VOCÊ MAIS INTELIGENTE!

Geometria Analítica

Todo material contido nesta lista foi desenvolvida pelo professor Lucas Octavio de Souza e não passou por nenhuma alteração

DM Desempenho Máximo

GeoJeca

Geometria Analítica Plana.

Resumo teórico e exercícios.

3º Colegial / Curso Extensivo.

Autor - Lucas Octavio de Souza
(Jeca)

Relação das aulas.

Estudo de Geometria Analítica Plana.

Considerações gerais.

Este estudo de Geometria Analítica Plana tem como objetivo complementar o curso que desenvolvo com os alunos de 3º Colegial e de curso pré-vestibular. Não tem a pretensão de ser uma obra acabada e, muito menos, perfeita.

Os exercícios cujos números estão realçados com um círculo representam os exercícios que considero necessários à compreensão de cada aula. Nada impede que mais, ou outros exercícios sejam feitos, a critério do professor.

Autorizo o uso pelos cursinhos comunitários que se interessarem pelo material, desde que mantenham a minha autoria e não tenham lucro financeiro com o material. Peço, entretanto que me comuniquem sobre o uso. Essa comunicação me dará a sensação de estar contribuindo para ajudar alguém.

Peço a todos, que perdoem eventuais erros de digitação ou de resolução e que me comuniquem sobre esses erros, para que possa corrigí-los e melhorar este trabalho.

Meu e-mail - jecajeca@uol.com.br

Um abraço.

Jeca
(Lucas Octavio de Souza)

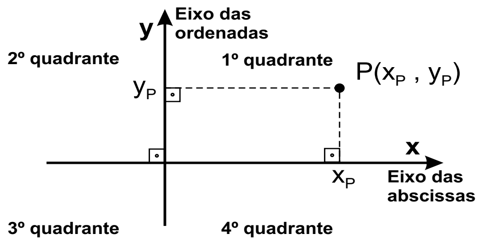
3ª edição / 2013

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 01
Conceitos iniciais de Geometria Analítica. (GA)

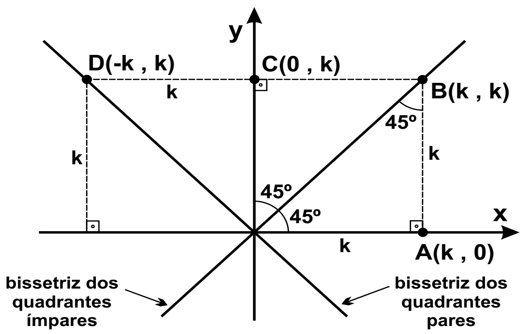
I - Localização de pontos no Plano Cartesiano.



O sistema cartesiano plano é constituído por dois eixos orientados, perpendiculares entre si e permite a localização de qualquer ponto em um plano através de dois valores, x e y, chamados coordenadas do ponto

x_P - abscissa do ponto P.
y_P - ordenada do ponto P.
(x_P , y_P) - coordenadas do ponto P.
$P(x_P , y_P)$ - par ordenado

II - Pontos particulares no Plano Cartesiano.



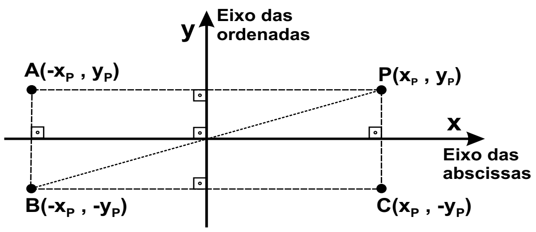
Se A(k , 0) pertence ao eixo x, então $y_A = 0$.

Se B(k , k) pertence à bissetriz ímpar, então $x_B = y_B$.

Se C(0 , k) pertence ao eixo y, então $x_C = 0$.

Se d(-k , k) pertence à bissetriz par, então $x_D = - y_D$.

III - Simetria de pontos no Plano Cartesiano.

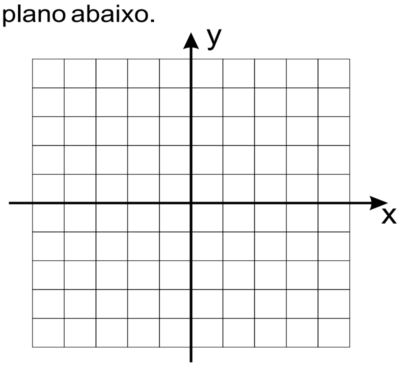


P - ponto qualquer.
A - simétrico de P em relação ao eixo das ordenadas.
B - simétrico de P em relação à origem do sistema cartesiano.
C - simétrico de P em relação ao eixo das abscissas.

Dicas
1) Perguntar sempre "Simétrico em relação a que ?"
2) Fazer um pequeno desenho para estudar simetria.

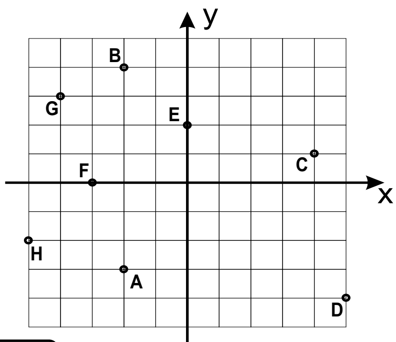
Exercícios

01) Dadas as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H, localizar esses pontos no sistema cartesiano plano abaixo. (GeoJeca)



A(-3 , 5)
B(0 , 2)
C(4 , -4)
D(-4 , 0)
E(3 , -5)
F(1 , 1)
G(-2 , -5)
H(0 , 0)

02) Dados os pontos A, B, C, D, E, F, G e H no sistema cartesiano plano, dar as coordenadas de cada ponto. (GeoJeca)



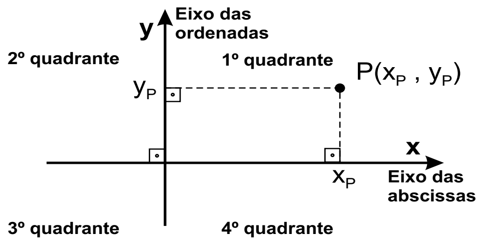
A(,)
B(,)
C(,)
D(,)
E(,)
F(,)
G(,)
H(,)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 01
Conceitos iniciais de Geometria Analítica. (GA)

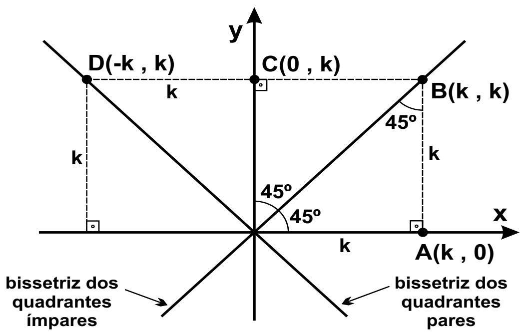
I - Localização de pontos no Plano Cartesiano.



O sistema cartesiano plano é constituído por dois eixos orientados, perpendiculares entre si e permite a localização de qualquer ponto em um plano através de dois valores, x e y, chamados coordenadas do ponto

x_P - abscissa do ponto P.
y_P - ordenada do ponto P.
(x_P , y_P) - coordenadas do ponto P.
$P(x_P , y_P)$ - par ordenado

II - Pontos particulares no Plano Cartesiano.



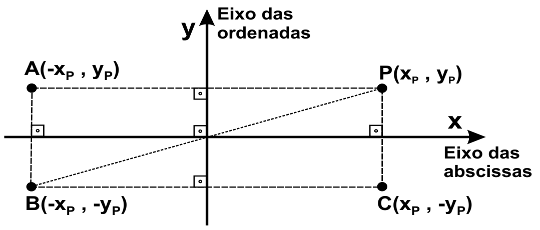
Se $A(k , 0)$ pertence ao eixo x, então $y_A = 0$.

Se $B(k , k)$ pertence à bissetriz ímpar, então $x_B = y_B$.

Se $C(0 , k)$ pertence ao eixo y, então $x_C = 0$.

Se $d(-k , k)$ pertence à bissetriz par, então $x_D = - y_D$.

III - Simetria de pontos no Plano Cartesiano.

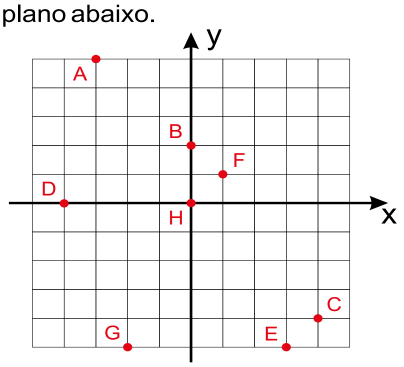


P - ponto qualquer.
A - simétrico de P em relação ao eixo das ordenadas.
B - simétrico de P em relação à origem do sistema cartesiano.
C - simétrico de P em relação ao eixo das abscissas.

<u>Dicas</u>
1) Perguntar sempre "Simétrico em relação a que ?"
2) Fazer um pequeno desenho para estudar simetria.

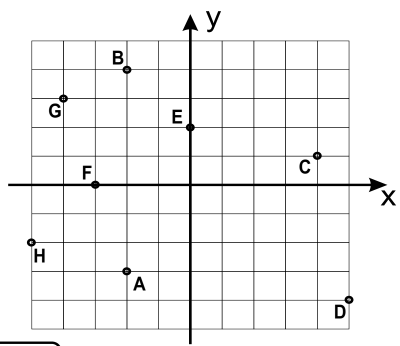
Exercícios

01) Dadas as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F, G e H, localizar esses pontos no sistema cartesiano plano abaixo. (GeoJeca)



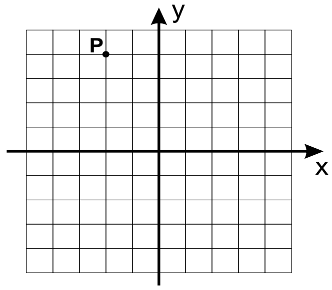
A(-3 , 5)
B(0 , 2)
C(4 , -4)
D(-4 , 0)
E(3 , -5)
F(1 , 1)
G(-2 , -5)
H(0 , 0)

02) Dados os pontos A, B, C, D, E, F, G e H no sistema cartesiano plano, dar as coordenadas de cada ponto. (GeoJeca)



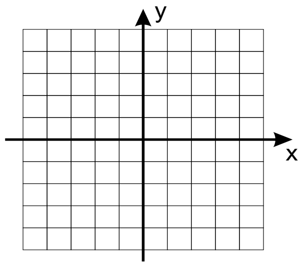
A(-2 , -3)
B(-2 , 4)
C(4 , 1)
D(5 , -4)
E(0 , 2)
F(-3 , 0)
G(-4 , 3)
H(-5 , -2)

03) No plano cartesiano ao lado, desenhar e determinar as coordenadas dos pontos P, A, B, C e D, definidos abaixo.
a) P.
b) A, simétrico de P em relação ao eixo das ordenadas.
c) B, simétrico de P em relação ao eixo das abscissas.
d) C, simétrico de P em relação à origem do plano cartesiano.
e) D, simétrico de P em relação ao ponto Q(0 , 1). (GeoJeca)



P(,)
A(,)
B(,)
C(,)
D(,)

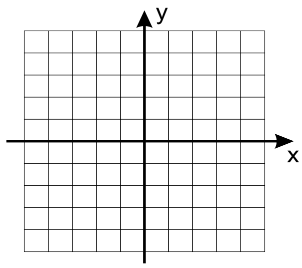
04) Sabendo-se que o ponto A(4 , 1) é o simétrico do ponto B em relação ao eixo das ordenadas e que o ponto C é o simétrico de B em relação ao eixo das abscissas, determine as coordenadas e desenhe no sistema cartesiano ao lado os pontos A, B e C. (GeoJeca)



B(,)

C(,)

05) Sabendo-se que o ponto B(m , -2) é o simétrico de A em relação ao eixo x e que C (3 , n) é o simétrico de A em relação ao eixo das ordenadas, determinar as coordenadas do ponto A e desenhar os pontos A, B e C no plano cartesiano ao lado. (GeoJeca)

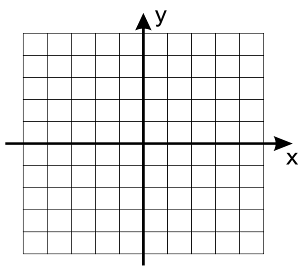


A(,)

B(,)

C(,)

06) Sendo m e n números inteiros positivos, dizer em qual quadrante se localiza o ponto B, simétrico de A(-m , 2 + n) em relação ao eixo das abscissas. (GeoJeca)



07) No sistema cartesiano ao lado, considerar cada quadrado unitário e :
a) Localizar os pontos (GeoJeca)
A(6 , -4) B(-7 , 7) C(0 , -4) D(6 , 2) E(0 , 0)

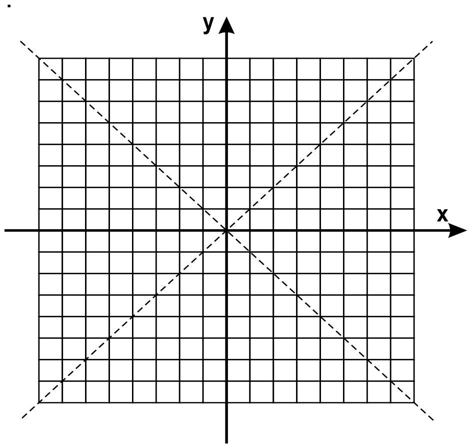
F(-7 , 0) G(-5 , -5) H(4 , -4) I(2 , 2) J(0 , 6)

b) Dizer quais os pontos que pertencem ao eixo das abscissas.

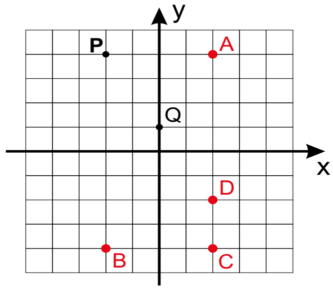
c) Dizer quais os pontos que pertencem ao eixo das ordenadas.

d) Dizer quais os pontos que pertencem à bissetriz ímpar.

e) Dizer quais os pontos que pertencem à bissetriz par.

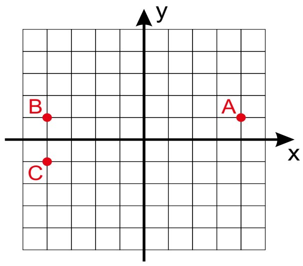


03) No plano cartesiano ao lado, desenhar e determinar as coordenadas dos pontos P, A, B, C e D, definidos abaixo.
a) P.
b) A, simétrico de P em relação ao eixo das ordenadas.
c) B, simétrico de P em relação ao eixo das abscissas.
d) C, simétrico de P em relação à origem do plano cartesiano.
e) D, simétrico de P em relação ao ponto Q(0 , 1). (GeoJeca)



P(-2 , 4)
A(2 , 4)
B(-2 , -4)
C(2 , -4)
D(2 , -2)

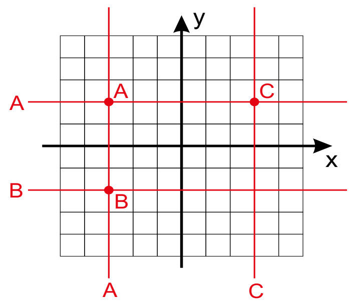
04) Sabendo-se que o ponto A(4 , 1) é o simétrico do ponto B em relação ao eixo das ordenadas e que o ponto C é o simétrico de B em relação ao eixo das abscissas, determine as coordenadas e desenhe no sistema cartesiano ao lado os pontos A, B e C. (GeoJeca)



B(-4 , 1)

C(-4 , -1)

05) Sabendo-se que o ponto B(m , -2) é o simétrico de A em relação ao eixo x e que C (3 , n) é o simétrico de A em relação ao eixo das ordenadas, determinar as coordenadas do ponto A e desenhar os pontos A, B e C no plano cartesiano ao lado. (GeoJeca)

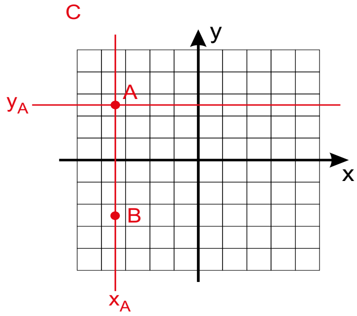


A(-3 , 2)

B(-3 , -2)

C(3 , 2)

06) Sendo m e n números inteiros positivos, dizer em qual quadrante se localiza o ponto B, simétrico de A(-m , 2 + n) em relação ao eixo das abscissas. (GeoJeca)

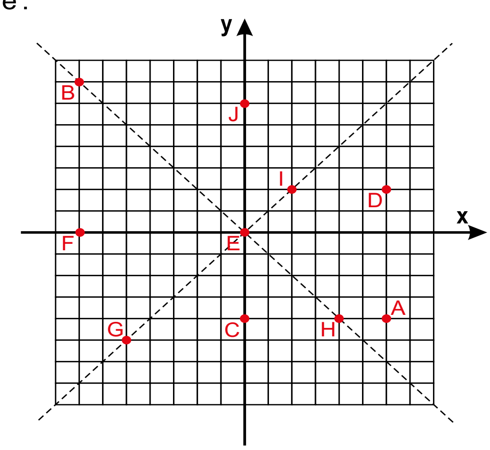


m e n são números inteiros e positivos.

Portanto $x_A = -m < 0$ (2º ou 3º quadrante)
$y_A = 2 + n > 0$ (1º ou 2º quadrante)
Pelos dados acima, conclui-se que A é um ponto do 2º quadrante.
Então B é um ponto do 3º quadrante.

07) No sistema cartesiano ao lado, considerar cada quadrado unitário e :
a) Localizar os pontos (GeoJeca)
A(6 , -4) B(-7 , 7) C(0 , -4) D(6 , 2) E(0 , 0)

F(-7 , 0) G(-5 , -5) H(4 , -4) I(2 , 2) J(0 , 6)



b) Dizer quais os pontos que pertencem ao eixo das abscissas.

Pontos E e F.

c) Dizer quais os pontos que pertencem ao eixo das ordenadas.

Pontos C, E e J.

d) Dizer quais os pontos que pertencem à bissetriz ímpar.

Pontos E, G e I.

e) Dizer quais os pontos que pertencem à bissetriz par.

Pontos B, E e H.

08) Determinar o valor de m sabendo-se que o ponto P(4m , 8) pertence à bissetriz dos quadrantes pares. (GeoJeca)

09) Determinar o valor de m sabendo-se que o ponto P(m + 7 , 1 - m) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. (GeoJeca)

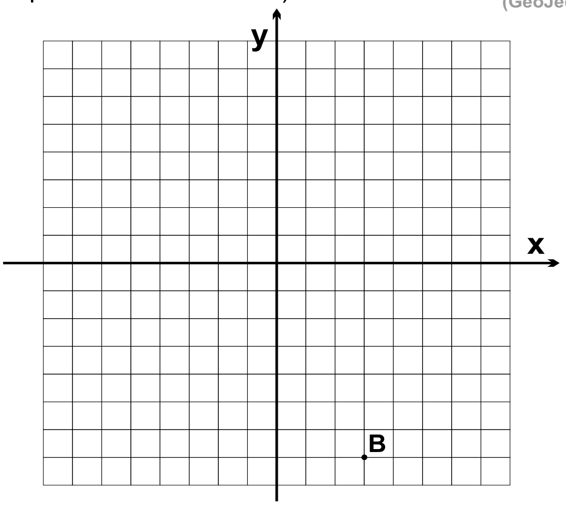
10) Determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que tem ordenada igual à 5. (GeoJeca)

11) Determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes pares que tem ordenada igual à 5. (GeoJeca)

12) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto P(-4 , m), sabendo que o ponto Q(2 + 4m , 2m) é um ponto da bissetriz dos quadrantes pares. (GeoJeca)

13) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto P(3k , -k), sabendo-se que o ponto Q(k + 1 , 2k + 4) é um ponto do eixo das abscissas. (GeoJeca)

14) Na figura abaixo está representado um sistema plano de coordenadas cartesianas onde cada quadradinho do reticulado tem lado igual a 1 (um). Com base nessa figura, responda as questões a seguir. (Preencha cada ponto solicitado com as respectivas coordenadas). (GeoJeca)



A(-6 , 4) Localize o ponto A no plano cartesiano acima.

B(,) Determine as coordenadas do ponto B representado no plano cartesiano.

C(,) Determine as coordenadas do ponto C do 2º quadrante, que tem ordenada 3 e dista 7 do eixo das ordenadas.

D(,) Determine as coordenadas do ponto D que pertence à bissetriz ímpar, dista 4 do eixo y e tem x > 0.

E(,) Determine as coordenadas do ponto E que tem abscissa 2 e cuja soma das coordenadas é -5.

F(,) Determine as coordenadas do ponto F que é simétrico do ponto P(5 , -2) em relação ao eixo das abscissas.

G(,) Se N(-4 , 8) é o simétrico de V em relação ao eixo x, então determine G, simétrico de V em relação ao eixo y.

H(,) Determine as coordenadas do ponto H que é simétrico do ponto P(5 , -2) em relação ao ponto S(1 , 1).

J(,) Determine as coordenadas do ponto J que pertence à bissetriz ímpar e cuja soma das coordenadas é 14.

K(,) Determine as coordenadas do ponto K que pertence à bissetriz par e tem abscissa -3.

L(,) Determine as coordenadas do ponto L que pertence à bissetriz par e cuja abscissa é o dobro da ordenada.

M(,) Determine as coordenadas do ponto M que pertence ao 1º quadrante e tem ordenada -7.

Jeca 04

08) Determinar o valor de m sabendo-se que o ponto P(4m , 8) pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

(GeoJeca)

Se P pertence à bissetriz par, então $x_P = -y_P$

4m = - 8

m = - 2 (resp)

09) Determinar o valor de m sabendo-se que o ponto P(m + 7 , 1 - m) pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

(GeoJeca)

Se P pertence à bissetriz ímpar, então $x_P = y_P$

m + 7 = 1 - m

2m = -6

m = -3 (resp)

10) Determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que tem ordenada igual à 5.

(GeoJeca)

Se P pertence à bissetriz ímpar, então $x_P = y_P$.

Se a ordenada de P (y_P) é 5, então a abscissa de P (x_P) é 5.

P(5 , 5) (resp)

11) Determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes pares que tem ordenada igual à 5.

(GeoJeca)

Se P pertence à bissetriz par, então $x_P = - y_P$.

Se a ordenada de P (y_P) é 5, então a abscissa de P (x_P) é -5.

P(-5 , 5) (resp)

12) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto P(-4 , m), sabendo que o ponto Q(2 + 4m , 2m) é um ponto da bissetriz dos quadrantes pares.

(GeoJeca)

Se Q pertence à bissetriz par, então $x_Q = -y_Q$.

2 + 4m = - 2m

6m = -2

m = -1/3

P(-4 , m)

P(-4 , -1/3) é um ponto do 3º quadrante. (resp)

13) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto P(3k , -k), sabendo-se que o ponto Q(k + 1 , 2k + 4) é um ponto do eixo das abscissas.

(GeoJeca)

Se Q pertence ao eixo das abscissas, então $y_Q = 0$.

2k + 4 = 0

2k = -4

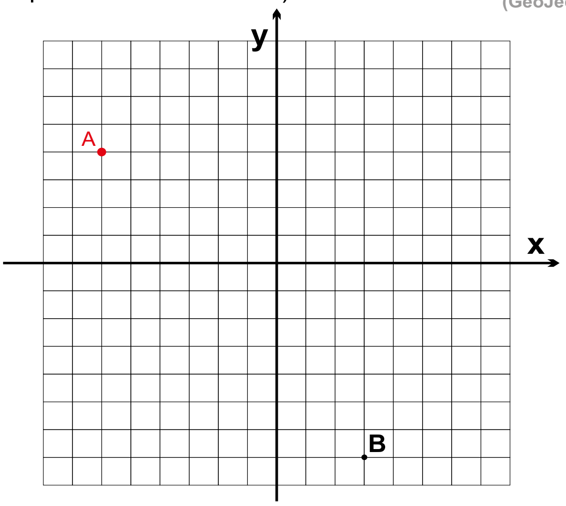
k = -2

P(3k , -k)

P(-6 , 2) é um ponto do 2º quadrante. (resp)

14) Na figura abaixo está representado um sistema plano de coordenadas cartesianas onde cada quadradinho do reticulado tem lado igual a 1 (um). Com base nessa figura, responda as questões a seguir. (Preencha cada ponto solicitado com as respectivas coordenadas).

(GeoJeca)



A(-6 , 4) Localize o ponto A no plano cartesiano acima.

B(3 , -7) Determine as coordenadas do ponto B representado no plano cartesiano.

C(-7 , 3) Determine as coordenadas do ponto C do 2º quadrante, que tem ordenada 3 e dista 7 do eixo das ordenadas.

D(4 , 4) Determine as coordenadas do ponto D que pertence à bissetriz ímpar, dista 4 do eixo y e tem x > 0.

E(2 , -7) Determine as coordenadas do ponto E que tem abscissa 2 e cuja soma das coordenadas é -5.

F(5 , 2) Determine as coordenadas do ponto F que é simétrico do ponto P(5 , -2) em relação ao eixo das abscissas.

G(4 , -8) Se N(-4 , 8) é o simétrico de V em relação ao eixo x, então determine G, simétrico de V em relação ao eixo y.

H(-3 , 4) Determine as coordenadas do ponto H que é simétrico do ponto P(5 , -2) em relação ao ponto S(1 , 1).

J(7 , 7) Determine as coordenadas do ponto J que pertence à bissetriz ímpar e cuja soma das coordenadas é 14.

K(-3 , 3) Determine as coordenadas do ponto K que pertence à bissetriz par e tem abscissa -3.

L(0 , 0) Determine as coordenadas do ponto L que pertence à bissetriz par e cuja abscissa é o dobro da ordenada.

M(,) Impossível — Determine as coordenadas do ponto M que pertence ao 1º quadrante e tem ordenada -7.

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Conceitos iniciais de Geometria Analítica.
Exercícios complementares da aula 01.

15) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto P(3k , -k), sabendo-se que o ponto Q(k + 1 , 2k + 4) é um ponto do eixo das ordenadas. (GeoJeca)

16) Sendo o ponto P(k - 4 , t) um ponto do eixo das abscissas, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(5 , t - 2). (GeoJeca)

17) Sendo P(m , n), determinar os valores de m e de n para que o ponto P pertença ao eixo das ordenadas. (GeoJeca)

18) Sendo o ponto P(-1 - m , 2m -1) um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(m , 4). (GeoJeca)

19) Sendo P(m , n - 2), determinar os valores de m e de n para que o ponto P pertença ao eixo das abscissas. (GeoJeca)

20) Sendo o ponto P(k + 3 , 7) um ponto do eixo das ordenadas, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(2 - k , k). (GeoJeca)

21) Sendo o ponto P(m , 4 + 3m) um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(-m , 1 + m). (GeoJeca)

22) Sendo o ponto P(b - 3 , a + 2) a origem do sistema cartesiano plano, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(a , b). (GeoJeca)

23) Sendo o ponto P(a - 5 , b + 1) um ponto do eixo das abscissas, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(2b , -b). (GeoJeca)

24) Sendo o ponto P(d - 2 , 4 - d) um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(-8 , d). (GeoJeca)

25) Qual deve ser a relação entre a e b para que o ponto P (5 - a , b + 2) seja um ponto da bissetriz par ? (GeoJeca)

26) Qual deve ser a relação entre a e b para que o ponto P(3a + 1 , b + 2) seja um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares ? (GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Conceitos iniciais de Geometria Analítica.
Exercícios complementares da aula 01.

