

SEMAINE DU 27/4 AU 1/5

PROBABILITÉS

- ① **Rappels.** Définitions d'univers, événements, événements élémentaires, Intersection, union, contraire, d'événements, événement incompatibles, système complet d'événements, probabilité, espace probabilisé, variable aléatoire, probabilité conditionnelle.
Propriétés d'une probabilité, Distribution de probabilité, Formule des probabilités totales, formule des probabilités composées, Formule de Bayes
- ② **Lois.** Loi d'une variable aléatoire, Image d'une variable aléatoire et conservation de la loi par une application, loi conditionnelle.
- ③ **Lois usuelles.** Loi uniforme, Loi de Bernoulli, Loi Binomiale.
- ④ **Indépendance.** Indépendance d'événements, Indépendance de variable aléatoire, Loi conjointe, Lois marginales, Conservation de l'indépendance par l'image d'une application.
- ⑤ Somme de n Bernoulli de paramètre p est une binomiale de paramètre (n, p) .

ESPÉRANCE ET VARIANCE

- ① **Espérance.** Définition, Espérance des lois usuelles.
Formule de l'espérance par les événements, formule $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$
Propriétés : Linéarité, inégalité triangulaire de l'espérance, Positivité, Croissance, Formule de transfert, Espérance de variables aléatoires indépendantes, Cauchy-Schwartz.
- ② **Variance.** Définitions des moments et moments centré d'ordre k , variance, écart type, de variable centrée réduite.
Propriétés : Positivité, Formule de König-Huygens, Constance presque sûre de X si $V(X) = 0$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Si $X \perp Y$, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
Variance des lois usuelles.
- ③ **Covariance.** Définition, Variables aléatoire corrélées, non corrélées, Lien avec l'indépendance.
Formules $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et $V(X + Y) = V(X) + 2\text{Cov}(X, Y) + V(Y)$.
- ④ **Inégalités.** De Markov, de Bienaymé-Tchebychev.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

La question de cours sera composée d'un énoncé rapide (définition, propriété ou théorème), suivi d'une démonstration (ou exemple) de cours choisie parmi :

- ① Preuve que la somme de n v.a.i. suivant une loi de Bernoulli de paramètre p est une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p) .
- ② Donnez la définition d'une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et la preuve de son espérance et de sa variance.

- ③ Donnez la définition d'une loi de Bernoulli sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et la preuve de son espérance et de sa variance.
- ④ Donnez la définition d'une loi Binomiale sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et la preuve de son espérance et de sa variance.
- ⑤ Énoncé et preuve des deux inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.