cada extremo, el más pesado se hunde y el más ligero se eleva en el aire. Sin embargo, si el niño más pesado se desliza hacia el centro, el balancín se equilibra. Aplicando este concepto a las masas de la varilla, observamos que las masas se equilibran entre sí si y solo si $m_1 d_1 = m_2 d_2$.

En el ejemplo del balancín, equilibramos el sistema moviendo las masas (los niños) con respecto al punto de apoyo. Sin embargo, lo que realmente nos interesa son los sistemas en los que no se permite el movimiento de las masas, y en su lugar equilibramos el sistema moviendo el punto de apoyo. Supongamos que tenemos dos masas puntuales, m_1 y m_2, situadas en una línea numérica en los puntos x_1 y x_2, respectivamente (Figura 6.63). El centro de masa, $\bar{x}$, es el punto donde se debe colocar el punto de apoyo para que el sistema se equilibre.

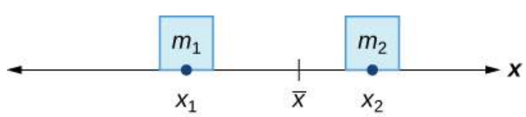


Figura 6.63 El centro de masa $\bar{x}$ es el punto de equilibrio del sistema.

Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} m_1 |\bar{x} - x_1| &= m_2 |x_2 - \bar{x}| \\ m_1 (\bar{x} - x_1) &= m_2 (x_2 - \bar{x}) \\ m_1 \bar{x} - m_1 x_1 &= m_2 x_2 - m_2 \bar{x} \\ \bar{x} (m_1 + m_2) &= m_1 x_1 + m_2 x_2 \\ \bar{x} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

La expresión en el numerador, $m_1 x_1 + m_2 x_2$, se denomina *primer momento del sistema con respecto al origen.* Si el contexto es claro, a menudo se prescinde de la palabra *primero* y se denomina simplemente **momento** del sistema. La expresión en el denominador, $m_1 + m_2$, es la masa total del sistema. Por lo tanto, el **centro de masa** del sistema es el punto en el que se podría concentrar la masa total del sistema sin cambiar el momento.

Esta idea no se limita solo a dos masas puntuales. En general, si *n* masas, $m_1, m_2, \ldots, m_n$, se colocan en una línea numérica en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente, entonces el centro de masa del sistema viene dado por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

Teorema 6.9

Centro de masa de objetos en una línea

Supongamos que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son masas puntuales situadas en una línea numérica en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente y supongamos que $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ denotan la masa total del sistema. Entonces, el momento del sistema con respecto al origen viene dado por

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \tag{6.14}$$

y el centro de masa del sistema viene dado por

$$\bar{x} = \frac{M}{m}. \tag{6.15}$$

Aplicamos este teorema en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.29

Encontrar el centro de masa de los objetos a lo largo de una línea

Supongamos que se colocan cuatro masas puntuales en una línea numérica de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} m_1 = 30\,\text{kg, colocado en } x_1 = -2\,\text{m} & m_2 = 5\,\text{kg, colocado en } x_2 = 3\,\text{m} \\ m_3 = 10\,\text{kg, colocado en } x_3 = 6\,\text{m} & m_4 = 15\,\text{kg, colocado en } x_4 = -3\,\text{m.} \end{array}$$

Calcule el momento del sistema respecto al origen y halle el centro de masa del sistema.

Solución

En primer lugar, tenemos que calcular el momento del sistema:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{4} m_i x_i \\ &= -60 + 15 + 60 - 45 = -30. \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar el centro de masa, necesitamos la masa total del sistema:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{i=1}^{4} m_i \\ &= 30 + 5 + 10 + 15 = 60\,\text{kg}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\bar{x} = \frac{M}{m} = \frac{-30}{60} = -\frac{1}{2}.$$

El centro de masa se encuentra a 1/2 m a la izquierda del origen.

6.29 Supongamos que se colocan cuatro masas puntuales en una línea numérica de la siguiente manera:

$$m_1 = 12 \text{ kg, colocado en } x_1 = -4 \text{ m} \qquad m_2 = 12 \text{ kg, colocado en } x_2 = 4 \text{ m}$$
$$m_3 = 30 \text{ kg, colocado en } x_3 = 2 \text{ m} \qquad m_4 = 6 \text{ kg, colocado en } x_4 = -6 \text{ m.}$$

Calcule el momento del sistema respecto al origen y halle el centro de masa del sistema.

Podemos generalizar este concepto para encontrar el centro de masa de un sistema de masas puntuales en un plano. Supongamos que m_1 es una masa puntual situada en el punto (x_1, y_1) en el plano. Entonces el momento M_x de la masa con respecto al eje *x* viene dado por $M_x = m_1 y_1$. Del mismo modo, el momento M_y con respecto al eje *y* viene dado por $M_y = m_1 x_1$. Observe que la coordenada *x* del punto se utiliza para calcular el momento con respecto al eje *y*, y viceversa. La razón es que la coordenada *x* da la distancia de la masa puntual al eje *y*, en tanto que la coordenada *y* da la distancia al eje *x* (vea la siguiente figura).

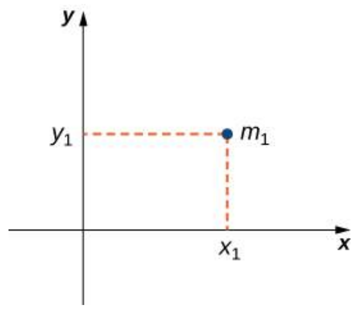


Figura 6.64 La masa puntual m_1 se encuentra en el punto (x_1, y_1) en el plano.

Si tenemos varias masas puntuales en el plano *xy*, podemos utilizar los momentos respecto a los ejes *x* y *y* para calcular las coordenadas *x* y *y* del centro de masa del sistema.

Teorema 6.10

Centro de masa de objetos en un plano

Supongamos que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son masas puntuales situadas en el plano *xy* en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, respectivamente y supongamos que $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ denotan la masa total del sistema. Entonces los momentos M_x y M_y del sistema con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, vienen dados por

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \text{y} \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i. \tag{6.16}$$

Además, las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ del sistema son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}. \tag{6.17}$$

El siguiente ejemplo demuestra cómo aplicar este teorema.

EJEMPLO 6.30

Encontrar el centro de masa de los objetos en un plano

Supongamos que tres masas puntuales se colocan en el plano *xy* de la siguiente manera (supongamos que las coordenadas están dadas en metros):

$$\begin{aligned} m_1 &= 2\text{ kg, colocado en }(-1, 3), \\ m_2 &= 6\text{ kg, colocado en }(1, 1), \\ m_3 &= 4\text{ kg, colocado en }(2, -2)\,. \end{aligned}$$

Halle el centro de masa del sistema.

Solución

Primero calculamos la masa total del sistema:

$$m = \sum_{i=1}^{3} m_i = 2 + 6 + 4 = 12\text{ kg}.$$

A continuación, hallamos los momentos con respecto a los ejes *x* y *y*:

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = -2 + 6 + 8 = 12, \\ M_x &= \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 6 + 6 - 8 = 4. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{12}{12} = 1 \text{ y } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

El centro de masa del sistema es $(1, 1/3)$, en metros.

6.30 Supongamos que tres masas puntuales se colocan en una línea numérica de la siguiente manera (asumimos que las coordenadas se dan en metros):

$$\begin{aligned} m_1 &= 5\text{ kg, colocado en }(-2, -3), \\ m_2 &= 3\text{ kg, colocado en }(2, 3), \\ m_3 &= 2\text{ kg, colocado en }(-3, -2)\,. \end{aligned}$$

Halle el centro de masa del sistema.

Centro de masa de las placas finas

Hasta ahora hemos visto sistemas de masas puntuales en una línea y en un plano. Ahora, en vez de tener la masa de un sistema concentrada en puntos discretos, queremos observar sistemas en los que la masa del sistema se distribuye continuamente a través de una fina lámina de material. Para ello, suponemos que la hoja es lo suficientemente delgada como para poder tratarla como si fuera bidimensional. Dicha hoja se denomina **lámina**. A continuación desarrollaremos técnicas para encontrar el centro de masa de una lámina. En esta sección, también suponemos que la densidad de la lámina es constante.

Las láminas suelen representarse mediante una región bidimensional en un plano. El centro geométrico de dicha región se denomina **centroide**. Como supusimos que la densidad de la lámina es constante, el centro de masa de la lámina solo depende de la forma de la región correspondiente en el plano; no depende de la densidad. En este caso, el centro de masa de la lámina corresponde al centroide de la región delineada en el plano. Al igual que con los sistemas de masas puntuales, necesitamos encontrar la masa total de la lámina, así como los momentos de la lámina con respecto a los ejes *x* y *y*.

Consideraremos primero una lámina con forma de rectángulo. Recordemos que el centro de masa de una lámina es el punto de equilibrio de la misma. En un rectángulo, ese punto es el centro horizontal y vertical del rectángulo. En base a este entendimiento, está claro que el centro de masa de una lámina rectangular es el punto donde se cruzan las diagonales, lo cual es un resultado del **principio de simetría**, y se afirma aquí sin pruebas.

Teorema 6.11

El principio de simetría
Si una región R es simétrica respecto a una línea l, entonces el centroide de R se encuentra en l.

Pasemos a las láminas más generales. Supongamos que tenemos una lámina limitada por encima por el gráfico de una función continua $f(x)$, abajo por el eje x y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente, como se muestra en la siguiente figura.

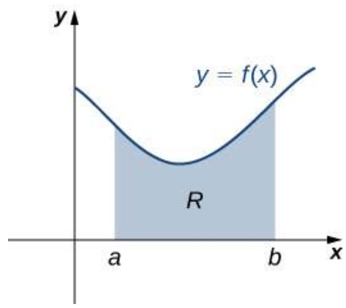


Figura 6.65 Una región en el plano que representa una lámina.

Al igual que con los sistemas de masas puntuales, para encontrar el centro de masa de la lámina necesitamos encontrar la masa total de esta, así como los momentos de la lámina con respecto a los ejes x y y. Como ya hemos hecho muchas veces, aproximamos estas cantidades dividiendo el intervalo $[a, b]$ y construyendo rectángulos.

Para $i = 0, 1, 2,\ldots, n$, supongamos que $P = \{x_i\}$ es una partición regular de $[a, b]$. Recordemos que podemos elegir cualquier punto dentro del intervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$ como nuestra x_i^*. En este caso, queremos x_i^* para ser la coordenada x del centroide de nuestros rectángulos. Así, para $i = 1, 2,\ldots, n$, seleccionamos $x_i^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right]$ de manera que x_i^* es el punto medio del intervalo. Eso es, $x_i^* = \left(x_{i-1} + x_i\right)/2$. Ahora, para $i = 1, 2,\ldots, n$, construya un rectángulo de altura $f\left(x_i^*\right)$ sobre $\left[x_{i-1}, x_i\right]$. El centro de masa de este rectángulo es $\left(x_i^*, \left(f(x_i^*)\right)/2\right)$, como se muestra en la siguiente figura.

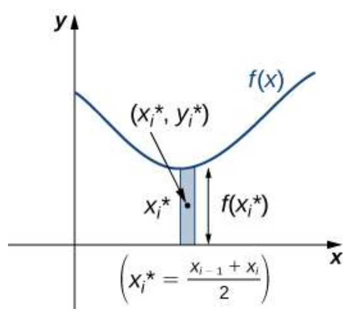


Figura 6.66 Un rectángulo representativo de la lámina.

A continuación, tenemos que encontrar la masa total del rectángulo. Supongamos que ρ representa la densidad de la lámina (nótese que ρ es una constante). En este caso, ρ se expresa en términos de masa por unidad de superficie. Así, para encontrar la masa total del rectángulo, multiplicamos el área del rectángulo por ρ. Entonces, la masa del rectángulo viene dada por $\rho f(x_i^*)\Delta x$.

Para obtener la masa aproximada de la lámina, sumamos las masas de todos los rectángulos para obtener

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho f(x_i^*)\Delta x.$$

Se trata de una suma de Riemann. Si tomamos el límite a medida que $n \to \infty$ da la masa exacta de la lámina:

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho f(x_i^*)\Delta x = \rho \int_a^b f(x)dx.$$

A continuación, calculamos el momento de la lámina con respecto al eje *x*. Volviendo al rectángulo representativo, recordemos que su centro de masa es $\left(x_i^*, \left(f(x_i^*)\right)/2\right)$. Recordemos también si tratamos el rectángulo como si fuera una masa puntual situada en el centro de masa no cambia el momento. Así, el momento del rectángulo con respecto al eje *x* viene dado por la masa del rectángulo, $\rho f(x_i^*)\Delta x$, multiplicado por la distancia desde centro de masa al eje *x*: $\left(f(x_i^*)\right)/2$. Por lo tanto, el momento con respecto al eje *x* del rectángulo es $\rho\left(\left[f(x_i^*)\right]^2/2\right)\Delta x$. Al sumar los momentos de los rectángulos y tomando el límite de la suma de Riemann resultante, vemos que el momento de la lámina respecto al eje *x* es

$$M_x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho\frac{\left[f(x_i^*)\right]^2}{2}\Delta x = \rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx.$$

Derivamos el momento con respecto al eje *y* de forma similar, observando que la distancia desde el centro de masa del rectángulo al eje *y* es x_i^*. Entonces el momento de la lámina con respecto al eje *y* viene dado por

$$M_y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho x_i^* f(x_i^*)\Delta x = \rho\int_a^b x f(x)dx.$$

Hallamos las coordenadas del centro de masa dividiendo los momentos por la masa total para obtener $\bar{x} = M_y/m$ y $\bar{y} = M_x/m$. Si observamos detenidamente las expresiones de $M_x, M_y,$ y m, observamos que la constante ρ se cancela cuando $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se calculan.

Resumimos estas conclusiones en el siguiente teorema.

Teorema 6.12

Centro de masa de una placa delgada en el plano xy

Supongamos que *R* denota una región delimitada por el gráfico de una función continua $f(x)$, abajo por el eje *x* y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Supongamos que ρ denota la densidad de la lámina asociada. Entonces podemos hacer las siguientes afirmaciones:

i. La masa de la lámina es

$$m = \rho\int_a^b f(x)dx. \tag{6.18}$$

ii. Los momentos M_x y M_y de la lámina con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, son

$$M_x = \rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx \text{ y } M_y = \rho\int_a^b x f(x)dx. \tag{6.19}$$

iii. Las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ y } \bar{y} = \frac{M_x}{m}. \tag{6.20}$$

En el siguiente ejemplo, utilizamos este teorema para hallar el centro de masa de una lámina.

EJEMPLO 6.31

Hallar el centro de masa de una lámina

Supongamos que *R* es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$ y abajo por el eje *x* en el intervalo $[0, 4]$. Halle el centroide de la región.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

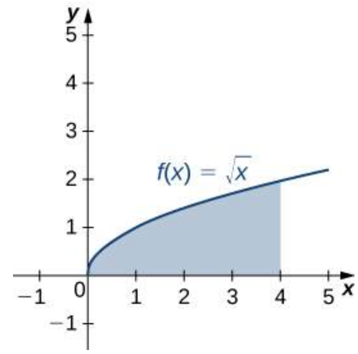


Figura 6.67 Encontrar el centro de masa de una lámina.

Como solo se nos pide el centroide de la región, y no la masa o los momentos de la lámina asociada, sabemos que la constante de densidad ρ eventualmente se cancela de los cálculos. Por lo tanto, por razones de conveniencia, supongamos que $\rho = 1$.

En primer lugar, tenemos que calcular la masa total:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b f(x)dx = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx \\ &= \tfrac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \tfrac{2}{3}[8-0] = \tfrac{16}{3}. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos los momentos:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx \\ &= \int_0^4 \frac{x}{2}dx = \tfrac{1}{4}x^2\Big|_0^4 = 4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_a^b x f(x)dx \\ &= \int_0^4 x\sqrt{x}dx = \int_0^4 x^{3/2}dx \\ &= \tfrac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^4 = \tfrac{2}{5}[32-0] = \tfrac{64}{5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{64/5}{16/3} = \frac{64}{5}.\frac{3}{16} = \frac{12}{5} \text{ y } \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4}{16/3} = 4.\frac{3}{16} = \frac{3}{4}.$$

El centroide de la región es $(12/5, 3/4)$.

6.31 Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^2$ y abajo por el eje x en el intervalo $[0, 2]$. Halle el centroide de la región.

Podemos adaptar este enfoque para encontrar también los centroides de regiones más complejas. Supongamos que nuestra región está limitada por el gráfico de una función continua $f(x)$, como antes, pero ahora, en vez de que el límite inferior de la región sea el eje *x*, supondremos que la región está limitada por debajo por el gráfico de una segunda función continua, $g(x)$, como se muestra en la siguiente figura.

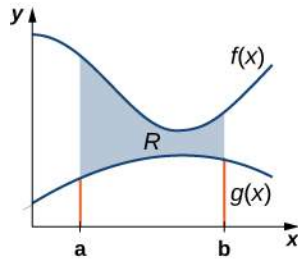


Figura 6.68 Una región entre dos funciones.

De nuevo, dividimos el intervalo $[a, b]$ y construimos rectángulos. En la siguiente figura se muestra un rectángulo representativo.

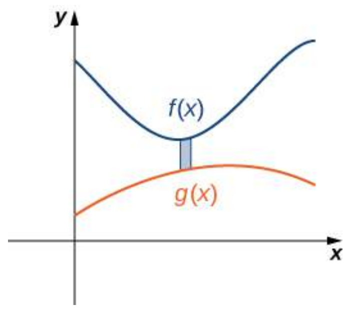


Figura 6.69 Un rectángulo representativo de la región entre dos funciones.

Observe que el centroide de este rectángulo es $\left(x_i^*, \left(f(x_i^*) + g(x_i^*)\right)/2\right)$. No vamos a repasar todos los detalles de la formulación de la suma de Riemann, pero veamos algunos de los pasos clave. En el desarrollo de las fórmulas para la masa de la lámina y el momento con respecto al eje *y*, la altura de cada rectángulo viene dada por $f(x_i^*) - g(x_i^*)$, lo que nos dirige a la expresión $f(x) - g(x)$ en los integrandos.

En el desarrollo de la fórmula del momento con respecto al eje *x*, el momento de cada rectángulo se halla al multiplicar el área del rectángulo, $\rho\left[f(x_i^*) - g(x_i^*)\right]\Delta x$, por la distancia del centroide al eje *x*, $\left(f(x_i^*) + g(x_i^*)\right)/2$, que da $\rho\,(1/2)\left\{\left[f(x_i^*)\right]^2 - \left[g(x_i^*)\right]^2\right\}\Delta x$. Al resumir estas conclusiones, llegamos al siguiente teorema.

Teorema 6.13

Centro de masa de una lámina delimitada por dos funciones

Supongamos que *R* denota una región delimitada por el gráfico de una función continua $f(x)$, abajo por el gráfico de la función continua $g(x)$, y a la izquierda y derecha por las líneas $x = a$ y $x = b$, respectivamente. Supongamos que ρ denota la densidad de la lámina asociada. Entonces podemos hacer las siguientes afirmaciones:

i. La masa de la lámina es

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \tag{6.21}$$

ii. Los momentos M_x y M_y de la lámina con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, son

$$M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2}\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx \text{ y } M_y = \rho \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx. \tag{6.22}$$

iii. Las coordenadas del centro de masa $(\bar{x}, \bar{y})$ son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} \text{ y } \bar{y} = \frac{M_x}{m}. \tag{6.23}$$

Ilustramos este teorema con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.32

Hallar el centroide de una región delimitada por dos funciones

Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 1 - x^2$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = x-1$. Halle el centroide de la región.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

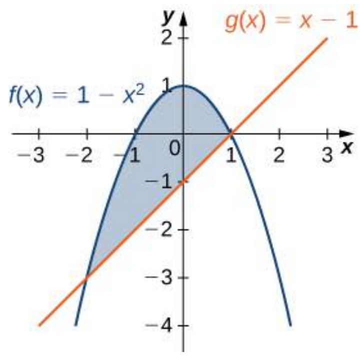


Figura 6.70 Hale el centroide de una región entre dos curvas.

Los gráficos de las funciones se cruzan en $(-2, -3)$ y $(1, 0)$, por lo que integramos de -2 a 1. Una vez más, por comodidad, supongamos que $\rho = 1$.

En primer lugar, tenemos que calcular la masa total:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_{-2}^{1} \left[1 - x^2 - (x-1)\right] dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x) dx \\ &= \left[2x - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right]\Big|_{-2}^{1} = \left[2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\right] - \left[-4 + \tfrac{8}{3} - 2\right] = \tfrac{9}{2}. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos los momentos:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{1}{2}\left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{1} \left(\left(1 - x^2\right)^2 - (x-1)^2\right) dx = \tfrac{1}{2} \int_{-2}^{1} \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right) dx \\ &= \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{x^5}{5} - x^3 + x^2\right]\Big|_{-2}^{1} = -\tfrac{27}{10} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\, dx \\ &= \int_{-2}^{1} x\left[(1 - x^2) - (x-1)\right] dx = \int_{-2}^{1} x\left[2 - x^2 - x\right] dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(2x - x^4 - x^2\right) dx$$

$$= \left[x^2 - \tfrac{x^5}{5} - \tfrac{x^3}{3}\right]\Big|_{-2}^{1} = -\tfrac{9}{4}.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = -\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{9} = -\frac{1}{2} \text{ y } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = -\frac{27}{10} \cdot \frac{2}{9} = -\frac{3}{5}.$$

El centroide de la región es $(-(1/2), -(3/5))$.

6.32 Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 6 - x^2$ y abajo por el gráfico de la función $g(x) = 3 - 2x$. Halle el centroide de la región.

El principio de simetría

El principio de simetría lo enunciamos antes, cuando observamos el centroide de un rectángulo. El principio de simetría puede ser muy útil para encontrar los centroides de las regiones simétricas. Considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.33

Encontrar el centroide de una región simétrica

Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 4 - x^2$ y abajo por el eje *x*. Halle el centroide de la región.

Solución

La región se representa en la siguiente figura.

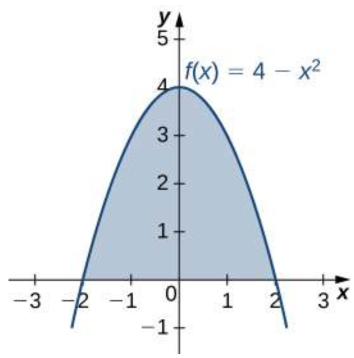


Figura 6.71 Podemos utilizar el principio de simetría para encontrar el centroide de una región simétrica.

La región es simétrica con respecto al eje *y*. Por lo tanto, la coordenada *x* del centroide es cero. Solo tenemos que calcular $\bar{y}$. Una vez más, para mayor facilidad, supongamos que $\rho = 1$.

En primer lugar, calculamos la masa total:

$$\begin{aligned} m &= \rho \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx \\ &= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

A continuación, calculamos los momentos. Solo necesitamos M_x:

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left[4 - x^2\right]^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x\right]\Big|_{-2}^{2} = \frac{256}{15}. \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{256}{15} \cdot \frac{3}{32} = \frac{8}{5}.$$

El centroide de la región es $(0, 8/5)$.

6.33 Supongamos que R es la región delimitada por el gráfico de la función $f(x) = 1 - x^2$ y abajo por el eje x. Halle el centroide de la región.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

El mirador de cristal Skywalk del Gran Cañón

El Skywalk del Gran Cañón se abrió al público el 28 de marzo de 2007. Esta maravilla de la ingeniería es una plataforma de observación en forma de herradura suspendida a 4.000 ft sobre el río Colorado, en el borde oeste del Gran Cañón. Su suelo de cristal permite unas vistas impresionantes del cañón (vea la siguiente figura).

Figura 6.72 El Skywalk del Gran Cañón ofrece magníficas vistas del cañón (créditos: 10da_ralta, Wikimedia Commons).

El Skywalk es un diseño en voladizo, lo que significa que la plataforma de observación se extiende sobre el borde del cañón, sin ningún medio de apoyo visible por debajo. A pesar de la falta de postes o puntales de apoyo visibles, las estructuras en voladizo están diseñadas para ser muy estables y el Skywalk no es una excepción. La plataforma de observación está firmemente sujeta a postes de apoyo que se extienden 46 pies de profundidad en el lecho de roca. La estructura se construyó para resistir vientos de 100 mph y un terremoto de 8,0 de magnitud en un radio de 50 mi, y es capaz de soportar más de 70.000.000 lb.

Un factor que afecta a la estabilidad del Skywalk es el centro de gravedad de la estructura. Calculemos el centro de gravedad del Skywalk y examinemos cómo cambia el centro de gravedad cuando los turistas salen a la plataforma de observación.

La plataforma de observación tiene forma de U. Las patas de la U tienen 10 ft de ancho y comienzan en tierra, bajo el centro de visitantes, a 48 ft del borde del cañón. La plataforma se extiende 70 ft sobre el borde del cañón.

Para calcular el centro de masa de la estructura, la tratamos como una lámina y utilizamos una región bidimensional en el plano *xy* para representar la plataforma. Comenzamos dividiendo la región en tres subregiones para poder considerar cada una de ellas por separado. La primera región, denotada R_1, consiste en la parte curva de la U. Modelamos R_1 como un anillo semicircular, con un radio interior de 25 pies y un radio exterior de 35 pies, centrado en el origen (vea la siguiente figura).

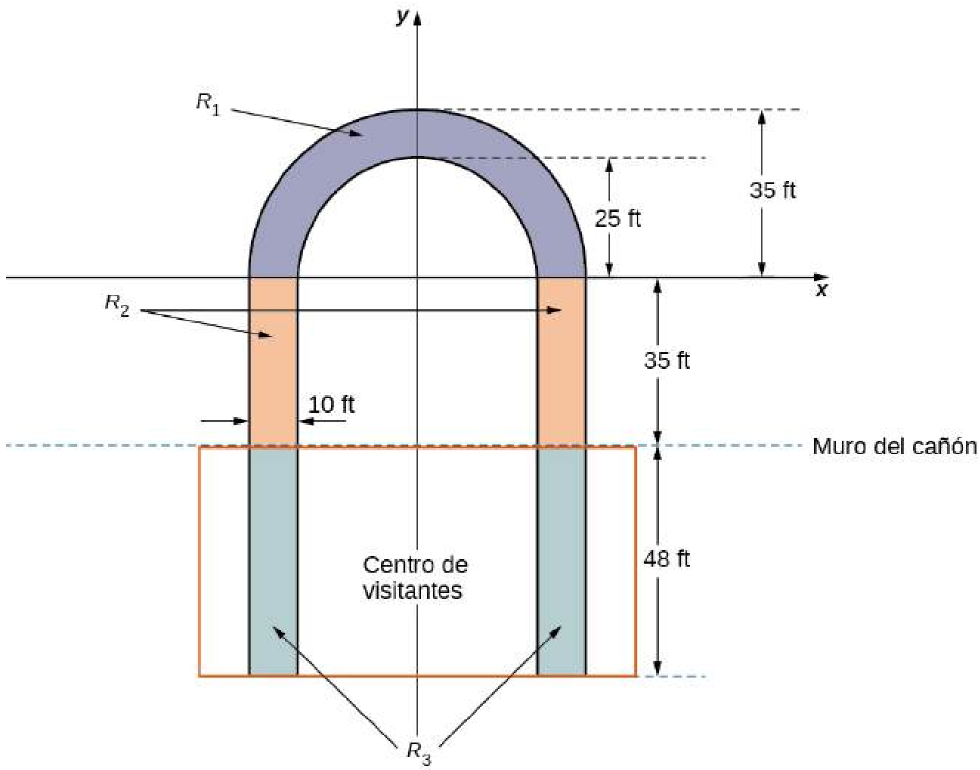


Figura 6.73 Modelamos el Skywalk con tres subregiones.

Las patas de la plataforma, que se extienden 35 ft entre R_1 y la pared del cañón comprenden la segunda subregión, R_2. Por último, los extremos de las patas, que se extienden 48 ft por debajo del centro de visitantes, comprenden la tercera subregión, R_3. Suponga que la densidad de la lámina es constante y asuma que el peso total de la plataforma es de 1.200.000 lb (sin incluir el peso del centro de visitantes; lo consideraremos más adelante). Utilice la sustitución en $g = 32 \text{ ft/s}^2$.

1. Calcule el área de cada una de las tres subregiones. Observe que las áreas de las regiones R_2 y R_3 deben incluir solo las zonas de las piernas, no el espacio abierto entre ellas. Redondee las respuestas al pie cuadrado más cercano.
2. Determine la masa asociada a cada una de las tres subregiones.
3. Calcule el centro de masa de cada una de las tres subregiones.
4. Ahora, considere cada una de las tres subregiones como una masa puntual situada en el centro de masa de la subregión correspondiente. Utilizando esta representación, calcule el centro de masa de toda la plataforma.
5. Supongamos que el centro de visitantes pesa 2.200.000 lb, con un centro de masa correspondiente al centro de masa de R_3. Considerando el centro de visitantes como una masa puntual, recalcule el centro de masa del sistema. ¿Cómo cambia el centro de masa?
6. Aunque el Skywalk se construyó para limitar el número de personas en la plataforma de observación a 120, la plataforma es capaz de soportar hasta 800 personas de 200 libras cada una. Si se permitiera la entrada de las

800 personas en el andén y todas se dirigieran al extremo más alejado del mismo, ¿cómo se vería afectado el centro de gravedad del sistema? (Incluya el centro de visitantes en los cálculos y represente las personas mediante una masa puntual situada en el borde más alejado de la plataforma, a 70 ft de la pared del cañón).

Teorema de Pappus

Esta sección termina con una discusión del **teorema de Pappus para el volumen**, que nos permite calcular el volumen de determinados tipos de sólidos utilizando el centroide (también existe un teorema de Pappus para el área superficial, pero su utilidad es mucho menor que la del teorema para el volumen).

Teorema 6.14

Teorema de Pappus para el volumen

Sea *R* una región del plano y sea *l* una línea del plano que no interseca a *R*. Entonces el volumen del sólido de revolución formado al girar *R* alrededor de *l* es igual al área de *R* multiplicada por la distancia *d* recorrida por el centroide de *R*.

Prueba

Podemos demostrar el caso en el que la región está limitada por el gráfico de una función $f(x)$ y abajo por el gráfico de una función $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$, y cuyo eje de revolución es el eje *y*. En este caso, el área de la región es $A = \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$. Como el eje de rotación es el eje *y*, la distancia recorrida por el centroide de la región depende solo de la coordenada *x* del centroide, $\bar{x}$, que es

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m},$$

donde

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \text{ y } M_y = \rho \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx.$$

Entonces,

$$d = 2\pi \frac{\rho \displaystyle\int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx}{\rho \displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$

y así

$$d.\,A = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx.$$

Sin embargo, si utilizamos el método de las capas cilíndricas, tenemos

$$V = 2\pi \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]\,dx.$$

Así que,

$$V = d.\,A$$

y la prueba está completa.

□

EJEMPLO 6.34

Uso del teorema de Pappus para el volumen

Sea R un círculo de radio 2 con centro en $(4, 0)$. Utilice el teorema de Pappus para el volumen para calcular el volumen del toro que se genera al girar R alrededor del eje *y*.

Solución

La región y el toro se representan en la siguiente figura.

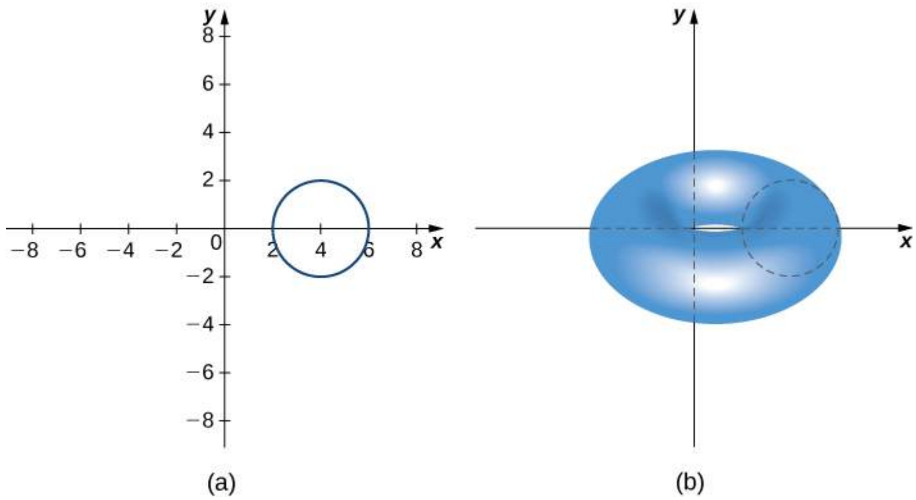


Figura 6.74 Determinación del volumen de un toro utilizando el teorema de Pappus. (a) Una región circular R en el plano; (b) el toro generado al girar R alrededor del eje *y*.

La región R es un círculo de radio 2, por lo que el área de R es $A = 4\pi$ unidades^2. Por el principio de simetría, el centroide de R es el centro del círculo. El centroide se desplaza alrededor del eje *y* en una trayectoria circular de radio 4, por lo que el centroide se desplaza $d = 8\pi$. Entonces, el volumen del toro es $A.\, d = 32\pi^2$ unidades^3.

6.34 Sea R un círculo de radio 1 con centro en $(3, 0)$. Utilice el teorema de Pappus para el volumen para calcular el volumen del toro que se genera al girar R alrededor del eje *y*.

SECCIÓN 6.6 EJERCICIOS

En los siguientes ejercicios, calcule el centro de masa para el conjunto de masas dadas.

254. $m_1 = 2$ en $x_1 = 1$ y $m_2 = 4$ en $x_2 = 2$

255. $m_1 = 1$ en $x_1 = -1$ y $m_2 = 3$ en $x_2 = 2$

256. $m = 3$ en $x = 0, 1, 2, 6$

257. Masas unitarias en $(x, y) = (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ grandes.

258. $m_1 = 1$ a las $(1, 0)$ y $m_2 = 4$ a las $(0, 1)$ grandes.

259. $m_1 = 1$ a las $(1, 0)$ y $m_2 = 3$ a las $(2, 2)$ grandes.

Para los siguientes ejercicios, calcule el centro de masa $\bar{x}$.

260. $\rho = 1$ para $x \in (-1, 3)$ grandes.

261. $\rho = x^2$ por $x \in (0, L)$ grandes.

262. $\rho = 1$ para $x \in (0, 1)$ y $\rho = 2$ por $x \in (1, 2)$ grandes.

263. $\rho = \operatorname{sen} x$ para $x \in (0, \pi)$ grandes.

264. $\rho = \cos x$ para $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ grandes.

265. $\rho = e^x$ para $x \in (0, 2)$ grandes.

266. $\rho = x^3 + xe^{-x}$ para $x \in (0, 1)$ grandes.

267. $\rho = x \operatorname{sen} x$ para $x \in (0, \pi)$ grandes.

268. $\rho = \sqrt{x}$ para $x \in (1, 4)$ grandes.

269. $\rho = \ln x$ para $x \in (1, e)$ grandes.

Para los siguientes ejercicios, calcule el centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$. Utilice la simetría para ayudar a localizar el centro de masa siempre que sea posible.

270. $\rho = 7$ en el cuadrado $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

271. $\rho = 3$ en el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, y $(0, b)$ grandes.

272. $\rho = 2$ para la región delimitada por $y = \cos(x)$, $y = -\cos(x)$, $x = -\frac{\pi}{2}$, y $x = \frac{\pi}{2}$

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para dibujar la región y luego calcule el centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$. Utilice la simetría para ayudar a localizar el centro de masa siempre que sea posible.

273. **[T]** La región delimitada por $y = \cos(2x)$, $x = -\frac{\pi}{4}$, y $x = \frac{\pi}{4}$

274. **[T]** La región entre $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, y $x = 1$

275. **[T]** La región entre $y = \frac{5}{4}x^2$ y $y = 5$

276. **[T]** La región entre $y = \sqrt{x}$, $y = \ln(x)$, $x = 1$, y $x = 4$

277. **[T]** La región delimitada por $y = 0$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

278. **[T]** La región delimitada por $y = 0$, $x = 0$, y $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

279. **[T]** La región delimitada por $y = x^2$ y $y = x^4$ en el primer cuadrante

En los siguientes ejercicios, utilice el teorema de Pappus para determinar el volumen de la forma.

280. Si giramos $y = mx$ alrededor del eje x entre $x = 0$ y $x = 1$

281. Si giramos $y = mx$ alrededor del eje y entre $x = 0$ y $x = 1$

282. Un cono recto creado al girar un triángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, y $(0, b)$ alrededor del eje y. ¿Coincide su respuesta con el volumen de un cono?

283. Un cilindro recto creado al girar un rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, y (a, b) alrededor del eje y. ¿Coincide su respuesta con el volumen de un cilindro?

284. Una esfera creada al girar un semicírculo de radio a alrededor del eje y. ¿Coincide su respuesta con el volumen de una esfera?

En los siguientes ejercicios, utilice una calculadora para dibujar la región delimitada por la curva. Halle el área M y el centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ para las formas dadas. Utilice la simetría para ayudar a localizar el centro de masa siempre que sea posible.

285. **[T]** Cuarto de círculo: $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = 0$, y $x = 0$

286. **[T]** Triángulo: $y = x$, $y = 2 - x$, y $y = 0$

287. **[T]** Lente: $y = x^2$ y $y = x$

288. **[T]** Anillo: $y^2 + x^2 = 1$ y $y^2 + x^2 = 4$

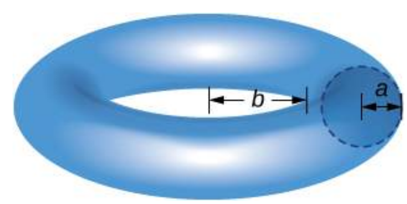
289. **[T]** Medio anillo: $y^2 + x^2 = 1$, $y^2 + x^2 = 4$, y $y = 0$

290. Halle el centro de masa generalizado en la franja entre $y = x^a$ y $y = x^b$ con la $a > b$. A continuación, utilice el teorema de Pappus para calcular el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje *y*.

291. Halle el centro de masa generalizado entre $y = a^2 - x^2$, $x = 0$, y $y = 0$. A continuación, utilice el teorema de Pappus para calcular el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje *y*.

292. Halle el centro de masa generalizado entre $y = b\,\text{sen}(ax)$, $x = 0$, y $x = \frac{\pi}{a}$. A continuación, utilice el teorema de Pappus para calcular el volumen del sólido que se genera al girar alrededor del eje *y*.

293. Utilice el teorema de Pappus para hallar el volumen de un toro (que se muestra aquí). Supongamos que un disco de radio a se sitúa con el extremo izquierdo del círculo en $x = b$, $b > 0$, y gira en torno al eje *y*.



294. Halle el centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$ para un cable fino a lo largo del semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ con masa unitaria. (*Pista:* Utilice el teorema de Pappus)

6.7 Integrales, funciones exponenciales y logaritmos

Objetivos de aprendizaje

6.7.1 Escribir la definición del logaritmo natural como una integral.
6.7.2 Reconocer la derivada del logaritmo natural.
6.7.3 Integrar funciones que impliquen la función logarítmica natural.
6.7.4 Definir el número e a través de una integral.
6.7.5 Reconocer la derivada y la integral de la función exponencial.
6.7.6 Demostrar las propiedades de los logaritmos y las funciones exponenciales utilizando las integrales.
6.7.7 Expresar funciones logarítmicas y exponenciales generales en términos de logaritmos naturales y exponenciales.

En capítulos anteriores examinamos las funciones exponenciales y los logaritmos. Sin embargo, pasamos por alto algunos detalles clave en los debates anteriores. Por ejemplo, no hemos estudiado cómo tratar las funciones exponenciales con exponentes irracionales. La definición del número *e* es otra área que no se desarrolló totalmente. Ahora tenemos las herramientas para analizar estos conceptos de una manera más rigurosa desde el punto de vista matemático, y lo haremos en esta sección.

Para los fines de esta sección, supongamos que aún no hemos definido el logaritmo natural, el número e, ni ninguna de las fórmulas de integración y diferenciación asociadas a estas funciones. Al final de la sección habremos estudiado estos conceptos de forma matemáticamente rigurosa (y veremos que son coherentes con los conceptos que aprendimos anteriormente).