15) Determinar em qual quadrante localiza-se o ponto P(3k , -k), sabendo-se que o ponto Q(k + 1 , 2k + 4) é um ponto do eixo das ordenadas. (GeoJeca)

$Q \in$ eixo y $\longrightarrow x_Q = 0 \longrightarrow k + 1 = 0 \longrightarrow k = -1$

P(3k , -k)

P(-3 , 1)

$P \in$ 2º quadrante (resp)

16) Sendo o ponto P(k - 4 , t) um ponto do eixo das abscissas, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(5 , t - 2). (GeoJeca)

$P \in$ eixo x $\longrightarrow y_P = 0 \longrightarrow t = 0$

Q(5 , t - 2)

Q(5 , -2)

$Q \in$ 4º quadrante (resp)

17) Sendo P(m , n), determinar os valores de m e de n para que o ponto P pertença ao eixo das ordenadas. (GeoJeca)

$P \in$ eixo y $\longrightarrow x_P = 0 \longrightarrow m = 0$

P(0 , n)

$m = 0$ e $n \in \mathbb{R}$ (resp)

18) Sendo o ponto P(-1 - m , 2m -1) um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(m , 4). (GeoJeca)

$P \in$ bissetriz ímpar $\longrightarrow x_P = y_P \longrightarrow -1 - m = 2m - 1$

$3m = 0 \longrightarrow m = 0$

Q(m , 4) $\longrightarrow$ Q(0 , 4)

$Q \in$ eixo das ordenadas (resp)

19) Sendo P(m , n - 2), determinar os valores de m e de n para que o ponto P pertença ao eixo das abscissas. (GeoJeca)

$P \in$ eixo x $\longrightarrow y_P = 0 \longrightarrow n - 2 = 0 \longrightarrow n = 2$

P(m , n - 2)

P(m , 0)

$m \in \mathbb{R}$ e $n = 2$ (resp)

20) Sendo o ponto P(k + 3 , 7) um ponto do eixo das ordenadas, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(2 - k , k). (GeoJeca)

$P \in$ eixo y $\longrightarrow x_Q = 0 \longrightarrow k + 3 = 0 \longrightarrow k = -3$

Q(2 - k , k)

Q(5 , -3)

$Q \in$ 4º quadrante (resp)

21) Sendo o ponto P(m , 4 + 3m) um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(-m , 1 + m). (GeoJeca)

$P \in$ bissetriz ímpar $\longrightarrow x_P = y_P \longrightarrow m = 4 + 3m$

$2m = -4 \longrightarrow m = -2$

Q(-m , 1 + m) $\longrightarrow$ Q(2 , -1)

$Q \in$ 4º quadrante (resp)

22) Sendo o ponto P(b - 3 , a + 2) a origem do sistema cartesiano plano, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(a , b). (GeoJeca)

P é a origem do plano cartesiano $\longrightarrow$ P(0 , 0)

$b - 3 = 0 \longrightarrow b = 3$

$a + 2 = 0 \longrightarrow a = -2$

Q(a , b) $\longrightarrow$ Q(-2 , 3) $\longrightarrow Q \in$ 2º quadrante (resp)

23) Sendo o ponto P(a - 5 , b + 1) um ponto do eixo das abscissas, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(2b , -b). (GeoJeca)

$P \in$ eixo x $\longrightarrow y_Q = 0 \longrightarrow b + 1 = 0 \longrightarrow b = -1$

Q(2b , b)

Q(-2 , 1)

$Q \in$ 2º quadrante (resp)

24) Sendo o ponto P(d - 2 , 4 - d) um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, determinar a qual quadrante pertence o ponto Q(-8 , d). (GeoJeca)

$P \in$ bissetriz ímpar $\longrightarrow x_P = y_P \longrightarrow d - 2 = 4 - d$

$2d = 6 \longrightarrow d = 3$

Q(-8 , d) $\longrightarrow$ Q(-8 , 3)

$Q \in$ 2º quadrante (resp)

25) Qual deve ser a relação entre a e b para que o ponto P (5 - a , b + 2) seja um ponto da bissetriz par ? (GeoJeca)

$Q \in$ bissetriz par $\longrightarrow x_P = -y_P \longrightarrow 5 - a = -(b + 2)$

$5 - a = -b - 2$

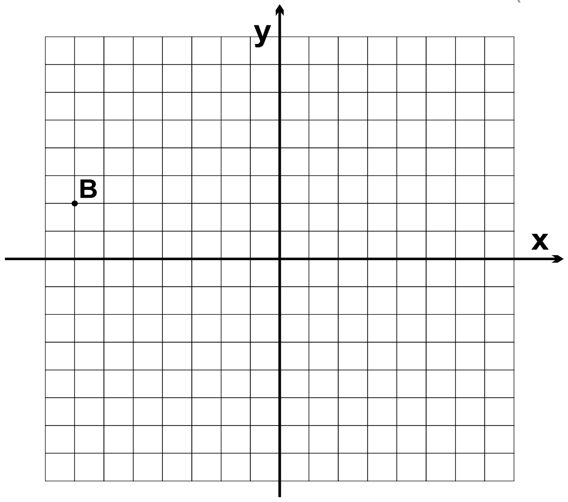
$a = b + 7$ (resp)

26) Qual deve ser a relação entre a e b para que o ponto P(3a + 1 , b + 2) seja um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares ? (GeoJeca)

$P \in$ bissetriz ímpar $\longrightarrow x_P = y_P \longrightarrow 3a + 1 = b + 2$

$b = 3a - 1$ (resp)

27) Na figura abaixo está representado um sistema plano de coordenadas cartesianas onde cada quadradinho do reticulado tem lado igual a 1 (um). Com base nessa figura, responda as questões a seguir. (Preencha cada ponto solicitado com as respectivas coordenadas). (GeoJeca)



A(-7 , -5) Localize o ponto A no plano cartesiano acima.

B(,) Determine as coordenadas do ponto B representado no plano cartesiano.

C(,) Determine as coordenadas do ponto C que tem ordenada -8 e abscissa 1.

D(,) Determine as coordenadas do ponto D que pertence ao eixo das abscissas, dista 6 do eixo y e tem $x < 0$.

E(,) Determine as coordenadas do ponto E que tem ordenada 2 e cuja soma das coordenadas é -4.

F(,) Determine as cordenadas do ponto F que é simétrico do ponto P(5 , -2) em relação à origem O(0 , 0).

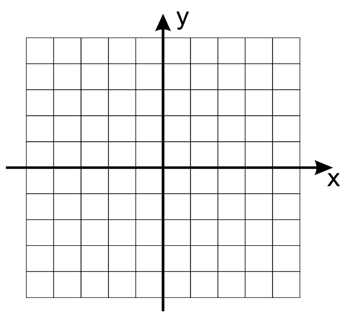
G(,) Se N(-7 , 4) é o simétrico de V em relação ao eixo y, então determine G, simétrico de V em relação ao eixo x.

H(,) Determine as coordenadas do ponto H que é simétrico do ponto B(-7 , 2) em relação ao ponto S(-1 , 5).

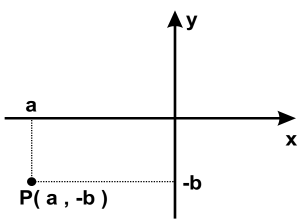
J(,) Determine as coordenadas do ponto J que pertence à bissetriz par e cuja abscissa é -2.

K(,) Determine as coordenadas do ponto K que pertence à bissetriz ímpar e cuja soma das coordenadas é -14.

28) Sabendo que o ponto P(k + 4 , 3) é um ponto do eixo y, determinar as coordenadas de um ponto Q, simétrico de R(5 , -k) em relação ao eixo x. (desenhar os pontos P, Q e R no plano cartesiano ao lado). (GeoJeca)



29) Sendo o ponto P(a , -b) um ponto do 3º quadrante, determinar a qual quadrante pertence cada ponto abaixo. (GeoJeca)



a) A(a , b)

b) B(-a , b)

c) C(4 , a)

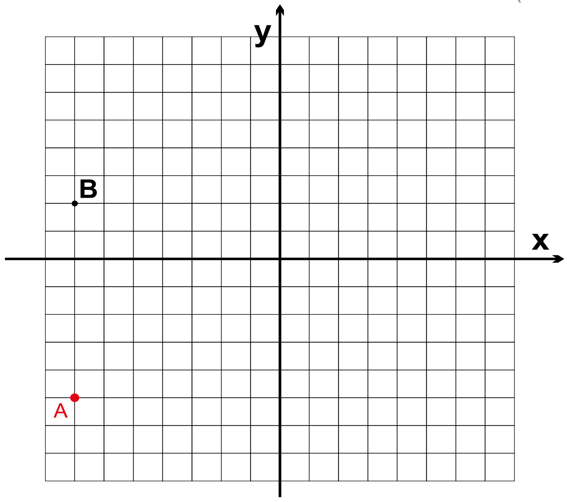
d) D(b , a)

e) E(-b , 3b)

f) F(a.b , a)

g) G(b , 0)

27) Na figura abaixo está representado um sistema plano de coordenadas cartesianas onde cada quadradinho do reticulado tem lado igual a 1 (um). Com base nessa figura, responda as questões a seguir. (Preencha cada ponto solicitado com as respectivas coordenadas). (GeoJeca)



A(-7 , -5) Localize o ponto A no plano cartesiano acima.

B(-7 , 2) Determine as coordenadas do ponto B representado no plano cartesiano.

C(1 , -8) Determine as coordenadas do ponto C que tem ordenada -8 e abscissa 1.

D(-6 , 0) Determine as coordenadas do ponto D que pertence ao eixo das abscissas, dista 6 do eixo y e tem x < 0.

E(-6 , 2) Determine as coordenadas do ponto E que tem ordenada 2 e cuja soma das coordenadas é -4.

F(-5 , 2) Determine as coordenadas do ponto F que é simétrico do ponto P(5 , -2) em relação à origem O(0 , 0).

G(7 , -4) Se N(-7 , 4) é o simétrico de V em relação ao eixo y, então determine G, simétrico de V em relação ao eixo x.

H(5 , 8) Determine as coordenadas do ponto H que é simétrico do ponto B(-7 , 2) em relação ao ponto S(-1 , 5).

J(-2 , 2) Determine as coordenadas do ponto J que pertence à bissetriz par e cuja abscissa é -2.

K(-7 , -7) Determine as coordenadas do ponto K que pertence à bissetriz ímpar e cuja soma das coordenadas é -14.

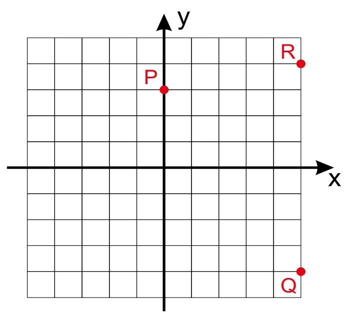
28) Sabendo que o ponto P(k + 4 , 3) é um ponto do eixo y, determinar as coordenadas de um ponto Q, simétrico de R(5 , -k) em relação ao eixo x. (desenhar os pontos P, Q e R no plano cartesiano ao lado). (GeoJeca)

P ∈ eixo y ⟶ $x_P = 0$ ⟶ k + 4 = 0 ⟶ k = - 4

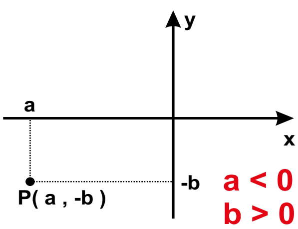
R(5 , -k) ⟶ R(5 , 4)

Q é simétrico de R em relação ao eixo x.

Q(5 , -4) (resp)



29) Sendo o ponto P(a , -b) um ponto do 3º quadrante, determinar a qual quadrante pertence cada ponto abaixo. (GeoJeca)



a < 0
b > 0

a) A(a , b)

$x_A = a < 0$
$y_A = b > 0$

A ∈ 2º quadrante

b) B(-a , b)

$x_B = -a > 0$
$y_B = b > 0$

B ∈ 1º quadrante

c) C(4 , a)

$x_C = 4 > 0$
$y_C = a < 0$

C ∈ 4º quadrante

d) D(b , a)

$x_D = b > 0$
$y_D = a < 0$

D ∈ 4º quadrante

e) E(-b , 3b)

$x_E = -b < 0$
$y_E = 3b > 0$

E ∈ 2º quadrante

f) F(a.b , a)

$x_F = a.b < 0$
$y_F = a < 0$

F ∈ 3º quadrante

g) G(b , 0)

$x_G = b > 0$
$y_G = 0$

G ∈ eixo das abscissas (entre o 1º e o 4º quadrantes)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 02
Ponto divisor, ponto médio, baricentro e distância entre dois pontos.

I - Medida algébrica de um segmento.

Dadas as extremidades $A(x_A)$ e $B(x_B)$ de um segmento AB, denomina-se *medida algébrica do segmento AB* o valor

$$\overline{AB} = x_B - x_A \qquad \overline{BA} = x_A - x_B$$

Dica
"Os últimos serão os primeiros"

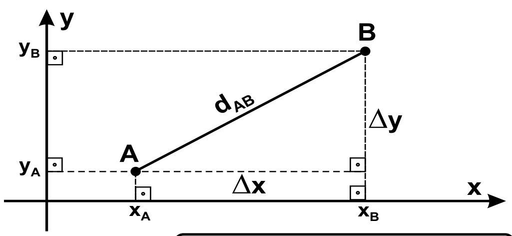
II - Ponto divisor de um segmento.

Dado um segmento AB, qualquer ponto P da reta AB pode ser considerado um *ponto divisor do segmento AB*.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k$$

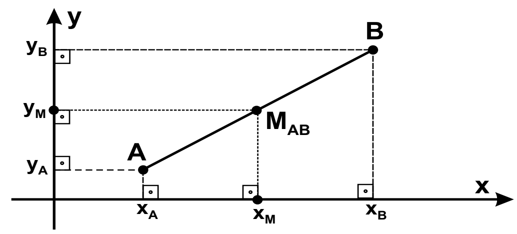
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k \implies \overline{AP} = k.\overline{PB} \implies \begin{cases} x_P - x_A = k(x_B - x_P) \\ y_P - y_A = k(y_B - y_P) \end{cases}$$

III - Distância entre dois pontos.



Pitágoras $\quad d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

IV - Ponto médio de um segmento.



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

As coordenadas do ponto médio são as médias das coordenadas.

$$M_{AB}\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

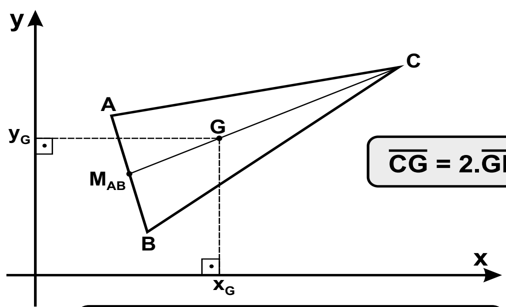
V - Baricentro de um triângulo.

Baricentro (G).
É o ponto de encontro das 3 medianas de um triângulo.

Mediana.
É o segmento que une o vértice ao ponto médio do lado oposto.

Propriedade do baricentro.
O baricentro divide cada mediana na razão 2 : 1.

Todo triângulo tem 3 medianas.



$$\overline{CG} = 2.\overline{GM_{AB}}$$

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

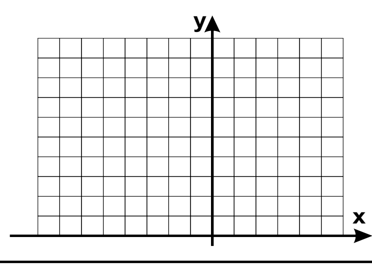
Exercícios

01) Dados os pontos A(-7 , 8) e B(5 , 2), determinar as coordenadas do ponto P que divide o segmento AB na razão abaixo.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 2$$

(GeoJeca)

No plano abaixo, marque os pontos A, B e P e entenda o que é *ponto divisor*.



GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 02
Ponto divisor, ponto médio, baricentro e distância entre dois pontos.

I - Medida algébrica de um segmento.

Dadas as extremidades $A(x_A)$ e $B(x_B)$ de um segmento AB, denomina-se *medida algébrica do segmento AB* o valor

$\overline{AB} = x_B - x_A$ $\overline{BA} = x_A - x_B$

Dica
"Os últimos serão os primeiros"

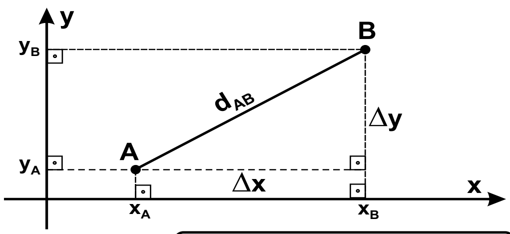
II - Ponto divisor de um segmento.

Dado um segmento AB, qualquer ponto P da reta AB pode ser considerado um *ponto divisor do segmento AB*.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k$$

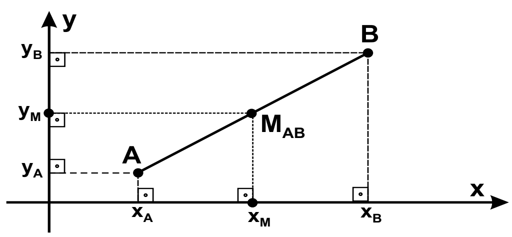
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = k \Longrightarrow \overline{AP} = k.\overline{PB} \Longrightarrow \begin{cases} x_P - x_A = k(x_B - x_P) \\ y_P - y_A = k(y_B - y_P) \end{cases}$$

III - Distância entre dois pontos.



Pitágoras $\boxed{d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

IV - Ponto médio de um segmento.



$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

As coordenadas do ponto médio são as médias das coordenadas.

$$\boxed{M_{AB}\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

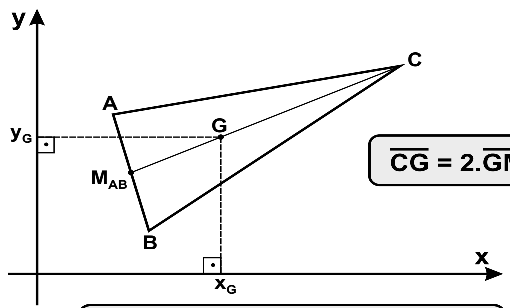
V - Baricentro de um triângulo.

Baricentro (G).
É o ponto de encontro das 3 medianas de um triângulo.

Mediana.
É o segmento que une o vértice ao ponto médio do lado oposto.

Propriedade do baricentro.
O baricentro divide cada mediana na razão 2 : 1.

Todo triângulo tem 3 medianas.



$$\boxed{\overline{CG} = 2.\overline{GM}_{AB}}$$

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

Exercícios

01) Dados os pontos A(-7 , 8) e B(5 , 2), determinar as coordenadas do ponto P que divide o segmento AB na razão abaixo.

(GeoJeca)

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = 2$$

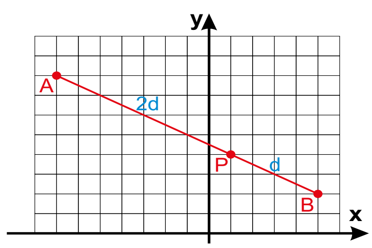
("Os últimos serão os primeiros")

AP = 2.PB
$x_P - x_A = 2(x_B - x_P)$
$x_P - (-7) = 2(5 - x_P)$
$x_P + 7 = 10 - 2x_P$
$3x_P = 3$
$x_P = 1$

AP = 2.PB
$y_P - y_A = 2(y_B - y_P)$
$y_P - 8 = 2(2 - y_P)$
$y_P - 8 = 4 - 2y_P$
$3y_P = 12$
$y_P = 4$

Portanto
P(1 , 4) (resp)

No plano abaixo, marque os pontos A, B e P e entenda o que é *ponto divisor*.



02) Dados os pontos A(2 , 12) e B(5 , 0), determinar as coordenadas dos pontos C e D que dividem o segmento AB em três partes de mesma medidas.
(GeoJeca)

03) Dados os pontos A(1 , 2) e B(3 , -1), determinar as coordenadas do ponto P, pertencente à reta AB, tal que $\overline{AP} = 3\overline{BP}$.
(GeoJeca)

04) Determine o baricentro do triângulo de vértices A(-5 , 9), B(11 , 7) e C(3 , 5).
(GeoJeca)

05) Determine as coordenadas do vértice C de um triângulo ABC conhecendo-se os vértices A(-6 , -5), B(4 , 6) e o baricentro G(1 , 0) desse triângulo.
(GeoJeca)

06) Determine as coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades A(-3 , 8) e B(5 , 2).
(GeoJeca)

07) Determine as coordenadas do ponto A do segmento AB, sabendo que o ponto B tem coordenadas (-1 , 4) e que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas (1 , 5).
(GeoJeca)

08) Determine a distância entre os pontos A(-2 , 7) e B(5 , 1).
(GeoJeca)

09) Determine as coordenadas dos pontos do eixo das abscissas que distam 5 do ponto P(6 , -3).
(GeoJeca)

02) Dados os pontos A(2 , 12) e B(5 , 0), determinar as coordenadas dos pontos C e D que dividem o segmento AB em três partes de mesma medidas.

(GeoJeca)

Medida algébrica

No eixo x

2.AC = CB
$2(x_C - x_A) = x_B - x_C$
$2(x_C - 2) = 5 - x_C$
$2x_C - 4 = 5 - x_C$
$3x_C = 9$
$x_C = 3$

No eixo y

2.AC = CB
$2(y_C - y_A) = y_B - y_C$
$2(y_C - 12) = 0 - y_C$
$2y_C - 24 = 0 - y_C$
$3y_C = 24$
$y_C = 8$

Portanto C(3 , 8) (resp)

O ponto D pode ser calculado como ponto médio de CB.

C(3 , 8)
B(5 , 0)

$D\left(\frac{3 + 5}{2} , \frac{8 + 0}{2}\right)$

D(4 , 4) (resp)

03) Dados os pontos A(1 , 2) e B(3 , -1), determinar as coordenadas do ponto P, pertencente à reta AB, tal que $\overline{AP} = 3\overline{BP}$.

(GeoJeca)

Medida algébrica

No eixo x

AP = 3.BP
$x_P - x_A = 3(x_P - x_B)$
$x_P - 1 = 3(x_P - 3)$
$x_P - 1 = 3x_P - 9$
$2x_P = 8$
$x_P = 4$

No eixo y

AP = 3.BP
$y_P - y_A = 3(y_P - y_B)$
$y_P - 2 = 3(y_P - (-1))$
$y_P - 2 = 3y_P + 3$
$2y_P = -5$
$y_P = -5/2$

Portanto C(4 , -5/2) (resp)

04) Determine o baricentro do triângulo de vértices A(-5 , 9), B(11 , 7) e C(3 , 5).

(GeoJeca)

A(-5 , 9)
B(11 , 7)
C(3 , 5)

$G\left(\frac{-5 + 11 + 3}{3} , \frac{9 + 7 + 5}{3}\right)$

G(3 , 7) (resp)

05) Determine as coordenadas do vértice C de um triângulo ABC conhecendo-se os vértices A(-6 , -5), B(4 , 6) e o baricentro G(1 , 0) desse triângulo.

(GeoJeca)

A(-6 , -5)
B(4 , 6)
$C(x_C , y_C)$

G(1 , 0)

$(x_A + x_B + x_C)/3 = x_G$
$(-6 + 4 + x_C)/3 = 1$
$x_C = 5$

$(y_A + y_B + y_C)/3 = y_G$
$(-5 + 6 + y_C)/3 = 0$
$y_C = -1$

Portanto C(5 , -1) (resp)

06) Determine as coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades A(-3 , 8) e B(5 , 2).

(GeoJeca)

A(-3 , 8)
B(5 , 2)

$M_{AB}\left(\frac{-3 + 5}{2} , \frac{8 + 2}{2}\right)$

$M_{AB}(1 , 5)$

07) Determine as coordenadas do ponto A do segmento AB, sabendo que o ponto B tem coordenadas (-1 , 4) e que o ponto médio do segmento AB tem coordenadas (1 , 5).

(GeoJeca)

$A(x_A , y_A)$
B(-1 , 4)
$M_{AB}(1 , 5)$

$(x_A + x_B)/2 = 1$
$x_A + (-1) = 2$
$x_A = 3$

$(y_A + y_B)/2 = 5$
$y_A + 4 = 10$
$y_A = 6$

Portanto

A(3 , 6) (resp)

08) Determine a distância entre os pontos A(-2 , 7) e B(5 , 1).

(GeoJeca)

$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (1 - 7)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{85}$ (resp)

09) Determine as coordenadas dos pontos do eixo das abscissas que distam 5 do ponto P(6 , -3).

(GeoJeca)

Se Q pertence ao eixo x, então Q(k , 0).
$d_{PQ} = 5$
$d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

$5 = \sqrt{(k - 6)^2 + (0 - (-3))^2}$

Elevando os dois termos ao quadrado para eliminar a raiz.
$25 = k^2 - 12k + 36 + 9$

$k^2 - 12k + 20 = 0$

$k_A = 10$
Portanto A(10 , 0)

$k_B = 2$
Portanto B(2 , 0)

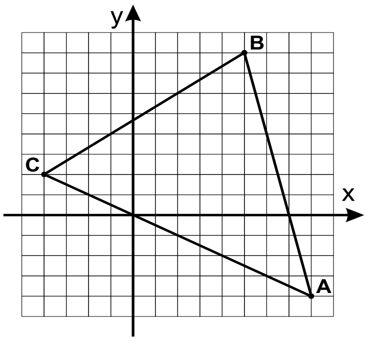
GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica

Exercícios complementares da aula 02.

10) Dados os vértices A(8 , -4), B(5 , 8) e C(-4 , 2) de um triângulo ABC, determine: (GeoJeca)



a) as coordenadas do baricentro do triângulo ABC;

b) as coordenadas do ponto médio do lado AC;

c) a medida da mediana relativa ao vértice B;

d) a distância entre o baricentro e o vértice B;

e) a distância entre o baricentro e o ponto médio do lado AC.

11) Sabendo que os pontos A(0 , 0), P(1 , 1) e B são colineares, determinar as coordenadas do ponto B, tal que $4\overline{AP} = \overline{PB}$. (GeoJeca)

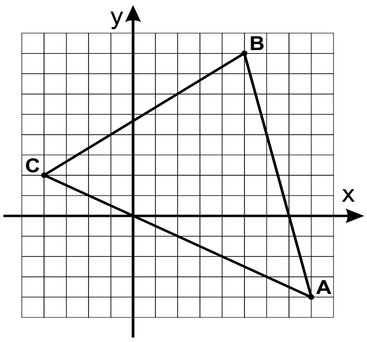
12) Dados os pontos A(0 , 8) e B(6 , 0), determinar as coordenadas do ponto P, pertencente à reta AB, tal que $\overline{AB} = \overline{BP}$. (GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da aula 02.

10) Dados os vértices A(8 , -4), B(5 , 8) e C(-4 , 2) de um triângulo ABC, determine: (GeoJeca)



a) as coordenadas do baricentro do triângulo ABC;

A(8 , -4)
B(5 , 8)
C(-4 , 2)

$G\left(\frac{8+5+(-4)}{3}, \frac{-4+8+2}{3}\right)$

G(3 , 2) (resp)

b) as coordenadas do ponto médio do lado AC;

A(8 , -4)
C(-4 , 2)

$M_{AC}\left(\frac{8+(-4)}{2}, \frac{-4+2}{2}\right)$

$M_{AC}(2 , -1)$ (resp)

c) a medida da mediana relativa ao vértice B;

A medida da mediana relativa ao vértice B é a distância entre o ponto B e o ponto médio do lado AC

$M_{AC}(2 , -1)$
B(5 , 8)

$d_{MB} = \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2}$

$d_{MB} = \sqrt{(5-2)^2 + (8-(-1))^2}$

$d_{MB} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ (resp)

d) a distância entre o baricentro e o vértice B;

G(3 , 2)
B(5 , 8)

$d_{BG} = \sqrt{(x_G - x_B)^2 + (y_G - y_B)^2}$

$d_{BG} = \sqrt{(3-5)^2 + (2-8)^2}$

$d_{BG} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ (resp)

e) a distância entre o baricentro e o ponto médio do lado AC.

$M_{AC}(2 , -1)$
G(3 , 2)

$d_{GM} = \sqrt{(x_M - x_G)^2 + (y_M - y_G)^2}$

$d_{GM} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-2)^2}$

$d_{GM} = \sqrt{10}$

11) Sabendo que os pontos A(0 , 0), P(1 , 1) e B são colineares, determinar as coordenadas do ponto B, tal que $4\overline{AP} = \overline{PB}$. (GeoJeca)

Medida algébrica

No eixo x

4.AP = PB
$4(x_P - x_A) = x_B - x_P$
$4(1 - 0) = x_B - 1$
$x_B = 5$

No eixo y

4.AP = PB
$4(y_P - y_A) = y_B - y_P$
$4(1 - 0) = y_B - 1$
$y_B = 5$

Portanto B(5 , 5) (resp)

12) Dados os pontos A(0 , 8) e B(6 , 0), determinar as coordenadas do ponto P, pertencente à reta AB, tal que $\overline{AB} = \overline{BP}$. (GeoJeca)

Medida algébrica

No eixo x

AB = BP
$x_B - x_A = x_P - x_B$
$6 - 0 = x_P - 6$
$x_P = 12$

No eixo y

AB = BP
$y_B - y_A = y_P - y_B$
$0 - 8 = y_P - 0$
$y_P = -8$

Portanto P(12 , -8) (resp)

Observação.
Como AB = BP , pode-se dizer que B é médio de AP.

