

Calculs algébriques Rappels et compléments

1 LES ENSEMBLES DE NOMBRES - RAPPELS

1.1 $\mathbb{N}$ ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ est celui des **nombre entiers naturels**. On peut toujours ajouter et multiplier des entiers naturels. Cependant la soustraction et la division de deux nombres entiers naturels peut ne pas rester dans $\mathbb{N}$.

1.2 $\mathbb{Z}$ ENSEMBLE DES ENTIERS RELATIFS

L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ est celui des **nombre entiers relatifs**. On peut toujours ajouter, soustraire et multiplier des entiers relatifs $\mathbb{Z}$. Mais la division reste toujours impossible en général.

1.3 $\mathbb{Q}$ ENSEMBLE DES NOMBRES RATIONNELS

L'ensemble $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$ est celui des **nombre rationnels**. Cette fois ci, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont toujours possibles entre rationnels.

1.4 $\mathbb{R}$ ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

Les nombres rationnels ne sont pas suffisants pour représenter tous les nombres. Il n'y a par exemple pas le nombre x tel que

$$x^2 = 2.$$

Les constructions de l'ensemble des nombres réels ne sont pas au programme, mais on peut très bien se représenter cet ensemble de nombres à l'aide de la droite graduée. Soit $\mathcal{D}$ une droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$. A tout réel $x \in \mathbb{R}$, on associe son image sur la droite, le point $M(x)$ d'abscisse x . On pourra retenir la chaîne d'inclusions des ensembles de nombres :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.5 $\mathbb{D}$ ENSEMBLE DES NOMBRES DÉCIMAUX

Les nombres réels peuvent tous être représentés comme des nombres à virgule. En général, la suite des décimales (les chiffres à droite de la virgule) est infinie. C'est le cas par exemple, pour π dont on connaît aujourd'hui les 10000 milliards premières décimales :

$$\pi = 3,141592653589793\dots$$

Pour un nombre rationnel, en général, la suite des décimales est périodique, comme par exemple $3,5555\dots$. Mais il existe un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ qui contient les nombres avec une suite de décimales finie, comme $1,65 = \frac{165}{100}$. Ces nombres sont des *décimaux* et l'ensemble de ces nombres est noté $\mathbb{D}$. On peut aussi l'écrire :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pour rappel, on note un ensemble de nombres indexé d'un '+' ou d'un '-', respectivement pour les nombres positifs et négatifs de l'ensemble. Par exemple, $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

On note un ensemble de nombres avec une étoile '*' en exposant, pour tous les nombres inversibles, c'est à dire, tous les nombres sauf 0. Par exemple, $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

2 PUISSANCES ET RACINES

Définition 1

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ un réel et $n \in \mathbb{Z}$ un entier relatif.

- si $n = 0$, on pose $a^0 = 1$;
- si $n > 0$, on définit

$$a^n = \prod_{k=1}^n a = \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}.$$

- si $n < 0$, on définit

$$a^n = (1/a)^{-n}.$$

Convention

Si $a = 0$, on convient que $0^0 = 1$, les puissances d'exposant strictement positif sont nulles, et les puissances d'exposants strictement négatif ne sont pas définies. Dans l'écriture a^n , a s'appelle la *base* et n l'*exposant*.

Proposition 1 : Règles de calcul avec les puissances d'exposants entiers

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ des réels non nuls et $n, m \in \mathbb{Z}$ des entiers relatifs. On a les égalités suivantes :

- $a^0 = 1$,
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$,
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$,
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$,
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$,
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

Proposition 2 : Identités remarquables

Soient a, b des réels. On a les égalités suivantes :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$,
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Définition 2

Soit a un réel positif. Il existe un unique réel positif $b \in \mathbb{R}^+$, unique tel que :

$$b^2 = a$$

Cet élément b est noté $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt{a}$ ou $a^{1/2}$ et est appelé la racine carrée de a .



ATTENTION

Pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \leq y \not\Rightarrow x^2 \leq y^2$$

et

$$x^2 \leq y^2 \not\Rightarrow x \leq y$$

Existence de $b \in \mathbb{R}^+$

Il n'y a pas de raison pour que b existe en général. Le terme "définition" est un peu trompeur, et doit normalement être justifié. En effet, b existe et est unique. C'est le théorème des valeurs intermédiaire, que nous reverrons dans un autre chapitre qui le justifie, car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Proposition 3 : Règles de calcul avec la racine carrée

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ des réels.

- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $x \leq y \iff \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$,
- Si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ alors $\sqrt{x \times y} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$,
- Si $x \geq 0$ et $y > 0$ alors $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

⚠ ATTENTION Et si $x \in \mathbb{R}$, alors $\sqrt{x^2} \neq x$. Le réel x peut être négatif. Donc

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Aussi, si $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Exemple 1

On souhaite calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2} - x$, si elle existe.