Comenzaremos la sección definiendo el logaritmo natural en términos de una integral. Esta definición constituye la base de esta sección. A partir de esta definición, derivaremos fórmulas de diferenciación, definiremos el número e, y ampliaremos estos conceptos a logaritmos y funciones exponenciales de cualquier base.

El logaritmo natural como integral

Recordemos la regla de la potencia para las integrales:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$$

Está claro que esto no funciona cuando $n = -1$, ya que nos obligaría a dividir entre cero. Entonces, ¿qué hacemos con $\int \frac{1}{x}dx$? Recordemos que el teorema fundamental del cálculo dice que $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ es una antiderivada de $1/x$. Por lo tanto, podemos hacer la siguiente definición.

Definición

Para $x > 0$, defina la función logarítmica natural por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt. \tag{6.24}$$

Para $x > 1$, esto es solo el área bajo la curva $y = 1/t$ a partir de 1 a x. Para $x < 1$, tenemos $\int_1^x \frac{1}{t}dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}dt$, por lo que en este caso es el negativo del área bajo la curva de x para 1 (vea la siguiente figura).

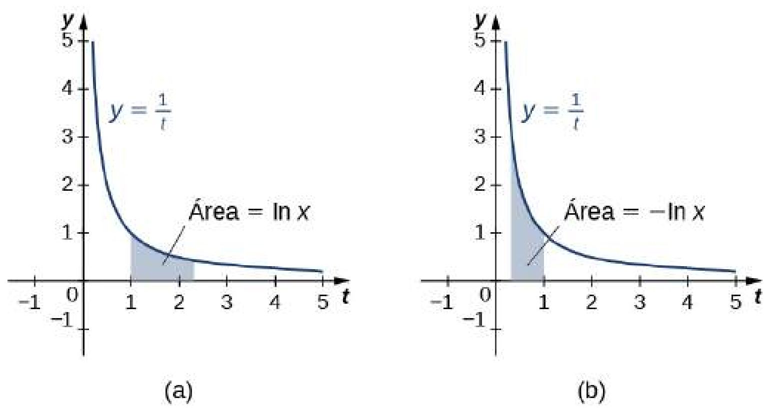


Figura 6.75 (a) Cuando $x > 1$, el logaritmo natural es el área bajo la curva $y = 1/t$ a partir de 1 para x. (b) Cuando $x < 1$, el logaritmo natural es el negativo del área bajo la curva de x al 1.

Observe que $\ln 1 = 0$. Además, la función $y = 1/t > 0$ por $x > 0$. Por lo tanto, según las propiedades de las integrales, está claro que $\ln x$ aumenta para $x > 0$.

Propiedades del logaritmo natural

Debido a la forma en que definimos el logaritmo natural, la siguiente fórmula de diferenciación surge inmediatamente como resultado del teorema fundamental del cálculo.

Teorema 6.15

Derivada del logaritmo natural
Para $x > 0$, la derivada del logaritmo natural viene dada por

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}.$$

Teorema 6.16

Corolario de la derivada del logaritmo natural
La función $\ln x$ es diferenciable; por lo tanto, es continua.

Un gráfico de $\ln x$ se muestra en la Figura 6.76. Observe que es continua en todo su dominio de $\left(0, \infty\right)$.

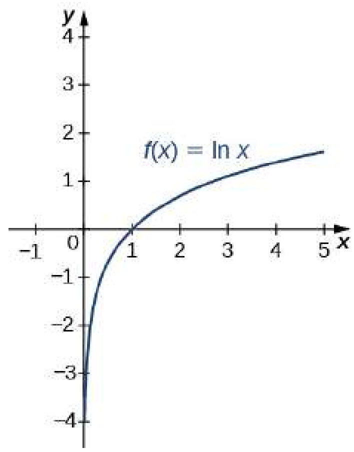


Figura 6.76 El gráfico de $f(x) = \ln x$ muestra que es una función continua.

EJEMPLO 6.35

Cálculo de las derivadas de los logaritmos naturales
Calcule las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(5x^3 - 2\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}(\ln(3x))^2$

Solución
En ambos casos tenemos que aplicar la regla de la cadena.

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(5x^3 - 2\right) = \frac{15x^2}{5x^3-2}$
b. $\frac{d}{dx}(\ln(3x))^2 = \frac{2(\ln(3x)).3}{3x} = \frac{2(\ln(3x))}{x}$

6.35 Calcule las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\ln\left(2x^2 + x\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x^3\right)\right)^2$

Observe que si utilizamos la función de valor absoluto y creamos una nueva función $\ln\ |x|$, podemos ampliar el dominio del logaritmo natural para incluir $x < 0$. Entonces $(d/(dx))\ln\ |x| = 1/x$. Esto da lugar a la conocida fórmula de integración.

Teorema 6.17

Integral de $(1/u)\, du$
El logaritmo natural es la antiderivada de la función $f(u) = 1/u$:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C.$$

EJEMPLO 6.36

Cálculo de integrales que implica logaritmos naturales
Calcule la integral $\int \frac{x}{x^2+4} dx$.

Solución
Utilizando u–sustitución, supongamos que $u = x^2 + 4$. Entonces $du = 2x\, dx$ y tenemos

$$\int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln \left|x^2+4\right| + C = \frac{1}{2} \ln \left(x^2+4\right) + C.$$

6.36 Calcule la integral $\int \frac{x^2}{x^3+6} dx$.

Aunque hemos llamado a nuestra función "logaritmo", en realidad no hemos demostrado que ninguna de las propiedades de los logaritmos se cumpla para esta función. Lo haremos aquí.

Teorema 6.18

Propiedades del logaritmo natural
Si los valores de $a, b > 0$ y r es un número racional, entonces

i. $\ln 1 = 0$
ii. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
iii. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
iv. $\ln(a^r) = r \ln a$

Prueba

i. Por definición, $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$.

ii. Tenemos

$$\ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt.$$

Use la sustitución u en la última integral de esta expresión. Supongamos que $u = t/a$. Entonces $du = (1/a)\, dt$. Además, cuando $t = a, u = 1$, y cuando $t = ab, u = b$. Así que obtenemos

$$\ln(ab) = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ab} \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{a} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^b \frac{1}{u} du = \ln a + \ln b.$$

iv. Tenga en cuenta que

$$\frac{d}{dx} \ln\left(x^r\right) = \frac{r x^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x}.$$

Además,

$$\frac{d}{dx}(r \ln x) = \frac{r}{x}.$$

Como las derivadas de estas dos funciones son iguales, según el teorema fundamental del cálculo, deben diferir en una constante. Así que tenemos

$$\ln\left(x^r\right) = r \ln x + C$$

para alguna constante C. Si tomamos $x = 1$, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln(1^r) &= r \ln(1) + C \\ 0 &= r(0) + C \\ C &= 0. \end{aligned}$$

Así que $\ln(x^r) = r \ln x$ y la prueba está completa. Observe que podemos extender esta propiedad a los valores irracionales de r más adelante en esta sección.
La parte iii. se deduce de las partes ii. y iv. y la prueba se deja a su criterio.

□

EJEMPLO 6.37

Uso de las propiedades de los logaritmos

Utilice las propiedades de los logaritmos para simplificar la siguiente expresión en un solo logaritmo:

$$\ln 9 - 2 \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{3}\right).$$

Solución

Tenemos

$$\ln 9 - 2 \ln 3 + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(3^2\right) - 2 \ln 3 + \ln\left(3^{-1}\right) = 2 \ln 3 - 2 \ln 3 - \ln 3 = -\ln 3.$$

6.37 Utilice las propiedades de los logaritmos para simplificar la siguiente expresión en un solo logaritmo:

$$\ln 8 - \ln 2 - \ln\left(\frac{1}{4}\right).$$

Definición del número *e*

Ya que definimos el logaritmo natural, podemos utilizar esa función para definir el número e.

Definición

El número e se define como el número real tal que

$$\ln e = 1.$$

Para decirlo de otra manera, el área bajo la curva $y = 1/t$ entre $t = 1$ y $t = e$ ¿es 1 (Figura 6.77). Se deja a su criterio la prueba de que ese número existe y es único. (*Pista*: Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar la existencia y el hecho de que $\ln x$ es creciente para demostrar su unicidad).

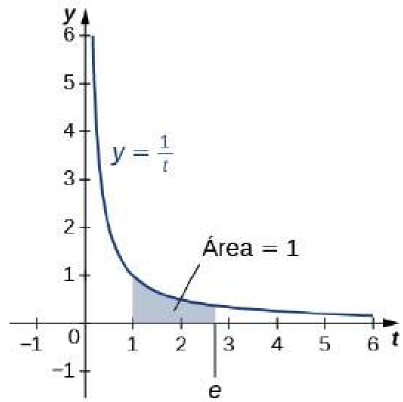


Figura 6.77 El área bajo la curva de 1 al e es igual a uno.

El número e puede demostrarse que es irracional, aunque no lo haremos aquí (vea el proyecto estudiantil en la Serie Taylor y Maclaurin (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-2/pages/6-3-series-de-taylor-y-maclaurin)). Su valor aproximado viene dado por

$$e \approx 2{,}71828182846.$$

La función exponencial

Ahora nos centraremos en la función e^x. Observe que el logaritmo natural es biunívoco y, por tanto, tiene una función inversa. Por ahora, denotamos esta función inversa por $\exp x$. Entonces,

$$\exp(\ln x) = x \text{ para } x > 0 \text{ y } \ln(\exp x) = x \text{ para todo } x.$$

La siguiente figura muestra los gráficos de $\exp x$ y $\ln x$.

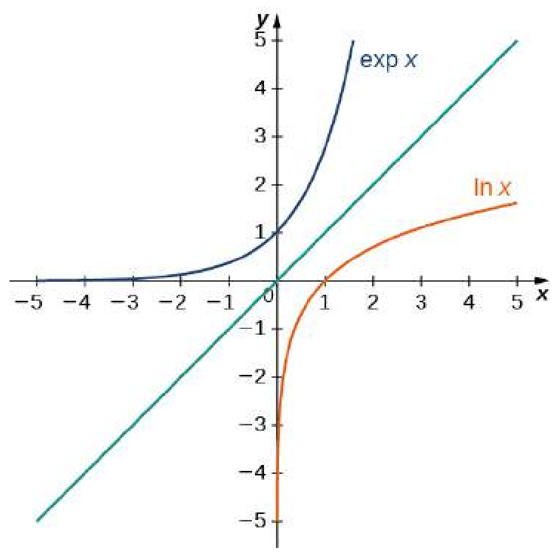


Figura 6.78 Los gráficos de $\ln x$ y $\exp x$.

Nuestra hipótesis es que $\exp x = e^x$. Para valores racionales de x, esto es fácil de mostrar. Si los valores de x es racional, entonces tenemos $\ln(e^x) = x \ln e = x$. Así, cuando x es racional, $e^x = \exp x$. Para valores irracionales de x, simplemente definimos e^x como función inversa de $\ln x$.

Definición

Para cualquier número real x, defina $y = e^x$ para ser el número para el que

$$\ln y = \ln\left(e^x\right) = x. \tag{6.25}$$

Entonces tenemos $e^x = \exp(x)$ para todo x, y por lo tanto

$$e^{\ln x} = x \text{ para } x > 0 \text{ y } \ln\left(e^x\right) = x \tag{6.26}$$

para todos los x.

Propiedades de la función exponencial

Dado que la función exponencial se definió en términos de una función inversa, y no en términos de una potencia de e, debemos comprobar que las leyes generales de los exponentes se cumplen para la función e^x.

Teorema 6.19

Propiedades de la función exponencial

Si los valores de p y q son números reales cualquiera y r es un número racional, entonces

i. $e^p e^q = e^{p+q}$
ii. $\frac{e^p}{e^q} = e^{p-q}$
iii. $(e^p)^r = e^{pr}$

Prueba

Observe que si p y q son racionales, las propiedades se mantienen. Sin embargo, si p o q son irracionales, debemos aplicar la definición de función inversa de e^x y verificar las propiedades. Aquí solo verificamos la primera propiedad; verifique las dos restantes. Tenemos

$$\ln\left(e^p e^q\right) = \ln\left(e^p\right) + \ln\left(e^q\right) = p + q = \ln\left(e^{p+q}\right).$$

Dado que $\ln x$ es biunívoca, entonces

$$e^p e^q = e^{p+q}.$$

□

Al igual que con la parte iv. de las propiedades del logaritmo, podemos extender la propiedad iii. a los valores irracionales de r, y lo haremos al final de la sección.

También queremos verificar la fórmula de diferenciación de la función $y = e^x$. Para ello, tenemos que utilizar la diferenciación implícita. Supongamos que $y = e^x$. Entonces

$$\begin{aligned} \ln y &= x \\ \frac{d}{dx}\ln y &= \frac{d}{dx}x \\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= y. \end{aligned}$$

Así, vemos

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

como esperábamos, lo que conduce inmediatamente a la fórmula de integración

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

Aplicaremos estas fórmulas en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6.38

Uso de las propiedades de las funciones exponenciales

Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dt}e^{3t}e^{t^2}$
b. $\frac{d}{dx}e^{3x^2}$

Solución

Aplicamos la regla de la cadena según sea necesario.

a. $\frac{d}{dt}e^{3t}e^{t^2} = \frac{d}{dt}e^{3t+t^2} = e^{3t+t^2}\,(3+2t)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}e^{3x^2} = e^{3x^2}\,6x$

6.38 Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{5x}}\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)^3$

EJEMPLO 6.39

Uso de las propiedades de las funciones exponenciales

Evalúe la siguiente integral $\int 2xe^{-x^2}\,dx$.

Solución

Utilizando u–sustitución, supongamos que $u = -x^2$. Entonces $du = -2x\,dx$, y tenemos

$$\int 2xe^{-x^2}\,dx = -\int e^u\,du = -e^u + C = -e^{-x^2} + C.$$

6.39 Evalúe la siguiente integral $\int \frac{4}{e^{3x}}\,dx$.

Funciones logarítmicas y exponenciales generales

Cerraremos esta sección viendo las funciones exponenciales y los logaritmos con bases distintas a e. Las funciones exponenciales son funciones de la forma $f(x) = a^x$. Tenga en cuenta que, a menos que $a = e$, todavía no tenemos una definición matemáticamente rigurosa de estas funciones para los exponentes irracionales. Rectifiquemos aquí definiendo la función $f(x) = a^x$ en términos de la función exponencial e^x. A continuación examinaremos los logaritmos con bases distintas a e como funciones inversas de funciones exponenciales.

Definición

para cualquier $a > 0$, y para cualquier número real x, defina $y = a^x$ de la siguiente forma:

$$y = a^x = e^{x \ln a}.$$

Ahora, a^x se define rigurosamente para todos los valores de x. Esta definición también nos permite generalizar la propiedad iv. de los logaritmos y la propiedad iii. de las funciones exponenciales para aplicarlas tanto a los valores racionales como irracionales de r. Es sencillo demostrar que las propiedades de los exponentes se mantienen para las funciones exponenciales generales definidas de esta manera.

Apliquemos ahora esta definición para calcular una fórmula de diferenciación para a^x. Tenemos

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x \ln a} = e^{x \ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

La fórmula de integración correspondiente se deduce inmediatamente.

Teorema 6.20

Derivadas e integrales con funciones exponenciales generales
Supongamos que $a > 0$. Entonces,

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

y

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C.$$

Si los valores de $a \neq 1$, entonces la función a^x es biunívoca y tiene una inversa bien definida. Su inversa se denota por $\log_a x$. Entonces,

$$y = \log_a x \text{ si y solo si } x = a^y.$$

Nótese que las funciones logarítmicas generales pueden escribirse en términos del logaritmo natural. Supongamos que $y = \log_a x$. Entonces, $x = a^y$. Al tomar el logaritmo natural de ambos lados de esta segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln(a^y) \\ \ln x &= y \ln a \\ y &= \frac{\ln x}{\ln a} \\ \log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a}. \end{aligned}$$

Así, vemos que todas las funciones logarítmicas son múltiplos constantes unas de otras. A continuación, utilizamos esta fórmula para encontrar una fórmula de diferenciación para un logaritmo con base a. De nuevo, supongamos $y = \log_a x$. Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\ln a}\right)\frac{d}{dx}(\ln x) \\ &= \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x \ln a}. \end{aligned}$$

Teorema 6.21

Derivadas de funciones logarítmicas generales
Supongamos que $a > 0$. Entonces,

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}.$$

EJEMPLO 6.40

Cálculo de las derivadas de las funciones exponenciales y logarítmicas generales
Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dt}\left(4^t . 2^{t^2}\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\log_8\left(7x^2 + 4\right)$

Solución
Tenemos que aplicar la regla de la cadena según sea necesario.

a. $\frac{d}{dt}\left(4^t . 2^{t^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(2^{2t} . 2^{t^2}\right) = \frac{d}{dt}\left(2^{2t+t^2}\right) = 2^{2t+t^2} \ln(2)(2+2t)$ grandes.

b. $\frac{d}{dx}\log_8\left(7x^2+4\right) = \frac{1}{\left(7x^2+4\right)(\ln 8)}(14x)$

6.40 Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dt} 4^{t^4}$

b. $\frac{d}{dx}\log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

EJEMPLO 6.41

Integración de funciones exponenciales generales

Evalúe la siguiente integral $\int \frac{3}{2^{3x}} dx$.

Solución

Utilice la sustitución en u y supongamos que $u = -3x$. Entonces $du = -3dx$ y tenemos

$$\int \frac{3}{2^{3x}} dx = \int 3.2^{-3x} dx = -\int 2^u du = -\frac{1}{\ln 2} 2^u + C = -\frac{1}{\ln 2} 2^{-3x} + C.$$

6.41 Evalúe la siguiente integral $\int x^2 2^{x^3} dx$.

SECCIÓN 6.7 EJERCICIOS

Para los siguientes ejercicios, calcule la derivada $\frac{dy}{dx}$.

295. $y = \ln(2x)$ grandes.

296. $y = \ln(2x+1)$ grandes.

297. $y = \frac{1}{\ln x}$

En los siguientes ejercicios, halle la integral indefinida.

298. $\int \frac{dt}{3t}$

299. $\int \frac{dx}{1+x}$

Para los siguientes ejercicios, calcule la derivada dy/dx. (Puede utilizar una calculadora para trazar la función y la derivada para confirmar que es correcta).

300. **[T]** $y = \frac{\ln(x)}{x}$

301. **[T]** $y = x\ln(x)$ grandes.

302. **[T]** $y = \log_{10} x$

303. **[T]** $y = \ln(\text{sen } x)$ grandes.

304. **[T]** $y = \ln(\ln x)$

305. **[T]** $y = 7\ln(4x)$ grandes.

306. **[T]** $y = \ln\left((4x)^7\right)$

307. **[T]** $y = \ln(\tan x)$ grandes.

308. **[T]** $y = \ln(\tan(3x))$

309. **[T]** $y = \ln\left(\cos^2 x\right)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, halle la integral definida o indefinida.

310. $\int_0^1 \frac{dx}{3+x}$

311. $\int_0^1 \frac{dt}{3+2t}$

312. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{x^2+1}$

313. $\int_0^2 \frac{x^3\,dx}{x^2+1}$

314. $\int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$

315. $\int_2^e \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

316. $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x}$

317. $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$

318. $\int \cot(3x)\,dx$

319. $\int \frac{(\ln x)^2\,dx}{x}$

En los siguientes ejercicios, calcule dy/dx diferenciando $\ln y$.

320. $y = \sqrt{x^2+1}$

321. $y = \sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}$

322. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

323. $y = x^{-1/x}$

324. $y = e^{(ex)}$ grandes.

325. $y = x^e$

326. $y = x^{(ex)}$ grandes.

327. $y = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{x}$

328. $y = x^{-1/\ln x}$

329. $y = e^{-\ln x}$

En los siguientes ejercicios, evalúe mediante cualquier método.

330. $\int_5^{10} \frac{dt}{t} - \int_{5x}^{10x} \frac{dt}{t}$

331. $\int_1^{e^\pi} \frac{dx}{x} + \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$

332. $\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{dt}{t}$

333. $\frac{d}{dx}\int_x^{x^2} \frac{dt}{t}$

334. $\frac{d}{dx}\ln(\sec x + \tan x)$

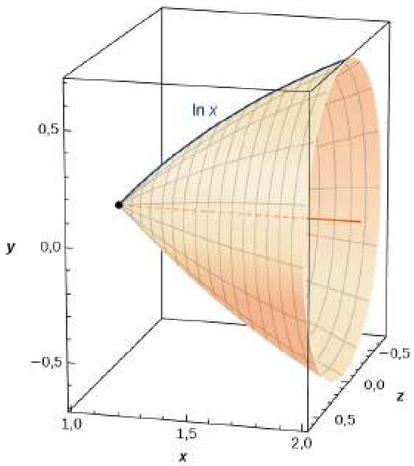
En los siguientes ejercicios, utilice la función $\ln x$. Si no puede encontrar los puntos de intersección de forma analítica, utilice una calculadora.

335. Halle el área de la región encerrada por $x = 1$ y $y = 5$ arriba $y = \ln x$.

336. **[T]** Calcule la longitud de arco de $\ln x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

337. Halle el área entre $\ln x$ y el eje *x* de $x = 1$ para $x = 2$.

338. Calcule el volumen de la forma que se crea al girar esta curva desde $x = 1$ para $x = 2$ alrededor del eje *x*, como se muestra aquí.



339. **[T]** Halle el área superficial de la forma que se crea al girar la curva del ejercicio anterior a partir de $x = 1$ a $x = 2$ alrededor del eje *x*.

Si no puede hallar los puntos de intersección analíticamente en los siguientes ejercicios, utilice una calculadora.

340. Halle el área del cuarto de círculo hiperbólico delimitado por $x = 2$ y $y = 2$ arriba $y = 1/x$.

341. **[T]** Calcule la longitud de arco de $y = 1/x$ de $x = 1$ para $x = 4$.

342. Halle el área bajo $y = 1/x$ y por encima del eje *x* de $x = 1$ para $x = 4$.

En los siguientes ejercicios, compruebe las derivadas y antiderivadas.

343. $\frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

344. $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \frac{2a}{\left(x^2-a^2\right)}$ grandes.

345. $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

346. $\frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

347. $\int \frac{dx}{x \ln(x) \ln(\ln x)} = \ln(\ln(\ln x)) + C$

6.8 Crecimiento y decaimiento exponencial

Objetivos de aprendizaje

6.8.1 Utilizar el modelo de crecimiento exponencial en aplicaciones, lo que incluye crecimiento de la población e interés compuesto.
6.8.2 Explicar el concepto de tiempo de duplicación.
6.8.3 Utilizar el modelo de decrecimiento exponencial en aplicaciones, lo que incluye decaimiento radiactivo y la ley de enfriamiento de Newton.
6.8.4 Explicar el concepto de vida media.

Una de las aplicaciones más frecuentes de las funciones exponenciales es la de los modelos de crecimiento y decrecimiento. El crecimiento exponencial y el decrecimiento aparecen en multitud de aplicaciones naturales. Desde el crecimiento de la población y el interés capitalizado continuamente hasta el decaimiento radiactivo y la ley de enfriamiento de Newton, las funciones exponenciales son omnipresentes en la naturaleza. En esta sección, examinamos el crecimiento y el decrecimiento exponencial en el contexto de algunas de estas aplicaciones.

Modelo de crecimiento exponencial

Muchos sistemas presentan un crecimiento exponencial. Estos sistemas siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{kt}$, donde

y_0 representa el estado inicial del sistema y k es una constante positiva, denominada *constante de crecimiento*. Observe que en un modelo de crecimiento exponencial, tenemos

$$y' = ky_0 e^{kt} = ky. \tag{6.27}$$

Es decir, la tasa de crecimiento es proporcional al valor actual de la función. Esta es una característica clave del crecimiento exponencial. La Ecuación 6.27 involucra derivadas y se denomina *ecuación diferencial*. Aprenderemos más sobre esto en Introducción a las ecuaciones diferenciales (http://openstax.org/books/cálculo-volumen-2/pages/4-introduccion).

Regla: modelo de crecimiento exponencial

Los sistemas que presentan un **crecimiento exponencial** aumentan según el modelo matemático

$$y = y_0 e^{kt},$$

donde y_0 representa el estado inicial del sistema y $k > 0$ es una constante, denominada *constante de crecimiento*.

Elcrecimiento de la población es un ejemplo común de crecimiento exponencial. Consideremos una población de bacterias, por ejemplo. Parece razonable que la tasa de crecimiento de la población sea proporcional al tamaño de la misma. Al fin y al cabo, cuantas más bacterias haya para reproducirse, más rápido crecerá la población. La Figura 6.79 y la Tabla 6.1 representan el crecimiento de una población de bacterias con una población inicial de 200 y una constante de crecimiento de $0{,}02$. Observe que después de apenas 2 horas (120 minutos), ¡la población es 10 veces su tamaño original!

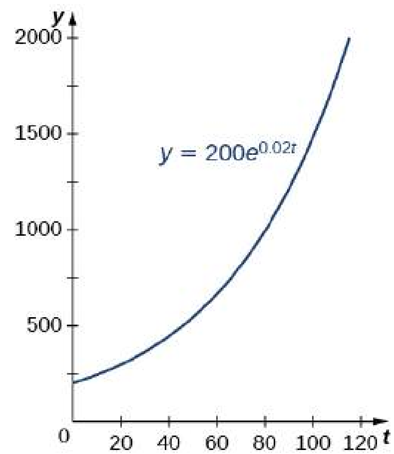


Figura 6.79 Un ejemplo de crecimiento exponencial de las bacterias.

Tiempo (min)	Tamaño de la población (n.º de bacterias)
10	244
20	298
30	364
40	445
50	544
60	664

Tabla 6.1 Crecimiento exponencial de una población bacteriana

Tiempo (min)	Tamaño de la población (n.º de bacterias)
70	811
80	991
90	1.210
100	1.478
110	1.805
120	2.205

Tabla 6.1 Crecimiento exponencial de una población bacteriana

Tenga en cuenta que estamos utilizando una función continua para modelar lo que es esencialmente un comportamiento discreto. En cualquier momento, la población del mundo real contiene un número entero de bacterias, aunque el modelo adopta valores no enteros. Cuando se utilizan modelos de crecimiento exponencial, siempre hay que tener cuidado de interpretar los valores de la función en el contexto del fenómeno que estamos modelando.

EJEMPLO 6.42

Crecimiento de la población

Consideremos la población de bacterias descrita anteriormente. Esta población crece según la función $f(t)=200e^{0{,}02t}$, donde t se mide en minutos. ¿Cuántas bacterias están presentes en la población después de 5 horas (300 minutos)? ¿Cuándo alcanza la población 100.000 bacterias?

Solución

Tenemos $f(t)=200e^{0{,}02t}$. Entonces

$$f(300)=200e^{0{,}02(300)}\approx 80686.$$

Hay 80686 bacterias en la población después de 5 horas.

Para saber cuándo la población alcanza 100.000 bacterias, resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned}100.000&=200e^{0{,}02t}\\500&=e^{0{,}02t}\\\ln 500&=0{,}02t\\t&=\frac{\ln 500}{0{,}02}\approx 310{,}73.\end{aligned}$$

La población alcanza 100.000 bacterias después de $310{,}73$ minutos.

6.42 Consideremos una población de bacterias que crece según la función $f(t)=500e^{0{,}05t}$, donde t se mide en minutos. ¿Cuántas bacterias hay en la población después de 4 horas? ¿Cuándo alcanza la población 100 millones de bacterias?

Pasemos ahora a una aplicación financiera: el interés compuesto. El interés que no se capitaliza se denomina *interés simple*. El interés simple se paga una vez, al final del periodo especificado (normalmente 1 año). Así que, si ponemos $\$1.000$ en una cuenta de ahorros ganando el $2\ \%$ de interés simple anual, entonces al final del año tendremos

$$1.000\,(1+0{,}02)=\$1.020.$$

El interés compuesto se paga varias veces al año, según el periodo de capitalización. Por lo tanto, si el banco compone los intereses cada 6 meses, acredita la mitad de los intereses del año en la cuenta después de 6 meses. En la segunda mitad del año, la cuenta devenga intereses no solo por el importe inicial de $\$1.000$, sino también sobre los intereses obtenidos durante el primer semestre. Matemáticamente hablando, al final del año, tendremos

$$1.000\left(1+\frac{0{,}02}{2}\right)^2=\$1020{,}10.$$

Del mismo modo, si los intereses se capitalizan cada 4 meses, tendremos

$$1.000\left(1+\frac{0{,}02}{3}\right)^3=\$1020{,}13,$$

y si el interés se capitaliza diariamente (365 veces al año), tenemos $\$1020{,}20$. Si ampliamos este concepto de manera que el interés se capitalice continuamente, después de t años tendremos

$$1.000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{nt}.$$

Ahora vamos a manipular esta expresión para tener una función de crecimiento exponencial. Recordemos que el número e puede expresarse como un límite:

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Con base en esto, queremos que la expresión dentro del paréntesis tenga la forma $(1+1/m)$. Supongamos que $n=0{,}02m$. Tenga en cuenta que como $n\to\infty$, $m\to\infty$ también. Entonces obtenemos

$$1.000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{n}\right)^{nt}=1.000\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{0{,}02}{0{,}02m}\right)^{0{,}02mt}=1.000\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^{0{,}02t}.$$

Reconocemos el límite dentro de los paréntesis como el número e. Entonces, el saldo de nuestra cuenta bancaria después de t años viene dado por $1.000e^{0{,}02t}$. Al generalizar este concepto, vemos que si una cuenta bancaria con un saldo inicial de $\$P$ gana intereses a una tasa de $r\ \%$, capitalizado continuamente; entonces el saldo de la cuenta después de t años es

$$\text{Saldo}=Pe^{rt}.$$

EJEMPLO 6.43

Interés compuesto

A un estudiante de 25 años se le ofrece la oportunidad de invertir algo de dinero en una cuenta de jubilación que paga $5\ \%$ interés anual capitalizado continuamente. ¿Cuánto necesita invertir hoy el estudiante para tener $\$1$ millón cuando se jubile a la edad de 65? ¿Y si más bien pudiera ganar $6\ \%$ interés anual capitalizado continuamente?

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned}1.000.000&=Pe^{0{,}05(40)}\\P&=135.335{,}28.\end{aligned}$$

Debe invertir $\$135.335{,}28$ a las $5\ \%$ interés.

Si en cambio puede ganar $6\ \%$, entonces la ecuación se convierte en

$$\begin{aligned}1.000.000&=Pe^{0{,}06(40)}\\P&=90.717{,}95.\end{aligned}$$

En este caso, solo necesita invertir $\$90.717{,}95$. Esto es aproximadamente dos tercios de la cantidad que necesita invertir al $5\ \%$. El hecho de que el interés se capitalice de forma continua magnifica en gran medida el efecto del $1\ \%$ de aumento de la tasa de interés.

6.43 Supongamos que en vez de invertir a la edad de 25, el estudiante espera hasta la edad de 35. ¿Cuánto tendría que invertir al 5%? A $6\ \%$?

Si una cantidad crece exponencialmente, el tiempo que tarda en duplicarse permanece constante. En otras palabras, una población de bacterias tarda el mismo tiempo en crecer de 100 a 200 que el que tarda para crecer de 10.000 al 20.000 bacterias. Este tiempo se denomina tiempo de duplicación. Para calcular el tiempo de duplicación, tenemos que saber cuándo la cantidad alcanza el doble de su tamaño original. Así que tenemos

$$\begin{aligned} 2y_0 &= y_0 e^{kt} \\ 2 &= e^{kt} \\ \ln 2 &= kt \\ t &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Definición

Si una cantidad crece exponencialmente, el **tiempo de duplicación** es el tiempo que tarda la cantidad en duplicarse. Viene dado por

$$\text{Tiempo de duplicación} = \frac{\ln 2}{k}.$$

EJEMPLO 6.44

Uso del tiempo de duplicación

Supongamos que una población de peces crece exponencialmente. Un estanque se abastece inicialmente con 500 peces. Después de 6 meses, hay 1.000 peces en el estanque. El propietario permitirá a sus amigos y vecinos pescar en su estanque cuando la población de peces alcance 10.000. ¿Cuándo podrán pescar los amigos del propietario?

Solución

Sabemos que la población de peces tarda 6 meses para duplicar su número. Así, si t representa el tiempo en meses, por la fórmula del tiempo de duplicación, tenemos $6 = (\ln 2)/k$. Entonces, $k = (\ln 2)/6$. Así, la población viene dada por $y = 500e^{((\ln 2)/6)t}$. Para saber cuándo la población alcanza 10.000 peces, debemos resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 10.000 &= 500e^{(\ln 2/6)t} \\ 20 &= e^{(\ln 2/6)t} \\ \ln 20 &= \left(\frac{\ln 2}{6}\right) t \\ t &= \frac{6(\ln 20)}{\ln 2} \approx 25{,}93. \end{aligned}$$

Los amigos del dueño tienen que esperar $25{,}93$ meses (un poco más de 2 años) para pescar en el estanque.

6.44 Supongamos que se necesita 9 meses para que la población de peces en el Ejemplo 6.44 alcance 1.000 peces. En estas circunstancias, ¿cuánto tiempo tienen que esperar los amigos del propietario?

Modelo de decrecimiento exponencial

Las funciones exponenciales también pueden usarse para modelar poblaciones que se reducen (por ejemplo, a causa de una enfermedad) o compuestos químicos que se descomponen con el tiempo. Decimos que tales sistemas exhiben un decrecimiento exponencial en vez de un crecimiento exponencial. El modelo es casi el mismo, excepto que hay un signo negativo en el exponente. Así, para alguna constante positiva k, tenemos $y = y_0 e^{-kt}$.

Al igual que con el crecimiento exponencial, existe una ecuación diferencial asociada al decrecimiento exponencial. Tenemos

$$y' = -ky_0 e^{-kt} = -ky.$$

Regla: modelo de decrecimiento exponencial

Los sistemas que presentan **un decrecimiento exponencial** se comportan según el modelo

$$y = y_0 e^{-kt},$$

donde y_0 representa el estado inicial del sistema y $k > 0$ es una constante, llamada *constante de decrecimiento*.

La siguiente figura muestra un gráfico de una función representativa de decrecimiento exponencial.

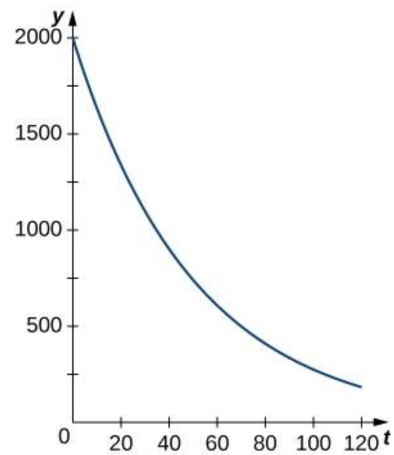


Figura 6.80 Ejemplo de decrecimiento exponencial.

Veamos una aplicación física del decrecimiento exponencial. La ley de enfriamiento de Newton dice que un objeto se enfría a una velocidad proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura del entorno. En otras palabras, si T representa la temperatura del objeto y T_a representa la temperatura ambiente en una habitación, entonces

$$T' = -k(T - T_a).$$

Hay que tener en cuenta que este no es el modelo correcto para el decrecimiento exponencial. Queremos que la derivada sea proporcional a la función, y esta expresión tiene el término adicional T_a. Por suerte podemos hacer un cambio de variables que resuelva este problema. Supongamos que $y(t) = T(t) - T_a$. Entonces $y'(t) = T'(t) - 0 = T'(t)$, y nuestra ecuación se convierte en

$$y' = -ky.$$

Por nuestro trabajo anterior, sabemos que esta relación entre y y su derivada conduce a un decrecimiento exponencial. Por lo tanto,

$$y = y_0 e^{-kt},$$

y vemos que

$$\begin{aligned} T - T_a &= (T_0 - T_a)e^{-kt} \\ T &= (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a \end{aligned}$$

donde T_0 representa la temperatura inicial. Apliquemos esta fórmula en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.45

Ley de enfriamiento de Newton

Según los baristas experimentados, la temperatura óptima para servir el café está entre $155°\text{F}$ y $175°\text{F}$. Supongamos que el café se vierte a una temperatura de $200°\text{F}$, y después de 2 minutos en una habitación a $70\ °\text{F}$ el café se enfría a $180°\text{F}$. ¿Cuándo se enfría el café lo suficiente por primera vez para servirlo? ¿Cuándo está demasiado frío para servirlo? Redondee las respuestas al medio minuto más cercano.

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned} T &= (T_0 - T_a)\, e^{-kt} + T_a \\ 180 &= (200 - 70)e^{-k(2)} + 70 \\ 110 &= 130e^{-2k} \\ \frac{11}{13} &= e^{-2k} \\ \ln\frac{11}{13} &= -2k \\ \ln 11 - \ln 13 &= -2k \\ k &= \frac{\ln 13 - \ln 11}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, el modelo es

$$T = 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} + 70.$$

El café alcanza $175°\text{F}$ cuando

$$\begin{aligned} 175 &= 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} + 70 \\ 105 &= 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} \\ \frac{21}{26} &= e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} \\ \ln\frac{21}{26} &= \frac{\ln 11 - \ln 13}{2}t \\ \ln 21 - \ln 26 &= \frac{\ln 11 - \ln 13}{2}t \\ t &= \frac{2(\ln 21 - \ln 26)}{\ln 11 - \ln 13} \approx 2{,}56. \end{aligned}$$

El café puede servirse alrededor de $2{,}5$ minutos después de ser vertido. El café alcanza $155°\text{F}$ en

$$\begin{aligned} 155 &= 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} + 70 \\ 85 &= 130e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} \\ \frac{17}{26} &= e^{\left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t} \\ \ln 17 - \ln 26 &= \left(\frac{\ln 11 - \ln 13}{2}\right)t \\ t &= \frac{2(\ln 17 - \ln 26)}{\ln 11 - \ln 13} \approx 5{,}09. \end{aligned}$$

El café está demasiado frío para ser servido cerca de 5 minutos después de ser vertido.

6.45 Supongamos que la habitación está más cálida $(75°\text{F})$ y, después de 2 minutos, el café se ha enfriado solo a $185°\text{F}$. ¿Cuándo se enfría el café lo suficiente por primera vez para servirlo? ¿Cuándo está demasiado frío para servirlo? Redondee las respuestas al medio minuto más cercano.

Al igual que los sistemas que presentan un crecimiento exponencial tienen un tiempo de duplicación constante, los sistemas que presentan un decrecimiento exponencial tienen una vida media constante. Para calcular la vida media, queremos saber cuándo la cantidad llega a la mitad de su tamaño original. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{y_0}{2} &= y_0 e^{-kt} \\ \frac{1}{2} &= e^{-kt} \\ -\ln 2 &= -kt \\ t &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Nota: Esta es la misma expresión que se nos ocurrió para duplicar el tiempo.

Definición

Si una cantidad decrece exponencialmente, la **vida media** es el tiempo que la misma tarda en reducirse a la mitad. Viene dado por

$$\text{Semivida} = \frac{\ln 2}{k}.$$

EJEMPLO 6.46

Datación por radiocarbono

Una de las aplicaciones más comunes de un modelo de decrecimiento exponencial es la datación por carbono $\text{El carbono-}14$ decae (emite una partícula radiactiva) a un ritmo exponencial regular y constante. Por lo tanto, si sabemos cuánto carbono había originalmente en un objeto y cuánto carbono queda, podemos determinar la edad del objeto. La semivida del $\text{carbono-}14$ es, aproximadamente, 5730 años, lo que significa que después de tantos años, la mitad del material se ha convertido del $\text{carbono-}14$ original al nuevo y no radiactivo $\text{nitrógeno}14$. Si tenemos 100 g $\text{carbono-}14$ hoy, cuánto quedará en 50 años? Si un artefacto que originalmente contenía 100 g de carbono contiene ahora 10 g de carbono, ¿qué edad tiene? Redondee la respuesta a la centena de años más cercana.

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned} 5730 &= \frac{\ln 2}{k} \\ k &= \frac{\ln 2}{5730}. \end{aligned}$$

Entonces, el modelo dice

$$y = 100e^{-(\ln 2/5730)t}.$$

En 50 años, tenemos

$$\begin{aligned} y &= 100e^{-(\ln 2/5730)(50)} \\ &\approx 99{,}40. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en 50 años, $99{,}40$ g de $\text{carbono-}14$ permanecerán.

