Estrategias de Resolución de Problemas Combinatorios en Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Rosemberg Peralta Vargas

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2015

Estrategias de Resolución de Problemas Combinatorios en Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Rosemberg Peralta Vargas

Trabajo de profundización presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Mg. Diógenes de Jesús Ramírez

Codirector:

Doctor. Santiago González Orozco

Línea de Investigación:

Didáctica de la Matemática

Sublínea de Investigación

Didáctica de la Combinatoria

Universidad Nacional de Colombia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

2015

A mi esposa Carol Lisseth Abello por la paciencia y la impaciencia

Agradecimientos

A mi esposa por el acompañamiento y apoyo en todo el proceso de realización de este trabajo.

A mi hija, por ser la inspiración y la motivación para seguir adelante.

Al profesor Santiago González Osorio, Director de este trabajo por todos los aportes que hizo no solo a este trabajo sino a mi vida profesional.

A Diógenes de Jesús Ramírez Ramírez, por su paciencia, preocupación y entrega para culminar con éxito mi formación como magister.

Resumen

Con el objeto de reconocer qué estrategias emplean los estudiantes de últimos semestres de licenciatura en matemáticas de la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA cuando resuelven problemas simples de combinatoria, se aplicó un cuestionario de dos problemas simples de combinatoria a estudiantes de últimos semestres de este programa. Las respuestas de los alumnos se clasificaron de acuerdo a la estrategia empleada para la solución de cada uno de los problemas. Para el problema 1, se obtienen 3 categorías: analítica, con dos enfoques, utilización de fórmulas y narración; enumerativa, con enfoque, conteo de puestos vacíos y la solución gráfica. Para cada una de estas se selecciona un representante, el cual es analizado y presentado con detalle, y se presentan alternativas de solución partiendo de la dada por el alumno. En términos generales, se notó que un 31.1% emplearon la enumeración como estrategia, 26.6% analítica y grafica 28.8%. Para el caso del primer problema, de los 45 cuestionarios analizados tan solo dos de ellos llegaron a respuestas correctas.

Para el segundo problema, se hace solo una presentación y un análisis similar al del problema. Uno se dejará para un futuro artículo.

Palabras clave: Estrategia; Representación de conceptos matemáticos; Combinatoria; Principios de la suma y de la multiplicación; Combinación, variación y permutación; Problema combinatorio simple; Educación matemática realista (EMR) y Esquematización progresiva; Fases en la resolución de problemas, Naturaleza y contexto de un problema de Matemática.

Abstract

COMBINATORIAL PROBLEM SOLVING STRATEGIES ON MATHEMATICS UNDERGRADUATES

With the aim of recognizing what strategies use the students of the last semesters of bachelor´s degree of mathematics from the University of Tolima when they solve simple combinatorial problems, there was applied a questionnaire about two simple combinatorial problems to students of the last semesters of this program. The students' answers were classified according to the strategy used for the solution of each one of the problems. For the problem 1, three categories are obtained: Analytical, with two approaches, using formulas and narrative; enumerative, with focus, count of empty positions and graphics solution. For each of these, a representative is selected, which is analyzed and presented in detail and alternatives of solution are presented based on the given by the student. In general terms, it was noted that 31.1% used the enumerative category as strategy, 26.6% used the analytical category and graphics 28.8% . In the case of the first problem, of the 45 questionnaires analyzed, only two of them came to correct answers.

For the second problem, it is only a presentation and a similar analysis to the problem. One is left to a future article.

Keywords: Strategy; Representation of mathematical concepts; Combinatory; Principles of addition and multiplication; Combination, variation and permutation; Simple combinatorial problem; Realistic mathematics education (RME) and progressive Outlining; Phases in solving problems, nature and context of a math problem.

Contenido

Lista de figuras

Lista de tablas

Introducción

La combinatoria es tal vez una de las ideas base de gran parte de las matemáticas, su aparición ha sido trascendental en el estudio de la probabilidad, teoría de grupos, topología, teoría de grafos, teoría de juegos, teoría de números, Análisis de redes y programación lineal. Su uso ha permitido entre otras aplicaciones, la perfección de las cajas fuertes, el avance de la criptografía, la elaboración de poderosas computadoras y equipos médicos).

A pesar de la importancia que en otros países latinoamericanos y europeos se le concede a la Combinatoria y a su enseñanza, en nuestro país, en el mejor de los casos, la Combinatoria es apenas un capítulo en los cursos de Probabilidad y de Estadística inferencial.

Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (Navarro-Pelayo & Batanero, 1996, pág. 26) aseguran que la combinatoria al ser esencial para la matemática discreta, debe tener un papel fundamental en la matemática escolar, y citando a Kapur (1970) para justificar la enseñanza de la combinatoria afirma:

I. "Puesto que no depende del cálculo, permite plantear problemas apropiados para diferentes niveles; pueden discutirse con los alumnos problemas aún no resueltos, de modo que descubran la necesidad de crear nuevas matemáticas.
II. Puede emplearse para entrenar a los alumnos en la enumeración, la realización de conjeturas, la generalización, la optimización y el pensamiento sistemático.
III. Puede ayudar a desarrollar muchos conceptos, como los de aplicación, relaciones de orden y equivalencia, función, muestra, conjunto, subconjunto, producto cartesiano, etc.
IV. Puede presentarse muchas aplicaciones en diferentes campos, como: Química, Biología, Física, Comunicación, Probabilidad, Teoría de números, Grafos, etc. "

Este estudio con problemas de Combinatoria para estudiantes de últimos semestres de Licenciatura en Matemáticas, los que ya se han realizado y los que se espera que se realicen en el futuro en Colombia con estudiantes de todos los niveles escolares, contribuyen en la formación inicial y continuada de profesores de Matemáticas, pues, por ejemplo, permiten apreciar parte de la riqueza de esta clase de problemas para el desarrollo del pensamiento matemático de nuestros alumnos; dan ideas a los profesores, en formación o en ejercicio, de las distintas categorías a utilizar para analizar la diversidad de respuestas que los estudiantes en un salón de clase dan a los problemas no solo de Combinatoria sino de las demás áreas de la matemática escolar, y pueden sugerir énfasis en materias del plan de estudios de una Licenciatura en Matemáticas, en particular, estudiar y practicar las distintas fases de solución de un problema de Matemática, en especial la fase de "visión retrospectiva", (Polya, 1979, págs. 19,35,53) la cual ha sido una de las categorías que ha orientado el análisis de la información en este Trabajo.

Producto de la preocupación del autor, por la forma en que resuelven problemas de combinatoria los estudiantes de secundaria, los errores que cometen, los vacíos conceptuales y los obstáculos que encuentran al intentarlo; motivado por el estudio de antecedentes en Didáctica de la Combinatoria como Navarro-Pelayo, Batanero y Godino (Navarro-Pelayo & Batanero, 1996), y Roa, Batanero, Godino y Canizares (Roa Guzman, Batanero, & Godino, 1996) y tomando en cuenta la influencia que la formación inicial tiene en la manera como un profesor posteriormente enseña la Matemática, se decide escoger como población para este estudio, estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y enfocarlo hacia las estrategias que ellos emplean para resolver problemas simples de Combinatoria.

Este interés queda formulado con la pregunta: ¿Qué estrategias emplean estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima cuando resuelven problemas simples de combinatoria? Para dar respuesta a esta cuestión, mediante la aplicación de un cuestionario, se Identifican las estrategias empleadas por estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima en la resolución de problemas simples de combinatoria. Se clasifican las estrategias empleadas por estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en

Matemáticas de la Universidad del Tolima en la resolución de problemas simples de combinatoria. Y finalmente se. Ordena por niveles las estrategias específicas identificadas en los estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima cuando resuelven problemas simples de combinatoria.

Para cumplir con los objetivos del Trabajo, 45 estudiantes de VI a IX semestre de la Universidad del Tolima resolvieron un cuestionario de dos problemas simples de Combinatoria, contando con 2 horas para su solución, solicitándoles que en la solución tuvieran en cuenta que ellos iban a ser profesores de Matemáticas en secundaria.

Inicialmente, las respuestas de los alumnos se clasificaron de acuerdo a tres categorías: estrategia analítica, estrategia enumerativa y estrategia gráfica. Para cada una de ellas se hace una caracterización, se clasifican las respuestas de los estudiantes de acuerdo a cada estrategia, se selecciona uno de ellos para el análisis de su respuesta, en la cual se observa si tuvo presente el tipo de arreglos que resolvería el problema, es decir, si en su respuesta hay indicios de considerar la importancia del orden y la repetición; la naturaleza de los elementos de los arreglos a que hace referencia el problema, es decir, la distinción o no de los elementos dentro de los arreglos; el tipo de representaciones que utiliza el estudiante como apoyo para su resolución y la solución que, en este Trabajo, se compone de la respuesta y de la revisión que haga el estudiante, esta última, atendiendo la fase de “visión retrospectiva” de acuerdo con Polya. (Polya, 1979, págs. 19,35,53)

1 Capítulo MARCO TEÓRICO

1.1 Antecedentes

Dentro de los trabajos de investigación sobre didáctica de la combinatoria que orientó el presente estudio se encuentran los siguientes.

1.1.1 Internacionales

a. España.

I. Navarro – Pelayo y otros. (1996).

En el estudio de Navarro - Pelayo, Batanero y Godino (1996), se construye un cuestionario para indagar el efecto de las variables de tarea en las respuestas de los alumnos cuando resuelven problemas combinatorios. Para ello, en primer lugar se caracterizan las variables de tarea con el fin de seleccionar una muestra representativa de estas. En segundo lugar se estudia y clasifica el modelo combinatorio implícito en el enunciado de los problemas combinatorios, esto lo hacen de acuerdo a la clasificación de Dubois (1984, citado por Navarro-Pelayo y otros, 1996; pág. 3-5) quien clasifica las configuraciones combinatorias en tres modelos: selección, la cual se asocia al concepto de muestreo cuyas palabras claves son, elegir, tomar, escoger, sacar; colocación, que se asocia con la idea de función y las palabras claves son colocar, asignar, introducir, y partición, asociado a la idea de partición de un conjunto y sus palabras claves pueden ser dividir, separar, repartir.

Para la construcción del cuestionario primero se creó un banco de preguntas, extraídas de otros autores y se modificaron para hacer los ítems más homogéneos y se tuvieron en cuenta los aportes y recomendaciones de algunos profesores y estudiantes sobre la comprensión del enunciado y la dificultad de los problemas. Luego se realizaron muestras piloto con el fin de estimar el tiempo empleado para terminar de resolver el cuestionario y revisar los valores de algunos parámetros. Finalmente se elaboró un cuestionario con 13 problemas considerando las siguientes variables de tarea: modelo combinatorio, tipo de operación combinatoria, tipo de elementos que se combinan y el valor asignado a los parámetros.

La muestra estuvo conformada por 720 estudiantes con edades de 14 y 15 años de 9 instituciones de Granada y Córdoba (España) de los cuales 352 habían recibido instrucción en combinatoria y 368 no.

A pesar de tener algún tipo de instrucción con respecto a los otros estudiantes, las diferencias respecto a la dificultad al resolver los problemas no es significativa, aunque estos problemas sólo implican una operación combinatoria.

Se encontró cierta mejora en los estudiantes con instrucción en combinatoria en algunos de los problemas, siendo los más fáciles los relacionados con el modelo de selección y en los que involucran permutaciones con y sin repetición y variaciones. La mayor dificultad se presentó en los problemas del modelo de partición.

Luego de la solución del cuestionario se analizaron los errores y se categorizaron de la siguiente manera, E1: cambiar el tipo de modelo matemático en el enunciado del problema, E2: error de orden, E3:error de repetición E4: confundir el tipo de objetos, E5: enumeración sistemática, E6: respuesta intuitiva errónea, E7: no recordar la fórmula correcta de la operación combinatoria que ha sido identificada correctamente, E8: no recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria, E9: interpretación errónea del diagrama de árbol y específicamente en los problemas de colocación y partición, E10: confusión en el tipo de celdas y error en las particiones formadas.

Los errores cometidos por los estudiantes fueron más notorios en los ítems donde se involucran variaciones con repetición y donde el modelo combinatorio es la colocación o la partición.

II. Roa y otros (2000).

Uno de los referentes teóricos para este Trabajo es el estudio de Roa, Batanero, Godino y Canizares (1997). Aquí se estudian las estrategias de solución de problemas combinatorios simples y compuestos en alumnos de Licenciatura en matemáticas. Se aplicó a estudiantes (voluntarios) un cuestionario con trece problemas (del 1 al 11 eran problemas combinatorios simples, el 12 y el 13 eran compuestos), posteriormente se realizó una entrevista para recoger información sobre los procesos empleados por los estudiantes en la resolución de estos problemas. La atención se concentró en veintinueve estudiantes de quinto semestre pues fue allí donde se identificó la mayor dificultad a pesar de su alta preparación en matemáticas y su orientación profesional como futuros docentes del área.

Para el análisis de las estrategias de resolución empleadas se seleccionó las usadas por cuatro estudiantes diferenciados entre buenos y malos resolutores, y se clasificaron los problemas de acuerdo a los modelos de selección, colocación y partición definidos por Dubois (1984, citado por Navarro-Pelayo y otros, 1996; pág. 3-5)

En las conclusiones se notó que la utilización de fórmulas combinatorias no fue un aspecto fundamental para la buena solución de los problemas puesto que tanto buenos como malos resolutores emplearon dichas ecuaciones, sin embargo el uso de una enumeración sistemática parece ser la estrategia que mejores resultados produjo; se detectó también poco uso del diagrama de árbol a pesar de la importancia y potencia de este recurso. De igual forma las estrategias generales para la resolución de problemas como: fijar variables, reducir el tamaño del problema, comparar con un problema similar más sencillo, generalizar, entre otros, fueron característica también de la clasificación de buenos y malos resolutores.

Los autores se concentraron también en las dificultades y errores de los estudiantes con preparación matemática avanzada en la resolución de problemas combinatorios.

III. Roa y otros (2003).

En Roa, Batanero y Godino (2003), se estudian estrategias básicas en la resolución de problemas matemáticos que son útiles en el caso particular de la combinatoria como traducir el problema a otro más simple o conocido, fijar variables y descomponer el problema en subproblemas.

Para la primera estrategia se notó que muy pocos estudiantes (universitarios) intentaron hacer dicha traducción, incluso en algunos de los 13 problemas formulados (5 y 13) el uso de esta estrategia fue nulo. Sin embargo, en los problemas en los cuales el uso de ésta fue mayor, las soluciones fueron exitosas.

En cuanto a la fijación de variables, se observó que su utilización fue superior respecto a la anterior, además su uso fue correcto en la totalidad de los casos donde se empleó esta estrategia.

Finalmente la descomposición en subproblemas fue utilizada en pocas ocasiones, especialmente en los problemas combinatorios compuestos y en algunos de los simples.

En lo que a estrategias aritméticas se refiere, por ejemplo, la regla de la suma, el producto y el cociente, los autores sugieren que en el caso de no reconocer la operación combinatoria, el estudiante debe emplear reglas combinatorias básicas para tratar de generar un modelo combinatorio o enumerar sistemáticamente.

Para el uso de la regla de la suma se concluyó que existió bastante dificultad en su uso a pesar de ser una estrategia básica en la resolución de problemas combinatorios

La regla del producto es más usada por los estudiantes que la regla de la suma, sin embargo en los casos en los cuales es estrictamente necesario su correcto uso (problemas 2 y 7) se observó que un 28,8% para el problema 2 y 26% para el 7 no lo emplearon; además se identificó que solo los estudiantes que intentan generar un modelo, la usan.

En cuanto a la regla del cociente se nota el escaso uso por parte de los alumnos, lo que muestra que ésta no parece ser una regla intuitiva y mucho menos que haya aportado a la solución de problemas combinatorios, lo que hace pensar que en el proceso de enseñanza no se hizo suficiente énfasis al respecto.

b. México.

I. Valle Espinosa (2007).

En 2005, con motivo de la Olimpiada Estatal de Matemáticas para el estado de Puebla (México), se conformó un equipo de investigación cuyo propósito era analizar la forma en que los estudiantes preuniversitarios sobresalientes en Matemática resolvían problemas. En Valle Espinosa (2007), se identifican estrategias generales en la solución de los problemas propuestos en los exámenes de selección para esta Olimpiada Estatal de Matemáticas.

Se analizaron las respuestas de 91 concursantes, procedentes del sistema educativo del estado de Puebla, cuyas edades fluctuaban entre 14 y 17 años en las cuales los concursantes expusieron por escrito sus resultados y fundamentan sus respuestas en hojas separadas. Se seleccionaron aquellos donde el concursante hubiera identificado la incógnita, los datos y la condición del problema, y además propusiera una o varias estrategias de solución. Posteriormente, se describió verbalmente la estrategia, se calculó la frecuencia de uso y se observó la incidencia de la estrategia en las ramas de la matemática a las que pertenecían los problemas planteados (Aritmética, Geometría y Combinatoria).

Para resolver la prueba se entregaron las indicaciones a los estudiantes entre las cuales estaba el manejo del tiempo (2 días, cada día máximo 4,5 horas) y la forma y el momento de hacer las preguntas (por escrito y en la primera hora de examen)

Este estudio arrojó los siguientes resultados:

i. "De los 91 participantes 23 no tenían idea del tipo de problemas que resolvían ni mucho menos la rama de la Matemática a la que pertenecían.
ii. De los 546 escritos solo en 194 se evidenció la identificación de la incógnita.
iii. Las estrategias observadas fueron (Cabañas, 2000; citado por Valle Espinosa 2007, pág. 6-7)
    - Ensayo y error
    - Usar una variable
    - Buscar un patrón
    - Hacer una lista
    - Resolver un problema más simple
    - Usar una figura
    - Usar razonamiento directo
    - Usar razonamiento indirecto".

Se observó que en los problemas de combinatoria los participantes propusieron el mayor número de alternativas de solución.

1.1.2 Nacionales

I. Bonilla y Rueda. (2011).

En Bonilla y Rueda (2011), se analizan las respuestas a problemas combinatorios de estudiantes universitarios de primer semestre de Licenciatura en Educación básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital "Francisco José de Caldas" (Bogotá, Colombia), donde hay problemas de permutación con repetición, variación simple y variación con repetición. A partir de este análisis, los autores definen cuatro niveles de razonamiento combinatorio, cada uno con sus respectivas categorías como se ilustra en la tabla:

Tabla 1-1: Niveles de razonamiento combinatorio Bonilla y Rueda (2011)

NIVEL 0: No realiza el proceso debido	C 1 No lo hace, no responde
	C 2 El sujeto busca dar solución por medio de un único objeto matemático, que no guarda relación con relación al objeto de estudio.
NIVEL 1: Reconocimiento de variables distinguibles e indistinguibles.	C 1 Asigna letras o números a los elementos que involucra la situación.
	C 2 etiqueta cada elemento sin establecer los distinguibles o los indistinguibles.
	C 3 Asignación simbólica de cada elemento diferenciando los distinguibles y los indistinguibles.
NIVEL 2: Contar ordenadamente mediante símbolos y gráficos	C 1 Utiliza un procedimiento Incompleto para construir los eventos o identifica un evento repetido como diferente.
	C 2 construye todos los eventos del espacio muestral para identificarlos
	C 3 Puede construir todos los eventos del espacio muestral identificando algunos de los eventos.
	C 4 Puede construir todos los eventos del espacio muestral identificando solo un evento.
NIVEL 3: Principios básicos de Suma y producto.	C 1 Partiendo de las configuraciones elaboradas en el *nivel 2 categoría 2,* el sujeto cuenta cada evento e identifica el número total de eventos.
	C 2 Aunque utiliza procesos multiplicativos básicos no se expresan las configuraciones posibles.
	C 3 utiliza procesos multiplicativos básicos y/o sumas reiteradas para expresar el total de posibles eventos.
NIVEL 4: generalización.	C 1 pese a que utiliza las anteriores categorías generaliza de manera inadecuada los procesos realizados.
	C 2 mediante los anteriores procesos de multiplicación y/o suma reiterada llega a utilizar procesos multiplicativos más complejos es decir expresa los resultados utilizando la expresión factorial o sumatoria.
	C 3 el sujeto expresa el resultado con un lenguaje matemático adecuado para el concepto.

Además aportan rutas que los estudiantes posiblemente usan para la resolución de acuerdo a los niveles ya formulados.

De acuerdo a esto se observó que los estudiantes utilizan reglas de la suma en la que enumeran y recuentan todos los eventos. Por otro lado, los estudiantes cometen errores con la distinción e indistinción de elementos ocasionando que al construir todas las configuraciones, repitan algunos eventos y olviden otros.

II. Aristizábal (2012)

Aristizábal (2012), hace una propuesta metodológica aplicando guías de estudio con el apoyo de herramientas tecnológicas, con el fin de aproximar a los estudiantes a los conceptos propios de la Combinatoria y la Probabilidad.

La población objeto de estudio fueron 127 estudiantes de grados décimo y once de las Institución educativa La Piedad de la ciudad de Medellín (Antioquia, Colombia) y el colegio Cumbres de Envigado (Antioquia, Colombia).

Afirma la autora que “el uso de material concreto y la realización de actividades prácticas y cotidianas que involucran el contexto cercano de los estudiantes les facilitó aproximarse a razonamientos matemáticos que al ser formalizados fueron asimilados en forma adecuada y pertinente”.

1.2 Formulación del Problema y Objetivos

1.2.1 Formulación del problema

¿Qué estrategias emplean estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima (Ibagué, Colombia), cuando resuelven problemas simples de combinatoria?

1.2.2 Objetivos

a. Objetivo General

Establecer las estrategias de solución de problemas combinatorios en la Formación inicial de profesores de Matemáticas.

b. Objetivos específicos

I. Identificar las estrategias empleadas por estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima en la resolución de problemas simples de combinatoria.

II. Clasificar las estrategias empleadas por estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima en la resolución de problemas simples de combinatoria.

III. Ordenar por niveles las estrategias específicas identificadas en los estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima cuando resuelven problemas simples de combinatoria.

1.3 Justificación

En cuanto a la población, los antecedentes aquí presentados sobre Didáctica de la Combinatoria, hacen estudios con estudiantes de secundaria, de Licenciatura en Matemáticas y con alumnos universitarios cuya formación no es la de profesores de Matemática; en cuanto a conceptos didácticos, se estudian estrategias, errores y niveles de razonamiento; en cuanto a conceptos matemáticos, variaciones y combinaciones con y sin repetición, y en cuanto a tipo de problemas combinatorios, simples y compuestos.

De esta diversidad de poblaciones, de conceptos didácticos y matemáticos, y de los tipos de problemas combinatorios, este Trabajo busca participar de todos los esfuerzos que a nivel nacional e internacional se hacen para que la Combinatoria no solo haga parte de la formación inicial y en ejercicio de los profesores de Matemáticas sino que también aumente la cantidad de Trabajos de grado en pre y postgrado en Didáctica de la Combinatoria.

En los Lineamientos curriculares para Matemáticas (1998) y en los Estándares básicos de competencias matemáticas, (2006) el Ministerio de Educación de Colombia (MEN) se refiere a la importancia de la Combinatoria en los Sistemas aleatorios de la siguiente manera:

“El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria…”

“Los sistemas analíticos probabilísticos y los métodos estadísticos desarrollados durante los siglos XIX y XX se han refinado y potenciado en los últimos decenios con los avances de la computación electrónica y, por ello hoy día, ya no es tan importante para los estudiantes el recuerdo de las fórmulas y la habilidad para calcular sus valores, como sí lo es el desarrollo del pensamiento aleatorio, que les permite interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publique en periódicos y revistas que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como producto de los distintos programas de análisis de datos.

Por ello, no es ya necesario aprender las fórmulas y procedimientos matemáticos para calcular la media o la mediana, la varianza o la desviación estándar, sino avanzar gradualmente en el desarrollo de habilidades combinatorias para encontrar todas las situaciones posibles dentro de ciertas condiciones,…"

Miguel de Guzmán (1993) refiriéndose a las relaciones entre las Matemáticas discretas y la Combinatoria, afirma: "Ciertas porciones de ella son suficientemente elementales como para poder formar parte con éxito de un programa inicial de matemática. La combinatoria clásica, así como los aspectos modernos de ella, tales como la teoría de grafos o la geometría combinatoria, podrían ser considerados como candidatos adecuados. La teoría elemental de números, que nunca llegó a desaparecer de los programas en algunos países, podría ser otro".

1.4 La Combinatoria en la Historia de la Matemática

1.4.1 Noción

Para este Trabajo, la Combinatoria es la rama de la Matemática que se encarga de describir, contar y estudiar los arreglos, configuraciones o agrupaciones de los elementos de conjuntos de cualquier clase, arreglos cuyos elementos pueden estar ordenados o no, repetirse o no. Cuando el arreglo es ordenado se llama variación y cuando no lo es, combinación. Las variaciones y combinaciones se llamarán operaciones combinatorias.

Con el siguiente ejemplo se ilustran algunos de los componentes de la anterior caracterización de la Combinatoria.

¿Cuántos números de dos cifras distintas se pueden formar con los dígitos 2, 5, 6, 7 y 9?

- **I.** En este problema, el conjunto E = {2, 5, 6, 7, 9} del cual se forman los arreglos, es finito, tiene cinco elementos, pero E puede ser infinito.
- **II.** Los elementos de E son números, pero, hay problemas en los que sus elementos pueden ser, por ejemplo, letras, matrices, funciones o polinomios, o también personas, animales, frutas, colores o prendas de vestir.

III. En algunos casos los arreglos tienen nombre propio, por ejemplo, en este problema no se pide "formar arreglos de números que tengan dos cifras" sino "números de dos cifras". Si los elementos de E fueran letras y no se presta a confusión, se podría decir "formar palabras de dos letras", pero también "formar arreglos de dos letras".

IV. Como el número 25 es distinto del número 52, entonces estos arreglos son ordenados. De acuerdo con la clasificación de los arreglos según si el orden importa o no, esta clase de arreglos son variaciones. Se pide, formar arreglos de 2 elementos tomados de un conjunto que tiene 5 elementos; este tipo de arreglo, la cantidad de elementos del arreglo y la cantidad de elementos del conjunto de donde se toman los elementos para formar el arreglo se nota por $V_{5,\,2}$ (Variaciones sin repetición de 2 elementos, tomadas de un conjunto de 5 elementos).

Pero de E no solo se pueden obtener o sacar "arreglos ordenados de dos números" sino también "arreglos no ordenados de dos números". En este segundo caso hay un nombre propio, los "arreglos no ordenados de E de dos elementos" se llaman subconjuntos de E de dos elementos y por definición de igualdad de conjuntos se tiene que {2, 5} = {5, 2} = {2, 2, 5, 5} = {2, 5, 5, 5}. Como ahora en los arreglos no importa el orden, entonces el problema pide combinaciones de 2 elementos tomados de un conjunto de 5 elementos; este tipo de arreglo, la cantidad de elementos del arreglo y la cantidad de elementos del conjunto de donde se toman los elementos para formar el arreglo se nota por $C_{5,2}$ (Combinaciones sin repetición de 2 elementos, tomadas de un conjunto de 5 elementos).

V. Como las cifras de los números tienen que ser distintas, entonces el problema pide arreglos sin repetición, por esto, los números 25 y 52 hacen parte de la solución, pero 22 y 55 no. Pero con el mismo E se pueden pedir arreglos con repetición, y en este caso, ya habría que incluir a 22 y a 55, y claro, también a 66, 77 y 99. La notación para este segundo problema sería $VR_{5.2}$.

VI. Para este problema, los arreglos tienen 2 elementos, pero los números pueden tener 3, 4, 5, 6, 7 o cualquier número de cifras; lo que ocurre es que si seguimos con E y el número pasa de 5 cifras, todas las cifras no pueden ser distintas y alguna o algunas se repiten, por esto, si el problema pide números de, por ejemplo, 6 o más cifras, ya los arreglos son con repetición. Si los números fueran de 6 cifras y con este mismo E, ahora se notaría por $VR_{5,6}$. Siguiendo con E y si los números fueran de 5 cifras y sin repetición, esta clase de arreglos en los que la cantidad de elementos de los arreglos es la misma que la cantidad de elementos del conjunto de donde se forman los arreglos, se llaman permutaciones y, en este caso se notaría por P_5; si fueran con repetición, se notaría por PR_5.

1.4.2 Tipos de problemas combinatorias.

Ríbnikov (Citado por Batanero, 1994; pág. 24-27) ha propuesto la siguiente clasificación de los problemas combinatorios: “

a. Problemas de existencia: en los que se intenta probar la existencia o no de estructuras combinatorias.
b. Problemas de enumeración: cuando se requiere de enumerar o listar (o hallar un algoritmo) los elementos que poseen alguna propiedad.
c. Problemas de recuento: determina la cantidad de elementos de un conjunto finito que posee tal propiedad o colección de propiedades.
d. Problemas de clasificación: en el caso de que del conteo de números sea muy elevado no se hace la numeración, en su lugar se hace una clasificación mediante relaciones apropiadas.
e. Problemas de optimización: se induce una función de valor ordenando totalmente el conjunto y se consideran las nociones de máximo o mínimos”.

1.4.3 Algunos teoremas

a. Regla de la suma.

“Sean A y B son dos sucesos que no pueden ocurrir simultáneamente. Si el suceso A ocurre de m maneras distintas y el B de n maneras distintas, entonces el suceso A o el B se podrá ocurrir de m + n maneras distintas” C. Ortiz, A. Méndez, E. Martín y J. Sendra (2011, pág. 4)

b. Regla del producto.

“Si un suceso A puede ocurrir en m maneras e, independientemente, un segundo suceso B puede ocurrir en n maneras, entonces el número de maneras en que ambos, A y B, pueden ocurrir es m · n” C. Ortiz, A. Méndez, E. Martín y J. Sendra (2011, pág. 4)

c. Regla del cociente.

“La regla del cociente se emplea para relacionar entre sí combinaciones y variaciones o bien permutaciones ordinarias y permutaciones con repetición (…) Usar la regla del cociente implica establecer una relación de equivalencia dentro de un conjunto de configuraciones combinatorias. Cuando el alumno identifica directamente la operación combinatoria no será necesario el uso de esta regla a nivel consciente, pero si en los alumnos que tratan de general un modelo.” Roa Guzmán, R.; Batanero, M.C.; Godino, J.D (2003, pág. 18)

1.5 Aproximación Didáctica a la combinatoria

1.5.1 Resolución de problemas

a. Resolución de problemas según Polya

Para Polya (1979; pág. 35), “resolver un problema es una cuestión de habilidad práctica como, por ejemplo, el nadar. La habilidad práctica se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de nadar imitamos los movimientos de pies y manos que hacen las personas que logran así mantenerse a flote, y finalmente aprendemos a nadar practicando la natación. Al tratar de resolver problemas hay que observar e imitar lo que otras personas hacen en casos semejantes y así aprendemos problemas ejercitándolos al resolverlos”.

Propone en su heurística cuatro pasos fundamentales en la resolución de problemas, en primer lugar sugiere que es imperante comprender el problema, conocer claramente que es lo que se pide y con qué información se cuenta para intentar conseguirlo, en segundo lugar dice Polya (1979; 28) “tenemos que captar las relaciones que existen entre los diferentes elementos, ver lo que liga la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Tercero, poner en ejecución el plan. Cuarto, Volver a tras una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla”. Este último paso se ha tomado en este trabajo como categoría de análisis pues en palabras de Polya (1979; 28) “se puede evitar muchos errores si el alumno verifica cada paso al llevar a cabo el plan. Los mejores resultados pueden perderse si el alumno no reexamina, no reconsidera la solución obtenida” puede, por ejemplo, encontrar una solución distinta, nuevas preguntas, formular conjeturas o notar que con la misma estrategia resolvería otros problemas.

Polya (1979; 18) nombra estos cuatro pasos de la siguiente manera: I. Comprender el problema, II. Concebir un plan, III. Ejecutar el plan y IV. Examinar la solución obtenida

Conviene que el maestro oriente sus clases con una teoría de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, teoría que tendrá una posición con respecto a la manera como el planteo y solución de problemas contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos. Al resolver problemas en clase y siguiendo las fases que propone la respectiva teoría de enseñanza, los estudiantes podrán tomar conciencia, ejercitar y discutir, entre otros componentes, las distintas fases y estrategias de solución de problemas.

b. Estrategias

Para este concepto se tendrá en cuenta a Rico (1995; pág.18) quien dice: “En el entramado de relaciones que constituyen una estructura conceptual hay multitud de vías para responder a una determinada cuestión, que toma sentido cuando se enuncia en términos de los conceptos que forman parte de esa estructura. En unos casos se puede seguir un camino prioritariamente deductivo, es decir, siguiendo las reglas de razonamiento lógico; pero la mayor parte de las veces no suele ocurrir esto, sino que se combinan argumentos deductivos con otros de carácter inductivo, con representaciones y modelos, algunas intuiciones y razonamientos no explicitados. Cualquier procedimiento o regla de acción que permite obtener un conclusión o responder a una cuestión (resolución de problemas) haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual, se denomina estrategia. Las estrategias comprenden al razonamiento y las destrezas pero no se reducen a ellos; las estrategias procesan dentro de una estructura conceptual y, por tanto pueden existir estrategias diferentes para alcanzar un mismo resultad. El uso de estrategias supone un dominio de la red conceptual sobre la que deben ejercitarse y, al mismo tiempo, grandes dosis de creatividad e imaginación para descubrir nuevas relaciones o nuevos sentidos en relaciones ya conocidas. Las estrategias más usuales en la educación obligatoria son: estimar, aproximar, elaborar un modelo, construir una tabla, buscar patrones y regularidades, simplificar tareas difíciles, conjeturar y comprobar" Rico, L. (1995).

c. Variable didáctica[1]

Para el análisis de la información, se tendrá en cuenta la siguiente noción de variable didáctica. Chamorro (2006, pág. 28), citando a Briand y Chevalier, (1995; pág. 68), retoma la siguiente caracterización de una variable didáctica:

"Una variable didáctica es un elemento de la situación que puede ser modificado por el maestro, y que afecta a la jerarquía de las estrategias de solución que pone en funcionamiento el alumno (por el costo, por la validez, por la complejidad, etc.)."

Como cualquier variable en la matemática, una variable didáctica tiene un dominio de variación, por ejemplo, si del problema hacen parte los colores, entonces el color es una variable (el profesor, durante la preparación de la clase, decidirá si el color es o no una variable didáctica), cuyo domino de variación son los colores que el profesor estime conveniente, en este caso, esta variable es cualitativa, pero si del problema hacen parte alumnos, como su número puede variar, entonces la cantidad de alumnos también es una variable (luego se decidirá si es didáctica o no), cuyo dominio lo determina el profesor, en este caso, esta variable es cuantitativa discreta, y si del problema hacen parte precios de un producto, como este puede cambiar, entonces el precio es una

[1] Retomado y modificado de Meneses, I. y Vásquez, E. (2015, pág. 50)

variable (faltará por averiguar si es didáctica o no), pero en este caso esta variable es cuantitativa continua.

Reconocer y manipular las variables y las variables didácticas le permiten al profesor o el alumno, modificar datos en la hipótesis o la incógnita del problema para transformarlo en otro más familiar a su experiencia, en este caso particular o más general que le facilite iniciar la fase de abordaje (Mason, 1988, pág. 37)

1.5.2 CLASIFICACION DE LOS PROBLAMAS COMBINATORIOS.[2]

a. Según el número de operaciones combinatorias

De acuerdo con Roa, R. Batanero, C. y Godino J.D (2003) los problemas combinatorios se pueden clasificar según la cantidad de operaciones combinatorias que éste contenga en su solución. Cuando solo existe una operación combinatoria se denomina problema combinatorio simple, y cuando contiene dos o más se llama problema combinatorio compuesto.

b. Según el concepto matemático que enfatice.

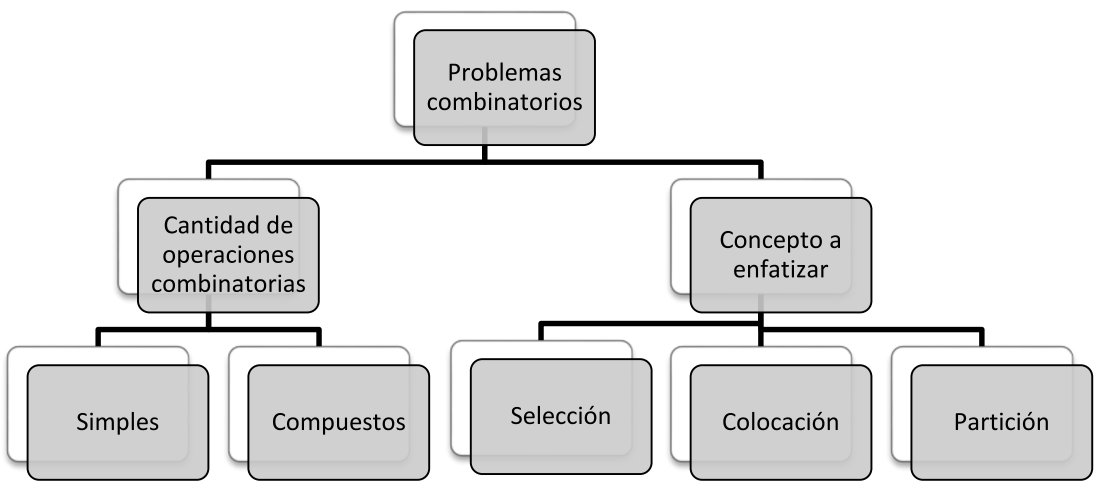
Siguiendo a Dubois, (1984; citado por Navarro-Pelayo, 1996, pág. 28), los problemas combinatorios simples se pueden clasificar en:

I. “Selección (relacionado con el concepto de muestra)”. En este caso, se da un conjunto y a partir de él hay que sacar, extraer, formar u obtener los arreglos.
II. “Colocación (relacionado con el concepto de correspondencia).” En este caso, se dan dos conjuntos y, digamos que, como en una función, uno de ellas queda fijo haciendo las veces de dominio y el otro de codominio. Las configuraciones se forman mediante correspondencias entre los elementos de estos conjuntos.

[2] Retomado y adecuado de Meneses, I. y Vásquez, E. (2015, pág. 46-48)

III. “Partición (relacionado con el concepto de partición como un caso particular de clasificación).” En este caso, se da un conjunto el cual hay que dividirlo u í organizarlo en subconjuntos, de tal manera que sean disjuntos entre sí (no tengan elementos comunes) y que al reunirlos el resultado sea el conjunto original o de partida. Cada configuración está formada por aquellos subconjuntos que cumplen con las condiciones anteriores.

Figura 1-1: Clasificación problemas combinatorios simples: Meneses,I y Vásquez,E. (2015)



1.6 La Educación Matemática Realista (EMR)[3]

De acuerdo con Alsina (2009), la EMR es una filosofía de enseñanza y aprendizaje de la Matemática que ha organizado sus referentes teóricos a partir de respuestas a preguntas sobre, por ejemplo, qué es la Matemática, cómo y qué se enseña, cómo, cuándo y con quién se aprende.[4]

---

3 Retomado y adecuado de González (2011)
[4] Para otras presentaciones de la EMR, ver por ejemplo, Bressan, Zolkower y Gallego (2005), Goffree (2000)

Las primeras respuestas a esta clase de preguntas se propusieron en Holanda en el comienzo de los setenta, desde el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO), dependiente de la Universidad de Utrecht (Holanda), dirigido por Hans Freudenthal (1905-1990); hoy en día este Instituto de llama Instituto Freudenthal.

En la actualidad, y como resultado del esfuerzo de alumnos de Freudenthal, colegas e investigadores interesados en las propuestas del profesor Freudenthal, parte de las respuestas a las preguntas básicas se han organizado en seis principios: de actividad, de realidad, de niveles, de reinvención guiada, de interacción y de interconexión.

En el anexo A se encuentra una caracterización de estos principios, presentada por Alsina (2009; 121); nos detendremos en los principios de actividad, de realidad y de niveles.

1.6.1 Principio de Actividad

En este principio, la EMR aborda preguntas de la Filosofía de la Matemática como:

¿Qué es la Matemática?
¿Quiénes la hacen?
¿Cómo se hace?
¿Cómo se desarrolla?
¿Para qué sirve?

Para la EMR, la Matemática la hacen, la han hecho y la harán seres humanos; ni preexiste ni es independiente de los seres humanos; tampoco para su invención se requieren seres humanos súper-especiales ni de ayuda de ninguna divinidad. [5]

[5] Sobre la dualidad Inventar/Descubrir, en relación con la Matemática, consultar, por ejemplo, Ernest (2004) y Cañón (2004, 1993).

Esta actividad humana que es la Matemática, se hace pensando en proporcionar “un orden” o “una organización” a los fenómenos naturales, sociales y a las teorías de las distintas áreas del conocimiento, incluyendo a la misma Matemática; esta actividad de “ordenar” u “organizar” los mundos en los que vivimos los seres humanos, la EMR la llama “Matematizar el mundo” natural, social y el de las ideas de cada disciplina.