Sous cette forme, on a une forme indéterminée $\infty - \infty$. On multiplie alors par le conjugué !

$$\frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)(\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x)}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} = \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x} = \frac{3 + 2/x}{\sqrt{1 + 3/x + 2/x^2} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 3$$

Pour ne pas écrire tout le temps cette accolade, on définit la

3 VALEUR ABSOLUE**Définition 3**

On définit la **valeur absolue** d'un réel x , que l'on note $|x|$, par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Point Notations : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On note $\max(a, b)$ le plus grand des deux réels a et b et $\min(a, b)$ le plus petit.

Proposition 4

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

- ① Cette définition est bien cohérente,
- ② $|x| \geq 0$. De plus, $|x| = 0$ si, et seulement si, $x = 0$
- ③ $|x| = \max(-x, x)$, donc $-|x| \leq x \leq |x|$ et $|-x| = |x|$,
- ④ $|xy| = |x||y|$,
- ⑤ $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$.

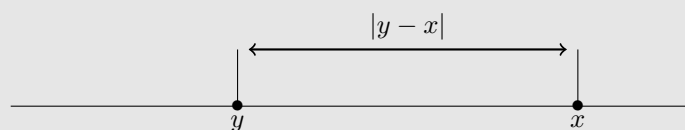
Preuve.

- ① Si $x \geq 0$ et $x \leq 0$, alors $x = 0 = -x$.
- ② Pour démontrer l'inégalité, il suffit d'appliquer la définition. Le cas d'égalité est évident si $x = 0$. Si $|x| = 0$, alors $x = 0$ ou $-x = 0$, ce qui revient au même.
- ③ Si $x \geq 0$, on a bien $|x| = x$ et $\max(-x, x) = x$, car $x \geq 0 \geq -x$. On fait de même pour $x \leq 0$ ce qui conclut la preuve par disjonction de cas.
On a alors $|-x| = \max(x, -x) = \max(-x, x) = |x|$.
- ④ Une disjonction de cas simple sur le signe de xy prouve le résultat.
- ⑤ On a $|x| \leq a \Leftrightarrow \max(x, -x) \leq a \Leftrightarrow (x \leq a) \wedge (-x \leq a) \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

□

Définition 4

On définit la **distance** entre deux réels par la valeur absolue de leur différence.



C'est la définition de distance intuitive que l'on a entre deux nombres.

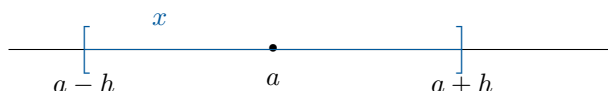
Proposition 5

Pour tous $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+$, on a

$$|x - a| \leq h \iff a - h \leq x \leq a + h.$$

Preuve.

Cela revient à dire que x est à une distance plus petite que h de a .



En effet, $|x - a| \leq h \iff -h \leq x - a \leq h \iff a - h \leq x \leq a + h$. □

Exemple 2

Démontrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Valeur absolue, donc disjonction de cas !

Cas $x \leq 1$. On a alors $x - 1 \leq 0$ et $|x - 1| = 1 - x$. On doit alors démontrer que, si $x \leq 1$, on a $1 - x \leq x^2 - x + 1$.
Or $x^2 - x + 1 - (1 - x) = x^2 \geq 0$. La propriété est donc vraie si $x \leq 1$.

Cas $x \geq 1$. On a alors $x - 1 \geq 0$ et $|x - 1| = x - 1$. On doit alors démontrer que, si $x \geq 1$, on a $x - 1 \leq x^2 - x + 1$.
Or $x^2 - x + 1 - (x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 0$. La propriété est donc vraie si $x \geq 1$. En conclusion, la propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 6 : Inégalités triangulaires

Si x et y sont deux réels quelconques, alors on a :

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x + y|.$$

Preuve.

On a

$$|x + y| = \sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy}.$$

Or $xy \leq |xy|$. Donc

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + 2|xy|} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|xy|} = \sqrt{(|x| + |y|)^2} = |x| + |y|,$$

car $|x| + |y| \geq 0$. Cela prouve la première inégalité.

Autre preuve : $-|x| \leq x \leq |x|$ et $-|y| \leq y \leq |y|$. En additionnant $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$. Donc $|x + y| \leq |x| + |y|$. Puisque $x = (x - y) + y$, on a d'après la première inégalité : $|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$. Donc $|x| - |y| \leq |x - y|$. En intervertissant les rôles de x et y , on a aussi $|y| - |x| \leq |y - x|$. Comme $|y - x| = |x - y|$, on a donc $||x| - |y|| \leq |x - y|$. $\square$

Remarque

Comme on a $|-y| = |y|$, On peut combiner les deux inégalités en une :

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Utilisation inégalité triangulaire

4 RÉSOUDRE UNE INÉQUATION - RAPPELS

Proposition 7 : Règles de calculs des inégalités

Soient $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien strict/large** Si $a < b$, alors : $a \leq b$.