Para determinar la edad del artefacto, debemos resolver

$$\begin{aligned} 10 &= 100e^{-(\ln 2/5730)t} \\ \frac{1}{10} &= e^{-(\ln 2/5730)t} \\ t &\approx 19.035. \end{aligned}$$

El artefacto tiene aproximadamente 19.000 años.

6.46 Si tenemos 100 g de $\text{carbono-}14$, ¿cuánto queda después de t años? Si un artefacto que originalmente contenía 100 g de carbono contiene ahora $20g$ de carbono, ¿cuántos años tiene? Redondee la respuesta a la centena de años más cercana.

SECCIÓN 6.8 EJERCICIOS

¿Verdadero o falso? Si es cierto, demuéstrelo. Si es falso, halle la respuesta correcta.

348. El tiempo de duplicación para $y = e^{ct}$ ¿es $(\ln\ (2))\,/\,(\ln\ (c))$.

349. Si invierte $\$500$, a una tasa de interés anual de $3\ \%$ obtiene más dinero en el primer año que a $2{,}5\ \%$ de interés continuo.

350. Si deja una tetera a $100°\mathrm{C}$ a temperatura ambiente $(25°\mathrm{C})$ y una olla idéntica en el refrigerador $(5°\mathrm{C})$, con la $k = 0{,}02$, el té en el refrigerador alcanza una temperatura potable $(70°\mathrm{C})$ en más de 5 minutos antes que el té a temperatura ambiente.

351. Dada una vida media de t años, la constante k por $y = e^{kt}$ se calcula mediante $k = \ln\ (1/2)\,/t$.

En los siguientes ejercicios, utilice $y = y_0 e^{kt}$.

352. Si un cultivo de bacterias se duplica en 3 horas, ¿cuántas horas se tarda para multiplicarse por 10?

353. Si las bacterias se multiplican por 10 en 10 horas, ¿cuántas horas necesitan para aumentar por 100?

354. ¿Qué antigüedad tiene un cráneo que contiene la quinta parte de radiocarbono de un cráneo moderno? Tenga en cuenta que la vida media del radiocarbono es 5730 años.

355. Si una reliquia contiene el $90\ \%$ de radiocarbono que contendría un material nuevo, ¿podría proceder de la época de Cristo (hace aproximadamente 2000 años)? Tenga en cuenta que la vida media del radiocarbono es 5730 años.

356. La población de El Cairo creció de 5 millones a 10 millones en 20 años. Utilice un modelo exponencial para encontrar en qué momento la población fue de 8 millones de dólares.

357. Las poblaciones de Nueva York y Los Ángeles crecen a $1\ \%$ y $1{,}4\ \%$ al año, respectivamente. A partir de 8 millones (Nueva York) y 6 millones (Los Ángeles), ¿cuándo se igualan las poblaciones?

358. Supongamos que el valor de $\$1$ en yenes japoneses disminuye en $2\ \%$ por año. A partir de $\$1 = ¥250$, ¿cuándo serán $\$1 = ¥1$?

359. El efecto de la publicidad decrece exponencialmente. Si los valores de $40\ \%$ de la población recuerda un nuevo producto después de 3 días, ¿cuánto tiempo el $20\ \%$ lo recordará?

360. Si los valores de $y = 1.000$ a las $t = 3$ y $y = 3.000$ a las $t = 4$, ¿cuál era y_0 en $t = 0$?

361. Si $y = 100$ a las $t = 4$ en tanto que $y = 10$ a las $t = 8$, ¿cuándo es $y = 1$?

362. Si un banco ofrece un interés anual de $7{,}5\ \%$ o un interés continuo de $7{,}25\ \%$, ¿cuál tiene el mejor rendimiento anual?

363. ¿Qué tipo de interés continuo tiene el mismo rendimiento que un interés anual de $9\ \%$?

364. Si deposita $\$5.000$ al $8\ \%$ interés anual, en cuántos años se puede retirar $\$500$ (a partir del primer año) sin quedarse sin dinero?

365. Usted está tratando de ahorrar $\$50\ 000$ en 20 años para la matrícula universitaria de su hijo. Si se trata de un interés continuo al $10\ \%$, ¿cuál es el monto de la inversión inicial?

366. Usted está enfriando un pavo que al sacarlo del horno tenía una temperatura interna de $165°\mathrm{F}$. Después de 10 minutos de reposo del pavo en un apartamento a $70\ °\mathrm{F}$ su temperatura alcanza $155°\mathrm{F}$. ¿Cuál es la temperatura del pavo 20 minutos después de sacarlo del horno?

367. Está intentando descongelar unas verduras que están a una temperatura de $1°\mathrm{F}$. Para descongelar las verduras de forma segura, hay que ponerlas en el refrigerador, que tiene una temperatura de $44°\mathrm{F}$. Revisa sus verduras 2 horas después de ponerlas en el refrigerador para encontrar que ahora están a $12°\mathrm{F}$. Trace la curva de temperatura resultante y utilícela para determinar el momento en que las verduras alcanzan $33°\mathrm{F}$.

368. Es un arqueólogo y le dan un hueso que supuestamente es de un tiranosaurio Rex. Usted sabe que esos dinosaurios vivieron durante la Era Cretácea (146 millones de años a 65 millones de años), y descubre por la datación por radiocarbono que hay un $0{,}000001\ \%$ de radiocarbono. ¿El hueso es del Cretáceo?

369. El combustible que consume un reactor nuclear contiene plutonio-239, que tiene una vida media de 24.000 años. Si los valores de 1 barril que contiene $10\ \mathrm{kg}$ de plutonio-239 está sellado, ¿cuántos años deben pasar hasta que solo queden $10g$ de plutonio-239?

En la siguiente serie de ejercicios utilice la tabla correspondiente, que muestra la población mundial por décadas.

Fuente: http://www.factmonster.com/ipka/A0762181.html.

Años desde 1950	Población (millones)
0	2.556
10	3.039
20	3.706
30	4.453

Años desde 1950	Población (millones)
40	5.279
50	6.083
60	6.849

370. **[T]** La curva exponencial mejor ajustada a los datos de la forma $P(t) = ae^{bt}$ viene dada por $P(t) = 2.686e^{0,01604t}$. Utilice una calculadora gráfica para graficar los datos y la curva exponencial juntos.

371. **[T]** Calcule y grafique la derivada y' de su ecuación. ¿Dónde aumenta y qué significa este aumento?

372. **[T]** Calcule y grafique la segunda derivada de su ecuación. ¿Dónde aumenta y qué significa este aumento?

373. **[T]** Halle la fecha prevista en la que la población alcanza 10 mil millones. Utilizando sus respuestas anteriores sobre la primera y la segunda derivada, explique por qué el crecimiento exponencial no sirve para predecir el futuro.

En la siguiente serie de ejercicios utilice la tabla correspondiente, que muestra la población de San Francisco en el siglo XIX.

Fuente: http://www.sfgenealogy.com/sf/history/hgpop.htm.

Años desde 1850	Población (miles)
0	21,00
10	56,80
20	149,5
30	234,0

374. **[T]** La curva exponencial mejor ajustada a los datos de la forma $P(t) = ae^{bt}$ viene dada por $P(t) = 35{,}26e^{0{,}06407t}$. Utilice una calculadora gráfica para graficar los datos y la curva exponencial juntos.

375. **[T]** Calcule y grafique la derivada y' de su ecuación. ¿Dónde está aumentando? ¿Qué significa este aumento? ¿Hay algún valor en el que el aumento sea máximo?

376. **[T]** Calcule y grafique la segunda derivada de su ecuación. ¿Dónde está aumentando? ¿Qué significa este aumento?

6.9 Cálculo de las funciones hiperbólicas

Objetivos de aprendizaje

6.9.1 Aplicar las fórmulas de las derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas.
6.9.2 Aplicar las fórmulas de las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas y sus integrales asociadas.
6.9.3 Describir las condiciones habituales de aplicación de una curva catenaria.

En Introducción a funciones y gráficos se presentaron las funciones hiperbólicas, junto con algunas de sus propiedades básicas. En esta sección veremos las fórmulas de diferenciación e integración de las funciones hiperbólicas y sus inversas.

Derivadas e integrales de las funciones hiperbólicas

Recordemos que el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico se definen como

$$\text{senoh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ y } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Las otras funciones hiperbólicas se definen entonces en términos de $\text{senoh}\, x$ y $\cosh x$. Los gráficos de las funciones hiperbólicas se muestran en la siguiente figura.

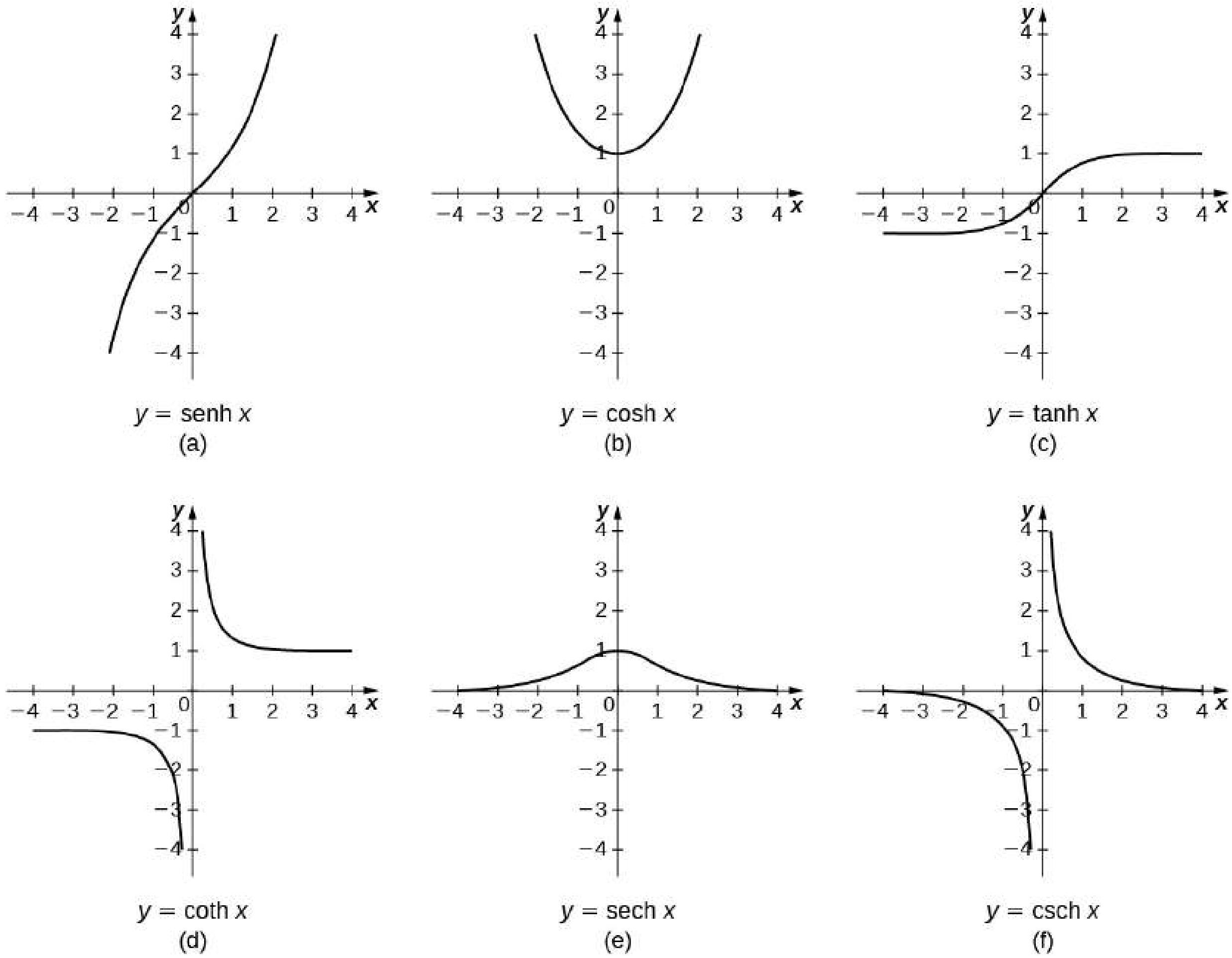


Figura 6.81 Gráficos de las funciones hiperbólicas.

Es fácil desarrollar fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas. Por ejemplo, si se observa $\text{senoh}\ x$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\text{senoh}\ x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(e^{-x})\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right] = \cosh x.\end{aligned}$$

De la misma manera, $(d/dx)\cosh x = \text{senoh}\ x$. Resumimos las fórmulas de diferenciación de las funciones hiperbólicas en la siguiente tabla.

$f(x)$ **grandes.**	$\frac{d}{dx}f(x)$ **grandes.**
$\text{senoh}\ x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\text{senoh}\ x$
$\tanh x$	$\text{sech}^2\ x$
$\coth x$	$-\text{csch}^2\ x$
$\text{sech}\ x$	$-\text{sech}\ x \tanh x$

Tabla 6.2 Derivadas de las funciones hiperbólicas

$f(x)$ grandes.	$\frac{d}{dx} f(x)$ grandes.
$\text{csch}\, x$	$-\text{csch}\, x \coth x$

Tabla 6.2 Derivadas de las funciones hiperbólicas

Comparemos las derivadas de las funciones hiperbólicas con las derivadas de las funciones trigonométricas estándar. Hay muchas similitudes, pero también diferencias. Por ejemplo, las derivadas de las funciones seno coinciden: $(d/dx)\,\text{sen}\, x = \cos x$ y $(d/dx)\,\text{senoh}\, x = \cosh x$. Las derivadas de las funciones coseno, sin embargo, difieren en el signo: $(d/dx) \cos x = -\text{sen}\, x$, pero $(d/dx) \cosh x = \text{senoh}\, x$. A medida que continuamos nuestro examen de las funciones hiperbólicas, debemos tener en cuenta sus similitudes y diferencias con las funciones trigonométricas estándar.

Estas fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas conducen directamente a las siguientes fórmulas integrales.

$$\begin{aligned}
\int \text{senoh}\, u\, du &= \cosh u + C & \int \text{csch}^2\, u\, du &= -\coth u + C \\
\int \cosh u\, du &= \text{senoh}\, u + C & \int \text{sech}\, u \tanh u\, du &= -\text{sech}\, u + C \\
\int \text{sech}^2 u\, du &= \tanh u + C & \int \text{csch}\, u \coth u\, du &= -\text{csch}\, u + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6.47

Diferenciación de funciones hiperbólicas

Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\text{senoh}\left(x^2\right)\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}(\cosh x)^2$

Solución

Utilizando las fórmulas de la Tabla 6.2 y la regla de la cadena, obtenemos

a. $\frac{d}{dx}\left(\text{senoh}\left(x^2\right)\right) = \cosh\left(x^2\right) .\, 2x$
b. $\frac{d}{dx}(\cosh x)^2 = 2 \cosh x\, \text{senoh}\, x$

6.47 Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(x^2 + 3x\right)\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(\text{senoh}\, x)^2}\right)$

EJEMPLO 6.48

Integrales con funciones hiperbólicas

Evalúe las siguientes integrales:

a. $\int x \cosh\left(x^2\right) dx$
b. $\int \tanh x\, dx$

Solución

Podemos utilizar la sustitución en *u* en ambos casos.

a. Supongamos que $u = x^2$. Entonces, $du = 2x\, dx$ y

$$\int x \cosh\left(x^2\right) dx = \int \frac{1}{2} \cosh u\, du = \frac{1}{2} \text{senoh}\, u + C = \frac{1}{2} \text{senoh}\left(x^2\right) + C.$$

b. Supongamos que $u = \cosh x$. Entonces, $du = \text{senoh}\, x\, dx$ y

$$\int \tanh x\, dx = \int \frac{\text{senoh}\, x}{\cosh x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\cosh x| + C.$$

Observe que $\cosh x > 0$ para todo x, por lo que podemos eliminar los signos de valor absoluto y obtener

$$\int \tanh x\, dx = \ln(\cosh x) + C.$$

6.48 Evalúe las siguientes integrales:

a. $\int \text{senoh}^3 x \cosh x\, dx$

b. $\int \text{sech}^2 (3x)\, dx$

Cálculo de funciones hiperbólicas inversas

Observando los gráficos de las funciones hiperbólicas, vemos que con las restricciones de rango adecuadas, todos tienen inversas. La mayoría de las restricciones de rango necesarias se pueden discernir examinando de cerca los gráficos. Los dominios y rangos de las funciones hiperbólicas inversas se resumen en la siguiente tabla.

Función	Dominio	Rango
$\text{senoh}^{-1} x$	$\left(-\infty, \infty\right)$ grandes.	$\left(-\infty, \infty\right)$ grandes.
$\cosh^{-1} x$	$\left[1, \infty\right)$ grandes.	$\left[0, \infty\right)$ grandes.
$\tanh^{-1} x$	$(-1, 1)$ grandes.	$\left(-\infty, \infty\right)$ grandes.
$\coth^{-1} x$	$\left(-\infty, -1\right) \cup \left(1, \infty\right)$ grandes.	$\left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)$ grandes.
$\text{sech}^{-1} x$	$(0, 1]$	$\left[0, \infty\right)$ grandes.
$\text{csch}^{-1} x$	$\left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)$ grandes.	$\left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)$

Tabla 6.3 Dominios y rangos de las funciones hiperbólicas inversas

Los gráficos de las funciones hiperbólicas inversas se muestran en la siguiente figura.

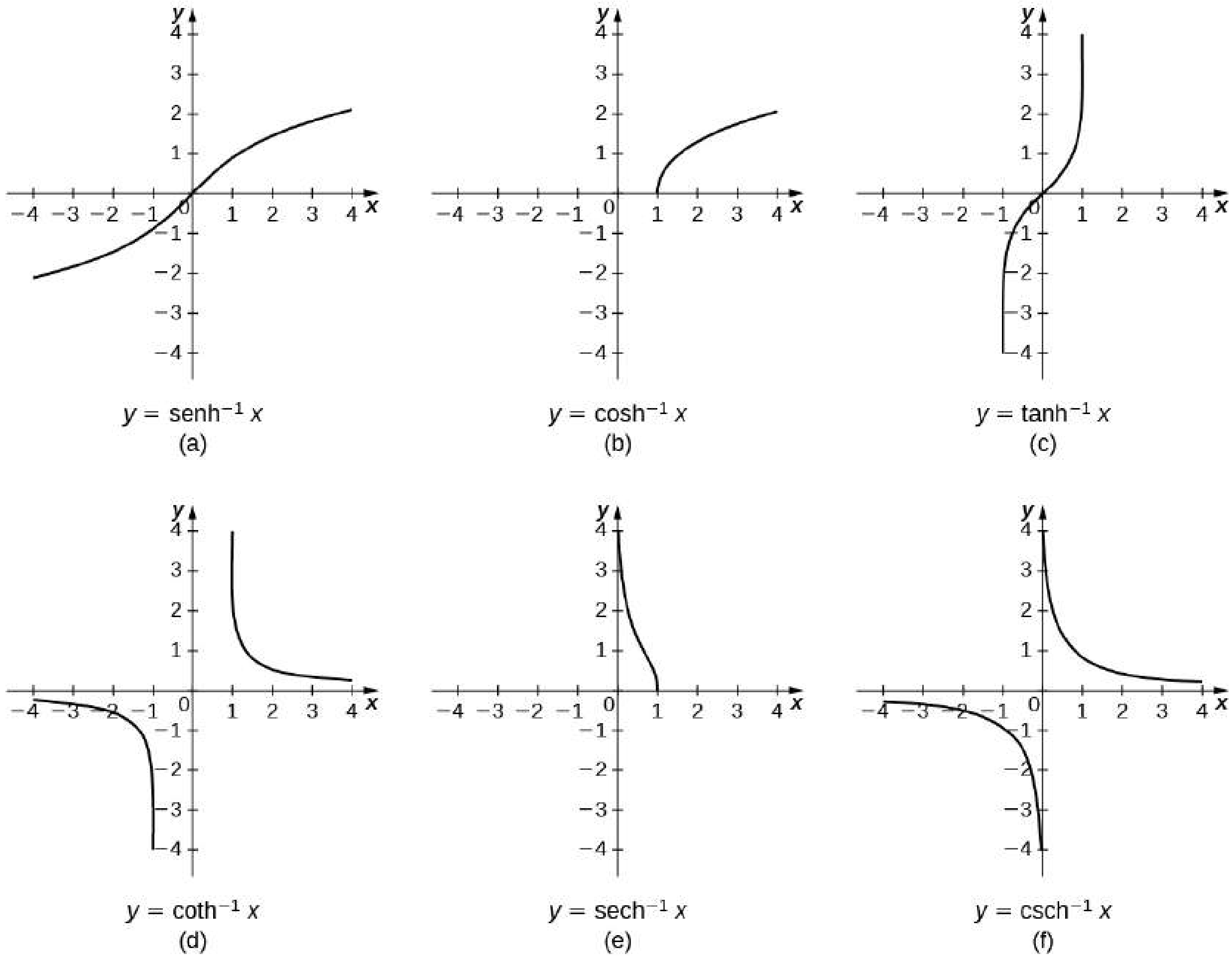


Figura 6.82 Gráficos de las funciones hiperbólicas inversas.

Para calcular las derivadas de las funciones inversas, utilizamos la diferenciación implícita. Tenemos

$$\begin{aligned} y &= \text{senoh}^{-1}\, x \\ \text{senoh}\, y &= x \\ \frac{d}{dx}\text{senoh}\, y &= \frac{d}{dx}x \\ \cosh y\frac{dy}{dx} &= 1. \end{aligned}$$

Recordemos que $\cosh^2 y - \text{senoh}^2 y = 1$, por lo que $\cosh y = \sqrt{1 + \text{senoh}^2 y}$. Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{senoh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Podemos derivar fórmulas de diferenciación para las otras funciones hiperbólicas inversas de forma similar. Estas fórmulas de diferenciación se resumen en la siguiente tabla.

$f(x)$ **grandes.**	$\frac{d}{dx}f(x)$ **grandes.**
$\text{senoh}^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Tabla 6.4 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

$f(x)$ grandes.	$\frac{d}{dx}f(x)$ grandes.
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\coth^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\text{sech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\text{csch}^{-1} x$	$\frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$

Tabla 6.4 Derivadas de las funciones hiperbólicas inversas

Observe que las derivadas de $\tanh^{-1} x$ y $\coth^{-1} x$ son los mismos. Así, cuando integramos $1/\left(1-x^2\right)$, tenemos que seleccionar la antiderivada adecuada en función del dominio de las funciones y de los valores de x. Las fórmulas de integración que involucran a las funciones hiperbólicas inversas se resumen de la siguiente manera.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \text{senoh}^{-1} u + C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}du = -\text{sech}^{-1}|u| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}du = \cosh^{-1} u + C \qquad \int \frac{1}{u\sqrt{1+u^2}}du = -\text{csch}^{-1}|u| + C$$

$$\int \frac{1}{1-u^2}du = \begin{cases} \tanh^{-1} u + C \text{ si } |u| < 1 \\ \coth^{-1} u + C \text{ si } |u| > 1 \end{cases}$$

EJEMPLO 6.49

Diferenciación de funciones hiperbólicas inversas

Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\text{senoh}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right)^2$

Solución

Utilizando las fórmulas de la Tabla 6.4 y la regla de la cadena, obtenemos los siguientes resultados:

a. $\frac{d}{dx}\left(\text{senoh}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{1}{3\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}$
b. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right)^2 = \frac{2\left(\tanh^{-1} x\right)}{1-x^2}$

6.49 Evalúe las siguientes derivadas:

a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}(3x)\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right)^3$

EJEMPLO 6.50

Integrales con funciones hiperbólicas inversas

Evalúe las siguientes integrales:

a. $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}dx$

b. $\int \frac{1}{2x\sqrt{1-9x^2}}dx$

Solución

Podemos utilizar la sustitución en u en ambos casos.

a. Supongamos que $u = 2x$. Entonces, $du = 2dx$ y tenemos

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-1}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{u^2-1}}du = \frac{1}{2}\cosh^{-1} u + C = \frac{1}{2}\cosh^{-1}(2x) + C.$$

b. Supongamos que $u = 3x$. Entonces, $du = 3dx$ y obtenemos

$$\int \frac{1}{2x\sqrt{1-9x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}du = -\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{-1}|u| + C = -\frac{1}{2}\operatorname{sech}^{-1}|3x| + C.$$

6.50 Evalúe las siguientes integrales:

a. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx, \quad x > 2$

b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

Aplicaciones

Una aplicación física de las funciones hiperbólicas es la de los cables colgantes. Si un cable de densidad uniforme está suspendido entre dos soportes sin más carga que su propio peso, el cable forma una curva llamada **catenaria**. Los cables de alto voltaje, las cadenas que cuelgan entre dos postes y los hilos de una tela de araña forman catenarias. La siguiente figura muestra cadenas que cuelgan de una fila de postes.

Figura 6.83 Las cadenas entre estos postes adoptan la forma de una catenaria (créditos: modificación del trabajo de OKFoundryCompany, Flickr).

Las funciones hiperbólicas pueden utilizarse para modelar catenarias. En concreto, las funciones de la forma $y = a\cosh(x/a)$ son catenarias. La Figura 6.84 muestra el gráfico de $y = 2\cosh(x/2)$.

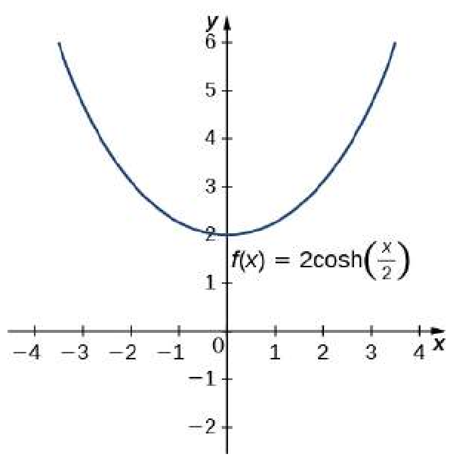


Figura 6.84 Una función coseno hiperbólico tiene la forma de una catenaria.

EJEMPLO 6.51

Uso de una catenaria para calcular la longitud de un cable

Supongamos que un cable colgante tiene la forma $10\cosh(x/10)$ por $-15 \leq x \leq 15$, donde x se mide en pies. Determine la longitud del cable (en pies).

Solución

Recuerde de la sección 2.4 que la fórmula de la longitud de arco es

$$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx.$$

Tenemos $f(x) = 10 \cosh(x/10)$, por lo que $f'(x) = \operatorname{senoh}(x/10)$. Entonces

$$\begin{aligned} \text{Longitud de arco} &= \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx \\ &= \int_{-15}^{15} \sqrt{1 + \operatorname{senoh}^2\left(\frac{x}{10}\right)}\, dx. \end{aligned}$$

Recordemos que $1 + \operatorname{senoh}^2 x = \cosh^2 x$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} \text{Longitud de arco} &= \int_{-15}^{15} \sqrt{1 + \operatorname{senoh}^2\left(\frac{x}{10}\right)}\, dx \\ &= \int_{-15}^{15} \cosh\left(\tfrac{x}{10}\right) dx \\ &= 10 \operatorname{senoh}\left(\tfrac{x}{10}\right)\Big|_{-15}^{15} = 10\left[\operatorname{senoh}\left(\tfrac{3}{2}\right) - \operatorname{senoh}\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right] = 20 \operatorname{senoh}\left(\tfrac{3}{2}\right) \\ &\approx 42{,}586 \text{ pies.} \end{aligned}$$

6.51 Supongamos que un cable colgante tiene la forma $15 \cosh(x/15)$ por $-20 \le x \le 20$. Determine la longitud del cable (en pies).

SECCIÓN 6.9 EJERCICIOS

377. **[T]** Halle expresiones para $\cosh x + \operatorname{senoh} x$ y $\cosh x - \operatorname{senoh} x$. Utilice una calculadora para representar gráficamente estas funciones y asegúrese de que su expresión sea correcta.

378. A partir de las definiciones de $\cosh(x)$ y $\operatorname{senoh}(x)$, calcule sus antiderivadas.

379. Demuestre que $\cosh(x)$ y $\operatorname{senoh}(x)$ satisfacen $y'' = y$.

380. Utilice la regla del cociente para verificar que $\tanh(x)' = \operatorname{sech}^2(x)$.

381. Derive $\cosh^2(x) + \operatorname{senoh}^2(x) = \cosh(2x)$ de la definición.

382. Tome la derivada de la expresión anterior para hallar una expresión para $\operatorname{senoh}(2x)$.

383. Pruebe que $\operatorname{senoh}(x + y) = \operatorname{senoh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senoh}(y)$ cambiando la expresión a exponenciales.

384. Tome la derivada de la expresión anterior para hallar una expresión para $\cosh(x + y)$.

En los siguientes ejercicios, calcule las derivadas de las funciones y gráfico dados junto con la función para garantizar que su respuesta sea correcta.

385. **[T]** $\cosh(3x + 1)$ grandes.

386. **[T]** $\operatorname{senoh}\left(x^2\right)$

387. **[T]** $\frac{1}{\cosh(x)}$ grandes.

388. **[T]** $\operatorname{senoh}(\ln(x))$

389. **[T]** $\cosh^2(x) + \operatorname{senoh}^2(x)$ grandes.

390. **[T]** $\cosh^2(x) - \operatorname{senoh}^2(x)$

391. **[T]** $\tanh\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ grandes.

392. **[T]** $\frac{1+\tanh(x)}{1-\tanh(x)}$

393. **[T]** $\operatorname{senoh}^6(x)$ grandes.

394. **[T]** $\ln(\operatorname{sech}(x) + \tanh(x))$

En los siguientes ejercicios, calcule las antiderivadas de las funciones dadas.

395. $\cosh(2x+1)$ grandes.

396. $\tanh(3x+2)$ grandes.

397. $x\cosh\left(x^2\right)$ grandes.

398. $3x^3\tanh\left(x^4\right)$ grandes.

399. $\cosh^2(x)\operatorname{senoh}(x)$ grandes.

400. $\tanh^2(x)\operatorname{sech}^2(x)$ grandes.

401. $\frac{\operatorname{senoh}(x)}{1+\cosh(x)}$ grandes.

402. $\coth(x)$ grandes.

403. $\cosh(x) + \operatorname{senoh}(x)$ grandes.

404. $(\cosh(x) + \operatorname{senoh}(x))^n$

En los siguientes ejercicios, calcule las derivadas de las funciones.

405. $\tanh^{-1}(4x)$ grandes.

406. $\operatorname{senoh}^{-1}\left(x^2\right)$ grandes.

407. $\operatorname{senoh}^{-1}(\cosh(x))$ grandes.

408. $\cosh^{-1}\left(x^3\right)$ grandes.

409. $\tanh^{-1}(\cos(x))$ grandes.

410. $e^{\operatorname{senoh}^{-1}(x)}$ grandes.

411. $\ln\left(\tanh^{-1}(x)\right)$ grandes.

En los siguientes ejercicios, calcule las antiderivadas de las funciones.

412. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-x^2}$

413. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

414. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

415. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$

416. $\displaystyle\int -\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

417. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

418. $\displaystyle\int -\frac{2x}{x^4-1}$

En los siguientes ejercicios, utilice el hecho de que un cuerpo que cae con fricción igual a la velocidad al cuadrado obedece a la ecuación $dv/dt = g - v^2$.

419. Demuestre que $v(t) = \sqrt{g}\tanh\left(\left(\sqrt{g}\right)t\right)$ satisface esta ecuación.

420. Derive la expresión anterior para $v(t)$ integrando $\frac{dv}{g-v^2} = dt$.

421. **[T]** Estime la caída de un cuerpo en 12 segundos calculando el área bajo la curva de $v(t)$.

En los siguientes ejercicios, utilice este escenario: Un cable que cuelga por su propio peso tiene una pendiente $S = dy/dx$ que satisface $dS/dx = c\sqrt{1 + S^2}$. La constante c es la relación entre la densidad del cable y la tensión.

422. Demuestre que $S = \text{senoh}(cx)$ satisface esta ecuación.

423. Integre $dy/dx = \text{senoh}(cx)$ para calcular la altura del cable $y(x)$ si $y(0) = 1/c$.

424. Haga un dibujo del cable y determine hasta qué punto se hunde en $x = 0$.

En los siguientes ejercicios, resuelva cada problema.

425. **[T]** Una cadena cuelga de dos postes que tienen 2 m de separación para formar una catenaria descrita por la ecuación $y = 2\cosh(x/2) - 1$. Calcule la pendiente de la catenaria en el poste de la valla de la izquierda.

426. **[T]** Una cadena cuelga de dos postes que tienen cuatro metros de separación para formar una catenaria descrita por la ecuación $y = 4\cosh(x/4) - 3$. Calcule la longitud total de la catenaria (longitud de arco).

427. **[T]** Una línea eléctrica de alto voltaje es una catenaria descrita por $y = 10\cosh(x/10)$. Calcule la relación entre el área bajo la catenaria y su longitud de arco. ¿Qué observa?

428. Una línea telefónica es una catenaria descrita por $y = a\cosh(x/a)$. Calcule la relación entre el área bajo la catenaria y su longitud de arco. ¿Confirma esto su respuesta a la pregunta anterior?

429. Demuestre la fórmula de la derivada de $y = \text{senoh}^{-1}(x)$ diferenciando $x = \text{senoh}(y)$. (*Pista:* Utilice las identidades trigonométricas hiperbólicas).

430. Demuestre la fórmula de la derivada de $y = \cosh^{-1}(x)$ diferenciando $x = \cosh(y)$.

(*Pista:* Utilice las identidades trigonométricas hiperbólicas).

431. Demuestre la fórmula de la derivada de $y = \text{sech}^{-1}(x)$ diferenciando $x = \text{sech}(y)$. (*Pista:* Utilice las identidades trigonométricas hiperbólicas).

432. Compruebe que $(\cosh(x) + \text{senoh}(x))^n = \cosh(nx) + \text{senoh}(nx)$.

433. Demuestre la expresión para $\text{senoh}^{-1}(x)$. Multiplique $x = \text{senoh}(y) = (1/2)\left(e^y + e^{-y}\right)$ entre $2e^y$, a la vez que resolvemos para y. ¿Coincide su expresión con el libro de texto?

434. Demuestre la expresión para $\cosh^{-1}(x)$. Multiplique $x = \cosh(y) = (1/2)\left(e^y - e^{-y}\right)$ entre $2e^y$, a la vez que resolvemos para y. ¿Coincide su expresión con el libro de texto?

Revisión del capítulo

Términos clave

área superficial el área superficial de un sólido es el área total de la capa exterior del objeto; en objetos como cubos o ladrillos, el área superficial del objeto es la suma de las áreas de todas sus caras

catenaria una curva con la forma de la función $y = a\cosh(x/a)$ es una catenaria; un cable de densidad uniforme suspendido entre dos soportes adopta la forma de una catenaria

centro de masa punto en el que la masa total del sistema podría concentrarse sin cambiar el momento

centroide el centroide de una región es el centro geométrico de la región; las láminas se representan a menudo por regiones en el plano; si la lámina tiene una densidad constante, el centro de masa de la lámina depende solo de la forma de la región plana correspondiente; en este caso, el centro de masa de la lámina corresponde al centroide de la región representativa

crecimiento exponencial los sistemas que presentan un crecimiento exponencial siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{kt}$

decrecimiento exponencial los sistemas que presentan un decrecimiento exponencial siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{-kt}$

función de densidad función que describe cómo se distribuye la masa en un objeto; puede ser una densidad lineal, expresada en términos de masa por unidad de longitud; una densidad de área, expresada en términos de masa por unidad de área; o una densidad de volumen, expresada en términos de masa por unidad de volumen; la densidad de peso también se utiliza para describir el peso (en vez de la masa) por unidad de volumen

lámina lámina fina de material; las láminas son lo suficientemente finas para que, a efectos matemáticos, puedan tratarse como si fueran bidimensionales

Ley de Hooke ley que establece que la fuerza necesaria para comprimir (o alargar) un resorte es proporcional a la distancia que el resorte se ha comprimido (o estirado) desde el equilibrio; en otras palabras, $F = kx$, donde k es una constante

longitud del arco la longitud del arco de una curva puede considerarse como la distancia que recorrería una persona a lo largo de la trayectoria de la curva

método de las arandelas caso especial del método de las rebanadas que se utiliza con sólidos de revolución cuando los cortes son arandelas

método de las capas cilíndricas método para calcular el volumen de un sólido de revolución dividiéndolo en capas cilíndricas anidadas; este método se diferencia de los métodos de los discos o de las arandelas en que integramos con respecto a la variable opuesta

método de las rebanadas método de cálculo del volumen de un sólido que consiste en cortarlo en rebanadas, calcular el volumen de cada una y luego sumar los volúmenes para obtener un estimado del volumen total; a medida que el número de rebanadas llega al infinito, esta estimación se convierte en una integral que da el valor exacto del volumen

método de los discos caso especial del método de las rebanadas utilizado con sólidos de revolución cuando los cortes son discos

momento si se disponen *n* masas en una línea numérica, el momento del sistema respecto al origen viene dado por $M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$; si, en cambio, consideramos una región en el plano, limitada por encima por una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, entonces los momentos de la región con respecto a los ejes *x* y *y* vienen dados por $M_x = \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx$ y $M_y = \rho \int_a^b x f(x) dx$, respectivamente

presión hidrostática presión ejercida por el agua sobre un objeto sumergido

principio de simetría este principio establece que si una región *R* es simétrica respecto a una línea *l*, el centroide de *R* se encuentra en *l*

sección transversal la intersección de un plano y un objeto sólido

semivida si una cantidad decrece exponencialmente, la vida media es el tiempo que dicha cantidad tarda en reducirse a la mitad. Viene dado por $(\ln 2)/k$

sólido de revolución sólido generado al girar una región en un plano alrededor de una línea en ese plano

teorema de Pappus para el volumen teorema que afirma que el volumen de un sólido de revolución formado al girar una región alrededor de un eje externo es igual al área de la región multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de la región

tiempo de duplicación si una cantidad crece exponencialmente, el tiempo de duplicación es el tiempo que tarda la cantidad en duplicarse, y viene dado por $(\ln 2)/k$

trabajo la cantidad de energía que se necesita para mover un objeto; en física, cuando una fuerza es constante, el trabajo se expresa como el producto de la fuerza por la distancia

tronco porción de un cono; se construye cortando el cono con un plano paralelo a la base

Ecuaciones clave

Área entre dos curvas, integrando en el eje *x*	$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$
Área entre dos curvas, integrando en el eje *y*	$A = \int_c^d [u(y) - v(y)]\, dy$

Método de los discos a lo largo del eje *x*	$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$
Método de los discos a lo largo del eje *y*	$V = \int_c^d \pi [g(y)]^2 dy$
Método de las arandelas	$V = \int_a^b \pi \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx$

Método de las capas cilíndricas	$V = \int_a^b (2\pi x f(x))\, dx$

Longitud de arco de una función de *x*	$\text{Longitud de arco} = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx$
Longitud de arco de una función de *y*	$\text{Longitud de arco} = \int_c^d \sqrt{1 + \left[g'(y)\right]^2}\, dy$
Superficie de una función de *x*	$\text{Superficie} = \int_a^b \left(2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \right) dx$

Masa de un objeto unidimensional	$m = \int_a^b \rho(x) dx$
Masa de un objeto circular	$m = \int_0^r 2\pi x \rho(x) dx$
Trabajo realizado sobre un objeto	$W = \int_a^b F(x) dx$
Fuerza hidrostática sobre una placa	$F = \int_a^b \rho w(x) s(x) dx$

Masa de una lámina	$m=\rho\int_a^b f(x)dx$
Momentos de una lámina	$M_x=\rho\int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2}dx$ y $M_y=\rho\int_a^b xf(x)dx$
Centro de masa de una lámina	$\overline{x}=\frac{M_y}{m}$ y $\overline{y}=\frac{M_x}{m}$

Función logarítmica natural	$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$ Z
Función exponencial $y=e^x$	$\ln y=\ln(e^x)=x$ Z

Conceptos clave

6.1 Áreas entre curvas

- Al igual que las integrales definidas pueden utilizarse para encontrar el área bajo una curva, también pueden utilizarse para encontrar el área entre dos curvas.
- Para encontrar el área entre dos curvas definidas por funciones, integre la diferencia de las funciones.
- Si los gráficos de las funciones se intersecan, o si la región es compleja, utilice el valor absoluto de la diferencia de las funciones. En este caso, puede ser necesario evaluar dos o más integrales y sumar los resultados para encontrar el área de la región.
- A veces puede ser más fácil integrar con respecto a y para encontrar el área. Los principios son los mismos independientemente de la variable que se utilice como variable de integración.