A(0 , 8)
$P(x_P , y_P)$

B(6 , 0)

Portanto P(12 , -8)

13) Dados os pontos A(5 , 8) e B(1 , 2), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento AB e a distância entre A e B. (GeoJeca)

14) Dados os pontos A(-3 , 9) e B(1 , -5), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento AB e a distância entre A e B. (GeoJeca)

15) Dados os pontos A(0 , 5), B(2 , 1), C(8 , -3) e D(6 , -7), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que une o ponto médio do segmento AB ao ponto médio do segmento CD. (GeoJeca)

16) Dado o ponto A(8 , -1), determinar as coordenadas do ponto B, sabendo que o ponto M(4 , 2) é o ponto médio do segmento AB. (GeoJeca)

17) Determine as coordenadas do vértice C de um triângulo ABC, sabendo que os vértices A e B são os pontos A(-6 , -2) e B(8 , 3) e o baricentro é o ponto G(4 , 2). (GeoJeca)

18) Dados os pontos A(3 , 2) e B(7 , 0), determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes pares que é equidistante de A e de B. (GeoJeca)

13) Dados os pontos A(5 , 8) e B(1 , 2), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento AB e a distância entre A e B. (GeoJeca)

A(5 , 8)
B(1 , 2)

$M_{AB}\left(\frac{5+1}{2}, \frac{8+2}{2}\right)$

$M_{AB}(3 , 5)$ (resp)

$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 - 8)^2}$

$dAB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (resp)

14) Dados os pontos A(-3 , 9) e B(1 , -5), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento AB e a distância entre A e B. (GeoJeca)

A(-3 , 9)
B(1 , -5)

$M_{AB}\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{9+(-5)}{2}\right)$

$M_{AB}(-1 , 2)$ (resp)

$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-5 - 9)^2}$

$dAB = \sqrt{212} = 2\sqrt{53}$ (resp)

15) Dados os pontos A(0 , 5), B(2 , 1), C(8 , -3) e D(6 , -7), determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que une o ponto médio do segmento AB ao ponto médio do segmento CD. (GeoJeca)

A(0 , 5)
B(2 , 1)

$M_{AB}\left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+1}{2}\right)$

$M_{AB}(1 , 3)$

C(8 , -3)
D(6 , -7)

$N_{CD}\left(\frac{8+6}{2}, \frac{-3+(-7)}{2}\right)$

$N_{CD}(7 , -5)$

$M_{AB}(1 , 3)$
$N_{CD}(7 , -5)$

$M_{MN}(4 , -1)$ (resp)

16) Dado o ponto A(8 , -1), determinar as coordenadas do ponto B, sabendo que o ponto M(4 , 2) é o ponto médio do segmento AB. (GeoJeca)

A(8 , -1)
$B(x_B , y_B)$

$M_{AB}(4 , 2)$

$(8 + x_B)/2 = 4$
$8 + x_B = 8$
$x_B = 0$

$(-1 + y_B)/2 = 2$
$-1 + y_B = 4$
$y_B = 5$

B(0 , 5) (resp)

17) Determine as coordenadas do vértice C de um triângulo ABC, sabendo que os vértices A e B são os pontos A(-6 , -2) e B(8 , 3) e o baricentro é o ponto G(4 , 2). (GeoJeca)

A(-6 , -2)
B(8 , 3)
$C(x_C , y_C)$

G(4 , 2)

$(-6 + 8 + x_C)/3 = 4$
$2 + x_C = 12$
$x_C = 10$

$(-2 + 3 + y_C)/3 = 2$
$1 + y_C = 6$
$y_C = 5$

C(10 , 5) (resp)

18) Dados os pontos A(3 , 2) e B(7 , 0), determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes pares que é equidistante de A e de B. (GeoJeca)

Se P pertence à bissetriz par, então P(-k , k).

Se P é equidistante de A e de B, então $d_{AP} = d_{BP}$

$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$

(-k - 3)2 + (k - 2)2 = (-k - 7)2 + (k - 0)2

$\cancel{k^2} + 6k + 9 + \cancel{k^2} - 4k + 4 = \cancel{k^2} + 14k + 49 + \cancel{k^2}$

2k + 13 = 14k + 49

12k = -36

k = -3

Portanto P(3 , -3) (resp)

19) Dados os pontos A(-3 , 4) e B(-1 , 0), determinar as coordenadas do ponto do eixo das abscissas que é equidistante de A e de B. (GeoJeca)	20) Dados os vértices do triângulo ABC, A(-6 , 1), B(4 , -7) e C(8 , 15), determine os pontos médios dos lados AB, AC e BC. (GeoJeca)
21) Dados os pontos A(1 , -4) e B(-1 , -8), determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que é equidistante de A e de B. (GeoJeca)	22) Dados os pontos A(5 , -7) e B(-3 , -3), determinar as coordenadas do ponto do eixo das ordenadas que é equidistante de A e de B. (GeoJeca)
23) Dado o ponto A(6 , 4), determinar as coordenadas do ponto do eixo das abscissas cuja distância ao ponto A é 5. (GeoJeca)	24) Dado o ponto A(3 , 1), determinar as coordenadas do ponto que tem abscissa -2 e cuja distância ao ponto A é 13. (GeoJeca)

19) Dados os pontos A(-3 , 4) e B(-1 , 0), determinar as coordenadas do ponto do eixo das abscissas que é equidistante de A e de B. (GeoJeca)

Se P pertence ao eixo das abscissas, então P(k , 0).

Se P é equidistante de A e de B, então $d_{AP} = d_{BP}$

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

$$(k - (-3))^2 + (0 - 4)^2 = (k - (-1))^2 + (0 - 0)^2$$

$$\cancel{k^2} + 6k + 9 + 16 = \cancel{k^2} + 2k + 1$$

$4k = -24$

$k = -6$

Portanto P(-6 , 0) (resp)

20) Dados os vértices do triângulo ABC, A(-6 , 1), B(4 , -7) e C(8 , 15), determine os pontos médios dos lados AB, AC e BC. (GeoJeca)

$$\frac{\begin{array}{c} A(-6\ ,\ 1) \\ B(4\ ,\ -7) \end{array}}{M_{AB}(-1\ ,\ -3)} \qquad \frac{\begin{array}{c} A(-6\ ,\ 1) \\ C(8\ ,\ 15) \end{array}}{M_{AC}(1\ ,\ 8)} \qquad \frac{\begin{array}{c} B(4\ ,\ -7) \\ C(8\ ,\ 15) \end{array}}{M_{BC}(6\ ,\ 4)}$$

21) Dados os pontos A(1 , -4) e B(-1 , -8), determinar as coordenadas do ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que é equidistante de A e de B. (GeoJeca)

Se P pertence à bissetriz ímpar, então P(k , k).

Se P é equidistante de A e de B, então $d_{AP} = d_{BP}$

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

$$(k - 1)^2 + (k - (-4))^2 = (k - (-1))^2 + (k - (-8))^2$$

$$\cancel{k^2} - 2k + 1 + \cancel{k^2} + 8k + 16 = \cancel{k^2} + 2k + 1 + \cancel{k^2} + 16k + 64$$

$6k + 17 = 18k + 65$

$12k = -48$

$k = -4$

Portanto P(-4 , -4) (resp)

22) Dados os pontos A(5 , -7) e B(-3 , -3), determinar as coordenadas do ponto do eixo das ordenadas que é equidistante de A e de B. (GeoJeca)

Se P pertence ao eixo das ordenadas, então P(0 , k).

Se P é equidistante de A e de B, então $d_{AP} = d_{BP}$

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

$$(0 - 5)^2 + (k - (-7))^2 = (0 - (-3))^2 + (k - (-3))^2$$

$$25 + \cancel{k^2} + 14k + 49 = 9 + \cancel{k^2} + 6k + 9$$

$14k + 74 = 6k + 18$

$8k = -56$

$k = -7$

Portanto P(0 , -7) (resp)

23) Dado o ponto A(6 , 4), determinar as coordenadas do ponto do eixo das abscissas cuja distância ao ponto A é 5. (GeoJeca)

Se P pertence ao eixo das abscissas, então P(k , 0)

$d_{AP} = 5$

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = 5$$

$(k - 6)^2 + (0 - 4)^2 = 25$

$k^2 - 12k + 36 + 16 = 25$

$k^2 - 12k + 27 = 0$

$k = 9$ ou $k = 3$

Portanto $P_1(3\ ,\ 0)$ e $P_2(9\ ,\ 0)$ (resp)

24) Dado o ponto A(3 , 1), determinar as coordenadas do ponto que tem abscissa -2 e cuja distância ao ponto A é 13. (GeoJeca)

Se P tem abscissa -2, então P(-2 , k)

$d_{AP} = 13$

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = 13$$

$(-2 - 3)^2 + (k - 1)^2 = 169$

$25 + k^2 - 2k + 1 = 169$

$k^2 - 2k - 143 = 0$

$k = 13$ ou $k = -11$

Portanto $P_1(-2\ ,\ 13)$ e $P_2(-2\ ,\ -11)$ (resp)

25) Sendo M(1 , 3), N(8 , 5) e P(5 , -1) os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente do triângulo ABC, determine as coordenadas dos vértices A, B e C.

(GeoJeca)

26) Classifique o triângulo com vértices A(-2 , 3), B(10 , 5) e C(3 , 12) em função dos seus lados.

(GeoJeca)

27) Verifique se o baricentro do triângulo de vértices A(2 , 2), B(6 , 3) e C(4 , 10) divide a mediana relativa ao vértice B na razão 2 : 1.

(GeoJeca)

28) Dados os pontos A(8 , 6) e B(-1 , 2), determinar as coordenadas o ponto P, pertencente à reta AB, tal que $2\overline{AP} = 5\overline{PB}$.

(GeoJeca)

25) Sendo M(1 , 3), N(8 , 5) e P(5 , -1) os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente do triângulo ABC, determine as coordenadas dos vértices A, B e C. (GeoJeca)

$(x_A + x_B)/2 = x_M \longrightarrow x_A + x_B = 2x_M \longrightarrow x_A + x_B = 2$

$(x_A + x_C)/2 = x_N \longrightarrow x_A + x_C = 2x_N \longrightarrow x_A + x_C = 16$

$(x_B + x_C)/2 = x_P \longrightarrow x_B + x_C = 2x_P \longrightarrow x_B + x_C = 10$

$x_A + x_B = 2$
$x_A + x_C = 16$
$2x_A + x_B + x_C = 18$

$2x_A + 10 = 18 \longrightarrow x_A = 4$

Portanto $x_B = -2$ e $x_C = 12$

$(y_A + y_B)/2 = y_M \longrightarrow y_A + y_B = 2y_M \longrightarrow y_A + y_B = 6$

$(y_A + y_C)/2 = y_N \longrightarrow y_A + y_C = 2y_N \longrightarrow y_A + y_C = 10$

$(y_B + y_C)/2 = y_P \longrightarrow y_B + y_C = 2y_P \longrightarrow y_B + y_C = -2$

$y_A + y_B = 6$
$y_A + y_C = 10$
$2y_A + y_B + y_C = 16$

$2x_A - 2 = 16 \longrightarrow y_A = 9$

Portanto $y_B = -3$ e $y_C = 1$

A(4 , 9) , B(-2 , -3) e C(12 , 1) (resp)

26) Classifique o triângulo com vértices A(-2 , 3), B(10 , 5) e C(3 , 12) em função dos seus lados. (GeoJeca)

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

A(-2 , 3)
B(10 , 5)
$d_{AB} = \sqrt{(10 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{148}$

A(-2 , 3)
C(3 , 12)
$d_{AC} = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (12 - 3)^2} = \sqrt{106}$

B(10 , 5)
C(3 , 12)
$d_{BC} = \sqrt{(3 - 10)^2 + (12 - 5)^2} = \sqrt{98}$

Os três lados têm medidas diferentes.

O triângulo é escaleno. (resp)

27) Verifique se o baricentro do triângulo de vértices A(2 , 2), B(6 , 3) e C(4 , 10) divide a mediana relativa ao vértice B na razão 2 : 1. (GeoJeca)

Determinação do baricentro

A(2 , 2)
B(6 , 3)
C(4 , 10)
G(4 , 5)

Determinação do ponto médio de AC

A(2 , 2)
C(4 , 10)
$M_{AC}(3 , 6)$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{BG} = \sqrt{(4 - 6)^2 + (5 - 3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$d_{GM} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{2}$$

O baricentro divide a mediana na razão 2 : 1 (resp)

28) Dados os pontos A(8 , 6) e B(-1 , 2), determinar as coordenadas o ponto P, pertencente à reta AB, tal que $2\overline{AP} = 5\overline{PB}$. (GeoJeca)

Medida algébrica

No eixo x

2.AP = 5.PB
$2(x_P - x_A) = 5(x_B - x_P)$
$2(x_P - 8) = 5(-1 - x_P)$
$2x_P - 16 = -5 - 5x_P$
$7x_P = 11$
$x_P = 11/7$

No eixo y

2.AP = 5.PB
$2(y_P - y_A) = 5(y_B - y_P)$
$2(y_P - 6) = 5(2 - y_P)$
$2y_P - 12 = 10 - 5y_P$
$7y_P = 22$
$y_P = 22/7$

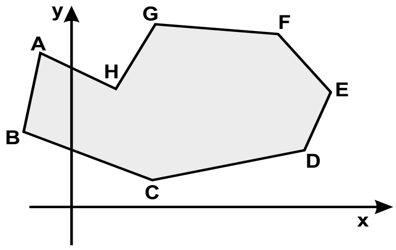
Portanto P(11/7 , 22/7) (resp)

GeoJeca

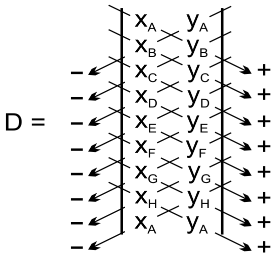
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 03
Áreas das figuras poligonais.

I - Áreas das figuras poligonais planas.



$$S = \frac{1}{2}|D|$$



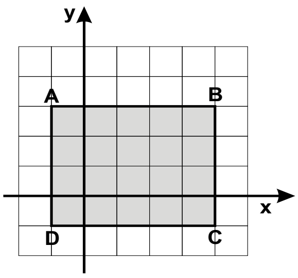
Observações importantes.

1) Repetir o 1º ponto no final do "determinante".

2) Na montagem do "determinante" lançar os vértices na sequência em que aparecem no desenho do polígono.

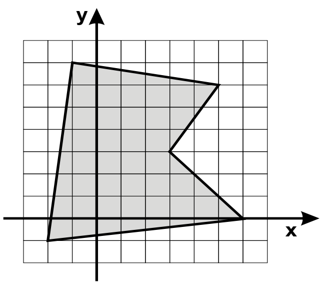
Exercícios

01) Utilizando o método acima para a determinação de áreas poligonais, encontre o valor da área do retângulo ABCD abaixo.
(GeoJeca)



02) Determine a área do triângulo de vértices A(-3 , 1), B(2 , 7) e C(8 , 3).
(GeoJeca)

03) Utilizando o método para a determinação de áreas poligonais, encontre a área do polígono abaixo.
(GeoJeca)

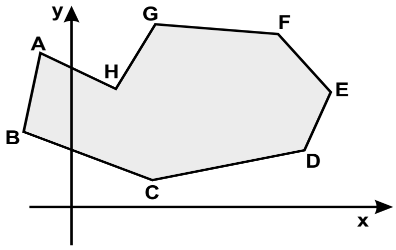


GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 03
Áreas das figuras poligonais.

I - Áreas das figuras poligonais planas.



$$S = \frac{1}{2}|D|$$

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_D & y_D \\ x_E & y_E \\ x_F & y_F \\ x_G & y_G \\ x_H & y_H \\ x_A & y_A \end{vmatrix}$$

Observações importantes.

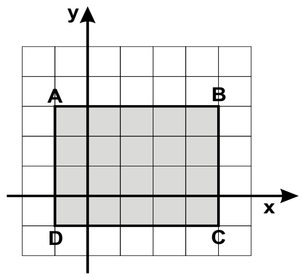
1) Repetir o 1º ponto no final do "determinante".

2) Na montagem do "determinante" lançar os vértices na sequência em que aparecem no desenho do polígono.

Exercícios

01) Utilizando o método acima para a determinação de áreas poligonais, encontre o valor da área do retângulo ABCD abaixo.

(GeoJeca)



A(-1 , 3)
B(4 , 3)
C(4 , -1)
D(-1 , -1)

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 4 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

D = -1 . 3 + 4 . (-1) + 4 . (-1) + (-1) . 3 -

- (-1) . (-1) - (-1) . (-1) - 4 . 3 - 4 . 3

D = -3 - 4 - 4 - 3 - 1 - 1 - 12 - 12

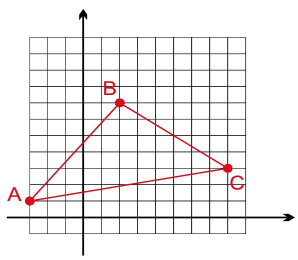
D = -40

S = (1/2) | D | = (1/2) . 40 = 20 (resp)

Observe que a figura é um retângulo de base 5 e altura 4 e a sua área poderia ser calculada por S = b.h
Portanto, o método funciona.

02) Determine a área do triângulo de vértices A(-3 , 1), B(2 , 7) e C(8 , 3).

(GeoJeca)



$$D = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \\ 8 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

D = -3 . 7 + 2 . 3 + 8 . 1 - (-3) . 3 - 8 . 7 - 2 . 1

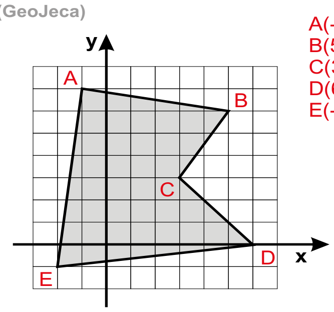
D = -21 + 6 + 8 + 9 - 56 - 2

D = 23 - 79 = -56

S = (1/2) | D | = (1/2) | -56 | = 28 (resp)

03) Utilizando o método para a determinação de áreas poligonais, encontre a área do polígono abaixo.

(GeoJeca)



A(-1 , 7)
B(5 , 6)
C(3 , 3)
D(6 , 0)
E(-2 , -1)

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 6 \\ 3 & 3 \\ 6 & 0 \\ -2 & -1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

D = -1 . 6 + 5 . 3 + 3 . 0 + 6 . (-1) + (-2) . 7 -

- (-1) . (-1) - (-2) . 0 - 6 . 3 - 3 . 6 - 5 . 7

D = -6 + 15 + 0 - 6 - 14 - 1 - 0 - 18 - 18 - 35

D = 15 - 98 = -83

S = (1/2) | D | = (1/2) | -83 | = 83/2 (resp)

(Cuidado especial na sequência dos vértices)

04) O triângulo ABC tem área 12, vértices A(-2 , 3), B(5 , 6) e o vétrice C pertence ao eixo das abscissas. Determine as coordenadas do vértice C.

(GeoJeca)

05) Utilizando o método para a determinação de áreas das figuras poligonais, determine o valor de k, sabendo que os pontos A(-4 , 0), B(-1 , 2) e C(5 , k) são colineares.

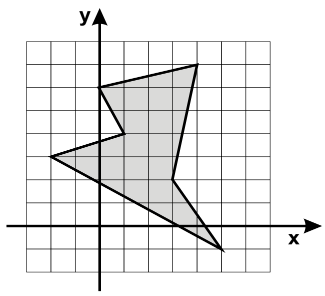
(GeoJeca)

06) Dados os pontos A(2 , 7) , B(k , 4) e C(5 , 3), determine k sabendo que o triângulo ABC tem área igual a 20.

(GeoJeca)

07) Determine a área da região poligonal sombreada abaixo, supondo que o reticulado seja formado por quadradinhos de lados unitários.

(GeoJeca)



04) O triângulo ABC tem área 12, vértices A(-2 , 3), B(5 , 6) e o vétrice C pertence ao eixo das abscissas. Determine as coordenadas do vértice C.

(GeoJeca)

Se C pertence ao eixo das abscissas, então C(k , 0)

A(-2 , 3)
B(5 , 6)
C(k , 0)

S = 12

S = (1/2) | D |
12 = (1/2) | D |
Então | D | = 24

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 6 \\ k & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

D = -2 . 6 + 5 . 0 + k . 3 -

- (-2) . 0 - k . 6 - 5 . 3

D = -12 + 0 + 3k - 0 - 6k - 15

D = -3k - 27

Portanto 24 = | -3k - 27 |

Supondo positivo

24 = -3k - 27
3k = - 51
k = -17

C_1(-17 , 0) (resp)

Supondo negativo

-24 = -3k - 27
3k = - 3
k = -1

C_2(-1 , 0) (resp)

05) Utilizando o método para a determinação de áreas das figuras poligonais, determine o valor de k, sabendo que os pontos A(-4 , 0), B(-1 , 2) e C(5 , k) são colineares.

(GeoJeca)

Se os pontos A, B e C são colineares, então o triângulo ABC tem área nula.

A(-4 , 0)
B(-1 , 2)
C(5 , k)

$$D = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 5 & k \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

D = -4 . 2 + (-1) . k + 5 . 0 -

- (-4) . k - 5 . 2 - (-1) . 0 = 0

-8 - k + 0 + 4k - 10 - 0 = 0

3k - 18 = 0

3k = 18

k = 6 (resp)

06) Dados os pontos A(2 , 7) , B(k , 4) e C(5 , 3), determine k sabendo que o triângulo ABC tem área igual a 20.

(GeoJeca)

S = 20

S = (1/2) | D |

20 = (1/2) | D |

Portanto, | D | = 40

A(2 , 7)
B(k , 4)
C(5 , 3)

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ k & 4 \\ 5 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

D = 2 . 4 + k . 3 + 5 . 7 -

- 2 . 3 - 5 . 4 - k . 7

D = 8 + 3k + 35 - 6 - 20 - 7k

D = 17 - 4k

Mas | D | = 40

Portanto, |17 - 4k | = 40

Supondo positivo

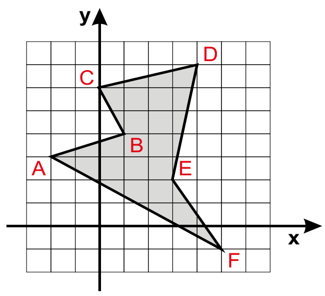
17 - 4k = 40
4k = -23
k = -23/4 (resp)

Supondo negativo

17 - 4k = -40
4k = 57
k = 57/4 (resp)

07) Determine a área da região poligonal sombreada abaixo, supondo que o reticulado seja formado por quadradinhos de lados unitários.

(GeoJeca)



A(-2 , 3)
B(1 , 4)
C(0 , 6)
D(4 , 7)
E(3 , 2)
F(5 , -1)

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \\ 4 & 7 \\ 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

D = -8 + 6 + 0 + 8 - 3 + 15 -
- 2 - 10 - 21 - 24 - 0 - 3

D = 29 - 71 = -42

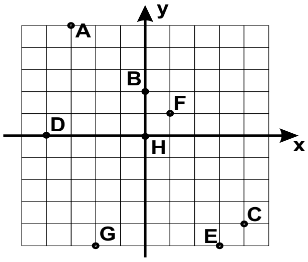
S = (1/2) | D | = (1/2) | -42 |

S = 21 (resp)

Respostas das aulas 01, 02 e 03.

Respostas da Aula 01

01)



02) A(-2 , -3)
B(-2 , 4)
C(4 , 1)
D(5 , -4)
E(0 , 2)
F(-3 , 0)
G(-4 , 3)
H(-5 , -2)

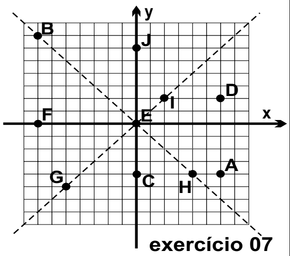
03) P(-2 , 4) A(2 , 4) B(-2 , -4)
C(2 , -4) D(2 , -2)

04) B(-4 , 1) C(-4 , -1)

05) A(-3 , 2) B(-3 , -2) C(3 , 2)

06) B encontra-se no 3º quadrante.

07) b) E e F
c) C, E e J
d) E, G e I
e) B, E e H



exercício 07

08) m = -2

09) m = -3

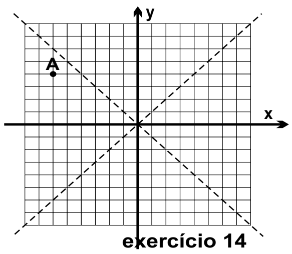
10) P(5 , 5)

11) P(-5 , 5)

12) 3º quadrante

13) 2º quadrante

14) B(3 , -7) C(-7 , 3) D(4 , 4)
E(2 , -7) F(5 , 2) G(4 , -8)
H(-3 , 4) J(7 , 7) K(-3 , 3)
L(0 , 0) M(impossível)



exercício 14

15) 2º quadrante

16) 4º quadrante

17) m = 0 e n ∈ R

18) Q pertence ao eixo das ordenadas

19) n = 2 e m ∈ R

20) 4º quadrante

21) 4º quadrante

22) 2º quadrante

23) 2º quadrante

24) 2º quadrante

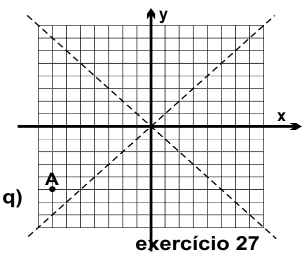
25) a = b + 7

26) b = 3a - 1

27) B(-7 , 2) C(1 , -8) D(-6 , 0)
E(-6 , 2) F(-5 , 2) G(7 , -4)
H(5 , 8) J(-2 , 2) K(-7 , -7)

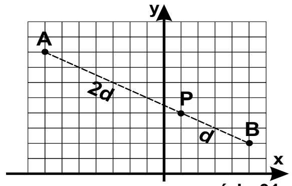
28) Q(5 , -4)

29) A (2º q) B(1º q) C(4º q) D(4º q)
E(2º q) F(3º q) G (no eixo x)



exercício 27

Respostas da Aula 02



exercício 01

01) P(1 , 4)

02) C(3 , 8) D(4 , 4)

03) P(4 , -5/2)

04) G(3 , 7)

05) C(5 , -1)

06) $M_{AB}(1 , 5)$

07) A(3 , 6)

08) $d_{AB} = \sqrt{85}$

09) A(10 , 0) B(2 , 0)

10) a) G(3 , 2) b) $M_{AC}(2 , -1)$ c) $3\sqrt{10}$ d) $2\sqrt{10}$
e) $\sqrt{10}$

11) B(5 , 5)

12) P(12 , -8)

13) $M_{AB}(3 , 5)$ $d_{AB} = 2\sqrt{13}$

14) $M_{AB}(-1 , 2)$ $d_{AB} = 2\sqrt{53}$

15) M(4 , -1)

16) B(0 , 5)

17) C(10 , 5)

18) P(3 , -3)

19) P(-6 , 0)

20) $M_{BC}(6 , 4)$

21) P(-4 , -4)

22) P(0 , -7)

23) P(9 , 0) P'(3 , 0)

24) P(-2 , 13) P'(-2 , -11)

25) A(4 , 9) B(-2 , -3) C(12 , 1)

26) $d_{AB} = \sqrt{148}$ $d_{AC} = \sqrt{106}$ $d_{BC} = \sqrt{98}$ triângulo escaleno

27) $d_{BG} = 2\sqrt{2}$ $d_{GM} = \sqrt{2}$ divide na razão 2 : 1

28) P(11 / 7 , 22 / 7)

Respostas da Aula 03

01) 20

02) 28

03) 83 / 2

04) C(-1 , 0) C'(-17 , 0)

05) k = 6

06) k = -23 / 4 ou k = 57 / 4

07) 21

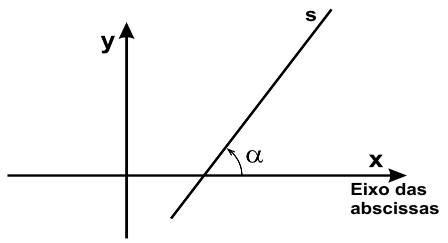
Favor comunicar eventuais erros deste trabalho através do e-mail
jecajeca@uol.com.br Obrigado.

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados
pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 04
Coeficiente angular e consequências. Equação fundamental da reta.

I - Coeficiente angular de uma reta (m). **(Conceito muito importante da Geometria Analítica)**



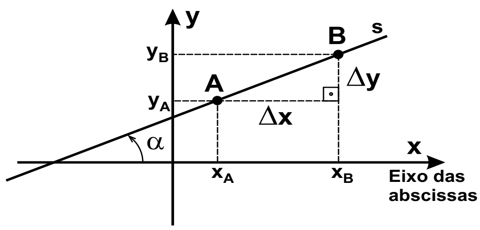
A inclinação de uma reta é o ângulo que essa reta faz com o *semi-eixo positivo das abscissas.*

O coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo de inclinação.

$$\boxed{m_s = \text{tg}\ \alpha}$$

O coeficiente angular é um nº real que representa a direção da reta.

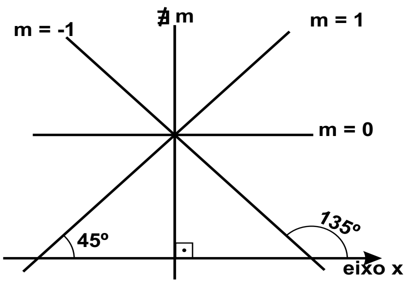
II - Determinação do coeficiente angular de uma reta através de dois pontos.