Dans les règles qui suivent, on peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

- **Somme** Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors : $a + c \leq b + d$.

- **Produit :**

▷ **par un réel positif** Si $a \leq b$ et $\lambda \geq 0$, alors : $\lambda a \leq \lambda b$,

▷ **par un réel négatif** Si $a \leq b$ et $\lambda \leq 0$, alors $\lambda a \geq \lambda b$,

▷ **d'inégalités positives** Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors : $0 \leq ac \leq bd$.

- **Passage à l'inverse** Si $a \leq b$ et si a et b sont de même signe, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

- **Transitivité** Si $(a \leq b \text{ et } b \leq c)$ alors $a \leq c$.

- **Antisymétrie** Si $(a \leq b \text{ et } b \leq a)$ alors $a = b$.

Vocabulaire

Majorer une expression veut dire "Trouver un nombre réel toujours plus grand que l'expression". Ce nombre est appelé un *majorant* de l'expression.

Minorer une expression veut dire "Trouver un nombre réel toujours plus petit que l'expression". Ce nombre est appelé un *minorant* de l'expression.

⚠ ATTENTION Les inégalités strictes " $<$ " et " $>$ " et des inégalités larges " $\geq$ " et " $\leq$ " sont différentes. Nous allons manipuler des inégalités toute l'année, alors faites l'effort de bien choisir le symbole que vous utilisez.

Exemple 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; notons $s_n = 1^4 + \dots + n^4$. On va utiliser une majoration grossière de s_n . Fixons $n \in \mathbb{N}^*$

Puisque tous les termes de la somme sont minorés par 1, on a $s_n \geq 1 + \dots + 1 = n$.

Puisque tous les termes de la somme sont majorés par n^4 , on a $s_n \leq n^4 + \dots + n^4 = nn^4 = n^5$.

On a donc montré que

$$n \leq s_n \leq n^5,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La pratique

Pour résumer ce que l'on peut faire concrètement, on a le droit

- d'appliquer aux deux membres de l'inégalité une fonction strictement croissante sur l'intervalle donné par les deux membres de l'inégalité, (Comme par exemple la fonction $x \mapsto \lambda x$ de multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$),
- d'appliquer aux deux membres de l'inégalité une fonction strictement décroissante sur l'intervalle donné par les deux membres de l'inégalité, en changeant le sens de l'inégalité (Comme par exemple la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$).

⚠ ATTENTION

Majorer une fraction de réels positifs, c'est majorer son numérateur et MINORER son dénominateur.

Minorer une fraction de réels positifs, c'est minorer son numérateur et MAJORER son dénominateur.

Exemple 4

- On souhaite encadrer grossièrement le réel $\frac{2x}{x^2+4}$, pour tout $x \in [3, 5]$.
Par hypothèse, $3 \leq x \leq 5$, donc $6 \leq 2x \leq 10$ et $13 \leq x^2 + 4 \leq 29$, car la fonction $x \mapsto x^2 + 4$ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$. Par quotient,

$$\frac{6}{29} \leq \frac{2x}{x^2+4} \leq \frac{10}{13}.$$

Et non

$$\frac{6}{13} \leq \frac{2x}{x^2+4} \leq \frac{10}{29} !$$

- Montrons que pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

BROUILLON

On peut commencer à chercher d'où vient cette inégalité

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \iff x^2 + 1 \geq 2x, \text{ car } x > 0$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x - 1)^2 \geq 0,$$

puis d'observer que le carré d'un réel est toujours positif.

Sur une copie, pour un calcul aussi simple, il vaut mieux partir de la fin: $(x - 1)^2 \geq 0$ et en déduire rapidement l'inégalité désirée.

⚠ ATTENTION ① Il est **interdit** de soustraire 2 inégalités !

Même si $0 < 1$ et $1 < 3$,

$$0 - 1 = -1 \not\geq -2 = 1 - 3.$$

② Dans l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$, quand on remplace y par $-y$, c'est toujours un "+" qu'on trouve à droite $|x - y| \leq |x| + |y|$ et non $|x - y| \leq |x| - |y|$!

5 SOMMES ET PRODUITS

Quand l'on fait une longue somme ou un produit de 10, 30, n termes, il est impossible d'écrire tous les termes. Les mathématiciens ont donc inventé une notation pour noter ces sommes et produits. Elles peuvent être contre-intuitives à première abord, mais sont très pratiques quand on sait les utiliser.