6.2 Determinar los volúmenes mediante el corte

- Las integrales definidas pueden utilizarse para hallar los volúmenes de los sólidos. Utilizando el método de las rebanadas, podemos encontrar un volumen integrando el área de la sección transversal.
- En los sólidos de revolución, los cortes de volumen suelen ser discos y las secciones transversales son círculos. El método de los discos consiste en aplicar el método de las rebanadas en el caso particular de que las secciones transversales sean círculos, y en utilizar la fórmula del área de un círculo.
- Si un sólido de revolución tiene una cavidad en el centro, los cortes de volumen son arandelas. Con el método de las arandelas, el área del círculo interior se resta del área del círculo exterior antes de integrarlo.

6.3 Volúmenes de revolución: capas cilíndricas

- El método de las capas cilíndricas es otro método para utilizar una integral definida para calcular el volumen de un sólido de revolución. En ocasiones este método es preferible al de los discos o al de las arandelas porque integramos con respecto a la otra variable. En algunos casos, una integral es bastante más complicada que la otra.
- La geometría de las funciones y la dificultad de la integración son los principales factores para decidir qué método de integración utilizaremos.

6.4 Longitud del arco de una curva y superficie

- La longitud de arco de una curva se puede calcular mediante una integral definida.
- La longitud de arco se aproxima primero mediante segmentos de línea, lo que genera una suma de Riemann. Tomando un límite nos da la fórmula de la integral definida. El mismo proceso puede aplicarse a las funciones de y.
- Los conceptos utilizados para calcular la longitud de arco pueden generalizarse para hallar el área superficial de una superficie de revolución.
- Las integrales generadas por las fórmulas de longitud de arco y área superficial suelen ser difíciles de evaluar. Puede ser necesario utilizar una computadora o una calculadora para aproximar los valores de las integrales.

6.5 Aplicaciones físicas

- Varias aplicaciones físicas de la integral definida son comunes en ingeniería y física.
- Las integrales definidas pueden utilizarse para determinar la masa de un objeto si se conoce su función de

densidad.
- El trabajo también se puede calcular al integrar una función de fuerza, o al contrarrestar la fuerza de la gravedad, como en un problema de bombeo.
- Las integrales definidas también pueden utilizarse para calcular la fuerza ejercida sobre un objeto sumergido en un líquido.

6.6 Momentos y centros de masa

- Matemáticamente, el centro de masa de un sistema es el punto en el que podría concentrarse la masa total del sistema sin cambiar el momento. En términos generales, el centro de masa puede considerarse el punto de equilibrio del sistema.
- Para masas puntuales distribuidas a lo largo de una línea numérica, el momento del sistema respecto al origen es $M = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$. En lo concerniente a las masas puntuales distribuidas en un plano, los momentos del sistema con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, son $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i$ y $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$, respectivamente.
- Para una lámina limitada por encima por una función $f(x)$, los momentos del sistema con respecto a los ejes *x* y *y*, respectivamente, son $M_x = \rho \int_a^b \frac{[f(x)]^2}{2} dx$ y $M_y = \rho \int_a^b x f(x) dx$.
- Las coordenadas *x* y *y* del centro de masa se pueden hallar dividiendo los momentos alrededor de los ejes *y* y *x*, respectivamente, entre la masa total. El principio de simetría dice que si una región es simétrica con respecto a una línea, entonces el centroide de la región se encuentra en la línea.
- El teorema de Pappus para el volumen dice que si se hace girar una región alrededor de un eje externo, el volumen del sólido resultante es igual al área de la región multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de la región.

6.7 Integrales, funciones exponenciales y logaritmos

- El manejo anterior de los logaritmos y las funciones exponenciales no definía las funciones de forma precisa y formal. Esta sección desarrolla los conceptos de forma matemáticamente rigurosa.
- La piedra angular del desarrollo es la definición del logaritmo natural en términos de una integral.
- La función e^x se define entonces como la inversa del logaritmo natural.
- Las funciones exponenciales generales se definen en términos de e^x, y las correspondientes funciones inversas son logaritmos generales.
- Las propiedades conocidas de los logaritmos y los exponentes siguen siendo válidas en este contexto más riguroso.

6.8 Crecimiento y decaimiento exponencial

- El crecimiento y el decrecimiento exponencial son dos de las aplicaciones más comunes de las funciones exponenciales.
- Los sistemas que presentan un crecimiento exponencial siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{kt}$.
- En el crecimiento exponencial, la tasa de crecimiento es proporcional a la cantidad presente. En otras palabras, $y' = ky$.
- Los sistemas que presentan un crecimiento exponencial tienen un tiempo de duplicación constante, que viene dado por $(\ln 2)/k$.
- Los sistemas que presentan un decrecimiento exponencial siguen un modelo de la forma $y = y_0 e^{-kt}$.
- Los sistemas que presentan un decrecimiento exponencial tienen una vida media constante, que viene dada por $(\ln 2)/k$.

6.9 Cálculo de las funciones hiperbólicas

- Las funciones hiperbólicas se definen en términos de funciones exponenciales.
- La diferenciación término a término permite obtener fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas. Estas fórmulas de diferenciación dan lugar, a su vez, a fórmulas de integración.
- Con las restricciones de rango adecuadas, todas las funciones hiperbólicas tienen inversas.
- La diferenciación implícita da lugar a fórmulas de diferenciación para las funciones hiperbólicas inversas, que a su vez dan lugar a fórmulas de integración.
- Las aplicaciones físicas más comunes de las funciones hiperbólicas son los cálculos con catenarias.

Ejercicios de repaso

¿Verdadero o falso? Justifique su respuesta con una prueba o un contraejemplo.

435. La cantidad de trabajo para bombear el agua de un cilindro medio lleno es la mitad de la cantidad de trabajo para bombear el agua del cilindro lleno.

436. Si la fuerza es constante, la cantidad de trabajo para mover un objeto de $x = a$ a $x = b$ ¿es $F(b-a)$.

437. El método de disco puede utilizarse en cualquier situación en la que el método de las arandelas sirva para calcular el volumen de un sólido de revolución.

438. Si la semivida del seaborgio-266 ¿es 360 ms, entonces $k = (\ln(2))/360$.

En los siguientes ejercicios, utilice el método solicitado para determinar el volumen del sólido.

439. El volumen que tiene como base la elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$ y secciones transversales de un triángulo equilátero perpendicular al eje y. Utilice el método de rebanadas.

440. $y = x^2 - x$, de $x = 1$ para $x = 4$, girado alrededor del eje *y* mediante el método de las arandelas

441. $x = y^2$ y $x = 3y$ girado alrededor del eje *y* mediante el método de las arandelas

442. $x = 2y^2 - y^3, x = 0,$ y $y = 0$ girado alrededor del eje *x* mediante capas cilíndricas

En los siguientes ejercicios, calcule

a. el área de la región,
b. el volumen del sólido cuando se gira alrededor del eje *x*, y
c. el volumen del sólido cuando se gira alrededor del eje *y*. Utilice el método que le parezca más adecuado.

443. $y = x^3, x = 0, y = 0,$ y $x = 2$

444. $y = x^2 - x$ y $x = 0$

445. **[T]** $y = \ln(x) + 2$ y $y = x$

446. $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$

447. $y = 5 + x, y = x^2, x = 0,$ y $x = 1$

448. Por debajo de $x^2 + y^2 = 1$ y por encima de $y = 1 - x$

449. Encuentre la masa de $\rho = e^{-x}$ en un disco centrado en el origen con radio 4.

450. Halle el centro de masa para $\rho = \tan^2 x$ sobre $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

451. Calcule la masa y el centro de masa de $\rho = 1$ en la región delimitada por $y = x^5$ y la intersección $y = \sqrt{x}$.

En los siguientes ejercicios, calcule las longitudes de arco solicitadas.

452. La longitud de x por $y = \cosh(x)$ de $x = 0$ a $x = 2$.

453. La longitud de y para $x = 3 - \sqrt{y}$ a partir de $y = 0$ al $y = 4$

En los siguientes ejercicios, calcule el área superficial y el volumen cuando las curvas dadas giran alrededor del eje especificado.

454. La forma creada al girar la región entre $y = 4 + x$, $y = 3 - x$, $x = 0$, y $x = 2$ girado alrededor del eje *y*.

455. El altavoz creado por al girar $y = 1/x$ de $x = 1$ a $x = 4$ alrededor del eje *x*.

456. Para este ejercicio, consideremos la presa Karun-3 en Irán. Su forma puede aproximarse a la de un triángulo isósceles invertido que atraviesa el río, con una altura de 205 m y un ancho (en la parte superior de la presa) de 388 m. Supongamos que la profundidad actual del agua es de 180 m. La densidad del agua es de 1.000 kg/m^3. Calcule la fuerza total sobre la pared de la presa.

457. Usted es un investigador de la escena del crimen que intenta determinar la hora de la muerte de una víctima. Es mediodía y hace $45\ °\text{F}$ afuera y la temperatura del cuerpo es $78°\text{F}$. Sabe que la constante de enfriamiento es $k = 0{,}00824°\text{F/min}$. ¿Cuándo murió la víctima, suponiendo que la temperatura de un ser humano es $98°\text{F}$?

En el siguiente ejercicio, considere la caída de la bolsa en 1929 en Estados Unidos. La tabla muestra el promedio industrial del Dow Jones por año hasta la caída.

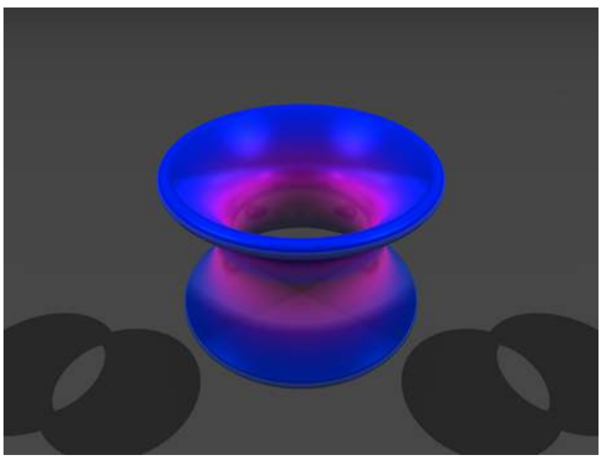
Fuente: http://stockcharts.com/freecharts/historical/djia19201940.html

Años después de 1920	Valor ($)
1	63,90
3	100
5	110
7	160
9	381,17

458. **[T]** La curva exponencial que mejor se ajusta a estos datos viene dada por $y = 40{,}71 + 1{,}224^x$. ¿Por qué cree que las ganancias del mercado fueron insostenibles? Utilice las derivadas primera y segunda para justificar su respuesta. ¿Cuál sería la predicción de este modelo para el promedio industrial de Dow Jones en 2014?

En los siguientes ejercicios, considera la catenoide, el único sólido de revolución que tiene una superficie mínima, o curvatura promedio de cero. Una catenoide en la naturaleza puede encontrarse al estirar el jabón entre dos anillos.

459. Calcule el volumen de la catenoide $y = \cosh(x)$ de $x = -1 \text{ para } x = 1$ que se crea al girar esta curva alrededor del eje x, como se muestra aquí.



460. Calcule el área superficial de la catenoide $y = \cosh(x)$ de $x = -1$ a $x = 1$ que se crea al girar esta curva alrededor del eje x .

A TABLA DE INTEGRALES

Integrales básicas

1. $\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$

3. $\int e^u \, du = e^u + C$

4. $\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

5. $\int \sin u \, du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C$

7. $\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$

8. $\int \csc^2 u \, du = -\cot u + C$

9. $\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$

10. $\int \csc u \cot u \, du = -\csc u + C$

11. $\int \tan u \, du = \ln |\sec u| + C$

12. $\int \cot u \, du = \ln |\sin u| + C$

13. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

14. $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + C$

15. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{u}{a} + C$

16. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$

Integrales trigonométricas

18. $\int \operatorname{sen}^2 u \, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C$

19. $\int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2u + C$

20. $\int \tan^2 u \, du = \tan u - u + C$

21. $\int \cot^2 u \, du = -\cot u - u + C$

22. $\int \text{sen}^3 u\, du = -\frac{1}{3}\left(2 + \text{sen}^2 u\right) \cos u + C$

23. $\int \cos^3 u\, du = \frac{1}{3}\left(2 + \cos^2 u\right) \sin u + C$

24. $\int \tan^3 u\, du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

25. $\int \cot^3 u\, du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$

26. $\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\sec u \tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

27. $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

28. $\int \sin^n u\, du = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u\, du$

29. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

30. $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$

31. $\int \cot^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

32. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

33. $\int \csc^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$

34. $\int \text{sen}\, au \sin bu\, du = \frac{\text{sen}\,(a-b)\,u}{2\,(a-b)} - \frac{\text{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

35. $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\text{sen}\,(a-b)\,u}{2\,(a-b)} + \frac{\text{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

36. $\int \text{sen}\, au \cos bu\, du = -\frac{\cos\,(a-b)\,u}{2\,(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

37. $\int u \sin u\, du = \text{sen}\, u - u \cos u + C$

38. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \sin u + C$

39. $\int u^n \sin u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1} \cos u\, du$

40. $\int u^n \cos u\, du = u^n \sin u - n\int u^{n-1} \sin u\, du$

41. $$\begin{aligned}\int \sin^n u \cos^m u\, du &= -\frac{\text{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} u \cos^m u\, du \\ &= \frac{\text{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n u \cos^{m-2} u\, du\end{aligned}$$

Integrales exponenciales y logarítmicas

42. $\int ue^{au}\, du = \frac{1}{a^2}(au - 1)\, e^{au} + C$

43. $\int u^n e^{au}\, du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au}\, du$

44. $\int e^{au} \sin bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \sin bu - b \cos bu) + C$

45. $\int e^{au} \cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \sin bu) + C$

46. $\int \ln u\, du = u \ln u - u + C$

47. $\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

48. $\int \frac{1}{u \ln u}\, du = \ln |\ln u| + C$

Integrales hiperbólicas

49. $\int \text{senoh}\, u\, du = \cosh u + C$

50. $\int \cosh u\, du = \text{senoh}\, u + C$

51. $\int \tanh u\, du = \ln \cosh u + C$

52. $\int \coth u\, du = \ln |\text{senoh}\, u| + C$

53. $\int \text{sech}\, u\, du = \tan^{-1} |\text{senoh}\, u| + C$

54. $\int \text{csch}\, u\, du = \ln \left|\tanh \frac{1}{2}u\right| + C$

55. $\int \text{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

56. $\int \text{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

57. $\int \text{sech}\, u \tanh u\, du = -\text{sech}\, u + C$

58. $\int \text{csch}\, u \coth u\, du = -\text{csch}\, u + C$

Integrales trigonométricas inversas

59. $\int \text{sen}^{-1} u\, du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

60. $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

61. $\int \tan^{-1} u\, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln \left(1+u^2\right) + C$

62. $\int u \sin^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

63. $\int u \cos^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

64. $\int u \tan^{-1} u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

65. $\int u^n \sin^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1} \sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$

66. $\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\, du}{\sqrt{1-u^2}}\right], n \neq -1$

67. $\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\, du}{1+u^2}\right], n \neq -1$

Integrales que implican $a^2 + u^2$, $a > 0$

68. $\int \sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

69. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\, du = \frac{u}{8}\left(a^2+2u^2\right)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

70. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

71. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

72. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

73. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\left(\sqrt{a^2+u^2}\right) - \frac{a^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{a^2+u^2}\right) + C$

74. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

75. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2 u} + C$

76. $\int \frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

Integrales que implican u^2 - a^2, $a > 0$

77. $\int \sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

78. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

79. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\, du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

80. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\, du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

81. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

82. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right| + C$

83. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2 u} + C$

84a. $\int \frac{du}{\left(u^2-a^2\right)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

84b. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Integrales que implican $a^2 - u^2$, $a > 0$

85. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

86. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}\left(2u^2-a^2\right)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

87. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

88. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

89. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

90. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

91. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

92. $\int \left(a^2-u^2\right)^{3/2}du = -\frac{u}{8}\left(2u^2-5a^2\right)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

93a. $\int \frac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

93b. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

Integrales que implican $2au - u^2$, $a > 0$

94. $\int \sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

95. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

96. $\int u\sqrt{2au-u^2}\,du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au-u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

97. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

Integrales que implican $a + bu$, $a \neq 0$

98. $\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}\left(a+bu-a\ln|a+bu|\right) + C$

99. $\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right] + C$

100. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

101. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

102. $\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a+bu| + C$

103. $\int \frac{u\,du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + C$

104. $\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln|a+bu|\right)+C$

105. $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}+C$

106. $\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+C$

107. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}\left(8a^2+3b^2u^2-4abu\right)\sqrt{a+bu}+C$

108. $$\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} \begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+C, \quad \text{si } a>0 \\ &= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan-1\sqrt{\frac{a+bu}{-a}}+C, \quad \text{si } a<0 \end{aligned}$$

109. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu}+a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

110. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u}+\frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

111. $\int u^n\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2}-na\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du\right]$

112. $\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)}-\frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

113. $\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}}-\frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

B TABLA DE DERIVADAS

Fórmulas generales

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
3. $\frac{d}{dx}(f(x)\, g(x)) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
4. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, para los números reales n
5. $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$
6. $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
8. $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Funciones trigonométricas

9. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x$
10. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
11. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
12. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x$
13. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
14. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

Funciones trigonométricas inversas

15. $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$
17. $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
18. $\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
19. $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$
20. $\frac{d}{dx}\left(\csc^{-1} x\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Funciones exponenciales y logarítmicas

21. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
22. $\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$
23. $\frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$
24. $\frac{d}{dx}\left(\log_b x\right) = \frac{1}{x \ln b}$

Funciones hiperbólicas

25. $\frac{d}{dx}(\operatorname{senoh} x) = \cosh x$
26. $\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$

27. $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$

28. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x$

29. $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$

30. $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

Funciones hiperbólicas inversas

31. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{senoh}^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

32. $\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2}(|x| < 1)$

33. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1} x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1)$

34. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$

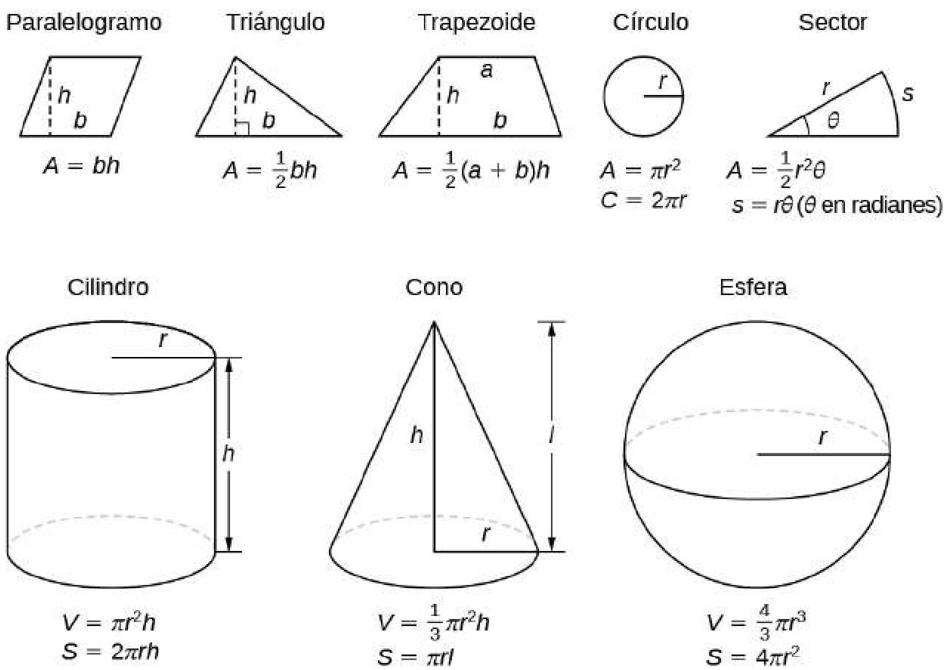
35. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right) = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$

36. $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1} x\right) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}\ (x \neq 0)$

C REPASO DE PRECÁLCULO

Fórmulas de geometría

Los términos $A = \text{área}$, $V = \text{Volumen}$, y $S = \text{área superficial lateral}$



Fórmulas de álgebra

Leyes de los exponentes

Los términos

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
x^m x^n & = & x^{m+n} & & \dfrac{x^m}{x^n} & = & x^{m-n} & & (x^m)^n & = & x^{mn} \\
x^{-n} & = & \dfrac{1}{x^n} & & (xy)^n & = & x^n y^n & & \left(\dfrac{x}{y}\right)^n & = & \dfrac{x^n}{y^n} \\
x^{1/n} & = & \sqrt[n]{x} & & \sqrt[n]{xy} & = & \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} & & \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} & = & \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \\
x^{m/n} & = & \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m & & & & & & & &
\end{array}$$

Factorizaciones especiales

Los términos

$$\begin{array}{rcl}
x^2 - y^2 & = & (x+y)(x-y) \\
x^3 + y^3 & = & (x+y)\left(x^2 - xy + y^2\right) \\
x^3 - y^3 & = & (x-y)\left(x^2 + xy + y^2\right)
\end{array}$$

Fórmula cuadrática

Si los valores de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ca}}{2a}$.

Teorema del binomio

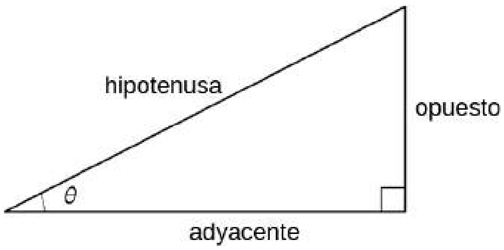
Los términos $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$,

donde $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Fórmulas de trigonometría

Trigonometría de ángulo recto

Los términos
$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} & \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}} \\ \cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} & \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}} \\ \tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} & \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \end{array}$$



Funciones trigonométricas de ángulos importantes

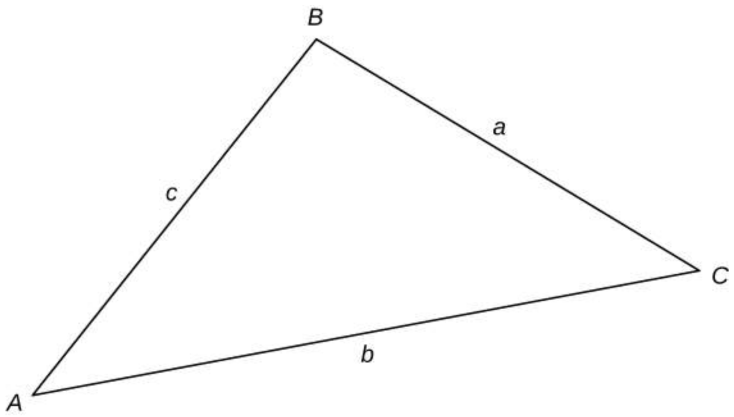
Los términos θ	Los términos Radianes	Los términos $\operatorname{sen}\theta$	Los términos $\cos\theta$	Los términos $\tan\theta$
Los términos $0°$	Los términos 0	Los términos 0	Los términos 1	Los términos 0
Los términos $30°$	Los términos $\pi/6$	Los términos $1/2$	Los términos $\sqrt{3}/2$	Los términos $\sqrt{3}/3$
Los términos $45°$	Los términos $\pi/4$	Los términos $\sqrt{2}/2$	Los términos $\sqrt{2}/2$	Los términos 1
Los términos $60°$	Los términos $\pi/3$	Los términos $\sqrt{3}/2$	Los términos $1/2$	Los términos $\sqrt{3}$
Los términos $90°$	Los términos $\pi/2$	Los términos 1	Los términos 0	—

Identidades fundamentales

Los términos
$$\begin{array}{rclrcl} \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta & = & 1 & \operatorname{sen}(-\theta) & = & -\operatorname{sen}\theta \\ 1 + \tan^2\theta & = & \sec^2\theta & \cos(-\theta) & = & \cos\theta \\ 1 + \cot^2\theta & = & \csc^2\theta & \tan(-\theta) & = & -\tan\theta \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & = & \cos\theta & \sin(\theta + 2\pi) & = & \operatorname{sen}\theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & = & \operatorname{sen}\theta & \cos(\theta + 2\pi) & = & \cos\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) & = & \cot\theta & \tan(\theta + \pi) & = & \tan\theta \end{array}$$

Ley de senos

Los términos $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$



Ley de los cosenos

Los términos
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

Fórmulas de suma y resta

Los términos
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\,(x+y) &= \operatorname{sen} x\cos y + \cos x \sin y \\ \sin\,(x-y) &= \operatorname{sen} x\cos y - \cos x \sin y \\ \cos\,(x+y) &= \cos x\cos y - \operatorname{sen} x \sin y \\ \cos\,(x-y) &= \cos x\cos y + \operatorname{sen} x \sin y \\ \tan\,(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\,\tan y} \\ \tan\,(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\,\tan y} \end{aligned}$$

Fórmulas del ángulo doble

Los términos
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2\operatorname{sen} x\cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \end{aligned}$$

Fórmulas de ángulo mitad

Los términos
$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

Clave de respuestas

Capítulo 1

Punto de control

1.1 $f(1) = 3$ y $f(a+h) = a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h + 5$

1.2 Dominio = $\{x | x \le 2\}$, rango = $\{y | y \ge 5\}$

1.3 $x = 0, 2, 3$

1.4 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+3}{2x-5}$. El dominio es $\left\{x | x \ne \frac{5}{2}\right\}$.

1.5 $(f \circ g)(x) = 2 - 5\sqrt{x}$.

1.6 $(g \circ f)(x) = 0{,}63x$

1.7 $f(x)$ es impar.

1.8 Dominio = $(-\infty, \infty)$, rango = $\{y | y \ge -4\}$.

1.9 $m = 1/2$. La forma punto pendiente es

$y - 4 = \frac{1}{2}(x-1)$.

La forma pendiente-intersección es

$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

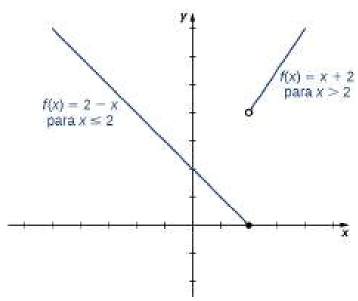
1.10 Los ceros son $x = 1 \pm \sqrt{3}/3$. La parábola se abre hacia arriba.

1.11 El dominio es el conjunto de los números reales x tal que $x \ne 1/2$. El rango es el conjunto $\{y | y \ne 5/2\}$.

1.12 El dominio de f ¿es $(-\infty, \infty)$. El dominio de g ¿es $\{x | x \ge 1/5\}$.

1.13 Algebraica

1.14



1.15 $C(x) = \begin{cases} 49, 0 < x \le 1 \\ 70, 1 < x \le 2 \\ 91, 2 < x \le 3 \end{cases}$

1.16 Desplace el gráfico $y = x^2$ 1 unidad hacia la izquierda, refleje sobre el eje x y luego desplace hacia abajo 4 unidades.

1.17 $7\pi/6$; 330°

1.18 $\cos(3\pi/4) = -\sqrt{2}/2$; $\operatorname{sen}(-\pi/6) = -1/2$

1.19 10 pies

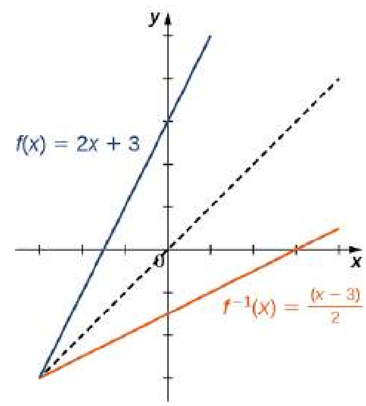
1.20 $\theta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$ para $n = 0, \pm 1, 1, \pm 2, 2, \ldots$

1.22 Para graficar $f(x) = 3\operatorname{sen}(4x) - 5$, el gráfico de $y = \operatorname{sen}(x)$ necesita ser comprimido horizontalmente por un factor de 4, luego estirado verticalmente por un factor de 3, y luego desplazado hacia abajo 5 unidades. La función f tendrá un periodo de $\pi/2$ y una amplitud de 3.

1.23 No.

1.24 $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-3}$. El dominio de f^{-1} ¿es $\{x|x \neq 3\}$. El rango de f^{-1} ¿es $\{y|y \neq 2\}$.

1.25



1.26 El dominio de f^{-1} ¿es $\left(0, \infty\right)$. El rango de f^{-1} ¿es $(-\infty, 0)$. La función inversa viene dada por la fórmula $f^{-1}(x) = -1/\sqrt{x}$.

1.27 $f(4) = 900; f(10) = 24,300.$

1.28 $x/\left(2y^3\right)$

1.29 $A(t) = 750e^{0,04t}$. Después de 30 años, habrá aproximadamente $\$2.490,09$.

1.30 $x = \frac{\ln 3}{2}$

1.31 $x = \frac{1}{e}$

1.32 $1,29248$

1.33 El terremoto de magnitud 8,4 es aproximadamente 10 veces más grave que el de magnitud 7,4.

1.34 $(x^2 + x^{-2})/2$

1.35 $\frac{1}{2}\ln(3) \approx 0,5493.$

Sección 1.1 ejercicios

1. a. Dominio = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, rango = $\{0, 1, 4, 9\}$ b. Sí, es una función

3. a. Dominio = $\{0, 1, 2, 3\}$, rango = $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b. No, no es una función

5. a. Dominio = $\{3, 5, 8, 10, 15, 21, 33\}$, rango = $\{0, 1, 2, 3\}$ b. Sí, es una función

7. a. -2 b. 3 c. 13 d. $-5x-2$ e. $5a-2$ f. $5a+5h-2$

9. a. Indefinido b. 2 c. $\frac{2}{3}$ d. $-\frac{2}{x}$ e $\frac{2}{a}$ f. $\frac{2}{a+h}$

11. a. $\sqrt{5}$ b. $\sqrt{11}$ c. $\sqrt{23}$ d. $\sqrt{-6x+5}$ e. $\sqrt{6a+5}$ f. $\sqrt{6a+6h+5}$

13. a. 9 b. 9 c. 9 d. 9 e. 9 f. 9

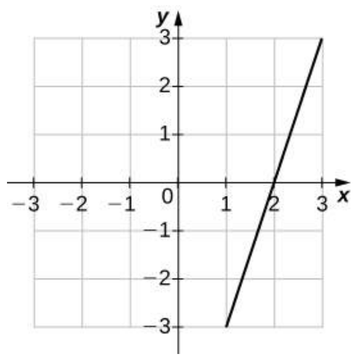
15. $x \geq \frac{1}{8}; y \geq 0; x = \frac{1}{8}$; no hay intersección y

17. $x \geq -2; y \geq -1; x = -1; y = -1+\sqrt{2}$

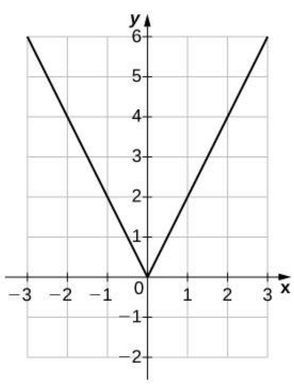
19. $x \neq 4; y \neq 0$; no hay intersección x; $y = -\frac{3}{4}$

21. $x > 5; y > 0$; no son intersecciones.

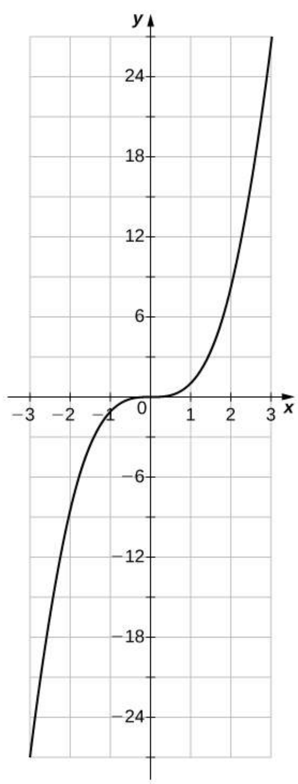
23.



25.



27.



29. Función; a. Dominio: todos los números reales, rango: $y \geq 0$ b. $x = \pm 1$ c. $y = 1$ d. $-1 < x < 0$ y $1 < x < \infty$ e. $-\infty < x < -1$ y $0 < x < 1$ f. No es constante g. Eje y h. Par

31. Función; a. Dominio: todos los números reales, rango: $-1,5 \leq y \leq 1,5$ b. $x = 0$ c. $y = 0$ d. todos los números reales e. Ninguna f. No es constante g. Origen h. Impar

33. Función; a. Dominio: $-\infty < x < \infty$, rango: $-2 \leq y \leq 2$ b. $x = 0$ c. $y = 0$ d. $-2 < x < 2$ e. No decrece f. $-\infty < x < -2$ y $2 < x < \infty$ g. Origen h. Impar

35. Función; a. Dominio: $-4 \leq x \leq 4$, rango: $-4 \leq y \leq 4$ b. $x = 1,2$ c. $y = 4$ d. No aumenta e. $0 < x < 4$ f. $-4 < x < 0$ g. Sin simetría h. Ninguno.

37. a. $5x^2 + x - 8$; todos los números reales b. $-5x^2 + x - 8$; todos los números reales c. $5x^3 - 40x^2$; todos los números reales d. $\frac{x-8}{5x^2}$; $x \neq 0$

39. a. $-2x + 6$; todos los números reales b. $-2x^2 + 2x + 12$; todos los números reales c. $-x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 18x - 27$; todos los números reales d. $-\frac{x+3}{x+1}$; $x \neq -1, 3$

41. a. $6 + \frac{2}{x}$; $x \neq 0$ b. 6; $x \neq 0$ c. $\frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$; $x \neq 0$ d. $6x + 1$; $x \neq 0$

43. a. $4x + 3$; todos los números reales b. $4x + 15$; todos los números reales

45. a. $x^4 - 6x^2 + 16$; todos los números reales b. $x^4 + 14x^2 + 46$; todos los números reales

47. a. $\frac{3x}{4+x}$; $x \neq 0, -4$ b. $\frac{4x+2}{3}$; $x \neq -\frac{1}{2}$

49. a. Sí, porque solo hay un ganador para cada año. b. No, porque hay tres equipos que ganaron más de una vez durante los años 2001 a 2012.

51. a. $V(s) = s^3$ b. $V(11{,}8) \approx 1643$; un cubo de lado 11,8 cada uno tiene un volumen de aproximadamente 1643 unidades cúbicas.

53. a. $N(x) = 15x$ b. i $N(20) = 15(20) = 300$; por lo tanto, el vehículo puede recorrer 300 millas con el tanque lleno. Ii. $N(15) = 225$; por lo tanto, el vehículo puede recorrer 225 millas con 3/4 de un tanque de gasolina. c. Dominio: $0 \leq x \leq 20$; rango: $[0, 300]$ d. El conductor tuvo que parar al menos una vez, dado que se necesitan aproximadamente 39 galones de gasolina para recorrer un total de 578 mi.

55. a. $A(t) = A(r(t)) = \pi.\left(6 - \frac{5}{t^2+1}\right)^2$ b. Exacto: $\frac{121\pi}{4}$; aproximadamente 95 cm^2 c. $C(t) = C(r(t)) = 2\pi\left(6 - \frac{5}{t^2+1}\right)$ d. Exacto: 11π; aproximadamente 35 cm

57. a. $S(x) = 8{,}5x + 750$ b. \$962,50, \$1090, \$1217,50 c. 77 patinetas

Sección 1.2 ejercicios

59. a. -1 b. Decreciente

61. a. 3/4 b. Creciente

63. a. 4/3 b. Creciente

65. a. 0 b. Horizontal

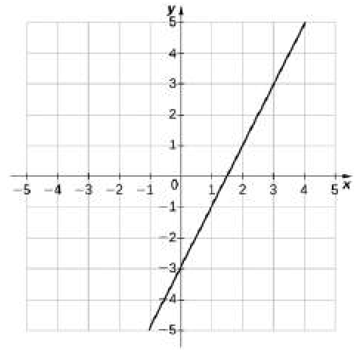
67. $y = -6x + 9$

69. $y = \frac{1}{3}x + 4$

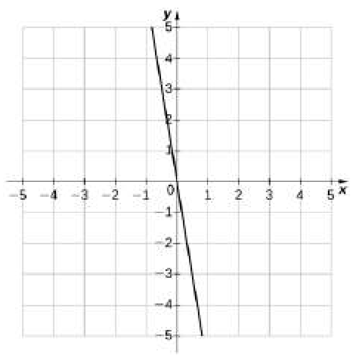
71. $y = \frac{1}{2}x$

73. $y = \frac{3}{5}x - 3$

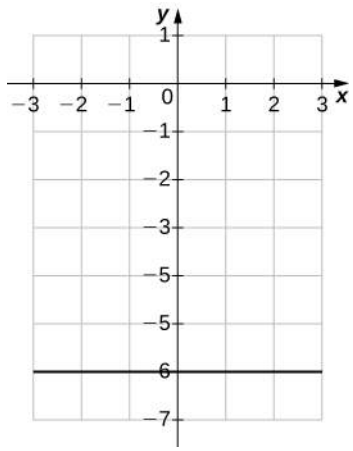
75. a. $(m = 2, b = -3)$ b.



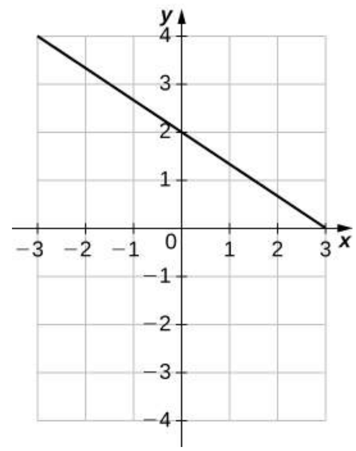
77. a. $(m = -6, b = 0)$ b.



79. a. $(m = 0, 0, b = -6)$ b.



81. a. $\left(m = -\frac{2}{3}, b = 2\right)$ b.

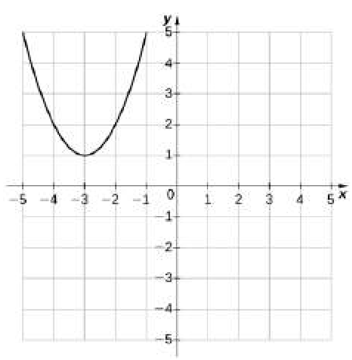


83. a. 2 b. $\frac{5}{2}, -1$; c. -5 d. Ambos extremos se elevan e. Ninguno.

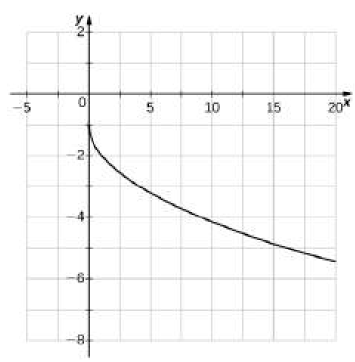
85. a. 2 b. $\pm\sqrt{2}$ c. -1 d. Ambos extremos se elevan e. Par

87. a. 3 b. 0, $\pm\sqrt{3}$ c. 0 d. El extremo izquierdo sube, el derecho baja e. Impar

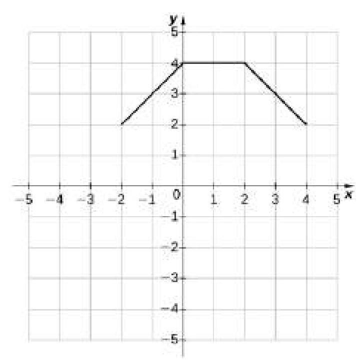
89.



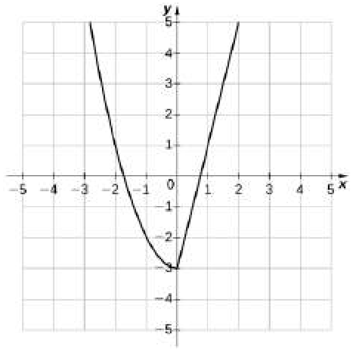
91.