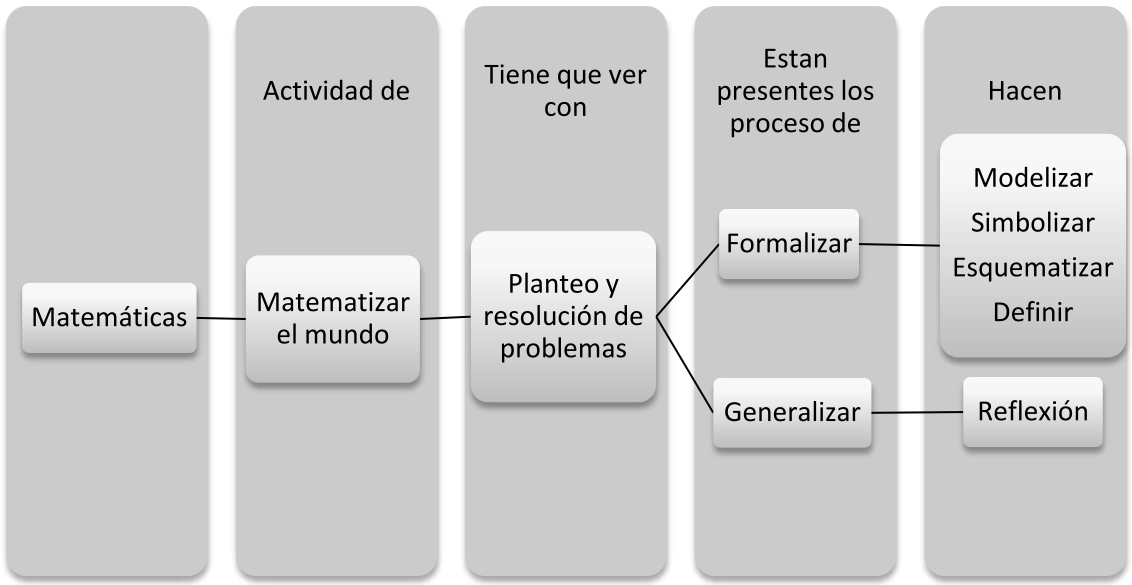
De acuerdo con Puig (1994; ii-iii), “Para Freudenthal, los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como medios de organización de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones…. Además, Freudenthal no se limita — porque obviamente no podría dar cuenta de las matemáticas producidas a lo largo de la historia— a dar esta descripción que constituirá, digamos, el primer nivel de la práctica matemática, ya que para él el “mundo” que los objetos matemáticos organizan crece, se amplía al incorporarse a él los propios objetos matemáticos, que ya no son vistos como medios de organización sino como objetos, cuyas propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones están pidiendo nuevos medios de organización que den cuenta de todo ello. Entendiendo pues “mundo” en este sentido, es decir, entendiendo que contiene también el producto de la actividad humana, cualquier objeto matemático —triángulo o grupo de Lie— puede verse como medio de organización de objetos del mundo, propiedades, acciones o propiedades de las acciones. Para Freudenthal, describir un concepto u objeto matemático en su relación con aquello para lo que es un medio de organización es hacer el análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático…”

La matematización está estrechamente ligada con el planteamiento y resolución de problemas y en éstos se privilegian dos procesos del pensamiento matemático:

generalizar y formalizar"[6]. A su vez, la formalización exige el concurso de otros procesos como "modelizar, simbolizar, esquematizar[7] y definir". [8]

El siguiente diagrama resume algunas de las ideas relacionadas con el principio de actividad.

Figura 1-2: Ideas relacionadas con el principio de actividad (Autor).



---

[6] En MEN (1998; 77) se sugiere una relación entre generalizar y modelar, cuando se dice: "La generalización se puede ver como el nivel más alto de la modelación". Esta relación hace parte de los principios de la EMR.
[7] En Freudenthal (1994; 12-15), se da un ejemplo de "esquematización y formalización progresivas".
[8] En Gutiérrez y Jaime (1991) se presentan características del razonamiento formal de los niveles cuatro (Deducción formal) y cinco (Rigor) de van Hiele. Recuérdese que Freudenthal fue el director de las Tesis doctorales de los esposos van Hiele. En este Trabajo se considera que el proceso de definir está presente en todos los niveles de van Hiele; como consecuencia de las fases de aprendizaje, en el nivel de deducción se logra caracterizar o definir un objeto tal como se hace en la Matemática. En la Habilidad aplicada de Hoffer (1990; 16-17) y en MEN (1998; 77) se encuentran características del proceso de modelar. La reflexión es transversal a todo el proceso y no solo se aplica para generalizar.

1.6.2 Principio de Realidad.

Para la EMR lo real es lo que tiene sentido para un estudiante; para algunos de ellos lo real puede ser lo cercano a su vida cotidiana, pero para otros lo real puede ser los números enteros con la estructura de anillo. Para la EMR, “las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas”, es decir, para aprender matemáticas, en el salón de clases hay que proponer problemas, disponer de recursos y organizar actividades que den la oportunidad a los alumnos de pensar, sentir y actuar como piensan, sienten y actúan los matemáticos cuando hacen matemática.[9]

1.6.3 Principio de Niveles.

La EMR propone 4 niveles de comprensión: Situacional, Referencial, General y Formal.

Tanto en los Niveles de razonamiento de van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1991), como en los niveles de razonamiento propuestos por la EMR hay un nivel inicial y otro final.

El nivel inicial, Visualización o de reconocimiento para van Hiele y Situacional para la EMR, corresponde a lo que tiene sentido para un alumno en relación a un concepto[10]; lo que sabe, lo que recuerda y lo que ha aprendido, dentro y fuera del salón de clases, con ayuda de sus profesores, de sus compañeros y por su propio esfuerzo; lo que ha aprendido en relación a su conocimiento personal en cuanto a, por ejemplo, los usos de un concepto en su vida personal y social, la definición construida, los problemas que soluciona, las representaciones posibles, la teoría y los procedimientos asociados a un concepto.

[9]En Gutiérrez y Jaime (1991) se presentan actividades y momentos a realizar por parte del profesor y de los alumnos, para cada una de las Fases de aprendizaje del modelo de van Hiele.

[10] Conocimiento personal de un concepto o “imagen del concepto” para Tall y Vinner (1981), “Concepción” para Artigue (1990), “Objeto mental” para Freudenthal (1994a).

En el Nivel final también coinciden ambas propuestas: el máximo grado de formalización (o de “descontextualización”, en términos de Brousseau, (2002) posible en la escuela secundaria: para van Hiele es el Nivel 4 (Deducción formal), y el Nivel formal para la EMR. Una enseñanza adecuada que tenga en cuenta las fases de aprendizaje para van Hiele o los seis principios para la EMR, (entendiendo que los niveles propuestos por los van Hiele son exclusivamente para la enseñanza de la Geometría), permitirá avanzar de un Nivel a otro.[11]

A diferencia del Modelo de Van Hiele que sus Niveles de razonamiento son para conceptos geométricos, en la EMR los seis principios, en particular el de los Niveles, se aplican a cualquier concepto matemático, así, en vez de decir que para la EMR hay cuatro maneras progresivas de comprender un concepto geométrico, ahora se puede decir que para la EMR hay cuatro maneras distintas de comprender un concepto matemático cualquiera: una por cada Nivel de comprensión.

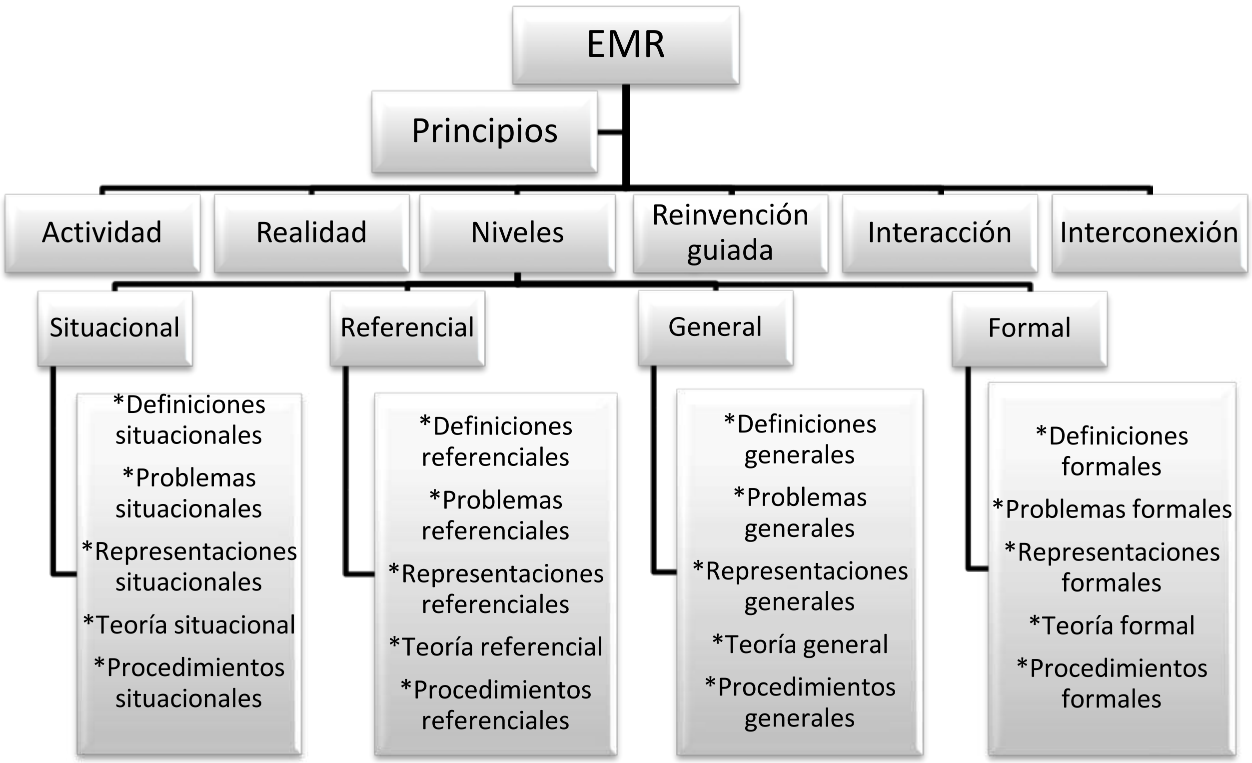
Volviendo a tomar los componentes de una “concepción”[12] propuestos por Artigue (1990), también podemos hablar de, por ejemplo, definición situacional, definición referencial, definición general y definición formal (y los mismos Niveles de comprensión para los problemas, las representaciones, la teoría y los procedimientos).

El siguiente diagrama resume los Niveles de comprensión de un concepto según la EMR y teniendo en cuenta los componentes del conocimiento personal de un concepto matemático según Artigue (1990).

---

[11] Enseñanza, que para el caso de la Educación Colombiana, se tienen once años (5 de primaria y 6 de secundaria) para alcanzar el máximo nivel de comprensión de un concepto matemático.
[12] Artigue (1990), citada por Azcárate (1995; 57-58), precisa:
“De la misma manera que en un concepto matemático se distingue: la noción matemática tal como se define en el contexto del saber sabio en una época dada, el conjunto de los significantes asociados al concepto, la clase de los problemas en cuya resolución adquiere su sentido, los instrumentos, teoremas, técnicas algorítmicas, especificas del tratamiento del concepto; en las concepciones de los sujetos se distinguirán diversas componentes, y, en particular: la clase de las situaciones-problemas que le dan sentido al concepto para el alumno, el conjunto de los significantes que es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales, los instrumentos, teoremas, algoritmos de los que dispone para manipular el concepto ”.

Figura 1-3: Niveles de comprensión de un concepto según la EMR. (Autor)



En cuanto a la figura anterior, se va a considerar que las características matemáticas de los objetos de la meta (nivel formal) es una guía para diseñar un camino que vaya desde el punto de partida (nivel situacional) hasta el punto de llegada (nivel formal). De esta manera, al saber a dónde hay que llegar, ya hay una información para saber qué hacer y cómo desde el nivel situacional. Claro está que las rutas de aprendizaje a construir no están determinadas exclusivamente por el nivel formal sino también hay que contar con las limitaciones y posibilidades del estudiante, del profesor y del contexto (el de la institución educativa, el intrafamiliar y extrafamiliar)

Una manera de reconocer o introducir cambios para pasar de un nivel a otro es tener en cuenta que en el nivel formal en cuanto a la constitución de un objeto matemático construido a partir de, por ejemplo, objetos físicos no hay ninguna alusión a propiedades físicas de tales objetos. Esta característica de los objetos matemáticos sirve de guía para que el profesor aprecie que a medida que el estudiante va aumentando el nivel de pensamiento también va aumentado su capacidad para resolver problemas en los que en los datos y en la incógnita casi no hay alusión a propiedades físicas de determinados objetos y en caso de haberlas el estudiante está en capacidad de transformar el problema en otro equivalente en el que todos los datos y la incógnita hacen alusión a propiedades de objetos matemáticos (éste es un momento en el proceso de modelación).

Además de la ausencia de propiedades físicas en el nivel formal, retomando ideas de Artigue (1990), el objeto matemático también cuenta con, al menos, los siguientes cinco elementos: definiciones, problemas, representaciones, teoremas y procedimientos. Si se acepta estos cinco elementos el profesor, por ejemplo, para el caso de las definiciones, debe diseñar actividades para que el estudiante aprenda a entender y hacer definiciones adecuadas a su nivel.

En cada nivel, pero con distinto énfasis no solo se encuentran procesos del pensamiento matemático como, por ejemplo, cuantificar, conjeturar, clasificar, justificar, definir y generalizar que ayudan a lograr niveles superiores de pensamiento, sino que además es propio de cada nivel un componente actitudinal del que hacen parte valores como, por ejemplo, disciplina, perseverancia, paciencia, creatividad, autonomía, valores que hacen que sea posible “hacer matemáticas” en cada nivel y no copiarla, ni repetirla o estar esperando siempre que otros sean los que digan qué hay que hacer cómo y cuándo para crear, aprender y enseñar Matemáticas.

1.7 La Combinatoria en la escuela

A continuación, a partir de un problema de combinatoria para Grado 8º – 9º, se darán ejemplos de nuevos problemas, estrategias, esquematización progresiva, conjeturas, variaciones y combinaciones, aplicación de teoremas de combinatoria y variable didáctica. Estos ejemplos pueden servir de apoyo para la planeación de clase de aquellos profesores interesados en el desarrollo del razonamiento combinatorio de sus estudiantes.

1.7.1 Problema 1

Vamos a suponer que estamos en Grado 8º. Este curso cuenta con un total de 30 estudiantes. El profesor plantea el siguiente problema:

Problema 1.

Sea el conjunto $A = \{2,5,6,9\}$ ¿Cuántos y cuáles subconjuntos se pueden formar con los elementos de A?

1.7.2 Solución manipulativa

a. Una primera solución al problema el profesor la va a construir con la participación de los estudiantes de la siguiente manera:

El profesor entrega a cada estudiante media hoja tamaño carta y pide a los alumnos que cada uno escriba un subconjunto de A que tenga un solo elemento, un subconjunto de A de dos elementos, un subconjunto de A de tres elementos y, finalmente un subconjunto de A de cuatro elementos. (Se espera que ninguno de los estudiantes pueda ver la respuesta de sus compañeros).

Después de 15 – 20 minutos los estudiantes entregan al profesor sus propuestas, luego el docente, en el orden en que las recibió, las escribe en el tablero. Los resultados se presentan en la **Tabla. 1-2** Al terminar la tabla el profesor escribió las siguientes preguntas:

¿Se pueden formar subconjuntos de A con 5 o 6 elementos? ¿Por qué?

¿Con los datos de esta tabla se puede resolver la pregunta del problema 1? ¿Cuál sería la respuesta?

Para el caso de los subconjuntos de tres elementos ¿de verdad hay 30 subconjuntos?

¿Qué se puede decir de los subconjuntos de tres elementos que escribieron los estudiantes 21 y 29?

Para buscar reflejar la diversidad de intereses y capacidades de los alumnos, y evitar la influencia del profesor y de los mismos estudiantes en sus propuestas, los resultados de la **Tabla 1-2** se obtuvieron mediante una simulación usando la hoja de cálculo de Excel[13] y la función aleatoria. En el caso de los subconjuntos de A de 2, 3 y 4 elementos, cada vez que aparecía un número repetido se hacía una nueva selección hasta que apareciera un número diferente a los que ya habían salido. Esta decisión se toma porque en la definición de igualdad de conjuntos, repetir un elemento no genera un nuevo conjunto. .

Tabla 1-2: Subconjuntos de $\boldsymbol{A}$ con repetición, con sus elementos en el orden propuesto por los estudiantes**. (**Autor**)**

Estudiante	Subconjunto de un elementos	Subconjunto de dos elementos	Subconjunto de tres elementos	Subconjunto de cuatro elementos
1	$\{5\}$	$\{2,5\}$	$\{9,5,2\}$	$\{9,5,2,6\}$
2	$\{6\}$	$\{6,9\}$	$\{6,9,5\}$	$\{6,2,9,5\}$
3	$\{9\}$	$\{6,5\}$	$\{6,9,2\}$	$\{2,6,9,5\}$
4	$\{2\}$	$\{6,5\}$	$\{2,6,9\}$	$\{9,5,2,6\}$
5	$\{9\}$	$\{2,9\}$	$\{5,9,6\}$	$\{2,6,5,9\}$
6	$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{2,9,6\}$	$\{2,9,6,5\}$
7	$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{6,9,2\}$	$\{6,5,9,2\}$
8	$\{5\}$	$\{2,5\}$	$\{6,5,9\}$	$\{5,2,9,6\}$
9	$\{9\}$	$\{2,5\}$	$\{9,6,5\}$	$\{6,9,2,5\}$
10	$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{6,9,5,2\}$
11	$\{5\}$	$\{6,5\}$	$\{6,5,9\}$	$\{5,9,6,2\}$
12	$\{2\}$	$\{9,5\}$	$\{6,5,2\}$	$\{5,2,6,9\}$
13	$\{2\}$	$\{9,2\}$	$\{2,5,9\}$	$\{5,9,2,6\}$
14	$\{2\}$	$\{5,2\}$	$\{5,6,2\}$	$\{6,5,2,9\}$
15	$\{6\}$	$\{5,2\}$	$\{6,5,9\}$	$\{2,5,9,6\}$
16	$\{6\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,9\}$	$\{9,5,2,6\}$
17	$\{2\}$	$\{2,6\}$	$\{5,2,6\}$	$\{9,5,6,2\}$
18	$\{6\}$	$\{5,2\}$	$\{6,9,2\}$	$\{6,5,2,9\}$

[13] Quienes estén interesados en conocer las instrucciones y el procedimiento utilizado para la construcción de esta tabla pueden solicitar la información al correo: roperaltava@unal.edu.co

19	{2}	{6,9}	{9,5,2}	{6,9,5,2}
20	{6}	{2,9}	{9,6,2}	{5,2,6,9}
21	{2}	{2,6}	{6,2,9}	{6,5,9,2}

Tabla 1-2: (Continuación)

Estudiante	Subconjunto de un elementos	Subconjunto de dos elementos	Subconjunto de tres elementos	Subconjunto de cuatro elementos
22	{5}	{5,9}	{2,9,5}	{2,5,9,6}
23	{9}	{6,9}	{6,2,5}	{2,9,5,6}
24	{2}	{9,6}	{9,2,6}	{5,6,9,2}
25	{2}	{5,6}	{5,6,9}	{6,5,2,9}
26	{6}	{6,5}	{2,6,5}	{6,5,9,2}
27	{2}	{9,2}	{9,6,5}	{2,9,5,6}
28	{5}	{2,9}	{9,2,5}	{2,6,5,9}
29	{9}	{5,9}	{6,9,2}	{6,9,5,2}
30	{5}	{6,9}	{5,9,6}	{9,2,5,6}

b. Para empezar a responder las preguntas anteriores, el profesor va actuar de la siguiente manera sobre los componentes de la **Tabla 1-2**

En esta primera intervención de la tabla, el orden en la columna estudiantes no sufre ninguna modificación.

Los subconjuntos de un elemento quedan en el mismo orden.

En los subconjuntos de 2, 3 y 4 elementos, sus miembros se van a reordenar de menor a mayor. Por ejemplo, en la nueva tabla la solución propuesta por el estudiante en la posición 24 ya no quedará:

24	{2}	{9,6}	{9,2,6}	{5,6,9,2}

Sino:

24	$\{2\}$	$\{6,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$

Estos cambios al interior de cada subconjunto no afectan las propuestas de los alumnos porque, según la definición de igualdad de conjuntos, el cambio en el orden de los elementos no genera un nuevo conjunto.

Tabla 1-3: Subconjuntos de A propuestos por los estudiantes, con repetición y con sus elementos ordenados de menor a mayor. (**Autor**)

Estudiante	Subconjunto de un elemento	Subconjunto de dos elementos	Subconjunto de tres elementos	Subconjunto de cuatro elementos
1	$\{5\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
2	$\{6\}$	$\{6,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
3	$\{9\}$	$\{5,6\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
4	$\{2\}$	$\{5,6\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
5	$\{9\}$	$\{2,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
6	$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
7	$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
8	$\{5\}$	$\{2,5\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
9	$\{9\}$	$\{2,5\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
10	$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
11	$\{5\}$	$\{5,6\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
12	$\{2\}$	$\{5,9\}$	$\{2,6,5\}$	$\{2,5,6,9\}$
13	$\{2\}$	$\{2,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
14	$\{2\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
15	$\{6\}$	$\{2,5\}$	$\{6,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
16	$\{6\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
17	$\{2\}$	$\{2,6\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
18	$\{6\}$	$\{2,5\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
19	$\{2\}$	$\{6,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
20	$\{6\}$	$\{2,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
21	$\{2\}$	$\{2,6\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
22	$\{5\}$	$\{5,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
23	$\{9\}$	$\{6,9\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
24	$\{2\}$	$\{6,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
25	$\{2\}$	$\{5,6\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
26	$\{6\}$	$\{5,6\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
27	$\{2\}$	$\{2,9\}$	$\{6,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
28	$\{5\}$	$\{2,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
29	$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$

30	$\{5\}$	$\{6,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$

Para saber cuántos subconjuntos distintos de A de 1, 2, 3 y 4 elementos hay en cada columna, el profesor ahora los agrupa de acuerdo a que sus elementos sean iguales y ordenados de la siguiente manera:

En la columna de subconjuntos de un elemento primero van los que tienen al 2 como único elemento, después, los que tienen al 5 luego los que tienen al 6 y finalmente los que tienen al 9.

En la columna de subconjuntos de dos elementos primero van todos los que tienen 2 como primer elemento y el segundo ordenado de menor a mayor (5, el 6, y finalmente el 9); después, van todos los que tienen el 5 como primer elemento y el segundo ordenado de menor a mayor (2, el 6, y finalmente el 9); de la misma manera en el tercer grupo están quienes inician por 6 y en el cuarto quienes empiezan con 9.

Tabla 1-4: Subconjuntos de A propuestos por los estudiantes, agrupados por subconjuntos iguales, ordenados de menor a mayor. **(**Autor**)**

Subconjunto de un elemento	Subconjunto de dos elementos	Subconjunto de tres elementos	Subconjunto de cuatro elementos
$\{2\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,6\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,5\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,6\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,6\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{2\}$	$\{2,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{5\}$	$\{2,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{5\}$	$\{2,9\}$	$\{2,5,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{5\}$	$\{2,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{5\}$	$\{2,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{5\}$	$\{5,6\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{5\}$	$\{5,6\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{6\}$	$\{5,6\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{6\}$	$\{5,6\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$

Tabla 1-5: (Continuación)

Subconjunto de un elemento	Subconjunto de dos elementos	Subconjunto de tres elementos	Subconjunto de cuatro elementos
$\{6\}$	$\{5,6\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{6\}$	$\{5,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{6\}$	$\{5,9\}$	$\{2,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{6\}$	$\{5,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{9\}$	$\{5,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{9\}$	$\{6,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{9\}$	$\{6,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{9\}$	$\{6,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{9\}$	$\{6,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$
$\{9\}$	$\{6,9\}$	$\{5,6,9\}$	$\{2,5,6,9\}$

Como se puede apreciar en la tabla:

De los subconjuntos con un elemento, el subconjunto $\{2\}$está repetido 10 veces, por tanto quedará uno solo como su representante; el subconjunto $\{5\}$está repetido 6 veces, por tanto quedará uno solo como su representante; el subconjunto $\{6\}$está repetido 6 veces, por tanto quedará uno solo como su representante; finalmente, el subconjunto $\{9\}$está repetido 8 veces, por tanto quedará uno solo como su representante.

De los subconjuntos de dos elementos, el subconjunto $\{2,5\}$ está repetido 7 veces por tanto quedará uno solo como su representante; el subconjunto $\{2,6\}$ está repetido 2 veces por tanto quedará uno solo como su representante; el subconjunto $\{2,9\}$ está repetido 5 veces por tanto quedará uno solo como su representante; el subconjunto $\{5,6\}$ está repetido 5 veces por tanto quedará uno solo como su representante; el subconjunto $\{5,9\}$ está repetido 6 veces por tanto quedará uno solo como su representante, finalmente, el subconjunto $\{6,9\}$ está repetido 5 veces por tanto quedará uno solo como su representante

De los subconjuntos de tres elementos, el subconjunto $\{2,5,6\}$ está repetido 5 veces por tanto quedará uno solo como su representante; el subconjunto $\{2,5,9\}$ está repetido 7 veces por tanto quedará uno solo como su representante; el subconjunto $\{2,6,9\}$ está repetido 9 veces por tanto quedará uno solo como su representante; finalmente, el subconjunto $\{5,6,9\}$ está repetido 9 veces por tanto quedará uno solo como su representante;

Por último los subconjuntos de cuatro elementos, el subconjunto $\{2,5,6,9\}$ está repetido 30 veces por tanto quedará uno solo como su representante.

Los anteriores resultados se presentan en la **Tabla 1-5**

Tabla 1-6: Subconjuntos de A propuestos por los estudiantes, con los representantes de cada clase y sin repeticiones. (Autor)

Subconjuntos de ___ elementos							
1	Frecuencia	2	Frecuencia	3	Frecuencia	4	Frecuencia
$\{2\}$	10	$\{2,5\}$	7	$\{2,5,6\}$	5	$\{2,5,6,9\}$	30
$\{5\}$	6	$\{2,6\}$	2	$\{2,5,9\}$	7		
$\{6\}$	6	$\{2,9\}$	5	$\{2,6,9\}$	9		
$\{9\}$	8	$\{5,6\}$	5	$\{5,6,9\}$	9		
		$\{5,9\}$	6				
		$\{6,9\}$	5				

De acuerdo con la tabla anterior existen 15 subconjuntos no vacíos de $\boldsymbol{A}$, pero ¿Cómo sabemos que no sobran ni hacen falta? En cuanto a los subconjuntos de un elemento parece que están completos porque es sensato esperar que haya tantos subconjuntos de un elemento como elementos tenga A; como A tiene 4 elementos entonces tendría 4 subconjuntos unitarios. Para los subconjuntos de A de 4 elementos también cabría esperar que fuese uno solo, porque A tiene únicamente 4 elementos.

Conjetura 1. : Si un conjunto E tiene n elementos entonces:

- ¿Tiene n subconjuntos de un elemento?
- ¿tiene un único subconjunto de n elementos?

1.7.3 Solución cartesiana.

Para averiguar si la cantidad de subconjuntos de A de dos elementos es la correcta, se van a estudiar otras formas de resolver este problema.

Para el caso de subconjuntos de A dos elementos, se va a pasar de subconjuntos de dos elementos como parejas no ordenadas, a parejas ordenadas. Para esto, se propone el siguiente problema:

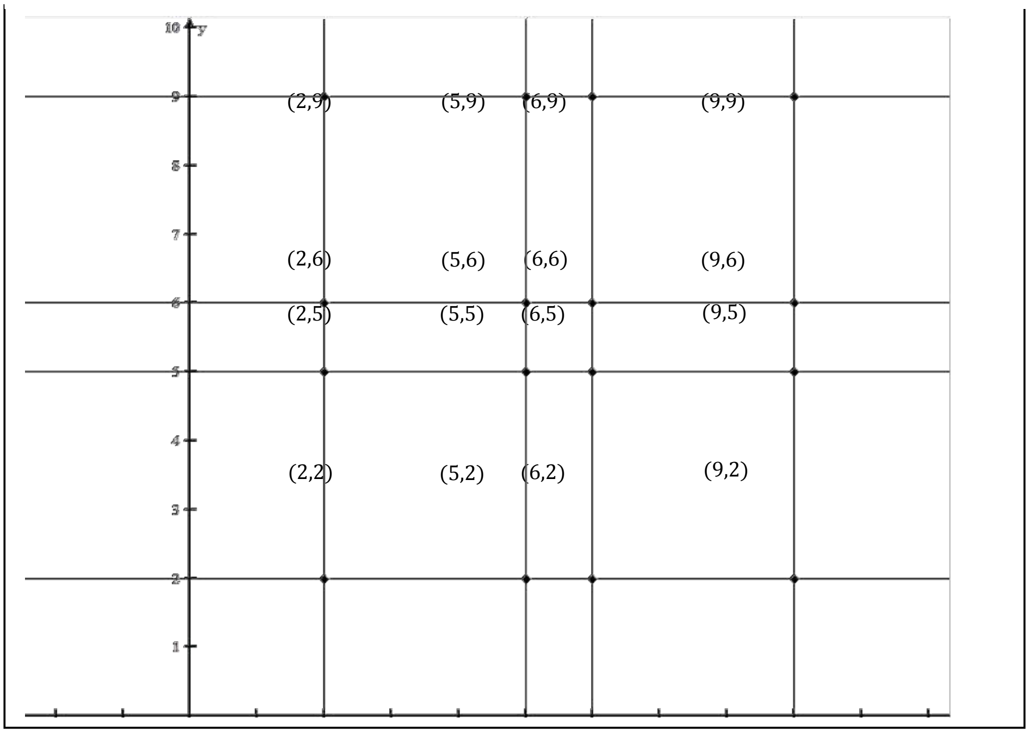
Problema 2.

¿Cuántas parejas ordenadas se pueden formar con los elementos de $A = \{2,5,6,9\}$?

De las distintas maneras de abordar este problema, se escogerá la del producto cartesiano $A\,X\,A = A^2$. A partir de distintas representaciones de este producto, se reconocerán o construirán patrones no solo para verificar la cantidad de subconjuntos de A de dos elementos sino también, para proponer conjeturas y nuevos problemas.

a. Tradicionalmente el producto cartesiano de $A\,X\,A$ se presenta gráficamente de la siguiente manera:

Figura 1-3: Producto cartesiano $\boldsymbol{A\,X\,A}$ (Autor)



b. En forma matricial la anterior representación va a quedar como:

Figura 1-5: producto cartesiano $A\ X\ A$ en forma matricial (Autor)

$$A^2 = \begin{bmatrix} (2,9) & (5,9) & (6,9) & (9,9) \\ (2,6) & (5,6) & (6,6) & (9,6) \\ (2,5) & (5,5) & (6,5) & (9,5) \\ (2,2) & (5,2) & (6,2) & (9,2) \end{bmatrix}$$

I. Diagonal principal

La diagonal principal de A^2 es el conjunto $D = \{(2,2),(5,5).(6,6),(9,9)\}$ cuyos elementos tienen igual la primera y segunda componente. Cada miembro de la diagonal es generado por cada elemento del conjunto A , como el conjunto A tiene 4 elementos, cabe esperar que la diagonal principal D tenga tantos parejas como elementos tenga el conjunto A.

Figura 1-3: Matriz diagonal con los elementos de la diagonal principal del producto $A\ X\ A$ (Autor)

$$D = \begin{bmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) & (9,9) \\ (0,0) & (0,0) & (6,6) & (0,0) \\ (0,0) & (5,5) & (0,0) & (0,0) \\ (2,2) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{bmatrix}$$

II. Total de parejas ordenadas

La matriz A^2 de $4X4$ tiene 16 elementos. En cada columna es constante la primera componente, mientras que la segunda varía en los elementos de A de mayor a menor, por ejemplo, en la tercera columna es constante en todas las filas el número 6, pero en la primera fila la segunda componente es el 9, en la segunda el 6, en la tercera, el 5 y en la cuarta el 2. Esta columna es:

$$(6,9)$$

$$(6,6)$$

$$(6,5)$$

$$(6,2)$$

En cada fila es constante la segunda componente, mientras que la primer componente varía en los elementos de A de menor a mayor, por ejemplo, en la tercera fila es constante en todas las columnas el número 5, pero en la primera columna la primera componente es el 2, en la segunda el 5, en la tercera el 6 y en la cuarta el 9. Esta fila es

$$(2,5) \quad (5,5) \quad (6,5) \quad (9,5)$$

Conjetura 2.

Si un conjunto E^2tiene n elementos entonces en $EXE = E^2$:

- ¿Hay n parejas cuyas componentes son iguales?
- ¿hay en total n X n parejas ordenadas?

Conjetura 3.

- ¿Por qué para el caso de $A = \{2,5,6,9\}$ hay 6 subconjuntos de dos elementos (tabla frecuencias 1-5) y en el producto AXA hay 16 parejas ordenadas? ¿Hacen falta 10 subconjuntos, sobran 10 pareja ordenadas o no puede haber coincidencia entre estas cantidades?

III. Matrices triangulares

La diagonal principal de la matriz A^2determina dos matrices triangulares, una superior T_1 y otra inferior T_2 que escribiremos de la siguiente manera:

Figura 1-4: matriz triangular superior $\boldsymbol{T_1}$ y matriz triangular inferior $\boldsymbol{T_2}$ (Autor)

$$T_1 = \begin{bmatrix} (2,9) & (5,9) & (6,9) & (0,0) \\ (2,6) & (5,6) & (0,0) & (0,0) \\ (2,5) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) & (9,6) \\ (0,0) & (0,0) & (6,5) & (9,5) \\ (0,0) & (5,2) & (6,2) & (9,2) \end{bmatrix}$$

Si consideramos la diagonal principal como un eje de simetría, entonces entre los elementos de las matrices T_1y T_2 se pueden establecer la siguiente correspondencia:

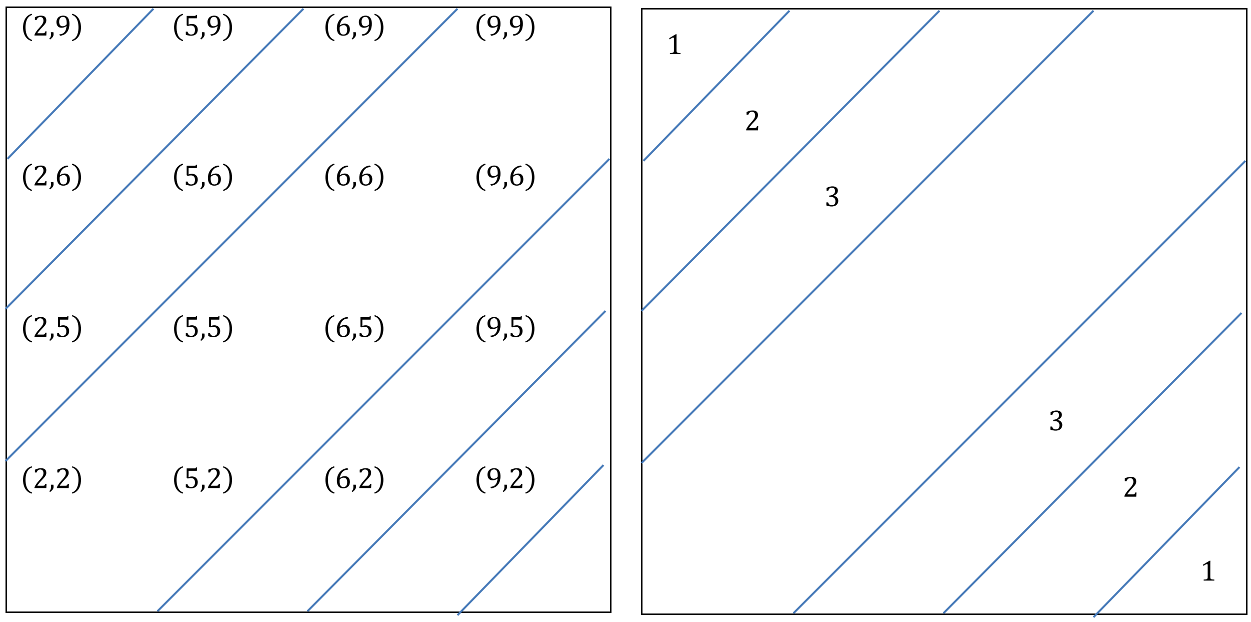
El elemento t_{11} de $T_{1,}$, $(2,9)$, tiene las mismas componentes del elemento t_{44} de T_2, $(9,2)$ pero, en distinto orden. En esta posición ambas matrices tienen un elemento.

Lo mismo sucede con $(2,6)$ y $(5,9)$ en T_1 que sus correspondiente simétricos en T_2 son $(6,2)$ y $(9,5)$. En estas posiciones ambas matrices tienen dos elementos.

Finalmente en T_1, $(2,5)$, $(5,6)$ y $(6,9)$ tienen sus simétricos en T_2 que son, respectivamente, $(5,2)$, $(6,5)$ y $(9,6)$. En estas posiciones ambas matrices tienen tres elementos.

Sin contar los elementos nulos, en total cada una, T_1 y T_2, tienen 6 elementos, pero pensando en patrones y en generalización, estos seis elementos se contarán a la manera pitagórica: $1 + 2 + 3 = 6$. Aquí se tiene la suma de los tres primeros números naturales y cada uno de los sumandos corresponde a la cantidad de elementos que hay en T_1 y T_2, en las posiciones que se acaban de describir. En la siguiente matriz se indica los sumandos de la suma anterior.

Figura 1-5: Cantidad de elementos en cada diagonal salvo la diagonal principal (Autor)



IV. Cálculo, mediante una fórmula, del total de elementos de T_1 o T_2

Los elementos no nulos de cada matriz triangular son 6; entre las dos en total tendrán 12 elementos, no nulos. Se va a obtener la cantidad de elementos no nulos de cada una, 6, de la siguiente manera.

$$\frac{Total\ de\ parejas\ en\ A^2 - Total\ de\ parejas\ en\ D}{2} = Total\ de\ parejas\ no\ nulas\ en\ cada\ matriz\ triangular$$

Para este caso particular, la anterior igualdad quedará:

$$\frac{16-4}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = \frac{4X3}{2} = \frac{3X4}{2}$$

En el numerador de $\frac{3X4}{2}$ está el producto de dos números naturales consecutivos. Sabiendo que $n!$ es el producto de todos los números naturales desde 1 hasta n, entonces el numerador de $\frac{3X4}{2}$ se va a multiplicar y dividir por $1X2$ para completar 4!, de tal manera que las fracciones resultantes sean equivalentes:

$$\frac{3X4}{2} = \frac{(1x2)x3X4}{(1x2)x2} = \frac{4!}{2!\,2}.$$

A pesar de que este es apenas un ejemplo se puede intentar hacer interpretaciones para ver si en los componentes de esta última fracción se pueden reconocer datos e incógnita de los problemas 1 y 2. Por ejemplo, A tiene 4 elementos y en estos problemas se piden describir y contar subconjuntos de dos elementos y parejas ordenadas. El 4 y el 2 aparecen en la fracción $\frac{4!}{2!2}$. A continuación se arriesgará a proponer las siguientes conjeturas:

Conjetura 4.

¿Será que en la fracción $\frac{4!}{2!2}$

- El número 4, representa la cantidad de elementos del conjunto del que se forman los subconjuntos de dos elementos y las parejas ordenadas?
- ¿Uno de los factores del denominador, 2, representa la cantidad de elementos de cada uno de los arreglos que hay que formar?

Nuevos problemas en los que por ejemplo A tenga 3 o 5 elementos pueden ayudar no solo a verificar y refutar la anterior conjetura sino a precisar la interpretación de cada uno de los componentes que aparecen en el numerador y denominador de la fracción que da el resultado total de configuraciones que pide el problema. Así por ejemplo si se quieren ternas no ordenadas de un conjunto de cuatro números, la cantidad de estos arreglos estaría dada por $\frac{4!}{3!1} = 4$. Y en general para un conjunto de *n* elementos del cual se quieran formar subconjuntos ordenados de *k* elementos hallaremos exactamente $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ arreglos de esta naturaleza. Dicho valor se corresponde con el número combinatorio $\binom{n}{k}$como se verá en el apartado **1.7.5**

1.7.4 Vuelta a subconjuntos de dos elementos: paso de parejas ordenadas a no ordenadas sin repetición.

Para volver a los subconjuntos de A de uno y dos elementos utilizando AXA se va a convenir que ahora se trata de pasar de parejas ordenadas a parejas no ordenadas.