Par exemple, on note

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}}_{\text{Forme habituelle de la somme}} = \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k},$$

et jusqu'à un entier n quelconque :

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}}_{\text{Forme in extenso de la somme}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Variable muette

Vous avez bien sûr remarqué, comme vous êtes d'excellents rédacteurs en mathématiques, que la variable k dans la somme n'a jamais été définie. C'est inadmissible !

En fait, il n'y a pas besoin de définir cette variable car elle est dite muette et définie par la somme comme parcourant les entiers de 1 à 9, dans la première, et de 1 à n dans la seconde. C'est donc un compteur qui **n'a aucun sens en dehors de la somme** et qui peut être remplacé par n'importe quel autre lettre ou symbole, sans changer le sens. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^9 \frac{1}{k} = \sum_{\alpha=1}^9 \frac{1}{\alpha} = \sum_{\square=1}^9 \frac{1}{\square} = \sum_{\mathfrak{A}=1}^9 \frac{1}{\mathfrak{A}}.$$

Donc on peut utiliser le même indices pour plusieurs sommes dans le même calcul, car l'indice *meurt* à la fin de la somme ! On peut donc écrire

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = \sum_{k=1}^9 \frac{1}{k} \quad \left| \quad \sum_{k=1}^5 k \right.$$

Début de l'indice $\uparrow$ $\uparrow$ Fin de l'indice

Essayez juste de choisir des indices qui n'ont pas été définis plus tôt... On ne prend pas i comme indice si on travaille avec des nombres complexes.

Exemple 5

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}. \end{cases}$ Soit $N \in \mathbb{N}$. Calculons la somme $\sum_{k=0}^n u_n$.

On remarque que u_n est arithmétique, De plus, d'après la somme d'une suite arithmétique, on sait que

$$\sum_{k=0}^n u_n = \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes} = \frac{1 + (1 + 3n/2)}{2} \times (n+1) = \frac{(4 + 3n)(n+1)}{4}.$$

5.1 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition 5

Soient p et q deux nombres entiers naturels, avec $p \leq q$, et $q - p + 1$ nombre réels $a_p, a_{p+1}, \dots, a_q$. On écrit

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$$

leur somme et

$$\prod_{k=p}^n a_k = a_p a_{p+1} \dots a_q$$

leur produit.

Exemple 6

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n \text{ termes}} = \prod_{k=1}^n x.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **factorielle** n , et l'on note $n!$, le nombre entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n = \prod_{k=1}^n k$$

Point Notations : On peut trouver différentes écritures de l'indice de sommation. L'indice doit juste bien être délimité. Les notations suivantes sont équivalentes.

$$\sum_{k=p}^q a_k, \quad \sum_{k \in [p, q]} a_k \quad \text{ou encore} \quad \sum_{p \leq k \leq q} a_k.$$

Bien sûr, au lieu d'écrire $k \in [p, q]$, on peut aussi écrire $k \in I$, où I est un sous ensemble de $\mathbb{N}$. On verra aussi des exemples, où I n'est pas un sous ensemble de $\mathbb{N}$, il suffit qu'il soit dénombrable.

Somme et produit vides

On donne certaines conventions quand l'ensemble d'indices est vide. On convient convenant qu'une somme vide vaut 0 et qu'un produit vide vaut 1, c'est à dire,

$$\sum_{k \in \emptyset} a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$$

Par exemple,

- Si $p = q + 1$, on convient que

$$\sum_{k=p}^q a_k = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^q a_k = 1,$$

- Cela est consistant avec la notation

▷ de puissance : Pour $x \in \mathbb{R}$ et $x^0 = \prod_{k=1}^0 x = 1$,

▷ factorielle : $0! = \prod_{k=1}^0 k = 1$.

Exemple 7

Si I désigne l'ensemble des nombres premiers entre 1 et 15, alors

$$\sum_{k \in I} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} = \sum_{\substack{k \text{ premier} \\ k \in [11, 25]}} \frac{1}{k}.$$

Proposition 8 : Premières propriétés

Soient $p, q \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq q$. Soient $(a_i)_{i \in \llbracket p, q \rrbracket}$ et $(b_i)_{i \in \llbracket p, q \rrbracket}$ deux familles de nombres réels, $\lambda \in \mathbb{R}$ $l \in \mathbb{N}$. On a

① **Linéarité de la somme** $\sum_{i=p}^q (a_i + b_i) = \sum_{i=p}^q a_i + \sum_{i=p}^q b_i$ et $\sum_{i=p}^q \lambda a_i = \lambda \sum_{i=p}^q a_i$,

② **Propriétés du produit** $\prod_{i=p}^q (a_i b_i) = \prod_{i=p}^q a_i \cdot \prod_{i=p}^q b_i$ et $\prod_{i=p}^q a_i^l = \left(\prod_{i=p}^q a_i \right)^l$.