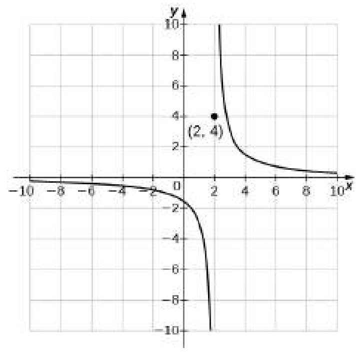
93.



95. a. $13, -3, 5$ b.



97. a. $\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}, 4$ b.



99. Verdadero; n n $= 3$

101. Falso; $f(x) = x^b$, donde b es una constante de valor real, es una función potencia

103. a. $V(t) = -2733t + 20500$ b. $(0, 20, 500)$ significa que el precio de compra inicial del equipo es de 20.500 dólares $(7{,}5, 0)$ significa que en 7,5 años el equipo informático no tendrá valor. c. 6.835 dólares d. En aproximadamente 6,4 años

105. a. $C = 0{,}75x + 125$ b. 245 dólares c. 167 cupcakes

107. a. $V(t) = -1500t + 26.000$ b. En 4 años, el valor del auto será de 20.000 dólares.

109. 30.337,50 dólares.

111. 96 % de la capacidad total

Sección 1.3 ejercicios

113. $\frac{4\pi}{3}$ rad

115. $\frac{-\pi}{3}$

117. $\frac{11\pi}{6}$ rad

119. $210°$

121. $-540°$

123. $-0{,}5$

125. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

127. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

129. a. $b = 5{,}7$ b. $\operatorname{sen} A = \frac{4}{7}, \cos A = \frac{5{,}7}{7}, \tan A = \frac{4}{5{,}7}, \csc A = \frac{7}{4}, \sec A = \frac{7}{5{,}7}, \cot A = \frac{5{,}7}{4}$

131. a. $c = 151{,}7$ b. $\operatorname{sen} A = 0{,}5623, \cos A = 0{,}8273, \tan A = 0{,}6797, \csc A = 1{,}778, \sec A = 1{,}209, \cot A = 1{,}471$

133. a. $c = 85$ b. $\operatorname{sen} A = \frac{84}{85}, \cos A = \frac{13}{85}, \tan A = \frac{84}{13}, \csc A = \frac{85}{84}, \sec A = \frac{85}{13}, \cot A = \frac{13}{84}$

135. a. $y = \frac{24}{25}$ b. $\operatorname{sen}\theta = \frac{24}{25}, \cos\theta = \frac{7}{25}, \tan\theta = \frac{24}{7}, \csc\theta = \frac{25}{24}, \sec\theta = \frac{25}{7}, \cot\theta = \frac{7}{24}$

137. a. $x = \frac{-\sqrt{2}}{3}$ b. $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}, \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{3}, \tan\theta = \frac{-\sqrt{14}}{2}, \csc\theta = \frac{3\sqrt{7}}{7}, \sec\theta = \frac{-3\sqrt{2}}{2}, \cot\theta = \frac{-\sqrt{14}}{7}$

139. $\sec^2 x$

141. $\operatorname{sen}^2 x$

143. $\sec^2\theta$

145. $\frac{1}{\operatorname{sen} t}\left(= \csc t\right)$ grandes.

155. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

157. $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

159. $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

161. $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

163. $y = 4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

165. $y = \cos(2\pi x)$

167. a. 1 b. 2π c. $\frac{\pi}{4}$ unidades a la derecha

169. a. $\frac{1}{2}$ b. 8π c. Sin desplazamiento de fase

171. a. 3 b. 2 c. $\frac{2}{\pi}$ unidades a la izquierda

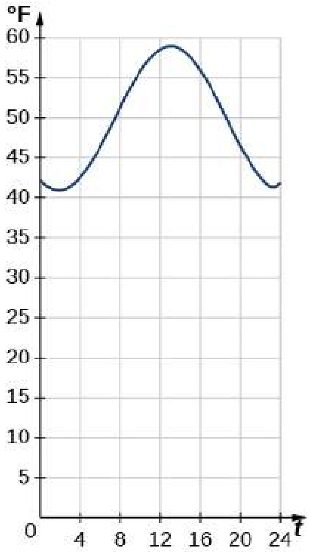
173. Aproximadamente 42 in.

175. a. 0,550 rad/seg b. 0,236 rad/s c. 0,698 rad/min d. 1,697 rad/min

177. $\approx 30{,}9\ \text{in}^2$

179. a. π/184; el voltaje se repite cada π/184 s. b. Aproximadamente 59 periodos

181. a. Amplitud = 10; periodo = 24 b. $47{,}4\ ^\circ F$ c. 14 horas más tarde, o 2 p.m. d.



Sección 1.4 ejercicios

183. No biunívoca

185. No biunívoca

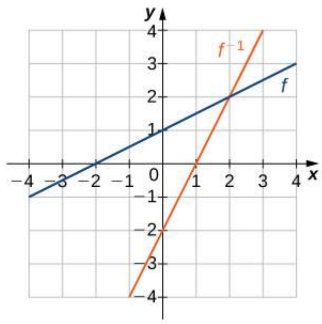
187. Biunívoca

189. a. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ b. Dominio $: x \geq -4,$ rango: $y \geq 0$

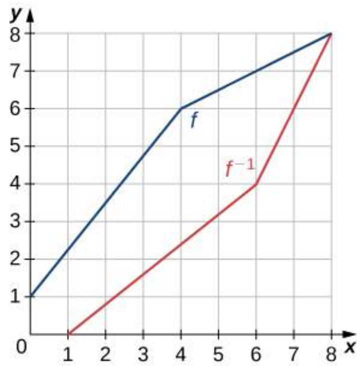
191. a. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ b. Dominio: todos los números reales, rango: todos los números reales

193. a. $f^{-1}(x) = x^2 + 1,$ b. Dominio: $x \geq 0,$ rango: $y \geq 1$

195.



197.



199. Son inversas.

201. No son inversas.

203. Son inversas.

205. Son inversas.

207. $\frac{\pi}{6}$

209. $\frac{\pi}{4}$

211. $\frac{\pi}{6}$

213. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

215. $-\frac{\pi}{6}$

217. a. $x = f^{-1}(V) = \sqrt{0{,}04 - \frac{V}{500}}$ b. La función inversa determina la distancia desde el centro de la arteria, en la que la sangre fluye con velocidad *V*. c. 0,1 cm; 0,14 cm; 0,17 cm

219. a. 31.250 dólares, 66.667 dólares, 107.143 dólares b. $\left(p = \frac{85C}{C+75}\right)$ c. 34 ppb

221. a. $\sim 92°$ b. $\sim 42°$ c. $\sim 27°$

223. $x \approx 6{,}69, 8{,}51;$ así, la temperatura tiene lugar el 21 de junio y el 15 de agosto.

225. $\sim 1{,}5$ s

227. $\tan^{-1}(\tan(2{,}1)) \approx -1{,}0416;$ la expresión no es igual a 2,1 ya que $2{,}1 > 1{,}57 = \frac{\pi}{2};$ en otras palabras, no está en el dominio restringido de $\tan x.$ $\cos^{-1}(\cos(2{,}1)) = 2{,}1,$ ya que 2,1 está en el dominio restringido de $\cos x.$

Sección 1.5 ejercicios

229. a. 125 b. 2,24 c. 9,74

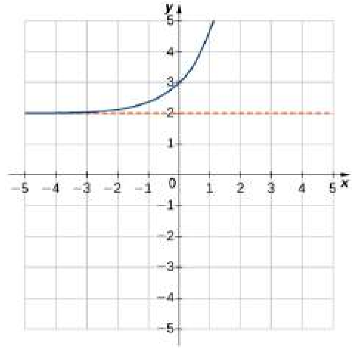
231. a. 0,01 b. 10.000 c. 46,42

233. d

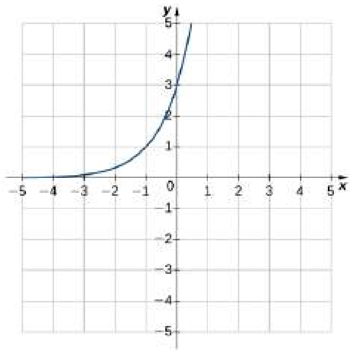
235. b

237. e

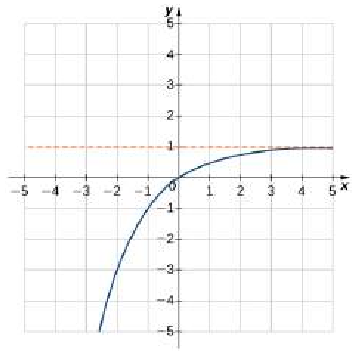
239. Dominio: todos los números reales, rango: $\left(2, \infty\right)$, $y = 2$



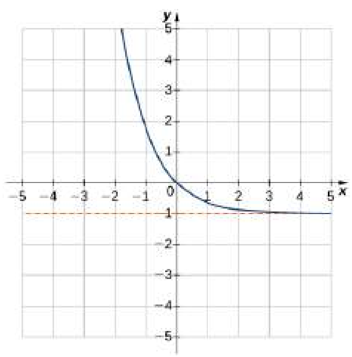
241. Dominio: todos los números reales, rango: $\left(0, \infty\right)$, $y = 0$



243. Dominio: todos los números reales, rango: $\left(-\infty, 1\right)$, $y = 1$



245. Dominio: todos los números reales, rango: $\left(-1, \infty\right)$, $y = -1$



247. $8^{1/3} = 2$

249. $5^2 = 25$

251. $e^{-3} = \frac{1}{e^3}$

253. $e^0 = 1$

255. $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$

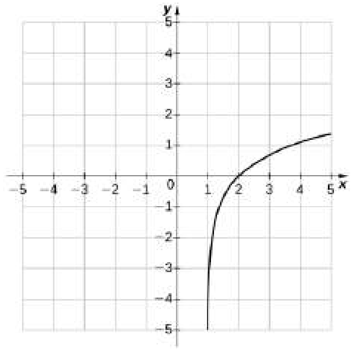
257. $\log_9 1 = 0$

259. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$

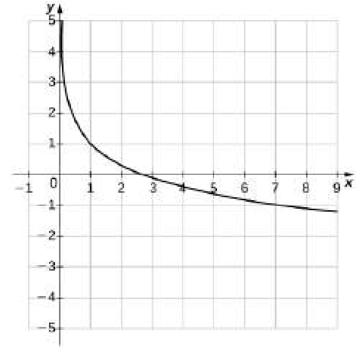
261. $\log_9 150 = y$

263. $\log_4 0{,}125 = -\frac{3}{2}$

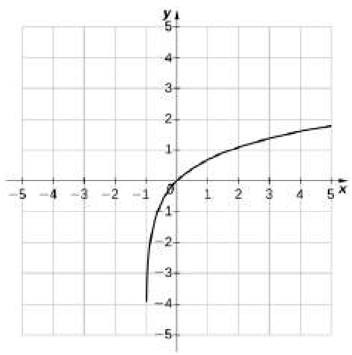
265. Dominio: $(1, \infty)$, rango: $\left(-\infty, \infty\right)$, $x = 1$



267. Dominio: $\left(0, \infty\right)$, rango: $\left(-\infty, \infty\right)$, $x = 0$



269. Dominio: $\left(-1, \infty\right)$, rango: $\left(-\infty, \infty\right)$, $x = -1$



271. $2 + 3\log_3 a - \log_3 b$

273. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\log_5 x + \frac{3}{2}\log_5 y$

275. $-\frac{3}{2} + \ln 6$

277. $\frac{\ln 15}{3}$

279. $\frac{3}{2}$

281. $\log 7{,}21$

283. $\frac{2}{3} + \frac{\log 11}{3\log 7}$

285. $x = \frac{1}{25}$

287. $x = 4$

289. $x = 3$

291. $1 + \sqrt{5}$

293. $\left(\frac{\log 82}{\log 7} \approx 2{,}2646\right)$ grandes.

295. $\left(\frac{\log 211}{\log 0{,}5} \approx -7{,}7211\right)$ grandes.

297. $\left(\frac{\log 0{,}452}{\log 0{,}2} \approx 0{,}4934\right)$

299. $\sim 17,491$

301. Se acumulan aproximadamente 131.653 dólares en 5 años.

303. i. a. pH = 8 b. Base ii. a. pH = 3 b. Ácido iii. a. pH = 4 b. Ácido

305. a. ~333 millones b. 94 años a partir de 2013, o en 2107

307. a. $k \approx 0{,}0578$ b. ≈ 92 horas

309. El terremoto de San Francisco tuvo $10^{3,4}$ o ~2.512 veces más energía que el terremoto de Japón.

Ejercicios de repaso

311. Falso

313. Falso

315. Dominio: $x > 5$, rango: todos los números reales

317. Dominio: $x > 2$ y $x < -4$, rango: todos los números reales

319. Grado de 3, intersección en y: 0, ceros: 0, $\sqrt{3} - 1, -1 - \sqrt{3}$

321. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$ o $= \frac{1-2\operatorname{sen}^2 x}{2}$ o $= \frac{2\cos^2 x - 1}{2}$

323. $0, \pm 2{,}2\pi$

325. 4

327. Biunívoca; sí, la función tiene una inversa; inversa: $f^{-1}(x) = \frac{1}{y}$

329. $x \geq -\frac{3}{2}, f^{-1}(x) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4y - 7}$

331. a. $C(x) = 300 + 7x$ b. 100 camisetas

333. La población es inferior a 20.000 habitantes desde el 8 de diciembre hasta el 23 de enero y superior a 140.000 desde el 29 de mayo hasta el 2 de agosto

335. 78,51 %

Capítulo 2

Punto de control

2.1 2,25

2.2 12,006001

2.3 16 unidad^2

2.4 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = -1$

2.5 $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = -1.$

2.6 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{|x^2-4|}{x-2}$ no existe.

2.7 a. $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = -4$; b. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2} = 4$

2.8 a. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$; b. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$; c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

2.9 a. $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty$; b. $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = +\infty$; c. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^3}$ (does not exist, DNE). La línea $x = 2$ es la asíntota vertical de $f(x) = 1/(x-2)^3$.

2.10 No existe.

2.11 $11\sqrt{10}$

2.12 −13;

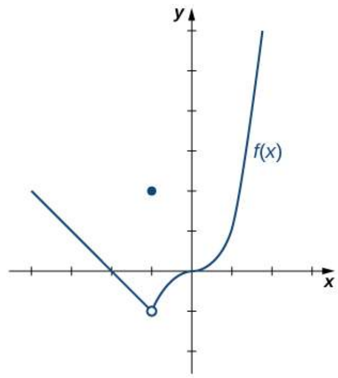
2.13 $\frac{1}{3}$

2.14 $\frac{1}{4}$

2.15 −1;

2.16 $\frac{1}{4}$

2.17



$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$$

2.18 $+\infty$

2.19 0

2.20 0

2.21 f no es continua en 1 porque $f(1) = 2 \neq 3 = \lim_{x \to 1} f(x)$.

2.22 $f(x)$ es continua en todo número real.

2.23 Discontinua en 1; removible

2.24 $\left[-3, +\infty\right)$

2.25 0

2.26 $f(0) = 1 > 0, f(1) = -2 < 0$; $f(x)$ es continua en $[0, 1]$. Debe tener un cero en este intervalo.

2.27 Supongamos que $\varepsilon > 0$; elija $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$; asuma que $0 < |x - 2| < \delta$.

Así, $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = |3| \,.\, |x - 2| < 3.\,\delta = 3.\,(\varepsilon/3) = \varepsilon$.

Por lo tanto, $\lim_{x \to 2} 3x - 2 = 4$.

2.28 Elija $\delta = \min\left\{9 - (3 - \varepsilon)^2, (3 + \varepsilon)^2 - 9\right\}$.

2.29 $\left|x^2 - 1\right| = |x - 1| \,.\, |x + 1| < \varepsilon/3.\,3 = \varepsilon$

2.30 $\delta = \varepsilon^2$

Sección 2.1 ejercicios

1. a. 2,2100000; b. 2,0201000; c. 2,0020010; d. 2,0002000; e. (1,1000000, 2,2100000); f. (1,0100000, 2,0201000); g. (1,0010000, 2,0020010); h. (1,0001000, 2,0002000); i. 2,1000000; j. 2,0100000; k. 2,0010000; l. 2,0001000

3. $y = 2x$

5. 3

7. a. 2,0248457; b. 2,0024984; c. 2,0002500; d. 2,0000250; e. (4,1000000,2,0248457); f. (4,0100000,2,0024984); g. (4,0010000,2,0002500); h. (4,00010000,2,0000250); i. 0,24845673; j. 0,24984395; k. 0,24998438; l. 0,24999844

9. $y = \frac{x}{4} + 1$

11. π

13. a. −0,95238095; b. −0,99009901; c. −0,99502488; d. −0,99900100; e. (−1;.0500000,−0;.95238095); f. (−1;.0100000,−0;.9909901); g. (−1;.0050000,−0;.99502488); h. (1,0010000,−0;.99900100); i. −0,95238095; j. −0,99009901; k. −0,99502488; l. −0,99900100

15. $y = -x - 2$

17. −49 m/s (la velocidad de la pelota es de 49 m/s hacia abajo)

19. 5,2 m/s

21. −9,8 m/s

23. 6 m/s

25. Por debajo, 1 unidad^2; por encima: 4 unidad^2. El área exacta de los dos triángulos es $\frac{1}{2}(1)(1) + \frac{1}{2}(2)(2) = 2{,}5 \text{ unidades}^2$.

27. Por debajo, 0,96 unidad^2; por encima, 1,92 unidad^2. El área exacta del semicírculo de radio 1 es $\frac{\pi(1)^2}{2} = \frac{\pi}{2}$ unidad^2.

29. Aproximadamente 1,3333333 unidad^2

Sección 2.2 ejercicios

31. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ no existe porque $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -2 \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$.

33. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = 2{,}7183$

35. a. 1,98669331; b. 1,99986667; c. 1,99999867; d. 1,99999999; e. 1,98669331; f. 1,99986667; g. 1,99999867; h. 1,99999999 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2$

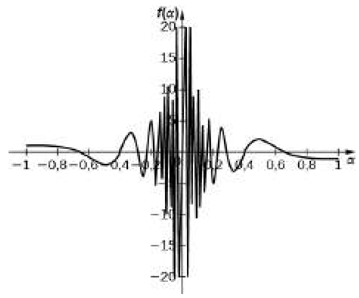
37. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{x} = a$

39. a. −0,80000000; b. −0,98000000; c. −0,99800000; d. −0,99980000; e. −1,2000000; f. −1,0200000; g. −1,0020000; h. −1,0002000 $\lim\limits_{x \to 1} (1 - 2x) = -1$

41. a. -37,931934; b. -3377,9264; c. -333.777,93; d. -33.337.778; e. -29,032258; f. -3289,0365; g. -332.889,04; h. -33.328.889 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{z-1}{z^2(z+3)} = -\infty$

43. a. 0,13495277; b. 0,12594300; c. 0,12509381; d. 0,12500938; e. 0,11614402; f. 0,12406794; g. 0,12490631; h. 0,12499063
$\therefore \lim\limits_{x \to 2} \frac{1-\frac{2}{x}}{x^2-4} = 0{,}1250 = \frac{1}{8}$

45. a. 10,00000; b. 100,00000; c. 1.000,0000; d. 10.000,000; estimación: $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \frac{1}{\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \infty$, resultado: DNE



47. Falso; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

49. Falso; $\lim\limits_{x \to 6} f(x)$ DNE ya que $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 6^+} f(x) = 5.$

51. 2

53. 1

55. 1

57. DNE

59. 0

61. DNE

63. 2

65. 3

67. DNE

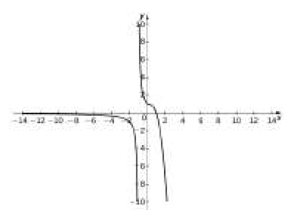
69. 0

71. −2

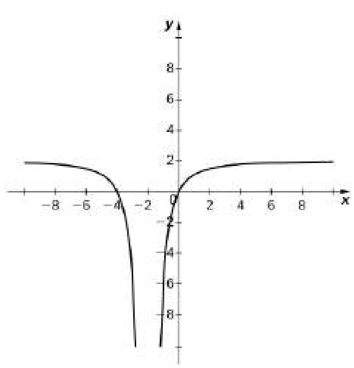
73. DNE

75. 0

77. Las respuestas pueden variar.



79. Las respuestas pueden variar.



81. a. ρ_2 b. ρ_1 c. DNE a menos que $\rho_1 = \rho_2$. Cuando se acerca a x_{SF} desde la izquierda, se encuentra en la zona de alta densidad de la onda expansiva. Cuando se acerca por la derecha, aún no ha experimentado el "choque" y está en una densidad más baja.

Sección 2.3 ejercicios

83. Utilice la ley del múltiplo constante y la ley de la diferencia:
$\lim_{x\to 0}\left(4x^2-2x+3\right)=4\lim_{x\to 0}x^2-2\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}3=3$

85. Utilice la ley de la raíz
$\lim_{x\to -2}\sqrt{x^2-6x+3}=\sqrt{\lim_{x\to -2}\left(x^2-6x+3\right)}=\sqrt{19}$

87. 49

89. 1

91. $-\frac{5}{7}$

93. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{16-16}{4-4}=\frac{0}{0};$
entonces,
$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=8$

95. $\lim_{x\to 6}\frac{3x-18}{2x-12}=\frac{18-18}{12-12}=\frac{0}{0};$
entonces,
$\lim_{x\to 6}\frac{3x-18}{2x-12}=\lim_{x\to 6}\frac{3(x-6)}{2(x-6)}=\frac{3}{2}$

97. $\lim_{x\to 9}\frac{t-9}{\sqrt{t}-3}=\frac{9-9}{3-3}=\frac{0}{0}$; entonces,
$\lim_{t\to 9}\frac{t-9}{\sqrt{t}-3}=\lim_{t\to 9}\frac{t-9}{\sqrt{t}-3}\frac{\sqrt{t}+3}{\sqrt{t}+3}=\lim_{t\to 9}\left(\sqrt{t}+3\right)=6$

99. $\lim_{\theta\to \pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}=\frac{\operatorname{sen}\pi}{\tan\pi}=\frac{0}{0}$; entonces,
$\lim_{\theta\to \pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta}=\lim_{\theta\to \pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}=\lim_{\theta\to \pi}\cos\theta=-1$

101. $\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^2+3x-2}{2x-1}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2}{1-1}=\frac{0}{0};$
entonces,
$\lim_{x\to 1/2}\frac{2x^2+3x-2}{2x-1}=\lim_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)(x+2)}{2x-1}=\frac{5}{2}$

103. $-\infty$

105. $-\infty$

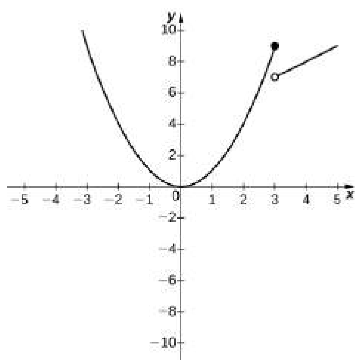
107. $\lim_{x\to 6}2f(x)g(x)=2\lim_{x\to 6}f(x)\lim_{x\to 6}g(x)=72$

109. $\lim_{x\to 6}\left(f(x)+\frac{1}{3}g(x)\right)=\lim_{x\to 6}f(x)+\frac{1}{3}\lim_{x\to 6}g(x)=7$

111. $\lim_{x\to 6}\sqrt{g(x)-f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to 6}g(x)-\lim_{x\to 6}f(x)}=\sqrt{5}$

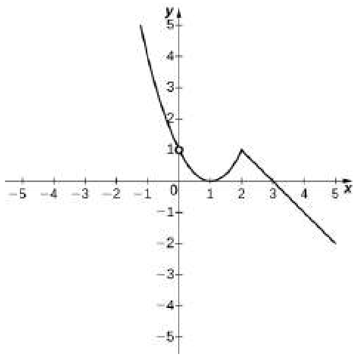
113. $\lim_{x\to 6}[(x+1)f(x)]=\left(\lim_{x\to 6}(x+1)\right)\left(\lim_{x\to 6}f(x)\right)=28$

115.



a. 9; b. 7

117.



a. 1; b. 1

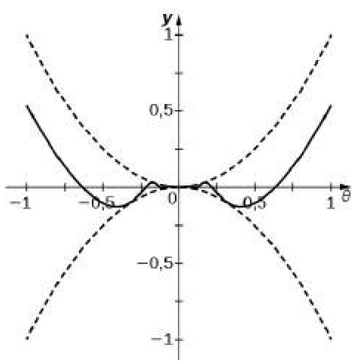
119. $\lim\limits_{x\to-3^-}(f(x)-3g(x)) = \lim\limits_{x\to-3^-}f(x) - 3\lim\limits_{x\to-3^-}g(x) = 0+6=6$

121. $\lim\limits_{x\to-5}\frac{2+g(x)}{f(x)} = \frac{2+\left(\lim\limits_{x\to-5}g(x)\right)}{\lim\limits_{x\to-5}f(x)} = \frac{2+0}{2} = 1$

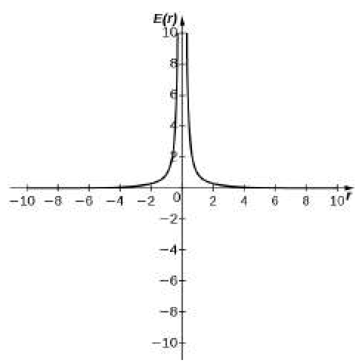
123. $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[3]{f(x)-g(x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to1}f(x) - \lim\limits_{x\to1}g(x)} = \sqrt[3]{2+5} = \sqrt[3]{7}$

125. $\lim\limits_{x\to-9}(xf(x)+2g(x)) = \left(\lim\limits_{x\to-9}x\right)\left(\lim\limits_{x\to-9}f(x)\right) + 2\lim\limits_{x\to-9}(g(x)) = (-9)(6)+2(4) = -46$

127. El límite es cero



129. a.



b. ∞. Al acercarse a la partícula q la magnitud del campo eléctrico se vuelve infinita. No tiene sentido físico evaluar la distancia negativa.

Sección 2.4 ejercicios

131. La función está definida para toda x en el intervalo $\left(0, \infty\right)$.

133. Discontinuidad removible en $x=0$; discontinuidad infinita en $x=1$

135. Discontinuidad infinita en $x=\ln 2$

137. Discontinuidades infinitas en $x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$, por $k = 0, \pm1, 1, \pm2, 2, \pm3, ...3, \ldots$

139. No. Es una discontinuidad removible.

141. Sí. Es continuo.

143. Sí. Es continuo.

145. $k = -5$

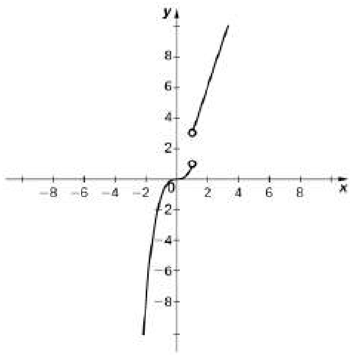
147. $k = -1$

149. $k = \frac{16}{3}$

151. Dado que tanto s como $y = t$ son continuas en todas partes, entonces $h(t) = s(t) - t$ es continua en todas partes y, en particular, es continua en el intervalo cerrado $[2, 5]$. También, $h(2) = 3 > 0$ y $h(5) = -3 < 0$. Por lo tanto, según el TVI, hay un valor $x = c$ de manera que $h(c) = 0$.

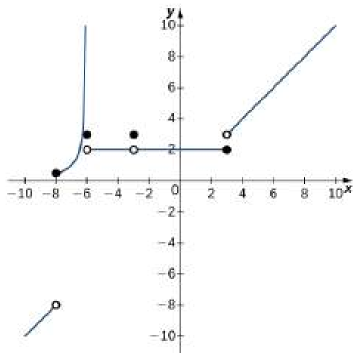
153. La función $f(x) = 2^x - x^3$ es continua en el intervalo $[1{,}25, 1{,}375]$ y tiene signos opuestos en los extremos.

155. a.

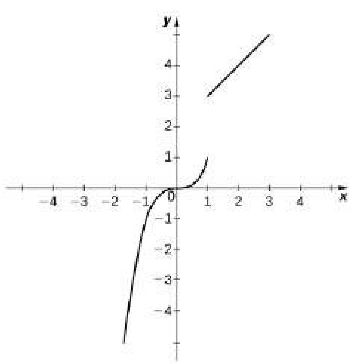


b. No es posible redefinir $f(1)$ ya que la discontinuidad es una discontinuidad de salto.

157. Las respuestas pueden variar; vea el siguiente ejemplo



159. Las respuestas pueden variar; vea el siguiente ejemplo



161. Falso. Es continua a lo largo de $\left(-\infty, 0\right) \cup \left(0, \infty\right)$.

163. Falso. Considere que $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \neq 0 \\ 4 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

165. Falso. El TVI solo dice que al menos hay una solución; no garantiza que haya exactamente una. Considere que $f(x) = \cos(x)$ sobre $[-\pi, 2\pi]$.

167. Falso. ¡El TVI *no* funciona a la inversa! Considere que $(x-1)^2$ en el intervalo $[-2, 2]$.

169. $R = 0{,}0001519\ \mathrm{m}$

171. $D = 345.826\ \mathrm{km}$

173. Para todos los valores de a, $f(a)$ está definida, $\lim\limits_{\theta \to a} f(\theta)$ existe, y $\lim\limits_{\theta \to a} f(\theta) = f(a)$. Por lo tanto, $f(\theta)$ es continua en todas partes.

175. En ninguna parte

Sección 2.5 ejercicios

177. Por cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, de modo que si $0 < |t - b| < \delta$, entonces $|g(t) - M| < \varepsilon$

179. Por cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, de modo que si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$

181. $\delta \leq 0{,}25$

183. $\delta \leq 2$

185. $\delta \leq 1$

187. $\delta < 0{,}3900$

189. Supongamos que $\delta = \varepsilon$. Si $0 < |x - 3| < \varepsilon$, entonces $|x + 3 - 6| = |x - 3| < \varepsilon$.

191. Supongamos que $\delta = \sqrt[4]{\varepsilon}$. Si $0 < |x| < \sqrt[4]{\varepsilon}$, entonces $\left|x^4\right| = x^4 < \varepsilon$.

193. Supongamos que $\delta = \varepsilon^2$. Si $5 - \varepsilon^2 < x < 5$, entonces $\left|\sqrt{5 - x}\right| = \sqrt{5 - x} < \varepsilon$.

195. Supongamos que $\delta = \varepsilon/5$. Si $1 - \varepsilon/5 < x < 1$, entonces $|f(x) - 3| = 5x - 5 < \varepsilon$.

197. Supongamos que $\delta = \sqrt{\frac{3}{M}}$. Si $0 < |x + 1| < \sqrt{\frac{3}{M}}$, entonces $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > M$.

199. 0,328 cm, $\varepsilon = 8, \delta = 0{,}33, a = 12, L = 144$

201. Las respuestas pueden variar.

203. 0

205. $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)\,g(x)$ grandes.

207. Las respuestas pueden variar.

Ejercicios de repaso

209. Falso

211. Falso. Es posible una discontinuidad removible.

213. 5

215. 8/7

217. DNE

219. 2/3

221. −4;

223. Dado que $-1 \le \cos(2\pi x) \le 1,$ entonces $-x^2 \le x^2\cos(2\pi x) \le x^2.$ Dado que $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} -x^2,$ se deduce que $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos(2\pi x) = 0.$

225. $[2, \infty]$

227. $c = -1$

229. $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$

231. 0 m/sec

Capítulo 3

Punto de control

3.1 $\frac{1}{4}$

3.2 6

3.3 $f'(1) = 5$

3.4 -32 ft/s.

3.5 $P'(3{,}25) = 20 > 0$; subir el precio.

3.6 $f'(x) = 2x$

3.7 $\left(0, +\infty\right)$

3.8 $a = 6$ y $b = -9$

3.9 $f''(x) = 2$

3.10 $a(t) = 6t$

3.11 0

3.12 $4x^3$

3.13 $f'(x) = 7x^6$

3.14 $f'(x) = 6x^2 - 12x.$

3.15 $y = 12x - 23$

3.16 $j'(x) = 10x^4\left(4x^2 + x\right) + (8x+1)\left(2x^5\right) = 56x^6 + 12x^5.$

3.17 $k'(x) = -\frac{13}{(4x-3)^2}.$

3.18 $g'(x) = -7x^{-8}.$

3.19 $3f'(x) - 2g'(x).$

3.20 $\frac{5}{8}$

3.21 $-4{,}4$

3.22 de izquierda a derecha

3.23 3.300

3.24 $2

3.25 $f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

3.26 $\frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

3.27 $t = \frac{\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$

3.28 $f'(x) = -\csc^2 x$

3.29 $f'(x) = 2\sec^2 x + 3\csc^2 x$

3.30 $\frac{4}{3}$

3.31 $\cos x$

3.32 $-\cos x$

3.33 $v\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} < 0$ y $a\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -1 < 0.$ El bloque se está acelerando.

3.34 $h'(x) = 4\left(2x^3 + 2x - 1\right)^3\left(6x^2 + 2\right) = 8\left(3x^2 + 1\right)\left(2x^3 + 2x - 1\right)^3$

3.35 $y = -48x - 88$

3.36 $h'(x) = 7\cos(7x + 2)$

3.37 $h'(x) = \frac{3-4x}{(2x+3)^4}$

3.38 $h'(x) = 18x^2 \operatorname{sen}^5\left(x^3\right)\cos\left(x^3\right)$ **3.39** $a(t) = -16\operatorname{sen}(4t)$ **3.40** 28

3.41 $\frac{dy}{dx} = -3x^2 \operatorname{sen}\left(x^3\right)$ **3.42** $g'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ **3.43** $g(x) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$

3.44 $s'(t) = (2t+1)^{-1/2}$ **3.45** $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ **3.46** $h'(x) = \frac{-3}{\sqrt{6x-9x^2}}$

3.47 $y = x$ **3.48** $\frac{dy}{dx} = \frac{5-20x^4}{\sec^2 y - 2y}$ **3.49** $y = \frac{5}{3}x - \frac{16}{3}$

3.50 $h'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$ **3.51** 996 **3.52** $f'(x) = \frac{15}{3x+2}$

3.53 $9\ln(3)$ **3.54** $\frac{dy}{dx} = x^x(1+\ln x)$ **3.55** $y' = \pi(\tan x)^{\pi-1}\sec^2 x$

Sección 3.1 ejercicios

1. 4

3. $8{,}5$

5. $-\frac{3}{4}$

7. $0{,}2$

9. $0{,}25$

11. a. -4 b. $y = 3 - 4x$

13. a. 3 b. $y = 3x - 1$

15. a. $\frac{-7}{9}$ b. $y = \frac{-7}{9}x + \frac{14}{3}$

17. a. 12 b. $y = 12x + 14$

19. a. -2 b. $y = -2x - 10$

21. 5

23. 13

25. $\frac{1}{4}$

27. $-\frac{1}{4}$

29. -3

31. a. (i) 5,100000, (ii) 5,010000, (iii) 5,001000, (iv) 5,000100, (v) 5,000010, (vi) 5,000001, (vii) 4,900000, (viii) 4,990000, (ix) 4,999000, (x) 4,999900, (xi) 4,999990, (x) 4,999999 b. $m_{\tan} = 5$ c. $y = 5x + 3$

33. a. (i) 4,8771, (ii) 4,9875 (iii) 4,9988, (iv) 4,9999, (v) 4,9999, (vi) 4,9999 b. $m_{\tan} = 5$ c. $y = 5x + 10$

35. a. $\frac{1}{3}$; b. (i) $0{,}\overline{3}$ m/s, (ii) $0{,}\overline{3}$ m/s, (iii) $0{,}\overline{3}$ m/s, (iv) $0{,}\overline{3}$ m/s; c $0{,}\overline{3} = \frac{1}{3}$ m/s

37. a. $2\left(h^2 + 6h + 12\right)$; b. (i) 25,22 m/s, (ii) 24,12 m/s, (iii) 24,01 m/s, (iv) 24 m/s; c 24 m/s

39. a. 1,25; b. 0,5

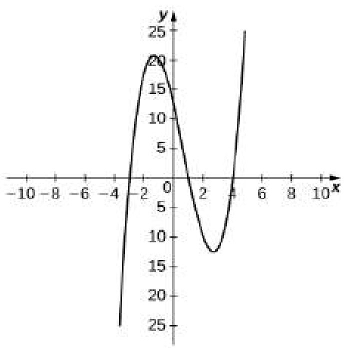
41. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^{1/3}-0}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2/3}} = \infty$

43. $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-1}{x-1} = 0 \neq 1 = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x-1}$

45. a. (i) $61{,}7244$ pies/s, (ii) $61{,}0725$ pies/s (iii) $61{,}0072$ pies/s (iv) $61{,}0007$ ft/s b. A 4 segundos el auto de carreras se desplaza a una tasa/velocidad de 61 ft/s.

47. a. El vehículo representado por $f(t)$, porque recorrió 2 ft, mientras que $g(t)$ recorrió 1 ft. b. La velocidad de $f(t)$ es constante en 1 ft/s, mientras que la velocidad de $g(t)$ es, aproximadamente, 2 ft/s. c. El vehículo representado por $g(t)$, con una velocidad de aproximadamente 4 ft/s. d. Ambos han recorrido 4 pies en 4 segundos.

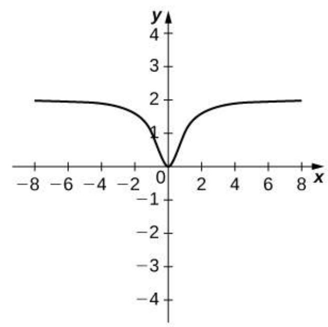
49. a.



b. $a \approx -1{,}361, 2{,}694$

51. a. $N(x) = \frac{x}{30}$ b. $\sim 3{,}3$ galones. Cuando el vehículo recorre 100 millas, ha consumido $3{,}3$ galones de gasolina. c. $\frac{1}{30}$. La tasa de consumo de gasolina en galones por milla que el vehículo está logrando después de haber recorrido 100 millas.

53. a.



b. $-0{,}028, -0{,}16, 0{,}16, 0{,}028$

Sección 3.2 ejercicios

55. -3

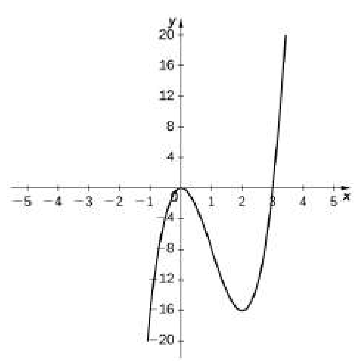
57. $8x$

59. $\frac{1}{\sqrt{2x}}$

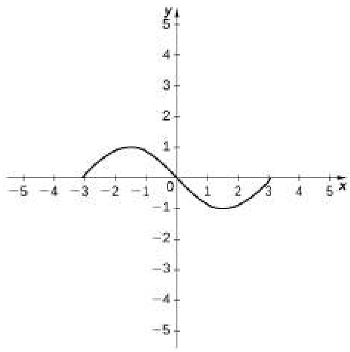
61. $\frac{-9}{x^2}$

63. $\frac{-1}{2x^{3/2}}$

65.



67.

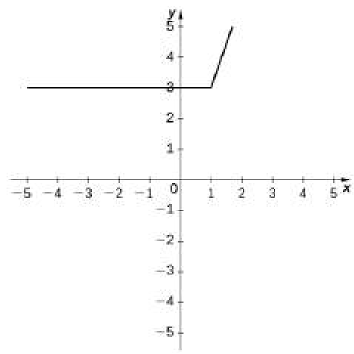


69. $f(x) = 3x^2 + 2, a = 2$

71. $f(x) = x^4, a = 2$

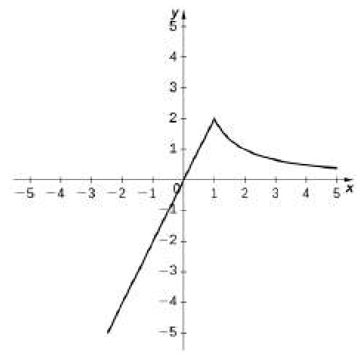
73. $f(x) = e^x, a = 0$

75. a.



b. $\lim\limits_{h\to 1^-} \frac{3-3}{h} \neq \lim\limits_{h\to 1^+} \frac{3h}{h}$

77. a.