De esta manera el conjunto de elementos en la diagonal de AXA, $D_1 = \{(2,2),(5,5),(6,6),(9,9)\}$, se transforma en $D_{11} = \left\{\{2,2\},\{5,5\},\{6,6\}\ \{9,9\}\right\}$.Por la definición de igualdad de conjuntos, $D_{11} = \left\{\{2\},\{5\},\{6\}\ \{9\}\right\}$. Los elementos de D_{11} y su cardinal, se corresponden con los 4 subconjuntos de A de un elemento, presentados en la **tabla 1-4.**

El conjunto de elementos de las matrices triangulares, $T_1\ y\ T_2$, se escribirá como $T_3 = \{(2,5),(2,6),(2,9),(5,6),(5,9),(6,9),(5,2),(6,2),(6,5),(9,2),(9,5),(9,6)\}$, este conjunto se transforma en $T_{31} = \left\{\{2,5\},\ \{2,6\},\ \{2,9\},\ \{5,6\},\ \{5,9\},\ \{6,9\},\ \{5,2\},\ \{6,2\},\ \{6,5\},\ \{9,2\},\ \{9,5\},\ \{9,6\}\right\}$, por la igualdad entre conjuntos, $T_{31} = \left\{\{2,5\},\{2,6\},\{2,9\},\{5,6\},\{5,9\},\{6,9\}\right\}$ Los elementos de T_{31} y su cardinal, se corresponden con los 6 subconjuntos de A de dos elementos, presentados en la **tabla1-4.**

En **la tabla 1-5** hay en total $4 + 6 = 10$, subconjuntos de A de un elemento y de dos elementos. Estos 10 elementos se van a disponer en la siguiente figura de tal manera que se facilite reconocer un patrón.

Figura 1-6: Representación triangular de los subconjuntos de $\boldsymbol{A}$ de un elemento y de dos elementos. (Autor)

$\{2\}$	$\{5\}$	$\{6\}$	$\{9\}$
$\{2,5\}$	$\{2,6\}$	$\{2,9\}$	
$\{5,6\}$	$\{5,9\}$		
$\{6,9\}$			

En la figura número 1-6 los 6 subconjuntos de A de dos elementos se contarán como, $1+2+3$, y los 10 subconjuntos de A, de uno y dos elementos, se contarán $1+2+3+4$, que son casos particulares de $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Nótese que para este caso particular, la cantidad de subconjuntos de A de uno y dos elementos, $1+2+3+4$, tiene como último sumando el mismo número de elementos de A.

Conjetura 5

¿Si A tiene m elementos, la cantidad de subconjuntos de A de uno y dos elementos es $\frac{m(m+1)}{2}$?

1.7.5 Conexiones

En las soluciones anteriores se ha estudiado por separado la cantidad de subconjuntos de A de 1, 2, 3 y 4 elementos. A continuación se va a indicar una manera de relacionar la totalidad de soluciones al problema 1.

En la **tabla 1-5** con la cantidad de subconjuntos de A de 1, 2, 3 y 4 elementos, se forma en su orden, el siguiente listado 4, 6, 4, 1. Al resolver,

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4,$$

Se aprecia que, en su orden, los coeficientes desde x^3y hasta y^4 coinciden con el listado 4, 6, 4, 1 de la cantidad de subconjuntos de A de 1, 2, 3 y 4 elementos. También se aprecia que en el listado de los coeficientes 1, 4, 6, 4, 1 hay 5 términos, pero en el listado de subconjuntos de A sólo hay 4; falta un 1 en este listado. Esta ausencia de un subconjunto de A sugiere el siguiente problema:

Problema 3

¿A Tiene 15 o 16 elementos? Si tiene 16 ¿cuál subconjunto de A falta?

La potencia $(x+y)^4$ es un caso particular del teorema del binomio, en el cual $(x+y)^n$ se desarrolla utilizando números combinatorios de la siguiente manera:

$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + \binom{n}{k} y^n$
(1.15)

Recuérdese que para $k \leq n$ el número combinatorio $\binom{n}{k}$ se define como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1.16)$$

Y $0! = 1$. Cuando n=4 los coeficientes $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$,$\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ y $\binom{4}{4}$, dan como resultado, respectivamente, 1,4,6,4,1. Nuevamente, en el resultado de estos números combinatorios, se encuentra el listado, 4, 6, 4,1 de subconjuntos de A de 1, 2, 3 y 4 elementos.

Este teorema puede ayudar en la solución del problema 3 si se logra una interpretación en términos de conjuntos del número combinatorio $\binom{n}{k}$: sea un E un conjunto de n elementos, ¿el número combinatorio $\binom{n}{k}$representa la cantidad de subconjuntos de E con k elementos? Si esto fuera cierto, ¿$\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, y $\binom{n}{3}$ representan, respectivamente, los subconjuntos de E con 1, 2, y 3 elementos? ¿ $\binom{n}{0}$ Representa la cantidad de subconjuntos de E que no tienen ningún elemento? El único subconjunto de cualquier conjunto que no tiene elementos, es el conjunto vacío. ¿Este conjunto es el que hace falta como primer término en el listado de cantidad de subconjuntos de A, 4, 6, 4, 1?

Como es sabido los coeficientes de $(x+y)^n$ se pueden reconocer en el Triángulo de Pascal. En la fila 5ª del Triángulo de Pascal se encuentran los coeficientes de $(x+y)^4$, 1, 4,6,4,1 o $\binom{4}{0}$, $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$ y $\binom{4}{4}$.

Figura 1-7: Triángulo de Pascal (Autor).

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \binom{n}{3} \quad \binom{n}{4} \quad \cdots \quad \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Acudiendo al Triángulo de Pascal, ¿si A tuviera tres elementos, la cantidad de subconjuntos de A de 0, 1, 2 y 3 elementos sería $1+3+3+1 = 8 = 2^3$? Nótese que, por ejemplo, la suma total de los elementos de cada filas 1ª a 5ª son, respectivamente: $1 = 2^0$, $1+1 = 2^1$, $1+2+1 = 2^2$, $1+3+3+1 = 2^3$, $1+4+6+4+1 = 2^4$. Apoyados en estos 5 casos particulares se puede proponer la siguiente conjetura:

Conjetura 6

Sea E un conjunto de n elementos. ¿ E Tiene 2^nsubconjuntos?

La siguiente tabla, Resume parte de las ideas que se acaban de presentar

Tabla 1-7: Cantidad de subconjuntos de A de 1, 2,3 y 4 elementos empleando números combinatorios (Autor).

Cantidad de subconjuntos de			
1 elemento	2 elementos	3 elementos	4 elementos
4	6	4	1
$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$

2 Capítulo 2 METODOLOGÍA

2.1 Tipo de Investigación

El presente estudio es de tipo descriptivo, se usara como herramienta de investigación el estudio de casos

2.2 Descripción de la Población

Para realizar la investigación se estudia la población de estudiantes de V-VI-VII-VIII- IX semestre del programa Licenciatura en matemáticas de la Universidad del Tolima.

La población la conforman 45 estudiantes: 7 de la asignatura filosofía de las matemáticas, 14 de la asignatura Electiva en educación matemática y 24 de la asignatura historia de las matemáticas, todas orientadas por un mismo docente titular de la universidad del Tolima.

De los 45 estudiantes, 27 son hombres y 18 mujeres, las edades varían en el rango de 18 a 30 años.

2.3 Presentación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima

De acuerdo con el proyecto educativo del programa Licenciatura en Matemáticas, la licenciatura surge como una propuesta, basada en el programa LICENCIATURA EN

MATEMÁTICAS Y FÍSICA, que ofreció la Universidad del Tolima desde 1966 hasta el año 1999. Este nuevo programa pretende dar respuesta a las exigencias del momento

El plan de estudios del programa (Plan 1) fue aprobado por acuerdos N° 0235 del 20 de octubre de 1999, del consejo de la Facultad de Ciencias de la Educación y N° 000004 del 19 de enero de 2000, del Consejo Académico de la Universidad del Tolima. Plan de estudios que fue reestructurado en el semestre B del año 2006 según acuerdo N° 0075 del 14 de julio de 2006, expedido por el consejo académico de la Universidad del Tolima. El nuevo plan de estudios (Plan 2) presentó un total de 170 créditos (41% en la formación disciplinar, 35% en la formación profesional y 24% en la formación humanística), en contraste con lo existente en plan con que inició el programa (49% en formación disciplinar; 31% en formación profesional y 20% en formación básica y humanística).

Gracias al proceso de autoevaluación realizado entre los años 2008 y 2009, con el fin de mejorar la calidad educativa del programa, dar respuesta a los lineamientos del MEN en torno a la implementación del sistema de créditos académicos y la investigación formativa, y con el fin de solicitar la renovación de registro calificado del programa, se presenta ante el Ministerio de Educación Nacional una propuesta de formación en la que se mantienen los puntos fuertes de la propuesta anterior (Plan 2) y se incorporan elementos que permitan solventar las debilidades detectadas en desarrollo del plan 2 (Propuesto en 2006), todo esto apoyado en una revisión juiciosa de las tendencias nacionales e internacionales en la formación inicial de docentes de matemáticas, en el mismo.

La reestructuración curricular que se presenta en este documento fue diseñada por parte de los miembros del Comité Curricular, avalada por el Consejo de Facultad en su sesión del día 26 de junio de 2010 y aprobada mediante acuerdo Nº 00086 de Julio 12 de 2010 del Consejo Académico de la Universidad del Tolima.

La Licenciatura en Matemáticas se desarrolla en la modalidad de educación presencial, en jornada diurna de lunes a viernes, con una duración de diez (10) semestres, una intensidad horaria total de 3072 horas de trabajo de Acompañamiento Docente (H.A.D.), 5488 horas de trabajo Independiente (H.T.I.), teniendo como promedio semanal 19,2 (H.A.D.) y 34,3 (H.T.I.). En el plan de estudios, se determinan tres grandes campos de formación: El profesional (Lo Pedagógico-Didáctico), el Básico Humanístico y el disciplinar (Las Matemáticas), este último está conformada por líneas que cubren las diversas teorías entre ellas la Teoría de la probabilidad.

De alguna manera el plan de estudios cuenta con asignaturas en las cuales podrían eventualmente contener aspectos combinatorios; en el segundo semestre se encuentra por ejemplo la asignatura *Teoría de números*; En el cuarto semestre *Estadística Descriptiva*; En el quinto semestre *estadística inferencial*, *historia del cálculo y la estadística, sucesiones y series*; En el sexto semestre *modelos estadísticos para investigación* y *didáctica de la estadística* por último en noveno semestre *práctica docente III: probabilidad y estadística* y *topología general.*

2.4 Análisis de la información

2.4.1 Cuestionarios

Para la recolección de datos que permita identificar las estrategias de los estudiantes en la resolución de problemas combinatorios se ha elaborado un cuestionario de dos preguntas.

a. Presentación del cuestionario

I. Elaboración y diseño

Se seleccionan 6 problemas de acuerdo con el modelo explícito en el enunciado y la operación combinatoria asociada a la solución. Como se muestra a continuación:

1. El 8 de marzo el señor Rodríguez fue víctima de un robo en su apartamento. Por tal razón decide comprar una caja fuerte para guardar sus cosas de valor. Para su uso debía escoger una contraseña de cuatro dígitos (de los 10 posibles). sin embargo resuelve que en esta clave no colocará ni 8 ni 3 (pues le recuérdala fecha del robo). si alguien que conoce esta decisión pero desconoce la clave

decide abrir la caja fuerte de señor Rodríguez ¿Cuántos intentos infructuosos puede hacer esta persona para lograr su cometido?

Ejemplo: la clave puede ser 0017 y no 0031 (inspirado en el problema del candado secreto, N. Vilenkin. (1972) ¿De cuántas formas? Combinatoria. Moscú: Editorial MIR. pág. 11)

2. Una familia numerosa sale de vacaciones, para ello usan 4 vehículos de colores diferentes. Para llegar a la ciudad donde se van a hospedar, existen tres rutas (caminos: derecha izquierda centro) distintas. ¿De cuántas formas se pueden dividir los viajeros para llegar a su destino?

   Ejemplo: pueden ir los 4 vehículos por el centro (propio)

3. ¿De cuántas formas se pueden escoger dos fichas de un dominó, de las 28 que hay, de forma que se puedan aplicar una a la otra, es decir, de modo que se encuentre el mismo número de tantos en ambas fichas ? (no importa el orden). (Tomado de N. Vilenkin. (1972)¿De cuántas formas? Combinatoria. Moscú: Editorial MIR. pág. 15)

4. ¿De cuántas formas se pueden colocar en el tablero de ajedrez 8 torres, de modo que no se puedan comer una a la otra? (Tomado de N. Vilenkin. (1972)¿De cuántas formas? Combinatoria. Moscú: Editorial MIR. pág. 25)

5. Una madre de familia tiene dos peras y tres manzanas. Cada día durante 5 días seguidos da a su hijo una fruta. ¿De cuántas maneras puede hacer esta distribución? (Tomado y adaptado de N. Vilenkin. (1972)¿De cuántas formas? Combinatoria. Moscú: Editorial MIR. pág. 135 problema 41)

6. En un vehículo de servicio público intermunicipal hay cupo para 7 personas. Al llegar la hora de salida el auto tiene solamente 5 pasajeros ¿De cuántas formas se pueden sentar las 5 personas en los 7 puestos? (propio).

En la siguiente tabla se muestra la clasificación de los problemas de acuerdo con la operación combinatoria presente en la solución y el modelo asociado en el enunciado.

Tabla 2-1: modelo asociado al enunciado (Autor).

OP. combinatoria / Modelo	Variación	Variación con repetición.	Permutación	combinación
Selección		1		3
Partición		2	5	
Colocación	6		4	

De estos problemas se seleccionan los problemas 5 y 6 y se hace un pilotaje el 29 de octubre del 2013, aplicado por el profesor Santiago González Orozco con estudiantes de licenciatura en matemáticas entre tercer y sexto semestre, con el fin de extraer características de fondo y forma, que permitan realizar un estudio de las estrategias de solución de estos problemas. (Ver Anexo B). En este, se evidencia una gran tendencia por el uso de listados para resolver cada uno de los problemas, esto tal vez por el orden en que se presentaron, ya que para la solución de la primera situación del cuestionario piloto, era suficiente listar 10 arreglos, lo que al parecer sugirió a los estudiantes que dicha estrategia sería adecuada para abordar el segundo problema. Por lo tanto, para la aplicación del cuestionario final se optó por dejar los mismos problemas pero, invertir el orden de presentación de estos.

Este piloto ofreció también una idea en cuanto a la cantidad de tiempo posible requerido para la resolución de las dos situaciones problémicas.

II. Condiciones de aplicación

El cuestionario final se aplicó a estudiantes de semestres V-VI-VII-VIII- IX del programa Licenciatura en matemáticas de la Universidad del Tolima que estaban cursando las asignaturas: historia de las matemáticas, filosofía de las matemáticas y Electiva en educación matemática, todas orientadas por docente titular de la Universidad del Tolima, Santiago González Orozco. Este cuestionario fue aplicado los días 5 de junio de 2014, con los estudiantes de historia de las matemáticas y electiva en educación matemática, y, el 12 de junio de 2014 con los estudiantes de filosofía de las matemáticas en las instalaciones de la Universidad del Tolima durante dos horas que dura cada una de las sesiones de clase. (Ver Anexo C).

III. Presentación de cada pregunta

i. Problema del bus

En un vehículo de servicio público intermunicipal hay cupo para 7 personas. Al llegar la hora de salida el auto tiene solamente 5 pasajeros ¿De cuántas formas se pueden sentar las 5 personas en los 7 puestos?

- **Estrategia Analítica o Aplicación de Fórmulas**

Caracterización : Alumnos que dirigen su atención en los números que aparecen en el enunciado (7 y 5) y sin relacionarlos con el tipo de arreglo y la naturaleza de sus elementos, asignan valores a fórmulas combinatorias como: n^m, $\binom{n}{m}$, $\frac{n!}{(n-m)!}$ u otras que estiman que resuelve el problema, por ejemplo $m \, X \, n$.

El caso de $\boldsymbol{n^m}$: Hay que notar, que la expresión n^m modela la cantidad de arreglos en los cuales existe el orden y la repetición, consiste en la cantidad de las distintas agrupaciones formadas por m elementos (que pueden repetirse) tomados de un conjunto de n elementos, por lo cual, antes de la aplicación de dicha fórmula quien intenta resolver el problema por este medio tendría que preguntarse: **¿a quiénes se representan con n y m?** Las opciones para dar respuesta a esta cuestión serían; n = cantidad de pasajeros y m = cantidad de puestos del bus, o, n = cantidad de puestos del bus y m = cantidad de pasajeros. **¿Cuál de las dos seleccionar?** De asumir, que n = cantidad de puestos del bus y m = cantidad de pasajeros. Utilizando esta técnica se obtendría 7^5=7 x 7 x 7 x 7 x 7=16807. Lo que debería producir en quien resuelve algunas inquietudes como por ejemplo: ¿qué puede significar cada uno de los números 7 que aparecen en la fórmula?, ¿será que una persona puede sentarse en las 7 sillas, otra puede hacerlo de igual forma en cualquiera de las 7 sillas (sin importar que exista una ya ocupada) y así, cualquiera de las 5 personas puede sentarse en cualquiera de las 7 sillas sin importar que existan algunas ocupadas?

De esta manera, quien selecciona esta opción, estaría asumiendo que la primera persona que sube al bus selecciona una silla entre las 7 disponibles e inmediatamente se baja sin dejar ninguna señal de su selección, así quien ingresa luego de esta puede elegir cualquiera de las 7 sillas e igual al primero se baja sin dejar ninguna indicación de la silla seleccionada, y así cada persona, hasta la 5 hace el mismo proceso, solo así se puede explicar que cualquiera de las personas que suben al bus tiene las 7 opciones de seleccionar su silla, y de esta manera justificar la fórmula 7^5=7 x 7 x 7 x 7 x 7=16807. Al pensar de esta manera ¿Qué puede pasar al momento de arrancar y todos los pasajeros suban al bus y deseen sentarse en el puesto elegido?

Ahora, si escogemos la otra opción; n = cantidad de pasajeros y m = cantidad de puestos del bus 5^7= 5 X 5 X 5 X 5 X 5 X 5 X 5 =78125, pudo pensarse que cada silla puede albergar a cualquiera de las 5 personas, otra de las sillas puede hacer exactamente lo mismo, y así sucesivamente, esta vez no hay quien elija, sino que se trata de la capacidad potencial que tiene cada silla de albergar a los 5 pasajeros.

Por lo anterior, el resoluto se vería en la necesidad de resolver nuevas cuestiones como:

¿Sobre quién hacer la repetición sillas o personas? ¿Qué significa?

¿Pueden sentarse dos personas en la misma silla simultáneamente?

¿Una persona puede sentarse en dos sillas al mismo tiempo?

Salvo a condiciones (una señora puede llevar a su hijo en las piernas, o una persona pudo comprar dos puestos y acostarse en ellos) no presentes en el enunciado, la respuesta a las dos últimas preguntas sería negativa, lo que muestra que de acuerdo con la situación y a la naturaleza de los objetos allí presentes, la repetición no es una característica en el tipo de arreglo que requiere la solución del problema.

Quienes aplican esta estrategia tienen en cuenta que los arreglos solicitados, son ordenados pero olvidan o ignoran que estos no admiten repetición.

El caso de $\boldsymbol{\binom{n}{m}}$: utilizar $\binom{7}{5}$, el alumno pasa por alto que en este problema los arreglos son ordenados, puesto que el número combinatorio $\boldsymbol{\binom{n}{m}}$ representa la cantidad de subconjuntos de m elementos seleccionados de un conjunto de n elementos, de esta manera, al estar estrechamente ligado al concepto de conjunto, las características de este tipo de arreglos son la no aceptación de la repetición de sus elementos, y el orden en que estén dispuestos estos es intrascendente. A diferencia de la anterior técnica, no hay problemas en decidir quién es m y n pues al expresar estas cantidades en el número aleatorio $\boldsymbol{\binom{n}{m}}$ se garantiza que $m \leq n$.

Quienes se inclinan por esta opción, estarían desconociendo la naturaleza de los objetos, en este caso las personas, de ser indistinguibles, lo que los lleva a cometer el error de considerar que el orden en que se dispongan las personas no es importante, tan solo asume la indistinción de los puestos dado por la ubicación de las sillas dentro del bus, y con ello reconoce la importancia del orden de los puestos.

Por lo anterior, una forma de justificar el uso de la fórmula $\boldsymbol{\binom{n}{m}}$ es considerar que los objetos relacionados sean indistinguibles, sólo así, al cambiarse entre ellos de lugar no existiría ninguna diferencia o por lo menos nadie lo notaría. Por ejemplo, si dicho bus en lugar de transportar personas en cada uno de sus puestos transporta cajas idénticas.

El caso de $\boldsymbol{m\,X\,n}$: Quien utiliza esta técnica para resolver el problema tendrían que pensar si el 35 producto de esta aplicación, es el resultado de tener $7+7+7+7+7$ o $5+5+5+5+5+5+5$, en cualquiera de los dos casos se está acudiendo a repetir elementos, ya sean las sillas o las personas. Puede pensarse por ejemplo, en el los problemas: Si cada silla de un bus puede contener 5 personas y el bus cuenta con 7 sillas ¿Cuántas personas en total caben en el bus? Si un bus que está completamente lleno y a cada uno de los 5 compradores que hubo para ese recorrido se le vendieron 7 puestos ¿Cuántas sillas tiene el bus? (ningún pasajero puede estar de pie). Las preguntas anteriores no hacen énfasis en las organizaciones que pueden darse, así que el orden no tiene importancia, la cantidad será igual si algunos pasajeros deciden cambiarse de lugar, pues el problema no sería propio de la combinatoria, sino mejor de la aritmética.

Puede suceder también, que quien resuelve de esta manera, busque en su memoria un recuerdo cuando se tocaron estos problemas de conteo y acuda a la regla de la multiplicación, que reza que si una operación puede hacerse de m formas diferentes y que para cada una de estas se permite una segunda operación de n formas distintas, entonces existen $m\,X\,n$ formas distintas de ejecutar las dos operaciones al tiempo. Pero, en este caso, ¿cuales serian las dos operaciones a ejecutar?

Tabla 2-2: Uso de las fórmulas combinatorias (Autor)

				Repeticion	orden	Distincion	
						puestos	personas
$\boldsymbol{n^m}$	$nXnXnX\ldots$ m veces	7^5	$7\,x\,7\,x\,7\,x\,7\,x\,7 = 16807$	✓	✓	✓	✓
		5^7	$5\,X\,5\,X\,5\,X5\,X\,5\,X\,5\,X\,5 = 78125$	✓	✓	✓	✓
$\boldsymbol{\binom{n}{m}}$	$\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$	$\frac{7!}{5!\,(7-5)!}$	$\frac{1\,X\,2\,X3\,X\,4\,X\,5\,X\,6\,X\,7}{1\,X\,2\,X\,3\,X\,4\,X\,5\,(1\,x\,2)} = 21$	X	X	✓	X
$\boldsymbol{nXm}$	$n+n+n+\cdots$ m veces	$7x5$	$7\ +7+\ 7+\ 7+\ 7 = 35$	✓	X	X	X
		$5X7$	$5+5+5+5+5+5+5\ = 35$	✓	X	X	X
$\boldsymbol{V_{n,m}}$	$\frac{n!}{(n-m)!}$	$\frac{7!}{(7-5)!}$	$3\,X\,4\,X\,5\,X\,6\,X\,7 = 2520$	X	✓	✓	✓

- **Enumeración de Arreglos**

Caracterización: Alumnos que por distintos medios (casillas, tablas, diagramas, diagramas de árbol) pretenden hacer un listado completo de las configuraciones que resuelven el problema o de algunos casos particulares que les permita reconocer un patrón para luego estimar un resultado.

El caso de las Listas: Esta técnica es de alguna forma, la más “natural” de enfrentarse a este tipo de problemas, puesto que, personas sin ninguna preparación matemática con interés en resolver dichos enunciados, optan por hacer una lista de los posibles arreglos. Sin embargo, la decisión de usar esta estrategia implica un alto riesgo de equivocación, ya que, cuando las cantidades son “grandes” y el listado se ha hecho arbitrariamente, sin sistematización alguna, hay mayor posibilidad de obviar algún arreglo, repetirlo o hallar un patrón incorrecto. Gran parte de los alumnos que privilegian este procedimiento, no lo culminan debido a la cantidad de arreglos y no reconocen un patrón debido a la no sistematización de los arreglos.

Otro error que puede cometer el estudiante asociado al uso de esta estrategia, es la representación de los elementos relacionados en el enunciado, en esta caso sillas y pasajeros, ya que la utilización inadecuada de “señas” para representar por ejemplo las personas puede llevar al desconocimiento de características importantes como la distinción de los objetos y la repetición de los elementos en los arreglos, por ejemplo:

1º	X	X	X	X	X		
2º	X	X	X	X		X	
3º	X	X	X	X			X
4º	X	X	X		X	X	
.							
.							
.							

Se puede ver en este caso que a pesar de distinguir las sillas, a las personas les ha asignado un mismo símbolo (X) para su representación, hecho que necesariamente lo llevara a cometer el error de ignorar que el tipo de arreglo que resuelve el problema requiere del orden en que se dispongan los elementos. Además, al intentar listar todas las posibilidades, al no ser sistemático, puede repetir o ignorar arreglos. Con seguridad, el uso de otro tipo de símbolos como números o letras distintas para cada persona, le permitiría hallar características imposibles de ver con la representación planteada.

Finalmente, hay que mencionar que el uso de esta estrategia en la resolución del problema, no es inadecuado, por el contrario, es muy útil siempre y cuando permita reconocer características como la distinción de sus elementos, la repetición y si el orden en que se disponen altera o no la cantidad de arreglos. También que lo obligue a notar que la cantidad de configuraciones posibles es o no “grande” para decidir agotar el listado. Además, si este permite descubrir un patrón que le facilite calcular la cantidad total de arreglos ante la dificultad de listar todos los arreglos.por ejemplo,

Utilizando una lista para dar solución al problema, se puede partir de los arreglos que se forman con los puestos que deberán quedar vacíos al subir los 5 pasajeros, de esta manera:

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
a & b & c & d & e & & \\
a & b & c & d & & & e \\
a & b & c & & & d & e \\
a & b & & & c & d & e \\
a & & & b & c & d & e \\
 & & a & b & c & d & e
\end{array}\right\} 6$$

$$\left.\begin{array}{cccccc}
a & b & c & d & & e \\
a & b & c & & d & e \\
a & b & & c & d & e \\
a & & b & c & d & e \\
 & a & b & c & d & e
\end{array}\right\} 5$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
a & b & c & & d & & e \\
a & b & & c & d & & e \\
a & & b & c & d & & e \\
 & a & b & c & d & & e
\end{array}\right\} 4$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
a & b & & c & & d & e \\
a & & b & c & & d & e \\
 & a & b & c & & d & e
\end{array}\right\} 3$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
a & & b & & c & d & e \\
 & a & b & & c & d & e
\end{array}\right\} 2$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
 & a & & b & c & d & e
\end{array}\right\} 1$$

Total: $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$

Suma de los 6 primeros números naturales $= \frac{6(6+1)}{2} = \frac{6\times7}{2} = 21 \quad esto\ es\ \frac{6\times7}{2} \times \frac{5!}{5!} \qquad (1)$

Para cada una de las configuraciones anteriores se generarían otras fijando las sillas vacías e intercambiando las posiciones entre los pasajeros. Un estudiante puede recordar la forma de ordenar *n* objetos distintos en *n* espacios, la cual está dada por $n!$ y reducir el problema a ordenar las letras a, b, c, d, e. De no hacerlo puede ir conjeturando así:

Tabla 2-3: Construcción de arreglos de *n* objetos distintos en *n* espacios. (Autor).

personas	arreglos	Cantidad de arreglos	
1	A	Uno	
2	Ab Ba	Dos	$= cantidad\ de\ personas\ a\ ordenar\ (2)$ $\times\ cantidad\ de\ arreglos\ anteriores\ (1) = 2 \times 1$
3	abc acb bca bac cba cab	Seis	$= cantidad\ de\ personas\ a\ ordenar\ (3)$ $\times\ cantidad\ de\ arreglos\ anteriores\ (2) = 6$

Del análisis al anterior proceso surge la siguiente conjetura:

Conjetura 7:

La cantidad de arreglos de n objetos en n espacios es igual al multiplicar la cantidad de objetos a ordenar n por la cantidad de arreglos anteriores.

Así, la cantidad de arreglos cuando haya 4 pasajeros es de

$4 \times 6 = 4 \times (3 \times (2 \times 1)) = 24\ arreglos$

Siguiendo la conjetura, la cantidad de arreglos que resultan al fijar las sillas vacías e intercambiar las posiciones entre los 5 pasajero es:

$5 \times 24 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120\ arreglos$

De ser cierta la conjetura, la cantidad de arreglos que pueden formarse siguiendo el resultado (1) es:

$$21 \times 120 = 2520\ arreglos = \left(\frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!}\right) \times 5! = \left(\frac{7 \times 6}{2!} \times 5!\right)$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(7-5)!}$$

$$= \frac{7!}{(7-5)!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$$

El caso de las tablas

Quienes privilegian el uso de esta estrategia, pueden suponer algunas ventajas por encima de quienes escogieron la técnica anterior, puesto que la construcción de una tabla exige la introducción de unas entradas (variables) que puede sugerir a quien resuelve el problema, características de los objetos que se relacionan en el enunciado y en la tabla van quedando consignados los productos de estas relaciones. No obstante, se corren los mismos riesgos que con el listado, quién resuelve tendría, por ejemplo, la confusión en asignar los datos de entrada de la tabla, y así, llegar a relaciones incorrectas entre estos, que desconocen las características esenciales del problema. Por ejemplo, se puede ver que el estudiante

36 selecciona como datos de entrada las personas que ingresan al bus (horizontal), describiendolas con los números del 1 al 5 y los puestos del bus (vertical) asignando un número del 1 al 7 para cada uno. A pesar de que hay distinción, de los objetos la relación que asume entre ellas está dada por la posibilidad de que alguna de las personas se siente en una de las sillas y le asigna una X a esta posibilidad y lo mismo hace con todas las personas sin importar que en el momento de elegir una silla para asignarla a otro pasajero, esté ocupada.

- **Utilización de Gráficos o Dibujos**

Caracterización: Alumnos que como un punto de partida dibujan el bus y las personas, para obtener información que les permita decidir hacer un listado, aplicar una fórmula u otro tipo de resolución.

Esta estrategia puede resultar productiva cuando dicha representación relacione todas las variables relevantes del problema y exponga claramente aspectos cruciales en la resolución, por ejemplo, que permita identificar características como la distinción de los objetos, repetición e importancia del orden en que se distribuyen estos, permitiendo tomar la decisión adecuada frente a cual operación combinatoria usar, o, la reorganización de los datos y el uso de otra estrategia.

El caso del dibujo del bus y de unas personas: Algunos estudiantes intentan representar fielmente la situación y optan por dibujar el bus, las sillas y las personas, (incluso cuentan el conductor del bus y al ayudante (Estudiante 5 y 31). Al hacerlo, ignoran la naturaleza de los objetos que allí se relacionan, por ejemplo dibujan las 5 personas casi iguales imposible de distinguir, y al replicar el dibujo con propósito de contar los arreglos repitiendo los dibujos. Ciertos estudiantes notan la “ineficiencia” del método y deciden buscar otra estrategia, por ejemplo, organizan las sillas (algunos en forma de casillas) y repiten este patrón intentando listar de esta manera los arreglos, y en lugar de dibujar cada persona le asignan un mismo símbolo (X) o (.) o simplemente sombrean cada una de las casillas que consideran ocupadas y así, agotar un listado con las configuraciones obtenidas. (Estudiantes 31 y 38). Estudiantes que reconocen que las personas son distinguibles, luego de hacer el dibujo asignan a cada persona una letra o un número distinto para representarlos y le asignan una casilla que han asumido como silla y así intentar listar todos los arreglos (Estudiante 39) o tratan de hacer parejas (silla, pasajero) y contar la cantidad de pares. (Estudiante 41).

De esta manera, se puede ver en el uso de esta estrategia diferentes tipos de representación, tipos de dibujos que van desde casi una fotografía del bus, hasta el uso de las 7 casillas:

Que no solo sirve para este problema sino para otros parecidos donde el orden importa, con o sin repeticiones (formación de números de tres cifras, dados de cinco dígitos,…)

ii. Problema de las manzanas y las peras

Se enfocara en este apartado al ejercicio 5, en este se han notado más aciertos en la respuesta. El problema:

"Una madre de familia tiene dos peras y tres manzanas para la lonchera de su hijo. Cada día durante 5 días seguidos da a su hijo una fruta. ¿De cuántas maneras puede hacer esta distribución? Justifique su respuesta.

En primer lugar, se debe notar en el enunciado que no se nos ha dicho algo frente a la distinción entre manzanas o entre las peras.

Entonces miremos los siguientes casos:

- Las tres manzanas son indistinguibles pero las peras se pueden distinguir entre sí.
- Una de las manzanas se distinguen entre las otras dos (indistinguibles) y las peras se distinguen entre sí.
- Una de las manzanas se distinguen entre las otras dos (indistinguibles) y las peras se no distinguen entre sí.

- Las tres manzanas se distinguen y las peras son indistinguibles.
- Las tres manzanas se distinguen al igual que las peras.
- Las tres manzanas son indistinguibles al igual que las peras.

- Se observa que desde este punto de vista este problema tendría muchas soluciones. Sin embargo se asumirá la postura del último inciso (no por ser correcta) pues la lectura que se hace al escritor, no sugiere ninguna de las otras opciones ya que al realizar cualquier distinción entre frutas de un mismo género no sería necesario (para el escritor) mencionar que se trata de manzanas y peras, y optaría por involucrar otra fruta o solo hablar de 5 frutas por ejemplo. Así, se entenderá en el presente análisis que las tres manzanas son indistinguibles entre sí, al igual que las peras.

En segundo lugar pensar en la trascendencia de orden puede traer inconvenientes al momento de seleccionar alguna operación combinatoria para su solución, puesto que no siempre al cambiar el orden de algunos elementos obtendremos distintas agrupaciones. Si retomamos las definiciones. ¿Es una variación? ¿Permutación o Combinación?

- **Estrategia Analítica o Aplicación de Fórmulas**

Caracterización: Alumnos que dirigen su atención en los números que aparecen en el enunciado (5,3, 2) y sin relacionarlos con el tipo de arreglo y la naturaleza de sus elementos, asignan valores a fórmulas combinatorias. Pero, al suponer que un estudiante recuerde las fórmulas y sabe que su uso depende del orden (en este caso) surgen interrogantes como los siguientes:

Primera duda posible**,** En cualquiera de las operaciones combinatorias, usualmente solo se relacionan dos números, m y n; En este problema aparecen tres números que relacionar, 5, 3 y 2. Entonces, ¿Quién es m y quíen n?

$V_{5,3}$ $V_{5,2}$ $V_{3,2}$ $C_{5,3}$ $C_{5,2}$ $C_{3,2}$

Segunda duda posible, Si intercambiamos dos manzanas entre sí, la configuración es la misma; lo que indicaría que es una combinación, pues al cambiar la posición de estos dos elementos no obtendremos una nueva configuración, pero, si cambiamos una pera con una manzana se formaría una nueva agrupación, lo que indica la importancia del orden y por lo tanto se trataría de una variación.

Quienes piensen en la primera opción, entrarían en el conflicto de seleccionar algunas de las ecuaciones descritas anteriormente, y decidir especialmente las que involucre el 5 que sería la totalidad de los días en que se hará la distribución, y combinar con 3 y/o con 2, de esta manera, al seleccionar la fórmula:

$$C_{5,2}= \frac{5!}{(5-2)!\ 2!} = 10$$

Se estaría olvidando de las peras, y de igual forma se olvidaran las manzanas si se usara:

$$C_{5,3}= \frac{5!}{(5-3)!\ 3!} = 10$$

¿Qué pasaría si se hicieran algunas variables al problema y fueran 7 días y se agregaran a la lista de frutas, dos bananos? ¿Seguirán siendo 10 configuraciones distintas?

Quienes opten por seleccionar la segunda premisa, donde se tenga en cuenta la presencia del orden, pueden cometer el error de ignorar que se trata de dos frutas en particular y pueden asegurar que la cantidad de formas en que se pueden distribuir 5 frutas en 5 día está dada por $5!$, de esta manera no importa el tipo de frutas del que se esté hablando, no tendría sentido que el autor haya seleccionado esos dos tipos.

Ahora, si se asume que las tres manzanas son indistinguibles entre sí al igual que las peras, entonces se tendría, lo que en alguna bibliografía de matemáticas es conocida como permutaciones por tipos o con repetición, cuya cantidad de arreglos estaría dada por

$$P_{m,(n_1,n_2 n_3 \dots\dots\dots n_k)} = \frac{m!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \dots \dots n_k!}$$

Que en el caso del problema a tratar sería:

$$P_{5,3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

Que es al parecer lo adecuado de acuerdo a la selección de la opción, que las tres manzanas son indistinguibles entre sí, al igual que las peras.

Con lo que podemos generalizar que si tenemos m manzanas y n peras para distribuirlas una diaria durante $m + n$ días seguidos podemos determinarla:

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

Es necesario plantear aquí, que puede existir un vacío a nivel epistemológico, puesto que si bien, es claro que la distinción fundamental entre variaciones y combinaciones es la ausencia o presencia del orden, cuando los arreglos asumen la posibilidad de la repetición puede presentarse la confusión entre estas , ya que, cuando se intenta demostrar la cantidad de permutaciones con repetición es imperante recurrir a una combinación para hallar esta cantidad, análogamente al pretender calcular la cantidad de combinaciones con repetición, se acude al uso de las permutaciones para obtener dicho número, es el caso del problema número 5 planteado, que obedece a una permutación con repetición debido a la naturaleza del problema, no obstante al realizar el cálculo de la combinación entre el total de elementos con la cantidad de objetos de un mismo tipo obtendremos la misma cantidad, hecho que a quien se interese únicamente por este resultado no le permitirá distinguir entre las dos operaciones combinatorias involucradas en esta confusión

- **Enumeración de Arreglos**

Caracterización: Alumnos que por distintos medios (casillas, tablas, diagramas, diagramas de árbol) pretenden hacer un listado completo de las configuraciones que resuelven el problema o de algunos casos particulares que les permita reconocer un patrón para luego estimar un resultado.

El caso de las Listas, Los estudiantes que emplean esta estrategia, al igual que la técnica anterior pueden haber hecho la lectura al problema de tal forma que tanto las manzanas como las peras son indistinguibles entre si, de esta manera empiezan a listar todas las posibilidades sin llegar a terminar dicho listado y exponiéndose a cometer olvidos de ciertos arreglos o repetición de otros, por otra parte, puede suceder, que aunque hayan hecho la lectura del problema que se ha asumido, aquí, correcta (que las tres manzanas son indistinguibles entre sí, al igual que las peras), los estudiantes empiecen a realizar el listado de manera no sistemática, lo que lleva a una respuesta incorrecta a pesar de que la cantidad de arreglos es pequeña (10 elementos).

A continuacion un listado de manera sistemática de los 10 arreglos

Figura 2-1: Organización sistemática de los 10 arreglos. (Autor)

P P M M M

P M P M M

P M M P M

P M M M P

M P M M P

M M P M P

M M M P P

Movemos la pera a la derecha y luego la otra.

M P P M M

M M P P M

Ahora rotar P P

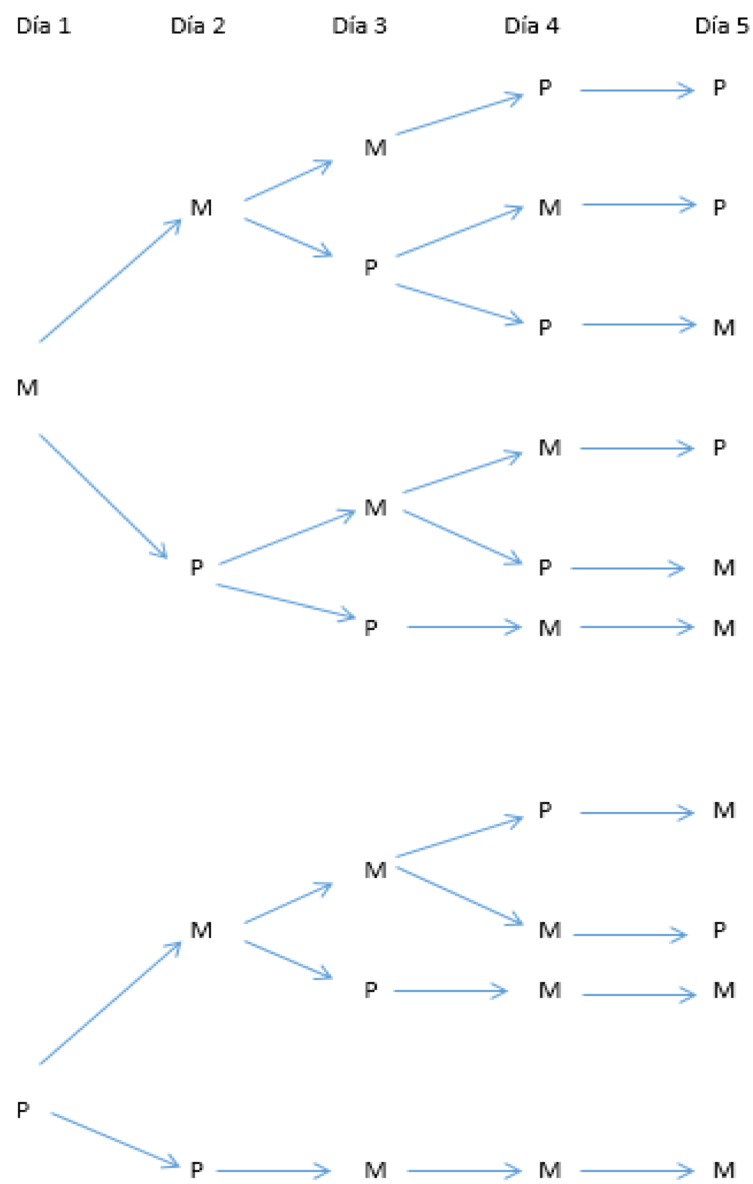
M P M P M

Finalmente, la opción donde ninguna de las frutas de

El caso del Diagrama de árbol, En este caso, el uso del diagram de árbol es muy util, puesto que permite de una forma sistemática mostrar todas y cada una de las configuraciones posible, además, en su construcción el resolutor puede cuestionarse frente al tipo de arreglo que sugiere la solución para este problema.