La preuve n'est qu'un jeu d'écritures. Vous pouvez revenir à la notation intuitive de la somme pour voir les égalités.

Sommes et produits de constantes

En reprenant les notations de la proposition, on peut montrer que

$$\sum_{i=p}^q (a_i + \lambda) = \sum_{i=p}^q a_i + (q - p + 1)\lambda \quad \text{et} \quad \prod_{i=p}^q (\lambda a_i) = \lambda^{q-p+1} \prod_{i=p}^q a_i.$$

Pensez donc à sortir les constantes qui ne dépendent pas de l'indice de sommation.

Proposition 9

Soient I_1 et I_2 deux ensembles d'indices finis et disjoints ($I_1 \cap I_2 = \emptyset$) et soit $I := I_1 \cup I_2$. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels. On a

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I_1} a_i + \sum_{i \in I_2} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} a_i = \left(\prod_{i \in I_1} a_i \right) \left(\prod_{i \in I_2} a_i \right).$$

Relation de Chasles

Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$, tels que $p \leq r \leq q$. Prenons dans la proposition $I_1 := \llbracket p, r \rrbracket$ et $I_2 := \llbracket r+1, q \rrbracket$. On a bien $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $I := I_1 \cup I_2 = \llbracket p, q \rrbracket$. La proposition donne alors les *relations de Chasles*

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{k=p}^r a_k + \sum_{k=r+1}^q a_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^q a_k = \left(\prod_{k=p}^r a_k \right) \left(\prod_{k=r+1}^q a_k \right).$$

5.2 CHANGEMENT D'INDICES

On peut avoir besoin de décaler l'indexage d'une suite.

Décalage d'indice

Par exemple, on peut vouloir ramener une somme à un indice de départ nul pour faciliter la lisibilité. Étant donné une somme $S = \sum_{k=p}^q a_k$, le changement d'indice $[j = k - p]$ permet de se ramener à une somme indexée à partir de 0 :

$$S = \sum_{j=0}^{q-p} a_{j+p}$$

k	p	$p+1$	$p+2$	$\cdots$	$q-1$	q
j	0	1	2	$\cdots$	$q-p-1$	$q-p$

⚠ ATTENTION On ne change pas la somme, mais seulement l'indexation !

Exemple 8

Pour $n \geq 2$, on nous demande de calculer la somme

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)}.$$

On réécrit d'abord $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$, valable pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On obtient

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}.$$

Dans cet exemple, on fait un changement d'indice pour avoir les mêmes termes à sommer. On fait donc le changement d'indice $[j = k + 2]$ dans la deuxième somme :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2} = \sum_{j=3}^{n+2} \frac{1}{j} = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}.$$

On rappelle que l'indice de sommation est muet ! On obtient:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) - \left(\sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \quad (\text{car } n \geq 2) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Symétrisation

On peut aussi vouloir inverser l'ordre des termes, en partant du dernier pour arriver au premier.

Exemple 9

Pour $n \in \mathbb{N}$, on veut calculer

$$S = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

Le résultat est évident pour $n = 0$, puisqu'une somme vide vaut 0. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons montrer, en gardant les notations intuitives, pourquoi le changement de sens de la somme peut être utile. Sommons une fois dans un sens, et une fois dans l'autre :

$$\begin{array}{rcccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ S & = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ fois.}}$

On a donc $2S = n(n+1)$, c'est-à-dire $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

En toute généralité, fixons pour $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$S = \sum_{k=0}^n a_k \quad (2)$$

On va inverser l'ordre de sommation. Pour cela, on fait le changement d'indice $[j = n - k]$. On obtient

$$S = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{j=0}^n a_{n-j} . \quad (3)$$

k	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
j	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1	0

Si l'on écrit les sommes de manière intuitive on remarque que l'on a juste commencé par la fin :

- l'écriture (2) correspond à $S = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$,
- l'écriture (3) correspond à $S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$.

Exemple 10

Par exemple, calculons $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.