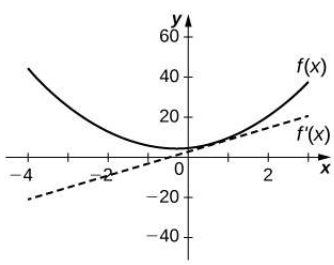
b. $\lim\limits_{h\to 1^-} \frac{2h}{h} \neq \lim\limits_{h\to 1^+} \frac{\frac{2}{x+h} - \frac{2}{x}}{h}$.

79. a. $x = 1$, b. $x = 2$

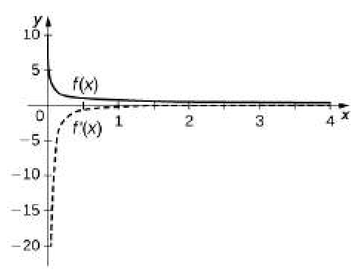
81. 0

83. $\frac{2}{x^3}$

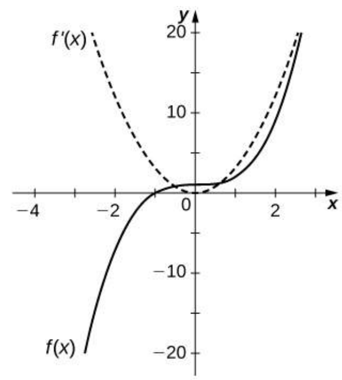
85. $f'(x) = 6x + 2$



87. $f'(x) = -\frac{1}{(2x)^{3/2}}$



89. $f'(x) = 3x^2$



91. a. Tasa promedio de gasto de los clientes en las concesiones, en miles de dólares por cliente. b. Tasa (en miles de dólares por cliente) en la que x clientes gastaron dinero en concesiones en miles de dólares por cliente.

93. a. La nota promedio recibida en la prueba con un tiempo promedio de estudio entre dos valores. b. Tasa (en puntos porcentuales por hora) en el que la nota del examen aumentó o disminuyó según un determinado tiempo promedio de estudio de x horas.

95. a. Cambio promedio de la presión atmosférica entre dos altitudes diferentes. b. Tasa (torr por pie) a la que aumenta o disminuye la presión atmosférica en x pies.

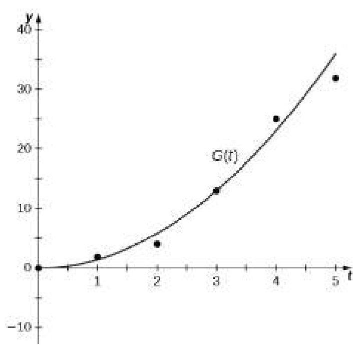
97. a. La velocidad (en grados por pie) a la que aumenta o disminuye la temperatura para una altura determinada x. b. La tasa de cambio de la temperatura al cambiar la altitud en 1.000 pies es $-0{,}1$ grados por pie.

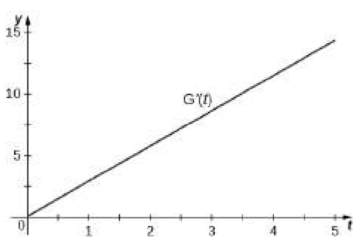
99. a. El ritmo al que cambia el número de personas que han contraído la gripe t semanas después del brote inicial. b. La tasa aumenta considerablemente hasta la tercera semana, momento en el que se ralentiza y luego se vuelve constante.

101.

Tiempo (segundos)	$h'(t)$ (m/s)
0	2
1	2
2	5,5
3	10,5
4	9,5
5	7

103. $G'(t) = 2{,}858t + 0{,}0857$





105. $H''(t) = 0, G''(t) = 2{,}858$ y $f''(t) = 1{,}222t + 5{,}912$ representa la aceleración del cohete, con unidades de metros por segundo al cuadrado $\left(\mathrm{m/s^2}\right)$

Sección 3.3 ejercicios

107. $f'(x) = 15x^2 - 1$

109. $f'(x) = 32x^3 + 18x$

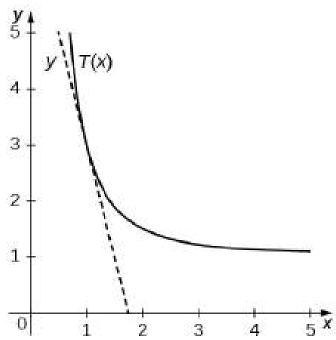
111. $f'(x) = 270x^4 + \frac{39}{(x+1)^2}$

113. $f'(x) = \frac{-5}{x^2}$

115. $f'(x) = \frac{4x^4+2x^2-2x}{x^4}$

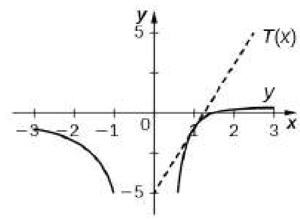
117. $f'(x) = \frac{-x^2-18x+64}{\left(x^2-7x+1\right)^2}$

119.



$T(x) =-4x + 7$

121.



$T(x) = 4x - 5$

123. $h'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x)$
grandes.

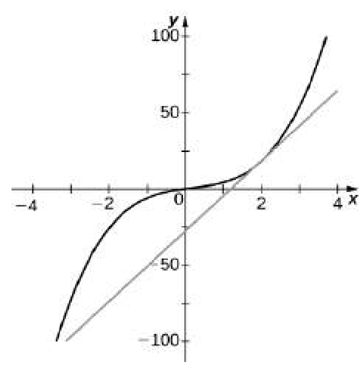
125. $h'(x) = \frac{3f'(x)(g(x)+2)-3f(x)g'(x)}{(g(x)+2)^2}$

127. $\frac{16}{9}$

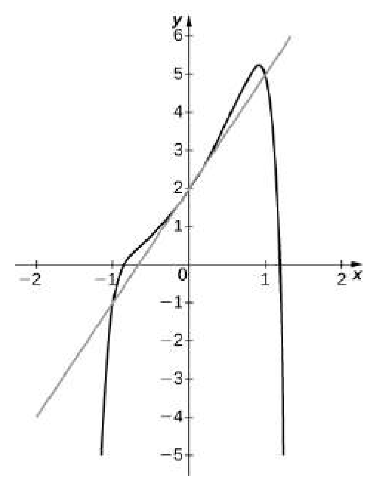
129. Indefinida

131. a. 2, b. no existe, c. $2{,}5$

133. a. 23, b. $y = 23x - 28$



135. a. 3, b. $y = 3x + 2$



137. $y = -7x - 3$

139. $y = -5x + 7$

141. $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

143. $y = -3x^2 + 9x - 1$

145. $\frac{12}{121}$ o 0,0992 ft/s

147. a. $\frac{-2t^4-2t^3+200t+50}{\left(t^3+50\right)^2}$ b. $-0{,}02395$ mg/L-h, –0,01344 mg/L-h, –0,003566 mg/L-h, –0,001579 mg/L-h c. La tasa a la que disminuye la concentración del fármaco en el torrente sanguíneo se reduce a 0 a medida que pasa el tiempo.

149. a. $F'(d) = \frac{-2Gm_1m_2}{d^3}$ b. $-1{,}33 \times 10^{-7}$ N/m

Sección 3.4 ejercicios

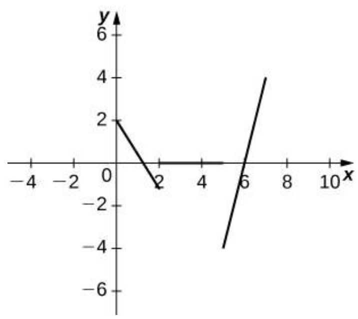
151. a. $v(t) = 6t^2 - 30t + 36, a(t) = 12t - 30$; b. se acelera $(2, 2{,}5) \cup \left(3, \infty\right)$, se ralentiza $(0, 2) \cup (2{,}5, 3)$ grandes.

153. a. 464 ft/s^2 b. -32 ft/s^2

155. a. 5 ft/s b. 9 ft/s

157. a. 84 ft/s, -84 ft/s b. 84 ft/s c $\frac{25}{8}$ s d. -32 ft/s^2 en ambos casos e. $\frac{1}{8}\left(25 + \sqrt{965}\right)$ s f. $-4\sqrt{965}$ ft/s

159. a. La velocidad es positiva en $(0, 1{,}5) \cup (6, 7)$, negativo en $(1{,}5, 2) \cup (5, 6)$, y cero en $(2, 5)$. b.



c. La aceleración es positiva en $(5, 7)$, negativo en $(0, 2)$, y cero en $(2, 5)$. d. El objeto acelera en $(6, 7) \cup (1{,}5, 2)$ y se ralentiza en $(0, 1{,}5) \cup (5, 6)$.

161. a. $R(x) = 10x - 0{,}001x^2$ b. $R'(x) = 10 - 0{,}002x$ c. 6 dólares por artículo, 0 dólares por artículo

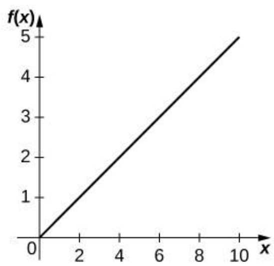
163. a. $C'(x) = 65$ b. $R(x) = 143x - 0{,}03x^2, R'(x) = 143 - 0{,}06x$ c. $83, -97$. A un nivel de producción de 1.000 taladros inalámbricos, los ingresos aumentan a una tasa de 83 dólares por taladro; a un nivel de producción de 4.000 taladros inalámbricos, los ingresos disminuyen a una tasa de 97 dólares por taladro. d $P(x) = -0{,}03x^2 + 78x - 75.000, P'(x) = -0{,}06x + 78$ e. $18, -162$. A un nivel de producción de 1.000 taladros inalámbricos, la ganancia aumenta a una tasa de 18 dólares por taladro; a un nivel de producción de 4.000 taladros inalámbricos, la ganancia disminuye a una tasa de 162 dólares por taladro.

165. a. $N'(t) = 3.000\left(\frac{-4t^2+400}{\left(t^2+100\right)^2}\right)$ b. $120, 0, -14{,}4, -9{,}6$ c. La población de bacterias aumenta desde el tiempo de 0 hasta las 10 horas; posteriormente, la población de bacterias disminuye. d. $0, -6, 0{,}384, 0{,}432$. La tasa de aumento de las bacterias decrece durante las primeras 10 horas. Después, la población de bacterias va disminuyendo a un ritmo decreciente.

167. a. $P(t) = 0{,}03983 + 0{,}4280$ b. $P'(t) = 0{,}03983$. La población está aumentando. c. $P''(t) = 0$. El ritmo de aumento de la población es constante.

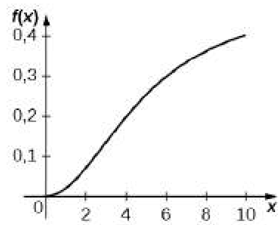
169. a. $p(t) = -0{,}6071x^2 + 0{,}4357x - 0{,}3571$ b. $p'(t) = -1{,}214x + 0{,}4357$. Esta es la velocidad del sensor. c $p''(t) = -1{,}214$. Esta es la aceleración del sensor; es una aceleración constante hacia abajo.

171. a.



b. $f'(x) = a$. Cuanto mayor sea el aumento de presas, mayor será el crecimiento de los depredadores c $f''(x) = 0$. A medida que aumenta la cantidad de presas, la tasa de crecimiento demográfico de depredadores es constante. d. Esta ecuación supone que si hay más presas, el depredador es capaz de aumentar el consumo linealmente. Esta suposición no es física porque esperaríamos que hubiera algún punto de saturación en el que hubiera demasiadas presas para que el depredador las consumiera adecuadamente.

173. a.



b. $f'(x) = \frac{2axn^2}{\left(n^2+x^2\right)^2}$. Cuando aumenta la cantidad de presas, aumenta el crecimiento de los depredadores. c $f''(x) = \frac{2an^2\left(n^2-3x^2\right)}{\left(n^2+x^2\right)^3}$. Cuando la cantidad de presas es extremadamente pequeña, la tasa de crecimiento de los depredadores es creciente, pero cuando la cantidad de presas supera un determinado umbral, la tasa de crecimiento de los depredadores comienza a disminuir. d. Mientras menos presas hay, es más fácil que eviten ser vistas por el depredador, por lo que se consumen menos individuos, lo que resulta en un menor crecimiento del depredador.

Sección 3.5 ejercicios

175. $\frac{dy}{dx} = 2x - \sec x \tan x$

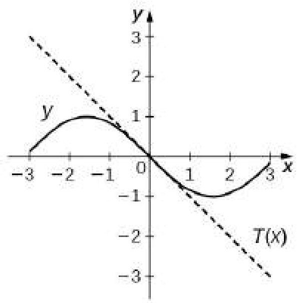
177. $\frac{dy}{dx} = 2x \cot x - x^2 \csc^2 x$

179. $\frac{dy}{dx} = \frac{x \sec x \tan x - \sec x}{x^2}$

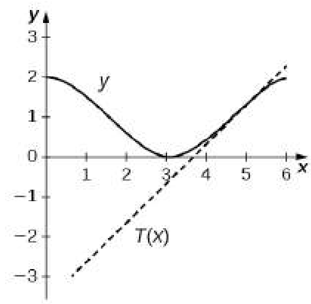
181. $\frac{dy}{dx} = (1 - \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x) - \cos x\,(x + \cos x)$ grandes.

183. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$

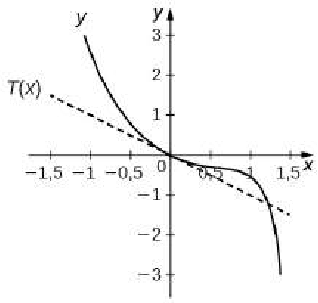
185. $y = -x$



187. $y = x + \frac{2-3\pi}{2}$



189. $y = -x$



191. $3\cos x - x\,\mathrm{sen}\,x$

193. $\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x$

195. $2\csc x\left(\csc^2 x + \cot^2 x\right)$ grandes.

197. $\frac{(2n+1)\pi}{4}$, donde n es un número entero

199. $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right),\ \left(\frac{3\pi}{4},\ -1\right),\ \left(\frac{5\pi}{4},\ 1\right),\ \left(\frac{7\pi}{4},\ -1\right)$

201. $a = 0, b = 3$

203. $y' = 5\cos(x)$, creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, y $\left(\frac{7\pi}{2}, 12\right)$

209. $3\,\mathrm{sen}\,x$

211. $5\cos x$

213. $720x^7 - 5\tan(x)\sec^3(x) - \tan^3(x)\sec(x)$

Sección 3.6 ejercicios

215. $18u^2 . 7 = 18(7x-4)^2 . 7$

217. $-\mathrm{sen}\,u . \frac{-1}{8} = -\mathrm{sen}\left(\frac{-x}{8}\right) . \frac{-1}{8}$

219. $\frac{8x-24}{2\sqrt{4u+3}} = \frac{4x-12}{\sqrt{4x^2-24x+3}}$

221. a. $u = 3x^2 + 1$; b. $18x\left(3x^2+1\right)^2$

223. a. $f(u) = u^7, u = \frac{x}{7} + \frac{7}{x}$; b. $7\left(\frac{x}{7} + \frac{7}{x}\right)^6 . \left(\frac{1}{7} - \frac{7}{x^2}\right)$ grandes.

225. a. $f(u) = \csc u, u = \pi x + 1$; b. $-\pi\csc(\pi x + 1) . \cot(\pi x + 1)$ grandes.

227. a. $f(u) = -6u^{-3}, u = \mathrm{sen}\,x$, b. $18(\mathrm{sen})^{-4} x . \cos x$

229. $\frac{4}{(5-2x)^3}$

231. $6\left(2x^3 - x^2 + 6x + 1\right)^2\left(3x^2 - x + 3\right)$ grandes.

233. $-3(\tan x + \operatorname{sen} x)^{-4}.\left(\sec^2 x + \cos x\right)$ grandes.

235. $-7\cos(\cos 7x).\operatorname{sen} 7x$

237. $-12\cot^2(4x+1).\csc^2(4x+1)$

239. $10\frac{3}{4}$

241. $y = \frac{-1}{2}x$

243. $x = \pm\sqrt{6}$

245. 10

247. $-\frac{1}{8}$

249. -4

251. -12

253. a. $-\frac{200}{343}$ m/s, b. $\frac{600}{2401}$ m/s^2, c. El tren va disminuyendo su velocidad, ya que la velocidad y la aceleración tienen signos opuestos.

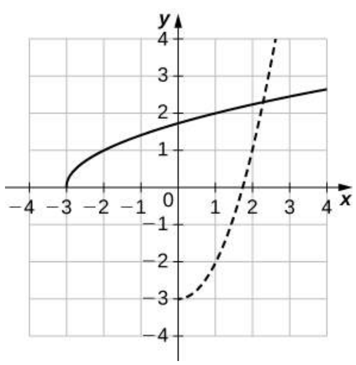
255. a. $C'(x) = 0{,}0003x^2 - 0{,}04x + 3$ b. $\frac{dC}{dt} = 100.\left(0{,}0003x^2 - 0{,}04x + 3\right)$ c. Aproximadamente 90.300 dólares por semana

257. a. $\frac{dS}{dt} = -\frac{8\pi r^2}{(t+1)^3}$ b. El volumen disminuye a una tasa de $-\frac{\pi}{36}$ ft^3/min.

259. ~2,3 ft/h

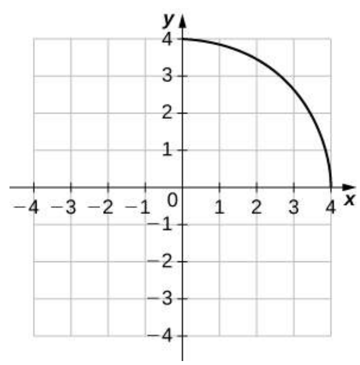
Sección 3.7 ejercicios

261. a.



b. $\left(f^{-1}\right)'(1) \sim 2$

263. a.



b. $\left(f^{-1}\right)'(1) \sim -1/\sqrt{3}$

265. a. 6, b. $x = f^{-1}(y) = \left(\frac{y+3}{2}\right)^{1/3}$, c. $\frac{1}{6}$

267. a. 1, b. $x = f^{-1}(y) = \operatorname{sen}^{-1} y$, c. 1

269. $\frac{1}{5}$

271. $\frac{1}{3}$

273. 1

275. a. 4, b. $y = 4x$

277. a. $-\frac{1}{13}$, b. $y = -\frac{1}{13}x + \frac{18}{13}$

279. $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

281. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

283. $\frac{3\left(1+\tan^{-1}x\right)^2}{1+x^2}$

285. $\frac{-1}{\left(1+x^2\right)\left(\tan^{-1}x\right)^2}$

287. $\frac{x}{\left(5-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$

289. -1

291. $\frac{1}{2}$

293. $\frac{1}{10}$

295. a. $v(t) = \frac{1}{1+t^2}$ b. $a(t) = \frac{-2t}{\left(1+t^2\right)^2}$ c. $(a)\, 0{,}2, 0{,}06, 0{,}03; (b) - 0{,}16, -0{,}028, -0{,}0088$ d. El disco de hockey se desacelera/ralentiza a los 2, 4 y 6 segundos.

297. $-0{,}0168$ rad/ft

299. a. $\frac{d\theta}{dx} = \frac{10}{100+x^2} - \frac{40}{1.600+x^2}$ b. $\frac{18}{325}, \frac{9}{340}, \frac{42}{4745}, 0$ c. A medida que una persona se aleja de la pantalla, el ángulo de visión aumenta, lo que implica que al alejarse, su visión de la pantalla se amplía. d. $-\frac{54}{12905}, -\frac{3}{500}, -\frac{198}{29945}, -\frac{9}{1360}$ e. A medida que la persona se aleja más de 20 ft de la pantalla, su ángulo de visión disminuye. La distancia óptima a la que debe situarse la persona para maximizar el ángulo de visión es de 20 ft.

Sección 3.8 ejercicios

301. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y}$

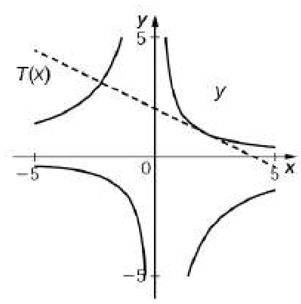
303. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y} - \frac{y}{2x}$

305. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{y}{2\sqrt{x+4}}}{\sqrt{x+4} - x}$

307. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cos(xy)}{2y - \operatorname{sen}(xy) - xy\cos xy}$

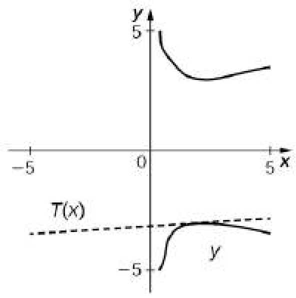
309. $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2y - y^3}{x^3 + 3xy^2}$

311.



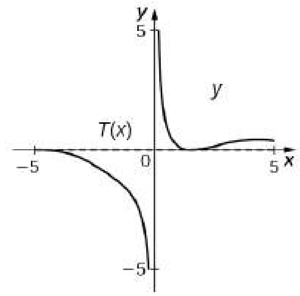
$y = \frac{-1}{2}x + 2$

313.



$y = \frac{1}{\pi+12}x - \frac{3\pi+38}{\pi+12}$

315.



$y = 0$

317. a. $y = -x + 2$ b. $(3, -1)$

319. a. $\left(\pm\sqrt{7}, 0\right)$ b. -2 c. Son paralelas ya que la pendiente es la misma en ambas intersecciones.

321. $y = -x + 1$

323. a. $-0{,}5926$ b. Cuando se gastan 81 dólares en mano de obra y 16 en capital, la cantidad gastada en capital disminuye en 0,5926 dólares por cada dólar gastado en mano de obra.

325. -8

327. $-2{,}67$

329. $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Sección 3.9 ejercicios

331. $2xe^x + x^2e^x$

333. $e^{x^3 \ln x}\left(3x^2 \ln x + x^2\right)$ grandes.

335. $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

337. $2^{4x+2}. \ln 2 + 8x$

339. $\pi x^{\pi-1}. \pi^x + x^\pi. \pi^x \ln \pi$

341. $\frac{5}{2(5x-7)}$ grandes.

343. $\frac{\tan x}{\ln 10}$

345. $2^x. \ln 2. \log_3 7^{x^2-4} + 2^x. \frac{2x \ln 7}{\ln 3}$

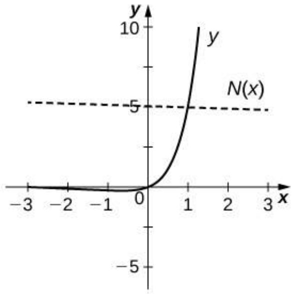
347. $(\operatorname{sen} 2x)^{4x}\, [4. \ln\, (\operatorname{sen} 2x) + 8x. \cot 2x]$

349. $x^{\log_2 x}. \frac{2 \ln x}{x \ln 2}$

351. $x^{\cot x}. \left[-\csc^2 x. \ln x + \frac{\cot x}{x}\right]$

353. $x^{-1/2}\left(x^2+3\right)^{2/3}(3x-4)^4\cdot\left[\frac{-1}{2x}+\frac{4x}{3\left(x^2+3\right)}+\frac{12}{3x-4}\right]$

355.



$y=\frac{-1}{5+5\ln 5}x+\left(5+\frac{1}{5+5\ln 5}\right)$

357. a. $x=e\sim 2{,}718$ b. $\left(e,\infty\right),(0,e)$

359. a. $P=500.000(1{,}05)^t$ individuos b. $P'(t)=24395.(1{,}05)^t$ individuos por año c. 39.737 individuos por año

361. a. A principios de 1960 había 5,3 mil casos de la enfermedad en la ciudad de Nueva York. A principios de 1964 había aproximadamente 723 casos de la enfermedad en Estados Unidos. b. A principios de 1960, el número de casos de la enfermedad estaba disminuyendo a una tasa de $-4{,}611$ mil por año; a principios de 1963, el número de casos de la enfermedad disminuía a una tasa de $-0{,}2808$ mil por año.

363. $p=35741(1{,}045)^t$

365.

Años desde 1790	P''
0	69,25
10	107,5
20	167,0
30	259,4
40	402,8
50	625,5
60	971,4
70	1508,5

Ejercicios de repaso

367. Falso.

369. Falso

371. $\frac{1}{2\sqrt{x+4}}$

373. $9x^2 + \frac{8}{x^3}$

375. $e^{\operatorname{sen} x}\cos x$

377. $x\sec^2(x) + 2x\cos(x) + \tan(x) - x^2\operatorname{sen}(x)$
grandes.

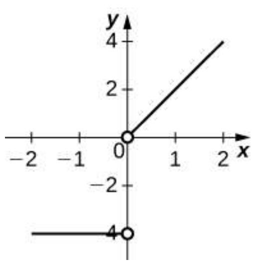
379. $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{sen}^{-1}(x)\right)$
grandes.

381. $\cos x.(\ln x + 1) - x\ln(x)\operatorname{sen} x$

383. $4^x(\ln 4)^2 + 2\operatorname{sen} x + 4x\cos x - x^2\operatorname{sen} x$

385. $T = (2+e)x - 2$

387.



389. $w'(3) = -\frac{2{,}9\pi}{6}$. A las 3 de la mañana, la marea disminuye a una tasa de 1,514 ft/h.

391. $-7{,}5$. La velocidad del viento está disminuyendo a una tasa de 7,5 mph/h.

Capítulo 4

Punto de control

4.1 $\frac{1}{72\pi}$ cm/s, o aproximadamente 0,0044 cm/s

4.2 500 ft/s

4.3 $\frac{1}{10}$ rad/s

4.4 $-0{,}61$ ft/s

4.5 $L(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8)$; 2,00833

4.6 $L(x) = -x + \frac{\pi}{2}$

4.7 $L(x) = 1 + 4x$

4.8 $dy = 2xe^{x^2}dx$

4.9 $dy = 1{,}6$, $\Delta y = 1{,}64$

4.10 La medición del volumen tiene una exactitud de $21{,}6\,\text{cm}^3$.

4.11 7,6 %

4.12 $x = -\frac{2}{3}$, $x = 1$

4.13 El máximo absoluto es 3 y se produce en $x = 4$. El mínimo absoluto es -1 y se produce en $x = 2$.

4.14 $c = 2$

4.15 $\frac{5}{2\sqrt{2}}$ s

4.16 f tiene un mínimo local en -2 y un máximo local en 3.

4.17 f no tiene extremos locales porque f' no cambia de signo en $x = 1$.

4.18 f es cóncava hacia arriba en el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

4.19 f tiene un máximo local en -2 y un mínimo local en 3.

4.20 Ambos límites son 3. La línea $y = 3$ es una asíntota horizontal.

4.21 Supongamos que $\varepsilon > 0$. Supongamos que $N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Por lo tanto, para todo $x > N$, tenemos

$$\left|3 - \frac{1}{x^2} - 3\right| = \frac{1}{x^2} < \frac{1}{N^2} = \varepsilon$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - 1/x^2\right) = 3$.

4.22 Supongamos que $M > 0$. Supongamos que $N = \sqrt{\frac{M}{3}}$. Entonces, para todos los $x > N$, tenemos

$$3x^2 > 3N^2 = 3\left(\sqrt{\frac{M}{3}}\right)^2 2 = \frac{3M}{3} = M$$

4.23 $-\infty$

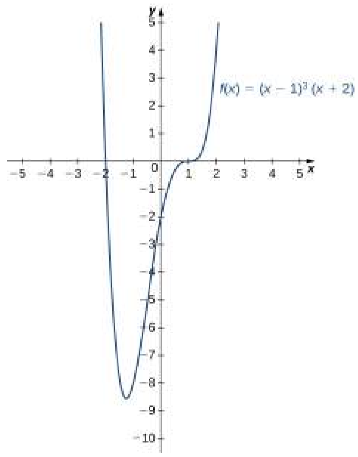
4.24 $\frac{3}{5}$

4.25 $\pm\sqrt{3}$

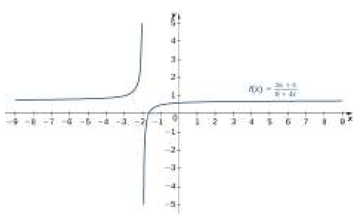
4.26 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \frac{3}{5}$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

4.27



4.28



4.29 $y = \frac{3}{2}x$

4.30 La función f tiene una cúspide en $(0, 5)$ $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$. Para el comportamiento final, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$.

4.31 La superficie máxima es 5.000 pies^2.

4.32 $V(x) = x(20 - 2x)(30 - 2x)$. El dominio es $[0, 10]$.

4.33 $T(x) = \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{(15-x)^2+1}}{2{,}5}$

4.34 La empresa debe cobrar $\$75$ por auto y por día.

4.35 $A(x) = 4x\sqrt{1 - x^2}$. El dominio de consideración es $[0, 1]$.

4.36 $c(x) = \frac{259{,}2}{x} + 0{,}2x^2$ dólares

4.37 1

4.38 0

4.39 $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$. Por lo tanto, no podemos aplicar la regla de L'Hôpital. El límite del cociente es ∞

4.40 1

4.41 0

4.42 e

4.43 1

4.44 La función 2^x crece más rápido que x^{100}.

4.45 $x_1 \approx 0{,}33333333, x_2 \approx 0{,}347222222$

4.46 $x_1 = 2, x_2 = 1{,}75$

4.47 $x_1 \approx -1{,}842105263, x_2 \approx -1{,}772826920$

4.48 $x_1 = 6, x_2 = 8, x_3 = \frac{26}{3}, x_4 = \frac{80}{9}, x_5 = \frac{242}{27}; x^* = 9$

4.49 $-\cos x + C$

4.50 $\frac{d}{dx}(x \operatorname{sen} x + \cos x + C) = \operatorname{sen} x + x \cos x - \operatorname{sen} x = x \cos x$

4.51 $x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7x + C$

4.52 $y = -\frac{3}{x} + 5$

4.53 $2{,}93 \text{ sec}, \ 64{,}5 \text{ pies}$

Sección 4.1 ejercicios

1. 8

3. $\pm \frac{13}{\sqrt{10}}$

5. $2\sqrt{3}$ ft/s

7. La distancia disminuye a 390 mi/h.

9. La distancia entre ellos se reduce a una tasa de $\frac{1320}{13} \approx 101{,}5$ mph.

11. $\frac{9}{2}$ ft/s

13. Crece a una tasa de $\frac{4}{9}$ ft/s

15. La distancia aumenta a una tasa de $\frac{\left(135\sqrt{26}\right)}{26}$ ft/s

17. $-\frac{5}{6}$ m/s

19. 240π m^2/s

21. $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ cm

23. El área aumenta a una tasa de $\frac{\left(3\sqrt{3}\right)}{8}$ ft^2/s.

25. La profundidad del agua disminuye a una tasa de $\frac{128}{125\pi}$ ft/min.

27. El volumen disminuye a una tasa de $\frac{(25\pi)}{16}$ft^3/min.

29. El agua sale a una tasa de $\frac{(2\pi)}{5}$ m^3/min.

31. $\frac{3}{2}$ m/s

33. $\frac{25}{19\pi}$ ft/min

35. $\frac{2}{45\pi}$ ft/min

37. El ángulo disminuye a una tasa de $\frac{400}{1681}$ rad/s.

39. 100πmi/min

41. El ángulo cambia a una tasa de $\frac{11}{25}$ rad/s.

43. La distancia aumenta a una tasa de $62{,}50$ ft/s.

45. La distancia disminuye a una tasa de $11{,}99$ ft/s.

Sección 4.2 ejercicios

47. $f'(a) = 0$

49. La aproximación lineal es exacta cuando $y = f(x)$ es lineal o constante.

51. $L(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x - 2)$ grandes.

53. $L(x) = 1$

55. $L(x) = 0$

57. 0,02

59. $1{,}9996875$

61. $0{,}001593$

63. 1; error, $\sim 0{,}00005$

65. $0{,}97$; error, $\sim 0{,}0006$

67. $3 - \frac{1}{600}$; error, $\sim 4{,}632 \times 10^{-7}$

69. $dy = (\cos x - x \operatorname{sen} x)\, dx$

71. $dy = \left(\frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}\right) dx$

73. $dy = -\frac{1}{(x+1)^2} dx, -\frac{1}{16}$

75. $dy = \frac{9x^2 + 12x - 2}{2(x+1)^{3/2}} dx, -0{,}1$

77. $dy = \left(3x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$, $0{,}2$

79. $12x\, dx$

81. $4\pi r^2\, dr$

83. $-1{,}2\pi \text{ cm}^3$

85. -100 ft^3

Sección 4.3 ejercicios

91. Las respuestas pueden variar

93. Las respuestas variarán

95. No; las respuestas variarán

97. Dado que el máximo absoluto es el valor de la función (salida) y no el valor de *x*, la respuesta es no; las respuestas variarán.

99. Cuando $a = 0$

101. Mínimo absoluto en 3; máximo absoluto en -2,2; mínimos locales en -2, 1; máximos locales en -1, 2

103. Mínimos absolutos en -2, 2; máximos absolutos en -2,5, 2,5; mínimo local en 0; máximos locales en -1, 1

105. Las respuestas pueden variar.

107. Las respuestas pueden variar.

109. $x = 1$

111. Ninguno

113. $x = 0; x = \pm 2$

115. Ninguno

117. $x = -1, 1$

119. Máximo absoluto: $x = 4$, $y = \frac{33}{2}$; mínimo absoluto: $x = 1$, $y = 3$

121. Mínimo absoluto: $x = \frac{1}{2}$, $y = 4$

123. Máximo absoluto: $x = 2\pi$, $y = 2\pi$; mínimo absoluto: $x = 0$, $y = 0$

125. Máximo absoluto: $x = -3$; mínimo absoluto: $-1 \le x \le 1$, $y = 2$

127. Máximo absoluto: $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \sqrt{2}$; mínimo absoluto: $x = \frac{5\pi}{4}$, $y = -\sqrt{2}$

129. Mínimo absoluto: $x = -2$, $y = 1$

131. Mínimo absoluto: $x = -3$, $y = -135$; máximo local: $x = 0$, $y = 0$; mínimo local: $x = 1$, $y = -7$

133. Máximo local: $x = 1 - 2\sqrt{2}$, $y = 3 - 4\sqrt{2}$; mínimo local: $x = 1 + 2\sqrt{2}$, $y = 3 + 4\sqrt{2}$

135. Máximo absoluto: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{3}{2}$; mínimo absoluto: $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$

137. Máximo local: $x = -2$, $y = 59$; mínimo local: $x = 1$, $y = -130$

139. Máximo absoluto: $x = 0$, $y = 1$; mínimo absoluto: $x = -2, 2$, $y = 0$

141. $h = \frac{9245}{49}$ m, $t = \frac{300}{49}$ s

143. El mínimo absoluto fue en 1848, cuando no se produjo oro.

145. Mínimos absolutos: $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$; máximo local en $x = 1$, $y = 2$

147. No hay máximos/mínimos si a es impar, mínimo en $x = 1$ si a es par

Sección 4.4 ejercicios

149. Un ejemplo es $f(x) = |x| + 3$, $-2 \leq x \leq 2$

151. Sí, pero el teorema del valor medio sigue sin aplicarse.

153. $\left(-\infty, 0\right), \left(0, \infty\right)$ grandes.

155. $\left(-\infty, -2\right), \left(2, \infty\right)$ grandes.

157. 2 puntos

159. 5 puntos

161. $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

163. $c = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$

165. $c = 1$

167. No diferenciable

169. No diferenciable

171. Sí

173. El teorema del valor medio no se aplica porque la función es discontinua en $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$.

175. Sí

177. El teorema del valor medio no se aplica; discontinuo en $x = 0$.

179. Sí

181. El teorema del valor medio no se aplica; no es diferenciable en $x = 0$.

183. $b = \pm 2\sqrt{c}$

185. $c = \pm \frac{1}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, $c = \pm 0{,}1533$

187. El teorema del valor medio no se aplica.

189. $\frac{1}{2\sqrt{c+1}} - \frac{2}{c^3} = \frac{521}{2880}$; $c = 3{,}133, 5{,}867$

191. Sí

193. Es constante.

Sección 4.5 ejercicios

195. No es un máximo/mínimo local porque f' no cambia de signo

197. No

199. Falso; por ejemplo, $y = \sqrt{x}$.

201. Es creciente en $-2 < x < -1$ y $x > 2$; decreciente en $x < -2$ y $-1 < x < 2$

203. Decreciente para $x < 1$, creciente para $x > 1$

205. Decreciente para $-2 < x < -1$ y $1 < x < 2$; creciente para $-1 < x < 1$ y $x < -2$ y $x > 2$

207. a. Creciente en $-2 < x < -1, 0 < x < 1, x > 2$, decreciente en $x < -2$, $-1 < x < 0, 1 < x < 2$; b. máximos en $x = -1$ y $x = 1$, mínimos en $x = -2$ y $x = 0$ y $x = 2$

209. a. Creciente en $x > 0$, decreciente en $x < 0$; b. Mínimo en $x = 0$

211. Cóncava hacia arriba en todo x, sin puntos de inflexión

213. Cóncava hacia arriba en todo x, sin puntos de inflexión

215. Cóncava hacia arriba para $x < 0$ y $x > 1$, cóncavo hacia abajo para $0 < x < 1$, puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 1$

217. Las respuestas variarán

219. Las respuestas variarán

221. a. Creciente en $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, decreciente en $x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}$ b. Máximo local en $x = \frac{\pi}{2}$; mínimo local en $x = -\frac{\pi}{2}$

223. a. Cóncava hacia arriba para $x > \frac{4}{3}$, cóncavo hacia abajo para $x < \frac{4}{3}$ b. Punto de inflexión en $x = \frac{4}{3}$

225. a. Creciente en $x < 0$ y $x > 4$, decreciente en $0 < x < 4$ b. Máximo en $x = 0$, mínimo en $x = 4$ c. Cóncava hacia arriba para $x > 2$, cóncavo hacia abajo para $x < 2$ d. Punto de inflexión en $x = 2$

227. a. Creciente en $x < 0$ y $x > \frac{60}{11}$, decreciente en $0 < x < \frac{60}{11}$ b. Mínimo en $x = \frac{60}{11}$, máximo local en x = 0 c. Cóncavo hacia abajo para $x < \frac{54}{11}$, cóncavo hacia arriba para $x > \frac{54}{11}$ d. Punto de inflexión en $x = \frac{54}{11}$

229. a. Creciente en $x > -\frac{1}{2}$, decreciente en $x < -\frac{1}{2}$ b. Mínimo en $x = -\frac{1}{2}$ c. Cóncavo hacia arriba para toda x d. No hay puntos de inflexión

231. a. Es creciente en $-\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$, decreciente a lo largo de $x > \frac{3}{4}$ y $x < -\frac{1}{4}$ b. Mínimo en $x = -\frac{1}{4}$, máximo en $x = \frac{3}{4}$ c. Cóncava hacia arriba para $-\frac{3}{4} < x < \frac{1}{4}$, cóncavo hacia abajo para $x < -\frac{3}{4}$ y $x > \frac{1}{4}$ d. Puntos de inflexión en $x = -\frac{3}{4}, x = \frac{1}{4}$

233. a. Creciente para todo x b. No hay mínimo ni máximo local c. Cóncava hacia arriba para $x > 0$, cóncavo hacia abajo para $x < 0$ d. Punto de inflexión en $x = 0$

235. a. Creciente para todo x donde se define b. No hay mínimos ni máximos locales c. Cóncava hacia arriba para $x < 1$; cóncavo hacia abajo para $x > 1$ d. No hay puntos de inflexión en el dominio

237. a. Creciente en $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$, decreciente en $x > \frac{3\pi}{4}, x < -\frac{\pi}{4}$ b. Mínimo en $x = -\frac{\pi}{4}$, máximo en $x = \frac{3\pi}{4}$ c. Cóncava hacia arriba para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, cóncavo hacia abajo para $x < -\frac{\pi}{2}, x > \frac{\pi}{2}$ d. Puntos de inflexión en $x = \pm\frac{\pi}{2}$

239. a. Creciente en $x > 4$, decreciente en $0 < x < 4$ b. Mínimo en $x = 4$ c. Cóncava hacia arriba para $0 < x < 8\sqrt[3]{2}$, cóncavo hacia abajo para $x > 8\sqrt[3]{2}$ d. Punto de inflexión en $x = 8\sqrt[3]{2}$

241. $f > 0, f' > 0, f'' < 0$

243. $f > 0, f' < 0, f'' > 0$

245. $f > 0, f' > 0, f'' > 0$

247. Cierto, según el teorema del valor medio

249. Cierto, examine la derivada

Sección 4.6 ejercicios

251. $x = 1$

253. $x = -1, x = 2$

255. $x = 0$

257. Sí, hay una asíntota vertical

259. Sí, hay asíntota vertical

261. 0

263. ∞

265. $-\frac{1}{7}$

267. -2

269. -4

271. Horizontal: ninguno, vertical: $x = 0$

273. Horizontal: ninguno, vertical: $x = \pm 2$

275. Horizontal: ninguno, vertical: ninguno

277. Horizontal $y = 0$, vertical: $x = \pm 1$

279. Horizontal $y = 0$, vertical: $x = 0$ y $x = -1$

281. Horizontal $y = 1$, vertical: $x = 1$

283. Horizontal: ninguno, vertical: ninguno

285. Las respuestas variarán, por ejemplo: $y = \frac{2x}{x-1}$

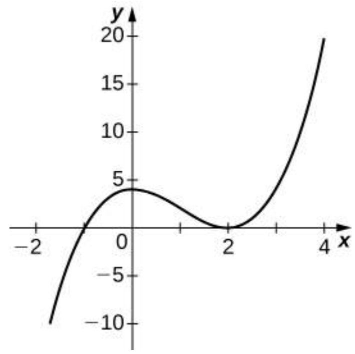
287. Las respuestas variarán, por ejemplo: $y = \frac{4x}{x+1}$

289. $y = 0$

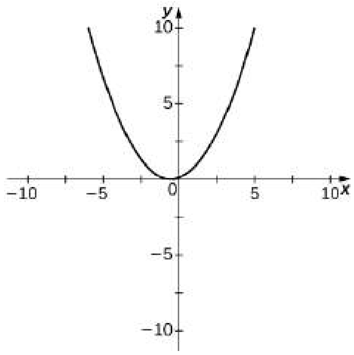
291. ∞

293. $y = 3$

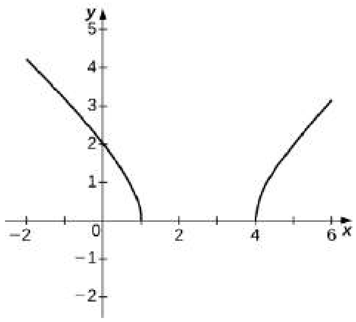
295.