A continuación una representación en diagrama de árbol para la solución del problema

Figura 2-2: Organización mediante diagrama de árbol de los 10 arreglos



Al utilizar esta estrategia es posible que se encuentre con las siguientes dificultades:

- contar frutas que ya no pueden ser contadas puesto que han sido agotadas, Lo que hará que algunos estudiantes repitan algunas configuraciones.
- comparar con formas de árboles que hayan resuelto con anterioridad especialmente con aquellos que responden a problemas con principios multiplicativo donde cada ramificación tiene la misma cantidad de posibilidades.

El caso de las casillas. En búsqueda de dar solución a un problema un estudiante puede decidir hacer casillas para organizar su información, para este fin es posible reducir un poco el problema y trabajar dentro de las casillas solamente con la letra que representa en este caso las dos peras, de la siguiente manera:

P	P			

P		P		

P			P	

P				P

	P	P		

	P		P	

	P			P

		P	P	

		P		P

			P	P

Esta estrategia puede considerarse similar al listado; sin embargo esconde una potencia mucho mayor frente a la operación combinatoria. Porque:

Primero, al manejar solo dos letras (iguales) disminuye el riesgo de equivocarse. Segundo, elimina muchos de los supuestos que se hicieron inicialmente frente al orden y por tanto cambia la operación combinatoria que podía existir inicialmente.

Sin embargo, el resultado a pesar de ser el mismo, se está dando solución a otro problema (¿De cuántas formas puedo distribuir dos peras en 5 cajas?) pues olvida la existencia de las tres manzanas. También, después de hacer este procedimiento el resolutor puede llenar los espacios en blanco con cada una de las manzanas produciendo un listado similar al de la estrategia anterior.

- **Utilización de Gráficos o Dibujos**

Caracterización: Alumnos que como un punto de partida dibujan las manzanas las peras incluso a la madre de familia , más que para obtener información importante respecto a la naturaleza del problema, como una forma de presentar el problema, ya que inmediatamente después del dibujo se opta por hacer un listado, aplicar una fórmula u otro tipo de estrategia de resolución.

Esta estrategia puede resultar productiva cuando dicha representación relacione todas las variables relevantes del problema y exponga claramente aspectos cruciales en la resolución, por ejemplo, que permita identificar características como la distinción de los objetos, repetición e importancia del orden en que se distribuyen estos, permitiendo tomar la decisión adecuada frente a qué operación combinatoria usar, o, la reorganización de los datos y el uso de otra estrategia.

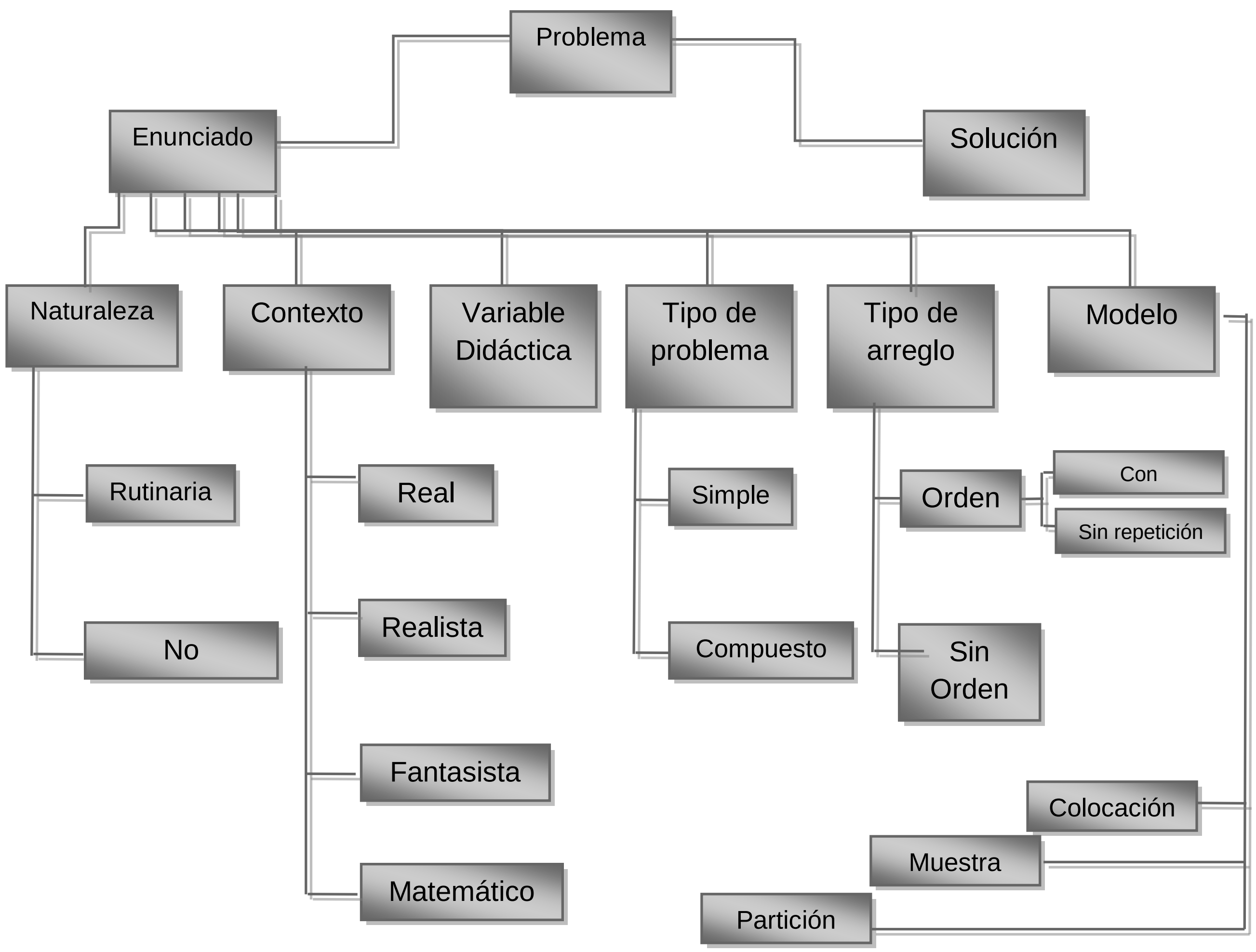
2.4.2 Categorías de análisis

a. Categorías para el enunciado

I. Naturaleza y contexto
II. Variable y didáctica
III. **(….) Esquematización progresiva**
IV. **modelo (colocación, muestra, participación)**

El siguiente diagrama resume las anteriores categorías:

Figura 2-3: Categoría para el enunciado de cada problema. (Autor)

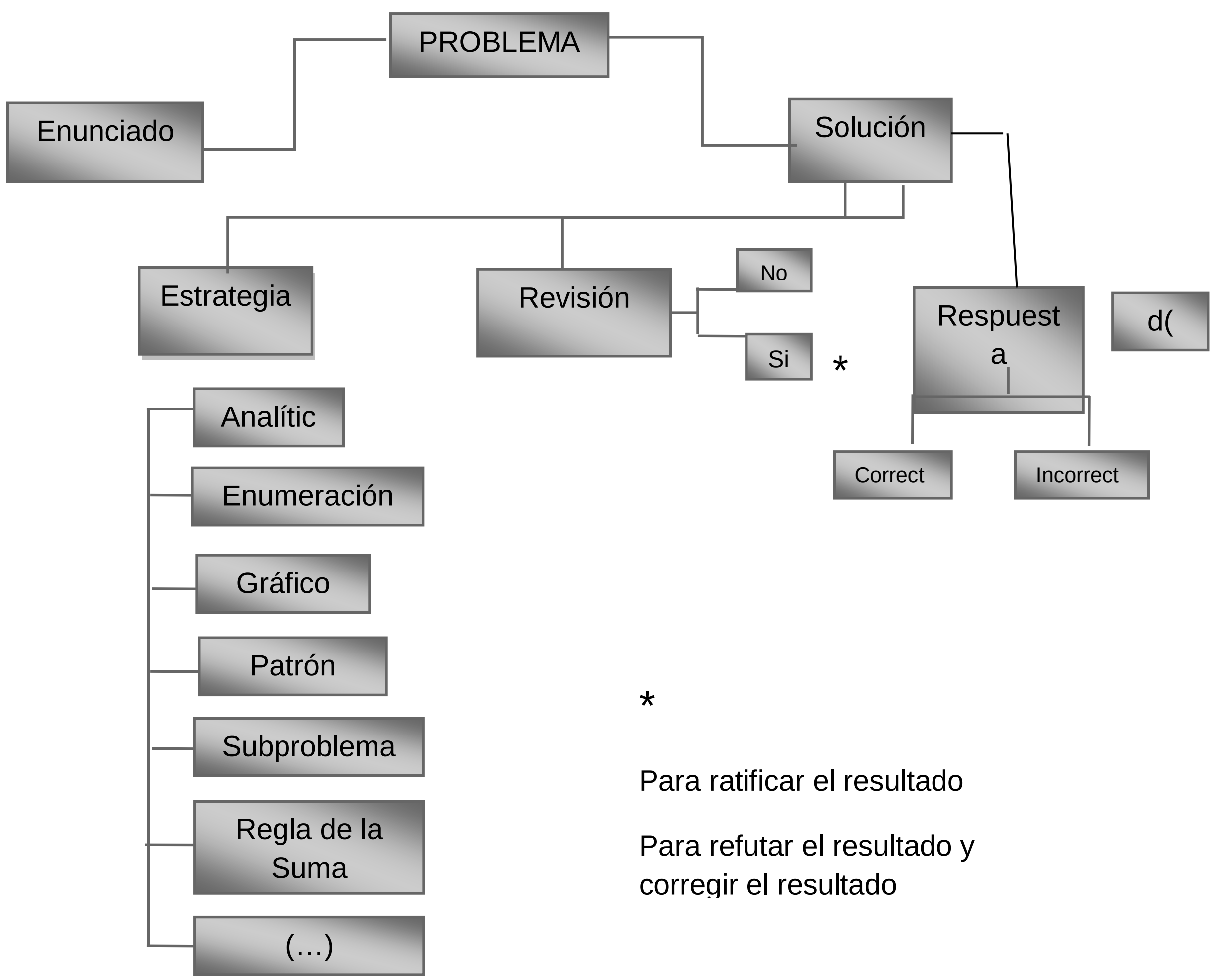


b. **Aplicación de las anteriores categorías a los enunciados de los dos problemas)**
c. **Categorías para la Solución**

I. **Estrategia**
II. **(“visión retrospectiva”)**
III. **respuesta**
IV. **(…) demás de la tabla de análisis**

El siguiente diagrama resume las anteriores categorías

Figura 2-4: Categorías para la solución de cada problema. (Autor)



2.4.3 Una clasificación de los cuestionarios de los alumnos

Tabla 2-4 clasificación de los cuestionarios de los alumnos. (Autor)

<table>
<tr><th rowspan="2">Estrategia</th><th rowspan="2" colspan="2">Caracterización</th><th colspan="2">Respuesta</th><th colspan="2">Revisión de la respuesta</th><th rowspan="2">Frecuencia de la estrategia</th></tr>
<tr><th>correcto</th><th>incorrecto</th><th>Si</th><th>No</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Analítica Énfasis en la fórmula</td><td colspan="2">Énfasis en la aplicación de una fórmula</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>Con justificación previa</td><td>sin justificación previa</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Analítica Enfoque Narrativo</td><td colspan="2">Énfasis en la descripción cada uno de los pasos de la solución</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Enumerativa: conteo de puestos vacíos</td><td colspan="2">Interesado en contar parejas de puestos vacíos</td><td>0</td><td>14</td><td>3</td><td>11</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td colspan="2">Obtener información de un Dibujo que permita decidir hacer un listado, aplicar una fórmula u otro tipo de resolución.</td><td>0</td><td>13</td><td>3</td><td>10</td><td>13</td></tr>
<tr><td>Sin clasificación o sin estrategia</td><td colspan="2">La estratégia no se identifica con la clasificación propuesta.</td><td>0</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td></tr>
</table>

2.4.4 Estrategia analítica

a. Estrategia analítica con énfasis en la aplicación de fórmulas.

I. Caracterización

Alumnos que antes de aplicar una fórmula, no proponen, por ejemplo, casos particulares, diagramas, tablas, listados, la caracterización de arreglos (ordenados sin repeticiones y elementos distinguibles) que sugieren un patrón que justifique la aplicación de una determinada fórmula, entonces se dirá que la estrategia utilizada es del tipo analítica.

II. Alumnos clasificados en esta estrategia

La siguiente tabla resume las respuestas de los alumnos que eligieron esta estrategia. A continuación se hará un análisis de la información del alumno 45.

Tabla 2-5: Alumnos que eligieron la estrategia analítica con énfasis en la aplicación de fórmulas. (Autor)

Estrategia Analítica, Enfoque en la aplicación de formulas						
Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Verificación
45	Antes de usar la fórmula no hace mención a que el problema pide contar arreglos ordenados y sin repetición. El lector debe deducir este dato del uso de la fórmula empleada.	Con el uso de la fórmula desconoce que por tratarse de personas, los elementos de los arreglos son distinguibles y que como es usual en los buses interdepartamentales, los puestos están numerados. El lector debe deducir estos datos de lo escrito por el alumno, especialmente en el uso de la formula y la revisión de la respuesta	Hace uso de casillas distribuidas particularmente y repite esta distribución de celdas en las cuales asigna una x para representar a una persona ocupando un puesto, esto con el fin de verificar la respuesta	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta. Debido al uso de la fórmula inadecuada	La , ratifica la respuesta dada, y con ella los errores de la respuesta

Tabla 2-6: (Continuación)

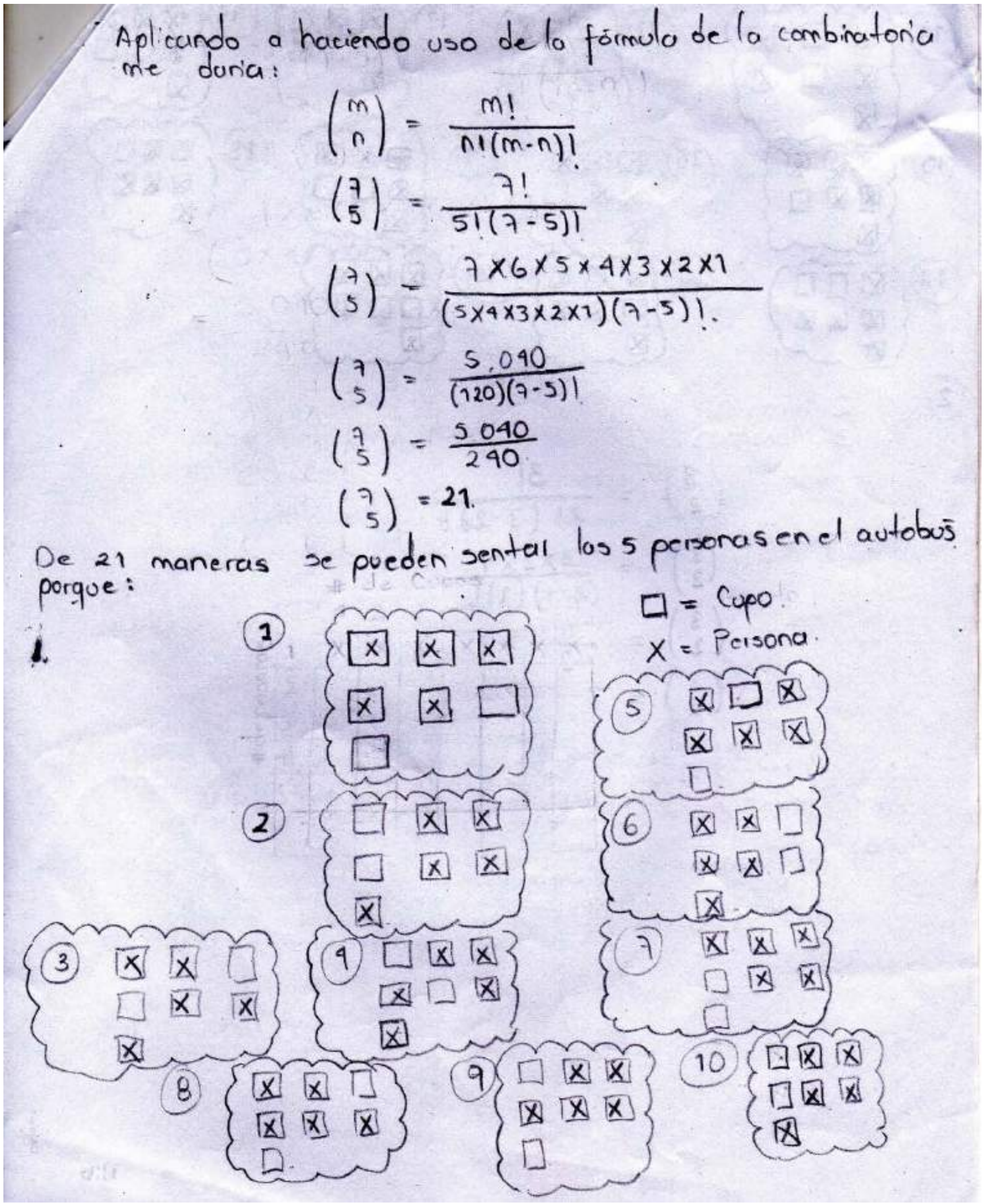
Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Verificación
10	Argunenta de forma escrita haciendo mención a componentes importantes de la combinatoria como lo son el orden y la repeticion, ejcuta la formula n^k para determinar el numero de formas distintas en que se pueden sentar las 5 personas en los 7 puestos,	Asigna a cada uno de los objetos presentes en el problema una variable en la ecuación que formula, pero no menciona si los elementos de los arreglos son distinguibles y que como es usual en los buses interdepartamentales, los puestos están numerados.	Del inicio, del medio o del final de la descripción no hacen parte dibujos, diagramas, tablas,	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta. Debido al uso de la fórmula inadecuada	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan

Tabla 2-7: (Continuación)

Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Verificación
18	Antes de usar la fórmula no hace mención a que el problema pide contar arreglos ordenados y sin repetición. El lector debe deducir este dato del uso de la fórmula empleada.	Con el uso de la fórmula desconoce que por tratarse de personas, los elementos de los arreglos son distinguibles y que como es usual en los buses interdepartamentales, los puestos están numerados. El lector debe deducir estos datos de lo escrito por el alumno.	Del inicio, del medio o del final de la descripción no hacen parte dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos.	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta. Debido al uso de la fórmula inadecuada	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan
Los estudiantes 30 y 43 usaron esta misma estrategia de forma similar a los estudiantes cuyos resultados se describieron en esta tabla						

III. Análisis de la información del alumno 45. (Ver anexo D)

La respuesta del alumno 45 fue la siguiente:



Aplicando o haciendo uso de la fórmula de la combinatoria me daría:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!}$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(5\times4\times3\times2\times1)(7-5)!}$$

$$\binom{7}{5} = \frac{5,040}{(120)(7-5)!}$$

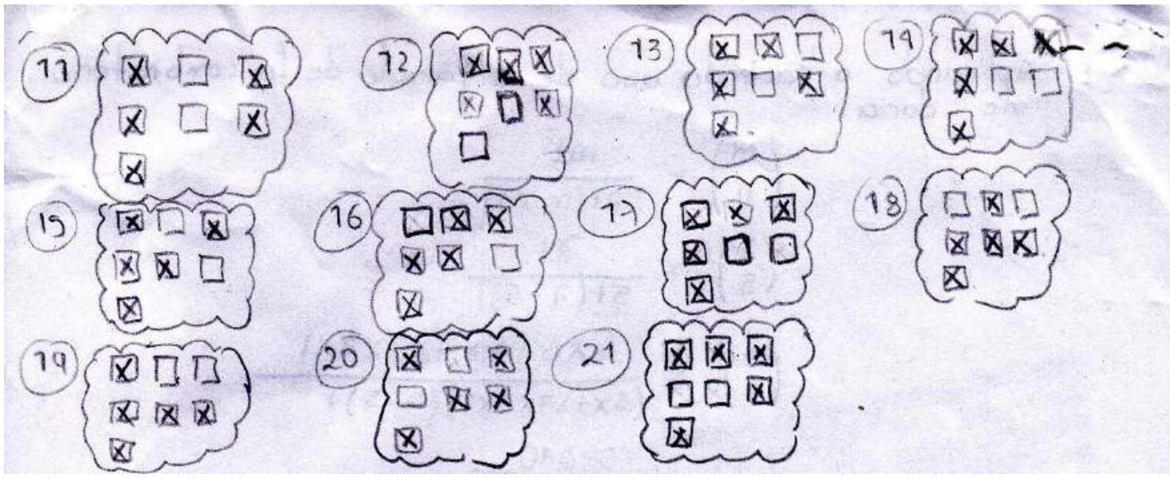
$$\binom{7}{5} = \frac{5\,040}{240}$$

$$\binom{7}{5} = 21.$$

De 21 maneras se pueden sentar los 5 personas en el autobús porque:

□ = Cupo

X = Persona



En cuanto a las categorías propuestas por el alumno se analiza lo siguiente:

i. Arreglos.

En este caso el estudiante usa la expresión, “haciendo uso de la fórmula de la combinatoria” reconociendo en primer lugar que se trata de un problema combinatorio y asumiendo que es la única fórmula existente o que recuerda.

Al utilizar $\binom{7}{5}$, el alumno pasa por alto que en este problema los arreglos son ordenados, sin repetición y sus elementos distinguibles. Esta falta de relación entre fórmula y tipo de arreglo, lo lleva a un resultado incorrecto que lo confirma en su revisión.

ii. Elementos de los arreglos.

El estudiante no hace alusión a los elementos de los 21 arreglos que propone, sin embargo, se asume, debido al uso de la fórmula $\binom{7}{5}$, que el estudiante considera que los arreglos son ordenados, sin repetición y sus elementos distinguibles.

iii. Representaciones.

Como se mostrara en la solución del problema, en la , el estudiante se apoya en una secuencia de dibujos, en los cuales considera a las personas indistinguibles al asignarle una **X** para representar a cada una de ellas y asigna un cuadrado para representar cada uno de los puestos, distinguiendo estos últimos por su posición dentro del bus.

iv. Solución.

En este Trabajo, la solución de un problema combinatorio se está considerando como un conjunto del cual hacen parte los siguientes componentes: estrategia, arreglos, elementos de los arreglos, representaciones, respuesta y. Para el alumno 45, la solución propuesta tiene las características de los componentes que aquí se analizan

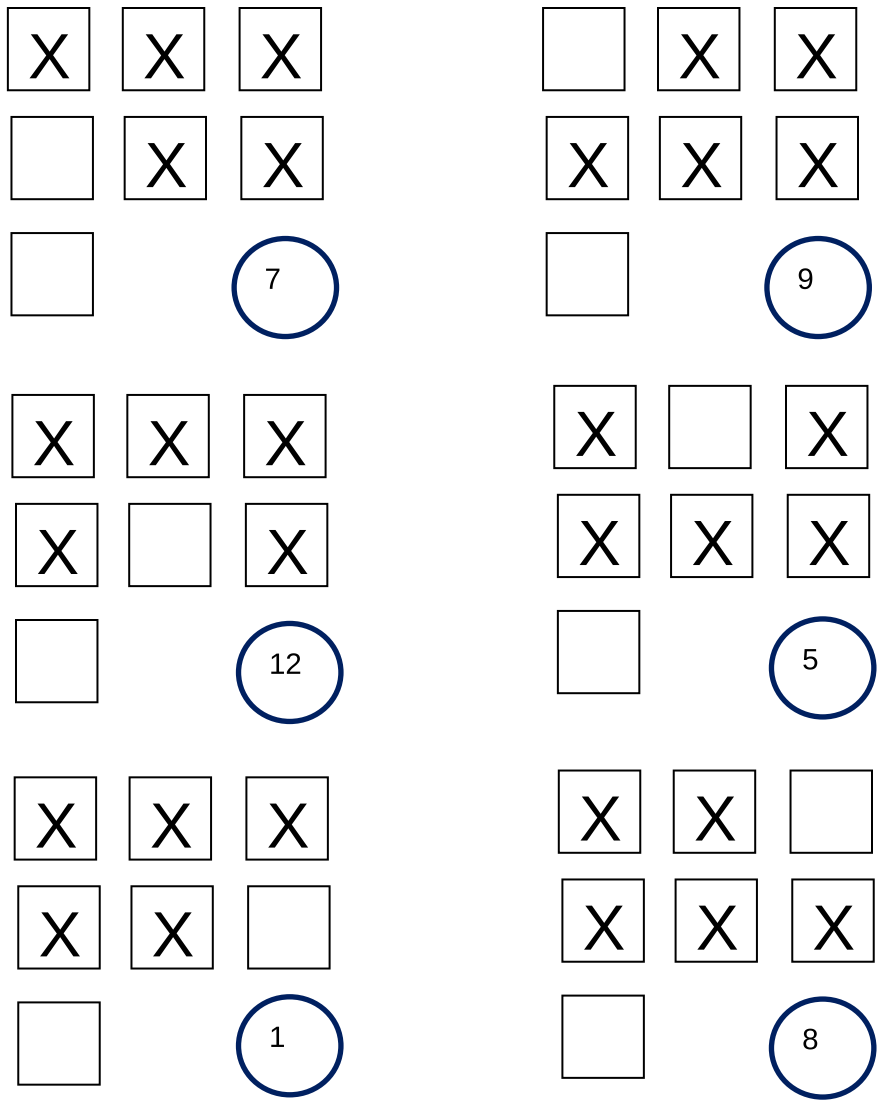
v. Respuesta.

La aplicación de la fórmula $\binom{m}{n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = 21$, lo conduce a una respuesta incorrecta pues solo tiene en cuenta una pequeña porción de arreglos, esto debido a la falta de relación entre fórmula y tipo de arreglo, atendiendo y dando respuesta a un problema distinto, donde el orden en que se expongan los elementos en los arreglos no importa.

vi. Revisión

De los 21 arreglos propuestos por el estudiante se va a organizar un grupo de 6 arreglos, haciendo variar, sistemáticamente dos asientos vacíos, uno de ellos fijo. Con este conjunto de arreglos, se ilustrará lo enunciado en el numeral anterior (Solución) y se completará la cantidad de arreglos que le hicieron falta al alumno.

Figura 2-5: Subconjunto de 6 arreglos obtenidos de los 21 propuestos por el estudiante 45. (Estudiante 45)



Como el estudiante considera que los pasajeros son indistinguibles, entonces cada uno de los 6 anteriores arreglos no genera ningún nuevo si entre los pasajeros hay un cambio de posición. (Manteniendo fijos los asientos vacíos)

Pero, como para este problema los elementos (personas) son distinguibles entonces, si por ejemplo, en el arreglo 7 se dejan fijas las sillas vacías y se cambian de posición los pasajeros; se obtendrán $5\ X\ 4\ X\ 3\ X\ 2\ X\ 1 = 5!$ Maneras distintas de sentarse cinco personas en cinco sillas disponibles.

En un gráfico diferente al propuesto por el estudiante, se ilustra el anterior resultado. Son 7 casillas que representan los 7 puestos del bus, se escogen dos cualquiera vacías y en las cinco restantes se acomodan los cinco pasajeros; se van a formar arreglos ordenados sin repetición y con elementos distinguibles.

Figura 2-6: Cantidad de posiciones que pueden ocupar los 5 pasajeros, estando vacíos los asientos 1 y 2 en este caso

1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º

- La posición 3º la puede ocupar cualquiera de los cinco pasajeros.
- Ocupando la posición 3º y sin repetición, la posición 4º, la puede ocupar cualquiera de los cuatro pasajeros restantes.
- Ocupadas las posiciones 3º y 4º y sin repetición, la posición 5º, la puede ocupar cualquiera de los tres pasajeros restantes.
- Ocupadas las posiciones 3º, 4º y 5º sin repetición, la posición 6º, la puede ocupar cualquiera de los dos pasajeros restantes.
- Ocupadas las posiciones 3º, 4º, 5º y 6 sin repetición, la posición 7º, la puede ocupar el último pasajero.

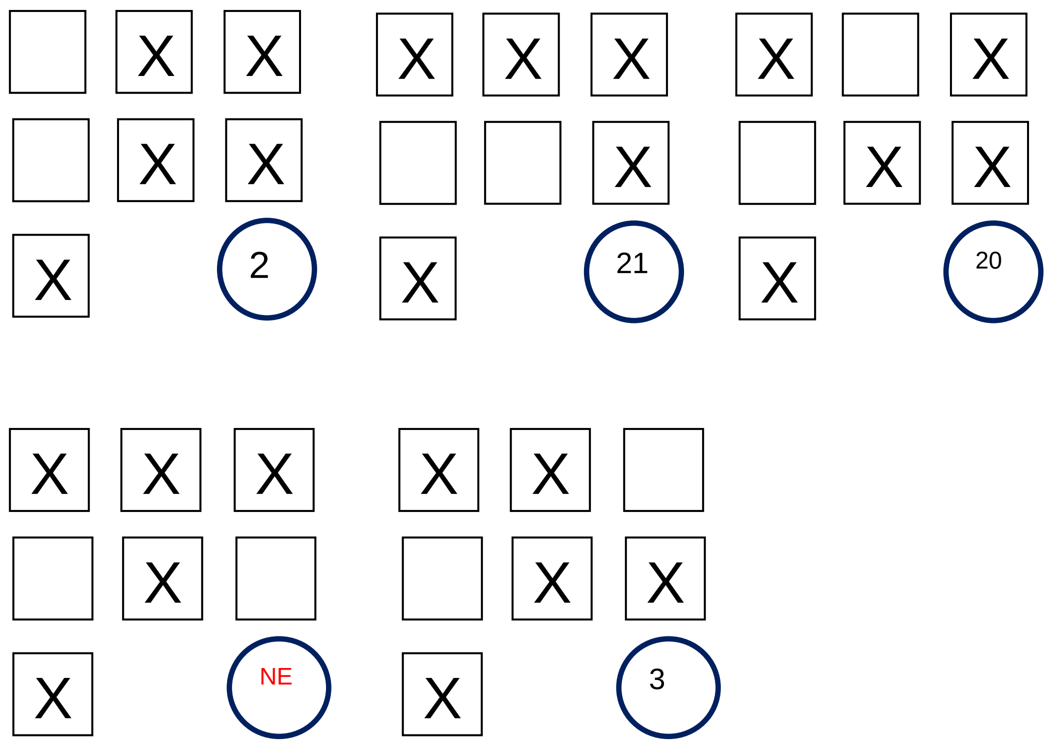
Por el principio de la multiplicación en total son $5\ X\ 4\ X\ 3\ X\ 2\ X\ 1 = 5! = 120$ posiciones distintas de cinco pasajeros en cinco sillas disponibles, de siete existentes.

De esta manera cada uno de los 21 arreglos propuestos por el estudiante, genera 120 posiciones distintas. Así el total de arreglos sería $120\ X\ 21 = 2520$

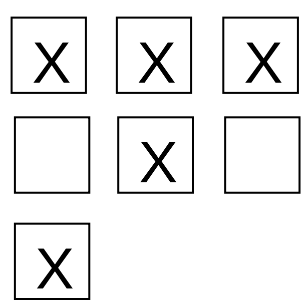
A continuación se completa la organización de 21 arreglos propuestos por el alumno 45

Subconjuntos de 5 arreglos

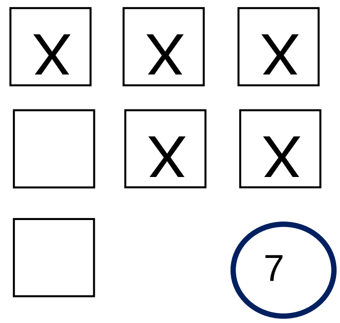
Figura 2-7: Subconjunto de 5 arreglos obtenidos de los 21 propuestos por el estudiante 45 (Autor).



De acuerdo al orden que se ha seguido en la reagrupación de los arreglos, se puede evidenciar que el estudiante número 45 repite uno de estos, el arreglo 2 es idéntico al arreglo 10, además, olvida el arreglo:



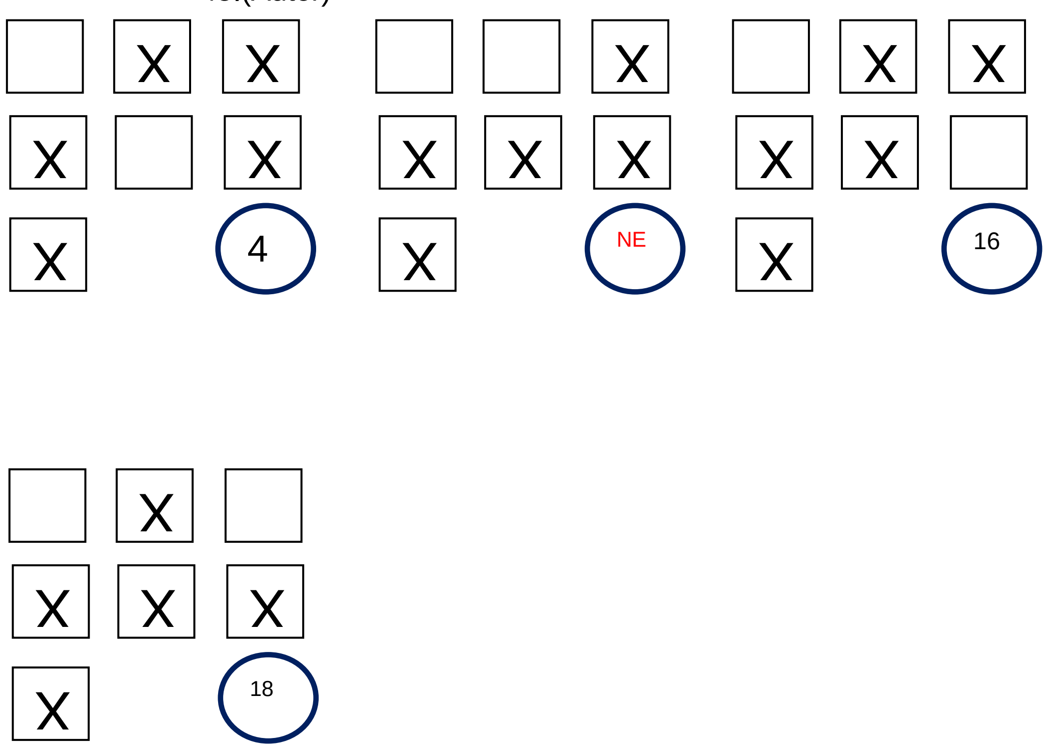
Se presume que estos dos errores se deben a la falta de sistematización con la que ha escrito los 21 arreglos. Nótese también, que en este nuevo ordenamiento en el subconjunto anterior debería estar el elemento



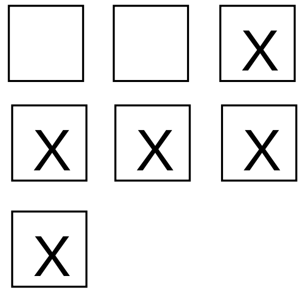
El cual ya fue contado en el subconjunto de 6 elementos descrito en la **Figura 2-5,** por tal razon no es tenido en cuenta en este subconjunto.

Subconjuntos de 4 arreglos

Figura 2-8: subconjunto de 4 arreglos obtenidos de los 21 propuestos por el estudiante 45.(Autor)



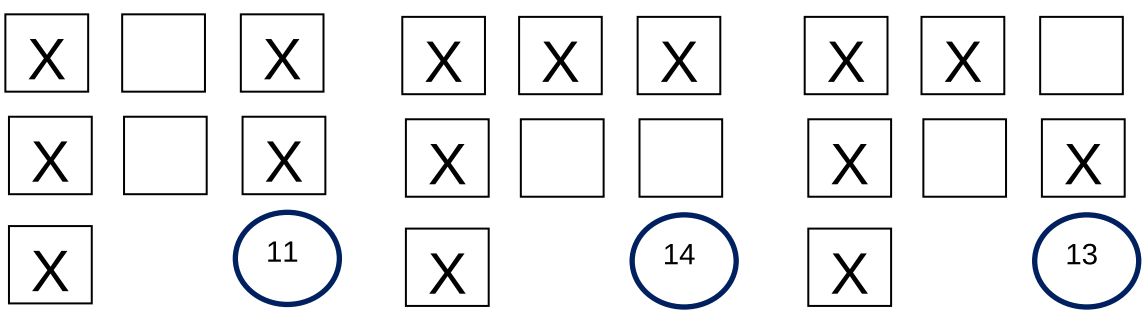
De acuerdo al orden que se ha seguido en la reagrupación de los arreglos, se puede evidenciar el olvido de uno de los arreglos, en este caso no escribe el arreglo:



Nótese que en este nuevo ordenamiento, el subconjunto anterior debería estar los elementos 9 y 2 del conjunto de 21 elementos organizado por el estudiante 45 sin embargo ya fueron contados en los subconjuntos de 6 elementos y de 5 elementos respectivamente.

Subconjuntos de 3 arreglos

Figura 2-9: subconjunto de 3 arreglos obtenidos de los 21 propuestos por el estudiante 45.(Autor)

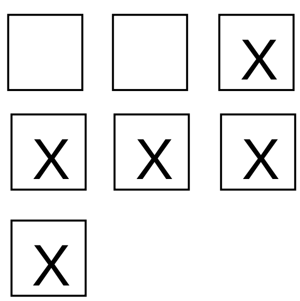


De acuerdo al orden que se ha seguido en la reagrupación de los arreglos, se puede evidenciar que el estudiante número 45 repite uno de estos, el arreglo 14 es idéntico al arreglo 17. Nótese también. que en este nuevo ordenamiento, en el subconjunto anterior debería estar los elementos 12 , 21 y 4 del conjunto de 21 elementos organizado por el estudiante 45 sin embargo ya fueron contados en los subconjuntos de 6 elementos, de 5 y de 4 elementos respectivamente.

Subconjuntos de 2 arreglos

Figura 2-10: subconjunto de 2 arreglos obtenidos de los 21 propuestos por el estudiante 45.(Autor)

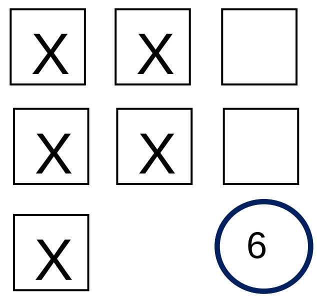
Nótese que en este nuevo ordenamiento, en el subconjunto anterior debería estar los elementos 5, 20 y 11 del conjunto de 21 elementos organizado por el estudiante 45 sin embargo ya fueron contados en los subconjuntos de 6 elementos, de 5 y de 3 elementos respectivamente. Además el elemento olvidado,



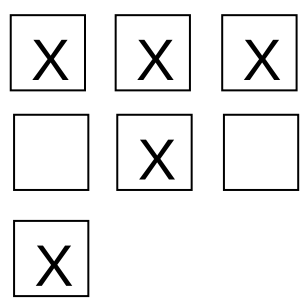
Que se escribió en el subconjunto de 4 elementos en la **Figura 2-8**

Subconjuntos de un arreglo

Figura2-11: Subconjunto de un arreglo obtenidos de los 21 propuestos por el estudiante 45.(Autor)



Nótese que en este nuevo ordenamiento, en el subconjunto anterior debería estar los elementos 1 NE,16,14 y 15 del conjunto de 21 elementos organizado por el estudiante 45 sin embargo ya fueron contados en los subconjuntos de 6 elementos, de, ,4,3,2 elementos respectivamente. Además el elemento olvidado, que se escribió en el subconjunto de 5 elementos en la **Figura 2-7**



Por la regla de la suma en total hay $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = \frac{6\,(6+1)}{2} = 3\,X\,7 = 21$ este total se corresponde con la suma de los 6 primeros números naturales, que es un caso particular de $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\,(n+1\,)}{2}$.