On peut remarquer que, si on sépare les sommes, le deuxième dénominateur est descendant. On peut avoir l'idée de changer l'indice pour les comparer. On pose $l = n + 1 - k$. Quand $k = 1$, alors $l = n$ et quand $k = n$, alors $l = 1$. On obtient donc

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{l=1}^n \frac{1}{l} = 0 .$$

5.3 SOMMES RECTANGULAIRES

Que se passe-t-il quand on multiplie 2 sommes ? Posons n, m deux entiers naturels et $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j &= (a_1 + \dots + a_m) (b_1 + \dots + b_n) \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \dots + a_1 b_n \\ &\quad + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_2 b_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_m b_1 + a_m b_2 + \dots + a_m b_n \\ &= \sum_{(i,j) \in I} a_i b_j, \text{ où } I = \llbracket 0, m \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket \end{aligned}$$

que l'on note $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j$. En effet, on a bien un produit $a_i b_j$ pour chaque (double) indice dans I

$i \backslash j$	1	2	...	n
1	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	...	$a_1 b_n$
2	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	...	$a_2 b_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	$a_m b_1$	$a_m b_2$	...	$a_m b_n$

Proposition 10 : Produit de deux $\sum$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Pour tous $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j .$$

Interversions de sommes

Comme l'ensemble de double indices à l'arrivée $I = \llbracket 0, m \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$ ne dépend du sens des sommes, Cela veut dire que l'on peut intervertir les sommes finies comme on le souhaite !

$$\sum_{i=1}^m a_i \times \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_i b_j = \sum_{j=1}^n b_j \times \sum_{i=1}^m a_i .$$

Exemple 11

Par exemple, le calcul de $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$, peut faire peur, mais est en fait quasi immédiat.

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n j \right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} .$$

Exemple 12

De même,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} &= \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq n} (j+1) = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+3)}{2} \\ &= \frac{n(n+3)}{4} . \end{aligned}$$

Les sommes obtenues, de la forme $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} z_{i,j}$, où $(z_{i,j})_{(i,j) \in I}$ est une famille de réels (ou complexes), sont appelées *sommes doubles*. Parfois l'indice les indices i et j ne sont pas sécables, comme par exemple dans la somme

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{1}{i+j} ,$$

mais on garde le droit d'intervertir les sommes.

Proposition 11

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $I = \llbracket 0, m \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour toute famille de nombres $(z_{i,j})_{(i,j) \in I}$, on a

$$\sum_{(i,j) \in I} z_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} z_{i,j} = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n z_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m z_{i,j} \right)$$

Preuve.

Le tableau des valeurs des $z_{i,j}$ est donné comme le précédent

$i \backslash j$	1	2	...	n
0	z_{11}	z_{12}	...	z_{1n}
1	z_{21}	z_{22}	...	z_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
m	z_{m1}	z_{m2}	...	z_{mn}

La proposition est démontrée, si l'on montre que sommer d'abord sur le premier ou sur le deuxième indice ne change rien à la somme finale. Mais en fait, Pour i fixé, la somme

$$\sum_{j=1}^n z_{i,j}$$

revient à sommer la i -ème ligne du tableau donc

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n z_{i,j} \right)$$

est la somme des lignes du tableau, donc de tous les $(z_{i,j})_{(i,j) \in I}$. Le même raisonnement dans l'autre sens montre la proposition. $\square$

Exemple 13

Soit $(a_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de réels. En écrivant

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \right),$$

la proposition précédente donne :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_i a_j$$

En écrivant alors $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ comme une union disjointe

$$\llbracket 1, n \rrbracket^2 = \{(k, k) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \cup \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j\} \cup \{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i > j\}$$

on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i a_j$$

On constate alors que les deux dernières sommes ci-dessus sont égales. En effet, du fait que $a_i a_j = a_j a_i$, on passe de l'une à l'autre en échangeant les variables muettes i et j . Alors

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

5.4 SOMMES TRIANGULAIRES

$i \backslash j$	1	2	3	4	
1	1				→ 1
2	2	4			→ 6
3	3	6	9		→ 18
4	4	8	12	16	→ 40
	↓ 10	↓ 18	↓ 21	↓ 16	→ 65

On peut essayer de calculer la somme des produits ij dont l'ensemble d'indexation I est l'ensemble des couples d'entiers (i, j) vérifiant :

$$1 \leq j \leq i \leq 4$$

Les valeurs sont données par le tableau ci-contre.

On souhaite calculer la somme des termes de cette famille, que l'on note

$$S = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 4} ij.$$

Présentons deux manières naturelles de calculer cette somme S :

- on peut sommer d'abord les termes de chaque ligne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^i ij \right) = 1 + 6 + 18 + 40 = 65$$

- on peut sommer d'abord les termes de chaque colonne du tableau, puis additionner les quatre sommes ainsi obtenues :

$$S = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=j}^4 ij \right) = 10 + 18 + 21 + 16 = 65$$

On remarque alors que

$$S = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 4} ij = \sum_{j=1}^4 \left(\sum_{i=j}^4 ij \right) = \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^i ij \right)$$

Proposition 12

Pour toute famille $(z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de nombres, on a

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} z_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i z_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n z_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq j < i \leq n} z_{ij} = \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} z_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n z_{ij}$$

La preuve se fait exactement comme dans l'exemple. Je laisse le petit tableau explicatif.