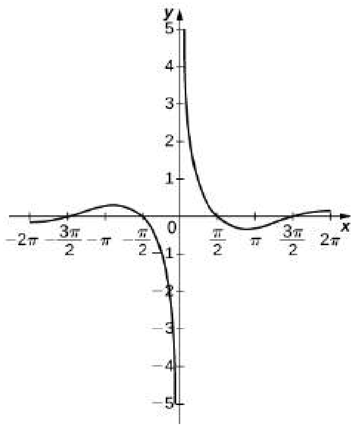
297.



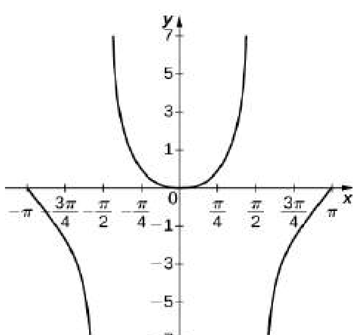
299.



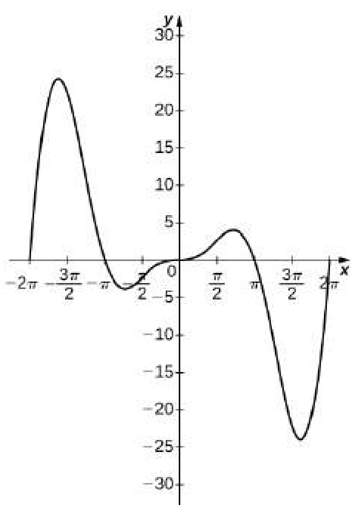
301.



303.



305.



307. $P(0) \neq 0$ y $Q(x) = 0$

309. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \infty$

Sección 4.7 ejercicios

311. Los puntos críticos pueden ser los mínimos, los máximos o ninguno de ellos.

313. Falso; $y = -x^2$ solo tiene un mínimo

315. $h = \frac{62}{3}$ pulgadas

317. 1

319. 100 pies por 100 pies

321. 40 pies por 40 pies

323. 19,73 pies.

325. 84 lpm

327. $T(\theta) = \frac{40\theta}{3v} + \frac{40 \cos \theta}{v}$

329. $v = \sqrt{\frac{b}{a}}$

331. aproximadamente 34,02 mph

333. 4

335. 0

337. Máximo: $x = 5, y = 5$; mínimo: $x = 0, y = 10$ y $y = 0, x = 10$

339. Máximo: $x = 1, y = 9$; mínimo: ninguno

341. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

343. 6

345. $r = 2, h = 4$

347. $(2, 1)$

349. $(0{,}8351, 0{,}6974)$

351. $A = 20r - 2r^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$

353. $C(x) = 5x^2 + \frac{32}{x}$ Al diferenciar, establecer la derivada en cero y resolver, obtenemos $x = \sqrt[3]{\frac{16}{5}}$ y $h = \sqrt[3]{\frac{25}{4}}$.

355. $P(x) = (50 - x)(800 + 25x - 50)$

Sección 4.8 ejercicios

357. ∞

359. $\frac{1}{2a}$

361. $\frac{1}{na^{n-1}}$

363. No se puede aplicar directamente; hay que utilizar logaritmos

365. No se puede aplicar directamente; reescriba como $\lim_{x \to 0} x^3$

367. 6

369. -2

371. -1

373. n

375. $-\frac{1}{2}$

377. $\frac{1}{2}$

379. 1

381. $\frac{1}{6}$

383. 1

385. 0

387. 0

389. -1

391. ∞

393. 0

395. $\frac{1}{e}$

397. 0

399. 1

401. 0

403. $\tan(1)$

405. 2

Sección 4.9 ejercicios

407. $F(x_n) = x_n - \frac{x_n{}^3 + 2x_n + 1}{3x_n{}^2 + 2}$

409. $F(x_n) = x_n - \frac{e^{x_n}}{e^{x_n}}$

411. $|c| > 0{,}5$ no funciona, $|c| \leq 0{,}5$ funciona

413. $c = \frac{1}{f'(x_n)}$

415. a. $x_1 = \frac{12}{25}, x_2 = \frac{312}{625}$; b. $x_1 = -4, x_2 = -40$

417. a. $x_1 = 1{,}291, x_2 = 0{,}8801$; b. $x_1 = 0{,}7071, x_2 = 1{,}189$

419. a. $x_1 = -\frac{26}{25}, x_2 = -\frac{1224}{625}$; b. $x_1 = 4, x_2 = 18$

421. a. $x_1 = \frac{6}{10}, x_2 = \frac{6}{10}$; b. $x_1 = 2, x_2 = 2$

423. $3{,}1623$ o $-3{,}1623$

425. $0, -1$ o 1

427. 0

429. $0{,}5188$ o $-1{,}2906$

431. 0

433. $4{,}493$

435. $0{,}159, 3{,}146$

437. Necesitamos f para ser dos veces continuamente diferenciable.

439. $x = 0$

441. $x = -1$

443. $x = 5{,}619$

445. $x = -1{,}326$

447. La ecuación no tiene solución.

449. Entra en un ciclo.

451. 0

453. $-0{,}3513$

455. Newton: 11 iteraciones, secante: 16 iteraciones

457. Newton: tres iteraciones, secante: seis iteraciones

459. Newton: cinco iteraciones, secante: ocho iteraciones

461. $E = 4{,}071$

463. $4.394\ \%$

Sección 4.10 ejercicios

465. $F'(x) = 15x^2 + 4x + 3$

467. $F'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

469. $F'(x) = e^x$

471. $F(x) = e^x - x^3 - \cos(x) + C$

473. $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 2\cos(2x) + C$

475. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x^3 + C$

477. $F(x) = \frac{2}{5}\left(\sqrt{x}\right)^5 + C$

479. $F(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + C$

481. $F(x) = x + \tan(x) + C$

483. $F(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3(x) + C$

485. $F(x) = -\frac{1}{2}\cot(x) - \frac{1}{x} + C$

487. $F(x) = -\sec x - 4\csc x + C$

489. $F(x) = -\frac{1}{8}e^{-4x} - \cos x + C$

491. $-\cos x + C$

493. $3x - \frac{2}{x} + C$

495. $\frac{8}{3}x^{3/2} + \frac{4}{5}x^{5/4} + C$

497. $14x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$

499. $f(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}$

501. $f(x) = \operatorname{sen} x + \tan x + 1$

503. $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{x} + \frac{13}{6}$

505. Las respuestas pueden variar; una respuesta posible es $f(x) = e^{-x}$

507. Las respuestas pueden variar; una respuesta posible es $f(x) = -\operatorname{sen} x$

509. 5,867 s

511. 7,333 s

513. 13,75 ft/s^2

515. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x$

517. $F(x) = x^2 - \cos x + 1$

519. $F(x) = -\frac{1}{(x+1)} + 1$

521. Verdadero

523. Falso

Ejercicios de repaso

525. Verdadero, según el teorema del valor medio

527. Verdadero

529. Creciente: $(-2, 0) \cup \left(4, \infty\right)$, decreciente: $\left(-\infty, -2\right) \cup (0, 4)$

531. $L(x) = \frac{17}{16} + \frac{1}{2}(1 + 4\pi)\left(x - \frac{1}{4}\right)$

533. Punto crítico: $x = \frac{3\pi}{4}$, mínimo absoluto: $x = 0$, máximo absoluto: $x = \pi$

535. Creciente: $(-1, 0) \cup \left(3, \infty\right)$, decreciente: $\left(-\infty, -1\right) \cup (0, 3)$, cóncavo hacia arriba: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{13}\right)\right) \cup \left(\frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{13}\right), \infty\right)$, cóncava hacia abajo: $\left(\frac{1}{3}\left(2 - \sqrt{13}\right), \frac{1}{3}\left(2 + \sqrt{13}\right)\right)$ grandes.

537. Creciente: $\left(\frac{1}{4}, \infty\right)$, decreciente: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, cóncavo hacia arriba: $\left(0, \infty\right)$, cóncava hacia abajo: en ninguna parte

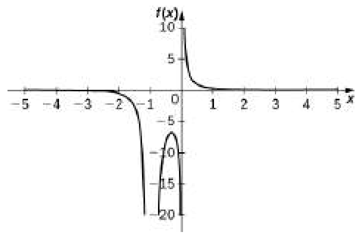
539. 3

541. $-\frac{1}{\pi}$

543. $x_1 = -1, x_2 = -1$

545. $F(x) = \frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{1}{x} + C$

547.



Puntos de inflexión: ninguno; puntos críticos: $x = -\frac{1}{3}$; ceros: ninguno; asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 0$; asíntota horizontal: $y = 0$

549. La altura disminuye a una tasa de $0{,}125$ m/s

551. $x = \sqrt{ab}$ pies

Capítulo 5

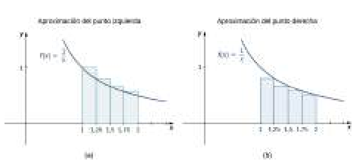
Punto de control

5.1 $\sum_{i=3}^{6} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 120$

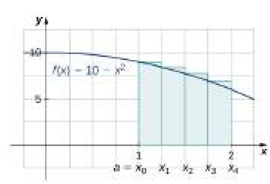
5.2 15.550

5.3 440

5.4 La aproximación del extremo izquierdo es de 0,7595. La aproximación del punto final derecho es 0,6345.



5.5 a. $\text{Suma superior} = 8{,}0313.$
b.



5.6 $A \approx 1{,}125$

5.7 6

5.8 18 unidades cuadradas

5.9 6

5.10 18

5.11 $6\int_1^3 x^3\,dx - 4\int_1^3 x^2\,dx + 2\int_1^3 x\,dx - \int_1^3 3\,dx$

5.12 −7

5.13 3

5.14 $\text{Valor medio} = 1{,}5;\ c = 3$

5.15 $c = \sqrt{3}$

5.16 $g'(r) = \sqrt{r^2 + 4}$

5.17 $F'(x) = 3x^2 \cos x^3$

5.18 $F'(x) = 2x\cos x^2 - \cos x$

5.19 $\frac{7}{24}$

5.20 Kathy sigue ganando, pero por un margen mucho mayor: James patina 24 ft en 3 segundos, pero Kathy patina 29,3634 ft en 3 segundos.

5.21 $-\frac{10}{3}$

5.22 Desplazamiento neto: $\frac{e^2-9}{2} \approx -0{,}8055$ m; distancia total recorrida: $4\ln 4 - 7{,}5 + \frac{e^2}{2} \approx 1{,}740$ m

5.23 17,5 mi

5.24 $\frac{64}{5}$

5.25 $\int 3x^2\left(x^3 - 3\right)^2 dx = \frac{1}{3}\left(x^3 - 3\right)^3 + C$

5.26 $\frac{\left(x^3+5\right)^{10}}{30} + C$

5.27 $-\frac{1}{\operatorname{sen} t} + C$

5.28 $-\frac{\cos^4 t}{4} + C$

5.29 $\frac{91}{3}$

5.30 $\frac{2}{3\pi} \approx 0{,}2122$

5.31 $\int x^2 e^{-2x^3} dx = -\frac{1}{6}e^{-2x^3} + C$

5.32 $\int e^x(3e^x - 2)^2 dx = \frac{1}{9}(3e^x - 2)^3$

5.33 $\int 2x^3 e^{x^4} dx = \frac{1}{2}e^{x^4}$

5.34 $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)$

5.35 $Q(t) = \frac{2^t}{\ln 2} + 8{,}557$. Hay 20.099 bacterias en la placa después de 3 horas.

5.36 Hay 116.

5.37 $\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{4x^{-2}} dx = \frac{1}{8}\left[e^4 - e\right]$

5.38 $\ln|x+2| + C$

5.39 $\frac{x}{\ln 3}(\ln x - 1) + C$

5.40 $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}(4x) + C$

5.41 $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

5.42 $\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{2x}{5}\right) + C$

5.43 $\frac{1}{4}\tan^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + C$

5.44 $\frac{\pi}{8}$

Sección 5.1 ejercicios

1. a. Son iguales; ambas representan la suma de los 10 primeros números enteros. b. Son iguales; ambas representan la suma de los 10 primeros números enteros. c. Son iguales sustituyendo $j = i - 1$. d. Son iguales; la primera suma factoriza los términos de la segunda.

3. $385 - 30 = 355$

5. $15 - (-12) = 27$

7. $5\,(15) + 4\,(-12) = 27$

9. $\sum_{j=1}^{50} j^2 - 2\sum_{j=1}^{50} j = \frac{(50)(51)(101)}{6} - \frac{2(50)(51)}{2} = 40, \quad 375$

11. $4\sum_{k=1}^{25} k^2 - 100\sum_{k=1}^{25} k = \frac{4(25)(26)(51)}{6} - 50\,(25)\,(26) = -10, \quad 400$

13. $R_4 = -0{,}25$

15. $R_6 = 0{,}372$

17. $L_4 = 2{,}20$

19. $L_8 = 0{,}6875$

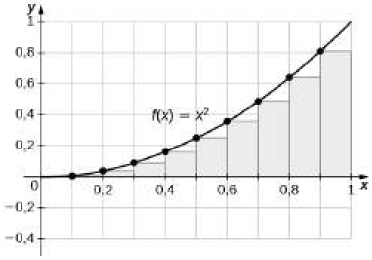
21. $L_6 = 9{,}000 = R_6$. El gráfico de f es un triángulo de área 9.

23. $L_6 = 13{,}12899 = R_6$. Son iguales.

25. $L_{10} = \frac{4}{10}\sum_{i=1}^{10}\sqrt{4 - \left(-2 + 4\frac{(i-1)}{10}\right)^2}$

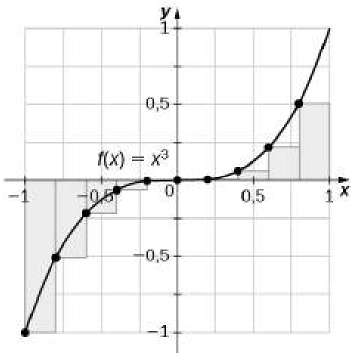
27. $R_{100} = \frac{e-1}{100}\sum_{i=1}^{100} \ln\left(1 + (e-1)\,\frac{i}{100}\right)$

29.



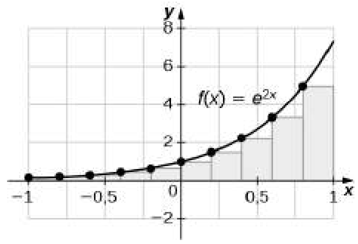
$R_{100} = 0{,}33835, L_{100} = 0{,}32835.$ El gráfico muestra que la suma de Riemann de la izquierda es una subestimación porque la función es creciente. Del mismo modo, la suma de Riemann derecha es una sobreestimación. El área se encuentra entre las sumas de Riemann izquierda y derecha. Se muestran diez rectángulos para mayor claridad visual. Este comportamiento persiste para más rectángulos.

31.



$L_{100} = -0{,}02, R_{100} = 0{,}02$. La suma del extremo izquierdo es una subestimación porque la función es creciente. Del mismo modo, una aproximación al extremo derecho es una sobreestimación. El área se encuentra entre las estimaciones de los puntos finales izquierdo y derecho.

33.



$L_{100} = 3{,}555, R_{100} = 3{,}670$. El gráfico muestra que la suma de Riemann de la izquierda es una subestimación porque la función es creciente. Se muestran diez rectángulos para mayor claridad visual. Este comportamiento persiste para más rectángulos.

35. La suma representa las precipitaciones acumuladas en enero de 2009.

37. El kilometraje total es $7 \times \sum_{i=1}^{25} \left(1 + \frac{(i-1)}{10}\right) = 7 \times 25 + \frac{7}{10} \times 12 \times 25 = 385 \text{ mi.}$

39. Sume los números para obtener un aumento neto de 8,1 in.

41. 309.389.957

43. $L_8 = 3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 = 24$

45. $L_8 = 3 + 5 + 7 + 6 + 8 + 6 + 5 + 4 = 44$

47. $L_{10} \approx 1{,}7604, L_{30} \approx 1{,}7625, L_{50} \approx 1{,}76265$

49. $R_1 = -1, L_1 = 1, R_{10} = -0{,}1, L_{10} = 0{,}1, L_{100} = 0{,}01$, y $R_{100} = -0{,}1$. Por simetría del gráfico, el área exacta es cero.

51. $R_1 = 0, L_1 = 0, R_{10} = 2{,}4499, L_{10} = 2{,}4499, R_{100} = 2{,}1365, L_{100} = 2{,}1365$

53. Si $[c, d]$ es un subintervalo de $[a, b]$ bajo uno de los rectángulos de la suma del punto del extremo izquierdo, entonces el área del rectángulo que contribuye a la estimación del punto del extremo izquierdo es $f(c)(d - c)$. Pero, $f(c) \le f(x)$ por $c \le x \le d$, por lo que el área bajo el gráfico de *f* entre *c* y *d* es $f(c)(d - c)$ más el área por debajo del gráfico de *f* pero por encima del segmento de línea horizontal a la altura $f(c)$, que es positivo. Como esto se cumple en cada intervalo de suma del extremo izquierdo, se deduce que la suma de Riemann izquierda es menor o igual que el área bajo el gráfico de *f* en $[a, b]$.

55. $L_N = \frac{b–a}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + (b–a)\frac{i-1}{N}\right) = \frac{b–a}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(a + (b–a)\frac{i}{N}\right)$ y $R_N = \frac{b–a}{N} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + (b–a)\frac{i}{N}\right)$. La suma de la izquierda tiene un término correspondiente a $i = 0$ y la suma de la derecha tiene un término correspondiente a $i = N$. En $R_N - L_N$, cualquier término correspondiente a $i = 1, 2,\ldots, N - 1$ aparece una vez con el signo más y otra con el signo menos, por lo que cada uno de estos términos se anula y uno queda $R_N - L_N = \frac{b–a}{N}\left(f(a + (b–a))\frac{N}{N}\right) - \left(f(a) + (b–a)\frac{0}{N}\right) = \frac{b–a}{N}(f(b) - f(a))$.

57. Gráfico 1: a. $L(A) = 0, B(A) = 20$; b. $U(A) = 20$. Gráfico 2: a. $L(A) = 9$; b. $B(A) = 11, U(A) = 20$. Gráfico 3: a. $L(A) = 11{,}0$; b. $B(A) = 4{,}5, U(A) = 15{,}5$.

59. Supongamos que *A* es el área del círculo unitario. El círculo encierra *n* triángulos congruentes de área $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}$, por lo que $\frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \le A$. De la misma manera, el círculo está contenido en *n* triángulos congruentes de área $\frac{BH}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, por lo que $A \le \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$. A medida que $n \to \infty, \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\pi\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \to \pi$, por lo que concluimos $\pi \le A$. Además, como $n \to \infty, \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \to 1$, por lo que también tenemos $A \le \pi$. Por el teorema del emparedado para los límites, concluimos que $A = \pi$.

Sección 5.2 ejercicios

61. $\int_0^2 \left(5x^2 - 3x^3\right) dx$

63. $\int_0^1 \cos^2(2\pi x)\, dx$

65. $\int_0^1 x dx$

67. $\int_3^6 x dx$

69. $\int_1^2 x\log\left(x^2\right) dx$

71. $1 + 2.2 + 3.3 = 14$

73. $1 - 4 + 9 = 6$

75. $1 - 2\pi + 9 = 10 - 2\pi$

77. La integral es el área del triángulo, $\frac{1}{2}$

79. La integral es el área del triángulo, 9.

81. La integral es el área $\frac{1}{2}\pi r^2 = 2\pi$.

83. La integral es el área del triángulo "grande" menos el triángulo "perdido", $9 - \frac{1}{2}$.

85. $L = 2 + 0 + 10 + 5 + 4 = 21, R = 0 + 10 + 10 + 2 + 0 = 22, \frac{L+R}{2} = 21{,}5$

87. $L = 0 + 4 + 0 + 4 + 2 = 10, R = 4 + 0 + 2 + 4 + 0 = 10, \frac{L+R}{2} = 10$

89. $\int_2^4 f(x)\, dx + \int_2^4 g(x)\, dx = 8 - 3 = 5$

91. $\int_2^4 f(x)\, dx - \int_2^4 g(x)\, dx = 8 + 3 = 11$

93. $4\int_2^4 f(x)\, dx - 3\int_2^4 g(x)\, dx = 32 + 9 = 41$

95. El integrando es impar; la integral es cero.

97. El integrando es antisimétrico con respecto a $x = 3$. La integral es cero.

99. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

101. $\int_0^1 \left(1-6x+12x^2-8x^3\right)dx = \left(x\text{–}3x^2+4x^3\text{–}2x^4\right) = \left(1\text{–}3+4\text{–}2\right)\left(0\text{–}0+0\text{–}0\right) = 0$

103. $7-\frac{5}{4}=\frac{23}{4}$

105. El integrando es negativo sobre $[-2,3]$.

107. $x \leq x^2$ en $[1,2]$, así que $\sqrt{1+x} \leq \sqrt{1+x^2}$ en $[1,2]$.

109. $\cos(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Multiplique por la longitud del intervalo para obtener la desigualdad.

111. $f_{\text{ave}}=0; c=0$

113. $\frac{3}{2}$ cuando $c=\pm\frac{3}{2}$

115. $f_{\text{ave}}=0; c=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

117. $L_{100}=1{,}294, R_{100}=1{,}301;$ el promedio exacto está entre estos valores.

119. $L_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}5178, R_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}5294$

121. $L_1=0, L_{10}\times\left(\frac{1}{2}\right)=8{,}743493, L_{100}\times\left(\frac{1}{2}\right)=12{,}861728.$
La respuesta exacta $\approx 26{,}799$, por lo que L_{100} no es exacta.

123. $L_1\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=1{,}352, L_{10}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=-0{,}1837, L_{100}\times\left(\frac{1}{\pi}\right)=-0{,}2956.$
La respuesta exacta $\approx -0{,}303$, por lo que L_{100} no es exacto en el primer decimal.

125. Utilice la sustitución en $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$. Entonces, $B-A=\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 1dx=\frac{\pi}{2}$.

127. $\int_0^{2\pi}\cos^2 t dt=\pi$, así que divida por la longitud 2π del intervalo. $\cos^2 t$ tiene periodo π, así que es cierto.

129. La integral se maximiza cuando se utiliza el mayor intervalo en el que *p* es no negativo. Así, $A=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $B=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

131. Si los valores de $f(t_0)>g(t_0)$ para algunos $t_0\in[a,b]$, entonces ya que $f-g$ es continua, existe un intervalo que contiene t_0 tal que $f(t)>g(t)$ en el intervalo $[c,d]$, y luego $\int_d^d f(t)\,dt > \int_c^d g(t)\,dt$ en este intervalo.

133. La integral de *f* sobre un intervalo es la misma que la integral del promedio de *f* sobre ese intervalo. Así,

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_{a_0}^{a_1} f(t)\,dt+\int_{a_1}^{a_2} f(t)\,dt+\cdots+\int_{a_{N+1}}^{a_N} f(t)\,dt=\int_{a_0}^{a_1} 1dt+\int_{a_1}^{a_2} 1dt+\cdots+\int_{a_{N+1}}^{a_N} 1dt$$

$$=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+\cdots+\left(a_N-a_{N-1}\right)=a_N-a_0=b\text{–}a.$$

Al dividir entre *b– a* resulta la identidad deseada.

135. $\int_0^N f(t)\,dt=\sum_{i=1}^{N}\int_{i-1}^{i} f(t)\,dt=\sum_{i=1}^{N} i^2=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$

137. $L_{10}=1{,}815, R_{10}=1{,}515, \frac{L_{10}+R_{10}}{2}=1{,}665,$ para que la estimación sea precisa con dos decimales.

139. El promedio es $1/2$, que en este caso es igual a la integral.

141. a. El gráfico es antisimétrico con respecto a $t = \frac{1}{2}$ en $[0, 1]$, para que el valor promedio sea cero. b. Para cualquier valor de *a*, el gráfico entre $[a, a + 1]$ es un desplazamiento del gráfico sobre $[0, 1]$, para que las áreas netas por encima y por debajo del eje no cambien y el promedio siga siendo cero.

143. Sí, la integral sobre cualquier intervalo de longitud 1 es la misma.

Sección 5.3 ejercicios

145. Sí. Está implícito en el teorema del valor medio de las integrales.

147. $F'(2) = -1$; valor promedio de F' en $[1, 2]$ ¿es $-1/2$.

149. $e^{\cos x}$

151. $\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$

153. $\sqrt{x}\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2}$

155. $-\sqrt{1 - \cos^2 x}\frac{d}{dx}\cos x = |\operatorname{sen} x|\operatorname{sen} x$

157. $2x\frac{|x|}{1+x^2}$

159. $\ln(e^{2x})\frac{d}{dx}e^x = 2xe^x$

161. a. *f* es positiva en $(1, 2)$ y $(5, 6)$, negativo en $(0, 1)$ y $(3, 4)$, y cero en $(2, 3)$ y $(4, 5)$. b. El valor máximo es 2 y el mínimo es -3. c. El valor medio es 0.

163. a. ℓ es positivo en $(0, 1)$ y $(3, 6)$, y negativo en $(1, 3)$. b. Aumenta en $(0, 1)$ y $(3, 5)$, y es constante a lo largo de $(1, 3)$ y $(5, 6)$. c. Su valor medio es $\frac{1}{3}$.

165. $T_{10} = 49{,}08, \int_{-4}^{3}\left(x^3 + 6x^2 + x - 5\right)dx = 48$

167. $T_{10} = 260{,}836, \int_{1}^{9}\left(\sqrt{x} + x^2\right)dx = 260$

169. $T_{10} = 3{,}058, \int_{1}^{4}\frac{4}{x^2}dx = 3$

171. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x, F(3) - F(-2) = -\frac{35}{6}$

173. $F(x) = -\frac{t^5}{5} + \frac{13t^3}{3} - 36t, F(3) - F(2) = \frac{62}{15}$

175. $F(x) = \frac{x^{100}}{100}, F(1) - F(0) = \frac{1}{100}$

177. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}, F(4) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1125}{64}$

179. $F(x) = \sqrt{x}, F(4) - F(1) = 1$

181. $F(x) = \frac{4}{3}t^{3/4}, F(16) - F(1) = \frac{28}{3}$

183. $F(x) = -\cos x, F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = 1$

185. $F(x) = \sec x, F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \sqrt{2} - 1$

187. $F(x) = -\cot(x)$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

189. $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$, $F(-1) - F(-2) = \frac{7}{8}$

191. $F(x) = e^x - e$

193. $F(x) = 0$

195. $\int_{-2}^{-1} \left(t^2 - 2t - 3\right) dt - \int_{-1}^{3} \left(t^2 - 2t - 3\right) dt + \int_{3}^{4} \left(t^2 - 2t - 3\right) dt = \frac{46}{3}$

197. $-\int_{-\pi/2}^{0} \operatorname{sen} t\, dt + \int_{0}^{\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt = 2$

199. a. El promedio es $11{,}21 \times 10^9$ dado que $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ tiene periodo 12 e integral 0 en cualquier periodo. El consumo es igual al promedio cuando $\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0$, cuando $t = 3$, y cuando $t = 9$. b. El consumo total es la tasa promedio por la duración: $11{,}21 \times 12 \times 10^9 = 1{,}35 \times 10^{11}$ c. $10^9 \left(11{,}21 - \frac{1}{6} \int_3^9 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) dt\right) = 10^9 \left(11{,}21 + \frac{2}{\pi}\right) = 11{,}84x10^9$

201. Si f no es constante, su promedio es estrictamente menor que el máximo y mayor que el mínimo, que se alcanzan sobre $[a, b]$ según el teorema del valor extremo.

203. a. $d^2\theta = (a\cos\theta + c)^2 + b^2 \operatorname{sen}^2\theta = a^2 + c^2\cos^2\theta + 2ac\cos\theta = (a + c\cos\theta)^2$; b. $\bar{d} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + 2c\cos\theta)\, d\theta = a$

205. Fuerza gravitacional media = $\frac{GmM}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(a + 2\sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta\right)^2} d\theta.$

Sección 5.4 ejercicios

207. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \int x^{1/2} dx - \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C_1 - 2x^{1/2} + C_2 = \frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2} + C$

209. $\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$

211. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx - \int_0^{\pi} \cos x\, dx = -\cos x|_0^{\pi} - (\operatorname{sen} x)|_0^{\pi} = (-(-1) + 1) - (0 - 0) = 2$

213. $P(s) = 4s$, así que $\frac{dP}{ds} = 4$ y $\int_2^4 4ds = 8.$

215. $\int_1^2 Nds = N$

217. Con p como en el ejercicio anterior, cada uno de los 12 pentágonos aumenta su área de $2p$ unidades a $4p$ unidades por lo que el aumento neto del área del dodecaedro es de $36p$ unidades.

219. $18s^2 = 6\int_s^{2s} 2xdx$

221. $12\pi R^2 = 8\pi \int_R^{2R} rdr$

223. $d(t) = \int_0^t v(s)\,ds = 4t - t^2.$ La distancia total es $d(2) = 4$ m.

225. $d(t) = \int_0^t v(s)\,ds$. Para $t < 3, d(t) = \int_0^t (6 - 2t)\,dt = 6t - t^2$. Para $t > 3, d(t) = d(3) + \int_3^t (2t - 6)dt = 9 + (t^2 - 6t)\Big|_3^6.$ La distancia total es $d(6) = 18$ m.

227. $v(t) = 40 - 9{,}8t$m/s; $h(t) = 1{,}5 + 40t - 4{,}9t^2$ m/s

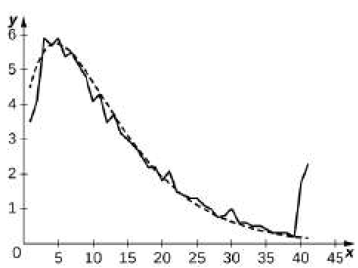
229. El aumento neto es de 1 unidad.

231. A $t = 5$, la altura del agua es $x = \left(\frac{15}{\pi}\right)^{1/3}$ m.. El cambio neto de altura desde $t = 5$ al $t = 10$ ¿es $\left(\frac{30}{\pi}\right)^{1/3} - \left(\frac{15}{\pi}\right)^{1/3}$ m.

233. El consumo total de energía diario se estima como la suma de las tasas de energía horaria, o sea 911 gW-h.

235. 17 kJ

237. a. 54,3 %; b. 27,00 %; c. La curva del siguiente gráfico es $2{,}35\,(t + 3)\,e^{-0{,}15(t+3)}$.

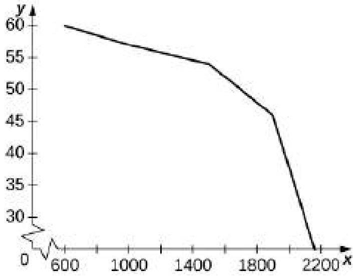


239. En condiciones secas, con una velocidad inicial $v_0 = 30$ m/s, $D = 64{,}3$ y, si $v_0 = 25$, $D = 44{,}64$. En condiciones de humedad, si $v_0 = 30$, y $D = 180$ y si $v_0 = 25$, $D = 125$.

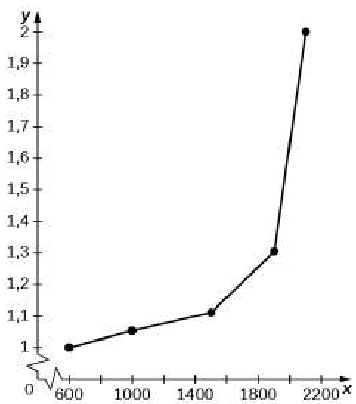
241. 225 cal

243. $E(150) = 28, E(300) = 22, E(450) = 16$

245. a.



b. Entre 600 y 1.000 la disminución promedio de vehículos por hora por carril es de -0,0075. Entre 1.000 y 1.500 es de -0,006 por vehículos por hora y carril, y entre 1.500 y 2.100 es de -0,04 vehículos por hora y carril. c.



El gráfico no es lineal, ya que los minutos por milla aumentan drásticamente a medida que los vehículos por hora por carril alcanzan los 2.000.

247. $\frac{1}{37}\int_0^{37} p(t)\,dt = \frac{0{,}07(37)^3}{4} + \frac{2{,}42(37)^2}{3} - \frac{25{,}63(37)}{2} + 521{,}23 \approx 2037$

249. La aceleración media es $A = \frac{1}{5}\int_0^{5} a(t)\,dt = -\frac{0{,}7\left(5^2\right)}{3} + \frac{1{,}44(5)}{2} + 10{,}44 \approx 8{,}2$ mph/s

251. $d(t) = \int_0^{1} |v(t)|\,dt = \int_0^{t} \left(\frac{7}{30}t^3 - 0{,}72t^2 - 10{,}44t + 41{,}033\right) dt = \frac{7}{120}t^4 - 0{,}24t^3 - 5{,}22t^3 + 41{,}033t.$ Entonces, $d(5) \approx 81{,}12$ mph $\times \sec \approx 119$ pies.

253. $\frac{1}{40}\int_0^{40} (-0{,}068t + 5{,}14)\,dt = -\frac{0{,}068(40)}{2} + 5{,}14 = 3{,}78\text{m/seg}$

Sección 5.5 ejercicios

255. $u = h(x)$

257. $f(u) = \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}$

259. $du = 8x dx;\ f(u) = \frac{1}{8\sqrt{u}}$

261. $\frac{1}{5}(x+1)^5 + C$

263. $-\frac{1}{12(2x-3)^6} + C$

265. $\sqrt{x^2+1} + C$

267. $\frac{1}{8}\left(x^2 - 2x\right)^4 + C$

269. $\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} + C$

271. $\frac{(1-x)^{101}}{101} - \frac{(1-x)^{100}}{100} + C$

273. $\int (11x-7)^{-2} \mathrm{dx} = -\frac{1}{22(11x-7)^2} + C$

275. $-\frac{\cos^4\theta}{4} + C$

277. $-\frac{\cos^3(\pi t)}{3\pi} + C$

279. $-\frac{1}{4}\cos^2\left(t^2\right) + C$

281. $-\frac{1}{3(x^3-3)} + C$

283. $-\frac{2\left(y^3-2\right)}{3\sqrt{1-y^3}}$

285. $\frac{1}{33}\left(1 - \cos^3\theta\right)^{11} + C$

287. $\frac{1}{12}\left(\operatorname{sen}^3\theta - 3\operatorname{sen}^2\theta\right)^4 + C$

289. $L_{50} = -8{,}5779$. El área exacta es $\frac{-81}{8}$

291. $L_{50} = -0{,}006399\ldots$ El área exacta es 0.

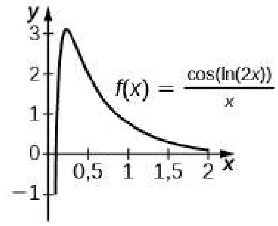
293. $u = 1 + x^2, du = 2x dx, \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/2} du = \sqrt{2} - 1$

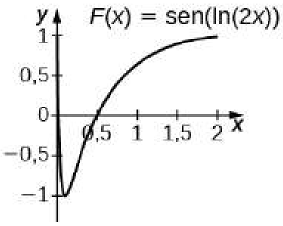
295. $u = 1 + t^3, du = 3t^2 dt, \frac{1}{3}\int_1^2 u^{-1/2} du = \frac{2}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

grandes.

297. $u = \cos\theta, du = -\operatorname{sen}\theta d\theta, \int_{1/\sqrt{2}}^{1} u^{-4} du = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

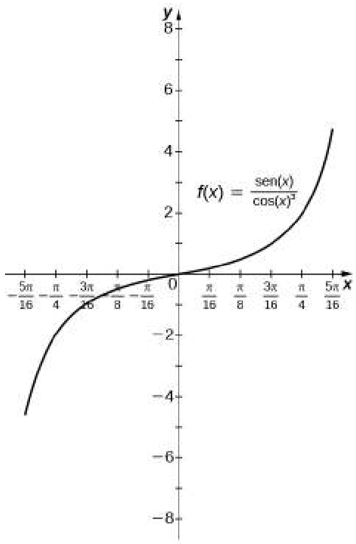
299.

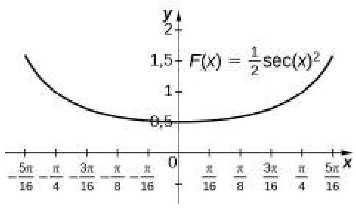




La antiderivada es $y = \operatorname{sen}(\ln(2x))$. Como la antiderivada no es continua en $x = 0$, no se puede encontrar un valor de *C* que logre que $y = \operatorname{sen}(\ln(2x)) - C$ trabajen como una integral definitiva.

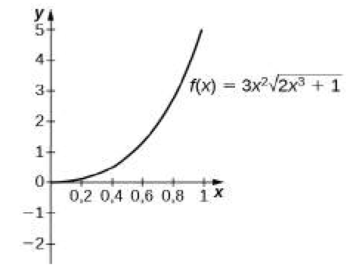
301.

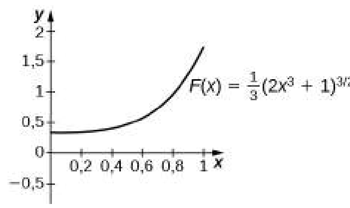




La antiderivada es $y = \frac{1}{2}\sec^2 x$. Debe tomar $C = -2$ por lo que $F\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

303.





La antiderivada es $y = \frac{1}{3}\left(2x^3 + 1\right)^{3/2}$. Hay que tomar $C = -\frac{1}{3}$.

305. No, porque el integrando es discontinuo en $x = 1$.

307. $u = \operatorname{sen}\left(t^2\right)$; la integral se convierte en $\frac{1}{2}\int_0^0 u du$.