Nótese que en la solución $\binom{7}{5} = 21$ este 21 cuenta, según el estudiante 45 , la cantidad de maneras como 5 personas "*indistinguibles*" se pueden acomodar en 7 puestos de un bus, pero el 21 de los 21 arreglos de la verificación de este alumno, es la cantidad de arreglos de 2 sillas indistinguibles que puede escoger entre 7 sillas indistinguibles; este 21 en términos de un número combinatorio es $\binom{7}{2}$.

b. Estrategia Analítica, enfoque narrativo.

I. Caracterización

En esta estrategia, el alumno describe cada uno de los pasos de la solución, concluyendo con una operación que es la aplicación de una fórmula o un principio de conteo (suma, multiplicación, división), cuyos términos corresponden a los pasos escritos y el resultado de la operación es la respuesta del alumno al problema.

El estudiante no siempre empieza su descripción con un dibujo del bus y de los pasajeros, un diagrama que los represente, una tabla, listados o algunos ejemplos de arreglos que solucionan el problema; en caso de hacerlo, el dibujo, el diagrama, la tabla, el listado o los ejemplos, son una guía para hacer la descripción de la solución.

II. Alumnos clasificados en esta estrategia

La siguiente tabla resume la respuesta de los alumnos que eligieron esta estrategia.

Tabla 2-8: Alumnos que eligieron la narración como estrategia de solución.(Autor).

Estrategia Analítica, Enfoque narrativo						
Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
1.	De la descripción no hace parte una frase que diga que el problema pide contar arreglos ordenados y sin repetición. El lector debe deducir este dato de lo escrito por el alumno.	De la descripción no hace parte una frase que diga que por tratarse de personas, los elementos de los arreglos son distinguibles y que como es usual en los buses interdepartamentales, los puestos están numerados. El lector debe deducir estos datos de lo escrito por el alumno.	Del inicio, del medio o del final de la descripción no hacen parte dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos.	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Correcta. (Véase, análisis)	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.

Tabla 2-9: (continuación**)**

Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
7.	De la descripción no hace parte una frase que diga que el problema pide contar arreglos ordenados y sin repetición. El lector debe deducir este dato de lo escrito por el alumno.	De la descripción no hace parte una frase que diga que por tratarse de personas, los elementos de los arreglos son distinguibles y que como es usual en los buses interdepartamentales, los puestos están numerados. El lector debe deducir estos datos de lo escrito por el alumno.	Del inicio, del medio o del final de la descripción no hacen parte dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos, solo se apoya a modo de revisión de una fórmula	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Correcta. Principio de la multiplicación $7 X 6 X 5 X 4 X 3$	Hace uso de la fórmula $\frac{7!}{(7-5)!}$ Para reafirmar su respuesta por lo demás, no hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.

Tabla 2-10: (continuación)

Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
6.	Se da cuenta de la importancia del orden al final del escrito, sin embargo no intenta corregir el error cometido desde el inicio	De la descripción no hace parte una frase que diga que por tratarse de personas, los elementos de los arreglos son distinguibles y que como es usual en los buses interdepartamentales, los puestos están numerados. El lector debe deducir estos datos de lo escrito por el alumno.	Hace uso del triángulo de pascal seleccionando la 7 fila en la posición 5, además hace un diagrama donde le asigna a cada pasajero una letra e intenta mediante flechas ilustrar algunos movimientos dentro del bus	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta	Hace uso de la fórmula $\frac{7!}{(7-5)!}$ Para reafirmar su respuesta por lo demás, no hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.

Tabla 2-11: (continuación)

Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
11.	En el escrito el estudiante menciona:"… el problema se resume a una permutación de objetos... pero no es evidente que reconozca arreglos ordenados y sin repetición	En la descripción no hace parte una frase que diga que por tratarse de personas, los elementos de los arreglos son distinguibles y que como es usual en los buses interdepartamentales, los puestos están numerados, sin embargo distingue los dos puestos que quedan desocupados después de haberse sentado los 5 pasajeros. El lector debe deducir estos datos de lo escrito por el alumno.	Se apoya únicamente en el uso de una fórmula($7! = \cdots$ para afirmar su respuesta	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta. Debido a que distingue los dos puestos vacíos, después de sentados los 5 pasajeros.	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.

Tabla 2-12: (continuación)

Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
21.	En la descripción no se hace explicita una frase en la cual Se mencione que el problema requiere contar arreglos ordenados y sin repetición	De la descripción no hace parte una frase que diga que por tratarse de personas, los elementos de los arreglos son distinguibles y que como es usual en los buses interdepartamentales, los puestos están numerados. El lector debe deducir estos datos de lo escrito por el alumno.	Durante el inicio de la descripción escritor utiliza un diagrama en el que muestra las posibilidad es que tiene una persona para sentarse en cualquiera de los siete puestos.	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta, 175 maneras diferentes	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.
Los estudiantes 23 y 41 usaron esta misma estrategia de forma similar a los estudiantes cuyos resultados se describieron en esta tabla						

De los anteriores alumnos, se hará un análisis de la información ofrecida por el alumno 1.

III. Respuesta del alumno 1

La propuesta de solución del alumno 1, fue la siguiente:

Cupo 7 Personas.
5 Pasajeros.
la Primer Persona tiene 7 obciones Para sentarse la segunda
Solo tendria 6, ya que el Primer Pasajero ya tiene ocupado una
Silla, el tercer Pasajero tendria 5 asientos en los cuales se
Puede sentar, el cuarto Pasajero tendria 4 obsiones en las
que podria ocupar, y el 5 ~~Persona~~ Pasajero tendra tres
obsiones no mas, ya que los Pasajeros anteriores ya han ocupado
4 puestos por tanto. las combinaciones que se pueden dar
estan justificadas por la operación
$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ formas se pueden sentar.

IV. Análisis de la información del alumno 1 (Ver anexo E)

i. Arreglos

Nótese que en el séptimo renglón de la solución aparece el término “combinación”. Si el alumno lo escribe como sinónimo de arreglo, entonces está correctamente utilizado, pero no hay que olvidar que en los libros de Combinatoria una “combinación” es un arreglo o configuración no ordenado y este problema pide contar arreglos ordenados y sin repetición.

Cuando el alumno escribe “la primera persona…la segunda…el tercer pasajero…el cuarto pasajero… y el 5 pasajero…” está distinguiendo y ordenando los cinco pasajeros para entrar al bus, pero no hay información en la descripción que permita inferir que el alumno es consciente que ordenar los pasajeros por fuera del bus no es garantía de obtener arreglos distintos dentro del bus. Órdenes distintos para entrar al bus pueden generar arreglos iguales dentro del bus.

Un arreglo se hace distinto de otro no porque los pasajeros entren al bus en órdenes distintos sino porque se sientan en sillas distintas. En este problema los pasajeros como las sillas son distinguibles.

Por ejemplo, si convenimos que (a, b), a= 1,2,3,4,5 y b= 1,2,3,4,5,6,7, significa que el pasajero “a” se sienta en la silla “b”, entonces el arreglo A={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)} es distinto del arreglo B={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,6)} y distinto de C={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,7)}.

En el arreglo A el pasajero “a” se sienta en la silla “a”, a=1,2,3,4,5, en este caso quedaron desocupadas las sillas 6 y 7; en el B el pasajero “a”, a=1,2,3,4, se sienta en la silla “a”, y el pasajero 5 se sienta en la silla 6, en este caso quedaron desocupadas las sillas 5 y 7 y en el C el pasajero “a”, a=1,2,3,4, se sienta en la silla “a’ y el pasajero 5 se sienta en la silla 7, en este caso quedan desocupadas las sillas 5 y 6.

ii. **Elementos de los arreglos**

El alumno distingue los pasajeros no por un nombre o una letra sino utilizando números: pasajero 1, pasajero 2, pasajero 3, pasajero 4 y pasajero 5, pero no distingue las sillas, por ejemplo, siguiendo con números, silla 1, silla 2, silla 3, silla 4, silla 5, silla 6 y silla 7.

iii. Representaciones.

En la descripción se aprecia que el alumno no hace alusión a características físicas, internas o externas, del bus como forma, tamaño, color, posición, modelo, marca o empresa de transporte a la cual pertenece; tampoco a características de los pasajeros como sexo, edad, peso, estatura, profesión, vestimenta o accesorios.

De esta manera, cada lector queda en total libertad de elegir, interpretar y utilizar el tipo y grado de generalidad de representación de los datos e incógnita del problema, que estime conveniente para llevar adelante la estrategia de solución que haya escogido.

Para el caso de los pasajeros puede, por ejemplo, dibujarlos con menores o mayores detalles; todos mujeres o todos hombres, o tres mujeres y dos hombres, o dos mujeres y tres hombres; asignarle nombre a cada uno; no dibujarlos ni ponerle un nombre sino llamarlos pasajero 1, pasajero 2, pasajero 3, pasajero 4 y pasajero 5; representarlos por letras como A, B, C, D y E.

iv. Solución

En este Trabajo, la solución de un problema combinatorio se está considerando como un conjunto del cual hacen parte los siguientes componentes: estrategia, arreglos, elementos de los arreglos, representaciones, respuesta y. Para el alumno 1, la solución propuesta tiene las características de los componentes que aquí se analizan.

v. Respuesta

La aplicación por parte del alumno 1 de la regla de la multiplicación da una respuesta correcta para este problema, 7x6x5x4x3=2520.

Teniendo en cuenta que una de las preguntas de interés para la EMR es ¿Qué organizan los objetos matemáticos?, consideramos importante para la enseñanza de las operaciones combinatorias retomar la “Metáfora del iceberg” utilizada en González y Ruíz (2015; 85-86) en donde se sugieren algunos conocimientos matemáticos “ocultos” detrás de los componentes y resultados de estas fórmulas. A este respecto, se transcribe lo siguiente:

“Como se acaba de sugerir mediante el ejemplo de repartir seis dulces de sabores distintos entre tres niños, el cociente, 2, indica el número

Total de dulces que hay que entregar a cada niño, pero no dice cómo se seleccionan, en qué orden entregarlos a cada niño ni cuántos grupos de dos dulces se pueden formar.

De la misma manera, en una división exacta como 3!/2! (3-2)!=3, el cociente 3, indica el número total de arreglos que son solución del problema, pero no dice cómo se forman estos arreglos, cuáles son, en qué orden deben presentarse ni cuántos arreglos equivalentes se pueden formar…”

En este caso, por ejemplo, si de las 2520 configuraciones se pide dar 12 de ellas, del resultado 2520 no se obtiene información de cuál es la estrategia más eficiente para construirlas, cuáles serían esas 12, en qué orden presentarlas y cuándo dos configuraciones son equivalentes.

vi. Revisión

Observando la información del alumno 1, se puede apreciar que no hay evidencias de los componentes que (Polya, 1979) propone para la fase de “visión retrospectiva”: “reexaminar el resultado y el camino que les condujo a ellas”, que “ningún problema puede considerarse completamente terminado” y “obtener el resultado de un modo distinto”. La ausencia de información acerca de esta fase, puede ser el resultado de que en la solución de problemas matemáticos en todos los niveles escolares, generalmente se subestima lo que se puede aprender del error, poco se cultiva la curiosidad o deseo de aprender y no se valora la sencillez, belleza o eficiencia de los razonamientos y las estrategias.

2.4.5 Estrategia Enumerativa

a. Estrategia Enumerativa: conteo de los puestos vacíos

I. **Caracterización**

En esta estrategia, desde el inicio del problema, el alumno hace explícito que está interesado en contar parejas de puestos vacíos. El estudiante hace un listado de todas las posiciones que pueden ocupar los pasajeros cuando hay dos sillas desocupadas o un listado de todos los arreglos de las sillas vacías.

Para el caso de los arreglos con pasajeros, puede ocurrir que se hagan todas las configuraciones, solo para dos puestos específicos y después se extienda el resultado para las demás parejas de puestos. A partir del conteo de arreglos de pasajeros con dos puestos vacíos, el estudiante propone una respuesta de selección al problema.

El estudiante no empieza su solución con un dibujo del bus y de los pasajeros, pero en un caso sí con un diagrama que los represente, que le sirve de guía para elaborar los listados de arreglos, de pasajeros con dos puestos vacíos o de puestos vacíos, que luego utilizará para proponer una respuesta al problema. Desde el inicio del problema, el estudiante hace explícito que está interesado en contar parejas de puestos vacíos.

II. **Alumnos clasificados en esta estrategia**

La siguiente tabla resume la respuesta de los alumnos que eligieron esta estrategia

.

Tabla 2-13: **Alumnos que eligieron la estrategia enumerativa con conteo de los puestos**

Estrategia Enumerativa: conteo de puestos vacíos						
Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
16	Puesto que el estudiante encuentra que ha hecho repeticiones entre los arreglos y puesto que a un mismo puesto no le asigna dos personas distintas se evidencia que tiene cuenta que también pide contar arreglos sin repetición.	En el listado el estudiante distingue las personas involucradas al identificar cada una con digito distinto del uno al cinco. Además distingue a los puestos con letras del alfabeto	Utiliza desde el inicio dígitos para identificar personas, casillas y letras para los puestos que esquematiza y relaciona en un listado.	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta, de 441 n arreglos diferentes	Al mostrar que ha repetido arreglos,

Tabla 2-7: Continuación

Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
4	Es posible identificar con el listado y la descripción que el estudiante hace de él que el orden en que se ubiquen las personas no es importante, no hay evidencia que muestre que en un misma configuración se pueda repetir un elemento, aunque si se nota la importancia de evitar la repetición entre los arreglos.	En el listado y la descripción que el estudiante hace del mismo es evidente que las personas no se distinguen entre sí, para él la distinción de los puestos Esla importante.	Utiliza dígitos del uno al siete para representar los puestos, no utiliza representaciones para las personas.	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta: 21 arreglos diferentes.	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.

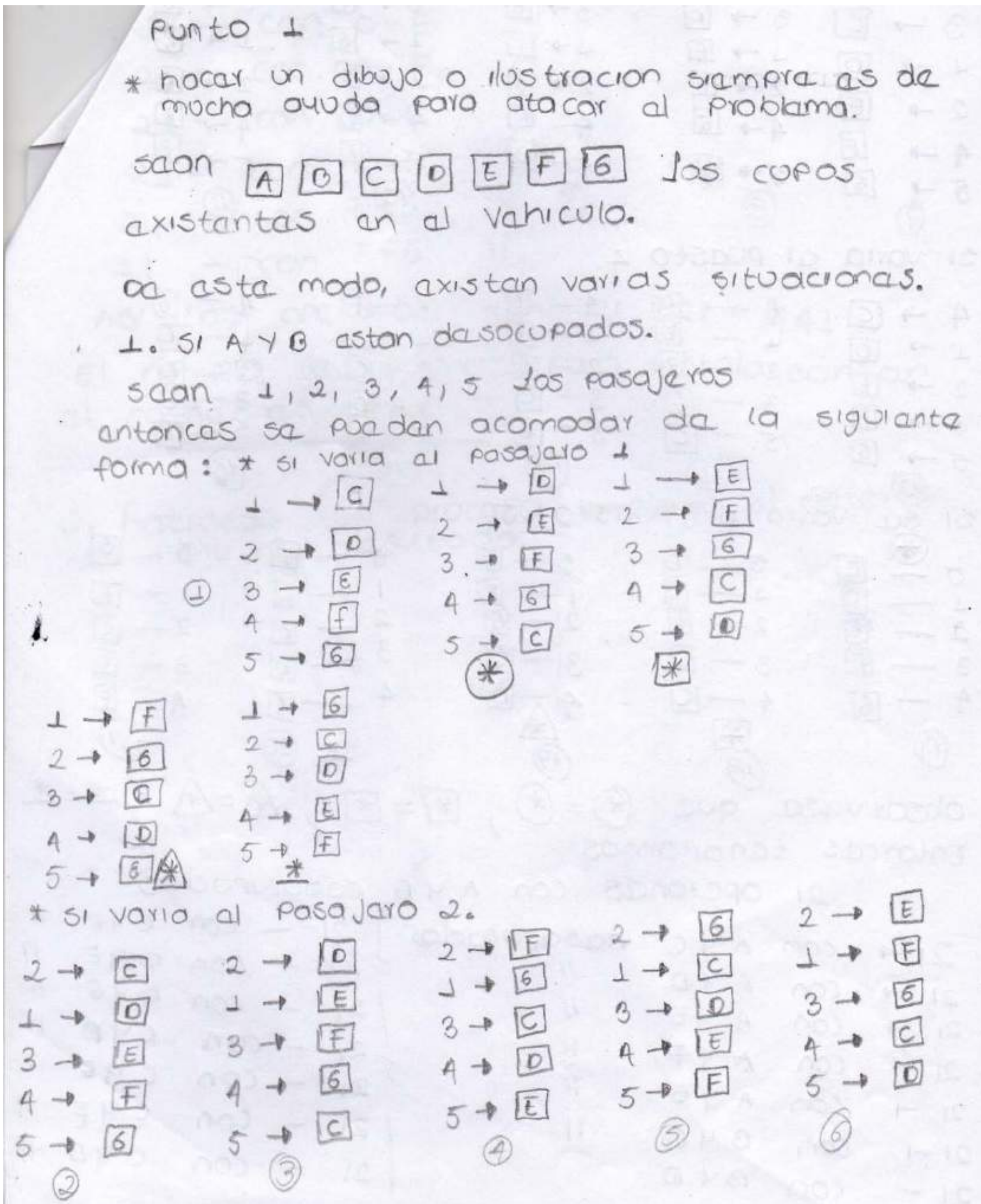
Tabla 2-7: Continuación.

Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
8	En el listado que el estudiante realiza se evidencia que el orden es importante, aunque lo hace con respecto a los puestos, además se evidencia que para él la repetición también es importante	En el listado se evidencia que las personas se distinguen entre sí aunque no lo hace con los puestos.	Para realizar el listado el estudiantes utiliza las letras A,B,C,D y E para representar las personas y guion bajo para representar cada puesto.	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta, 21 arreglos diferentes.	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.
	Los estudiantes 35,12,19,27,44,22,40,36,14,29, y 24 usaron esta misma estrategia de forma similar a los estudiantes cuyos resultados se describieron en esta tabla					

De los anteriores alumnos, se hará un análisis de la información ofrecida por el alumno 16

III. **Respuesta del alumno 16 (Ver anexo F)**

La propuesta de solución del alumno 16, fue la siguiente:



ahora si vario al 3

(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
3 → $\boxed{C}$	3 → $\boxed{D}$	3 → $\boxed{E}$	3 → $\boxed{F}$	3 → $\boxed{G}$
1 → $\boxed{D}$	1 → $\boxed{E}$	1 → $\boxed{F}$	1 → $\boxed{G}$	1 → $\boxed{C}$
2 → $\boxed{E}$	2 → $\boxed{F}$	2 → $\boxed{G}$	2 → $\boxed{C}$	2 → $\boxed{D}$
4 → $\boxed{F}$	4 → $\boxed{G}$	4 — $\boxed{C}$	4 → $\boxed{D}$	4 → $\boxed{E}$
5 → $\boxed{G}$	5 → $\boxed{C}$	5 — $\boxed{D}$	5 → $\boxed{E}$	5 → $\boxed{F}$

si varia al puasto 4.

(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
4 → $\boxed{C}$	4 — $\boxed{D}$	4 — $\boxed{E}$	4 — $\boxed{F}$	4 — $\boxed{G}$
1 → $\boxed{D}$	1 — $\boxed{E}$	1 — $\boxed{F}$	1 — $\boxed{G}$	1 — $\boxed{C}$
2 → $\boxed{E}$	2 — $\boxed{F}$	2 — $\boxed{G}$	2 — $\boxed{C}$	2 — $\boxed{D}$
3 → $\boxed{F}$	3 — $\boxed{G}$	3 — $\boxed{C}$	3 — $\boxed{D}$	3 — $\boxed{E}$
5 → $\boxed{G}$	5 — $\boxed{C}$	5 — $\boxed{D}$	5 — $\boxed{E}$	5 — $\boxed{F}$

si se varia al puasto 5.

(17) *	(18) $\boxed{*}$	(19) *	(20) *	(21)
5 — $\boxed{C}$	5 — $\boxed{D}$	5 — $\boxed{E}$	5 — $\boxed{F}$	5 — $\boxed{G}$
1 — $\boxed{D}$	1 — $\boxed{E}$	1 — $\boxed{F}$	1 — $\boxed{G}$	1 — $\boxed{F}$
2 — $\boxed{E}$	2 — $\boxed{F}$	2 — $\boxed{G}$	2 — $\boxed{C}$	2 — $\boxed{C}$
3 — $\boxed{F}$	3 — $\boxed{G}$	3 — $\boxed{C}$	3 — $\boxed{D}$	3 — $\boxed{D}$
4 — $\boxed{G}$	4 — $\boxed{C}$	4 — $\boxed{D}$	4 — $\boxed{E}$	4 — $\boxed{E}$

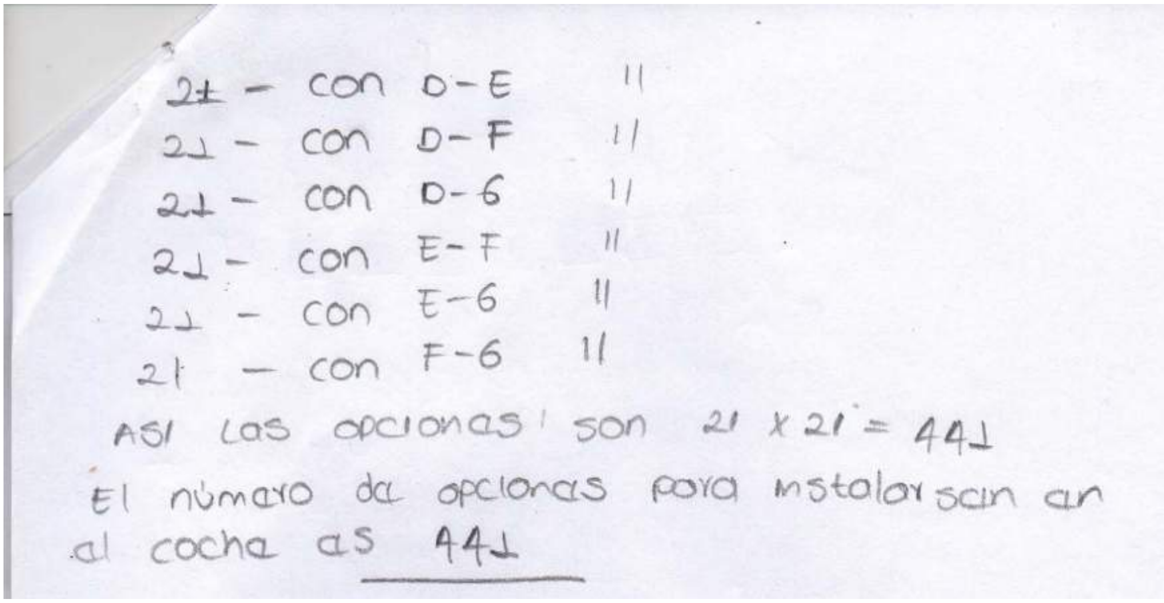
obsarvase que * = * , $\boxed{*} = \boxed{*}$, * = * , * = *

Entoncas tandriomos

21 opcionas con A y B dasocupados

21 → con A y C dasocupados
21 → con A y D //
21 → con A y E //
21 → con A y F //
21 → con A y G //
21 → con B y C //
21 → con B y D
21 —

21 — con B y E //
21 — con B y F //
21 — con B y G //
21 — con C y D //
21 — con C y E //
21 — con C y F //
21 — con C y D //
21 —



21 - con D-E 11
21 - con D-F 11
21 - con D-6 11
21 - con E-F 11
21 - con E-6 11
21 - con F-6 11
Asi las opcionas son 21 x 21 = 441
El número da opcionas para instalar sean an al cocha as 441

IV. **Análisis de la información del alumno 16 (Anexo F)**

i. Arreglos

Se aprecia que el alumno reconoce que el problema pide arreglos ordenados, puesto que, en cada uno de los grupos de arreglos por pasajero forma parejas ordenadas y se aprecia que son sin repetición cuando, salvo un error en la última correspondencia para el pasajero 5, se da cuenta que los arreglos del pasajero 1 son los mismos del pasajero 5, pero en distinto orden.

Desocupados los puestos A y B y en forma de parejas ordenadas, unos de estos arreglos son los siguientes:

- Para el pasajero 1 el primer arreglo quedaría:

$$\{(1, C), (2, D), (3, E), (4, F), (5, G)\}.$$

- El primer arreglo para el pasajero 2 es:

$$\{(1, D), (2, C), (3, E), (4, F), (5, G)\}$$

- Para el pasajero 3 el primer arreglo sería:

$$\{(1, D), (2, E), (3, C), (4, F), (5, G)\}$$

- Para el pasajero 4, el primer arreglo es:

$$\{(1, D), (2, E), (3, F), (4, C), (5, G)\}$$

- El primer arreglo para el pasajero 5 sería:

$$\{(1, D), (2, E), (3, F), (4, G), (5, C)\}$$

En cuanto a arreglos repetidos, el primer arreglo del pasajero 1, $\{(1, C), (2, D), (3, E), (4, F), (5, G)\}$ es igual al quinto arreglo del pasajero 5.

De acuerdo con la regla que aplica el alumno para la formación de parejas la correspondencia no es $\{(1, F), (2, C), (3, D), (4, E), (5, G)\}$ si no $\{(1, C), (2, D), (3, E), (4, F), (5, G)\}$ que es el primer arreglo del pasajero 1

Aunque explícitamente, el alumno no dice que el problema pide contar arreglos ordenados y sin repetición, en el primer diagrama si explicita que los puestos son distinguibles nombrándolos con las letras A,B,C,D,E,F y G. En el séptimo renglón también explicita que los pasajeros son distinguibles y los nombra con los números 1, 2, 3, 4 y 5.

ii. Elementos de los arreglos

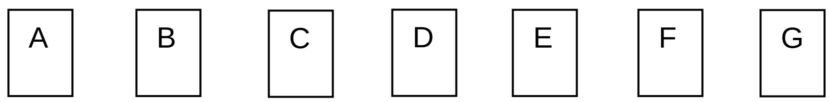
Para el alumno, tanto los pasajeros como las sillas son distinguibles.

El alumno no distingue a los cinco pasajeros por su nombre o una letra sino con números: “Sean 1, 2, 3, 4, 5 los pasajeros “.

Con relación a las siete casillas, puestos o “cupos” los distingue con las letras mayúsculas A, B, C, D, E, F, G, sin que quede explícito que el orden de las letras en el alfabeto (orden lexicográfico), sea el mismo orden de los puestos en el bus. Si fuera así, por ejemplo el primer puesto en el bus sería A, el cuarto D y el séptimo G.

iii. Representaciones.

La representación gráfica que utiliza el alumno 16 es la siguiente:



“Sean Los cupos existentes en el vehículo”.

En su diagrama, el alumno no hace alusión a características físicas, internas o externas, del bus como forma, tamaño, color, posición, modelo, marca o empresa de transporte a la cual pertenece; tampoco a características de los pasajeros como sexo, edad, peso, estatura, profesión, vestimenta o accesorios.

Conviniendo que estas casillas están ordenadas y que la que está más a la izquierda es la primera, segunda la que le sigue, y así sucesivamente, este tipo de diagrama tiene la suficiente generalidad, y es tan económico y eficiente, que aumentando o disminuyendo casillas, se puede utilizar para estudiar problemas en los que se pida arreglos ordenados con o sin repetición, por ejemplo:

- **Problema de puestos y pasajeros**. En este caso se pedía distribuir 5 pasajeros en 7 puestos, pero también se puede pedir 3 pasajeros en 5 puestos, 50 pasajeros en 70 puestos, 500 pasajeros en 700 puestos, y en general, m pasajeros en n puestos, con $m \leq n$.

  Problemas parecidos a los de distribuir pasajeros en los puestos de un bus, son los de acomodar estudiantes en un salón de clase, personas en un auditorio, o en una sala de cine con sillas distinguibles.

- **Problema de parqueaderos y carros.** Pasando de personas a objetos cotidianos, además de acomodar personas, por ejemplo, en buses , salones de clase, auditorios y salas de cine, el problema puede pedir ubicar 5 carros en un edificio cuyo parqueadero tiene 7 cupos, 3 carros en 5 parqueaderos, 50 carros en 70 parqueaderos, y en general m carros en n parqueaderos con $m \leq n$.

Problemas de este mismo tipo son, por ejemplo, acomodar cartas, fotos o postales distinguibles en sobres distinguibles, guardar útiles escolares en los casilleros de una biblioteca, prendas de vestir o accesorios en los casilleros de una biblioteca o una librería o guardar equipajes en los guardaequipajes de una terminal de buses o un aeropuerto.

- **Problema de dígitos y números**. Además de pedir arreglos cuyos objetos son personas u objetos cotidianos, un problema puede pedir arreglo de números, por ejemplo, se pide formar números enteros no negativos de 5 cifras a partir de 7 dígitos, números de 3 cifras a partir de 5 dígitos, números de 4 cifras a partir de 3 dígitos (en este caso los arreglos son con repetición), en general, formar números de m cifras dados n dígitos, con $m \leq n$; si $m > n$, los arreglos serán con repetición; si $m \leq n$, se pueden pedir arreglos con o sin repetición.

Un problema de este mismo tipo, pero utilizando letras, es pedir arreglos de letras y números para placas de carros y motos; también, problemas de formar, por ejemplo, parejas, ternas o $m - uplas$ de un conjunto con n elementos, $m \leq n$.

iv. Solución

En este Trabajo, la solución de un problema combinatorio se está considerando como un conjunto del cual hacen parte los siguientes componentes: estrategia, arreglos, elementos de los arreglos, representaciones, respuesta y. Para el alumno 1, la solución propuesta tiene las características de los componentes que aquí se analizan.

v. Respuesta

El alumno aplica la regla de la multiplicación $21\,X\,21 = 441$, pero al no ser los factores de esta que corresponden para este problema el resultado es incorrecto.

A partir de la estrategia utilizada por el alumno 16, a continuación se van a examinar los pasos del desarrollo de la estrategia para establecer cómo justifica el alumno los factores en el producto de su respuesta y, allí donde sea posible, proponer interpretaciones, justificaciones, representaciones, patrones, pasos o cálculos, para inferir factores cuyo producto conduzca al resultado correcto:

$$7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3 = 2520 \qquad (1)$$

- Distintas maneras de obtener el resultado en (1) son por ejemplo:

$$7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3 = \frac{(7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3)\ X\ 2}{2} = \frac{7!}{2!}$$

$$7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3 = \frac{7!}{(7-5\,)!} \qquad (2)$$

$$7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3\ =\ (7\ X\ 6\ )X\ (5\ X\ 4\ X\ 3) =$$

$$(7\ X\ 3\ X\ 2)X\ (3\ X\ 4\ X\ 5\ ) =$$

$$7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3 = (7\ X\ 3)X\ 5! \qquad (3)$$

$$7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3 = (7\ X\ 6\ )X\ (5\ X\ 4\ X\ 3) =$$

$$(7\ X\ 3\ X\ 2)X\ (3\ X\ 4\ X\ 5\ ) =$$

$$(7\ X\ 3\ )X\ (2\ X\ 3\ )\ X\ (5\ X\ 4) =$$

$$7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3 = (7\ X\ 3\ )X\ 3!\ X\ (5\ X\ 4) \qquad (4).$$

- Para facilitar reconocer o construir patrones, interpretaciones, justificaciones o cálculos, los 5 grupos de correspondencias propuestos por el alumno 16, se van a representar por medio de matrices.

La notación 1_{AB} para una matriz, significa que las filas de la matriz son las correspondencias que propone el alumno 16 para el pasajero 1, cuando están desocupados los puestos A y B. El mismo significado tiene las notaciones 2_{AB}, 3_{AB}, 4_{AB} y 5_{AB} .

Matriz asociada al pasajero 1:

$$1_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{5\,X\,5} \end{array}$$

Matriz asociada al pasajero 2:

$$2_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{5\,X\,5} \end{array}$$

Matriz asociada al pasajero 3:

$$3_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{5\,X\,5} \end{array}$$

Matriz asociada al pasajero 4:

$$4_{AB} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{5\,X\,5} \end{array}$$

Matriz asociada al pasajero 5:

$$5_{AB} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{5\,X\,5} \end{array}$$

- **Unas características de estas matrices son las siguientes:**

  Sin contar la fila $(C,\ D,\ \ E,\ \ F,\ \ G)$ de los puestos, cada matriz es cuadrada de orden $5\ X\ 5$.

  Cada fila es una manera de ubicar 5 pasajeros en 7 puestos de un bus. En este caso los puestos desocupados son A y B.

Los elementos de la diagonal principal, son todos iguales y el valor de cada elemento es el número asignado al pasajero seleccionado para el grupo de correspondencias.

En 1_{AB} la diagonal principal tiene todos sus elementos iguales a 1, en 2_{AB} iguales a 2, en 3_{AB} iguales a 3, en 4_{AB} iguales a 4 y en 5_{AB} iguales a 5.

Los elementos de cada diagonal son todos iguales.

Las diagonales en las matrices triangular superior e inferior, que tienen los mismos valores en sus componentes, siempre son en total 5 elementos. Por ejemplo, la diagonal que en la matriz triangular superior de 1_{AB} corresponde al 3, tiene 3 elementos y su correspondiente en la inferior tiene 2 elementos, por tanto ellas dos en total tienen $3 + 2 = 5$ elementos.

La matriz 3_{AB} se obtiene de 2_{AB}, pasando como diagonal principal las diagonales superior e inferior de 2_{AB} que tienen como elemento el 3 y distribuyendo los 5 elementos de la diagonal superior de 2_{AB} en las diagonales que antes tenían al 3 como elemento. Las demás diagonales no varían. Esto mismo ocurre con dos matrices consecutivas.

- Se van a necesitar las siguientes definiciones:

Definición 1. Una matriz es matriz de solución si cada fila es un arreglo particular que soluciona el problema.

Las matrices 1_{AB} 2_{AB}, $3_{AB}, 4_{AB}$ y 5_{AB} son ejemplos de matrices de solución del problema del bus.

Definición 2. Dos matrices de solución son equivalentes si además de ser del mismo orden, Tienen las mismas filas pero en distinto orden.

Las matrices $1_{AB}\ y\ 5_{AB}$ son ejemplo de matrices equivalentes porque son del mismo orden (5 X 5) y la fila 1 de 1_{AB} es la misma fila 5 de 5_{AB}; la fila 2 de 1_{AB} es la misma fila 1 de 5_{AB}; la fila 3 de 1_{AB} es la misma fila 2 de 5_{AB}; la fila 4 de 1_{AB} es la misma fila 3 de 5_{AB} y la fila 5 de 1_{AB} es la misma fila 4 de 5_{AB}.

Como resultado de esta equivalencia, los 5 grupos de correspondencias propuesto por el alumno 16 se reducen a 4 y en vez de 21 arreglos distintos que contaba el alumno 16, solamente hay 20. Estos 20 arreglos que son soluciones particulares al problema, son las 20 filas de las matrices 1_{AB} 2_{AB}, $3_{AB}, y\ 4_{AB}$ (ya no se incluye a 5_{AB}por qué seria contar dos veces las filas de 1_{AB} ya que 5_{AB} tiene las mismas filas de 1_{AB} pero en distinta posición).

- ¿Las 20 correspondencias propuestas por el alumno 16? Agotan todas las funciones inyectivas que se pueden definir entre los conjuntos $\{1,2,3,4,5\}$ y $\{C,D,E,F,G\}$.

Utilizando una operación con matrices y tomando como caso particular las correspondencias para el pasajero 1, se van a mostrar otros 5 arreglos que se pueden agregar a los 5 que propone el alumno 16 para este pasajero.

La matriz 1_{AB} representa al grupo de correspondencias del alumno 16 para el pasajero 1, estando desocupados los puestos A y B.

$$1_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{5\,X\,5} \end{array}$$

La matriz transpuesta de 1_{AB} es :

$$
(1_{AB})^T = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{5\,X\,5} \end{array}
$$

Veamos si las cinco filas de $(1_{AB})^T$ son cinco arreglos distintos de los que ya se tiene. Se van a comparar componentes de cada fila de las matrices 1_{AB} y $(1_{AB})^T$; si al menos una componente de cada una de estas $5 - uplas$ es distinta, entonces, los arreglos son diferentes.

La fila 1 de 1_{AB} tiene a (1,2) como sus dos primeras componentes y ninguna de las filas de $(1_{AB})^T$ tiene a (1,2) como sus dos primeras componentes. Se puede verificar que las primeras componentes de las demás filas de 1_{AB} son distintas de las primeras componentes de las demás de $(1_{AB})^T$ .así, 1_{AB} y $(1_{AB})^T$ no son matrices equivalentes.

Con el mismo criterio de comparar las dos primeras componentes de cada fila de $(1_{AB})^T$ con las dos primeras componentes de cada fila de las matrices $2_{AB,}$ 3_{AB} y 4_{AB} y salvo la fila $(2 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \quad 3)$ de $(1_{AB})^T$ que difiere en la tercera componente de la fila $(\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 4\ )$ de 2_{AB} ,se concluye que $(1_{AB})^T$ tampoco es equivalente a $2_{AB,}3_{AB}$ y 4_{AB}.

De este modo $1_{AB}, 2_{AB,}$ 3_{AB}, y 4_{AB} y $(1_{AB})^T$son matrices distintas y, por tanto, los arreglos de $(1_{AB})^T$ son 5 nuevos arreglos que solucionan el problema y distintos a los 20 propuestos por el alumno 16.

Así, los 20 arreglos propuestos por el alumno 16 no agotan las funciones inyectivas de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ en $\{\ C, D, E, F, G\}$.

Intercambiar columnas en cualquiera de las matrices $1_{AB}, 2_{AB,}\ 3_{AB}$, y 4_{AB} es otra manera de obtener arreglos, que solucionan el problema; para saber si son nuevos o no, hay que compararlos con los que se tienen. Si difieren, al menos en una componente, son nuevos arreglos.

- A continuación a partir de las matrices $1_{AB}, 2_{AB,}\ 3_{AB}$, y 4_{AB} se va a proponer una manera de obtener nuevos arreglos que solucionan el problema, pero de una manera que se obtengan factores para una multiplicación que permita obtener una respuesta correcta al problema.

  En las matrices de $1_{AB}, 2_{AB,}$ y 3_{AB} hay un patrón que va a permitir obtener de manera sistemática arreglos y avanzar en un conteo sistemático del total de arreglos que soluciona el problema.

Nótese que las matrices $1_{AB}, 2_{AB,}$ y 3_{AB} tienen cada una, arreglo en los que son iguales sus dos primeras componentes:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ En } 1_{AB} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ En } 2_{AB} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ En } 3_{AB.} \end{array}$$

Estando fija la pareja en C,D la tercera componente varia en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ pero en las cuatro matrices no están los arreglos

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

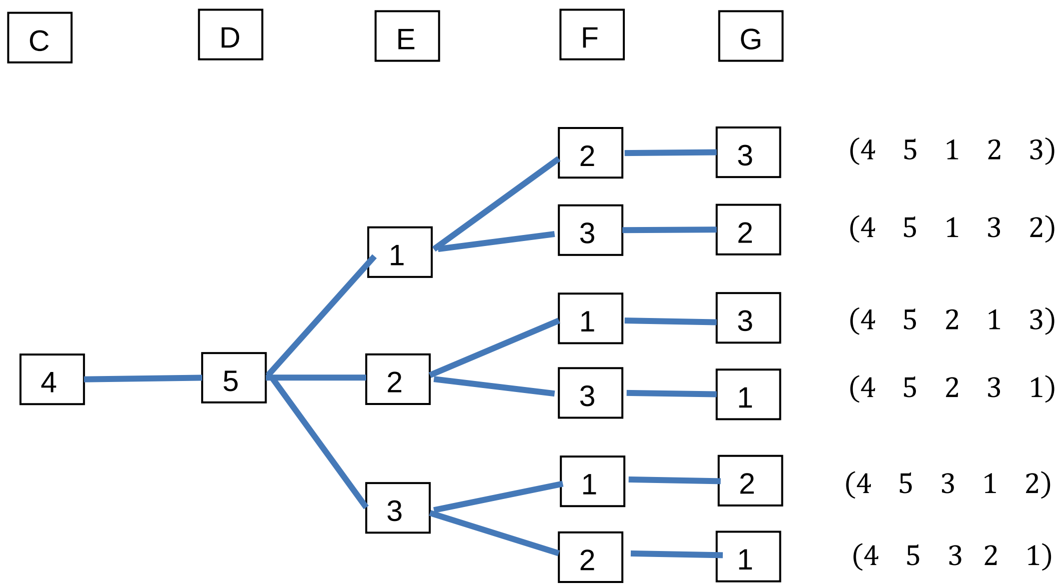
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Que resultan de cambiar las dos últimas componentes de los arreglos originales, dejando fijas las demás.

El siguiente diagrama de árbol permitirá saber cuáles y cuántos arreglos se pueden formar que tengan como primera componente la pareja $(4\ ,5)$.