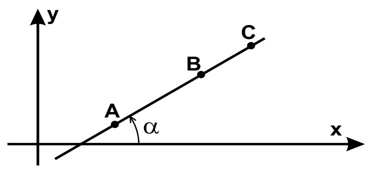
$$m = \text{tg}\ \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$ **(Importante)**

III - Coeficientes particulares importantes.



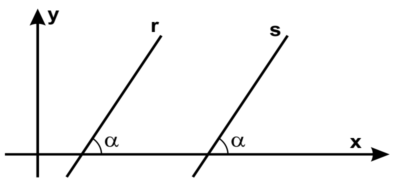
IV - Condição de alinhamento de três pontos.



Se os pontos A, B e C estão alinhados, então

$$m_{AB} = m_{BC}$$

V - Retas paralelas entre si.



Se as retas r e s são paralelas entre si, então

$$m_r = m_s$$

VI - Equação fundamental da reta.

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$ **(Importante)**

m - coeficiente angular da reta.
$(x_0\ ,\ y_0)$ - coordenadas de um *ponto conhecido* da reta.

Equação geral da reta

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

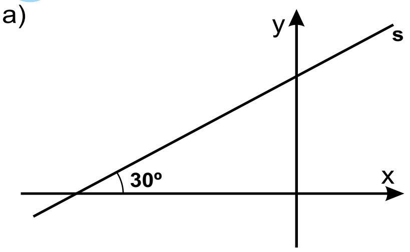
Obtenção da equação geral da reta através de dois pontos aplicando-se determinante

Dados os pontos $A(x_A , y_A)$ e $B(x_B , y_B)$, a equação da reta é obtida desenvolvendo-se o determinante ao lado.

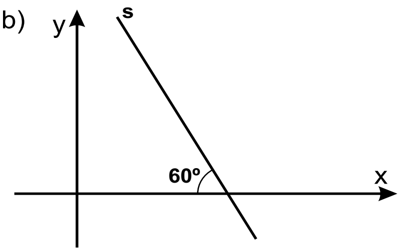
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

01) Em cada caso abaixo, determinar o coeficiente angular da reta s. (GeoJeca)

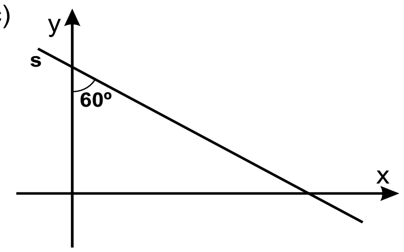
a)



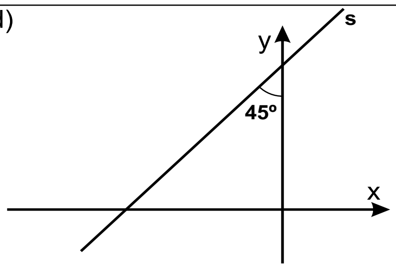
b)



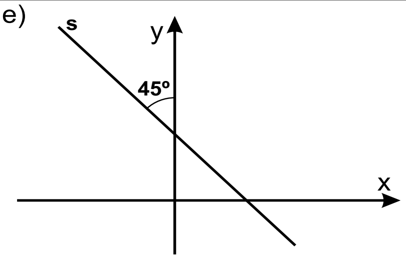
c)



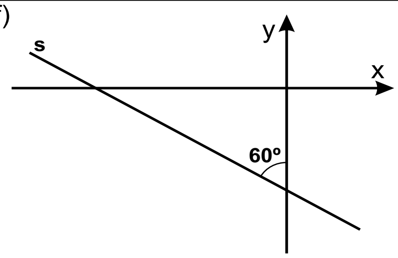
d)



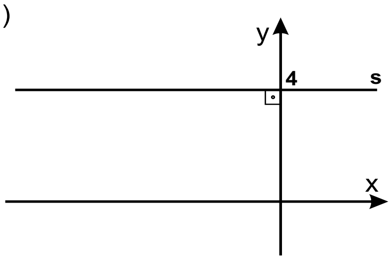
e)



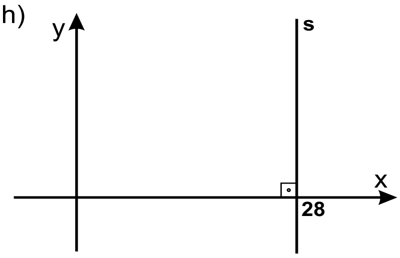
f)



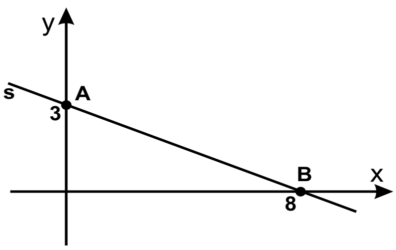
g)



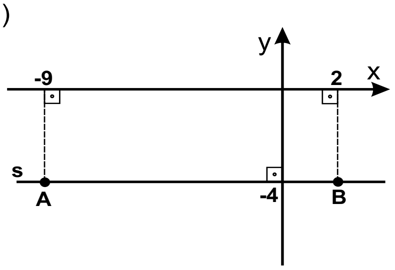
h)



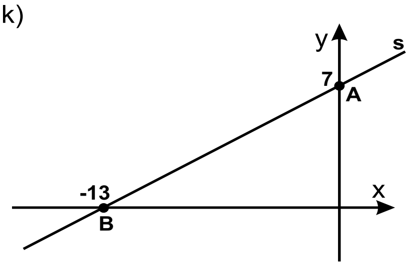
i)



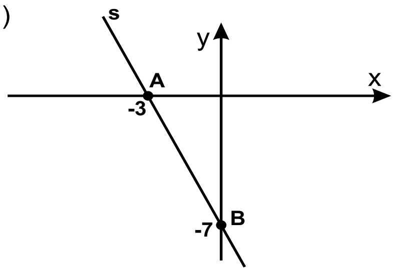
j)



k)

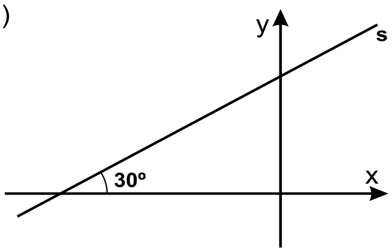


l)



12) Em cada caso abaixo, determinar o coeficiente angular da reta s. (GeoJeca)

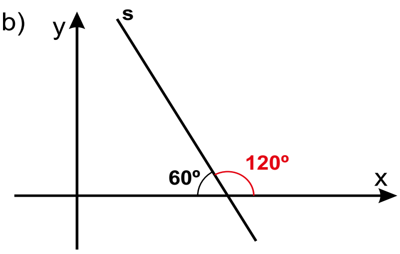
a)



$m = tg\ \alpha = tg\ 30^o$

$m = \sqrt{3}/3$

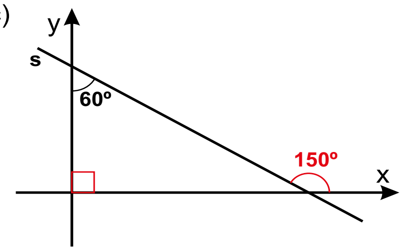
b)



$m = tg\ \alpha = tg\ 120^o$

$m = -\sqrt{3}$

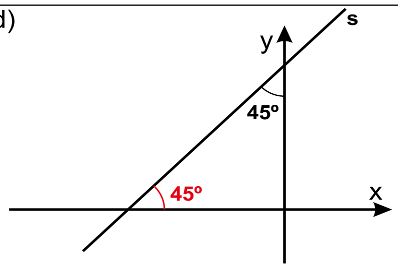
c)



$m = tg\ \alpha = tg\ 150^o$

$m = -\sqrt{3}/3$

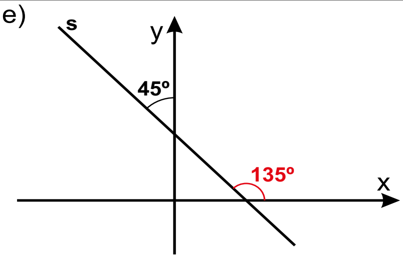
d)



$m = tg\ \alpha = tg\ 45^o$

$m = 1$

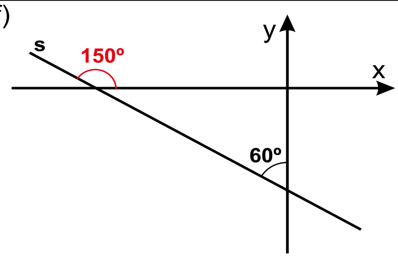
e)



$m = tg\ \alpha = tg\ 135^o$

$m = -1$

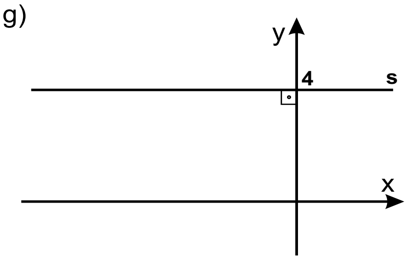
f)



$m = tg\ \alpha = tg\ 150^o$

$m = -\sqrt{3}/3$

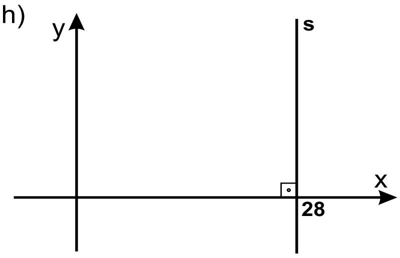
g)



$m = tg\ \alpha = tg\ 0^o$

$m = 0$

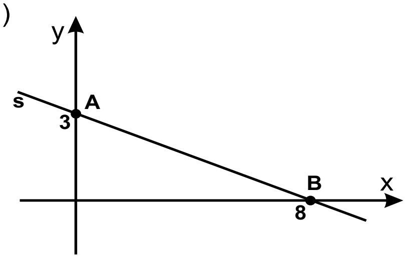
h)



$m = tg\ \alpha = tg\ 90^o$

$\nexists\ m$

i)

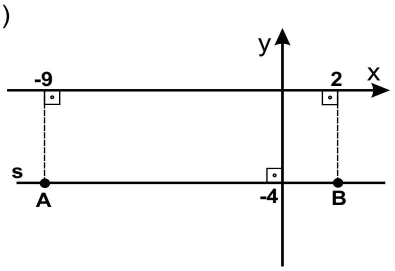


A(0 , 3)
B(8 , 0)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AB} = \frac{0 - 3}{8 - 0} = \frac{-3}{8}$$

j)



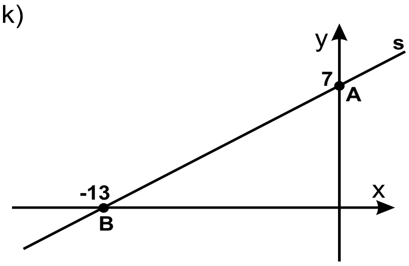
A(-9 , -4)
B(2 , -4)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AB} = \frac{-4 - (-4)}{2 - (-9)} = \frac{0}{11}$$

$m_{AB} = 0$

k)

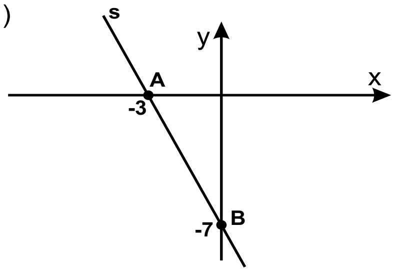


A(0 , 7)
B(-13 , 0)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AB} = \frac{0 - 7}{-13 - 0} = \frac{7}{13}$$

l)



A(-3 , 0)
B(0 , -7)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AB} = \frac{-7 - 0}{0 - (-3)} = \frac{-7}{3}$$

02) Em cada caso abaixo, verificar se os pontos A, B e C estão alinhados. (GeoJeca)

a) A(1 , 4) B(5 , -4) C(-2 , 10) (GeoJeca)

b) A(1 , 3) B(0 , -1) C(2 , 6) (GeoJeca)

c) A(-2 , 2) B(-8 , 0) C(7 , 5)

03) Em cada caso abaixo, determinar k para que os pontos A, B e C estejam alinhados. (GeoJeca)

a) A(2 , k) B(1 , -1) C(-1 , 5) (GeoJeca)

b) A(3 , -1) B(7 , 3) C(k , 4) (GeoJeca)

c) A(0 , 1) B(2 , 5) C(-2 , k)

04) Determinar a equação fundamental da reta que passa pelos pontos A(2 , 7) e B(-5 , 3). (GeoJeca)

05) Determinar a equação fundamental da reta que passa pelos pontos A(0 , 6) e B(4 , -1). (GeoJeca)

06) Determinar a equação fundamental da reta que tem coeficiente angular 3 e que passa pelo ponto P(-2 , 7). (GeoJeca)

07) Determinar a equação fundamental da reta que faz um ângulo de 135º com o semi-eixo positivo das abscissas e que passa pelo ponto P(0 , -5). (GeoJeca)

02) Em cada caso abaixo, verificar se os pontos A, B e C estão alinhados. (GeoJeca)

a) A(1 , 4) B(5 , -4) C(-2 , 10) (GeoJeca)

$m_{AB} = m_{BC}$ (condição de alinhamento)

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

$$\frac{-4-4}{5-1} = \frac{10-(-4)}{-2-5}$$

$$\frac{-8}{4} = \frac{14}{-7}$$

$-2 = -2$

Os pontos são colineares. (resp)

b) A(1 , 3) B(0 , -1) C(2 , 6) (GeoJeca)

$m_{AB} = m_{BC}$ (condição de alinhamento)

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

$$\frac{-1-3}{0-1} = \frac{6-(-1)}{2-0}$$

$$\frac{-4}{-1} = \frac{7}{2} \quad \text{(falso)}$$

Os pontos não são colineares. (resp)

c) A(-2 , 2) B(-8 , 0) C(7 , 5)

$m_{AB} = m_{BC}$ (condição de alinhamento)

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

$$\frac{0-2}{-8-(-2)} = \frac{5-0}{7-(-8)}$$

$$\frac{-2}{-6} = \frac{5}{15}$$

$1/3 = 1/3$

Os pontos são colineares. (resp)

03) Em cada caso abaixo, determinar k para que os pontos A, B e C estejam alinhados. (GeoJeca)

a) A(2 , k) B(1 , -1) C(-1 , 5) (GeoJeca)

$m_{AB} = m_{BC}$ (condição de alinhamento)

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

$$\frac{-1-k}{1-2} = \frac{5-(-1)}{-1-1}$$

$k = -4$ (resp)

b) A(3 , -1) B(7 , 3) C(k , 4) (GeoJeca)

$m_{AB} = m_{BC}$ (condição de alinhamento)

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

$$\frac{3-(-1)}{7-3} = \frac{4-3}{k-7}$$

$k = 8$ (resp)

c) A(0 , 1) B(2 , 5) C(-2 , k)

$m_{AB} = m_{BC}$ (condição de alinhamento)

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}$$

$$\frac{5-1}{2-0} = \frac{k-5}{-2-2}$$

$k = -3$ (resp)

04) Determinar a equação fundamental da reta que passa pelos pontos A(2 , 7) e B(-5 , 3). (GeoJeca)

A(2 , 7)
B(-5 , 3)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-7}{-5-2} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \frac{4}{7} \\ A(2\ ,\ 7) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 7 = \frac{4}{7}(x - 2)$$

(eq. fundamental) (resp)

05) Determinar a equação fundamental da reta que passa pelos pontos A(0 , 6) e B(4 , -1). (GeoJeca)

A(0 , 6)
B(4 , -1)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-6}{4-0} = \frac{-7}{4}$$

$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \frac{-7}{4} \\ A(0\ ,\ 6) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 6 = \frac{-7}{4}(x - 0)$$

(eq. fundamental) (resp)

06) Determinar a equação fundamental da reta que tem coeficiente angular 3 e que passa pelo ponto P(-2 , 7). (GeoJeca)

$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ P(-2\ ,\ 7) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 7 = 3(x - (-2))$

$y - 7 = 3(x + 2)$

(eq. fundamental) (resp)

07) Determinar a equação fundamental da reta que faz um ângulo de 135º com o semi-eixo positivo das abscissas e que passa pelo ponto P(0 , -5). (GeoJeca)

$m = \text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ 135^\circ = -1$

$\left.\begin{array}{l} m = -1 \\ P(0\ ,\ -5) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (-5) = -1(x - 0)$

$y + 5 = -1(x - 0)$

(eq. fundamental) (resp)

GeoJeca

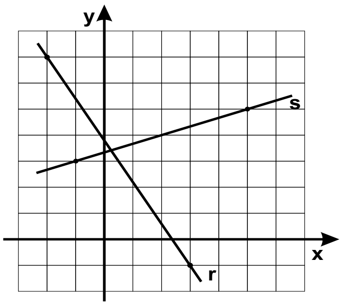
Estudos sobre Geometria realizados
pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 04.

08) Determine a equação fundamental e a equação geral da reta que passa pelos pontos A(3 , -8) e B(5 , 1).
(GeoJeca)

09) Dados os pontos A(0 , 3), B(-2 , 5), C(4 , 9) e D(-1 , k) determine k sabendo que as retas AB e CD são paralelas entre si.
(GeoJeca)

10) Na figura abaixo, sendo o reticulado formado por quadrados de lados unitários, determine os coeficientes angulares das retas r e s.
(GeoJeca)



11) Se o coeficiente angular da reta r é -2 e α é o ângulo entre a reta r e o semieixo positivo das abscissas, então podemos afirmar que:
(GeoJeca)
a) $0° < \alpha < 45°$
b) $45° < \alpha < 90°$
c) $90° < \alpha < 120°$
d) $120° < \alpha < 150°$
e) $150° < \alpha < 180°$

12) Determine as coordenadas de 2 pontos que pertençam à reta (r) $3x - 2y + 12 = 0$.
(GeoJeca)

13) Determine as coordenadas dos pontos onde a reta (r) $x - 3y + 6 = 0$ corta os eixos coordenados.
(GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 04.

08) Determine a equação fundamental e a equação geral da reta que passa pelos pontos A(3 , -8) e B(5 , 1). (GeoJeca)

A(3 , -8)
B(5 , 1)

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - (-8)}{5 - 3} = \frac{9}{2}$

$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \frac{9}{2} \\ B(5 , 1) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = \frac{9}{2}(x - 5)$ (eq. fundamental) (resp)

$2(y - 1) = 9(x - 5)$
$2y - 2 = 9x - 45$

$9x - 2y - 43 = 0$ (eq. geral) (resp)

09) Dados os pontos A(0 , 3), B(-2 , 5), C(4 , 9) e D(-1 , k) determine k sabendo que as retas AB e CD são paralelas entre si. (GeoJeca)

Se AB // CD , então $m_{AB} = m_{CD}$

$m_{AB} = m_{CD}$

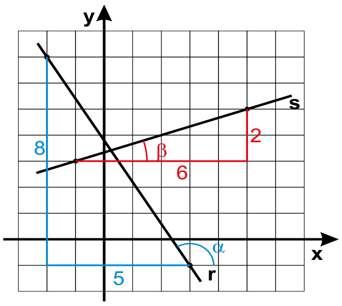
$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}$

$\frac{5 - 3}{-2 - 0} = \frac{k - 9}{-1 - 4}$

$-2 \cdot (k - 9) = 2 \cdot (-5)$
$k - 9 = 5$

$k = 14$ (resp)

10) Na figura abaixo, sendo o reticulado formado por quadrados de lados unitários, determine os coeficientes angulares das retas r e s. (GeoJeca)



m - coef. angular

$m = tg\ \alpha$

Reta r

$m = tg\ \alpha = -8/5$

Reta s

$m = tg\ \beta = 2/6 = 1/3$

11) Se o coeficiente angular da reta r é -2 e α é o ângulo entre a reta r e o semieixo positivo das abscissas, então podemos afirmar que: (GeoJeca)

a) $0° < \alpha < 45°$
b) $45° < \alpha < 90°$
c) $90° < \alpha < 120°$
d) $120° < \alpha < 150°$
e) $150° < \alpha < 180°$

O coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo que a reta faz com o semieixo positivo das abscissas.

Se $m = -2$, então essa reta faz um ângulo entre 90° e 120°.

(resp c))

12) Determine as coordenadas de 2 pontos que pertençam à reta (r) $3x - 2y + 12 = 0$. (GeoJeca)

Adotando $x = 4$, tem-se
$3 \cdot 4 - 2y + 12 = 0$
Portanto $y = 12$

O ponto A(4 , 12) pertence à reta r.

Adotando $y = -3$, tem-se
$3x - 2 \cdot (-3) + 12 = 0$
Portanto $x = -6$

O ponto B(-6 , -3) pertence à reta r.

13) Determine as coordenadas dos pontos onde a reta (r) $x - 3y + 6 = 0$ corta os eixos coordenados. (GeoJeca)

Adotando $x = 0$, tem-se
$0 - 3y + 6 = 0$
Portanto $y = 2$

O ponto A(0 , 2) pertence à reta r.

Adotando $y = 0$, tem-se
$x - 2 \cdot 0 + 6 = 0$
Portanto $x = -6$

O ponto B(-6 , 0) pertence à reta r.

A reta r corta o eixo x no ponto B(-6 , 0) e o eixo y no ponto A(0 , 2).

14) Dados os pontos A(-5 , 7) e B(2 , 3) , determine a equação geral da reta AB:

a) usando a equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$.

b) usando o determinante.

15) Dados os pontos A(0 , 6) e B(3 , -1) , determine a equação geral da reta AB:

a) usando a equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$.

b) usando o determinante.

16) Dados os pontos A(2 , 1) e B(-3 , -2) , determine a equação geral da reta AB:

a) usando a equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$.

b) usando o determinante.

14) Dados os pontos A(-5 , 7) e B(2 , 3) , determine a equação geral da reta AB:

a) usando a equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$.

A(-5 , 7)
B(2 , 3)

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{3 - 7}{2 - (-5)} = \dfrac{-4}{7}$

$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \dfrac{-4}{7} \\ B(2\ ,\ 3) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = \dfrac{-4}{7}(x - 2)$ (eq. fundamental) (resp)

$7(y - 3) = -4(x - 2)$
$7y - 21 = -4x + 8$

$4x + 7y - 29 = 0$ (eq. geral) (resp)

b) usando o determinante.

P(x , y)
A(-5 , 7)
B(2 , 3)

$R = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ -5 & 7 \\ 2 & 3 \end{matrix}$

$R = 7x + 2y - 15 - 14 - 3x - (-5y) = 0$

$4x + 7y - 29 = 0$ (eq. geral) (resp)

15) Dados os pontos A(0 , 6) e B(3 , -1) , determine a equação geral da reta AB:

a) usando a equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$.

A(0 , 6)
B(3 , -1)

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1 - 6}{3 - 0} = \dfrac{-7}{3}$

$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \dfrac{-7}{3} \\ B(3\ ,\ -1) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (-1) = \dfrac{-7}{3}(x - 3)$ (eq. fundamental) (resp)

$3(y + 1) = -7(x - 3)$
$3y + 3 = -7x + 21$

$7x + 3y - 18 = 0$ (eq. geral) (resp)

b) usando o determinante.

P(x , y)
A(0 , 6)
B(3 , -1)

$R = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 0 & 6 \\ 3 & -1 \end{matrix}$

$R = 6x + 3y + 0 - 18 - (-x) - 0 = 0$

$7x + 3y - 18 = 0$ (eq. geral) (resp)

16) Dados os pontos A(2 , 1) e B(-3 , -2) , determine a equação geral da reta AB:

a) usando a equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$.

A(2 , 1)
B(-3 , -2)

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2 - 1}{-3 - 2} = \dfrac{-3}{-5} = \dfrac{3}{5}$

$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \dfrac{3}{5} \\ A(2\ ,\ 1) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = \dfrac{3}{5}(x - 2)$ (eq. fundamental) (resp)

$5(y - 1) = 3(x - 2)$
$5y - 5 = 3x - 6$

$3x - 5y - 1 = 0$ (eq. geral) (resp)

b) usando o determinante.

P(x , y)
A(2 , 1)
B(-3 , -2)

$R = \begin{vmatrix} & & 1 \\ & & 1 \\ & & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{matrix}$

$R = x + (-3y) + (-2) - (-3) - (-2x) - 2y = 0$

$3x - 5y + 1 = 0$ (eq. geral) (resp)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 05
Equações da reta. Fundamental, geral, reduzida, segmentária e paramétricas.

I - Equações da reta.

1) Equação fundamental.

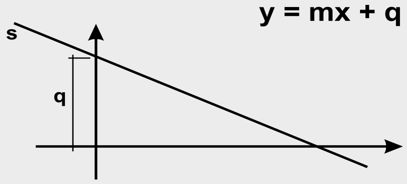
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

2) Equação geral.

$$ax + by + c = 0$$

3) Equação reduzida.

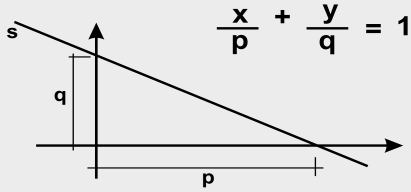
$$y = mx + q$$



m - coeficiente angular da reta.
q - coeficiente linear da reta.

4) Equação segmentária.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



p e q são os "segmentos" que a reta determina nos eixos x e y.

5) Equações paramétricas.

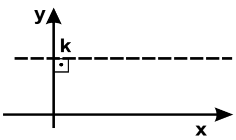
$$(s)\ \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

As variáveis x e y são dadas em função de um parâmetro **t**.

Dica - Isolar, substituir e "sumir" com o t. (SEMPRE)

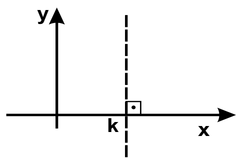
II - Retas particulares no plano cartesiano.

a) **Reta paralela ao eixo x**



y = constante
y = k
y - k = 0

b) **Reta perpendicular ao eixo x**



x = constante
x = k
x - k = 0

Exercícios

01) Dados os pontos A(0 , -4) e B(3 , 6), determine a equação geral da reta AB.

(GeoJeca)

02) Dada a equação geral da reta (r) 3x - 7y + 23 = 0, determine a equação reduzida e a equação segmentária de r.

(GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados
pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 05
Equações da reta. Fundamental, geral, reduzida, segmentária e paramétricas.

I - Equações da reta.

1) Equação fundamental.

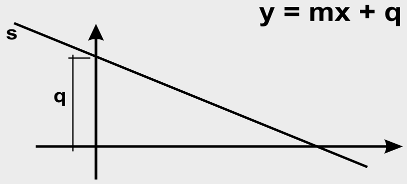
$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

2) Equação geral.

$$ax + by + c = 0$$

3) Equação reduzida.

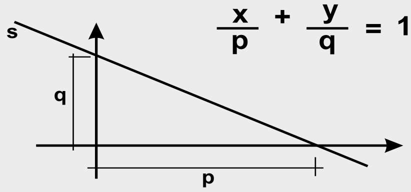
$$y = mx + q$$



m - coeficiente angular da reta.
q - coeficiente linear da reta.

4) Equação segmentária.

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$



p e q são os "segmentos" que a reta determina nos eixos x e y.

5) Equações paramétricas.

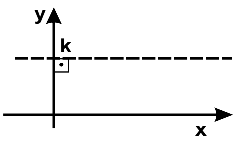
$$(s)\ \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

As variáveis x e y são dadas em função de um parâmetro **t**.

Dica - Isolar, substituir e "sumir" com o t. (SEMPRE)

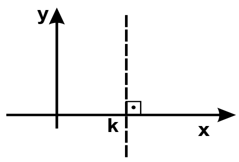
II - Retas particulares no plano cartesiano.

a) <u>Reta paralela ao eixo x</u>



y = constante
y = k
y - k = 0

b) <u>Reta perpendicular ao eixo x</u>



x = constante
x = k
x - k = 0

Exercícios

01) Dados os pontos A(0 , -4) e B(3 , 6), determine a equação geral da reta AB.

(GeoJeca)

A(0 , -4)
B(3 , 6)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - (-4)}{3 - 0} = \frac{10}{3}$$

$m_{AB} = \frac{10}{3}$
B(3 , 6)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 6 = \frac{10}{3}(x - 3)$ (eq. fundamental) (resp)

$3(y - 6) = 10(x - 3)$
$3y - 18 = 10x - 30$

$10x - 3y - 12 = 0$ (eq. geral) (resp)

02) Dada a equação geral da reta (r) 3x - 7y + 23 = 0, determine a equação reduzida e a equação segmentária de r.