309. $u = \left(1 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2\right)$; la integral se convierte en $-\int_{5/4}^{5/4} \frac{1}{u} du$.

311. $u = 1 - t$; la integral se convierte en

$$\int_1^{-1} u\cos\left(\pi\left(1 - u\right)\right) du$$
$$= \int_1^{-1} u\left[\cos\pi\cos\pi u - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\pi u\right] du$$
$$= -\int_1^{-1} u\cos\pi u du$$
$$= \int_{-1}^{1} u\cos\pi u du = 0$$

ya que el integrando es impar.

313. Si establecemos que $u = cx$ y $du = cdx$ da como resultado

$$\frac{1}{\frac{b}{c} - \frac{a}{c}}\int_{a/c}^{b/c} f\left(cx\right) dx = \frac{c}{b - a}\int_{u=a}^{u=b} f\left(u\right)\frac{du}{c} = \frac{1}{b - a}\int_a^b f\left(u\right) du.$$

315. $\int_0^x g\left(t\right) dt = \frac{1}{2}\int_{u=1-x^2}^{1} \frac{du}{u^a} = \frac{1}{2(1-a)}u^{1-a}\Big|_{u=1-x^2}^{1} = \frac{1}{2(1-a)}\left(1 - \left(1 - x^2\right)^{1-a}\right)$.
Dado que $x \to 1$ el límite es $\frac{1}{2(1-a)}$ si $a < 1$, y el límite diverge a +∞ si $a > 1$.

317. $\displaystyle\int_{t=\pi}^{0} b\sqrt{1-\cos^2 t} \times (-a\,\text{sen}\,t)dt = \int_{t=0}^{\pi} ab\text{sen}^2 t dt$

319. $f(t) = 2\cos(3t) - \cos(2t)\,;\ \displaystyle\int_0^{\pi/2} (2\cos(3t) - \cos(2t)) = -\frac{2}{3}$

Sección 5.6 ejercicios

321. $\frac{-1}{3}e^{-3x} + C$

323. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

325. $\ln\left(x^2\right) + C$

327. $2\sqrt{x} + C$

329. $-\frac{1}{\ln x} + C$

331. $\ln(\ln(\ln x)) + C$

333. $\ln(x\cos x) + C$

335. $-\frac{1}{2}(\ln(\cos(x)))^2 + C$

337. $\frac{-e^{-x^3}}{3} + C$

339. $e^{\tan x} + C$

341. $t + C$

343. $\frac{2}{9}x^3\left(\ln\left(x^3\right) - 1\right) + C$

345. $2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C$

347. $\displaystyle\int_0^{\ln x} e^t\,dt = e^t\Big|_0^{\ln x} = e^{\ln x} - e^0 = x - 1$

349. $-\frac{1}{3}\ln|\text{sen}(3x) + \cos(3x)| + C$

351. $-\frac{1}{2}\ln\left|\csc\left(x^2\right) + \cot\left(x^2\right)\right| + C$

353. $-\frac{1}{2}(\ln(\csc x))^2 + C$

355. $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{26}{7}\right)$ grandes.

357. $\ln\left(\sqrt{3} - 1\right)$ grandes.

359. $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

361. $y - 2\ln|y + 1| + C$

363. $\ln|\text{sen}\,x - \cos x| + C$

365. $-\frac{1}{3}\left(1 - (\ln x)^2\right)^{3/2} + C$

367. Solución exacta: $\frac{e-1}{e}$, $R_{50} = 0{,}6258$. Como f es decreciente, la estimación del punto extremo derecho subestima el área.

369. Solución exacta: $\frac{2\ln(3)-\ln(6)}{2}$, $R_{50} = 0{,}2033$. Como f es creciente, la estimación del punto extremo derecho sobreestima el área.

371. Solución exacta: $-\frac{1}{\ln(4)}$, $R_{50} = -0{,}7164$. Como f es creciente, la estimación del punto extremo derecho sobreestima el área (el área real es un número negativo mayor).

373. $\frac{11}{2}\ln 2$

375. $\frac{1}{\ln(65{,}536)}$

377. $\displaystyle\int_N^{N+1} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(e^{-N^2} - e^{-(N+1)^2}\right)$. La cantidad es inferior a 0,01 cuando $N = 2$.

379. $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \int_{1/b}^{1/a} \frac{dx}{x}$

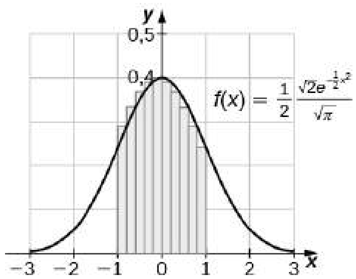
381. 23

383. Podemos suponer que $x > 1$, por lo que $\frac{1}{x} < 1$. Entonces, $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t}$. Ahora haga la sustitución $u = \frac{1}{t}$, así que $du = -\frac{dt}{t^2}$ y $\frac{du}{u} = -\frac{dt}{t}$, y cambie los puntos finales: $\int_1^{1/x} \frac{dt}{t} = -\int_1^{x} \frac{du}{u} = -\ln x.$

385. Las respuestas variarán.

387. $x = E(\ln(x))$. Entonces, $1 = \frac{E'(\ln x)}{x}$ o $x = E'(\ln x)$. Dado que cualquier número t se puede escribir $t = \ln x$ para alguna x, y para tal t tenemos $x = E(t)$, luego se deduce que para cualquier t, $E'(t) = E(t)$.

389. $R_{10} = 0{,}6811, R_{100} = 0{,}6827$



Sección 5.7 ejercicios

391. $\text{sen}^{-1} x \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{3}$

393. $\tan^{-1} x \Big|_{\sqrt{3}}^{1} = -\frac{\pi}{12}$

395. $\sec^{-1} x \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

397. $\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

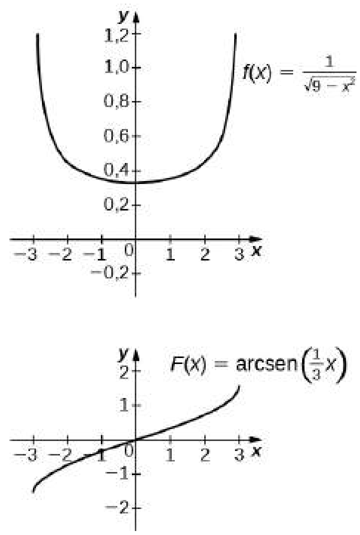
399. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

401. $\frac{1}{3}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$

403. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{sen}\theta$. Así que, $\operatorname{sen}^{-1}t=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}t$. Se diferencian por una constante.

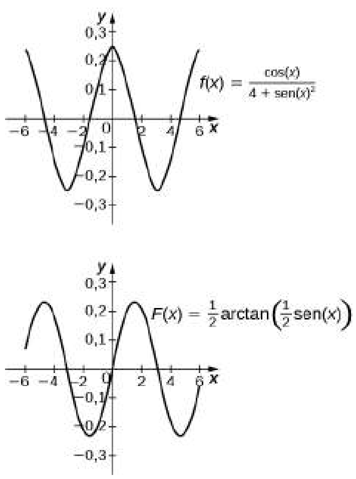
405. $\sqrt{1-t^2}$ no se define como un número real cuando $t>1$.

407.



La antiderivada es $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$. Si tomamos $C=\frac{\pi}{2}$ recupera la integral definida.

409.



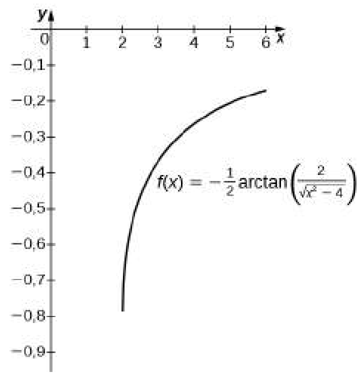
La antiderivada es $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{2}\right)+C$. Si tomamos $C=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sen}(6)}{2}\right)$ recupera la integral definida.

411. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}t\right)^2+C$

413. $\frac{1}{4}\left(\tan^{-1}(2t)\right)^2$

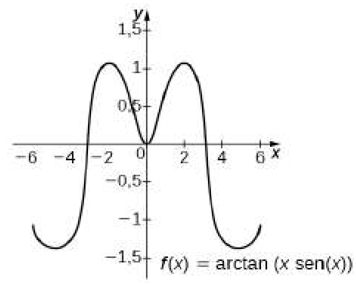
415. $\frac{1}{4}\left(\sec^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)+C$

417.



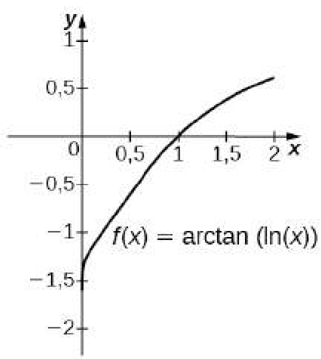
La antiderivada es $\frac{1}{2}\sec^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+C$. Si tomamos $C=0$ se recupera la integral definida en $[2, 6]$.

419.



La antiderivada general es $\tan^{-1}(x \operatorname{sen} x)+C$. Si tomamos $C=-\tan^{-1}(6 \operatorname{sen}(6))$ recupera la integral definida.

421.



La antiderivada general es $\tan^{-1}(\ln x)+C$. Si tomamos $C=\frac{\pi}{2}=\tan^{-1}\infty$ recupera la integral definida.

423. $\operatorname{sen}^{-1}\left(e^t\right)+C$

425. $\operatorname{sen}^{-1}(\ln t)+C$

427. $-\frac{1}{4}\left(\cos^{-1}(2t)\right)^2+C$

429. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ grandes.

431. $1-\frac{2}{\sqrt{5}}$

433. $2\tan^{-1}(A) \to \pi$ cuando $A \to \infty$

435. Usando la pista, el uno tiene $\int \frac{\csc^2 x}{\csc^2 x+\cot^2 x}dx = \int \frac{\csc^2 x}{1+2\cot^2 x}dx$. Establezca $u=\sqrt{2}\cot x$. Entonces, $du=-\sqrt{2}\csc^2 x$ y la integral es $-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{1+u^2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\cot x\right)+C.$ Si el uno utiliza la identidad $\tan^{-1}s+\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=\frac{\pi}{2}$, entonces esto también se puede escribir $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C.$

437. $x \approx \pm 1{,}7321$. La estimación del punto extremo izquierdo con $N = 100$ es 4,781 y estos decimales persisten en $N = 500$.

Ejercicios de repaso

439. Falso

441. Verdadero

443. $L_4 = 5{,}25$, $R_4 = 3{,}25$, respuesta exacta: 4

445. $L_4 = 5{,}364$, $R_4 = 5{,}364$, respuesta exacta: 5,870

447. $-\frac{4}{3}$

449. 1

451. $-\frac{1}{2(x+4)^2} + C$

453. $\frac{4}{3}\operatorname{sen}^{-1}\left(x^3\right) + C$

455. $\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{1+t^2}}$

457. $4\frac{\ln x}{x} + 1$

459. $6.328.113

461. $73,36

463. $\frac{19117}{12}$ ft/s, o 1593 ft/s

Capítulo 6

Punto de control

6.1 12 unidades^2

6.2 $\frac{3}{10}$ unidad^2

6.3 $2 + 2\sqrt{2}$ unidades^2

6.4 $\frac{5}{3}$ unidades^2

6.5 $\frac{5}{3}$ unidades^2

6.7 $\frac{\pi}{2}$

6.8 8π unidades^3

6.9 21π unidades^3

6.10 $\frac{10\pi}{3}$ unidades^3

6.11 60π unidades^3

6.12 $\frac{15\pi}{2}$ unidades^3

6.13 8π unidades^3

6.14 12π unidades^3

6.15 $\frac{11\pi}{6}$ unidades^3

6.16 $\frac{\pi}{6}$ unidades^3

6.17 Utilice el método de las arandelas; $V = \int_{-1}^{1} \pi\left[\left(2 - x^2\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right] dx$

6.18 $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \approx 1{,}697$

6.19 Longitud de arco $\approx 3{,}8202$

6.20 Longitud de arco $= 3{,}15018$

6.21 $\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}\right) \approx 3{,}133$

6.22 12π

6.23 $70/3$

6.24 24π

6.25 8 ft-lb

6.26 Aproximadamente 43255.2 ft-lb

6.27 156800 N

6.28 Aproximadamente 7.164.520.000 lb o 3.582.260 t

6.29 $M = 24, \bar{x} = \frac{2}{5}$ m

6.30 $(-1, -1)$ m

6.31 El centroide de la región es $(3/2, 6/5)$.

6.32 El centroide de la región es $(1, 13/5)$.

6.33 El centroide de la región es $(0, 2/5)$.

6.34 $6\pi^2$ unidades³

6.35
a. $\frac{d}{dx}\ln\left(2x^2 + x\right) = \frac{4x+1}{2x^2+x}$
b. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x^3\right)\right)^2 = \frac{6\ln\left(x^3\right)}{x}$

6.36 $\int \frac{x^2}{x^3+6}dx = \frac{1}{3}\ln\left|x^3+6\right| + C$

6.37 $4\ln 2$

6.38
a. $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x^2}}{e^{5x}}\right) = e^{x^2-5x}(2x-5)$
grandes.
b. $\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\right)^3 = 6e^{6t}$

6.39 $\int \frac{4}{e^{3x}}dx = -\frac{4}{3}e^{-3x} + C$

6.40
a. $\frac{d}{dt}4^{t^4} = 4^{t^4}(\ln 4)\left(4t^3\right)$ grandes.
b. $\frac{d}{dx}\log_3\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \frac{x}{(\ln 3)\left(x^2+1\right)}$

6.41 $\int x^2 2^{x^3}dx = \frac{1}{3\ln 2}2^{x^3} + C$

6.42 Hay 81377396 bacterias en la población después de 4 horas. La población alcanza 100 millones de bacterias después de 244,12 minutos.

6.43 A 5 % interés, debe invertir $223130.16. A 6 % interés, debe invertir $165298.89.

6.44 38,90 meses

6.45 El café se enfría lo suficiente como para servirlo alrededor de 3,5 minutos después de ser vertido. El café está demasiado frío para servir cerca de 7 minutos después de ser vertido.

6.46 Un total de 94,13 g de carbono. El artefacto tiene aproximadamente 13.300 años.

6.47
a. $\frac{d}{dx}\left(\tanh\left(x^2+3x\right)\right) = \left(\operatorname{sech}^2\left(x^2+3x\right)\right)(2x+3)$
grandes.
b. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(\operatorname{senoh} x)^2}\right) = \frac{d}{dx}(\operatorname{senoh} x)^{-2} = -2(\operatorname{senoh} x)^{-3}\cosh x$

6.48
a. $\int \operatorname{senoh}^3 x \cosh x\, dx = \frac{\operatorname{senoh}^4 x}{4} + C$
b. $\int \operatorname{sech}^2(3x)\, dx = \frac{\tanh(3x)}{3} + C$
(carbono 14).

6.49
a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1}(3x)\right) = \frac{3}{\sqrt{9x^2-1}}$
b. $\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} x\right)^3 = \frac{3\left(\coth^{-1} x\right)^2}{1-x^2}$

6.50 a. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$ **6.51** $52{,}95$ pies

b. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx = -\operatorname{sech}^{-1}\left(e^{x}\right) + C$

(carbono 14).

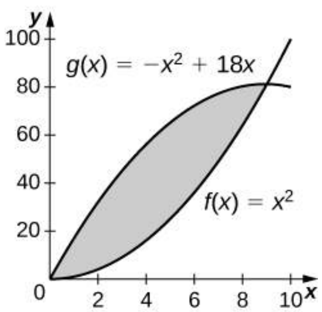
Sección 6.1 ejercicios

1. $\frac{32}{3}$

3. $\frac{13}{12}$

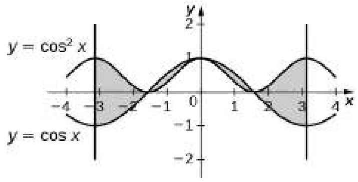
5. 36

7.



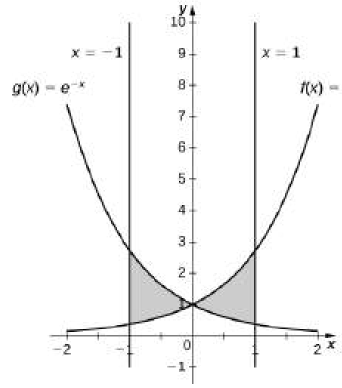
243 unidades cuadradas

9.



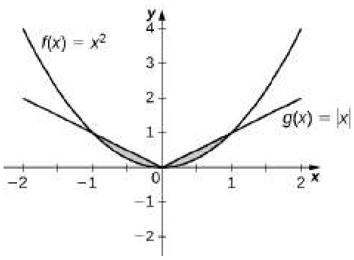
4

11.



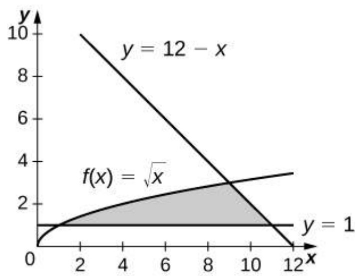
$\frac{2(e-1)^2}{e}$

13.



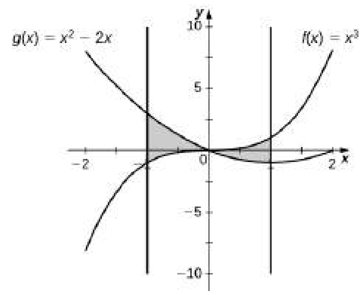
$\frac{1}{3}$

15.



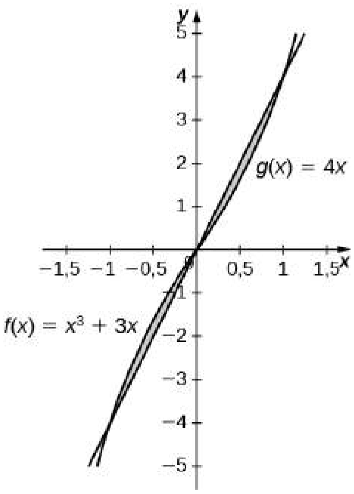
$\frac{34}{3}$

17.



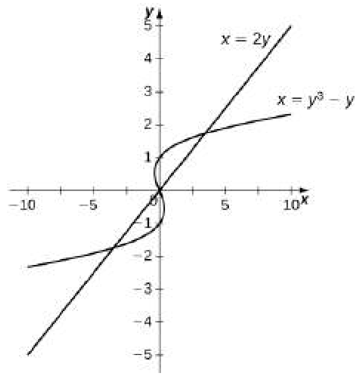
$\frac{5}{2}$

19.



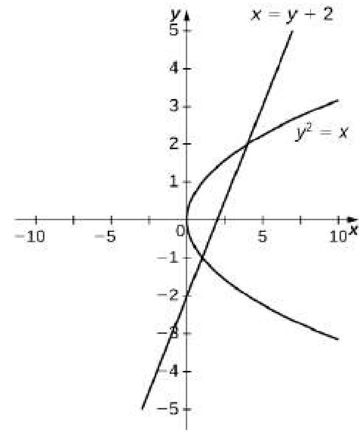
$\frac{1}{2}$

21.



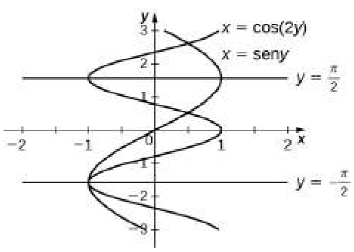
$\frac{9}{2}$

23.



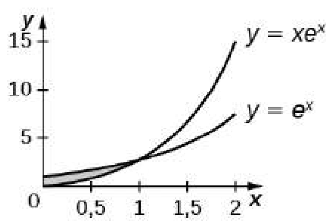
$\frac{9}{2}$

25.



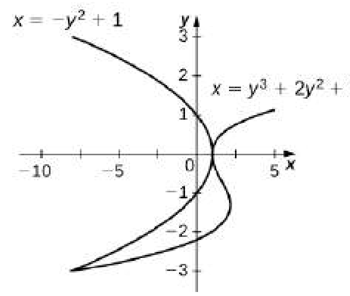
$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

27.



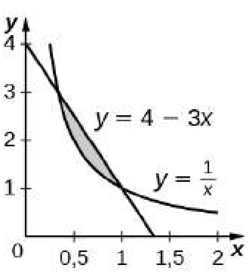
$e-2$

29.



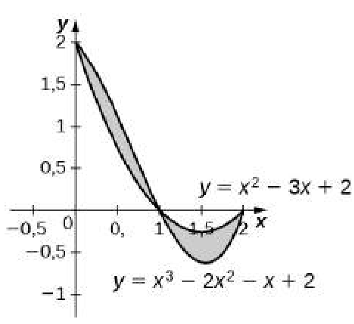
$\frac{27}{4}$

31.



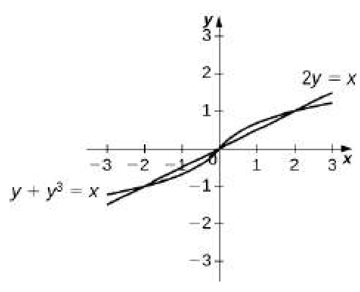
$\frac{4}{3} - \ln(3)$ grandes.

33.



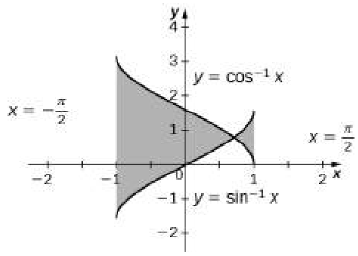
$\frac{1}{2}$

35.



$\frac{1}{2}$

37.



$-2\left(\sqrt{2} - \pi\right)$

39. $1{,}067$

41. $0{,}852$

43. $7{,}523$

45. $\frac{3\pi - 4}{12}$

47. $1{,}429$

49. $\$33.333{,}33$ de beneficio total en 200 teléfonos celulares vendidos

51. $3{,}263$ mi representa qué tan lejos está la liebre de la tortuga.

53. $\frac{343}{24}$

55. $4\sqrt{3}$

57. $\pi - \frac{32}{25}$

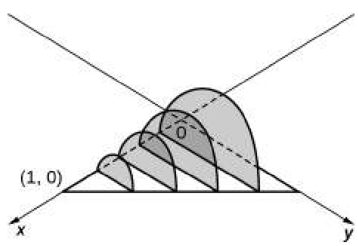
Sección 6.2 ejercicios

63. 8 unidades^3

65. $\frac{32}{3\sqrt{2}}$ unidades^3

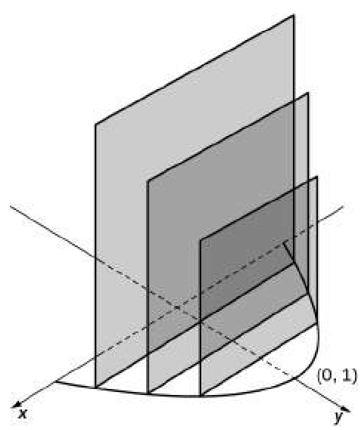
67. $\frac{7}{24}\pi r^2 h$ unidades^3

69.



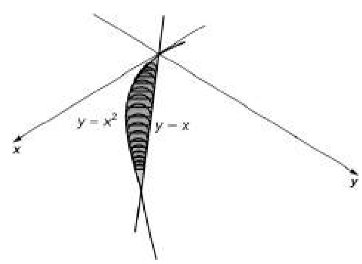
$\frac{\pi}{24}$ unidades^3

71.



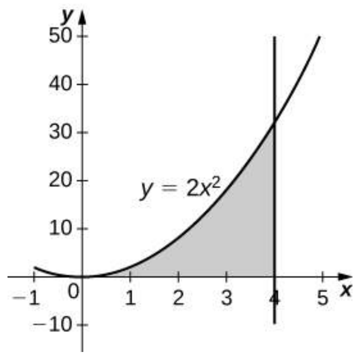
2 unidades^3

73.



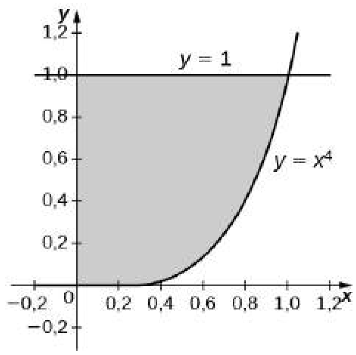
$\frac{\pi}{240}$ unidades^3

75.



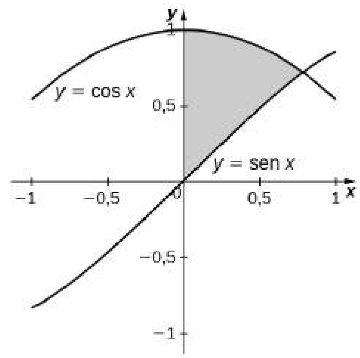
$\frac{4096\pi}{5}$ unidades^3

77.



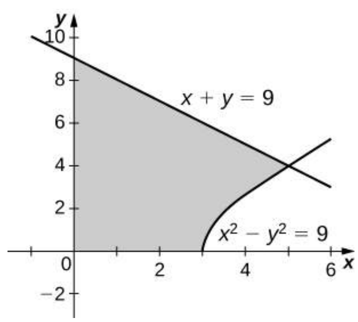
$\frac{8\pi}{9}$ unidades^3

79.



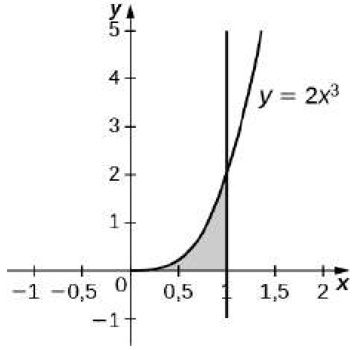
$\frac{\pi}{2}$ unidades^3

81.



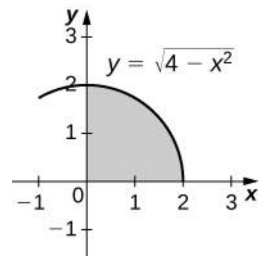
207π unidades^3

83.



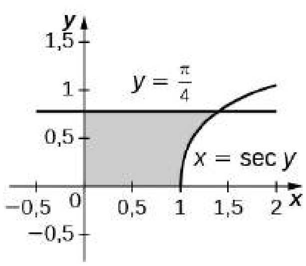
$\frac{4\pi}{5}$ unidades^3

85.



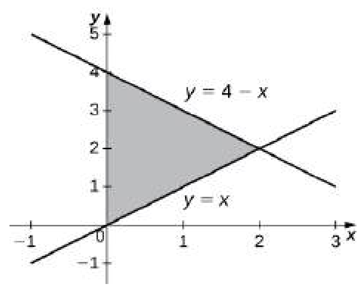
$\frac{16\pi}{3}$ unidades^3

87.



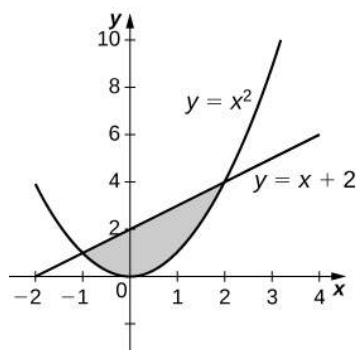
π unidades^3

89.



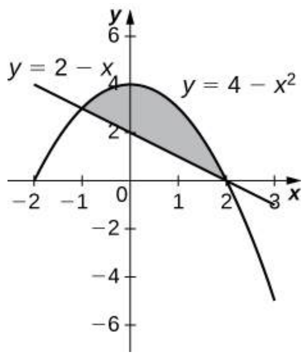
$\frac{16\pi}{3}$ unidades^3

91.



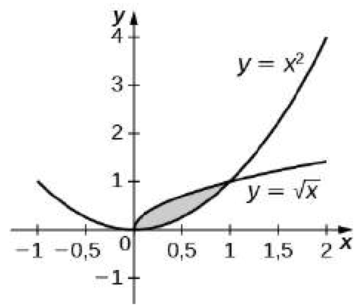
$\frac{72\pi}{5}$ unidades^3

93.



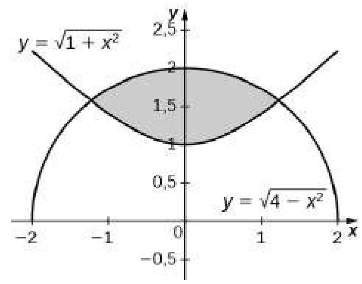
$\frac{108\pi}{5}$ unidades^3

95.



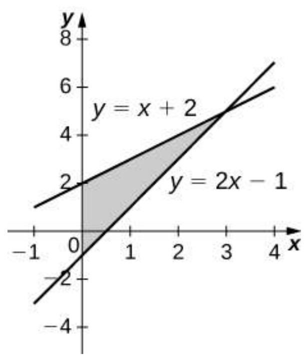
$\frac{3\pi}{10}$ unidades^3

97.



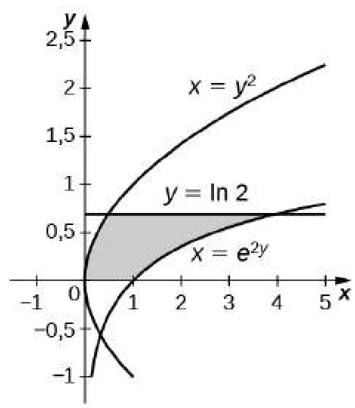
$2\sqrt{6}\pi$ unidades^3

99.



9π unidades^3

101.



$\frac{\pi}{20}\left(75 - 4\ln^5(2)\right)$ unidades^3

103. $\frac{m^2\pi}{3}\left(b^3 - a^3\right)$ unidades^3

105. $\frac{4a^2b\pi}{3}$ unidades^3

107. $2\pi^2$ unidades^3

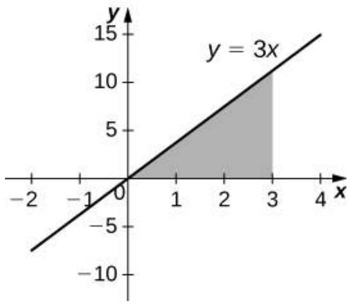
109. $\frac{2ab^2\pi}{3}$ unidades^3

111. $\frac{\pi}{12}(r + h)^2(6r - h)$ unidades^3

113. $\frac{\pi}{3}(h + R)(h - 2R)^2$ unidades^3

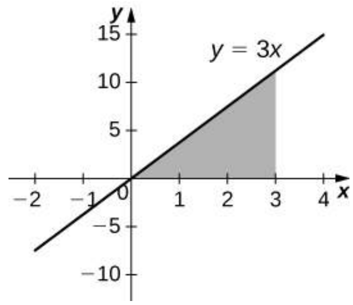
Sección 6.3 ejercicios

115.



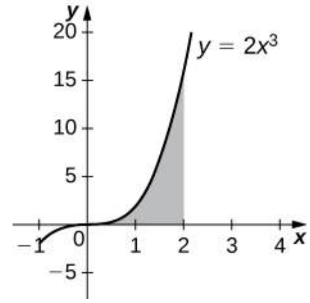
54π unidades^3

117.



81π unidades^3

119.



$\frac{512\pi}{7}$ unidades^3

121. 2π unidades^3

123. $\frac{2\pi}{3}$ unidades^3

125. 2π unidades^3

127. $\frac{4\pi}{5}$ unidades^3

129. $\frac{64\pi}{3}$ unidades^3

131. $\frac{32\pi}{5}$ unidades^3

133. $\frac{7\pi}{6}$

135. 48π

137. $\frac{114\pi}{5}$

139. $\frac{512\pi}{7}$

141. $\frac{96\pi}{5}$ unidades^3

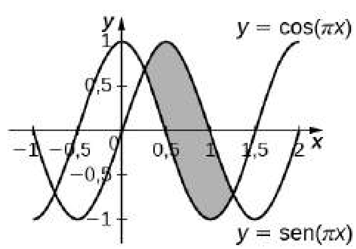
143. $\frac{28\pi}{15}$ unidades^3

145. $\frac{3\pi}{10}$ unidades^3

147. $\pi\left(\frac{6.2^{2/3}}{5}-\frac{11}{10}\right)=\frac{\pi}{10}\left(12.\,2^{2/3}-11\right)\approx 2.\,5286$ unidades^3

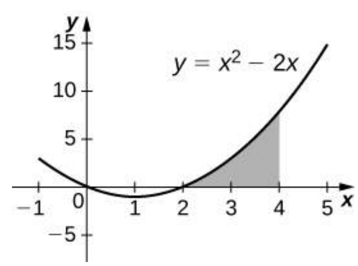
149. $0{,}9876$ unidades^3

151.



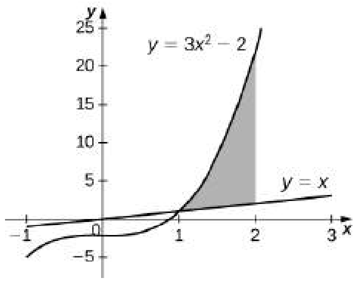
$3\sqrt{2}$ unidades^3

153.



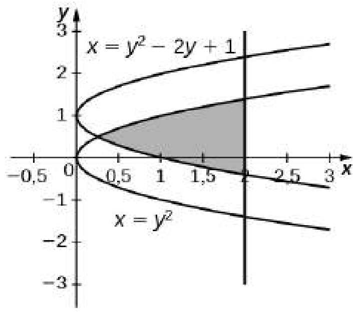
$\frac{496\pi}{15}$ unidades^3

155.



$\frac{398\pi}{15}$ unidades^3

157.



15,9074 unidades^3

159. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ unidades^3

161. $\pi r^2 h$ unidades^3

163. πa^2 unidades^3

Sección 6.4 ejercicios

165. $2\sqrt{26}$

167. $2\sqrt{17}$

169. $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$

171. $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$

173. $\frac{4}{3}$

175. 2,0035

177. $\frac{123}{32}$

179. 10

181. $\frac{20}{3}$

183. $\frac{1}{675}\left(229\sqrt{229} - 8\right)$

185. $\frac{1}{8}\left(4\sqrt{5} + \ln\left(9 + 4\sqrt{5}\right)\right)$ grandes.

187. 1,201

189. 15,2341

191. $\frac{49\pi}{3}$

193. $70\pi\sqrt{2}$

195. 8π

197. $120\pi\sqrt{26}$

199. $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$ grandes.

201. $9\sqrt{2}\pi$

203. $\frac{10\sqrt{10}\pi}{27}\left(73\sqrt{73} - 1\right)$

205. 25,645

207. $\pi(\pi + 2)$

209. 10,5017

211. 23 pies

213. 2

215. Las respuestas pueden variar

217. Para más información, busque el cuerno de Gabriel.

Sección 6.5 ejercicios

219. 150 ft-lb

221. 200 J

223. 1 J

225. $\frac{39}{2}$

227. $\ln(243)$

229. $\frac{332\pi}{15}$

231. 100π

233. $20\pi\sqrt{15}$

235. 6 J

237. 5 cm

239. 36 J

241. 18.750 ft-lb

243. Peso= $\frac{32}{3} \times 10^9$ lb

Trabajo = $\frac{4}{3} \times 10^{12}$ ft-lb

245. $9{,}71 \times 10^2$ N m

247. a. 3.000.000 lb, b. 749.000 lb

249. 23.25π millones de ft-lb.

251. $\frac{A\rho H^2}{2}$

253. Las respuestas pueden variar

Sección 6.6 ejercicios

255. $\frac{5}{4}$

257. $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ grandes.

259. $\left(\frac{7}{4}, \frac{3}{2}\right)$

261. $\frac{3L}{4}$

263. $\frac{\pi}{2}$

265. $\frac{e^2+1}{e^2-1}$

267. $\frac{\pi^2-4}{\pi}$

269. $\frac{1}{4}\left(1+e^2\right)$

271. $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$ grandes.

273. $\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$

275. $(0, 3)$

277. $\left(0, \frac{4}{\pi}\right)$

279. $\left(\frac{5}{8}, \frac{1}{3}\right)$

281. $\frac{2m\pi}{3}$

283. $\pi a^2 b$

285. $\left(\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$

287. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$

289. $\left(0, \frac{28}{9\pi}\right)$

291. Centro de masa: $\left(\frac{a}{6}, \frac{4a^2}{5}\right)$, volumen: $\frac{2\pi a^4}{9}$

293. Volumen: $2\pi^2 a^2 \, (b+a)$

Sección 6.7 ejercicios

295. $\frac{1}{x}$

297. $-\frac{1}{x(\ln x)^2}$

299. $\ln(x+1)+C$

301. $\ln(x)+1$

303. $\cot(x)$

305. $\frac{7}{x}$

307. $\csc(x)\sec x$

309. $-2\tan x$

311. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$ grandes.

313. $2 - \frac{1}{2}\ln(5)$ grandes.

315. $\frac{1}{\ln(2)} - 1$

317. $\frac{1}{2}\ln(2)$ grandes.

319. $\frac{1}{3}(\ln x)^3$

321. $\frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2-1}}$

323. $x^{-2-(1/x)}\,(\ln x - 1)$ grandes.

325. ex^{e-1}

327. 1

329. $-\frac{1}{x^2}$

331. $\pi - \ln(2)$ grandes.

333. $\frac{1}{x}$

335. $e^5 - 6$ al cuadrado^2

337. $\ln(4) - 1$ al cuadrado^2

339. $2{,}8656$

341. $3{,}1502$

Sección 6.8 ejercicios

349. Verdadero

351. Falso; $k = \frac{\ln(2)}{t}$

353. 20 horas

355. No. La reliquia tiene aproximadamente 871 años.

357. $71{,}92$ años

359. 5 días 6 horas 27 minutos

361. 12

363. $8{,}618\ \%$

365. $\$6766{,}76$

367. 9 horas 13 minutos

369. 239.179 años

371. $P'(t) = 43e^{0{,}01604t}$. La población siempre aumenta.

373. La población alcanza 10 mil millones de personas en 2027.

375. $P'(t) = 2{,}259e^{0{,}06407t}$. La población siempre aumenta.

Sección 6.9 ejercicios

377. e^x y e^{-x}

379. Las respuestas pueden variar

381. Las respuestas pueden variar

383. Las respuestas pueden variar

385. $3\ \text{senoh}\,(3x+1)$

387. $-\tanh(x)\,\text{sech}\,(x)$

389. $4\cosh(x)\,\text{senoh}\,(x)$

391. $\frac{x\ \text{sech}^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$

393. $6\ \text{senoh}^5\,(x)\cosh(x)$

395. $\frac{1}{2}\text{senoh}\,(2x+1) + C$

397. $\frac{1}{2}\text{senoh}^2\,\left(x^2\right) + C$

399. $\frac{1}{3}\cosh^3(x) + C$

401. $\ln(1 + \cosh(x)) + C$

403. $\cosh(x) + \text{senoh}\,(x) + C$

405. $\frac{4}{1-16x^2}$

407. $\frac{\text{senoh}(x)}{\sqrt{\cosh^2(x)+1}}$

409. $-\csc(x)$ grandes.

411. $-\frac{1}{\left(x^2-1\right)\tanh^{-1}(x)}$

413. $\frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

415. $\sqrt{x^2+1} + C$

417. $\cosh^{-1}(e^x) + C$

419. Las respuestas pueden variar

421. $37{,}30$

423. $y = \frac{1}{c}\cosh(cx)$

425. $-0{,}521095$

427. 10

Ejercicios de repaso

435. Falso

437. Falso

439. $32\sqrt{3}$

441. $\frac{162\pi}{5}$

443. a. 4, b. $\frac{128\pi}{7}$, c. $\frac{64\pi}{5}$

445. a. $1{,}949$, b. $21{,}952$, c. $17{,}099$

447. a. $\frac{31}{6}$, b. $\frac{452\pi}{15}$, c. $\frac{31\pi}{6}$

449. $245{,}282$

451. Masa: $\frac{1}{2}$, centro de masa: $\left(\frac{18}{35}, \frac{9}{22}\right)$

453. $\sqrt{17} + \frac{1}{8}\ln(33 + 8\sqrt{17})$

455. Volumen: $\frac{3\pi}{4}$, área superficial: $\pi\left(\sqrt{2} - \operatorname{senoh}^{-1}(1) + \operatorname{senoh}^{-1}(16) - \frac{\sqrt{257}}{16}\right)$

457. 11:02 a.m.

459. $\pi(1 + \operatorname{senoh}(1)\cosh(1))$

Índice