

SOUS-ESPACES AFFINES

PARTIE A - QUELQUES EXEMPLES

Soit E un espace vectoriel.

- ① Une droite linéaire $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$. Il y a aussi dans l'espace $\mathbb{R}^2$ des sous-ensembles, appelés droites affines $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$. Elle est "parallèle" à la droite précédente, mais décalée translatée de b , qui est l'*ordonnée à l'origine*.
Comment peut-on, de la même façon, découper un espace vectoriel en mille-feuille : un sous-espace est vectoriel, les autres affines et parallèles?

- ② Soit $a \in E$. On appelle translation de vecteur a l'application $t_a : E \rightarrow E$ Est ce une application $x \mapsto x + a$.
linéaire ? Bijective ?
- ③ Montrer que l'ensemble des translations de E forment un groupe, pour la composition.

- ④ Soient F un sous-espace vectoriel de E et $A \in E$. On pose $\mathcal{F} := t_a(F) = \{a + f \mid f \in F\}$.

Montrer que F est unique, c'est à dire qu'il n'existe pas d'espace vectoriel G différent de F tel que $\mathcal{F} := t_a(G)$.
 $\mathcal{F}$ est appelé le **sous-espace affine passant par a et de direction F** .

- ⑤ Un sous espace affine peut-il être vide ?
- ⑥ Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines, en exhibant un élément et leur direction.
- (a) un singleton de E ,
 - (b) une droite quelconque de $\mathbb{R}^2$,
 - (c) un plan quelconque de $\mathbb{R}^3$,
 - (d) l'ensemble des matrices $\left\{ \begin{pmatrix} 1-a & b-2a \\ a+b & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

On appelle **droite affine** tout espace affine de direction de dimension 1.
On appelle **plan affine** tout espace affine de direction de dimension 2.
On appelle **hyperplan affine** tout espace affine dont la direction est un hyperplan vectoriel.
On dit que le sous-espace affine $\mathcal{F}$ est (**faiblement**) **parallèle** au sous-espace affine $\mathcal{G}$ si $F \subset G$.
On dit que deux sous espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **parallèles** si $F = G$.

- ⑦ Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'ensemble $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - z = 1\}$ est un hyperplan affine.
- ⑧ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que l'ensemble $\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 1\}$ est un hyperplan affine.
- ⑨ Supposons E de dimension n . Montrer qu'un hyperplan affine a toujours admet toujours une équation du type $\sum_{i=1}^n a_i x_i = h$ avec $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

- ⑩ **Equations paramétriques d'une droite dans $\mathbb{R}^2$** . Montrer que toute droite de $\mathbb{R}^2$ admet un système dit *d'équations paramétriques* de la forme $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Donner alors les éléments caractéristiques de la droite affine vérifiant cette équation paramétrique.

- ⑪ **Equations paramétriques d'un plan dans $\mathbb{R}^3$** . Montrer que tout plan de $\mathbb{R}^3$ admet un système dit *d'équations paramétriques* de la forme $\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Donner alors les éléments caractéristiques du plan affine vérifiant cette équation paramétrique.

- 12) On considère l'espace affine réel $\mathbb{R}^3$.
- (a) Déterminer des équations qui définissent la droite $\mathcal{T}$ qui passe par les deux points $M = (1, 0, 1)$ et $N = (-1, 1, 1)$.
 - (b) Déterminer la direction de $\mathcal{T}$.
 - (c) Déterminer des équations de la droite parallèle à $\mathcal{T}$ qui passe par le point $P = (-1, 2, 1)$.
 - (d) Trouver une droite qui n'est ni parallèle à $\mathcal{T}$, ni sécante avec $\mathcal{T}$.

PARTIE B - PROPRIÉTÉS

- 13) Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E de direction F , montrer que, pour tout $u \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = u + F$.
- 14) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E , de directions respectives F et G .
Montrer que, si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, pour tout $u \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, $u + F \cap G = \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.
- 15) En déduire que
- (a) si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \mathcal{F}$.
 - (b) si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas parallèles, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ ou $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.
- 16) Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G vérifiant $F \oplus G = E$.
Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un singleton.
- 17) Soient E et F deux espaces vectoriels. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.
- (a) Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ est non vide si et seulement si $b \in \text{Im } u$.
 - (b) Dans le cas de 15a), montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ est un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } u$.

PARTIE C - APPLICATION DE 15

- 18) Exprimer comme un sous-espace affine, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \cos x \times y = 1 + \tan^2 x + \sin x$.
- 19) Exprimer comme un sous-espace affine, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $-3y'' + 4y' - y = \sin x$.
- 20) Trouver les suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 2$.
Montrer qu'elles forment un sous-espace affine.
- 21) Trouver l'ensemble des polynômes tels que $P(1) = 1, P(2) = 2, P(3) = 3$ et $P(4) = 5$.
Montrer que c'est un sous-espace affine.
- 22) Soient $n \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}^*, (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.
- Résoudre le système $(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,j}x_j + \dots + a_{1,p}x_p = b_1, \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,j}x_j + \dots + a_{i,p}x_p = b_i, \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,j}x_j + \dots + a_{n,p}x_p = b_n, \end{cases}$ en exprimant les solutions, quand elles existent, grâce à la question 15).
- Que pensez vous du rang du système ?
- 23) Interpréter le résultat précédent en tant qu'intersection d'hyperplan.