(GeoJeca)

(r) $3x - 7y + 23 = 0$

$7y = 3x + 23$

$y = \frac{3x}{7} + \frac{23}{7}$ (eq. reduzida) (resp)

$3x - 7y + 23 = 0$

$3x - 7y = -23$

$\frac{3x}{-23} - \frac{7y}{-23} = \frac{-23}{-23}$

$\frac{x}{\frac{-23}{3}} + \frac{y}{\frac{23}{7}} = 1$ (eq. segmentária) (resp)

03) Dadas as equações paramétricas da reta (r) $\begin{cases} x = \dfrac{5t - 2}{3} \\ y = 4 + t \end{cases}$, determine: (GeoJeca)

a) a equação geral da reta r;

b) a equação reduzida da reta r;

c) o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta r;

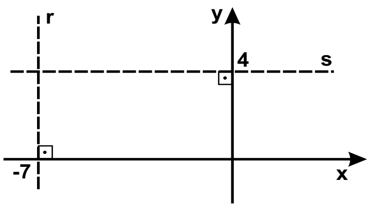
d) a equação segmentária da reta r;

e) a equação geral da reta s que passa pelo ponto P(3 , -8) e é paralela à reta r;

f) o ponto da reta r que tem ordenada 6.

04) Determine as equações das retas r e s desenhadas abaixo.

(GeoJeca)



05) Determine o ponto de intersecção entre as retas (r) $2x - 5y + 8 = 0$ e (s) $y + 4 = 0$. (GeoJeca)

06) Dadas as equações paramétricas da reta r, determine o coeficiente angular e o coeficiente linear de r. (GeoJeca)

$$(r) \begin{cases} x = \dfrac{t - 2}{3} \\ y = \dfrac{t}{4} \end{cases}$$

07) Determine a equação reduzida e o coeficiente linear da reta (r) $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{6} = 1$. (GeoJeca)

03) Dadas as equações paramétricas da reta (r) $\begin{cases} x = \dfrac{5t - 2}{3} \\ y = 4 + t \end{cases}$, determine: (GeoJeca)

a) a equação geral da reta r;

$y = 4 + t \longrightarrow t = y - 4$

$3x = 5t - 2$
$3x = 5(y - 4) - 2$
$3x = 5y - 20 - 2$

$3x - 5y + 22 = 0$ (eq. geral) (resp)

b) a equação reduzida da reta r;

$3x - 5y + 22 = 0$

$5y = 3x + 22$

$y = \frac{3x}{5} + \frac{22}{5}$ (eq. reduzida) (resp)

c) o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta r;

$m_r = \frac{3}{5}$ (coeficiente angular)

$q_r = \frac{22}{5}$ (coeficiente linear)

d) a equação segmentária da reta r;

$3x - 5y + 22 = 0$

$3x - 5y = -22$

$\frac{3x}{-22} - \frac{5y}{-22} = \frac{-22}{-22}$

$\frac{x}{\frac{-22}{3}} + \frac{y}{\frac{22}{5}} = 1$ (eq. segmentária) (resp)

e) a equação geral da reta s que passa pelo ponto P(3 , -8) e é paralela à reta r;

$s \parallel r \longrightarrow m_s = m_r = 3/5$

$\left.\begin{array}{l} m_{AB} = \frac{3}{5} \\ B(3\ ,\ -8) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (-8) = \frac{3}{5}(x - 3)$

$5(y + 8) = 3(x - 3)$
$5y + 40 = 3x - 9$

$3x - 5y - 49 = 0$ (eq. geral) (resp)

f) o ponto da reta r que tem ordenada 6.

(r) $3x - 5y + 22 = 0$

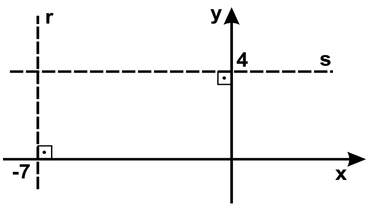
$3x - 5 \cdot 6 + 22 = 0$

$3x = 8 \longrightarrow x = 8/3$

P(8/3 , 6) (resp)

04) Determine as equações das retas r e s desenhadas abaixo.

(GeoJeca)



Reta r

x = constante
x = -7

$x + 7 = 0$
(resp)

Reta s

y = constante
y = 4

$y - 4 = 0$
(resp)

05) Determine o ponto de intersecção entre as retas (r) $2x - 5y + 8 = 0$ e (s) $y + 4 = 0$. (GeoJeca)

$\begin{cases} (r)\ 2x - 5y + 8 = 0 \\ (s)\ y + 4 = 0 \end{cases}$

$y + 4 = 0 \longrightarrow y = -4$

$2x - 5(-4) + 8 = 0$

$2x + 28 = 0 \longrightarrow x = -14$

Ponto de intersecção I(-14 , -4) (resp)

06) Dadas as equações paramétricas da reta r, determine o coeficiente angular e o coeficiente linear de r. (GeoJeca)

(r) $\begin{cases} x = \dfrac{t - 2}{3} \\ y = \dfrac{t}{4} \end{cases}$

$y = \frac{t}{4} \longrightarrow t = 4y$

$3x = t - 2$
$3x = (4y) - 2$
$4y = 3x + 2$

$y = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2}$ $\begin{cases} m_r = 3/4 \text{ (coeficiente angular)} \\ q_r = 1/2 \text{ (coeficiente linear)} \end{cases}$

07) Determine a equação reduzida e o coeficiente linear da reta (r) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{6} = 1$. (GeoJeca)

$\frac{x}{-2} + \frac{y}{6} = 1$

$\frac{y}{6} = \frac{x}{2} + 1$

$y = \frac{6x}{2} + 6$

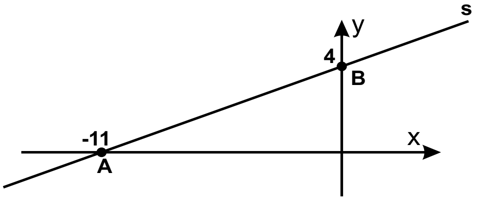
$y = 3x + 6$ (eq. reduzida) (resp)

$q_r = 6$ (coeficiente linear) (resp)

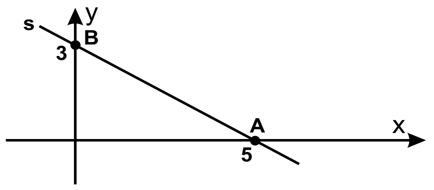
08) Dada a equação reduzida da reta (s) $y = -2x + 12$, determine o coeficiente angular, o coeficiente linear e a equação segmentária da reta s.
(GeoJeca)

09) Dada a equação geral da reta (s) $3x - 5y + 18 = 0$, determine a equação reduzida da reta t que é paralela à reta s e que passa pelo ponto $P(-2 , 5)$.
(GeoJeca)

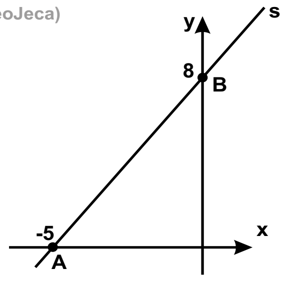
10) Determinar a equação segmentária e a equação geral da reta s desenhada abaixo.
(GeoJeca)



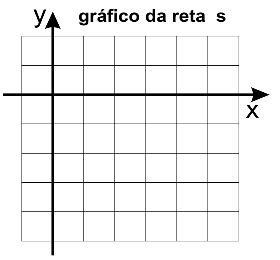
11) Determinar a equação segmentária e a equação reduzida da reta s desenhada abaixo.
(GeoJeca)



12) Determinar a equação geral e a equação reduzida da reta s desenhada abaixo.
(GeoJeca)



13) Dada a equação geral da reta (s) $3x - 5y - 15 = 0$, determinar a equação segmentária de s e desenhar a reta s no plano cartesiano.
(GeoJeca)



08) Dada a equação reduzida da reta (s) y = -2x + 12, determine o coeficiente angular, o coeficiente linear e a equação segmentária da reta s.

(GeoJeca)

(s) $y = -2x + 12$ $\begin{cases} m_s = -2 & \text{(coef. angular)} \\ q_s = 12 & \text{(coef. linear)} \end{cases}$

(s) $y = -2x + 12$
$2x + y - 12 = 0$
$2x + y = 12$

$$\frac{2x}{12} + \frac{y}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{12} = 1$$ (eq. segmentária) (resp)

09) Dada a equação geral da reta (s) 3x - 5y + 18 = 0, determine a equação reduzida da reta t que é paralela à reta s e que passa pelo ponto P(-2 , 5).

(GeoJeca)

(s) $3x - 5y + 18 = 0$

$5y = 3x + 18 \longrightarrow y = \frac{3x}{5} + \frac{18}{5}$ $\begin{cases} m_s = 3/5 \\ q_s = 18/5 \end{cases}$

$t \,//\, s \longrightarrow m_t = m_s = 3/5$

$\left.\begin{matrix} m_t = 3/5 \\ P(-2\ ,\ 5) \end{matrix}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

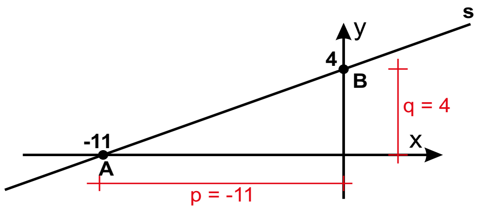
$y - 5 = \frac{3}{5}(x - (-2))$ (eq. fundamental) (resp)

$5(y - 5) = 3(x + 2)$
$5y - 25 = 3x + 6$
$5y = 3x + 31$

$y = \frac{3x}{5} + \frac{31}{5}$ (eq. reduzida) (resp)

10) Determinar a equação segmentária e a equação geral da reta s desenhada abaixo.

(GeoJeca)



$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

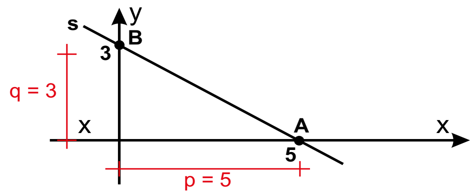
$$\frac{x}{-11} + \frac{y}{4} = 1$$ (eq. segmentária)

$$\frac{4x}{-44} + \frac{-11y}{-44} = \frac{-44}{-44}$$

(s) $4x - 11y + 44 = 0$ (eq. geral) (resp)

11) Determinar a equação segmentária e a equação reduzida da reta s desenhada abaixo.

(GeoJeca)



$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

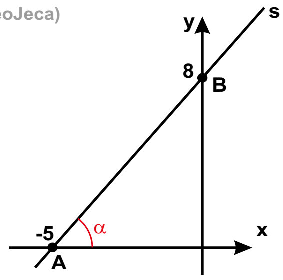
$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$ (eq. segmentária)

$y = mx + q$

$\left.\begin{matrix} m_s = -3/5 \\ q_s = 3 \end{matrix}\right\}$ $y = \frac{-3x}{5} + 3$ (eq. reduzida) (resp)

12) Determinar a equação geral e a equação reduzida da reta s desenhada abaixo.

(GeoJeca)



$m_s = \text{tg}\,\alpha = 8/5$

$q_s = 8$

$y = \frac{8x}{5} + 8$
(eq. reduzida)

$y = \frac{8x}{5} + 8$

$y - 8 = \frac{8x}{5}$

$5y - 40 = 8x$

$8x - 5y + 40 = 0$ (eq. geral) (resp)

13) Dada a equação geral da reta (s) 3x - 5y - 15 = 0, determinar a equação segmentária de s e desenhar a reta s no plano cartesiano.

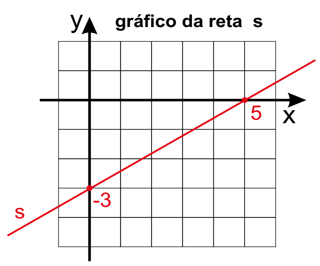
(GeoJeca)

$3x - 5y - 15 = 0$
$3x - 5y = 15$

$$\frac{3x}{15} - \frac{5y}{15} = \frac{15}{15}$$

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$$ (eq. segmentária) (resp)

$p = 5$
$q = -3$



GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 05.

14) Verificar se os pontos $A(1\ ,\ -4)$ e $B(\ 3\ ,\ -1)$ estão contidos na reta (s) $3x + 2y + 5 = 0$. (GeoJeca)

15) Determinar k sabendo que o ponto $P(-2\ ,\ 0)$ está contido na reta $4x - 3y + k = 0$. (GeoJeca)

16) Determinar as coordenadas do ponto onde a reta (s) $2x + 5y - 12 = 0$ intercepta a bissetriz dos quadrantes pares. (GeoJeca)

17) Dadas as retas (r) $x - 6 = 0$ e (s) $2x + 5y - 2 = 0$, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre r e s. (GeoJeca)

18) Dadas as retas (r) $x + y + 1 = 0$ e (s) $3x + y - 5 = 0$, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre r e s. (GeoJeca)

19) Dadas as retas (r) $2x - y + 4 = 0$ e (s) $y = x + 3$, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre r e s. (GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 05.

14) Verificar se os pontos A(1 , -4) e B(3 , -1) estão contidos na reta (s) $3x + 2y + 5 = 0$. (GeoJeca)

Ponto A(1 , -4)
$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 5 = 0$
$8 - 8 = 0$
$0 = 0$
Portanto, o ponto A pertence à reta.

Ponto B(3 , -1)
$3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 5 = 0$
$14 - 2 = 0$
$12 = 0$ (falso)
Portanto, o ponto B não pertence à reta.

15) Determinar k sabendo que o ponto P(-2 , 0) está contido na reta $4x - 3y + k = 0$. (GeoJeca)

Se P pertence à reta, então P(-2 , 0) é raiz da equação.

$4 \cdot (-2) - 3 \cdot 0 + k = 0$
$-8 + k = 0$
Portanto, k = 8 (resp)

16) Determinar as coordenadas do ponto onde a reta (s) $2x + 5y - 12 = 0$ intercepta a bissetriz dos quadrantes pares. (GeoJeca)

Se P pertence à bissetriz par, então P(-k , k).

$2 \cdot (-k) + 5 \cdot k - 12 = 0$
$3k - 12 = 0$
$3k = 12$
$k = 4$
Portanto, P(-4 , 4) (resp)

17) Dadas as retas (r) $x - 6 = 0$ e (s) $2x + 5y - 2 = 0$, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre r e s. (GeoJeca)

Obter o ponto de intersecção entre duas retas é determinar as coordenadas do ponto que satisfaz as duas equações , ou seja, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

$$\begin{cases} (r)\ x - 6 = 0 \\ (s)\ 2x + 5y - 2 = 0 \end{cases}$$

$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

$2 \cdot 6 + 5y - 2 = 0$
$10 + 5y = 0$
$5y = -10$
$y = -2$

Ponto de intersecção I(6 , -2) (resp)

18) Dadas as retas (r) $x + y + 1 = 0$ e (s) $3x + y - 5 = 0$, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre r e s. (GeoJeca)

Obter o ponto de intersecção entre duas retas é determinar as coordenadas do ponto que satisfaz as duas equações , ou seja, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

$$\begin{cases} (r)\ x + y + 1 = 0 \\ (s)\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} (r) & -x - y - 1 = 0 \\ (s) & 3x + y - 5 = 0 \\ \hline & 2x \quad - 6 = 0 \end{array}$$

$2x = 6$
$x = 3$

$x + y + 1 = 0$
$3 + y + 1 = 0$
$y = -4$

Ponto de intersecção I(3 , -4)

19) Dadas as retas (r) $2x - y + 4 = 0$ e (s) $y = x + 3$, determinar as coordenadas do ponto de intersecção entre r e s. (GeoJeca)

Obter o ponto de intersecção entre duas retas é determinar as coordenadas do ponto que satisfaz as duas equações , ou seja, basta resolver o sistema formado pelas equações das duas retas.

$$\begin{cases} (r)\ 2x - y + 4 = 0 \\ (s)\ y = x + 3 \end{cases}$$

$2x - (x + 3) + 4 = 0$
$2x - x - 3 + 4 = 0$
$x + 1 = 0$
$x = -1$

$y = x + 3$
$y = -1 + 3$
$y = 2$

Ponto de intersecção I(-1 , 2) (resp)

20) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar a equação segmentária de s. (GeoJeca)

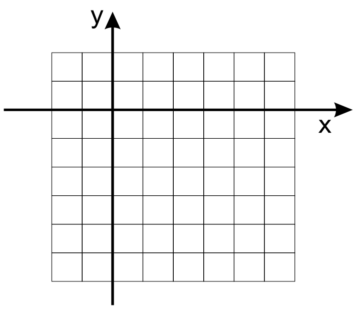
$$(s)\begin{cases} x = \dfrac{t+3}{2} \\ y = t - 1 \end{cases}$$

21) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar o coeficiente linear de s. (GeoJeca)

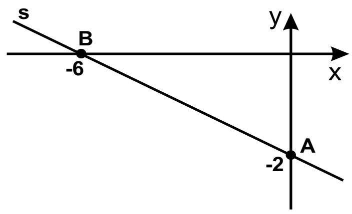
$$(s)\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t + 2 \end{cases}$$

22) Dada abaixo a equação segmentária da reta s, desenhar o gráfico de s. (GeoJeca)

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$$



23) Determinar a equação segmentária e a equação reduzida da reta s desenhada abaixo. (GeoJeca)



24) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar a equação geral de s. (GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

25) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar a equação reduzida de s. (GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = \dfrac{3t-4}{2} \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

20) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar a equação segmentária de s. (GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = \dfrac{t+3}{2} \\ y = t - 1 \end{cases}$$

$y = t - 1 \Longrightarrow t = y + 1$

$2x = t + 3$
$2x = (y + 1) + 3$
$2x = y + 4$

$2x - y = 4$

$\dfrac{2x}{4} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{4}{4}$

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-4} = 1$ (eq. segmentária) (resp)

21) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar o coeficiente linear de s. (GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = 3 - t \\ y = t + 2 \end{cases}$$

$x = 3 - t \Longrightarrow t = 3 - x$

$y = t + 2$
$y = (3 - x) + 2$

$y = -x + 5$ (eq. reduzida)

$$\begin{cases} m_s = -1 \\ q_s = 5 \end{cases}$$

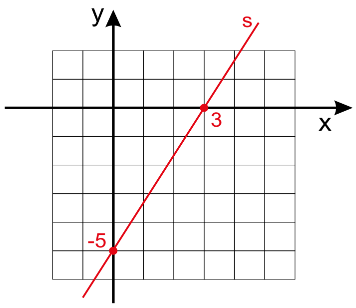
Portanto, $q_s = 5$ (resp)

22) Dada abaixo a equação segmentária da reta s, desenhar o gráfico de s. (GeoJeca)

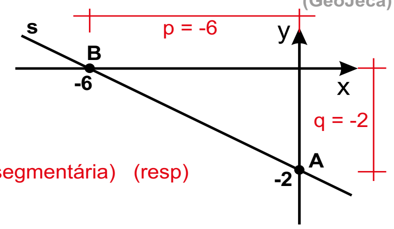
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$$

Da equação segmentária, tem-se

$p = 3$
$q = -5$



23) Determinar a equação segmentária e a equação reduzida da reta s desenhada abaixo. (GeoJeca)



$\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$

$\dfrac{x}{-6} + \dfrac{y}{-2} = 1$ (eq. segmentária) (resp)

$\dfrac{y}{-2} = \dfrac{x}{6} + 1$

$y = \dfrac{-2x}{6} - 2$

$y = \dfrac{-x}{3} - 2$ (eq. reduzida) (resp)

24) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar a equação geral de s. (GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

$x = 7 - t \Longrightarrow t = 7 - x$

$y = 2(7 - x) + 1$
$y = 14 - 2x + 1$

(s) $2x + y - 15 = 0$ (eq. geral) (resp)

25) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determinar a equação reduzida de s. (GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = \dfrac{3t-4}{2} \\ y = 2 - 3t \end{cases}$$

$y = 2 - 3t \Longrightarrow 3t = 2 - y$

$2x = 3t - 4$
$2x = (2 - y) - 4$
$2x = 2 - y - 4$
$2x = -y - 2$

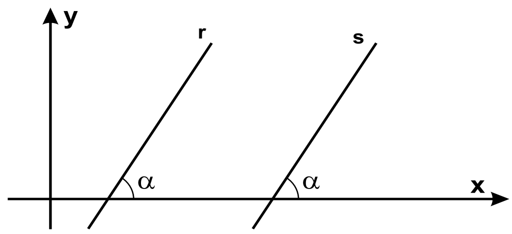
$y = -2x - 2$ (eq. reduzida) (resp)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 06
Retas paralelas e retas perpendiculares.

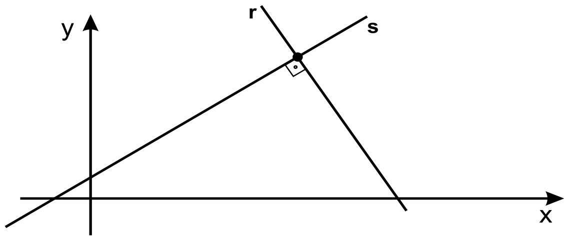
I - Retas paralelas entre si.



Se as retas r e s são paralelas entre si, então

$m_r = m_s$

II - Retas perpendiculares entre si.

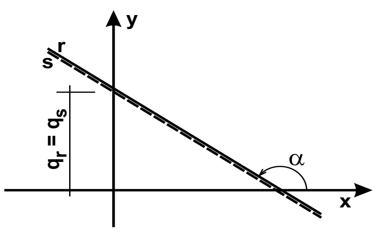


Se as retas r e s são perpendiculares entre si, então

$m_r = \frac{-1}{m_s}$ (ou $m_r \cdot m_s = -1$)

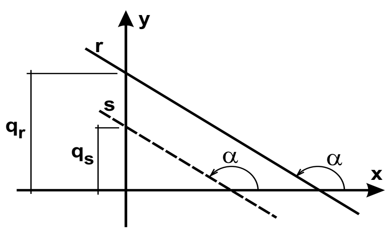
III - Posições relativas entre duas retas.

a) **Retas paralelas coincidentes.**



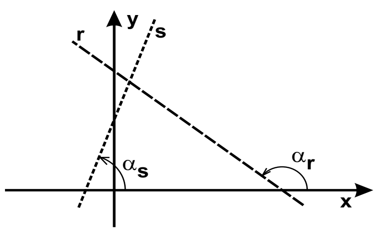
$m_r = m_s$ e $q_r = q_s$

b) **Retas paralelas distintas.**



$m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$

b) **Retas concorrentes.**



$m_r \neq m_s$

Exercícios

01) Determine a equação geral da reta (s) que passa pelo ponto P(0 , -3) e é perpendicular à reta (r) de equação $y = 4x - 8$.
(GeoJeca)

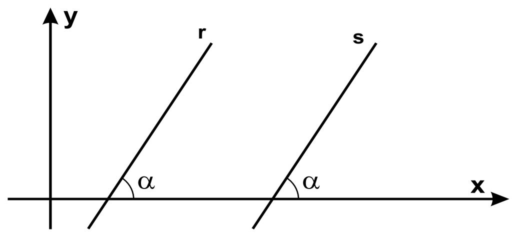
02) Determine a equação segmentária da reta (s) que passa no ponto Q(7 , 2) e é paralela à reta (r) cuja equação geral é $5x - 4y + 11 = 0$.
(GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 06
Retas paralelas e retas perpendiculares.

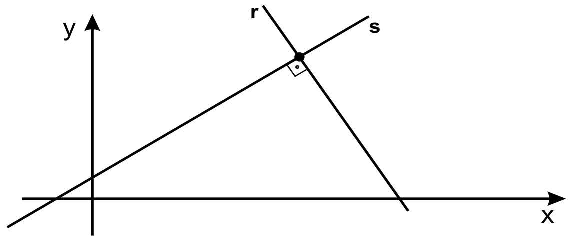
I - Retas paralelas entre si.



Se as retas r e s são paralelas entre si, então

$$m_r = m_s$$

II - Retas perpendiculares entre si.

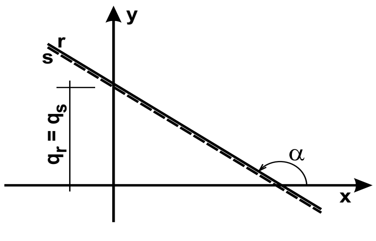


Se as retas r e s são perpendiculares entre si, então

$$m_r = \frac{-1}{m_s} \qquad (\text{ou} \quad m_r \cdot m_s = -1)$$

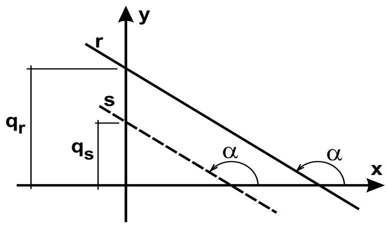
III - Posições relativas entre duas retas.

a) **Retas paralelas coincidentes.**



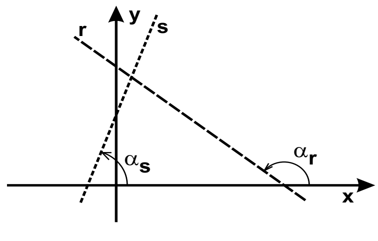
$m_r = m_s$ e $q_r = q_s$

b) **Retas paralelas distintas.**



$m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$

b) **Retas concorrentes.**



$m_r \neq m_s$

Exercícios

01) Determine a equação geral da reta (s) que passa pelo ponto P(0 , -3) e é perpendicular à reta (r) de equação y = 4x - 8. (GeoJeca)

$y = 4x - 8 \quad \begin{cases} m_r = 4 \\ q_r = -8 \end{cases}$

$s \perp r \longrightarrow m_s = \frac{-1}{m_r} \longrightarrow m_s = -1/4$

$\left.\begin{array}{l} m_s = -1/4 \\ P(0\ ,\ -3) \end{array}\right\} \quad y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (-3) = \frac{-1}{4}(x - 0)$

$4(y + 3) = -1(x - 0)$

$4y + 12 = -x$

(s) $x + 4y + 12 = 0$ (eq. geral) (resp)

02) Determine a equação segmentária da reta (s) que passa no ponto Q(7 , 2) e é paralela à reta (r) cuja equação geral é 5x - 4y + 11 = 0. (GeoJeca)

(r) $5x - 4y + 11 = 0$

$4y = 5x + 11$

$y = \frac{5x}{4} + \frac{11}{4} \quad \begin{cases} m_r = 5/4 \\ q_r = 11/4 \end{cases}$

$s \,//\, r \longrightarrow m_s = m_r = 5/4$

$\left.\begin{array}{l} m_s = 5/4 \\ Q(7\ ,\ 2) \end{array}\right\} \quad y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2 = \frac{5}{4}(x - 7)$

$4(y - 2) = 5(x - 7)$

$4y - 8 = 5x - 35$

$5x - 4y = 27$

$\frac{5x}{27} - \frac{4y}{27} = \frac{27}{27}$

$\frac{x}{\frac{27}{5}} + \frac{y}{\frac{-27}{4}} = 1$

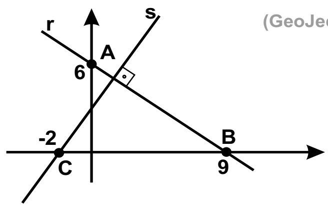
(eq. segmentária) (resp)

03) Dados os pontos A(-1 , 4), B(7 , 3) e C(0 , 5), determine a equação reduzida da reta t que passa pelo ponto C e é paralela à reta AB.
(GeoJeca)

04) Determine a equação geral da reta suporte da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC cujos vértices são A(6 , 2), B(3 , 8) e C(-4 , -1).
(GeoJeca)

05) Determine a equação geral da reta que passa pelo ponto P(2 , 7) e é perpendicular à reta (s) $y = 3x - 1$.
(GeoJeca)

06) Determine a equação geral da reta s desenhada abaixo.
(GeoJeca)



07) Dada a equação da reta (r) $y = -5x + 9$, determine:
a) a equação geral da reta s que é paralela a r e passa pelo ponto P(7 , -2);
b) a equação geral da reta t que é perpendicular a r e passa pelo ponto Q(12 , 4).
(GeoJeca)

08) Dado o ponto P(5 , -1), determine:
a) a equação geral da reta r que passa por P e é paralela à reta (s) $y - 2 = 0$;
b) a equação geral da reta t que passa por P e é perpendicular à reta (s) $y - 2 = 0$.
(GeoJeca)

03) Dados os pontos A(-1 , 4), B(7 , 3) e C(0 , 5), determine a equação reduzida da reta t que passa pelo ponto C e é paralela à reta AB.

(GeoJeca)

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 4}{7 - (-1)} = \frac{-1}{8}$

s // r $\longrightarrow$ $m_s = m_r$ $\longrightarrow$ $m_t = m_{AB} = -1/8$

$m_t = -1/8$, C(0 , 5)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 5 = \frac{-1}{8}(x - 0)$

$y - 5 = \frac{-x}{8}$

(t) $y = \frac{-x}{8} + 5$ (eq. reduzida) (resp)

04) Determine a equação geral da reta suporte da altura relativa ao vértice A do triângulo ABC cujos vértices são A(6 , 2), B(3 , 8) e C(-4 , -1).