$i \backslash j$	1	2	...	n	
1	z_{11}				→ $\sum_{j=1}^1 z_{1j}$
2	z_{21}	z_{22}			→ $\sum_{j=1}^2 z_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		→ $\vdots$
n	z_{n1}	z_{n2}	$\cdots$	z_{nn}	→ $\sum_{j=1}^n z_{nj}$
	↓ $\sum_{i=1}^n z_{i1}$	↓ $\sum_{i=2}^n z_{i2}$	↓ $\cdots$	↓ $\sum_{i=n}^n z_{in}$	

$\left. \begin{array}{l} \sum_{j=1}^1 z_{1j} \\ \sum_{j=1}^2 z_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n z_{nj} \end{array} \right\} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i z_{ij}$

$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n z_{i1} \\ \sum_{i=2}^n z_{i2} \\ \cdots \\ \sum_{i=n}^n z_{in} \end{array} \right\} \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n z_{ij}$

⚠ ATTENTION Il est important de comprendre que, lorsqu'on écrit une somme triangulaire à l'aide de deux symboles $\sum$ imbriqués, c'est forcément l'ensemble parcouru par le second indice qui peut dépendre du premier, et JAMAIS l'inverse !

$$\sum_{i=1}^j \sum_{j=1}^n z_{ij}$$

n'a aucun sens car j n'a pas encore été défini avant la première somme !

Exemple 14

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on souhaite calculer la somme double

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}.$$

Sous cette forme le calcul est difficile car à i fixé, nous ne connaissons pas d'expression simple pour la somme

$$\sum_{j=i}^n \frac{1}{j}.$$

Intervertissons les deux symboles $\sum$.

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{1}{j} = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{1}{j}$$

Et c'est tout de suite plus facile car $\frac{1}{j}$ ne dépend pas de i ! On a alors, pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé,

$$\sum_{i=1}^j \frac{1}{j} = j \times \frac{1}{j} = 1.$$

d'où

$$S = \sum_{j=1}^n 1 = n.$$

Exemple 15

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min\{i, j\} &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \min(i, j) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \min(i, j) + \sum_{i=j+1}^n \min(i, j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j i + \sum_{i=j+1}^n j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j(j+1)}{2} + j \cdot (n-j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{-j^2}{2} + \frac{(2n+1)j}{2} \right) \\ &= \frac{-(2n+1)n(n+1)}{12} + \frac{(2n+1)n(n+1)}{4} = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

5.5 INTERVERSIONS DE PRODUITS

Les notations et les preuves sont similaires à celles des sommes.

Proposition 13 : Permutation des produits

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour toute famille $(z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de nombres, on a

- *Produits rectangulaires*

$$\prod_{1 \leq i, j \leq n} z_{ij} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n z_{ij} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n z_{ij} ,$$

- *Produits triangulaires*

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} z_{ij} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^j z_{ij} = \prod_{i=1}^n \prod_{j=i}^n z_{ij} ,$$

- *Produits triangulaires stricts*

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} z_{ij} = \prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} z_{ij} = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n z_{ij}$$

Exemple 16

On a par exemple, $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n ij = \left(\prod_{i=1}^n i \right)^n \left(\prod_{j=1}^n j \right)^n = (n!)^{2n}$.

5.6 QUELQUES SOMMES ET PRODUITS USUELS

Nous allons voir quelques résultats à connaître et à savoir démontrer. On suppose connu le vocabulaire des suites numériques. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

Proposition 14 : Télescopage

Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. On appelle *somme télescopique* toute somme de la forme

$$\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$$

Supposons de plus que $u_k \neq 0$ pour tout $k \in \llbracket p, n \rrbracket$. On appelle *produit télescopique* tout produit de la forme

$$\prod_{k=p}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$$

Preuve. C'est un calcul direct. On a

$$\sum_{k=p}^n (u_{k+1} - u_k) = (u_{n+1} - u_n) + (u_n - u_{n-1}) + \cdots + (u_{p+2} - u_{p+1}) + (u_{p+1} - u_p)$$

$$= u_{n+1} + (-u_n + u_n) + \cdots + (-u_{p+1} + u_{p+1}) - u_p$$

$$= u_{n+1} - u_p$$

et $\prod_{k=p}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{p+1}}{u_p} \cdot \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$= \frac{1}{u_p} \cdot \frac{u_{p+1}}{u_{p+1}} \cdots \frac{u_n}{u_n} \cdot u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_p}$$

□

Exemple 17

Calculons la somme $\sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{k+1}{k+2} \right)$. En séparant, on a

$$\sum_{k=0}^n \ln \left(\frac{k+1}{k+2} \right) = \sum_{k=0}^n \ln(k+1) - \ln(k+2) = \ln(1) - \ln(n+2) = -\ln(n+2) .$$

Car la somme est télescopique !