Figura 2-12: Diagrama de árbol representando los arreglos con primeras componentes la pareja (4,5) (Autor)



Estos 6 arreglos en forma de matriz quedan

$$
4{,}5_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{6\,X\,5} \end{array}
$$

En la matriz $4{,}5_{AB}$ los pasajeros 4 y 5 mantienen fijos en los puestos C y D y los pasajeros 1, 2 y3 cambian a los puestos E, F y G.

Las filas impares de $4{,}5_{AB}$están en $1_{AB}, 2_{AB,}$ y 3_{AB} respectivamente y las pares son arreglos nuevos, incluso, no están en $(1_{AB})^T$.

No sólo la pareja $(4{,}5)$ en las posiciones C y D se repiten en $1_{AB}, 2_{AB,}$ y 3_{AB}, sino también en las mismas posiciones, por ejemplo, la pareja $(1{,}2)$ se repite en 1_{AB}, 3_{AB} y 4_{AB}:

$$\begin{array}{ccccc} C & D & E & F & G \end{array}$$

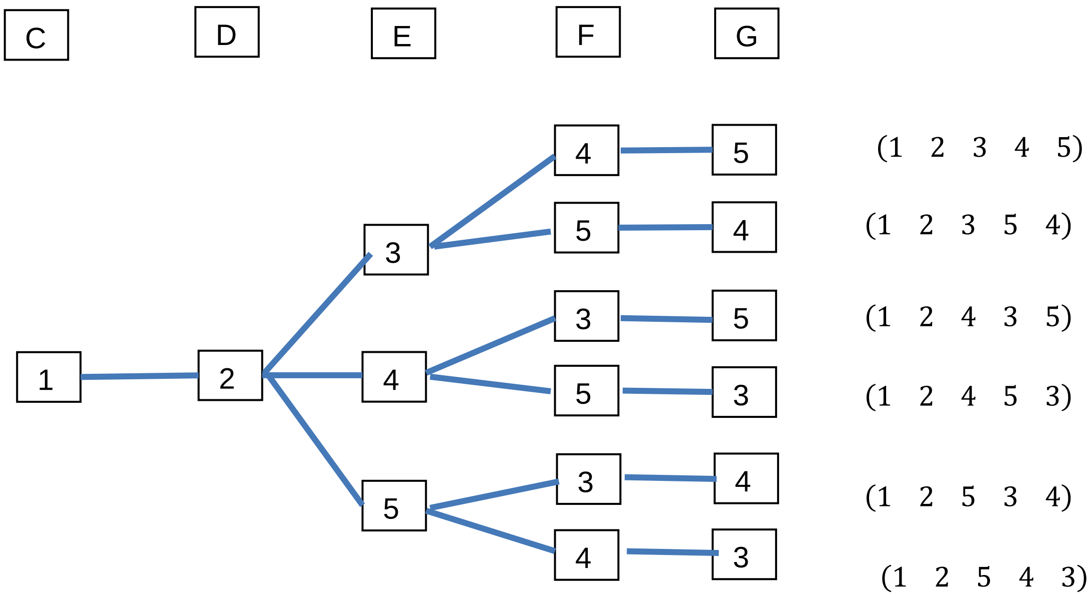
$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$ En 1_{AB}

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5 & 3\end{pmatrix}$ En 3_{AB}

$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 5 & 4\end{pmatrix}$ En $4_{AB.}$

El diagrama de árbol y la matriz que se acaban de hacer con las componentes $(4{,}5)$ en $1_{AB}, 2_{AB,}$ y 3_{AB} , también se pueden hacer con las componentes $(1{,}2)$ 1_{AB}, 3_{AB} y 4_{AB}.

Figura 2-13: Diagrama de árbol representando los arreglos con primeras componentes la pareja (1,2) (Autor)



$$1{,}2_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad 6\,X\,5$$

En la matriz $1{,}2_{AB}$ los arreglos de las filas 1, 2 y 4 están en 1_{AB}, 4_{AB} y 3_{AB}.respectivamente; hay arreglos nuevos en las filas 3, 5 y 6.

De acuerdo con los diagramas de árbol y el principio de la multiplicación, fijas las dos primeras componentes, se obtiene $6 = 2\ X\ 3 = 1\ X\ 2\ X\ 3 = 3!$ arreglos.

También se obtienen $3!$ Arreglos si $(1{,}2)$ no están fijos en C y D sino, por ejemplo, en F y G en este caso, en 1_{AB}, 3_{AB} y 4_{AB} existen los arreglos siguientes:

$$\begin{array}{lllll} C & D & E & F & G \end{array}$$

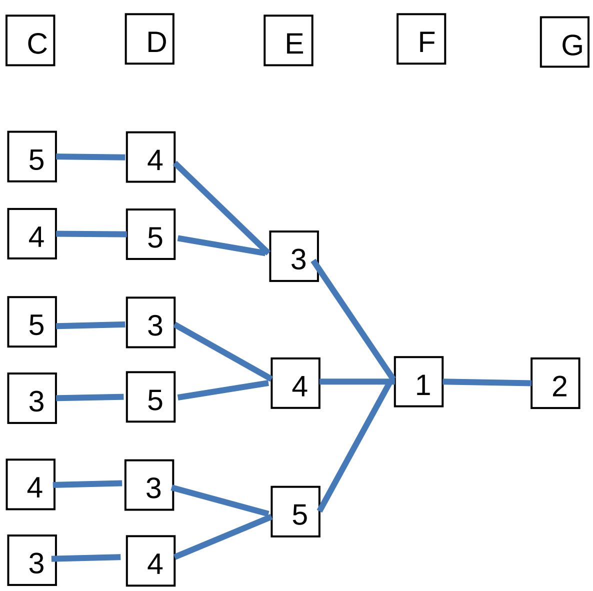
$(3 \quad 4 \quad 5 \quad 1 \quad 2)$ En 1_{AB}

$(4 \quad 5 \quad 3 \quad 1 \quad 2)$ En 3_{AB}

$(3 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \quad 2)$ En $4_{AB.}$

El diagrama de árbol y la matriz asociados a estos arreglos son:

Figura 2-14: diagrama de árbol asociado a los arreglos $\mathbf{1_{AB}}$, $\mathbf{3_{AB}}$ y $\mathbf{4_{AB}}$. (Autor)



$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{array}$$

$$AB_{1,2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C & D & E & F & G \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{6 \, X \, 5} \end{array}$$

En la matriz $AB_{1,2}$, los arreglos de las filas están en 3_{AB}, 4_{AB} y 1_{AB} respectivamente, los arreglos de las filas impares son nuevos.

Nótese las diferencias y semejanzas entre el diagrama de árbol y la matriz para $(1,2)$ en C y D y $(1,2)$ en F y G. por ejemplo, $1,2_{AB}$ y $AB_{1,2}$ tienen las mismas columnas pero en distinto orden.

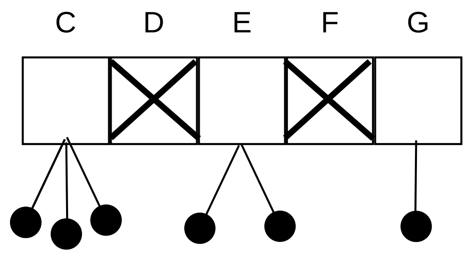
En general, con A y B desocupados y sin importar la posición de 1 y 2 en el arreglo, siempre quedan tres cupos vacíos; en uno de ellos se podrá sentar cualquiera de los 3 pasajeros restantes, $\{3, 4, 5\}$; Sentado uno de estos tres pasajeros, los dos restantes se podrán sentar en uno de los dos puestos desocupados; sentado uno y ocupado un segundo puesto, queda un puesto para ser ocupado por el tercer y último pasajero.

Así, de acuerdo con el principio de la multiplicación, fijado 1 y 2 en cualquiera de los 5 puestos se pueden formar $3 \, X \, 2 \, X \, 1 = 3!$ arreglos.

Los pasos y el razonamiento realizados con la pareja $(1,2)$ se pueden hacer con cualquier pareja ordenada del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, sin importar donde están fijas estas dos componentes, se van a obtener $3!$ arreglos.

El siguiente diagrama ilustra este caso de mayor generalidad que el anterior

Figura 2-15: Diagrama cantidad de arreglos con 5 puestos cuando hay dos ocupados fijos.(Autor)



- Para el caso de A y B desocupados, hasta ahora se sabe que dado un arreglo cualquiera y si en él se fijan dos componentes en cualquier posición, este arreglo genera $3!$ Arreglos pero no siempre los $3!$ Arreglos son distintos de los que ya se tienen, por ejemplo, en $1{,}2_{AB}$ de los $3!$ hay 3 que ya están en en 1_{AB}, 3_{AB} y 4_{AB}.

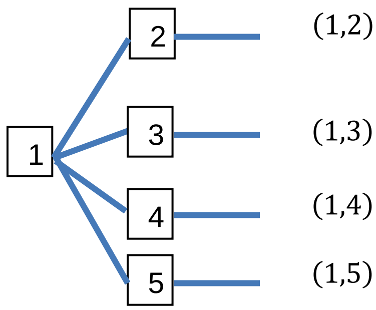
Si se quiere hacer el listado de todos los arreglos posibles con A y B desocupados, uno de los caminos es reorganizar todos los arreglos de 1_{AB}, 2_{AB}, 3_{AB} y 4_{AB}, de tal manera que los arreglos de estas cuatro matrices sean una parte de un nuevo listado y, además, que no falten arreglos, que no hayan repetidos ni incorrectos.

Una de las formas de reorganizar los arreglos 1_{AB}, 2_{AB}, 3_{AB} y 4_{AB}, es formar matrices de tamaño $6\ X\ 5$ como $4{,}5_{AB}$ o $1{,}2_{AB}$ dejando fijas C y D parejas ordenadas que se puedan formar con los elementos de $\{1,2,3,4,5\}$.

Unas de estas parejas ordenadas son las que tienen al 1 como su primera componente, una de ellas es $(1{,}2)$ y su matriz correspondiente es $1{,}2_{AB}$. Como ya se dijo, las filas 1, 2, y 4 de $1{,}2_{AB}$son arreglos que ya están en 1_{AB}, 4_{AB} y 3_{AB} respectivamente; las otras tres filas son arreglos nuevos.

Las parejas ordenadas con el 1 como primera componente, se pueden obtener mediante un diagrama de árbol como el siguiente:

Figura 2-16: Diagrama de árbol de las parejas ordenadas con el 1 como primera componente. (Autor)



Se puede apreciar que en 1_{AB} $2_{AB}, 3_{AB}$ y 4_{AB} no hay arreglos cuyas primeras componentes sean $(1{,}4)$ y $(1{,}5)$. Las matrices correspondientes a estas y las demás parejas con 1 como primera componente,$1{,}3_{AB}$, $1{,}4_{AB}$ y $1{,}5_{AB}$. Se pueden hacer como se construyó 12_{AB}. Estas cuatro matrices son las siguientes.

$$1{,}2_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \quad 1{,}3_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$1,4_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \qquad 1,5_{AB} = \begin{array}{c} \begin{matrix} C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

De los 24 arreglos de estas 4 matrices, sólo las filas 1, 2 y 4 de $1,2_{AB}$ están en 1_{AB} , 4_{AB} y 3_{AB}respectivamente; la fila 4 de 13_{AB} está en 2_{AB}. Los 20 arreglos restantes son nuevos.

Las filas de cada matriz son distintas entre sí puesto que los arreglos tienen al menos una componente en posición distinta y las filas entre matrices también son distintas porque ellas difieren al menos en la segunda componente. De este modo no hay arreglos repetidos en una matriz ni hay matrices equivalentes, por esto, se tienen 24 arreglos distintos.

Nótese que estas cuatro matrices han generado $3!$ Arreglos por cada una de ellas, por tanto, en total hay $3! + 3! + 3! + 3! = 3!\,(1 + 1 + 1 + 1) = 3!\,.4$ arreglos.

Supóngase que el número total de parejas ordenadas se pueden formar con los elementos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ es “m”. Como cada una de estas parejas ordenadas genera $3!$ arreglos, entonces, $3!.m$ será la cantidad de arreglos que corresponden al caso de A y B vacíos.

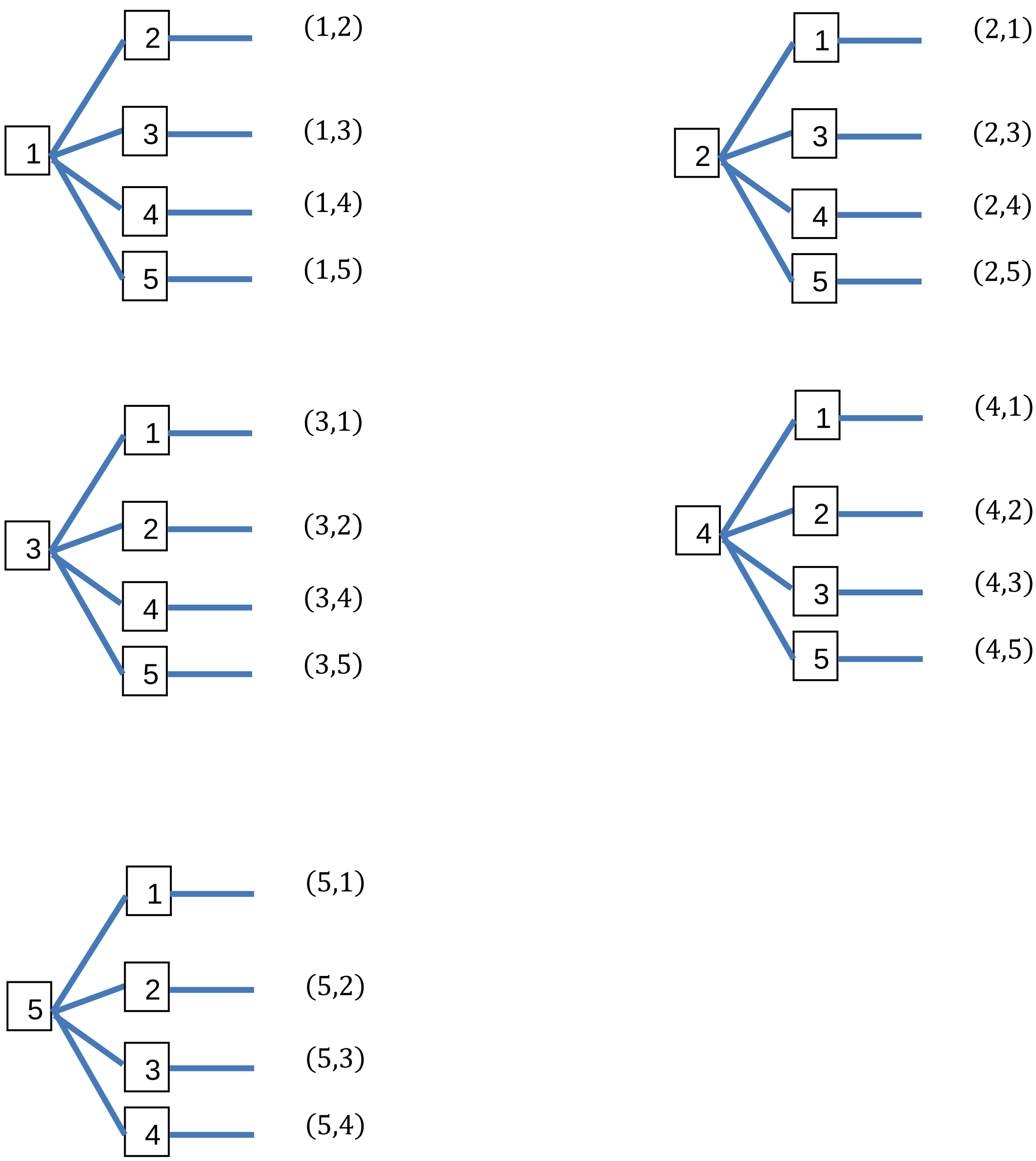
Tener vacíos los puestos A y B es lo mismo que tener vacíos los puestos B y A, luego si “n” es el número de parejas no ordenadas que se pueden formar con los elementos de $S = \{A, B, C, D, F, G, \}$, entonces, la cantidad de arreglos que solucionan el problema es:

$$\underbrace{3!.m + 3!.m + \cdots 3!\,m}_{n\ veces}$$

A continuación se van a calcular “m” y “n”

- ¿Cuántas parejas ordenadas sin repetición se pueden formar con los elementos de $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Con diagramas de árbol y por el principio de la suma, se obtienen las siguientes parejas ordenadas sin repetición.



En total se tienen $4+4+4+4+4=4(1+1+1+1+1)=4\ X\ 5=5\,X4$

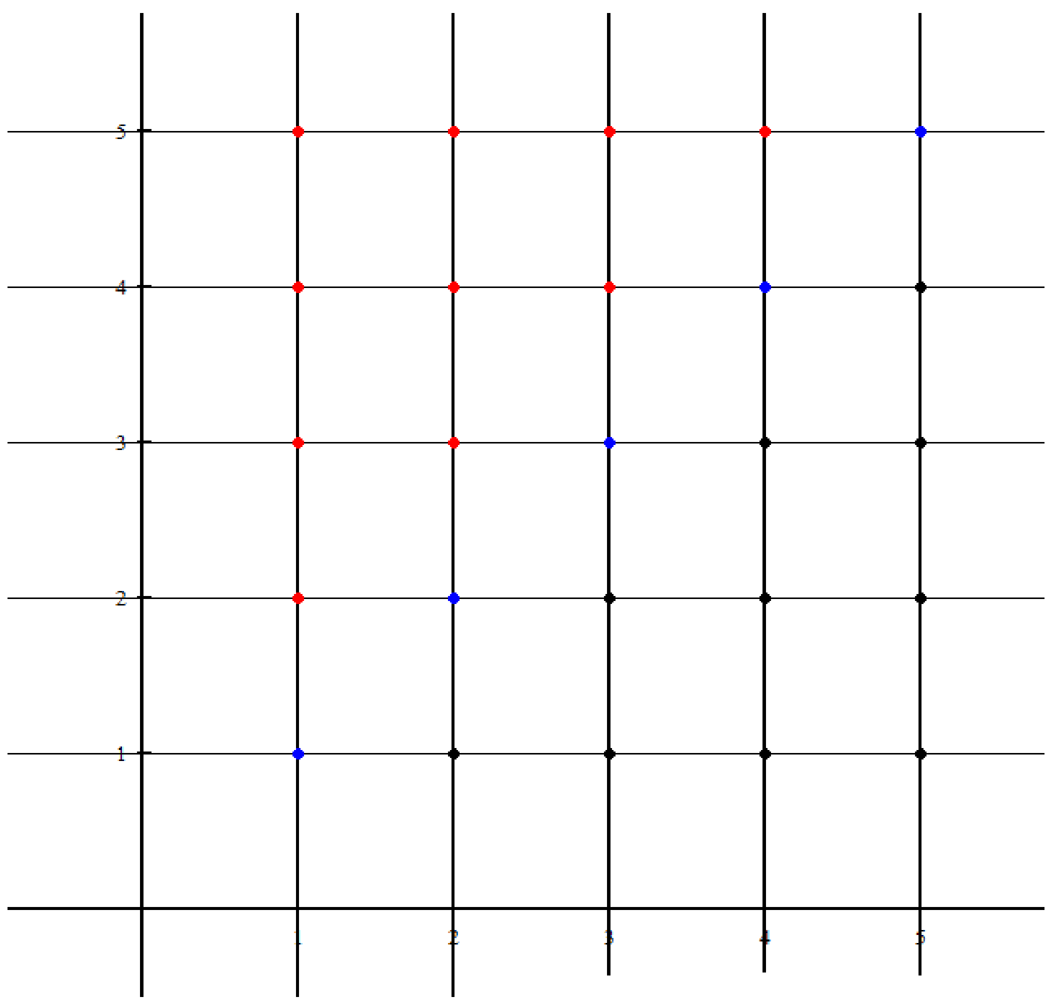
Parejas ordenadas sin repetición.

Otra manera de resolver este problema es mediante el producto cartesiano $P\ X\ P$ y luego llevar los elementos de este producto a una matriz.

Haciendo el producto cartesiano de $P\ X\ P$ además de las parejas anteriores, También se obtienen las que tienen sus dos componentes iguales, en este caso $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$ y $(5,5)$

El siguiente diagrama representa este producto:

Figura 2-17: Producto cartesiano *PXP* (Autor)



$$P\ X\ P = P^2 = \begin{bmatrix} (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) \\ (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) \end{bmatrix} \boxed{5\ X\ 5}$$

En forma de matriz de tamaño $5\ X\ 5$ este diagrama se transforma en

En la matriz P^2 el total de las parejas es $5\ X\ 5$ la cantidad por encima y por debajo de la diagonal principal$\{(1,1), (2,2), (3,3),\ (5,5)\}$ es la misma y es igual cada una a $1 + 2 + 3 + 4$ y la cantidad de elementos de la diagonal principal es la misma que la cantidad de elementos de P, por tanto,

$$(1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4) + 5 = 5\ X\ 5$$

$$2(1 + 2 + 3 + 4) = 5\ X\ 5 - 5$$

$$2(1 + 2 + 3 + 4) = 5\ (5 - 1)$$

$$2(1 + 2 + 3 + 4) = 5\ X\ 4$$

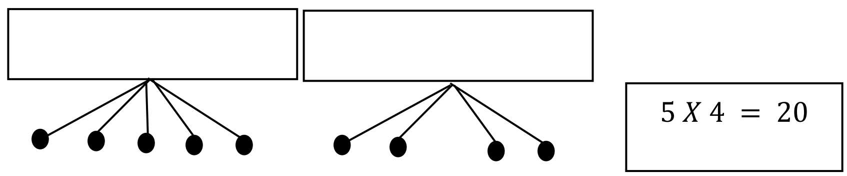
Conjetura 8:

¿Si un conjunto A tiene "n" elementos, entonces la cantidad de parejas ordenadas sin repetición formada con los elementos de A es $n^2 - n$?

Utilizando casillas y el principio de la multiplicación, este problema se puede resolver de la siguiente manera: en la primera componente puede ir cualquiera de los cinco elementos de $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, como es sin repetición, escogido uno quedan 4 elementos, que cualquiera de ellos puede ocupar la segunda y última componente, así, por el principio de la multiplicación se obtiene el total $5\ X\ 4\ =\ 20$ arreglos sin repetición

El siguiente diagrama ilustra el anterior procedimiento y resultado

Figura 2-18: Diagrama. De las 5X4 parejas ordenadas sin repetición de elementos de P. (Autor)



Luego, del conjunto $P = \{1,2,3,4,5\}$ se pueden obtener $5\,X\,4\ =\ 20$ parejas ordenadas sin repetición, por tanto, "m" $= 5\,X\,4$ como se acaba de argumentar el número total de arreglos con A y B vacíos es $3!.\,m$, como $m\ = 5\,X\,4$ entonces este total es:

$$3!\,(5\,X\,4)$$

- ¿Cuántas parejas no ordenadas se pueden formar con los elementos de $S = \{A,B,C,D,F,G,\}$? Es decir, ¿Cuántos subconjuntos de dos elementos tiene el conjunto $S = \{A,B,C,D,F,G,\}$?

Hay que recordar las definiciones de contenencia e igualdad de conjuntos

Definición 3 Contenencia de conjuntos. Sean X y Y conjuntos, X está contenido o es subconjunto de Y, si y sólo si, para cualquier $x \in X$. Se cumple que $x \in Y$. Esta relación entre X y Y se nota por $X \subseteq Y$.

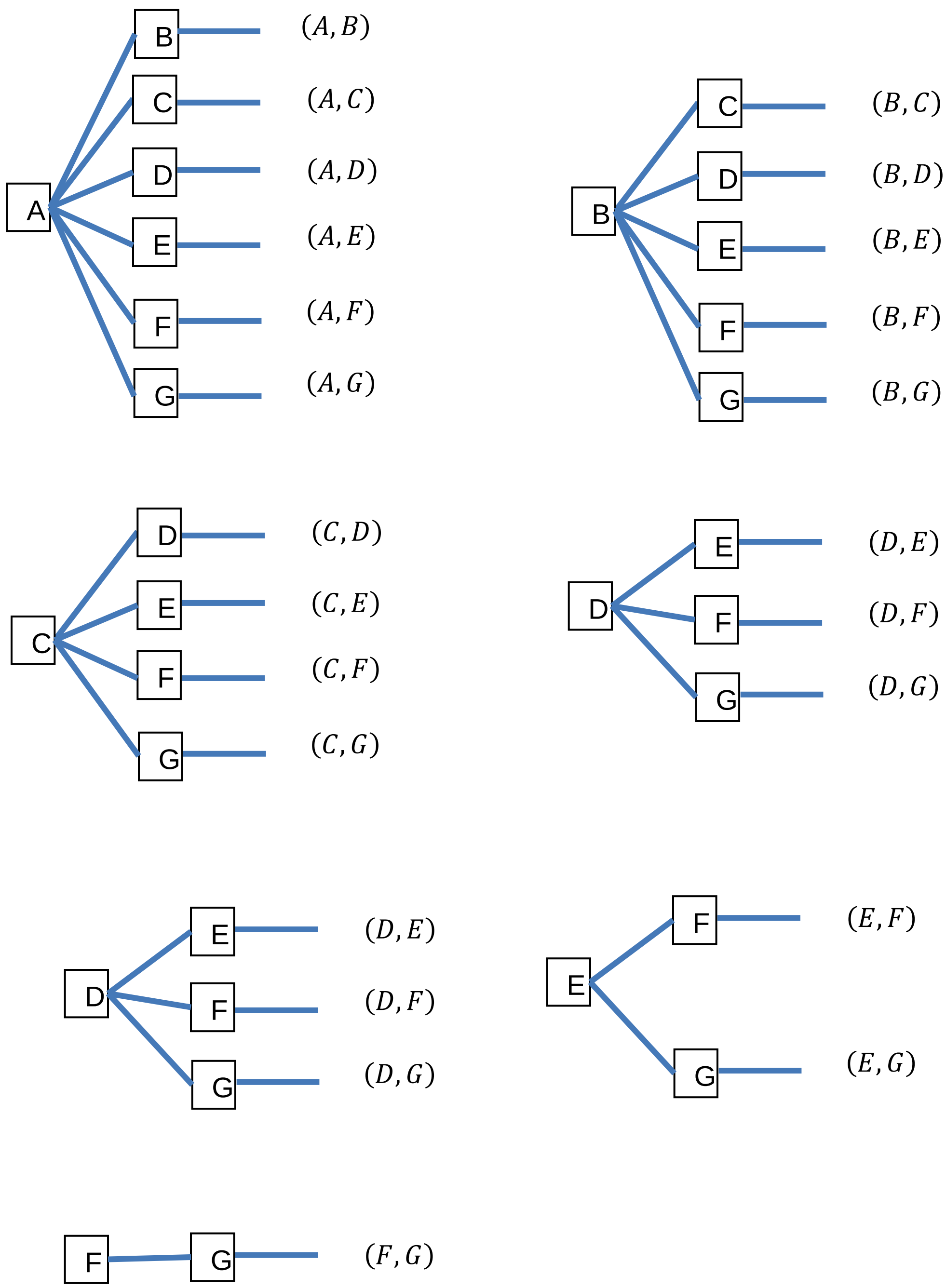
De otra manera, $X \subseteq Y \leftrightarrow x \in X\ \wedge x\ \in Y, \forall\, x\ \in X$

Definición 4. Igualdad de conjuntos. Sean X y Y dos conjuntos, X es igual a Y si y sólo si, X es subconjunto de Y e Y es subconjunto de X.

De otra manera, $X = Y\ \leftrightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$

Teniendo en cuenta esta definición para este caso, se cumplirá que, por ejemplo, $\{A,B\} = \{B,A\} = \{A,A,B\} = \{A,B,B,B\}$

Con diagramas de árbol y por el principio de la suma se obtiene el siguiente total de distintos subconjuntos de dos elementos de $S = \{A, B, C, D, F, G, \}$.



El total de subconjuntos es $6+5+4+3+2+1=1+2+3+4+5+6$ Esta suma es un caso particular de la suma de los K primeros números naturales, estudiados por los pitagóricos y por Gauss. En notación actual y que se demuestra por inducción, esta suma es la siguiente identidad:

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{k\,(\,k+1\,)}{2}$$

Para este caso particular, $1+2+3+4+5+6=\frac{6\,(\,6+1\,)}{2}=\frac{(1\,X\,2\,X\,3\,X\,4\,X\,5)(6\,X\,7)}{2(1\,X\,2\,X\,3\,X\,4\,X\,5)}=$

$$=\frac{7!}{2!\,5!}=\frac{7!}{2!\,(\,7-2)!}=$$

$$=\binom{7}{2}=21$$

Conjetura 9: ¿La cantidad total de subconjuntos de 3 elementos de S es $\binom{7}{3}$?

Conjetura 10: ¿La cantidad total de subconjuntos de 2 y 3 elementos de S es $\binom{7}{2}+\binom{7}{3}$?

Dispuestos los 21 subconjuntos de 2 elementos Sen forma de matriz triangular superior, se presenta de otra manera la suma $1+2+3+4+5+6$ y se reconocen otros patrones

$$\begin{array}{cccccc}
\{A,B\} & \{A,C\} & \{A,D\} & \{A,E\} & \{A,F\} & \{A,G\} \\
\{B,C\} & \{B,D\} & \{B,E\} & \{B,F\} & \{B,G\} & \\
\{C,D\} & \{C,E\} & \{C,F\} & \{C,G\} & & \\
\{D,E\} & \{D,F\} & \{C,G\} & & & \\
\{E,F\} & \{E,G\} & & & & \\
\{F,G\} & & & & &
\end{array}$$

¿Si se completara la matriz, existiría alguna relación con el producto cartesiano $S\ X\ S$? ¿Puede relacionarse lo no – ordenado con lo ordenado?

De este modo, el total de subconjuntos de los elementos del conjunto $S = \{A, B, C, D, F, G,\}$ es el resultado del coeficiente binomial $\binom{7}{2} = 21 = 7\ X\ 3$, es decir, $n = 7\ X\ 3$.

Uno de los subconjuntos de dos elementos de S es $\{A, B\}$. Como ya se sabe que cualquier par de sillas vacías genera $3!\,(\,5\ X\ 4\,)$ arreglos, entonces las $21 = 7\ X\ 3$ parejas de sillas vacías generan:

$$\underbrace{3!\,(\,5\ X\ 4\,) + \cdots + \ 3!\,(\,5\ X\ 4\,)}_{7\ X\ 3 \text{ Veces}} =$$

$$3!\,(\,5\ X\ 4\,)(\underbrace{1 + 1 + 1 \ldots + 1}_{7\ X\ 3 \text{ Veces}}) =$$

$$3!\,(\,5\ X\ 4\,)\,(7\ X\ 3) = 2520 \text{ Arreglos}$$

Como ya lo había anticipado el alumno 1, la cantidad total de maneras de sentarse 5 pasajeros en 7 sillas de un bus era $7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3$.Veamos que:

$$3!\,(\,5\ X\ 4\,)\,(7\ X\ 3) = (7\ X\ 3)3!\,(\,5\ X\ 4\,)\ =$$

$$= \ (7\ X\ 3)(\,1\ X\ 2\ X\ 3)(\,5\ X\ 4\,) =$$

$$= (7\ X\ 3)(\,1\ X\ 2\,)(3)(\,5\ X\ 4\,) =$$

$$= (7\ X\ 3)(2)(3)(\,5\ X\ 4\,) =$$

$$= (7\ X\ 3\ X\ 2)(\,5\ X\ 4\,)(\,3\,) =$$

$$= (7\ X\ 6)(\,5\ X\ 4\,)(\,3\,) =$$

$$3!\,(\,5\ X\ 4\,)\,(7\ X\ 3) = 7\ X\ 6\ X\ 5\ X\ 4\ X\ 3$$

2.4.6 Estrategia Gráfica

a. Estrategia Gráfica con énfasis en las casillas

I. Caracterización

Alumnos que como un punto de partida dibujan el bus y las personas, para obtener información que les permita decidir hacer un listado, aplicar una fórmula u otro tipo de resolución.

Esta estrategia resulta productiva cuando dicha representación relaciona todas las variables relevantes del problema y expone claramente aspectos cruciales en la resolución, que permita identificar características como la distinción de los objetos, repetición e importancia del orden en que se distribuyen estos, permitiendo tomar la decisión adecuada frente a cual operación combinatoria usar, o, la reorganización de los datos y el uso de otra estrategia.

Algunos estudiantes intentan representar fielmente la situación y optan por dibujar el bus, las sillas y las personas. Al hacerlo, ignoran la naturaleza de los objetos que allí se relacionan. Ciertos estudiantes notan la "ineficiencia" del método y deciden buscar otra estrategia, como organizar las sillas y repitir él patrón intentando listar de esta manera los arreglos, y en lugar de dibujar cada persona le asignan un mismo símbolo o sombrean cada una de las casillas que consideran ocupadas y así, agotar un listado con las configuraciones obtenidas. Estudiantes que reconocen que las personas son distinguibles, luego de hacer el dibujo asignan a cada persona una letra o un número distinto para representarlos y le asignan una casilla que han asumido como silla y así intentar listar todos los arreglos o tratar de hacer parejas y contar la cantidad de pares.

.

II. Alumnos clasificados en esta estrategia

Tabla 2-814: Alumnos que eligieron la estrategia gráfica con énfasis en las casillas.

Estrategia gráfica: con énfasis en las casillas.						
Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
5	En el esquema que el estudiante realiza, es importante que no haya repetición entre arreglos; no hay evidencia que indique que entre una misma configuración el orden sea importante, todos los arreglos que la estudiante realiza son ordenados según los puestos vacios.	Las personas son indistinguibles entre sí, los puestos por el contrario, se distinguen con números	El estudiante representa el problema dibujando el bus, los siete puestos vacios, los 5 pasajeros y el conductor, aparte, representa a cada persona con un dibujo y cada puesto con un número del uno al siete.	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta, 21 arreglos diferentes	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.

Tabla 2-8: (Continuación)

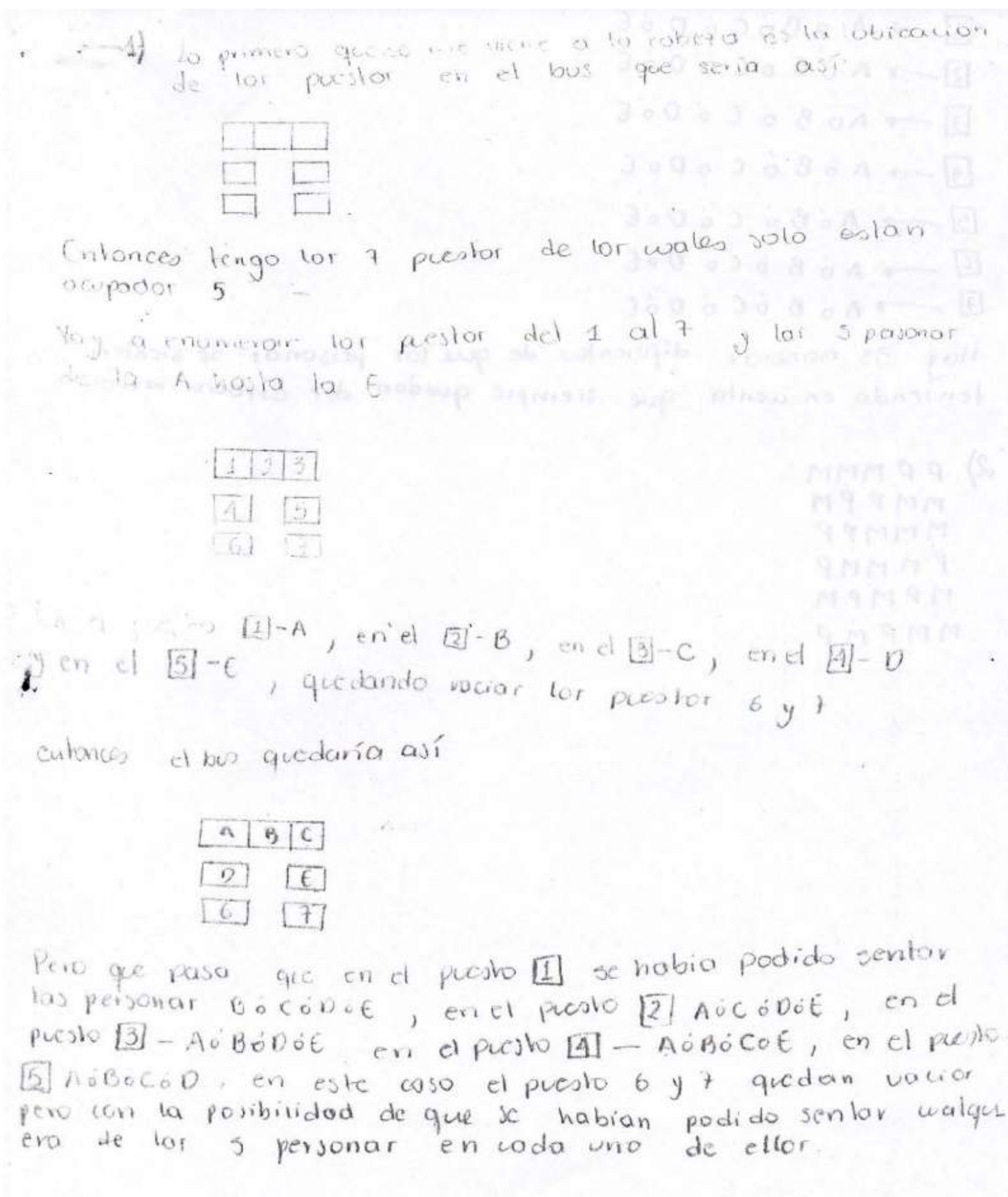
Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
31	En la representación grafica que realiza el estudiante es posible identificar que el orden en que se ubiquen los puestos vacios en cada arreglo es importante pero no lo es el orden en que se ubiquen las personas, no repite algún arreglo y no es posible identificar si una	Las personas son indistinguibles, los puestos se diferencian según su posición en el bus (puesto del acompañante, puesto derecho tras el acompañante, puesto ultimo izquierdo)	Los puestos se representa con cuadrados ubicados en dibujo del bus, una persona se representa mediante el sombreado de esos cuadrados.	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta, 9 configuraciones diferentes.	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.

Tabla 2-8: (Continuación)

Alumno	Arreglos	Elementos de los arreglos	Representaciones	Solución	Respuesta	Revisión
20	El estudiante indica la distribución de los 7 puestos en el bus y realiza arreglos, teniendo encuentra los puesto vacios, es posible evidenciar que para el estudiante el orden en que las personas se ubiquen en UNA configuración es importante,	Los puestos se distinguen con números y los pasajeros son distinguibles mediante las letras del alfabeto: A,B,C,D y E	Los puestos son representados con cuadrados, en el interior de cada uno de ellos escribe un digito del uno al siete,	Tiene las características que aquí se presentan de arreglos, elementos de los arreglos, Representaciones, respuesta y revisión.	Incorrecta, 35 configuraciones diferentes	No hay dibujos, diagramas, tablas, listados o ejemplos para examinar, confirmar o refutar cada uno de los demás componentes que aquí se analizan.
Los estudiantes 2, 9, 26, 38, 23, 42, 37, 39, 28 y 34 usaron esta misma estrategia de forma similar a los estudiantes cuyos resultados se describieron en esta tabla						

III. Respuesta del alumno 20 (Ver anexo G)

La propuesta de solución del alumno 20, fue la siguiente:


1) Lo primero que se me viene a la cabeza es la ubicación de los puestos en el bus que sería así

Entonces tengo los 7 puestos de los cuales solo están ocupados 5

Voy a enumerar los puestos del 1 al 7 y las 5 personas desde la A hasta la E

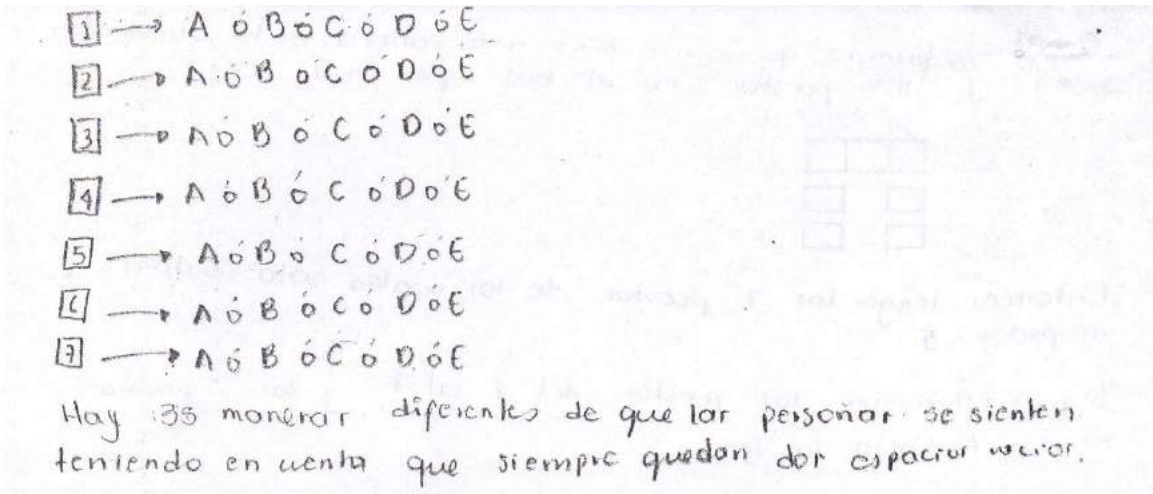
1	2	3
4		5
6		7

En el puesto [1]-A, en el [2]-B, en el [3]-C, en el [4]-D y en el [5]-E, quedando vacíos los puestos 6 y 7

entonces el bus quedaría así

A	B	C
D		E
6		7

Pero qué pasa que en el puesto [1] se había podido sentar las personas B ó C ó D ó E, en el puesto [2] A ó C ó D ó E, en el puesto [3] - A ó B ó D ó E en el puesto [4] — A ó B ó C ó E, en el puesto [5] A ó B ó C ó D, en este caso el puesto 6 y 7 quedan vacíos pero con la posibilidad de que se habían podido sentar cualquiera de las 5 personas en cada uno de ellos



1 → A ó B ó C ó D ó E
2 → A ó B ó C ó D ó E
3 → A ó B ó C ó D ó E
4 → A ó B ó C ó D ó E
5 → A ó B ó C ó D ó E
6 → A ó B ó C ó D ó E
7 → A ó B ó C ó D ó E

Hay 35 maneras diferentes de que las personas se sienten teniendo en cuenta que siempre quedan dos espacios vacíos.