(GeoJeca)

A reta suporte da altura relativa ao vértice A é a reta perpendicular ao lado BC e que passa pelo ponto A.

$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1 - 8}{-4 - 3} = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}$

s $\perp$ r $\longrightarrow$ $m_s = \frac{-1}{m_r}$ $\longrightarrow$ $m_h = -1/m_{BC} = -7/9$

$m_h = -7/9$, A(6 , 2)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2 = \frac{-7}{9}(x - 6)$

$9(y - 2) = -7(x - 6)$
$9y - 18 = -7x + 42$

(h) $7x + 9y - 60 = 0$ (eq. geral) (resp)

05) Determine a equação geral da reta que passa pelo ponto P(2 , 7) e é perpendicular à reta (s) y = 3x - 1.

(GeoJeca)

$y = 3x - 1$ $\begin{cases} m_s = 3 \\ q_s = -1 \end{cases}$

s $\perp$ r $\longrightarrow$ $m_s = \frac{-1}{m_r}$ $\longrightarrow$ $m_r = -1/3$

$m_r = -1/3$, P(2 , 7)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

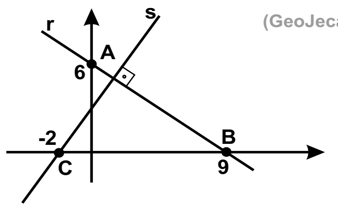
$y - 7 = \frac{-1}{3}(x - 2)$

$3(y - 7) = -1(x - 2)$
$3y - 21 = -x + 2$

(r) $x + 3y - 23 = 0$ (eq. geral) (resp)

06) Determine a equação geral da reta s desenhada abaixo.

(GeoJeca)



A(0 , 6)
B(9 , 0)
C(-2 , 0)

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$m_{AB} = \frac{0 - 6}{9 - 0} = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$

s $\perp$ r $\longrightarrow$ $m_s = \frac{-1}{m_r}$ $\longrightarrow$ $m_s = 3/2$

$m_s = 3/2$, C(-2 , 0)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0 = \frac{3}{2}(x - (-2))$

$2y = 3x + 6$

(s) $3x - 2y + 6 = 0$ (eq. geral) (resp)

07) Dada a equação da reta (r) y = -5x + 9, determine:
a) a equação geral da reta s que é paralela a r e passa pelo ponto P(7 , -2);
b) a equação geral da reta t que é perpendicular a r e passa pelo ponto Q(12 , 4).

(GeoJeca)

$y = -5x + 9$ $\longrightarrow$ $m_r = -5$

a) a reta s é paralela à reta r.

$m_s = -5$, P(7 , -2)

$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - (-2) = -5(x - 7)$
$y + 2 = -5x + 35$

(s) $5x + y - 33 = 0$ (eq. geral) (resp)

a) a reta t é perpendicular à reta r.

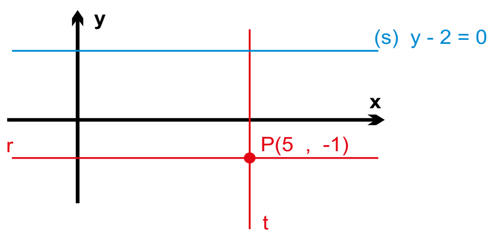
$m_t = 1/5$, Q(12 , 4)

$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 4 = (1/5)(x - 12)$
$5(y - 4) = 1(x - 12)$
$5y - 20 = x - 12$

(t) $x - 5y + 8 = 0$ (eq. geral) (resp)

08) Dado o ponto P(5 , -1), determine:
a) a equação geral da reta r que passa por P e é paralela à reta (s) y - 2 = 0;
b) a equação geral da reta t que passa por P e é perpendicular à reta (s) y - 2 = 0.

(GeoJeca)



Reta r

y = constante
y = -1

y + 1 = 0 (resp)

Reta t

x = constante
y = 5

x - 5 = 0 (resp)

09) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determine a equação reduzida da reta t que passa pelo ponto P(-3 , 4) e é perpendicular à reta s.

(GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2t \end{cases}$$

10) Determine a equação geral da reta w que passa pelo ponto P(0 , -3) e é paralela à reta $x + 4y - 2 = 0$.

(GeoJeca)

11) Determine a posição da reta (r) $y = 3x - 8$ em relação à reta (s) $y = 3x + 12$.

(GeoJeca)

12) Determine a posição da reta (r) $y = 6x - 9$ em relação à reta s, dada abaixo pelas suas equações paramétricas.

(GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = \dfrac{5 + t}{3} \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

13) Determine a posição da reta (r) $5x - 3y + 1 = 0$ em relação à reta s, dada abaixo por sua equação segmentária.

(GeoJeca)

$$(s)\ \frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$$

14) Determine k sabendo que as retas (r) $y = kx + 3$ e (s) $7x - 4y + 11 = 0$ são paralelas entre si.

(GeoJeca)

09) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determine a equação reduzida da reta t que passa pelo ponto P(-3 , 4) e é perpendicular à reta s.

(GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2t \end{cases}$$

$x = 4 + t \longrightarrow t = x - 4$

$y = 2t$
$y = 2(x - 4)$

(s) $y = 2x - 8 \longrightarrow m_s = 2$

$s \perp r \longrightarrow m_s = \frac{-1}{m_r} \longrightarrow m_t = -1/2$

$\left.\begin{matrix} m_t = -1/2 \\ P(-3\ ,\ 4) \end{matrix}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 4 = \frac{-1}{2}(x - (-3))$

$2(y - 4) = -1(x + 3)$
$2y - 8 = -x - 3$
$2y = -x + 5$

(t) $y = \frac{-x}{2} + \frac{5}{2}$ (eq. reduzida) (resp)

10) Determine a equação geral da reta w que passa pelo ponto P(0 , -3) e é paralela à reta x + 4y - 2 = 0.

(GeoJeca)

(r) $x + 4y - 2 = 0$
$4y = -x + 2$

$y = \frac{-x}{4} + \frac{1}{2}$ $\begin{cases} m_r = -1/4 \\ q_r = 1/2 \end{cases}$

$s \,//\, r \longrightarrow m_s = m_r \longrightarrow m_r = m_w = -1/4$

$\left.\begin{matrix} m_w = -1/4 \\ P(0\ ,\ -3) \end{matrix}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - (-3) = \frac{-1}{4}(x - 0)$

$4(y + 3) = -1(x - 0)$
$4y + 12 = -x$

$x + 4y + 12 = 0$ (eq. geral) (resp)

11) Determine a posição da reta (r) y = 3x - 8 em relação à reta (s) y = 3x + 12.

(GeoJeca)

(r) $y = 3x - 8$ $\begin{cases} m_r = 3 \\ q_r = -8 \end{cases}$

(s) $y = 3x + 12$ $\begin{cases} m_s = 3 \\ q_s = 12 \end{cases}$

$m_r = m_s$

$q_r \neq q_s$

As retas r e s são paralelas distintas (resp)

12) Determine a posição da reta (r) y = 6x - 9 em relação à reta s, dada abaixo pelas suas equações paramétricas.

(GeoJeca)

$$(s)\begin{cases} x = \dfrac{5 + t}{3} \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

$3x = 5 + t \longrightarrow t = 3x - 5$

$y = 2t + 1$
$y = 2(3x - 5) + 1$
$y = 6x - 9$

(r) $y = 6x - 9$ $\begin{cases} m_r = 6 \\ q_r = -9 \end{cases}$

(s) $y = 6x - 9$ $\begin{cases} m_s = 6 \\ q_s = -9 \end{cases}$

$m_r = m_s$
$q_r = q_s$

As retas r e s são paralelas coincidentes (resp)

13) Determine a posição da reta (r) 5x - 3y + 1 = 0 em relação à reta s, dada abaixo por sua equação segmentária.

(GeoJeca)

$$(s)\ \frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$$

(s) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} = 1$

$\frac{y}{5} = \frac{x}{4} + 1$

$y = \frac{5x}{4} + 5$ $\begin{cases} m_s = 5/4 \\ q_s = 5 \end{cases}$

(r) $5x - 3y + 1 = 0$
$3y = 5x + 1$

$y = \frac{5x}{3} + \frac{1}{3}$ $\begin{cases} m_r = 5/3 \\ q_r = 1/3 \end{cases}$

$m_r \neq m_s$

As retas r e s são concorrentes (resp)

14) Determine k sabendo que as retas (r) y = kx + 3 e (s) 7x - 4y + 11 = 0 são paralelas entre si.

(GeoJeca)

(r) $y = kx + 3$ $\begin{cases} m_r = k \\ q_r = 3 \end{cases}$

(s) $7x - 4y + 11 = 0$
$4y = 7x + 11$

$y = \frac{7x}{4} + \frac{11}{4}$ $\begin{cases} m_s = 7/4 \\ q_s = 11/4 \end{cases}$

$s \,//\, r \longrightarrow m_s = m_r$

Portanto, tem-se k = 7/4 (resp)

GeoJeca

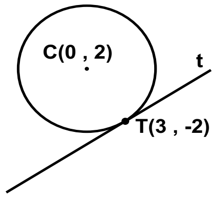
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 06.

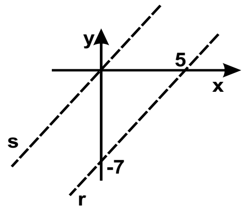
15) Um quadrado ABCD tem vértices consecutivos A(4 , -5), B(3 , -1) e C(7 , 0). Determine a equação geral da reta AD.
(GeoJeca)

16) Os pontos A(5 , -2) e C(13 , 6) são os vértices opostos do quadrado ABCD. Determine a equação geral da reta BD.
(GeoJeca)

17) Na figura abaixo, determine a equação geral da reta t, tangente à circunferência no ponto T(3 , -2).
(GeoJeca)



18) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas entre si. Determine a equação geral da reta s.
(GeoJeca)



19) Determine k sabendo que as retas (r) 2x + 7y = 0 e (s) 7x + ky - 15 = 0 são perpendiculares entre si.
(GeoJeca)

20) Determine k sabendo que as retas (r) 2x + 7y = 0 e (s) 7x + ky - 15 = 0 são paralelas entre si.
(GeoJeca)

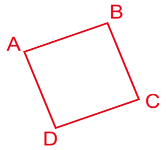
GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 06.

15) Um quadrado ABCD tem vértices consecutivos A(4 , -5), B(3 , -1) e C(7 , 0). Determine a equação geral da reta AD.

(GeoJeca)



A reta AD passa por A e é paralela à reta BC.

$m_{BC} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{0 - (-1)}{7 - 3} = \dfrac{1}{4}$

AD // BC $\Longrightarrow$ $m_{AD} = m_{BC} = \dfrac{1}{4}$

$\left.\begin{array}{l} m_{AD} = 1/4 \\ A(4\ ,\ -5) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

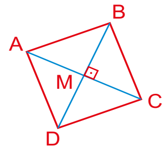
$y - (-5) = \dfrac{1}{4}(x - 4)$

$4(y + 5) = 1(x - 4)$
$4y + 20 = x - 4$

$x - 4y - 24 = 0$ (eq. geral) (resp)

16) Os pontos A(5 , -2) e C(13 , 6) são os vértices opostos do quadrado ABCD. Determine a equação geral da reta BD.

(GeoJeca)



A reta BD passa pelo ponto médio de AC e é perpendicular à reta AC.

$m_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{6 - (-2)}{13 - 5} = \dfrac{8}{8} = 1$

A(5 , -2)
C(13 , 6)
$M_{AC}(9\ ,\ 2)$

s ⊥ r $\Longrightarrow$ $m_s = \dfrac{-1}{m_r}$ $\Longrightarrow$ $m_{BD} = -1$

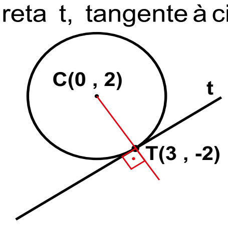
$\left.\begin{array}{l} m_{BD} = -1 \\ M_{AC}(9\ ,\ 2) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2 = -1(x - 9)$
$y - 2 = -x + 9$

$x + y - 11 = 0$ (eq. geral) (resp)

17) Na figura abaixo, determine a equação geral da reta t, tangente à circunferência no ponto T(3 , -2).

(GeoJeca)



$m_{CT} = \dfrac{y_T - y_C}{x_T - x_C} = \dfrac{-2 - 2}{3 - 0} = \dfrac{-4}{3}$

s ⊥ r $\Longrightarrow$ $m_s = \dfrac{-1}{m_r}$

Portanto $m_t = 3/4$

$\left.\begin{array}{l} m_t = 3/4 \\ T(3\ ,\ -2) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

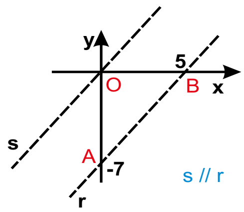
$y - (-2) = \dfrac{3}{4}(x - 3)$

$4(y + 2) = 3(x - 3)$
$4y + 8 = 3x - 9$

(t) $3x - 4y - 17 = 0$ (eq. geral) (resp)

18) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas entre si. Determine a equação geral da reta s.

(GeoJeca)



A(0 , -7)
B(5 , 0)

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0 - (-7)}{5 - 0} = \dfrac{7}{5}$

s // r $\Longrightarrow$ $m_s = m_r$

$\left.\begin{array}{l} m_s = 7/5 \\ O(0\ ,\ 0) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0 = \dfrac{7}{5}(x - 0)$

$5y = 7x$

(s) $7x - 5y = 0$ (eq. geral) (resp)

19) Determine k sabendo que as retas (r) $2x + 7y = 0$ e (s) $7x + ky - 15 = 0$ são perpendiculares entre si.

(GeoJeca)

(r) $2x + 7y = 0$
$7y = -2x$
$y = \dfrac{-2x}{7}$ $\left\{\begin{array}{l} m_r = -2/7 \\ q_r = 0 \end{array}\right.$

(s) $7x + ky - 15 = 0$
$ky = -7x + 15$
$y = \dfrac{-7x}{k} + \dfrac{15}{k}$ $\left\{\begin{array}{l} m_s = -7/k \\ q_s = 15/k \end{array}\right.$

s ⊥ r $\Longrightarrow$ $m_s = \dfrac{-1}{m_r}$ $\Longrightarrow$ $m_r \cdot m_s = -1$

$\dfrac{-2}{7} \cdot \dfrac{(-7)}{k} = -1$

$-7k = 14$

Portanto, $k = -2$ (resp)

20) Determine k sabendo que as retas (r) $2x + 7y = 0$ e (s) $7x + ky - 15 = 0$ são paralelas entre si.

(GeoJeca)

(r) $2x + 7y = 0$
$7y = -2x$
$y = \dfrac{-2x}{7}$ $\left\{\begin{array}{l} m_r = -2/7 \\ q_r = 0 \end{array}\right.$

(s) $7x + ky - 15 = 0$
$ky = -7x + 15$
$y = \dfrac{-7x}{k} + \dfrac{15}{k}$ $\left\{\begin{array}{l} m_s = -7/k \\ q_s = 15/k \end{array}\right.$

s // r $\Longrightarrow$ $m_s = m_r$

$\dfrac{-2}{7} = \dfrac{-7}{k}$

Portanto, $k = 49/2$ (resp)

Respostas das aulas 04, 05 e 06.

Respostas da Aula 04

01) a) $\sqrt{3}/3$ b) $-\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{3}/3$ d) 1 e) -1
f) $-\sqrt{3}/3$ g) 0 h) $\nexists$ m i) -3/8 j) 0
k) 7/13 l) -7/3

02) a) Estão alinhados b) Não estão alinhados
c) Estão alinhados

03) a) k = -4 b) k = 8 c) k = -3

04) $y - 7 = \frac{4}{7}(x - 2)$

05) $y - 6 = \frac{-7}{4}(x - 0)$

06) $y - 7 = 3(x + 2)$

07) $y + 5 = -1(x - 0)$

08) $y + 8 = \frac{9}{2}(x - 3)$ ou $y - 1 = \frac{9}{2}(x - 5)$ e $9x - 2y - 43 = 0$

09) k = 14

10) $m_r = -8/5$ $m_s = 1/3$

11) $90° < \alpha < 120°$ (resposta c))

12) A(4, 12) e B(-6, -3) (existem infinitos pontos)

13) A(0, 2) B(-6, 0)

14) $4x + 7y - 29 = 0$
15) $7x + 3y - 18 = 0$
16) $3x - 5y - 1 = 0$

Respostas da Aula 05

01) $10x - 3y - 12 = 0$

02) $y = \frac{3x}{7} + \frac{23}{7}$ $\frac{x}{\frac{-23}{3}} + \frac{y}{\frac{23}{7}} = 1$

03) a) $3x - 5y + 22 = 0$ b) $y = \frac{3x}{5} + \frac{22}{5}$

c) m = 3/5 q = 22/5 d) $\frac{x}{\frac{-22}{3}} + \frac{y}{\frac{22}{5}} = 1$

e) $3x - 5y - 49 = 0$ f) P(8/3, 6)

04) (r) $x + 7 = 0$ (s) $y - 4 = 0$

05) I(-14, -4)

06) m = 3/4 q = 1/2

07) $y = 3x + 6$ q = 6

08) $m_s = -2$ $q_s = 12$ (s) $\frac{x}{6} + \frac{y}{12} = 1$

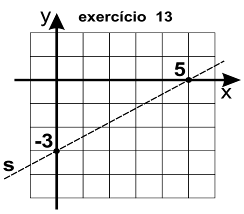
09) $y = \frac{3x}{5} + \frac{31}{5}$

10) $\frac{x}{-11} + \frac{y}{4} = 1$ $4x - 11y + 44 = 0$

11) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$ $y = \frac{-3x}{5} + 3$

12) $8x - 5y + 40 = 0$ $y = \frac{8x}{5} + 8$

13) $\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$



14) A está contido
B não está contido

15) k = 8

16) P(-4, 4)

17) I(6, -2)

18) I(3, -4)

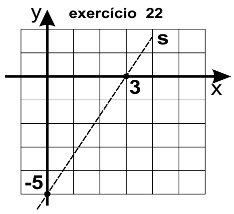
Respostas da Aula 05

19) I(-1, 2)

20) $\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$

21) $q_s = 5$

22) (gráfico ao lado)



23) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{-2} = 1$ $y = \frac{-x}{3} - 2$

24) $2x + y - 15 = 0$

25) $y = -2x - 2$

Respostas da Aula 06

01) $x + 4y + 12 = 0$

02) $\frac{x}{\frac{27}{5}} + \frac{y}{\frac{-27}{4}} = 1$

03) $y = \frac{-x}{8} + 5$

04) $7x + 9y - 60 = 0$

05) $x + 3y - 23 = 0$

06) $3x - 2y + 6 = 0$

07) a) $5x + y - 33 = 0$ b) $x - 5y + 8 = 0$

08) a) $y + 1 = 0$ b) $x - 5 = 0$

09) $y = \frac{-x}{2} + \frac{5}{2}$

10) $x + 4y + 12 = 0$

11) Retas paralelas distintas

12) Retas paralelas coincidentes

13) Retas concorrentes

14) k = 7/4

15) $x - 4y - 24 = 0$

16) $x + y - 11 = 0$

17) $3x - 4y - 17 = 0$

18) $7x - 5y = 0$

19) k = -2

20) k = 49/2

Favor comunicar eventuais erros deste trabalho através do e-mail
jecajeca@uol.com.br Obrigado.

GeoJeca

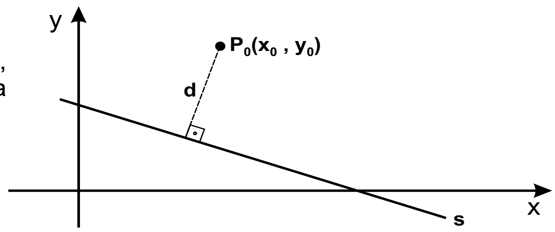
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 07
Distância entre ponto e reta.
Ângulo entre duas retas.

I - Distância entre ponto e reta.

Dada a ***equação geral*** da reta (s) $ax + by + c = 0$, a distância entre s e um ponto $P_0(x_0, y_0)$ é dada por

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



II - Ângulos entre retas.

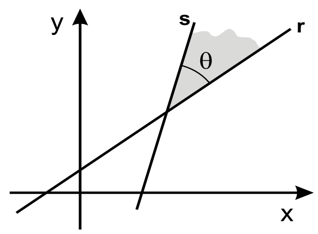
Dadas as retas r e s, a tangente do ângulo *agudo* θ formado entre elas é dada por:

a) As duas retas têm coeficiente angular.

$$tg\ \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$

b) Uma das retas não tem coeficiente angular.

$$tg\ \theta = \left| \frac{1}{m} \right|$$



Exercícios

01) Determine a distância entre a reta $3x + 2y - 9 = 0$ e o ponto $P(2, -5)$. (GeoJeca)

02) Determine a distância entre a reta $y = 6x - 1$ e o ponto $P(4, 7)$. (GeoJeca)

03) Determine a tangente do ângulo agudo formado entre as retas (r) $x + y + 5 = 0$ e (s) $y = \sqrt{3}x + 4$. (GeoJeca)

04) Determine a tangente do ângulo agudo formado entre as retas (r) $3x - 7y + 1 = 0$ e (s) $y = 2x + 4$. (GeoJeca)

GeoJeca

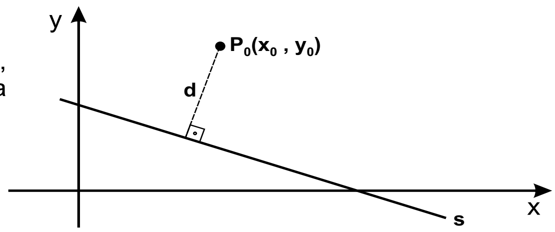
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 07
Distância entre ponto e reta. Ângulo entre duas retas.

I - Distância entre ponto e reta.

Dada a ***equação geral*** da reta (s) $ax + by + c = 0$, a distância entre s e um ponto $P_0(x_0, y_0)$ é dada por

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



II - Ângulos entre retas.

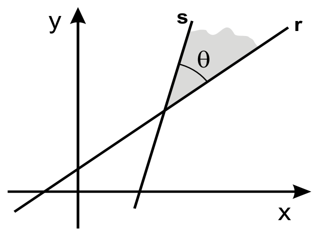
Dadas as retas r e s, a tangente do ângulo *agudo* θ formado entre elas é dada por:

a) As duas retas têm coeficiente angular.

$$\text{tg } \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$

b) Uma das retas não tem coeficiente angular.

$$\text{tg } \theta = \left| \frac{1}{m} \right|$$



Exercícios

01) Determine a distância entre a reta $3x + 2y - 9 = 0$ e o ponto $P(2, -5)$. (GeoJeca)

(r) $3x + 2y - 9 = 0$
$P(2, -5)$
$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) - 9|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|6 - 10 - 9|}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{13\sqrt{13}}{13}$$

$d = \sqrt{13}$ (resp)

02) Determine a distância entre a reta $y = 6x - 1$ e o ponto $P(4, 7)$. (GeoJeca)

(r) $y = 6x - 1$
(r) $6x - y - 1 = 0$
$P(4, 7)$
$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$d = \frac{|6 \cdot 4 - 1 \cdot 7 - 1|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}} = \frac{|24 - 7 - 1|}{\sqrt{37}} = \frac{16}{\sqrt{37}}$$

$d = \frac{16\sqrt{37}}{\sqrt{37}}$ (resp)

03) Determine a tangente do ângulo agudo formado entre as retas (r) $x + y + 5 = 0$ e (s) $y = \sqrt{3}x + 4$. (GeoJeca)

(r) $x + y + 5 = 0$
$y = -x - 5$
$m_r = -1$
$q_r = -5$

(s) $y = \sqrt{3}x + 4$
$m_s = \sqrt{3}$
$q_s = 4$

$m_r = -1$
$m_s = \sqrt{3}$
$\text{tg } \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$

$$\text{tg } \theta = \left| \frac{-1 - \sqrt{3}}{1 + (-1) \cdot \sqrt{3}} \right| = 2 + \sqrt{3} \quad \text{(resp)}$$

04) Determine a tangente do ângulo agudo formado entre as retas (r) $3x - 7y + 1 = 0$ e (s) $y = 2x + 4$. (GeoJeca)

(r) $3x - 7y + 1 = 0$
$7y = 3x + 1$
$y = (3x/7) + 1/7$
$m_r = 3/7$
$q_r = 1/7$

(s) $y = 2x + 4$
$m_s = 2$
$q_s = 4$

$m_r = 3/7$
$m_s = 2$
$\text{tg } \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$

$$\text{tg } \theta = \left| \frac{(3/7) - 2}{1 + (3/7) \cdot 2} \right| = 11/13 \quad \text{(resp)}$$

05) Determine a medida do ângulo agudo formado entre as retas (r) $y = \sqrt{3}x + 18$ e (s) $x + 7 = 0$. (GeoJeca)

06) Determine a tangente do ângulo agudo formado entre as retas (r) $3x - 2y = 0$ e (s) $y = -5x + 21$. (GeoJeca)

07) Dada abaixo a equação segmentária da reta s, determine a distância entre s e o ponto P(-3 , 8). (GeoJeca)

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 1$$

08) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determine a distância entre s e o ponto P(1 , -7). (GeoJeca)

$$(s)\ \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

09) Determine a distância entre as retas r e s dadas abaixo. (GeoJeca)

(r) $3x - 2y + 8 = 0$
(s) $3x - 2y - 8 = 0$

10) Determine a distância entre a origem do sistema cartesiano e a reta (s) $6x - y + 9 = 0$. (GeoJeca)

05) Determine a medida do ângulo agudo formado entre as retas (r) $y = \sqrt{3}x + 18$ e (s) $x + 7 = 0$.

(GeoJeca)

(r) $y = \sqrt{3}x + 18$
$m_r = \sqrt{3}$
$q_r = 18$

(s) $x + 7 = 0$
$\nexists\, m_s$

$\left.\begin{matrix} m_r = \sqrt{3} \\ \nexists\, m_s \end{matrix}\right\}$ $\text{tg}\,\theta = \left|\dfrac{1}{m_r}\right|$

$\text{tg}\,\theta = \left|\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (resp)

06) Determine a tangente do ângulo agudo formado entre as retas (r) $3x - 2y = 0$ e (s) $y = -5x + 21$.

(GeoJeca)

(r) $3x - 2y = 0$
$2y = 3x$
$y = 3x/2$
$m_r = 3/2$
$q_r = 0$

(s) $y = -5x + 21$
$m_s = -5$
$q_s = 21$

$\left.\begin{matrix} m_r = 3/2 \\ m_s = -5 \end{matrix}\right\}$ $\text{tg}\,\theta = \left|\dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$

$\text{tg}\,\theta = \left|\dfrac{(3/2) - (-5)}{1 + (3/2) \cdot (-5)}\right| = 1$ (resp)

07) Dada abaixo a equação segmentária da reta s, determine a distância entre s e o ponto P(-3 , 8).

(GeoJeca)

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{7} = 1$$

$\dfrac{7x}{28} + \dfrac{4y}{28} = \dfrac{28}{28}$

$\left.\begin{matrix} (s)\ 7x + 4y - 28 = 0 \\ P(-3\ ,\ 8) \end{matrix}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{|7 \cdot (-3) + 4 \cdot 8 - 28|}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \dfrac{|-21 + 32 - 28|}{\sqrt{65}}$

$d = \dfrac{17\sqrt{65}}{65}$ (resp)

08) Dadas abaixo as equações paramétricas da reta s, determine a distância entre s e o ponto P(1 , -7).

(GeoJeca)

$(s) \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $2t = y - 1$

$x = 2t - 1 = (y - 1) - 1 = y - 2$

$\left.\begin{matrix} (s)\ x - y + 2 = 0 \\ P(1\ ,\ -7) \end{matrix}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot (-7) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{2}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$

$d = 5\sqrt{2}$ (resp)

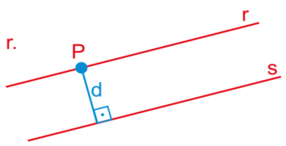
09) Determine a distância entre as retas r e s dadas abaixo.

(GeoJeca)

(r) $3x - 2y + 8 = 0$
(s) $3x - 2y - 8 = 0$

A distância entre as retas r e s é a distância entre um ponto da reta r e a reta s.

Determinar um ponto na reta r.



Se $x = 0$, tem-se
$3 \cdot 0 - 2y + 8 = 0$
$y = 4$

P(0 , 4) pertence a r

$\left.\begin{matrix} (s)\ 3x - 2y - 8 = 0 \\ P(0\ ,\ 4) \end{matrix}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{|3 \cdot 0 - 2 \cdot 4 - 8|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \dfrac{16}{\sqrt{13}}$ $d = \dfrac{16\sqrt{13}}{13}$ (resp)

10) Determine a distância entre a origem do sistema cartesiano e a reta (s) $6x - y + 9 = 0$.