Proposition 15 : Somme d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, on a

$$\sum_{k=p}^n u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} .$$

Pour retenir

Vous pouvez retenir

$$\text{Somme d'une suite géométrique} = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} .$$

Preuve. On a, par télescopage :

$$(1 - q) \sum_{k=p}^n q^k = \sum_{k=p}^n (q^k - q^{k+1}) = q^p - q^{n+1}$$

Par conséquent, si $q \neq 1$, alors :

$$\sum_{k=p}^n q^k = \frac{q^p - q^{n+1}}{1 - q} = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \quad \text{et en particulier pour } p = 0 \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

□

Proposition 16 : Somme des premiers carrés

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Preuve. Prouvez le par récurrence ! □

Exemple 18

Calculons la somme $\sum_{k=0}^n \frac{5}{2^n} + 5k^2 - 1$.

On sépare les sommes, qui sont toutes calculables.

$$\sum_{k=0}^n \frac{3}{2^n} + 5k^2 - 1 = 3 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^n} + 5 \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n 1 = 3 \times \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} + 5 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (n+1) ,$$

d'où $\sum_{k=0}^n \frac{5}{2^n} + 5k^2 - 1 = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) + \frac{(n+1)(10n^2 + 5n - 6)}{6} .$

Proposition 17 : Factorisation de $a^n - b^n$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Preuve. On part du membre de droite de l'égalité. C'est plus simple !

$$(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-1-k} - a^k b^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (a^{k+1} b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k})$$

On reconnaît alors une somme télescopique qui vaut $a^n b^0 - a^0 b^n$, donc $a^n - b^n$. $\square$

Exemple 19

Trouvons le chiffre des unités de $23^n - 13^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On utilise la formule de factorisation de $a^n - b^n$, et on a $23^n - 13^n = (23 - 13) \sum_{k=0}^{n-1} 23^k 13^{n-1-k} = 10 \sum_{k=0}^{n-1} 23^k 13^{n-1-k}$.

Le nombre $\sum_{k=0}^{n-1} 23^k 13^{n-1-k}$ étant un entier positif, $23^n - 13^n$ admet 0 comme chiffre des unités.

6 COEFFICIENTS BINOMIAUX

Prenons a et b deux nombres complexes et développons :

$$\begin{aligned} (a+b)^0 &= 1, \\ (a+b)^1 &= 1a + 1b \\ (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

Les coefficients du développement de $(a+b)^n$ sont ceux du triangle de Pascal

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$							$\ddots$

On les appelle les **coefficients binomiaux** notés dans la suite $\binom{n}{k}$.

Définition 6

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on appelle **coefficient binomial** le nombre

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si : } k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est le nombre de façons de choisir k objets parmi n .

Cas particuliers

Autre expression pour $k \in \mathbb{N}$, après simplification des factorielles :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proposition 18 : Propriétés des coefficients binomiaux

- ① **Symétrie** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- ② **Formule du pion** Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$.
- ③ **Formule de Pascal** Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$.
- ④ Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Preuve.

- ① • Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors changer k en $n-k$ ne change pas la valeur de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$;
 • si $k < 0$ ou $k > n$, alors $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$ sont tous les deux nuls par convention.

- ② Si k est strictement supérieur à n ,

$$\binom{n}{k} = 0 = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Dans le cas contraire :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- ③ Si k est strictement négatif ou strictement supérieur à $n+1$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = 0 + 0 = 0 = \binom{n+1}{k}.$$

Si k vaut 0 ou $n+1$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = 1 = \binom{n+1}{k}.$$

Enfin, si k est compris entre 1 et n ,

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1} &\stackrel{\textcircled{2}}{=} \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1} - \binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1} \\ &= \frac{n-k+1}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

- ④ Nous allons montrer par récurrence la proposition : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{0}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ donc $\binom{0}{k} \in \mathbb{N}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Aussitôt pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $\binom{n}{k-1} \in \mathbb{N}$ et $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$,

donc par somme d'après la formule de Pascal : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.

□

Exemple 20

Montrons, par récurrence sur n , que $\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$

Initialisation. Le résultat est évident pour $n = 0$ car $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'égalité est vérifiée au rang n et montrons-la au rang $n+1$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{p} &= \sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p} + \binom{p+n+1}{p} \\ &= \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} = \binom{p+n+2}{p+1}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Proposition 19 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

Preuve. Procédez par récurrence, en utilisant la formule de Pascal.

□

Exemple 21

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n.$

De même, Pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n.$

Exemple 22

Simplifions la somme $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$

On utilise la formule du pion pour "manger" le k , et on utilise l'exemple précédent.

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n 2^{n-1}.$$