IV. Análisis de la información del alumno 20

i. Solución

En este Trabajo, la solución de un problema combinatorio se está considerando como un conjunto del cual hacen parte los siguientes componentes: estrategia, arreglos, elementos de los arreglos, representaciones, respuesta y. Para el alumno 1, la solución propuesta tiene las características de los componentes que aquí se analizan.

ii. **Respuesta**

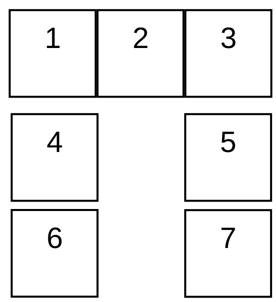
El alumno aplica la regla de la multiplicación $7\,X\,5 = 35$, pero como estos no son todos los factores del producto que corresponde a este problema, entonces el resultado no es correcto.

A continuación se utilizará la misma estrategia del alumno, pero se sugerirán pasos, representaciones, interpretaciones, patrones, justificaciones y cálculos para inferir, en distinto o igual orden, los factores del resultado correcto: $7\,X\,6\,X\,5\,X\,4\,X\,3 = 2520$.

Propuesta del alumno 20 (Ver anexo G)

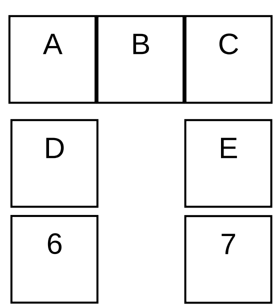
Casos particulares de arreglos; Un caso particular: En el siguiente diagrama, el alumno indica la distribución de los 7 puestos en el bus y el número asignado a cada uno de ellos.

Figura 2-19: Diagrama, distribución de los puestos. Numeración (alumno 20) Anexo G.



Vacíos los puestos 6 y 7, el alumno propone la siguiente ubicación de los pasajeros A, B, C, D y E:

Figura 2-20: Diagrama de caso particular de arreglo (alumno 20)



Mediante parejas no ordenadas, vacíos los puestos 6 y 7 y en notación conjuntista, este arreglo particular se escribiría como sigue:

$$U_1 = \{\{1, A\}, \{2, B\}, \{3, C\}, \{4, D\}\{5, E\}\}$$

- **Otros casos particulares**

Por ensayo y error ni en forma sistemática, y para los puestos 6 y 7 vacíos el alumno no propone más arreglos particulares que le permitan por ejemplo, estimar o calcular exactamente una cantidad de arreglos para cuando un pasajero quede fijo en un puesto cualquiera, reconocer o construir patrones o diseñar un plan para calcular la totalidad de arreglos para uno o varios pasajeros fijos o la cantidad de parejas de puestos vacíos, que se puedan formar con 7 puestos, de tal manera que un caso particular de pasajeros fijos o de puestos vacíos, lo pueda aplicar para los demás casos particulares y obtener cantidades de arreglo más próximos al resultado correcto.

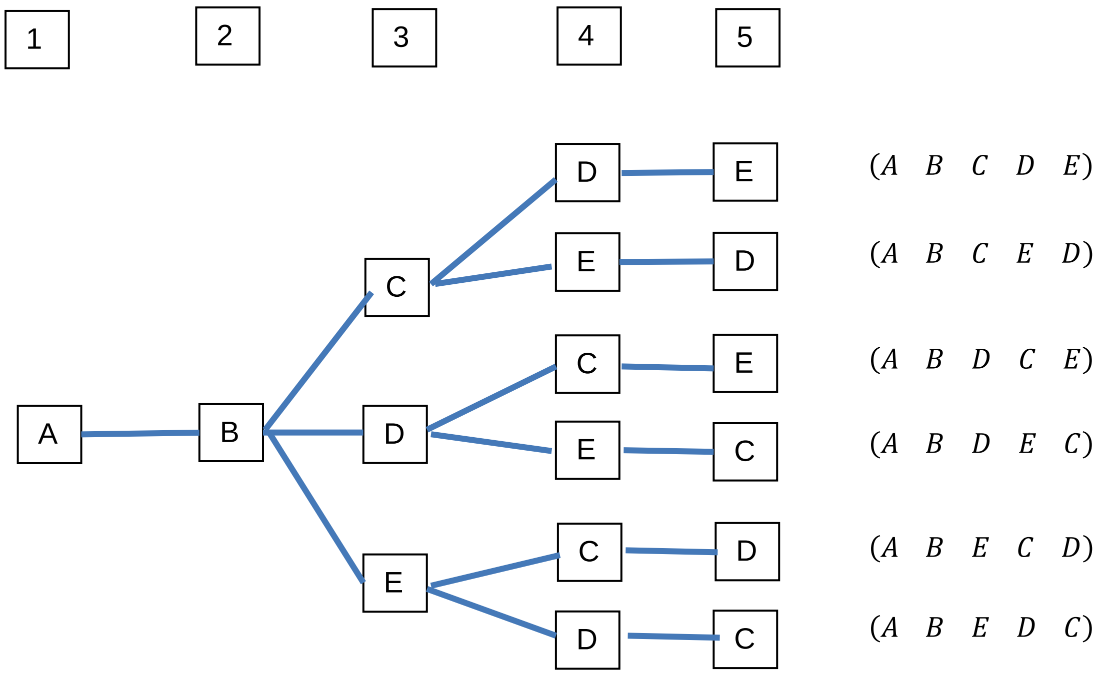
- ¿Cuáles y cuántos arreglos se obtienen cuando el pasajero A está fijo en el puesto 1?

A continuación una forma sistemática, por medio de matrices y los puestos 6 y 7 vacíos; se proponen arreglos en los que el pasajero A está fijo en el puesto 1.

Se hará un diagrama de árbol para la primera matriz $AB_{6,7}$, pero en un diagrama similar se puede hacer para las demás matrices. La notación $AB_{6,7}$ indica que los pasajeros A y

B están fijos en los puestos 1 y 2 respectivamente, y están vacíos los puestos 6 y 7.

Figura 2-21: diagrama de árbol para la primera matriz $\boldsymbol{AB_{6,7}}$(Autor)

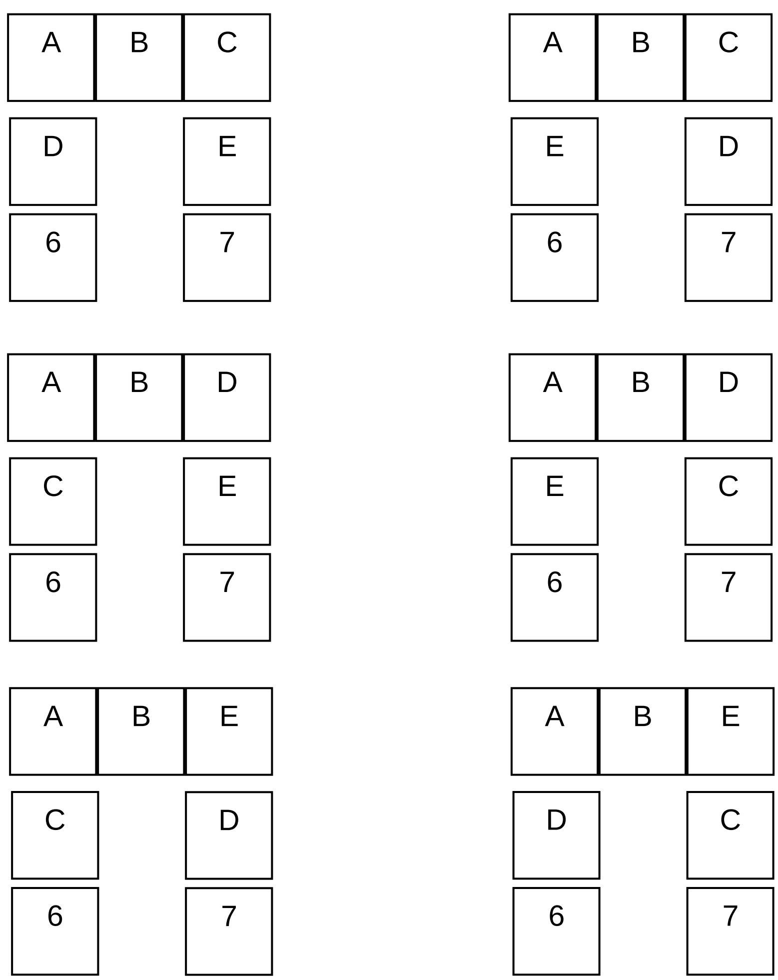


$$AB_{6,7} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} A & B & C & D & E \\ A & B & C & E & D \\ A & B & D & C & E \\ A & B & D & E & C \\ A & B & E & C & D \\ A & B & E & D & C \end{bmatrix} \end{array} 6\,X\,5 \qquad AC_{6,7} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} A & C & B & D & E \\ A & C & B & E & D \\ A & C & D & B & E \\ A & C & D & E & B \\ A & C & E & B & D \\ A & C & E & D & B \end{bmatrix} \end{array} 6\,X\,5$$

$$AD_{6,7} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A & D & B & C & E \\ A & D & B & E & C \\ A & D & C & B & E \\ A & D & C & E & B \\ A & D & E & B & C \\ A & D & E & C & B \end{bmatrix}_{6\,X\,5} \end{array} \qquad AE_{6,7} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A & E & B & C & D \\ A & E & B & D & C \\ A & E & C & B & D \\ A & E & C & D & B \\ A & E & D & B & C \\ A & E & D & C & B \end{bmatrix}_{6\,X\,5} \end{array}$$

Figura 2-22: Arreglos de la matriz $\boldsymbol{AB_{6,7}}$ con la escritura del estudiante

Por la notación del alumno 20, por ejemplo, los arreglos de la matriz $AB_{6,7}$ quedarían:



Examinando cada par de filas en cada matriz, se observa cada dos de ellas tienen igual las dos primeras componentes, pero difieren en, al menos la cuarta o quinta componentes por tanto, cada matriz tiene $6 = 3!$ Filas distintas; al comparar dos filas de matrices distintas siempre tienen igual la primera componente, pero difieren en, al menos, la segunda componente, por tanto, no hay matrices equivalentes y, por el principio de la suma, entre estas 4 matrices hay en total: $3! + 3! + 3! + 3! = 3!(1+1+1+1) = 3!\,4 = 4!$ Arreglos distintos.

De esta manera, vacíos los puestos 6 y 7 y fijo el pasajero A en el puesto 1, se obtienen $4!$ Arreglos distintos. Este resultado se notara por: $\#\{1, A\}_{6,7} = 4!$

- ¿De verdad son 35 arreglos los que solucionan el problema?

Por ahora solo se tiene evidencia de $\#\{1, A\}_{6,7} = 4! = 24$. Veamos, ojalá de manera sistemática, se pueda superar la propuesta de los 35 arreglos.

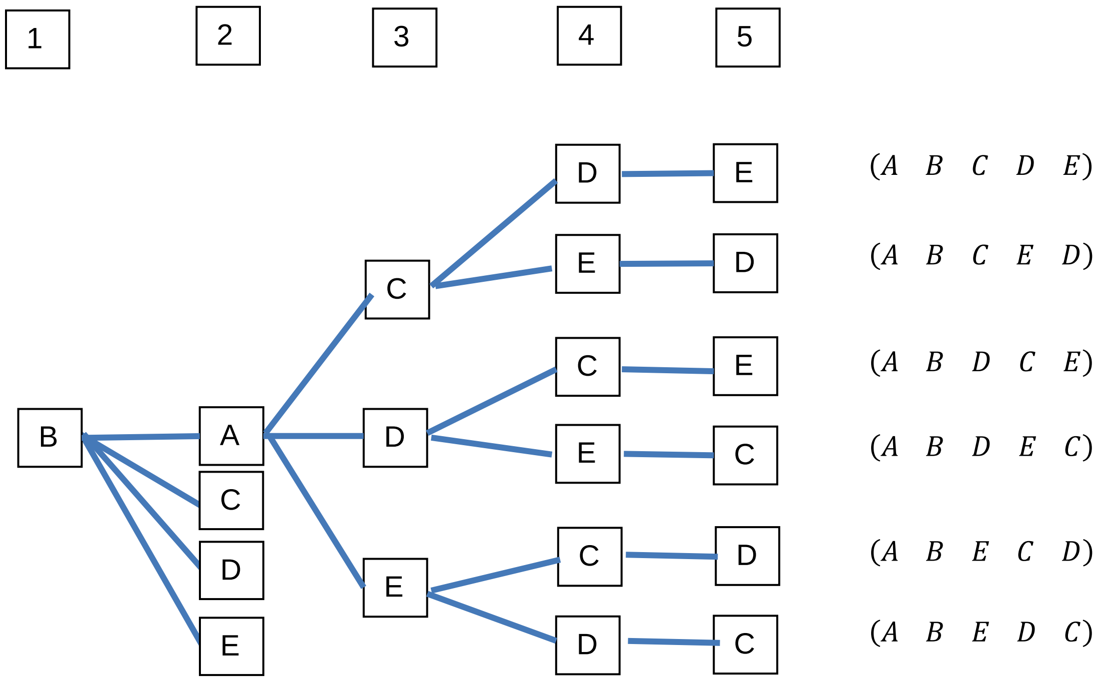
El alumno dice correctamente:" pero que pasa que en el puesto 1 se había podido sentar las personas B ó C ó D ó E…"

Ya se mostró que vacíos los puestos 6 y 7 y el pasajero A ocupando el puesto 1, hay $4!$ maneras distintas de ubicar a los pasajeros en el bus.

Vacíos los puestos 6 y 7 si en vez de sentarse A en el puesto 1 se sentara B, ¿cuántos arreglos distintos se pueden obtener?

Como en el caso de $AB_{6,7}$, por ejemplo, para $BA_{6,7}$ se presenta un diagrama de árbol y su matriz correspondiente. Los demás árboles y matrices se elaboran de forma parecida.

Figura 2-23: diagrama de árbol para la primera matriz $\boldsymbol{AB_{6,7}}$(Autor)



Con la notación del alumno 20, por ejemplo, los arreglos de la matriz $BA_{6,7}$ quedan:

$$BA_{6,7} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} B & A & C & D & E \\ B & A & C & E & D \\ B & A & D & C & E \\ B & A & D & E & C \\ B & A & E & C & D \\ B & A & E & D & C \end{bmatrix} \end{array}_{6\,X\,5} \qquad BC_{6,7} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} B & C & A & D & E \\ B & C & A & E & D \\ B & C & D & A & E \\ B & C & D & E & A \\ B & C & E & A & D \\ B & C & E & D & A \end{bmatrix} \end{array}_{6\,X\,5}$$

$$BD_{6,7} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} B & D & A & C & E \\ B & D & A & E & C \\ B & D & C & A & E \\ B & D & C & E & A \\ B & D & E & A & C \\ B & D & E & C & A \end{bmatrix}_{6\,X\,5} \end{array} \qquad BE_{6,7} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} B & E & A & C & D \\ B & E & A & D & C \\ B & E & C & A & D \\ B & E & C & D & A \\ B & E & D & A & C \\ B & E & D & C & A \end{bmatrix}_{6\,X\,5} \end{array}$$

Figura 2-24: **Arreglos de la matriz $BA_{6,7}$ con la escritura del estudiante**

B	A	C
D		E
6		7

B	A	C
E		D
6		7

B	A	D
C		E
6		7

B	A	D
E		C
6		7

B	A	E
C		D
6		7

B	A	E
D		C
6		7

Se puede verificar que dos filas de la misma matriz tienen igual las dos primeras componentes, pero difieren en, al menos, una de las dos últimas componentes, luego, cada matriz tiene $6 = 3!$ filas distinta; al comparar dos filas de matrices distintas, siempre tienen igual la primera componente, pero difieren en, al menos, la segunda componente, por tanto, no hay matrices equivalentes; y, por el principio de la suma, entre las 4 matrices se tiene en total $3! + 3! + 3! + 3! = 3!(1+1+1+1) = 3!\,4 = 4!$ Arreglos distintos.

Así, fijo el pasajero B en el puesto 1 y vacíos los puestos 6 y 7 se obtienen $4!$ Arreglos distintos. En notación conjuntista $\#\{1, B\}_{6,7} = 4!$. Con este resultado ya se superaron los 35 arreglos propuestos por el alumno 20, porque: $\#\{1, A\}_{6,7} + \#\{1, B\}_{6,7} = 4! + 4! = 4!\,X\,2 = 48$.

Con los patrones construidos o reconstruidos en estos dos casos particulares y sin escribir todas las matrices, ya se puede saber el total de arreglos; de las 5 opciones que se tiene de ocupar el puesto 1.

- Vacíos los puestos 6 y7 ¿Cuántos arreglos se obtienen si cada pasajero A, B, C, D y E se mantienen fijos en el puesto 1?

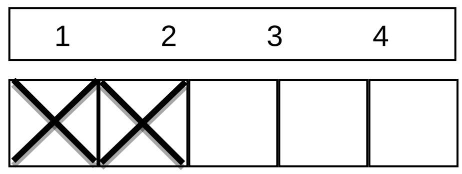
Ya se tienen valores para $\{1, A\}_{6,7}, \#\{1, B\}_{6,7}$; faltan los de $\{1, C\}_{6,7}$, $\#\{1, D\}_{6,7}$ y $\#\{1, E\}_{6,7}$.

Por medio de patrones en los diagramas de árbol y las matrices para $\{1, A\}_{6,7}$ y $\{1, B\}_{6,7}$, utilizando el principio de la multiplicación y la suma, se pueden calcular $\{1, C\}_{6,7}$, $\#\{1, D\}_{6,7}$ y $\#\{1, E\}_{6,7}$.

Recuérdese que los arreglos para este problema son ordenados y sin repetición. Se nota que en una matriz cualquiera, siempre la 1ª y 2ª componentes de una fila son las mismas, pero cambian la 3ª, 4ª y 5ª componentes.

El siguiente diagrama resume este caso.

Figura 2-25: Diagrama, ocupados los puestos 1 y 2, Vacíos los puestos 6 y 7.(Autor)

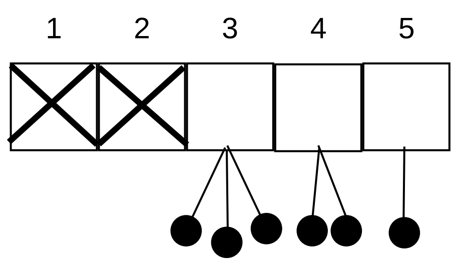


Fijas las 1ª y 2ª componentes, quedan 3 pasajeros para ocupar las tres restantes componentes. De estos 3 pasajeros cualquiera puede ocupar la 3ª componente; quedan 2 para ocupar la 4ª componente; escogida uno para ocupar la 4ª componente, queda 1 para ocupar la 5ª y última componente.

Por el principio de la multiplicación, fijas las 1ª y 2ª componentes, en una matriz cualquiera se pueden formar $3\ X\ 2\ X\ 1 = 3!$ Arreglos distintos.

El siguiente diagrama ilustra este razonamiento

Figura 2-26: Diagrama. Total de arreglos en una matriz que tiene fijas la 1ª y 2ª componentes (Autor)



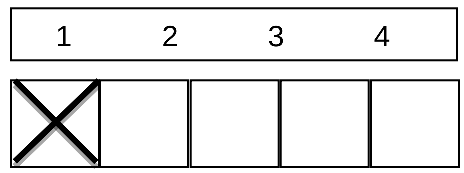
Este $3!$ Corresponde a las $3! = 6$ filas que tiene cada matriz, un ejemplo de este conteo son las matrices asociadas a $\{1, A\}_{6,7}$ y $\{1, B\}_{6,7}$, digamos $AB_{6,7}$ y $BD_{6,7}$.

Veamos ahora por qué por ejemplo, $\{1, A\}_{6,7}$ y $\{1, B\}_{6,7}$ tienen cada una 4 matrices.

Si se fija la 1ª componente ¿Ella cuántas matrices determina?

El siguiente diagrama presenta la situación

Figura 2-27: Diagrama de casillas en la esta fijo un pasajero en el puesto 1 (Autor)

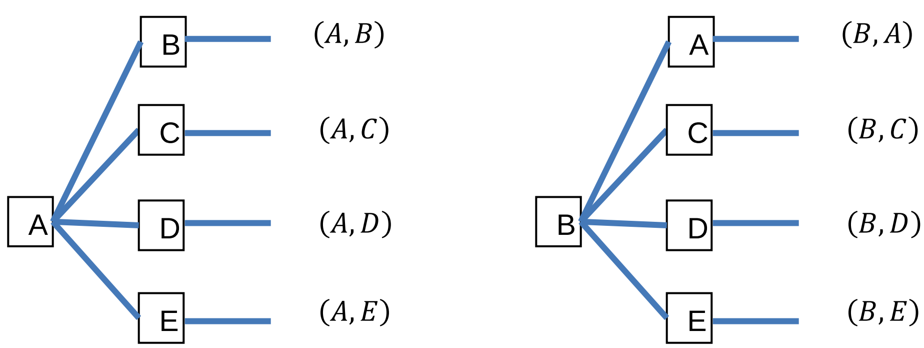


Fija la 1ª componente la 2ª la puede ocupar uno cualquiera de los 4 pasajeros restantes, así, se pueden tomar 4 parejas ordenadas que tienen fija la 1ª componente, y como se acabó de concluir, cada pareja fija determina una matriz, cada una con $3!$ filas.

Para los dos casos particulares presentados, las parejas son:$\{(A,B),(A,C)(A,D)(A,E)\}$ y $\{(B,A),(B,C)(B,D)(B,E)\}$.

Los siguientes diagramas de árbol presentan estas parejas:

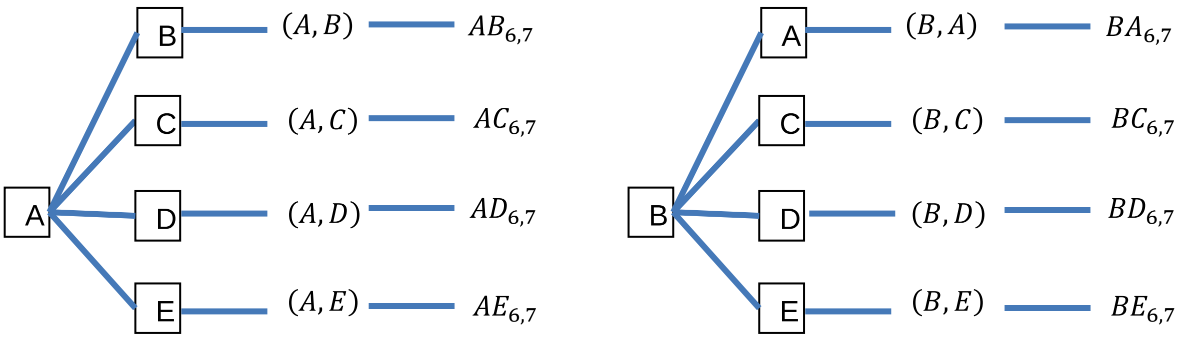
Figura 2-28: formación de parejas ordenadas mediante diagrama de árbol (autor)



Como cada componente fija determina 4 parejas ordenadas y cada pareja fija, una matriz de $3!$ filas entonces cada componente fija determina 4 matrices cada una con $3!$ Filas.

Los siguientes diagramas de árbol indican las cuatro matrices generadas por A y B cuando están fijas en el puesto 1.

Figura 2-29: Matrices asociadas a parejas ordenadas, mediante diagramas de árbol. (Autor).



Se puede probar que tanto las filas de cada matriz como las filas entre matrices, son distintas, así, fijo un pasajero en el 1[er] puesto y vacíos los puestos 6 y 7, quedan determinados por ese pasajero 4 matrices, cada una con $3!$ Arreglos que, por el principio de la suma, en total tienen: $3! + 3! + 3! + 3! = 3!\,(1+1+1+1) = 3!\,4 = 4!$ Arreglos distintos.

De este modo:

$$\#\{1,A\}_{6,7} = 4!$$

$$\#\{1,B\}_{6,7} = 4!$$

$$\#\{1,C\}_{6,7} = 4!$$

$$\#\{1,D\}_{6,7} = 4!$$

$$\#\{1,E\}_{6,7} = 4!$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades que

$$\#\{1,A\}_{6,7} + \#\{1,B\}_{6,7} + \#\{1,C\}_{6,7} + \#\{1,D\}_{6,7} + \#\{1,E\}_{6,7} = \#\{1,A,B,C,D,E\}_{6,7}$$

Se obtienen:

$$\#\{1,A,B,C,D,E\}_{6,7} = 4! + 4! + 4! + 4! + 4! = 4!\,(1+1+1+1+1) = 4!\,5 = 5!$$

$$\#\{1,A,B,C,D,E\}_{6,7} = 5!$$

Por tanto, vacíos los puestos 6 y 7 y ocupando cada pasajero, A, B, C, D y E siempre el puesto 1, se forman $5! = 120$ arreglos.

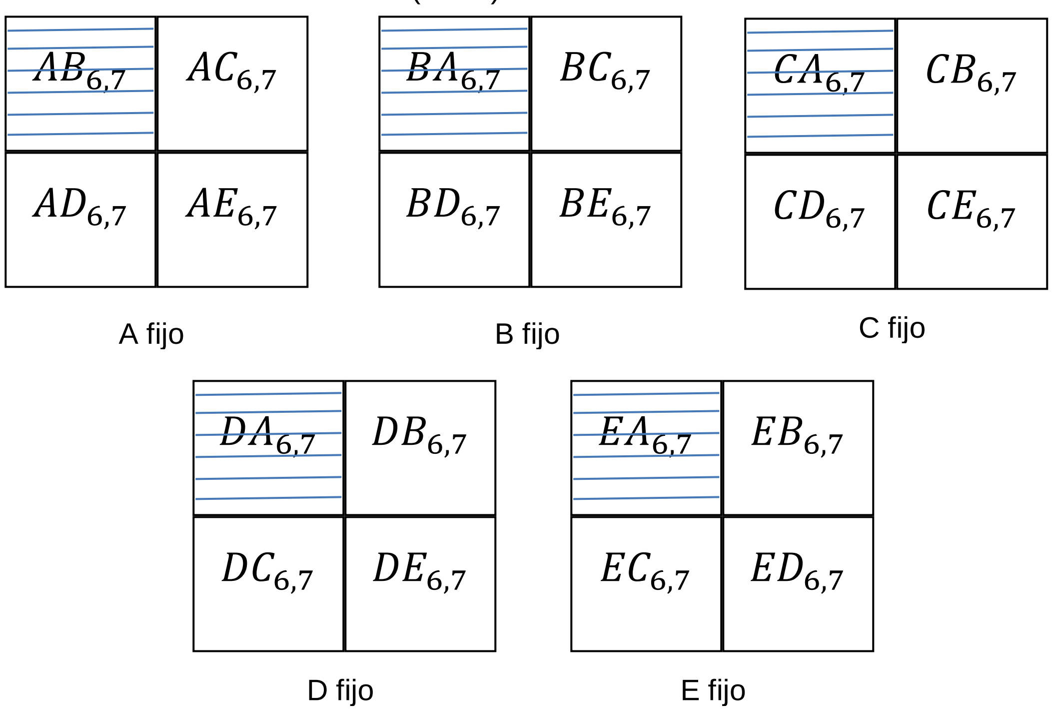
Como cada matriz tiene $3! = 6$ arreglos, entonces estos 120 arreglos están organizados en $120/6 = 20$ matrices. Como cada pasajero determina 4 matrices, entonces estas 20 matrices están formando $20/4 = 5$ grupos, cada uno con 4 matrices.

De este modo, los 120 arreglos se han organizado en 5 grupos, cada uno con 4 matrices y cada matriz con 6 arreglos o filas, luego los 120 arreglos se pueden escribir como:

$$120 = 5 \, X \, 4 \, X \, 6 = 4 \, X \, 5 \, X \, 6$$

El siguiente diagrama presenta la anterior descomposición de 120 en factores: $120 = 5 \, X \, 4 \, X \, 6$

Figura 2-30: diagrama que presenta la descomposición en factores de 120 como $120 = 5 \, X \, 4 \, X \, 6$ (Autor)



Hay $5! = 120 = 5\,X\,4\,X\,6$ arreglos, pero solo para el caso en que los puestos 6 y 7 se encuentren vacíos; no son los únicos, también pueden estar vacíos, por ejemplo, 5 y 7 4 y 7, 3 y 7, 2 y 7, 1 y 7, y para cada una de estas parejas se tendrían $5!$ arreglos.

Hay que averiguar cuántas parejas de puestos se pueden formar, sabiendo que es lo mismo estar desocupado los puestos 6 y 7 que 7 y 6.

- ¿Cuántas parejas no ordenadas y sin repetición, se pueden formar con los elementos de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$?

Si t es la cantidad total de parejas ordenadas que se pueden formar con los elementos de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ entonces la cantidad total de arreglos que resuelven el problema es $120\,X\,t$ o $4\,X\,5\,X\,6\,X\,t$.

Para calcular "t" se hará el producto cartesiano $S\,X\,S$ que tiene $7\,X\,7 = 49$ elementos; para facilitar, reconocer o construir patrones, sus elementos se organizan en una matriz.

Los 49 elementos de esta matriz se van a organizar en tres conjuntos: los de la diagonal principal, que son 7, uno por cada elemento de S, que no se van a contar porque cada uno de ellos tiene sus componentes iguales y no se permiten arreglos con repetición; los otros dos conjuntos son los de la matriz triangular superior y la inferior.

A continuación se escribirá la matriz triangular superior, la diagonal principal y la diagonal de la matriz triangular inferior, contigua a la diagonal principal.

$$S\,X\,S = S^2 \qquad \begin{bmatrix} (1,7) & (2,7) & (3,7) & (4,7) & (5,7) & (6,7) & (7,7) \\ (1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) & (7,6) \\ (1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) & (7,5) \\ (1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) & (7,4) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) & (7,3) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) & (7,2) \\ (1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1) & (7,1) \end{bmatrix}$$

Al examinar las diagonales de las matrices triangulares, se aprecia que ellas son simétricas dos a dos, por ejemplo, las dos contiguas a la diagonal principal son:

$$D^1 = \{(1,2), \quad (2,3), \quad (3,4), \quad (4,5), \quad (5,6), \quad (6,7)\}$$

$$D_1 = \{(2,1), \quad (3,2), \quad (4,3), \quad (5,4), \quad (6,5), \quad (7,6)\}$$

Como interesa contar parejas no ordenadas, entonces $(x, y) = (y, x)$, por tanto, $D^1 = D_1$.Esta misma relación se da entre las demás diagonales de las dos matrices triangulares.

Así, si en esta matriz se trata de contar parejas no ordenadas y sin repetición, basta contar los elementos de cualquiera de las matrices triangulares.

En cualquiera de ellas hay: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ elementos.

Como ya se recordó para el alumno 16, esta suma es un caso particular de la suma de los primeros "n" números naturales:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

De este modo:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6\ X\ 7}{2} = 3\ X\ 7 = 7\ X\ 3$$

Por lo tanto, $t = 3\ X\ 7$ y el total de arreglos buscado es:

$$4\ X\ 5\ X\ 6\ X\ t = 4\ X\ 5\ X\ 6\ X\ (7\ X 3)$$

$$4\ X\ 5\ X\ 6\ X\ t = \ 4\ X\ 5\ X\ 6\ X\ 7\ X\ (3)$$

$$4\ X\ 5\ X\ 6\ X\ t = 3\ X\ 4\ X\ 5\ X\ 6\ X\ 7 = 2520$$

b. Opciones de los pasajeros de escoger puesto antes y después de subir al bus.

I. Las filas de las matrices como $\mathbf{5-uplas}$.

Cada fila de las matrices se tomará como una $5-uplas$ y la posición de cada componente indicará el puesto que le corresponde en el bus, por ejemplo, la fila 3 de $AB_{6,7}$, (A,B,D,C,E) tiene como 3ª componente D, entonces a este pasajero le corresponde el puesto 3 en el bus; la 1ª componente es A, así, al pasajero A le corresponde el puesto 1 del bus.

II. Opciones de cada pasajero antes de subir al bus

A partir del arreglo (A,B,C,D,E) el alumno 20 afirma correctamente que:

"… En el puesto 1 se había podido sentar las personas B ó C ó D ó E, en el puesto 2, A ó C ó D ó E, en el puesto 3, A ó B ó D ó E, en el puesto 4, A ó B ó C ó E, en el puesto 5, A ó B ó C ó D, en este caso el puesto 6 y 7 quedan vacíos pero con la posibilidad de que se habían podido sentar cualquiera de las 5 personas en cada uno de ellos."

Pero la cantidad de pasajeros que puede ocupar un determinado puesto cuando el bus está desocupado, va cambiando cuando se sube al bus el primer pasajero, y sigue cambiando a medida que siguen subiendo pasajeros hasta quedar sentados los 5 pasajeros.

Es cierto que antes de subir al bus y vacíos cualquier par de puestos, en particular los puestos 6 y 7, cualquier pasajero se puede sentar en cualquiera de los cinco puestos, 1,2,3,4,5, por ejemplo, como dice el alumno, en el puesto 3 no solo se puede sentar C sino " 3 – A ó B ó D ó E".

En notación del alumno 20, cada pasajero que no ha subido al bus, tiene disponibles los siguientes puestos:

“1 – A ó B ó C ó D ó E.

2 – A ó B ó C ó D ó E

3 – A ó B ó C ó D ó E

4 – A ó B ó C ó D ó E

5 – A ó B ó C ó D ó E

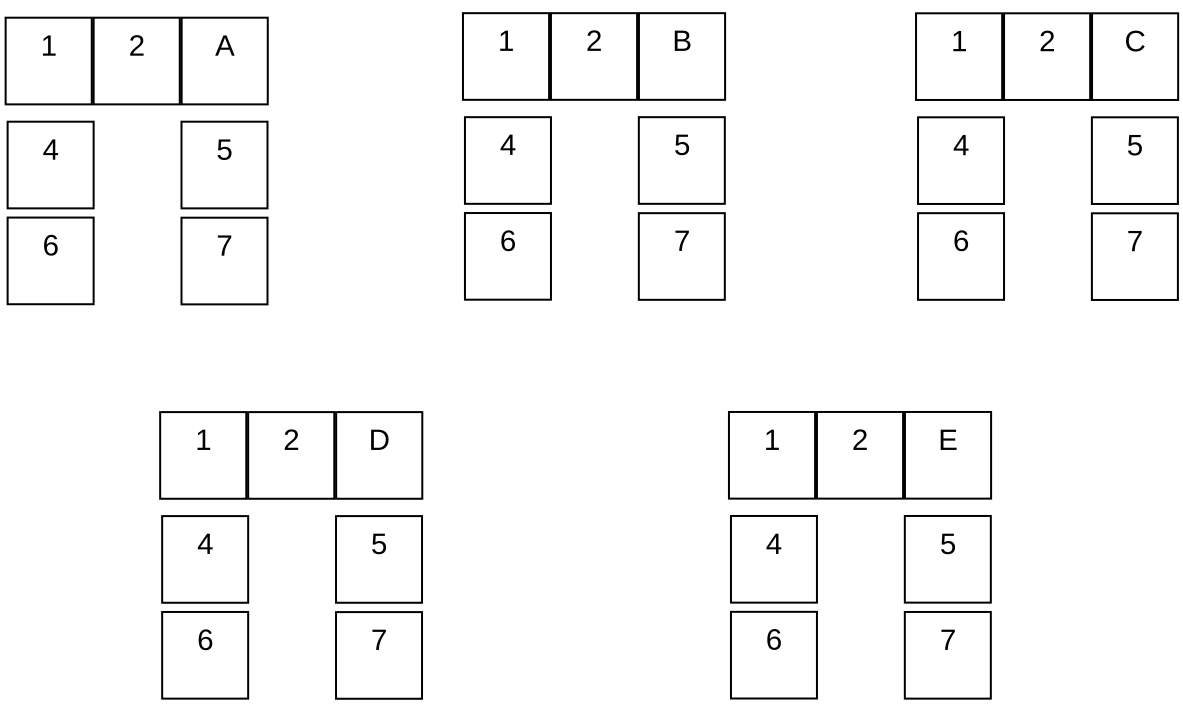
6 – A ó B ó C ó D ó E

7 – A ó B ó C ó D ó E.

Hay 35 maneras diferentes de que las personas se sienten teniendo en cuenta que siempre quedan dos espacios vacíos.”

Mediante el diagrama propuesto por el alumno 20, por ejemplo, la asignación para el puesto 3 podría quedar:

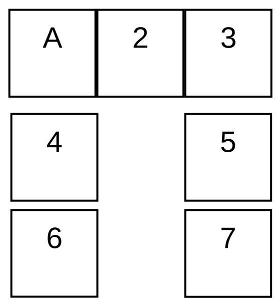
3 – A ó B ó C ó D ó E



i. Subido el primer pasajero, digamos A, sentado en el puesto 1 y vacíos los puestos 6 y 7, ya no quedan 5 puestos desocupados sino 4, por esto B, C, D ó E no se pueden sentar en uno cualquiera de los 5 puestos del bus 1, 2, 3, 4, ó 5 sino en uno cualquiera de los 4 puestos 2, 3, 4 ó 5 del bus.

Con la notación propuesta por el alumno 20 y suponiendo que es A quien se sienta en el puesto 1, esta primera ubicación queda:

Figura 2-31: El pasajero A ocupa el puesto 1 (Autor)

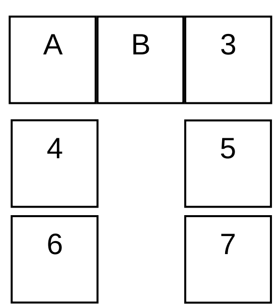


1 – A ó B ó C ó D ó E.

i. Si se sube el 2º pasajero, Digamos B y se sienta en el puesto 2 ya no quedan 4 puestos desocupados sino 3, por esto, C, D ó E no se pueden sentar en cualquiera de los 4 puestos, 2, 3, 4, 5 sino en uno cualquiera de los 3 puestos 3, 4 ó 5 del bus.

Con la notación del alumno 20 y suponiendo que es B quien se sienta en el puesto 2, esta segunda ubicación queda:

Figura 2-32: El pasajero A ocupa el puesto 1 y B el puesto 2 (Autor)



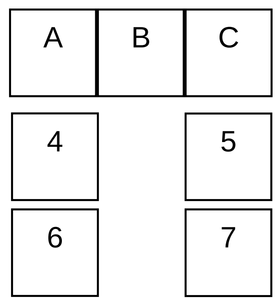
1 – A ó B ó C ó D ó E.

2 – B ó C ó D ó E.

ii. Si se sube el 3º pasajero, Digamos C y se sienta en el puesto 3 ya no quedan 3 puestos desocupados sino 2, por esto, D ó E no se pueden sentar en cualquiera de los 3 puestos, 3, 4 ó 5 sino en uno cualquiera de los 2 puestos 4 ó 5 del bus.

Con la notación del alumno 20 y suponiendo que es C quien se sienta en el puesto 3, esta segunda ubicación queda:

Figura 2-33: El pasajero A ocupa el puesto 1, B el puesto 2 y C el puesto 3 (Autor)



1- A ó B ó C ó D ó E.

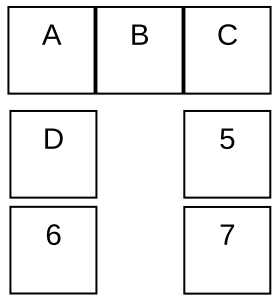
2– B ó C ó D ó E.

3– C ó D ó E.

iii. Si se sube el 4º pasajero, Digamos D y se sienta en el puesto 4 ya no quedan 2 puestos desocupados sino 1, por esto, E, el ultimo pasajero, ya no se pueden sentar en cualquiera de los 2 puestos, 4 ó 5 sino en el puesto 5 del bus.