(GeoJeca)

$\left.\begin{matrix} (s)\ 6x - y + 9 = 0 \\ O(0\ ,\ 0) \end{matrix}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{|6 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{37}}$

$d = \dfrac{9\sqrt{37}}{37}$ (resp)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 07.

11) O triângulo ABC é formado pela região compreendida entre as reta (r) $y = -x + 5$, (s) $\sqrt{3}x - 3y + 15 = 0$ e o eixo x. Determine a medida do maior ângulo interno desse triângulo.
(GeoJeca)

12) As retas r e s interceptam-se no ponto P(5 , 3). Determine a equação geral da reta t que é simétrica de (s) $x - 2y + 1 = 0$ em relação a (r) $y = x - 2$.
(GeoJeca)

13) O triângulo ABC tem vértice C(7 , -2) e área 12. Determine a distância entre os pontos A e B, sabendo que ambos pertencem à reta (r) $3x - 4y + 1 = 0$.
(GeoJeca)

14) (UFRN-RN) Um triângulo ABC possui vértices A(2 , 3), B(5 , 3) e C(2 , 6). A equação da reta bissetriz do ângulo A é:
(GeoJeca)
a) $y = 3x + 1$
b) $y = 2x$
c) $y = x - 3$
d) $y = x + 1$

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 07.

11) O triângulo ABC é formado pela região compreendida entre as reta (r) $y = -x + 5$, (s) $\sqrt{3}x - 3y + 15 = 0$ e o eixo x. Determine a medida do maior ângulo interno desse triângulo.

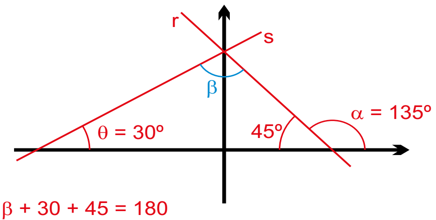
(GeoJeca)

(r) $y = -x + 5$ $\begin{cases} m_r = -1 \longrightarrow \alpha = 135° \\ q_r = 5 \end{cases}$

(s) $\sqrt{3}x - 3y + 15 = 0$

$3y = \sqrt{3}x + 15$

$y = \dfrac{\sqrt{3}x}{3} + 5$ $\begin{cases} m_s = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \longrightarrow \theta = 30° \\ q_s = 5 \end{cases}$



$\beta + 30 + 45 = 180$

$\beta = 105°$ (resp)

12) As retas r e s interceptam-se no ponto P(5 , 3). Determine a equação geral da reta t que é simétrica de (s) $x - 2y + 1 = 0$ em relação a (r) $y = x - 2$.

(GeoJeca)

(r) $y = x - 2$ $\begin{cases} m_r = 1 \\ q_r = -2 \end{cases}$

(s) $x - 2y + 1 = 0$

$2y = x + 1$

$y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}$ $\begin{cases} m_s = 1/2 \\ q_s = 1/2 \end{cases}$

$\left.\begin{matrix} m_r = 1 \\ m_s = 1/2 \end{matrix}\right\}$ $\text{tg}\,\theta = \left|\dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$

$\text{tg}\,\theta = \left|\dfrac{1 - (1/2)}{1 + 1 \cdot (1/2)}\right| = 1/3$

Impor que a reta t procurada também faça um ângulo θ com a reta r.

$\text{tg}\,\theta = 1/3 = \left|\dfrac{1 - m_t}{1 + 1 \cdot m_t}\right|$

Supondo positivo	Supondo negativo
$m_t = 1/2$	$m_t = 2$
Portanto $m_t = m_s$	(coeficiente correto)

$\left.\begin{matrix} m_t = 2 \\ P(5\ ,\ 3) \end{matrix}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = 2(x - 5)$

$y - 3 = 2x - 10$

(t) $2x - y - 7 = 0$ (eq. geral) (resp)

13) O triângulo ABC tem vértice C(7 , -2) e área 12. Determine a distância entre os pontos A e B, sabendo que ambos pertencem à reta (r) $3x - 4y + 1 = 0$.

(GeoJeca)

A base do triângulo é a distância entre A e B. A altura do triângulo é a distância entre o ponto C e a reta AB que é a mesma reta (r) $3x - 4y + 1 = 0$.

Determinação da altura do triângulo.

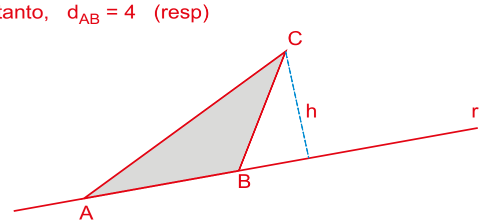
$\left.\begin{matrix} (r)\ 3x - 4y + 1 = 0 \\ C(7\ ,\ -2) \end{matrix}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{|3 \cdot 7 - 4 \cdot (-2) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 6 \longrightarrow h = 6$

$S = \dfrac{b \cdot h}{2}$

$12 = \dfrac{d_{AB} \cdot h}{2} \longrightarrow 12 \cdot 2 = d_{AB} \cdot 6$

Portanto, $d_{AB} = 4$ (resp)



14) (UFRN-RN) Um triângulo ABC possui vértices A(2 , 3), B(5 , 3) e C(2 , 6). A equação da reta bissetriz do ângulo A é:

(GeoJeca)

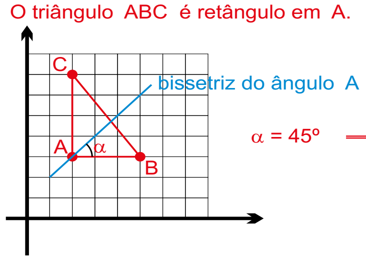
a) $y = 3x + 1$
b) $y = 2x$
c) $y = x - 3$
d) $y = x + 1$

A bissetriz do ângulo A é o conjunto dos pontos do plano equidistantes das retas AC e AB.

Equação da reta AB: $y - 3 = 0$ (reta paralela ao eixo x)

Equação da reta AC: $x - 2 = 0$ (reta perpendicular ao eixo x)

O triângulo ABC é retângulo em A.



$\alpha = 45° \longrightarrow m = 1$

$\left.\begin{matrix} m = 1 \\ A(2\ ,\ 3) \end{matrix}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = 1(x - 2)$

$y - 3 = x - 2$

$y = x + 1$ (eq. da bissetriz) (resp)

15) (Unicamp-SP) Seja a reta $x - 3y + 6 = 0$ no plano xy.
a) Se P é um ponto qualquer desse plano, quantas retas do plano passam por P e formam um ângulo de 45º com a reta dada acima ?
b) Para o ponto P com coordenadas (2 , 5), determine as equações das retas mencionadas no item (a).

(GeoJeca)

16) (UFMG-MG) A equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas (r) $y = x$ e (s) $y = 2x$, é:

(GeoJeca)

a) $y = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}x$
b) $y = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}x$
c) $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}x$
d) $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x$
e) $y = \frac{3}{2}x$

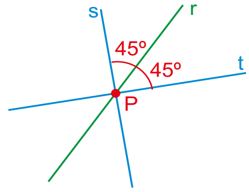
17) Sabendo que $tg\,\alpha = 2/5$, determine a equação geral de cada reta que passa pelo ponto P(3 , -1) e faz um ângulo α com a reta (r) $y = 3x/4$.

(GeoJeca)

15) (Unicamp-SP) Seja a reta $x - 3y + 6 = 0$ no plano xy.
a) Se P é um ponto qualquer desse plano, quantas retas do plano passam por P e formam um ângulo de 45° com a reta dada acima ?
b) Para o ponto P com coordenadas (2 , 5), determine as equações das retas mencionadas no item (a).

(GeoJeca)

a) Duas retas passam por P e formam ângulos de 45° com a reta r.



b) (r) $x - 3y + 6 = 0$
$3y = x + 6$
(r) $y = \frac{x}{3} + 2$
$m_r = 1/3$

Seja m o coeficiente angular da reta que passa por P e faz $\theta = 45°$ com a reta r.

$$tg\ \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$

$tg\ \theta = tg\ 45° = 1$
$m_r = 1/3$
$m_s = m_t = m$

$$1 = \left| \frac{m - 1/3}{1 + m \cdot 1/3} \right|$$

Supondo positivo
$m - 1/3 = 1 + m/3$
$m - m/3 = 1 + 1/3$
$2m/3 = 4/3$
Portanto, $m = 2$
$m_s = 2$

Supondo negativo
$-(m - 1/3) = 1 + m/3$
$-m + 1/3 = 1 + m/3$
$-m - m/3 = 1 - 1/3$
$-4m/3 = 2/3$
$-4m = 2$
Portanto, $m = -1/2$
$m_t = -1/2$

Eq. da reta s.
$m_s = 2$
P(2 , 5)
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 5 = 2(x - 2)$
$y - 5 = 2x - 4$
(s) $2x - y + 1 = 0$ (resp)

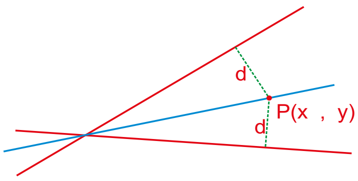
Eq. da reta t.
$m_t = -1/2$
P(2 , 5)
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 5 = \frac{-1}{2}(x - 2)$
$2(y - 5) = -1(x - 2)$
$2y - 10 = -x + 2$
(t) $x + 2y - 12 = 0$ (resp)

16) (UFMG-MG) A equação da bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas (r) $y = x$ e (s) $y = 2x$, é:

a) $y = \frac{1 + \sqrt{10}}{3}x$
b) $y = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}x$
c) $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{3}x$
d) $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x$
e) $y = \frac{3}{2}x$

(GeoJeca)

A bissetriz do ângulo agudo formado pelas retas r e s é o conjunto dos pontos do plano equidistantes de r e de s.



(r) $y = x$
Portanto, (r) $x - y = 0$

(s) $y = 2x$
Portanto, (s) $2x - y = 0$

P(x , y)

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$d_{Pr} = d_{Ps}$

$$\frac{|1 \cdot x - 1 \cdot y|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 \cdot x - 1 \cdot y|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

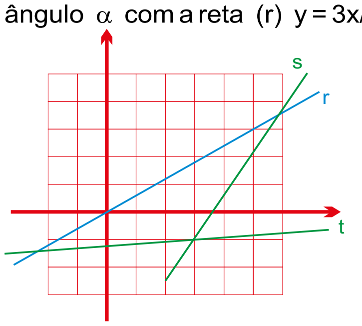
$$\frac{|x - y|}{\sqrt{2}} = \frac{|2x - y|}{\sqrt{5}}$$

Supondo positivo
$\sqrt{5}(x - y) = \sqrt{2}(2x - y)$
$\sqrt{5}x - \sqrt{5}y = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y$
$(2\sqrt{2} - \sqrt{5})x + (\sqrt{5} - \sqrt{2})y = 0$
$y = \frac{(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})x}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$
$y = \frac{(1 - \sqrt{10})x}{3}$ (resp) (sem alternativa)

Supondo negativo
$-\sqrt{5}(x - y) = \sqrt{2}(2x - y)$
$-\sqrt{5}x + \sqrt{5}y = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y$
$(2\sqrt{2} + \sqrt{5})x - (\sqrt{5} + \sqrt{2})y = 0$
$y = \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{5})x}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$
$y = \frac{(1 + \sqrt{10})x}{3}$ (resp. a)) (com alternativa)

17) Sabendo que $tg\ \alpha = 2/5$, determine a equação geral de cada reta que passa pelo ponto P(3 , -1) e faz um ângulo α com a reta (r) $y = 3x/4$.

(GeoJeca)



Seja m o coeficiente angular da reta que faz um ângulo a com a reta r.

$$\boxed{tg\ \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|}$$

$$\frac{2}{5} = \left| \frac{\frac{3}{4} - m}{1 + \frac{3}{4} \cdot m} \right|$$

$$\frac{2}{5} = \left| \frac{\frac{3 - 4m}{4}}{\frac{4 + 3m}{4}} \right|$$

$$\frac{2}{5} = \left| \frac{3 - 4m}{4 + 3m} \right|$$

Supondo positivo
$2(4 + 3m) = 5(3 - 4m)$
Portanto $m = 7/26$

$\frac{7}{26}$

$m = 7/26$
P(3 , -1)
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y + 1 = \frac{7}{26}(x - 3)$
$7x - 26y - 47 = 0$ (1ª reta)

Supondo negativo
$-2(4 + 3m) = 5(3 - 4m)$
Portanto $m = 23/14$

$m = 23/14$
P(3 , -1)
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y + 1 = \frac{23}{14}(x - 3)$
$23x - 14y - 83 = 0$ (2ª reta)

Correções

aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										

Auxiliares gráficos

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$\sqrt{\ }$	$\sqrt{\ \ }$	$\sqrt{\ \ \ }$	$\sqrt[3]{\ }$	$\sqrt[3]{\ \ }$	$\sqrt[3]{\ \ \ }$
$\in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$	$\mathbb{N}$ $\in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$ $\longrightarrow$ ∞	$\pm$ $\neq$	$\forall$ $\simeq$
$\supset$ $\not\supset$ $\subset$ $\not\subset$	$\in$ $\notin$				

$$\left.\right\} \quad d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\left.\begin{matrix} m_r = \sqrt{3} \\ \nexists\ m_s \end{matrix}\right\} \quad tg\ \theta = \left|\frac{1}{m_r}\right|$$

$$\left.\right\} \quad tg\ \theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

$\sqrt{\ }$	$\sqrt{\ \ }$	$\sqrt{\ \ \ }$	$\sqrt[3]{\ }$	$\sqrt[3]{\ \ }$	$\sqrt[3]{\ \ \ }$
$\in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$	$\mathbb{N}$ $\in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$ $\longrightarrow$ ∞	$\pm$ $\neq$	$\forall$ $\simeq$
$\supset$ $\not\supset$ $\subset$ $\not\subset$	$\in$ $\notin$				

$s \,//\, r \Longrightarrow m_s = m_r$

$s \perp r \Longrightarrow m_s = \dfrac{-1}{m_r}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 08
Equação reduzida da circunferência.
Equação normal da circunferência.

I - Equação da reduzida da circunferência.

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

II - Equação da normal da circunferência.

$$x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$$

onde x_c e y_c são as coordenadas do centro da circunferência e R é o raio.

III - Obtenção de centro e raio através da equação normal da circunferência.

$$\begin{cases} -2x_C = \text{coeficiente do termo em } x. \\ -2y_C = \text{coeficiente do termo em } y. \\ x_C^2 + y_C^2 - R^2 = \text{termo independente.} \end{cases}$$

Justificativa

$$x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 12y + 43 = 0$$

Exercícios

01) Em cada caso abaixo, dados o centro e o raio, determine as equações reduzida e normal da circunferência.

a) $C(4, 9)$, $R = 5$ (GeoJeca)

b) $C(-4, 7)$, $R = 1$ (GeoJeca)

c) $C(3, -8)$, $R = 2$ (GeoJeca)

d) $C(0, -4)$, $R = 3$ (GeoJeca)

e) $C(6, 0)$, $R = \sqrt{3}$ (GeoJeca)

f) $C(0, 0)$, $R = \sqrt{13}$ (GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados
pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 08
Equação reduzida da circunferência.
Equação normal da circunferência.

I - Equação da reduzida da circunferência.

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$$

II - Equação da normal da circunferência.

$$x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$$

onde x_c e y_c são as coordenadas do centro da circunferência e R é o raio.

III - Obtenção de centro e raio através da equação normal da circunferência.

$$\begin{cases} -2x_C = \text{coeficiente do termo em } x. \\ -2y_C = \text{coeficiente do termo em } y. \\ x_C^2 + y_C^2 - R^2 = \text{termo independente.} \end{cases}$$

Justificativa

$$x^2 + y^2 - 2x_Cx - 2y_Cy + x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 12y + 43 = 0$$

Exercícios

01) Em cada caso abaixo, dados o centro e o raio, determine as equações reduzida e normal da circunferência.

a) C(4 , 9) , R = 5 (GeoJeca)

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 4)^2 + (y - 9)^2 = 5^2$

$(x - 4)^2 + (y - 9)^2 = 25$ (eq. reduzida)

$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 18y + 81 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 - 8x - 18y + 72 = 0$ (eq. geral)

b) C(-4 , 7) , R = 1 (GeoJeca)

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - (-4))^2 + (y - 7)^2 = 1^2$

$(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 1$ (eq. reduzida)

$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 14y + 49 - 1 = 0$

$x^2 + y^2 + 8x - 14y + 64 = 0$ (eq. geral)

c) C(3 , -8) , R = 2 (GeoJeca)

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 3)^2 + (y - (-8))^2 = 2^2$

$(x - 3)^2 + (y + 8)^2 = 4$ (eq. reduzida)

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 16y + 64 - 4 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x + 16y + 69 = 0$ (eq. geral)

d) C(0 , -4) , R = 3 (GeoJeca)

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 0)^2 + (y - (-4))^2 = 3^2$

$x^2 + (y + 4)^2 = 9$ (eq. reduzida)

$x^2 + y^2 + 8y + 16 - 9 = 0$

$x^2 + y^2 + 8y + 7 = 0$ (eq. geral)

e) C(6 , 0) , R = $\sqrt{3}$ (GeoJeca)

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 6)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{3})^2$

$(x - 6)^2 + y^2 = 3$ (eq. reduzida)

$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 3 = 0$

$x^2 + y^2 - 12x + 33 = 0$ (eq. geral)

f) C(0 , 0), R = $\sqrt{13}$ (GeoJeca)

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{13})^2$

$x^2 + y^2 = 13$ (eq. reduzida)

$x^2 + y^2 - 13 = 0$ (eq. geral)

g) $C(25,-4)$, $R=\sqrt{37}$	h) $C(0,-1)$, $R=\sqrt{3}$	i) $C(2,5)$, $R=-7$
j) $C(-1,-1)$, $R=20$	k) $C(0,-12)$, $R=6$	l) $C(-5,\sqrt{7})$, $R=\sqrt{43}$

02) Dada a equação reduzida, determinar o centro e o raio de cada circunferência abaixo.

a) $(x-5)^2+(y-2)^2=16$ (GeoJeca) C(,), R=	b) $(x+7)^2+(y-2)^2=36$ (GeoJeca) C(,), R=	c) $(x-5)^2+(y+13)^2=64$ (GeoJeca) C(,), R=
d) $(x+10)^2+(y+8)^2=1$ C(,), R=	e) $x^2+(y+9)^2=31$ C(,), R=	f) $(x-5)^2+y^2=64$ C(,), R=
g) $x^2+y^2=64$ C(,), R=	h) $(x+15)^2+(y+1)^2=5$ C(,), R=	i) $(x-5)^2+y^2=4$ C(,), R=
j) $x^2+(y-3)^2=64$ (GeoJeca) C(,), R=	k) $(x+1)^2+y^2=23$ (GeoJeca) C(,), R=	l) $x^2+y^2=8$ (GeoJeca) C(,), R=
m) $(x-5)^2+(y-1)^2=7$ C(,), R=	n) $x^2+(y-2)^2=27$ C(,), R=	o) $(x-3)^2+y^2=225$ C(,), R=
p) $(x+5)^2+(y+1)^2=\sqrt{7}$ C(,), R=	q) $x^2+(y+9)^2-27=0$ C(,), R=	r) $(x+12)^2+y^2=400$ C(,), R=

g) $C(25, -4), R = \sqrt{37}$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 25)^2 + (y - (-4))^2 = (\sqrt{37})^2$
$(x - 25)^2 + (y + 4)^2 = 37$ (eq. reduzida)

$x^2 - 50x + 625 + y^2 + 8y + 16 - 37 = 0$
$x^2 + y^2 - 50x + 8y + 604 = 0$ (eq. geral)

h) $C(0, -1), R = \sqrt{3}$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 0)^2 + (y - (-1))^2 = (\sqrt{3})^2$
$x^2 + (y + 1)^2 = 3$ (eq. reduzida)

$x^2 + y^2 + 2y + 1 - 3 = 0$
$x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0$ (eq. geral)

i) $C(2, 5), R = -7$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

Não existe circunferência com raio negativo.

j) $C(-1, -1), R = 20$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - (-1))^2 + (y - (-1))^2 = 20^2$
$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 400$ (eq. reduzida)

$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 400 = 0$
$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 398 = 0$ (eq. geral)

k) $C(0, -12), R = 6$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 0)^2 + (y - (-12))^2 = 6^2$
$x^2 + (y + 12)^2 = 36$ (eq. reduzida)

$x^2 + y^2 + 24y + 144 - 36 = 0$
$x^2 + y^2 + 24y + 108 = 0$ (eq. geral)

l) $C(-5, \sqrt{7}), R = \sqrt{43}$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - (-5))^2 + (y - \sqrt{7})^2 = (\sqrt{43})^2$
$(x + 5)^2 + (y - \sqrt{7})^2 = 43$ (eq. reduzida)

$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2\sqrt{7}y + 7 - 43 = 0$
$x^2 + y^2 + 10x - 2\sqrt{7}y - 11 = 0$ (eq. geral)

02) Dada a equação reduzida, determinar o centro e o raio de cada circunferência abaixo.

a) $(x-5)^2+(y-2)^2=16$ (GeoJeca) $C(5, 2), R=4$	b) $(x+7)^2+(y-2)^2=36$ (GeoJeca) $C(-7, 2), R=6$	c) $(x-5)^2+(y+13)^2=64$ (GeoJeca) $C(5, -13), R=8$
d) $(x+10)^2+(y+8)^2=1$ $C(-10, -8), R=1$	e) $x^2+(y+9)^2=31$ $C(0, -9), R=\sqrt{31}$	f) $(x-5)^2+y^2=64$ $C(5, 0), R=8$
g) $x^2+y^2=64$ $C(0, 0), R=8$	h) $(x+15)^2+(y+1)^2=5$ $C(-15, -1), R=\sqrt{5}$	i) $(x-5)^2+y^2=4$ $C(5, 0), R=2$
j) $x^2+(y-3)^2=64$ (GeoJeca) $C(0, 3), R=8$	k) $(x+1)^2+y^2=23$ (GeoJeca) $C(-1, 0), R=\sqrt{23}$	l) $x^2+y^2=8$ (GeoJeca) $C(0, 0), R=2\sqrt{2}$
m) $(x-5)^2+(y-1)^2=7$ $C(5, 1), R=\sqrt{7}$	n) $x^2+(y-2)^2=27$ $C(0, 2), R=3\sqrt{3}$	o) $(x-3)^2+y^2=225$ $C(3, 0), R=15$
p) $(x+5)^2+(y+1)^2=\sqrt{7}$ $C(-5, -1), R=\sqrt[4]{7}$	q) $x^2+(y+9)^2-27=0$ $C(0, -9), R=3\sqrt{3}$	r) $(x+12)^2+y^2=400$ $C(-12, 0), R=20$

03) Dada a equação normal, determinar o centro, o raio e a equação reduzida de cada circunferência abaixo, se existir.

a) $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida	b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 6 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida	c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 17 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida
d) $x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida	e) $x^2 + y^2 - 81 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida	f) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 22 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida
g) $x^2 + y^2 - 3y + 11 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida	h) $x^2 + y^2 + 1 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida	i) $x^2 + y^2 + 2xy + 10y + 22 = 0$ centro (GeoJeca) Raio C(,), R = Equação reduzida

03) Dada a equação normal, determinar o centro, o raio e a equação reduzida de cada circunferência abaixo, se existir.

a) $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$

centro (GeoJeca)

$-2x_C = -12$

$x_C = 6$

$-2y_C = -2$

$y_C = 1$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 12$
$36 + 1 - 12 = R^2$
$R^2 = 25$
$R = 5$

C(6 , 1), R = 5

Equação reduzida

$(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 6 = 0$

centro (GeoJeca)

$-2x_C = 4$

$x_C = -2$

$-2y_C = -8$

$y_C = 4$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 6$
$4 + 16 - 6 = R^2$
$R^2 = 14$
$R = \sqrt{14}$

C(-2 , 4), R = $\sqrt{14}$

Equação reduzida

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 14$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 17 = 0$

centro (GeoJeca)

$-2x_C = -2$

$x_C = 1$

$-2y_C = 4$

$y_C = -2$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 17$
$1 + 4 - 17 = R^2$
$R^2 = -12$
Impossível

C(,), R =

Equação reduzida

Não existe a circunferência

d) $x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0$

centro (GeoJeca)

$-2x_C = 0$

$x_C = 0$

$-2y_C = -12$

$y_C = 6$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 11$
$0 + 36 - 11 = R^2$
$R^2 = 25$
$R = 5$

C(0 , 6), R = 5

Equação reduzida

$x^2 + (y - 6)^2 = 25$

e) $x^2 + y^2 - 81 = 0$

centro (GeoJeca)

$-2x_C = 0$

$x_C = 0$

$-2y_C = 0$

$y_C = 0$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = -81$
$0 + 0 + 81 = R^2$
$R^2 = 81$
$R = 9$

C(0 , 0), R = 9

Equação reduzida

$x^2 + y^2 = 81$

f) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 22 = 0$

centro (GeoJeca)

$-2x_C = 2$

$x_C = -1$

$-2y_C = 10$

$y_C = -5$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 22$
$1 + 25 - 22 = R^2$
$R^2 = 4$
$R = 2$

C(-1 , -5), R = 2

Equação reduzida

$(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 4$

g) $x^2 + y^2 - 3y + 11 = 0$

centro (GeoJeca)

$-2x_C = 0$

$x_C = 0$

$-2y_C = -3$

$y_C = 3/2$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 11$
$0 + 9/4 - 11 = R^2$
$R^2 = -35/4$
Impossível

C(,), R =

Equação reduzida

Não existe a circunferência

h) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

centro (GeoJeca)

Não existe
a circunferência

Raio

C(,), R =

Equação reduzida

i) $x^2 + y^2 + 2xy + 10y + 22 = 0$

centro (GeoJeca)

Não existe
a circunferência

Raio

C(,), R =

Equação reduzida

j) $x^2 + y^2 + 3x - 6y + 11 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida	k) $x^2 + y^2 - 6x + 13 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida	l) $-2x^2 - 2y^2 - 4x + 8y + 22 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida
m) $x^2 + 3y^2 - 12y + 11 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida	n) $x^2 + y^2 + xy - 3y - 9 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida	o) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 4 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida
p) $3x^2 - 3y^2 - 18y + 16 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida	q) $x^2 + y^2 + 6xy - 8y - 4 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida	r) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y - 25 = 0$ (GeoJeca) centro Raio C(,), R = Equação reduzida

Jeca 38

j) $x^2 + y^2 + 3x - 6y + 11 = 0$ (GeoJeca)

centro

$-2x_C = 3$

$x_C = -3/2$

$-2y_C = -6$

$y_C = 3$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 11$

$9/4 + 9 - 11 = R^2$

$R^2 = 1/4$

$R = 1/2$

C(-3/2 , 3) , R = 1/2

Equação reduzida

$(x + 3/2)^2 + (y - 3)^2 = 1/4$

k) $x^2 + y^2 - 6x + 13 = 0$ (GeoJeca)

centro

$-2x_C = -6$

$x_C = 3$

$-2y_C = 0$

$y_C = 0$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 13$

$9 + 0 - 13 = R^2$

$R^2 = -4$

Impossível

C(,) , R =

Equação reduzida

Não existe a circunferência

l) $-2x^2 - 2y^2 - 4x + 8y + 22 = 0$ (GeoJeca)

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$

centro

$-2x_C = 2$

$x_C = -1$

$-2y_C = -4$

$y_C = 2$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = -11$

$1 + 4 + 11 = R^2$

$R^2 = 16$

$R = 4$

C(-1 , 2) , R = 4

Equação reduzida

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

m) $x^2 + 3y^2 - 12y + 11 = 0$ (GeoJeca)

centro

Não existe
a circunferência

Raio

C(,) , R =

Equação reduzida

n) $x^2 + y^2 + xy - 3y - 9 = 0$ (GeoJeca)

centro

Não existe
a circunferência

Raio

C(,) , R =

Equação reduzida

o) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 16y + 4 = 0$ (GeoJeca)

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

centro

$-2x_C = -2$

$x_C = 1$

$-2y_C = 4$

$y_C = -2$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 1$

$1 + 4 - 1 = R^2$

$R^2 = 4$

$R = 2$

C(1 , -2) , R = 2

Equação reduzida

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

p) $3x^2 - 3y^2 - 18y + 16 = 0$ (GeoJeca)

centro

Não existe
a circunferência

Raio

C(,) , R =

Equação reduzida

q) $x^2 + y^2 + 6xy - 8y - 4 = 0$ (GeoJeca)

centro

Não existe
a circunferência

Raio

C(,) , R =

Equação reduzida

r) $5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y - 25 = 0$ (GeoJeca)

$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 5 = 0$

centro

$-2x_C = -2$

$x_C = 1$

$-2y_C = 2$

$y_C = -1$

Raio

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = -5$

$1 + 1 + 5 = R^2$

$R^2 = 7$

$R = \sqrt{7}$

C(1 , -1) , R = $\sqrt{7}$

Equação reduzida

$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 7$

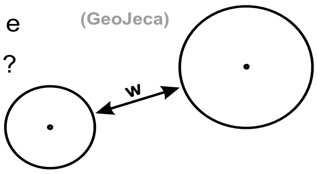
GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

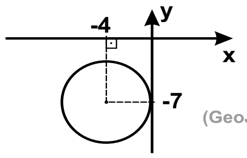
Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 08.