Con la notación del alumno 20 y suponiendo que es D quien se sienta en el puesto 4, esta segunda ubicación queda:

Figura 2-34: El pasajero A ocupa el puesto 1, el B el puesto 2, C el puesto 3 y D el puesto 4 (Autor)



1 – A ó B ó C ó D ó E.

2 – B ó C ó D ó E.

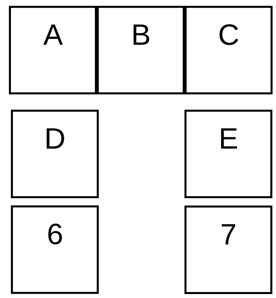
3 – C ó D ó E.

4 – D ó E.

iv. Por la manera como en este caso se escogieron los pasajeros y los puestos para subir al bus, es E quien quedo de ultimo y el puesto que quedo desocupado fue el 5. Así, E al subir al bus encontrara que dejando vacios los puestos 6 y 7, le corresponde sentarse en el puesto 5.

v. Con la notación del alumno 20 y suponiendo que es D quien se sienta en el puesto 4, esta segunda ubicación queda:

Figura 2-35: El pasajero A ocupa el puesto 1, B el puesto 2, C el puesto 3, D el puesto 4 y E el puesto 5 (Autor)



1- A ó B ó C ó D ó E.

2 – B ó C ó D ó E.

3 – C ó D ó E.

4 – D ó E.

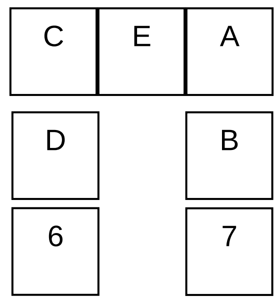
5 - E.

Por el principio de la multiplicación y vacios los puestos 6 y 7, la cantidad de maneras de distribuir 5 pasajeros en 5 sillas es:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

vi. Si en vez de ocupar A el puesto 1, lo ocupa otro pasajero cualquiera y en los demás puestos no se conserva el orden alfabético sino, por ejemplo, C,E,A,D y B, el diagrama quedaría:

Figura 2-36: El pasajero A ocupa el puesto 3, B el puesto 5 y C el puesto 1, D el 4 y E el puesto 2. (Autor)



1 – A ó B ó C ó D ó E.

2 – A ó B ó D ó E.

3 – A ó B ó D.

4 – B ó D.

5 – B.

Nótese que en esta distribución E no es el último pasajero en subir al bus ni ocupa al puesto 5 como en la distribución anterior.

Por el principio de la multiplicación y vacíos los puestos 6 y 7, nuevamente serian $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$, maneras de distribuir 5 pasajeros en 5 sillas.

vii. En general, estando vacíos los puestos 6 y 7, si en el puesto 1 se sienta uno cualquiera de los 5 pasajeros, en el puesto 2 uno cualquiera de los 4 pasajeros restantes, en el puesto 3 uno cualquiera de los 3 pasajeros restantes, en el puesto 4 uno cualquiera de los 2 pasajeros restantes y en el puesto 5 el último pasajero, por el principio de la multiplicación, la cantidad de formas de organizar 5 pasajeros en 5 sillas es:

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

3 Conclusiones y recomendaciones

3.1 Conclusiones

3.1.1 Respecto a los objetivos específicos.

a. Objetivo específico I. Identificar las estrategias empleadas por estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima en la resolución de problemas simples de combinatoria.

Con respecto a este objetivo se puede decir lo siguiente: La revisión y análisis de los 45 cuestionarios, permitió identificar tres estrategias de solución de problemas simples de combinatoria: Analítica, enumeración y gráfica, las cuales fueron caracterizadas de la siguiente manera:

I. Analítica

i. Énfasis en las formulas: en esta estrategia se encuentran los alumnos que antes de aplicar una fórmula, no proponen, por ejemplo, casos particulares, diagramas, tablas, listados, la caracterización de arreglos (ordenados sin repeticiones y elementos distinguibles) que sugieren un patrón que justifique la aplicación de una determinada fórmula, entonces se dirá que la estrategia utilizada es del tipo analítica

ii. Énfasis en la narración: En esta estrategia, el alumno describe cada uno de los pasos de la solución, concluyendo con una operación que es la aplicación de una fórmula o un principio de conteo (suma, multiplicación, división), cuyos términos corresponden a los pasos escritos y el resultado de la operación es la respuesta del alumno al problema.

El estudiante no siempre empieza su descripción con un dibujo del bus y de los pasajeros, un diagrama que los represente, una tabla, listados o algunos ejemplos de arreglos que solucionan el problema; en caso de hacerlo, el dibujo, el diagrama, la tabla, el listado o los ejemplos, son una guía para hacer la descripción de la solución.

II. Enumeración

i. Conteo de puestos vacíos: En esta estrategia, desde el inicio del problema, el alumno hace explícito que está interesado en contar parejas de puestos vacíos. El estudiante hace un listado de todas las posiciones que pueden ocupar los pasajeros cuando hay dos sillas desocupadas o un listado de todos los arreglos de las sillas vacías.

Para el caso de los arreglos con pasajeros, puede ocurrir que se hagan todas las configuraciones, solo para dos puestos específicos y después se extienda el resultado para las demás parejas de puestos. A partir del conteo de arreglos de pasajeros con dos puestos vacíos, el estudiante propone una respuesta de selección al problema

III. Gráfica.

i. Alumnos que como un punto de partida dibujan el bus y las personas, para obtener información que les permita decidir hacer un listado, aplicar una fórmula u otro tipo de resolución.

Esta estrategia puede resultar productiva cuando dicha representación relacione todas las variables relevantes del problema y exponga claramente aspectos cruciales en la resolución, por ejemplo, que permita identificar características como la distinción de los objetos, repetición e importancia del orden en que se distribuyen estos, permitiendo tomar la decisión adecuada frente a cual operación combinatoria usar, o, la reorganización de los datos y el uso de otra estrategia.

La siguiente tabla muestra la clasificación de los cuestionarios de los alumnos.

<table>
<tr><th rowspan="2">Estrategia</th><th rowspan="2" colspan="2">Caracterización</th><th colspan="2">Respuesta</th><th colspan="2">Revisión de la respuesta</th><th rowspan="2">Frecuencia de la estrategia</th></tr>
<tr><th>correcto</th><th>incorrecto</th><th>Si</th><th>No</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Analítica Énfasis en la fórmula</td><td colspan="2">Énfasis en la aplicación de una fórmula</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="3">3</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>Con justificación previa</td><td>sin justificación previa</td></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Analítica Enfoque Narrativo</td><td colspan="2">Énfasis en la descripción cada uno de los pasos de la solución</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td>Enumerativa: conteo de puestos vacíos</td><td colspan="2">Interesado en contar parejas de puestos vacíos</td><td>0</td><td>14</td><td>3</td><td>11</td><td>14</td></tr>
<tr><td>Gráfica</td><td colspan="2">Obtener información de un Dibujo que permita decidir hacer un listado, aplicar una fórmula u otro tipo de resolución.</td><td>0</td><td>13</td><td>3</td><td>10</td><td>13</td></tr>
<tr><td>Sin clasificación o sin estrategia</td><td colspan="2">La estratégia no se identifica con la clasificación propuesta.</td><td>0</td><td>6</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td></tr>
</table>

b. Objetivo específico II. Clasificar las estrategias empleadas por estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima en la resolución de problemas simples de combinatoria.

Con respecto a este objetivo se puede decir lo siguiente:

De la estrategia analítica se identificaron los siguientes tipos: la narrativa y el uso de fórmulas. En el enfoque narrativo el alumno describe paso a paso su estrategia. En el uso de fórmulas el alumno se concentra en los números que aparecen en el enunciado y luego acude a recordar fórmulas que le permitan relacionar todos o algunos de dichos números.

De la estrategia enumerativa se identificaron los siguiente tipos: alumnos que usan letras distintas para identificar las personas y casillas idénticas (salvo la posición dentro del bus) para los puestos. Alumnos que con un mismo símbolo, por ejemplo, una X y casillas para los puestos. Estudiantes que usan números para distinguir las personas y letras para los puestos o viceversa

De la estrategia gráfica se identificaron los siguientes tipos: aquí se identifican estudiantes cuya representación es una copia muy cercana a la realidad; sillas, pasajeros, conductor, bus, volante… Estudiantes que representan en un dibujo únicamente la posición de las sillas y asignan algún símbolo para representar las personas. Y estudiantes quienes utilizan un esquema de casillas, que les permite mayor abstracción y cercanía a una respuesta correcta.

c. Objetivo específico III. Ordenar por niveles las estrategias específicas identificadas en los estudiantes de VI a IX semestre de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima cuando resuelven problemas simples de combinatoria.

El trabajo aquí elaborado no sugiere que unas estrategias usadas por los estudiantes sean mejores que otras, lo que se pretende es potencializar cada una de ellas y presentar las cosas que los alumnos analizados pudieron haber hecho, mejorando su estrategia inicial. Así por ejemplo, el uso de la estrategia gráfica puede resultar productiva cuando dicha representación relacione todas las variables relevantes del problema y exponga claramente aspectos cruciales en la resolución, por ejemplo, que permita identificar características como la distinción de los objetos, repetición e importancia del orden en que se distribuyen estos, permitiendo tomar la decisión adecuada frente a cual operación combinatoria usar, o, la reorganización de los datos y el uso de otra estrategia. El empleo de la estrategia enumerativa cuando es de forma sistemática, permite reconocer patrones que permiten intuir su comportamiento y predecir un resultado correcto en el caso de que la cantidad de arreglos sea muy grande y de listar la totalidad de configuraciones cuando estas son pocas. La solución analítica, supone un análisis previo de las variables que se relacionan y concluye en el uso de una formula o de un argumento lógico después de describir los pasos para tomar una decisión.

A pesar de lo anterior, y de acuerdo a la información recogida de los cuestionarios, respecto a este objetivo se puede decir lo siguiente: Por grado de generalidad y para este Trabajo, las estrategias de solución identificadas en las respuestas de los alumnos quedarían en el siguiente orden: analítica, enumerativa y gráfica. Siendo la primera la que mejores resultados arrojó y la ultima la que se usó de manera menos adecuada, por parte de los estudiantes que resolvieron el cuestionario.

3.1.2 Proyecciones

En este Trabajo la población fueron estudiantes de VI-IX semestre de Licenciatura en Matemáticas, hicieron parte conceptos matemáticos como variación, combinación, principios de la suma, la multiplicación, división y conceptos de la Didáctica como estrategia de solución, problemas combinatorios simple, variable didáctica y esquematización y formalización progresivas, por esto, se sugiere la realización de Trabajos en Didáctica de la combinatoria como los siguientes:

a. Trabajos que sigan estudiando estrategias en alumnos de todos los semestres de Licenciatura en Matemáticas para identificar tendencias en las estrategias de solución de problemas combinatorios simples cuando han cursado materias de las que hacen parte temas de Combinatoria.

b. Trabajos para estudiar estrategias, con la misma finalidad que los anteriores pero con problemas combinatorios compuestos.

c. Con la misma población, unos Trabajos que identifiquen errores, dificultades y conflictos, otros Trabajos que clasifiquen errores, dificultades y conflictos en la solución de problemas combinatorios simples y compuestos.

d. Trabajos en Didáctica de la Combinatoria para proponer niveles de razonamiento combinatorio en alumnos de Licenciatura en Matemáticas.

e. Trabajos que hagan propuestas de enseñanza y aprendizaje de la Combinatoria en la formación inicial de profesores de Matemáticas.

f. Trabajos que hagan propuestas de evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de la Combinatoria en la formación inicial de profesores de Matemáticas.

g. Trabajos cuyos problemas sean el resultado de los informes o registros que hacen los alumnos de la Licenciatura en Matemáticas en sus cursos de Práctica docente.

h. Trabajos que estudien la manera como en los textos escolares para la enseñanza de la Matemática se propone la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de la Combinatoria.

i. Trabajos de Didáctica de la Combinatoria con estudiantes de Licenciatura en matemática realista (EMR) y a la resolución de problemas desde el punto de vista de George Polya.

j. Trabajos en Didáctica de la Combinatoria que exploren nuevas clasificaciones de los problemas combinatorios.

3.1.3 Otras Conclusiones

a. A pesar de que en este estudio no se analizó el problema 2, se pudo notar que gran parte de los estudiantes asumen que este se puede resolver de la misma manera que el primero, pero, a pasar de haber semejanzas como: hay que relacionar dos conjuntos de objetos distintos; en el primer problema personas y puestos del bus y en el segundo problema frutas y días de la semana; los dos problemas son propios de la combinatoria, entre otras. Existen diferencias como: la cantidad de arreglos posibles, la distinción de los elementos, las cantidades relacionadas en el primer problema son dos, puestos y pasajeros y en el segundo son tres, días cantidad de manzanas y cantidad de peras, así quien acude, por ejemplo, a el uso de fórmulas para el problema uno, se verá en conflicto a decidir que pareja de datos de los tres que hay en el enunciado del problema 2 debe usar. Quienes acudan a resolver primero el problema 2 de forma numérica listando los posibles arreglos, se enfrentaran a un inconveniente si quieren usar la misma estrategia resolviendo el problema 1 debido a la cantidad de arreglos posibles. Y, quienes usen estrategia grafica en el problema 1 correrán el riesgo, por ejemplo, de distinguir lo indistinguible en el segundo

.

b. Se cree que al aplicar una estrategia a un problema combinatorio simple, ésta debe resolverlo correctamente, si no es así, la estrategia es inadecuada, e inmediatamente y sin revisarla, hay que reemplazarla por otra.

c. Los estudiantes no están familiarizados con la etapa de revisión del problema, se pudo notar que en la mayoría de cuestionarios los estudiantes dan por terminado el problema sin someter su respuesta a ningún tipo de examen que le permita, corregir, reafirmar o construir otras alternativas de solución.

3.2 Recomendaciones

3.2.1 Que durante la resolución de problemas en clase:

a. Exista un momento para dar ejemplos de soluciones particulares con la participación de los alumnos.

b. Se expliciten las estrategias de solución que se utilicen en cada problema.

c. Que se discuta cómo de cada estrategia se puede obtener información para proponer un plan de solución, ejemplos, conjeturas y, en particular, llegar a un resultado correcto.

d. Que a partir de uno de los problemas estudiados en clase y en cada área de la Matemática escolar, por ejemplo, una vez al mes, dando una semana a los estudiantes y como una manera de estimular su imaginación y creatividad, se les solicite proponer nuevos problemas y nuevas soluciones al problema discutido.

e. En particular, que la enseñanza de la combinatoria se haga de tal manera que en los alumnos quede la idea de que una entre varias estrategias de solución son las fórmulas y que no siempre la estrategia inicial de solución tiene que ser una fórmula.

3.2.2 Visión retrospectiva

En la solución de problemas, poner en práctica la fase que Polya (1979; 19,35, 53) llama "visión retrospectiva"

3.2.3 Para la Licenciatura en Matemáticas

Que en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Tolima, la teoría sobre resolución de problemas, especialmente de problemas combinatorios, haga parte de una Electiva, un Seminario y de programas de formación continuada de profesores de Matemáticas, tanto egresados como de planta y catedráticos de la Licenciatura.

3.2.4 Para los profesores

a. Que en todos los niveles escolares, desde el Preescolar hasta la Universidad, los profesores de Matemáticas orienten su clase teniendo en cuenta una Teoría de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática.

b. Que en cualquier clase de Matemáticas se haga el mejor esfuerzo para que, con distinto énfasis, siempre estén presentes los cinco pensamientos que se proponen en los Lineamientos curriculares de Matemáticas: espacial, numérico, métrico, aleatorio y variaciones.

c. En cuanto a la evaluación cuantitativa, tener en cuenta que en lo que escriben los alumnos en una previa, no siempre queda explícito todo lo que ellos piensan o pensaron sobre los distintos pasos y conceptos matemáticos presentes en la solución propuesta, por esto conviene dedicar un tiempo a que oralmente ellos amplíen las justificaciones, operaciones, definiciones, propiedades y pasos en la solución escrita.

3.2.5 Para los Investigadores

Para estudios similares a este, se sugiere que después de un primer análisis de las respuestas de los alumnos, seleccionar aquellos que, de acuerdo con los objetivos, conviene hacerles entrevista para aumentar la cantidad y calidad de la información requerida para el logro de los objetivos.

A. Anexo: De estos principios, presentada por Alsina

Principio	*¿Qué es?*	*¿Cómo puede trabajarse?*
De actividad	Las matemáticas se consideran una actividad humana. La finalidad de las matemáticas es *matematizar* (organizar) el mundo que nos rodea, incluyendo a la propia matemática. La matematización es una actividad de búsqueda y de resolución de problemas, pero también es una actividad de organización de un tema.	Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar. Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar y definir, y generalizar conlleva reflexión.
De realidad	Las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en *contextos reales*. Un contexto real se refiere tanto a situaciones problemáticas de la vida cotidiana y situaciones problemáticas que son reales en la mente de los alumnos.	El contexto de los problemas que se presentan a los alumnos puede ser el mundo real, pero esto no es necesariamente siempre así. Es necesario que progresivamente se desprendan de la vida cotidiana para adquirir un carácter más general, o sea, para transformarse en modelos matemáticos.
De niveles	Los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión: - Situacional: en el contexto de la situación. - Referencial: esquematización a través de modelos, descripciones, etc. - General: exploración, reflexión y generalización. - Formal: Procedimientos estándares y notación convencional.	Esquematización progresiva (profesor) y reinvención guiada (aprendiz): las situaciones de la vida cotidiana son matematizadas para formar relaciones más formales y estructuras abstractas.
De reinvención guiada	Proceso de aprendizaje que permite reconstruir el conocimiento matemático formal.	Presentar situaciones problemáticas abiertas que ofrezcan una variedad de estrategias de solución. Permitir que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. Discutir el grado de eficacia de las estrategias usadas.

De interacción	La enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social. La interacción entre los estudiantes y entre los estudiantes y los profesores puede provocar que cada uno reflexione a partir de lo que aportan los demás y así poder alcanzar niveles más altos de comprensión.	La negociación explícita, la intervención, la discusión, la cooperación y la evaluación son elementos esenciales en un proceso de aprendizaje constructivo en el que los métodos informales del aprendiz son usados como una plataforma para alcanzar los formales. En esta instrucción interactiva, los estudiantes son estimulados a explicar, justificar, convenir y discrepar, cuestionar alternativas y reflexionar.
De interconexión	Los bloques de contenido matemático (numeración y cálculo, álgebra, geometría,…) no pueden ser tratados como entidades separadas.	Las situaciones problemáticas deberían incluir contenidos matemáticos interrelacionados.

B. Anexo: Cuestionario Piloto

Este problema hace parte de un cuestionario Piloto para el Trabajo de Grado "**ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS**", de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales. Gracias por su colaboración.

Nombre: ______________________________ Código: _________________

Semestre______________ Fecha: _________________

Problemas:

1. Una madre de familia tiene dos peras y tres manzanas para la lonchera de su hijo. Cada día durante 5 días seguidos da a su hijo una fruta. ¿De cuántas maneras puede hacer esta distribución? Justificar su respuesta. ***(Tomado y adaptado de N. Vilenkin. (1972) ¿De cuántas formas? Combinatoria. Moscú: Editorial MIR. pág. 135)***

2. En un vehículo de servicio público intermunicipal hay cupo para 7 personas. Al llegar la hora de salida el auto tiene solamente 5 pasajeros ¿de cuántas formas se pueden sentar las 5 personas en los 7 puestos? Justificar su respuesta.

C. Anexo: Cuestionario Final

Universidad del Tolima

Este problema hace parte de un cuestionario para el Trabajo de Grado "**ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMBINATORIOS EN ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS**", de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales. Gracias por su colaboración.

Nombre: ______________________________ Edad______________

Código: _________________ Semestre______________

Fecha: __________________ Teléfono______________

E – mail__________________ Dirección______________

Problemas:

1. En un vehículo de servicio público intermunicipal hay cupo para 7 personas. Al llegar la hora de salida el auto tiene solamente 5 pasajeros ¿de cuántas formas se pueden sentar las 5 personas en los 7 puestos? Justificar su respuesta.

2. Una madre de familia tiene dos peras y tres manzanas para la lonchera de su hijo. Cada día durante 5 días seguidos da a su hijo una fruta. ¿De cuántas maneras puede hacer esta distribución? Justificar su respuesta. ***(Tomado y adaptado de N. Vilenkin. (1972) ¿De cuántas formas? Combinatoria. Moscú: Editorial MIR. pág. 135)***

D. Anexo: Solución del cuestionario final por parte del estudiante 45.

1. Aplicando o haciendo uso de la fórmula de la combinatoria me daría:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!(7-5)!}$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(5\times4\times3\times2\times1)(7-5)!}$$

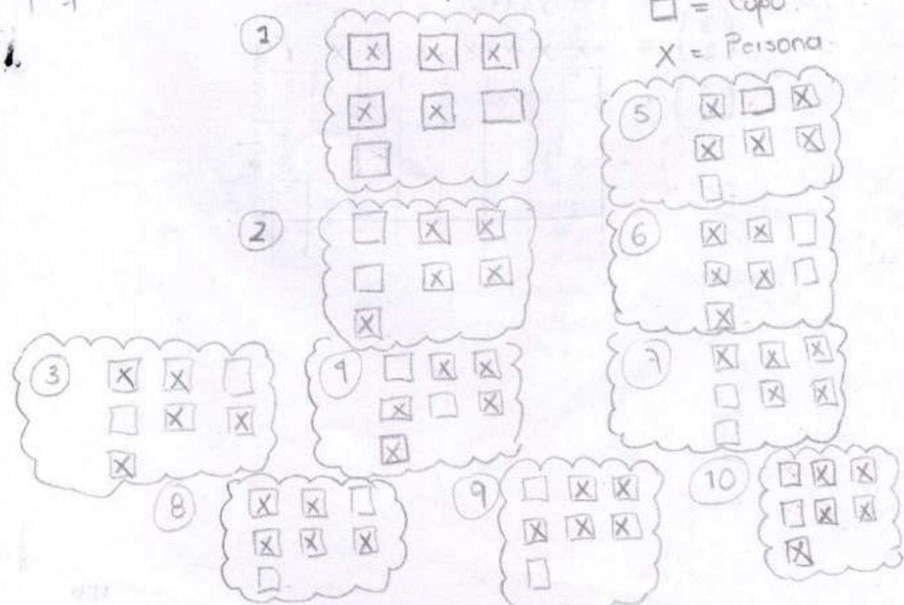
$$\binom{7}{5} = \frac{5,040}{(120)(7-5)!}$$

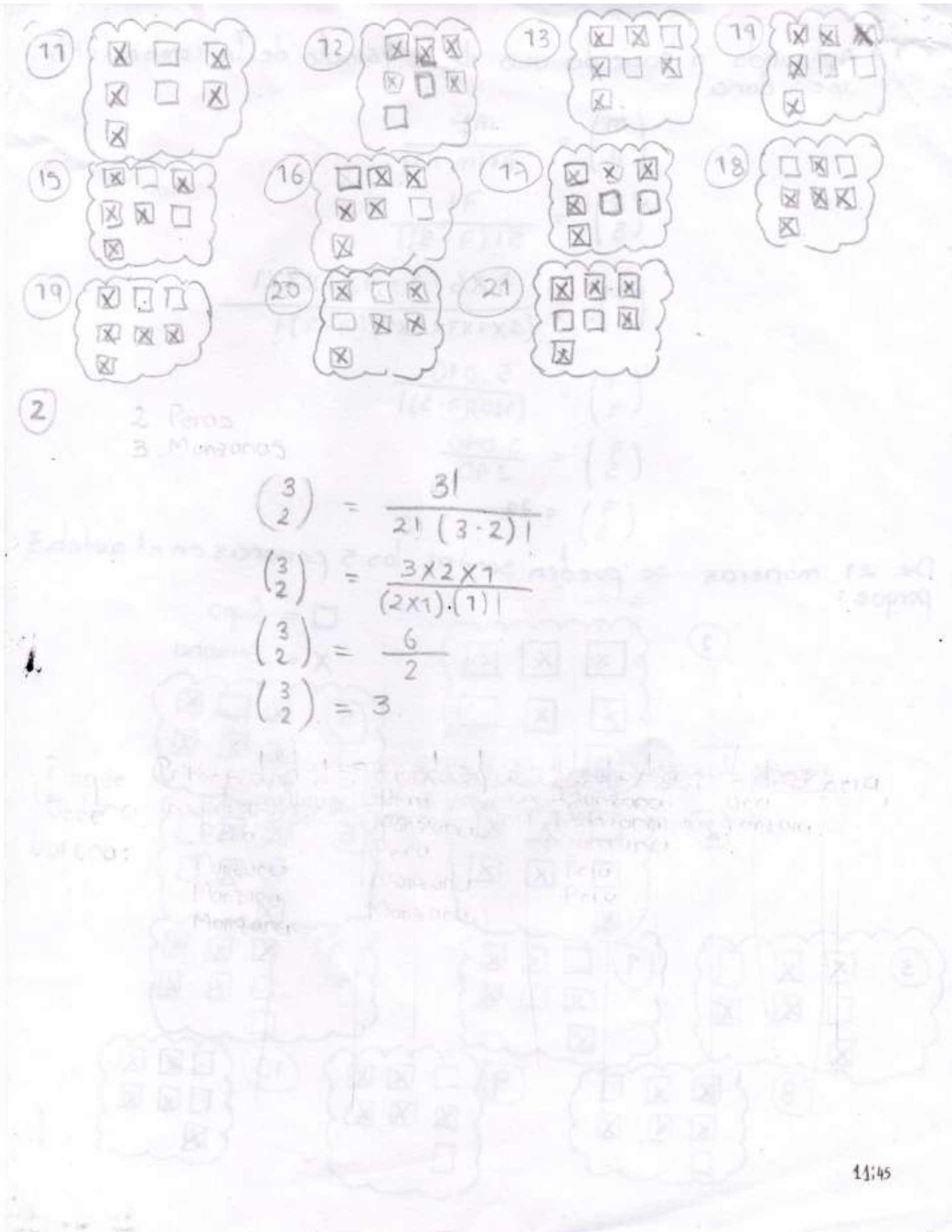
$$\binom{7}{5} = \frac{5\,040}{240}$$

$$\binom{7}{5} = 21.$$

De 21 maneras se pueden sentar los 5 personas en el autobús porque:

□ = Cupo
X = Persona





11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

2

2 Peras
3 Manzanas

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!}$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3\times2\times1}{(2\times1).(1)!}$$

$$\binom{3}{2} = \frac{6}{2}$$

$$\binom{3}{2} = 3$$

11:45

E. Anexo: Solución del cuestionario final por parte del estudiante 1.

Cupo 7 Personas.
5 Pasajeros.

la Primer Persona tiene 7 obciones Para sentarse la segunda solo tendrá 6, ya que el Primer Pasajero ya tiene ocupado una silla, el tercer Pasajero tendría 5 asientos en los cuales se puede sentar, el cuarto Pasajero tendría 4 obsiones en las que podría ocupar, y el 5 ~~Persona~~ Pasajero tendrá tres obsiones no más, ya que los Pasajeros anteriores ya han ocupado 4 puestos por tanto. las combinaciones que se pueden dar estan justificadas por la operación

$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$ formas se pueden sentar.

2) 3 Peras 2 Mantonas. 5 dias.

de cuantas formas puede hacer esta distribución

Dia	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
1	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2
2	P_2	M_2	M_1	P_3	P_1
3	P_3	P_2	M_2	M_1	P_3
4	M_1	P_3	P_2	M_2	M_1
5	M_2	M_1	P_3	P_2	M_2

y Podemos seguir haciendo hasta que termine las repeticiones Pero Podemos aplicar el mismo metodo de el Primer ejercicio.

el cual sea si colocamos en el primer dia, una manzana, ó una pera lo que sea. aqui no importa el orden, sabemos que la segunda fruta solo tendria cuatro formas en la que puede ir, osea puede ir en cualquiera de los 4 dias restantes, la tercer fruta tendria 3 dias en los cuales puede ir ya que han ocupado 2 lugares anteriormente, la cuarta fruta tendria tan solo 2 dias en los que puede ir, ya teniendo tres dias ocupados por las tres frutas anteriores, y nuestra ultima ó quinta fruta solo tendria un lugar donde ir, ya que todos los otros dias ya estan ocupados. y esto se expresa de la siguiente forma

5! : cinco factorial que es lo mismo que decir

1. $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ combinaciones.
o formas en las que se pueden repartir 5 frutas en 5 dias.

F. Anexo: Solución del cuestionario final por parte del estudiante 16.

Punto 1

* hacer un dibujo o ilustracion siempre es de mucha ayuda para atacar el problema.

sean A B C D E F G los cupos existentes en el vehiculo.

de este modo, existen varias situaciones.

1. Si A y B estan desocupados.

sean 1, 2, 3, 4, 5 los pasajeros entonces se pueden acomodar de la siguiente forma: * si varia el pasajero 1

①	*	*	*	*
1 → C	1 → D	1 → E	1 → F	1 → G
2 → D	2 → E	2 → F	2 → G	2 → C
3 → E	3 → F	3 → G	3 → C	3 → D
4 → F	4 → G	4 → C	4 → D	4 → E
5 → G	5 → C	5 → D	5 → E	5 → F

* si varia el pasajero 2.

②	③	④	⑤	⑥
2 → C	2 → D	2 → F	2 → G	2 → E
1 → D	1 → E	1 → G	1 → C	1 → F
3 → E	3 → F	3 → C	3 → D	3 → G
4 → F	4 → G	4 → D	4 → E	4 → C
5 → G	5 → C	5 → E	5 → F	5 → D

ahora si varia el 3

3 → $\boxed{C}$	3 → $\boxed{D}$	3 → $\boxed{E}$	3 → $\boxed{F}$	3 → $\boxed{G}$
1 → $\boxed{D}$	1 → $\boxed{E}$	1 → $\boxed{F}$	1 → $\boxed{G}$	1 → $\boxed{C}$
2 → $\boxed{E}$	2 → $\boxed{F}$	2 → $\boxed{G}$	2 → $\boxed{C}$	2 → $\boxed{D}$
4 → $\boxed{F}$	4 → $\boxed{G}$	4 — $\boxed{C}$	4 → $\boxed{D}$	4 → $\boxed{E}$
5 → $\boxed{G}$	5 → $\boxed{C}$	5 — $\boxed{D}$	5 → $\boxed{E}$	5 → $\boxed{F}$
(7)	(8)	(9)	(10)	(11)

si varia el puesto 4.

4 → $\boxed{C}$	4 — $\boxed{D}$	4 — $\boxed{E}$	4 — $\boxed{F}$	4 — $\boxed{G}$
1 → $\boxed{D}$	1 — $\boxed{E}$	1 — $\boxed{F}$	1 — $\boxed{G}$	1 — $\boxed{C}$
2 → $\boxed{E}$	2 — $\boxed{F}$	2 — $\boxed{G}$	2 — $\boxed{C}$	2 — $\boxed{D}$
3 → $\boxed{F}$	3 — $\boxed{G}$	3 — $\boxed{C}$	3 — $\boxed{D}$	3 — $\boxed{E}$
5 → $\boxed{G}$	5 — $\boxed{C}$	5 — $\boxed{D}$	5 — $\boxed{E}$	5 — $\boxed{F}$
(12)	(13)	(14)	(15)	(16)

si se varia el puesto 5.

(*)				
5 — $\boxed{C}$	5 — $\boxed{D}$	5 — $\boxed{E}$	5 — $\boxed{F}$	5 — $\boxed{G}$
1 — $\boxed{D}$	1 — $\boxed{E}$	1 — $\boxed{F}$	1 — $\boxed{G}$	1 — $\boxed{F}$
2 — $\boxed{E}$	2 — $\boxed{F}$	2 — $\boxed{G}$	2 — $\boxed{C}$	2 — $\boxed{C}$
3 — $\boxed{F}$	3 — $\boxed{G}$	3 — $\boxed{C}$	3 — $\boxed{D}$	3 — $\boxed{D}$
4 — $\boxed{G}$	4 — $\boxed{C}$	4 — $\boxed{D}$	4 — $\boxed{E}$	4 — $\boxed{E}$
(17)	$\boxed{*}$ (18)	* (19)	* (20)	(21)

observese que (*) = (*), $\boxed{*} = \boxed{*}$, * = *, * = *

Entonces tendriamos

21 opciones con A y B desocupados

21 → con A y C desocupados
21 → con A y D "
21 → con A y E "
21 → con A y F "
21 → con A y G "
21 → con B y C "
21 — con B y D

21 — con B y E "
21 — con B y F "
21 — con B y G "
21 — con C y D "
21 — con C y E "
21 — con C y F "
21 — con C y D "

21 - con D-E 〃
21 - con D-F 〃
21 - con D-6 〃
21 - con E-F 〃
21 - con E-6 〃
21 - con F-6 〃

Asi las opciones son $21 \times 21 = 441$

El número de opciones para instalar sean en el coche es 441

2. haciendo un proceso omologo al anterior se tiene el resultado.

G. Anexo: Solución del cuestionario final por parte del estudiante 20.

4) lo primero que se me viene a la cabeza es la ubicacion de los puestos en el bus que seria así

Entonces tengo los 7 puestos de los cuales solo estan ocupados 5

Voy a enumerar los puestos del 1 al 7 y las 5 personas de la A hasta la E

1	2	3
4		5
6		7

[illegible] en el puesto $\boxed{1}$-A, en el $\boxed{2}$-B, en el $\boxed{3}$-C, en el $\boxed{4}$-D y en el $\boxed{5}$-E, quedando vacios los puestos 6 y 7

entonces el bus quedaría así

A	B	C
D		E
6		7

Pero que pasa que en el puesto $\boxed{1}$ se habia podido sentar las personas B ó C ó D ó E, en el puesto $\boxed{2}$ A ó C ó D ó E, en el puesto $\boxed{3}$ – A ó B ó D ó E en el puesto $\boxed{4}$ — A ó B ó C o E, en el puesto $\boxed{5}$ A ó B o C ó D. en este caso el puesto 6 y 7 quedan vacios pero con la posibilidad de que se habian podido sentar cualquiera de los 5 personas en cada uno de ellos.

[1] → A ó B ó C ó D ó E
[2] → A ó B ó C ó D ó E
[3] → A ó B ó C ó D ó E
[4] → A ó B ó C ó D ó E
[5] → A ó B ó C ó D ó E
[6] → A ó B ó C ó D ó E
[7] → A ó B ó C ó D ó E

Hay 35 maneras diferentes de que las personas se sienten teniendo en cuenta que siempre quedan dos espacios vacíos.

2) P P M M M
M M P P M
M M M P P
P M M M P
M P M P M
M M P M P

4 Bibliografía

AA, VV. (2006). *Estandares Básicos de competencias.* Bogóta d.c: Ministerio de educacion Nacional de Colombia (MEN). Disponible en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Alisina, A. (2009). El aprendizaje realista: una contribucion de la investigacion. Educacion Matemática a la formacion del profesorado. Disponible en: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII-AngelAlsina.pdf

Aristizábal Zuluaga, D. P. (2012). *Propuesta Metodológica para el acercamiento del análisis combinatorio y probabilidades a situaciones cotidianas.* Medellin (Colombia): Universidad Nacional de Colombia.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didáctique des Mathématiques,*(10), 2-3, 241-286.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *UNO*(4), 53-61. Barcelona: Editorial GRAÓ.

Batanero, M. C. y Godino, J. D. y Navarro-Pelayo, V. (1994). Razonamiento combinatorio. Madrid: Editorial Síntesis.

Bonilla, D. y Rueda, M. (2011). *Niveles de razonamiento combinatorio que demuestran estudiantes universitarios.* Brasil: Conferencia interamericana de educación matemática C.I.A.E.M.

Bressan, A.; Zolkower, B. y Gallego, María Fernanda (2005). Los principios de la Educación Matemática Realista. En H. Alagia; A. Bressan y P. Sudovsky., En: Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. (págs. 69-98). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Brousseau, G. (2002). *Los diferentes roles del maestro. En: C. Parra y Saiz, I. (comps.). Didáctica deLas matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Editorial Paidós.

Cañón, C. (1993). *La Matemática: Creación y descubrimiento. .* Madrid: Universidad Pontificia Comillas (UPCO).

Cañón, C. (2004). Lo nuestro es lo infinito. UNO(37). Revista Didáctica de las Matemáticas, ,8-24. Barcelona: Editorial GRAÓ (Número monográfico: Filosofía y Matemáticas).

Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las Matemáticas para la educación infantil.* Madrid: Pearson Educación.

De Guzmán, M. (1993). *tendencias inovadoras en educacion mátematica*. (popular, Editor) disponible en:

http://www.oei.org.co/oeimad/edumat.htm

Ernest, P. (2004). ¿Son las Matemáticas descubiertas o inventadas? *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas.(37).,Barcelona:Editorial GRAÓ.25-31 (Número monográfico: Filosofía y Matemáticas).*

Española, R. A. (s.f.). *Diccionario de la lengua española*. Disponible en: http://dle.rae.es/?id=UELp1NP

Freudenthal, H. (1994). Problemas mayores de la educación matemática. En R. C. N., & E. S. (comps.), *Antología en Educación Matemática* (págs. 7-27). México: Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. .

Freundenthal, H. (1994). Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. (*Traducción, notas e introducción de Luis Puig*). México: P. 21 Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN.

Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una “educación matemática realista”. En N. Gorgorió, & J. D. (coords.)., *Matemática y Educación. Retos y Cambios desde una Perspectiva internacional.* (págs. 151-168.). Barcelona: ICE/GRAÓ.

González, S. (2011). F*ormación de conceptos en la enseñanza de la Matemática.* Seminario de Trabajo de Grado. Maestría en Educación. Ibagué: Universidad del Tolima)

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1991). *El Modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría.* Diponible en: http://www.uv.es/angel.gutierrez/marcopap.html

Hoffer, A. (Abril de 1990). La geometría es más que demostración. *Notas de Matemática,*(20), 10-24.

Joseph, G. G. (1991). *La cresta del pavo real , las matemáticas y sus raices no Europeas.* Madrid: Pirámide.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1998). *Pensar matemáticamente.* Madrid: Labor, S.A.

Meneses, I. y Vasquez, E. (2015) *Estrategias de resolucion de problemas combinatorios en cuarto grado*. Facultad de educacion. universidad del Tolima. Santiago Gonzalez.

Navarro-Pelayo, V. ; Batanero C. y Godino, J. D. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. En: Educación Matemática 8(1), 26-39. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/RAZON.pdf

Nieto Said, J.H. (1996). *Teoria combinatoria.* Maracaibo(Venzuela): Universidad del Zulia. disponible en: http://www.acm.ciens.ucv.ve/main/entrenamiento/material/TeoriaCombinatoria.pdf

Ortiz, C.; Méndez, A.; Martín, E. y J. Sendra (2011) *Tema 1: Combinatoria.* pág. 4. Disponible en: http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/matematica-discreta/contenidos/material-de-clase/tema-1

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Puig, L. (2001). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal.* disponible en: http://www.uv.es/puigl/intronota.pdf

Rico, L. (1995). Considereciones sobre el curriculo escolar de matemáticas. *Educacion Matemática*, 1(1), noviembre de 1995, 4-24. Bogotá: una empresa docente/Universidad de los Andes. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/984/

Roa Guzmán, R.; Batanero, M.C. y Godino, J. D. (2003). Estrategias generales y estrategias aritmeticas. *Educación Matemática. (15)2* , 5-25. Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/405/40515201.pdf

Roa Guzmán, R.; Batanero, M. C.; Godino, J. D. y Cañizares M. J. (1996). Estrategias en la resolucion de problemas combinatorios en estudiantes con preparacion matemática avanzada. *Epsilon, Vol 36*, 433-446. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/combinatoria.pdf

Ruiz, J. y Gonzalez, S. (2015). *Esquematizacion progresiva y formulas de combinatoria*.Universidad del Tolima. Trabajo de grado para optar por el tiltulo de licenciado en matematicas.

Spiegel, M. (1991). *Probabilidad y Estadistica.* Mexico: McGRAW-HILL.

Stanley, W. (1946). *Los principios de las cíencias. Lógica del método científico.* Madrid: Espasa-Calpe.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in mathematics,*(12), 151-169.

A.A, V.V (s.f.). *Etimologia Chile*. Disponible en http://etimologias.dechile.net/?problema

Valle Espinosa, M. C. (2007). *Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada Mexicana de matemáticas*. Recuperado el 15 de Abril de 2013, de Revista Electrónica de Investigación Educativa 9(2): http://redie.uabc.mx/vol9no2/contenido-valle.html

Vilenkin, N. (1972) *¿De cuántas formas? Combinatoria*. Moscú: Editorial MIR. pág. 11)

Wilhelmi, M. (2004). *Combinatoria y Probabilidad.* Granada (España): Universidad de granada. Depertamento de dicatica de la matamática. Grupo de Investigación en Educación Estadística. Disponible en: http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/librowhilhelmi.pdf