04) Qual a distância **w** entre as circunferências
(λ_1) $(x-5)^2+(y+3)^2=4$ e
(λ_2) $x^2+y^2+6x-2y+1=0$?

(GeoJeca)



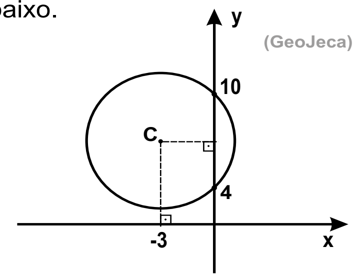
05) Determinar a equação reduzida e a equação normal da circunferência abaixo.



(GeoJeca)

06) Determinar a equação reduzida e a equação normal da circunferência abaixo.

(GeoJeca)



07) Dada a circunferência (λ) $x^2+y^2-4x+10y+20=0$, determinar:

(GeoJeca)

a) o centro e o raio dessa circunferência.
b) o ponto A de λ que tem a maior abscissa.
c) o ponto B de λ que tem a menor ordenada.
(DICA - Após achar o centro e o raio, desenhar a circunferência.

08) Dada a circunferência (λ) $x^2+y^2+6x-8y+15=0$, determinar:

(GeoJeca)

a) o centro e o raio dessa circunferência.
b) o ponto A de λ que tem a maior abscissa.
c) o ponto B de λ que tem a menor ordenada.
(DICA - Após achar o centro e o raio, desenhar a circunferência)

09) Determine a distância **w** entre a circunferência (λ) $(x+5)^2+(y-1)^2=9$ e a reta (r) $3x-4y-6=0$.

(GeoJeca)

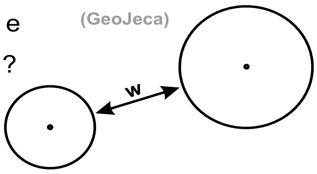
GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 08.

04) Qual a distância **w** entre as circunferências
(λ_1) $(x-5)^2+(y+3)^2=4$ e
(λ_2) $x^2+y^2+6x-2y+1=0$?

(GeoJeca)



Centro e raio de λ_1
$C_1(5\ ,\ -3)\ ,\ R_1 = 2$

Centro e raio de λ_2
$-2x_C = 6 \Longrightarrow x_C = -3$
$-2y_C = -2 \Longrightarrow y_C = 1$
$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 1$
$9 + 1 - 1 = R^2$
$R = 3$
$C_2(-3\ ,\ 1)\ ,\ R_2 = 3$

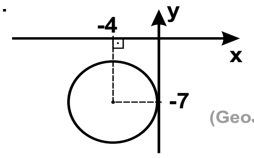
d - distância entre C_1 e C_2

$d = \sqrt{(-3-5)^2 + (1-(-3))^2}$

$d = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
$w = d - R_1 - R_2$
$w = 4\sqrt{5} - 2 - 3$

$w = 4\sqrt{5} - 5$ (resp)

05) Determinar a equação reduzida e a equação normal da circunferência abaixo.



(GeoJeca)

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$C(-4\ ,\ -7)\ ,\ R = 4$

$(x + 4)^2 + (y + 7)^2 = 16$ (eq. reduzida) (resp)

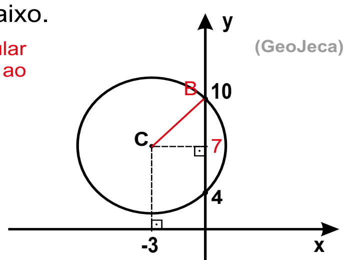
Desenvolvendo, tem-se

$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 14y + 49 - 16 = 0$

$x^2 + y^2 + 8x + 14y + 49 = 0$ (eq. normal) (resp)

06) Determinar a equação reduzida e a equação normal da circunferência abaixo.

(GeoJeca)



O raio, quando perpendicular à corda, divide essa corda ao meio.
Portanto, $y_C = 7$

O raio é a distância BC.

$d_{BC} = \sqrt{(-3-0)^2 + (7-10)^2}$

$d_{BC} = R = 3\sqrt{2}$

Centro e raio da circunferência $C(-3\ ,\ 7)\ ,\ R = 3\sqrt{2}$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 18$ (eq. reduzida) (resp)

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 - 18 = 0$

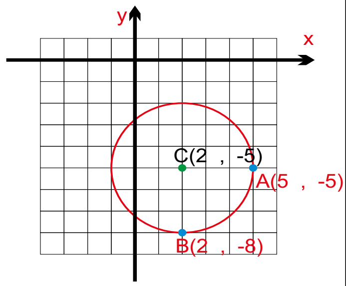
$x^2 + y^2 + 6x - 14y + 40 = 0$ (eq. normal) (resp)

07) Dada a circunferência (λ) $x^2+y^2-4x+10y+20=0$, determinar :
a) o centro e o raio dessa circunferência.
b) o ponto A de λ que tem a maior abscissa.
c) o ponto B de λ que tem a menor ordenada.
(DICA - Após achar o centro e o raio, desenhar a circunferência.

(GeoJeca)

a)
$-2x_C = -4$
$x_C = 2$
$-2y_C = 10$
$y_C = -5$
$C(2\ ,\ -5)$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 20$
$4 + 25 - 20 = R^2$
$R^2 = 9$
$R = 3$

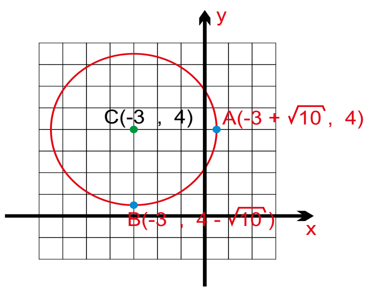


08) Dada a circunferência (λ) $x^2+y^2+6x-8y+15=0$, determinar :
a) o centro e o raio dessa circunferência.
b) o ponto A de λ que tem a maior abscissa.
c) o ponto B de λ que tem a menor ordenada.
(DICA - Após achar o centro e o raio, desenhar a circunferência)

(GeoJeca)

a)
$-2x_C = 6$
$x_C = -3$
$-2y_C = -8$
$y_C = 4$
$C(-3\ ,\ 4)$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 15$
$9 + 16 - 15 = R^2$
$R^2 = 10$
$R = \sqrt{10}$



$A(-3 + \sqrt{10}\ ,\ 4)$ $B(-3\ ,\ 4 - \sqrt{10})$

09) Determine a distância **w** entre a circunferência (λ) $(x+5)^2+(y-1)^2=9$ e a reta (r) $3x-4y-6=0$.

(GeoJeca)

Centro e raio da circunferência $C(-5\ ,\ 1)\ ,\ R = 3$

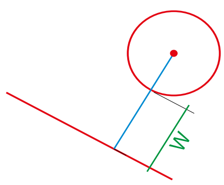
d - distância entre o centro da circunferência e a reta r

$\left.\begin{array}{l} (r)\ 3x - 4y - 6 = 0 \\ C(-5\ ,\ 1) \end{array}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{|3\,.\,(-5) - 4\,.\,1 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{25}{5} = 5$

$w = d - R = 5 - 3$

$w = 2$ (resp)



10) Na equação abaixo, determine os valores de A, B, C, D e E para que a mesma represente uma circunferência de centro (-2 , 1) e raio 6.

$$2x^2 + Ay^2 - Bxy + Cx + Dy + E = 0$$

(GeoJeca)

11) Determinar quantos pontos da circunferência $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 16$ pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

(GeoJeca)

12) Determinar quantos pontos da circunferência $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 27 = 0$ pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

(GeoJeca)

13) Determine a equação normal da circunferência que tangencia o semieixo positivo das abscissas, tem centro sobre a reta (r) $y = 2x$ e raio igual a 4.

(GeoJeca)

14) Determinar quantos pontos da circunferência $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$ pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

(GeoJeca)

15) Determinar quantos pontos da circunferência $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 16$ pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas.

(GeoJeca)

10) Na equação abaixo, determine os valores de A, B, C, D e E para que a mesma represente uma circunferência de centro (-2 , 1) e raio 6.

$2x^2 + Ay^2 - Bxy + Cx + Dy + E = 0$ (GeoJeca)

Para ser circunferência, obrigatoriamente tem-se A = 2 e B = 0.
Dividindo por 2 , tem-se
$x^2 + y^2 + (C/2)x + (D/2)y + E/2 = 0$

$-2x_C = C/2$
$-2 . (-2) = C/2$
Portanto, C = 8

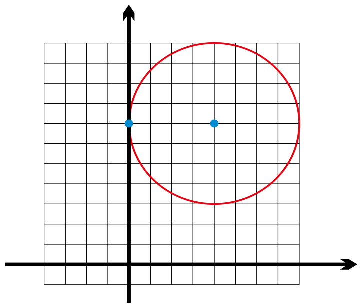
$-2y_C = D/2$
$-2 . 1 = D/2$
Portanto, D = -4

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = E/2$
$(-2)^2 + 1^2 - 6^2 = E/2$
$4 + 1 - 36 = E/2$
Portanto, E = -62

A = 2
B = 0
C = 8 (resp)
D = -4
E = -62

11) Determinar quantos pontos da circunferência $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 16$ pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas. (GeoJeca)

Centro e raio da circunferência C(4 , 7) , R = 4



Somente 1 ponto da circunferência pertence aos eixos coordenados.

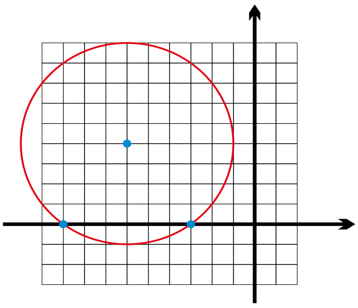
Para resolver algebricamente, impõe-se primeiramente x = 0 e posteriormente y = 0 na equação da circunferência.

12) Determinar quantos pontos da circunferência $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 27 = 0$ pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas. (GeoJeca)

$-2x_C = 12$
$x_C = -6$
$-2y_C = -8$
$y_C = 4$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 27$
$36 + 16 - 27 = R^2$
$R^2 = 25$
R = 5

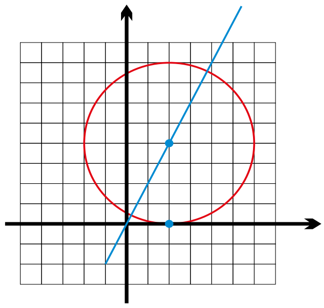
C(-6 , 4) , R = 5



Somente 2 pontos da circunferência pertencem aos eixos coordenados.

Para resolver algebricamente, impõe-se primeiramente x = 0 e posteriormente y = 0 na equação da circunferência.

13) Determine a equação normal da circunferência que tangencia o semieixo positivo das abscissas, tem centro sobre a reta (r) y = 2x e raio igual a 4. (GeoJeca)



Se R = 4 , então $y_C = 4$

Se $y_C = 4$ e o centro está sobre a reta y = 2x , então

$y_C = 2 . x_C$
$4 = 2 . x_C$
$x_C = 2$

C(2 , 4) e R = 4

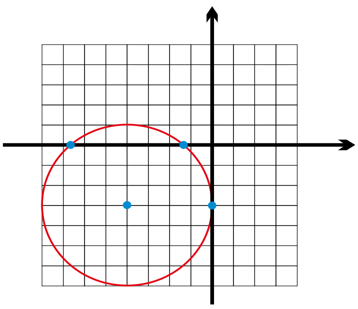
$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$
$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 16$
$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$ (eq. normal) (resp)

14) Determinar quantos pontos da circunferência $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$ pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas. (GeoJeca)

$-2x_C = 8$
$x_C = -4$
$-2y_C = 6$
$y_C = -3$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 9$
$16 + 9 - 9 = R^2$
$R^2 = 16$
R = 4

C(-4 , -3) , R = 4

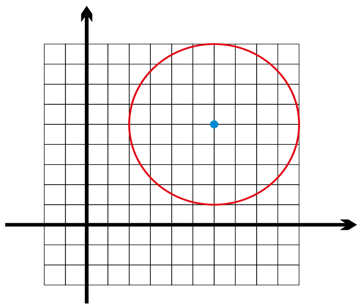


Existem três pontos da circunferência que pertencem aos eixos coordenados.

Para resolver algebricamente, impõe-se primeiramente x = 0 e posteriormente y = 0 na equação da circunferência.

15) Determinar quantos pontos da circunferência $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 16$ pertencem ao eixo das abscissas ou ao eixo das ordenadas. (GeoJeca)

Centro e raio da circunferência C(6 , 5) , R = 4



Nenhum ponto da circunferência pertence aos eixos coordenados.

Para resolver algebricamente, impõe-se primeiramente x = 0 e posteriormente y = 0 na equação da circunferência.

16) Determinar as coordenadas dos pontos da circunferência $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$ que têm abscissa -2.

(GeoJeca)

17) Determinar as coordenadas dos pontos da circunferência $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$ que têm ordenada -2.

(GeoJeca)

18) Determinar equação geral da reta que tangencia a circunferência $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 13$ no ponto P(-5 , 4).

(GeoJeca)

19) Determinar equação geral da reta que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 33 = 0$ no ponto P(10, 7).

(GeoJeca)

20) Determine a equação reduzida da circunferência de diâmetro AB, sabendo que A(-6 , 1) e B(2 , 7).

(GeoJeca)

21) Determine a equação reduzida da circunferência que tem centro no ponto C(6 , -2) e que passa no ponto P(4 , -5).

(GeoJeca)

16) Determinar as coordenadas dos pontos da circunferência $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$ que têm abscissa -2.

(GeoJeca)

abscissa $\Longrightarrow$ $x = -2$

$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$(-2 + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$4 + y^2 - 2y + 1 - 9 = 0$

$y^2 - 2y - 4 = 0$ < $y_A = 1 + \sqrt{5}$; $y_B = 1 - \sqrt{5}$

$A(-2\ ,\ 1 + \sqrt{5})$

$B(-2\ ,\ 1 - \sqrt{5})$ (resp)

17) Determinar as coordenadas dos pontos da circunferência $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$ que têm ordenada -2.

(GeoJeca)

ordenada $\Longrightarrow$ $y = -2$

$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$

$(x + 4)^2 + (-2 - 1)^2 = 9$

$x^2 + 8x + 16 + 9 - 9 = 0$

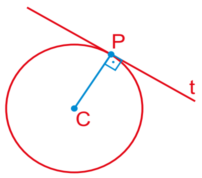
$x^2 + 8x + 16 = 0 \Longrightarrow x_A = -4$ (somente uma raiz)

Portanto, $A(-4\ ,\ -2)$ (resp)

18) Determinar equação geral da reta que tangencia a circunferência $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 13$ no ponto P(-5 , 4).

(GeoJeca)

Centro e raio da circunferência: $C(-3\ ,\ 1)$, $R = \sqrt{13}$



A reta t é perpendicular à reta CP.

$$m_{CP} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C}$$

$$m_{CP} = \frac{4 - 1}{-5 - (-3)} = \frac{-3}{2}$$

$s \perp r \Longrightarrow m_s = \frac{-1}{m_r}$

Portanto, $m_t = 2/3$

$m_t = 2/3$, $P(-5\ ,\ 4)$ } $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - (-5))$$

$3y - 12 = 2x + 10$

(t) $2x - 3y + 22 = 0$ (eq. geral) (resp)

19) Determinar equação geral da reta que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 33 = 0$ no ponto P(10, 7).

(GeoJeca)

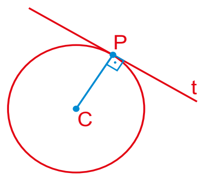
$-2x_C = -14$

$x_C = 7$

$-2y_C = -6$

$y_C = 3$

$C(7\ ,\ 3)$



$$m_{CP} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C}$$

$$m_{CP} = \frac{7 - 3}{10 - 7} = \frac{4}{3}$$

$s \perp r \Longrightarrow m_s = \frac{-1}{m_r}$

Portanto, $m_t = -3/4$

$m_t = -3/4$, $P(10\ ,\ 7)$ } $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 7 = \frac{-3}{4}(x - 10)$$

$4y - 28 = -3x + 30$

(t) $3x + 4y - 58 = 0$ (eq. geral) (resp)

20) Determine a equação reduzida da circunferência de diâmetro AB, sabendo que A(-6 , 1) e B(2 , 7).

(GeoJeca)

O centro da circunferência é o ponto médio de AB.

$A(-6\ ,\ 1)$

$B(2\ ,\ 7)$

$MAB(-2\ ,\ 4) \Longrightarrow C(-2\ ,\ 4)$

O raio da circunferência é a metade da distância AB.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2 - (-6))^2 + (7 - 1)^2}$$

$d_{AB} = \sqrt{100} = 10 \Longrightarrow R = 5$

$C(-2\ ,\ 4)$, $R = 5$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25$ (eq. reduzida) (resp)

21) Determine a equação reduzida da circunferência que tem centro no ponto C(6 , -2) e que passa no ponto P(4 , -5).

(GeoJeca)

A distância CP é o raio da circunferência.

$$d_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = \sqrt{(4 - 6)^2 + (-5 - (-2))^2}$$

$d_{CP} = R = \sqrt{13}$

$C(6\ ,\ -2)$, $R = \sqrt{13}$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 13$ (eq. reduzida) (resp)

22) Determine a equação normal da circunferência que passa nos pontos A(7 , 4), B(6 , -3) e D(0 , 5).

(GeoJeca)

23) Determine a equação normal da circunferência de raio 4 que tem o centro C no 1º quadrante e tangencia o eixo x e a reta (r) $y = \sqrt{3}x$.

(GeoJeca)

24) Determine a equação reduzida da circunferência que tem centro na reta (r) $x + 2 = 0$ e tangencia as retas (s) $3x - y + 9 = 0$ e (t) $3x - y - 17 = 0$.

(GeoJeca)

22) Determine a equação normal da circunferência que passa nos pontos A(7 , 4), B(6 , -3) e D(0 , 5).

(GeoJeca)

Determinação da mediatriz do segmento AB.

A(7 , 4)
B(6 , -3)
$M_{AB}(13/2\ ,\ 1/2)$

$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-3-4}{6-7} = 7$

A mediatriz é perpendicular ao segmento AB.

$m_m = -1/7$

$M_{AB}(13/2\ ,\ 1/2)$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$(y - (1/2)) = \dfrac{-1}{7}(x - (13/2))$

Mediatriz de AB
$x + 7y - 10 = 0$

Determinação da mediatriz do segmento BD.

B(6 , -3)
D(0 , 5)
$M_{BD}(3\ ,\ 1)$

$m_{BD} = \dfrac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \dfrac{5-(-3)}{0-6} = \dfrac{-4}{3}$

A mediatriz é perpendicular ao segmento AB.

$m_n = 3/4$

$M_{BD}(3\ ,\ 1)$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$(y - 1) = \dfrac{3}{4}(x - 3)$

Mediatriz de BD
$3x - 4y - 5 = 0$

O centro da circunferência é o ponto de encontro das mediatrizes.

$\begin{cases} x + 7y - 10 = 0 \\ 3x - 4y - 5 = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, tem-se C(3 , 1)

O raio da circunferência é a distância AC.

$d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-7)^2 + (1-4)^2}$

$d_{AC} = R = 5$

C(3 , 1) , R = 5

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$ (eq. reduzida)

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ (eq. normal) (resp)

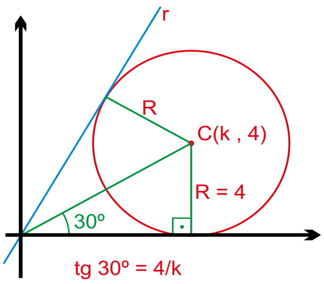
23) Determine a equação normal da circunferência de raio 4 que tem o centro C no 1º quadrante e tangencia o eixo x e a reta (r) $y = \sqrt{3}x$.

(GeoJeca)

$y = \sqrt{3}x$

$m = \text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$

$\alpha = 60°$



tg 30º = 4/k

Portanto, $k = 4\sqrt{3}$

$C(4\sqrt{3}\ ,\ 4)$

$C(4\sqrt{3}\ ,\ 4)$, R = 4

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 4\sqrt{3})^2 + (y - 4)^2 = 16$

$x^2 - 8\sqrt{3}x + 48 + y^2 - 8y + 16 - 16 = 0$

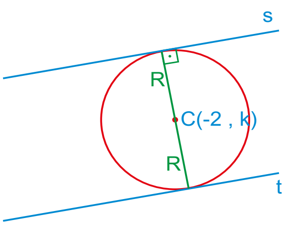
$x^2 + y^2 - 8\sqrt{3}x - 8y + 48 = 0$ (eq. normal) (resp)

24) Determine a equação reduzida da circunferência que tem centro na reta (r) $x + 2 = 0$ e tangencia as retas (s) $3x - y + 9 = 0$ e (t) $3x - y - 17 = 0$.

(GeoJeca)

Se a circunferência tem centro na reta (r) $x + 2 = 0$, então o centro tem coordendatas C(-2 , k).

Se a circunferência tangencia as retas s e t, então as distâncias entre o centro e as retas s e t é a mesma e é igual ao raio.



$d_{Cs} = d_{Ct}$

(s) $3x - y + 9 = 0$
C(-2 , k)

(t) $3x - y - 17 = 0$
C(-2 , k)

$\dfrac{|3 \cdot (-2) - 1 \cdot k + 9|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|3 \cdot (-2) - 1 \cdot k - 17|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$

$|3 \cdot (-2) - 1 \cdot k + 9| = |3 \cdot (-2) - 1 \cdot k - 17|$

$|3 - k| = |-23 - k|$

Supondo positivo

$3 - k = -23 - k$
$3 = -23$ (impossível)

Supondo negativo

$3 - k = 23 + k$
$2k = -20$
$k = -10$ (correto)

Determinação do raio da circunferência. (distância entre C e s)

(s) $3x - y + 9 = 0$
C(-2 , -10)

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \dfrac{|3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-10) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$

$d = R = \dfrac{13\sqrt{10}}{10}$

C(-2 , -10) , $R = \dfrac{13\sqrt{10}}{10}$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x + 2)^2 + (y + 10)^2 = 169/10$ (resp)

Respostas das aulas 07 e 08.

Respostas da Aula 07

01) $d = \sqrt{13}$

02) $d = (16\sqrt{37})/37$

03) $tg\,\theta = 2 + \sqrt{3}$

04) $tg\,\theta = 11/13$

05) $tg\,\theta = (\sqrt{3})/3$

06) $tg\,\theta = 1$

07) $d = (17\sqrt{65})/65$

08) $d = 5\sqrt{2}$

09) $d = (16\sqrt{13})/13$

10) $d = (9\sqrt{37})/37$

11) 105º

12) $2x - y - 7 = 0$

13) $d_{AB} = 4$

14) $y = x + 1$ (resposta d)

15) a) 2 retas   b) $x + 2y - 12 = 0$ $2x - y + 1 = 0$

16) resposta a)

17) $7x - 26y - 47 = 0$ $23x - 14y - 83 = 0$

Respostas da Aula 08

01) a) $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 25$ $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 72 = 0$
b) $(x+4)^2 + (y-7)^2 = 1$ $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 64 = 0$
c) $(x-3)^2 + (y+8)^2 = 4$ $x^2 + y^2 - 6x + 16y + 69 = 0$
d) $x^2 + (y+4)^2 = 9$ $x^2 + y^2 + 8y + 7 = 0$
e) $(x-6)^2 + y^2 = 3$ $x^2 + y^2 - 12x + 33 = 0$
f) $x^2 + y^2 = 13$ $x^2 + y^2 - 13 = 0$
g) $(x-25)^2 + (y+4)^2 = 37$ $x^2 + y^2 - 50x + 8y + 604 = 0$
h) $x^2 + (y+1)^2 = 3$ $x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0$
i) não existe circunferência com raio negativo
j) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 400$ $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 398 = 0$
k) $x^2 + (y+12)^2 = 36$ $x^2 + y^2 + 24y + 108 = 0$
l) $(x+5)^2 + (y-\sqrt{7})^2 = 43$ $x^2 + y^2 + 10x - 2\sqrt{7}y - 11 = 0$

02) a) C(5 , 2) e $R = 4$
b) C(-7 , 2) e $R = 6$
c) C(5 , -13) e $R = 8$
d) C(-10 , -8) e $R = 1$
e) C(0 , -9) e $R = \sqrt{31}$
f) C(5 , 0) e $R = 8$
g) C(0 , 0) e $R = 8$
h) C(-15 , -1) e $R = \sqrt{5}$
i) C(5 , 0) e $R = 2$
j) C(0 , 3) e $R = 8$
k) C(-1 , 0) e $R = \sqrt{23}$
l) C(0 , 0) e $R = 2\sqrt{2}$
m) C(5 , 1) e $R = \sqrt{7}$
n) C(0 , 2) e $R = 3\sqrt{3}$
o) C(3 , 0) e $R = 15$
p) C(-5 , -1) e $R = \sqrt[4]{7}$
q) C(0 , -9) e $R = 3\sqrt{3}$
r) C(-12 , 0) e $R = 20$

Respostas da Aula 08

03) a) C(6 , 1), $R = 5$ $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 25$
b) C(-2 , 4), $R = \sqrt{14}$ $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 14$
c) não existe a circunferência ($R^2 = -12$)
d) C(0 , 6), $R = 5$ $x^2 + (y-6)^2 = 25$
e) C(0 , 0), $R = 9$ $x^2 + y^2 = 81$
f) C(-1 , -5), $R = 2$ $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 4$
g) não existe a circunferência ($R^2 = -35/4$)
h) não existe a circunferência ($R^2 = -1$)
i) não é equação de circunferência (2xy ...)
j) C(-3/2 , 3), $R = 1/2$ $(x+3/2)^2 + (y-3)^2 = 1/4$
k) não existe a circunferência ($R^2 = -4$)
l) C(-1 , 2), $R = 4$ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$
m) não é equação de circunferência ($1x^2 + 3y^2$ ...)
n) não é equação de circunferência (xy ..)
o) C(1 , -2), $R = 2$ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
p) não é equação de circunferência ($+3x^2 - 3y^2$ ...)
q) não é equação de circunferência (6xy ...)
r) C(1 , -1), $R = \sqrt{7}$ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 7$

04) $w = 4\sqrt{5} - 5$

05) $(x+4)^2 + (y+7)^2 = 16$ $x^2 + y^2 + 8x + 14y + 49 = 0$

06) $(x+3)^2 + (y-7)^2 = 18$ $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 40 = 0$

07) a) C(2 , -5) $R = 3$ b) A(5 , -5)   c) B(2 , -8)

08) a) C(-3 , 4) $R = \sqrt{10}$ b) A($\sqrt{10} - 3$, 4)   B(-3 , $4 - \sqrt{10}$)

09) $w = 2$

10) $A = 2$ $B = 0$ $C = 8$ $D = -4$ $E = -62$

11) Um ponto apenas

12) 2 pontos

13) $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$

14) 3 pontos

15) nenhum ponto

16) A(-2 , $1 + \sqrt{5}$)   B(-2 , $1 - \sqrt{5}$)

17) P(-4 , -2)

18) $2x - 3y + 22 = 0$

19) $3x + 4y - 58 = 0$

20) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$

21) $(x-6)^2 + (y+2)^2 = 13$

22) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

23) $x^2 + y^2 - 8\sqrt{3}x - 8y + 48 = 0$

24) $(x+2)^2 + (y+10)^2 = 169/10$

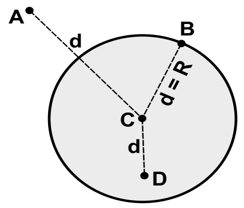
Favor comunicar eventuais erros deste trabalho através do e-mail
jecajeca@uol.com.br   Obrigado.

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

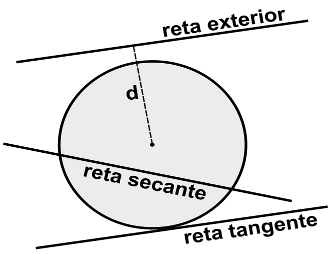
Geometria Analítica
Aula 09
Posições relativas entre ponto, reta e circunferência. Feixe de retas.

I - Posições relativas entre ponto, reta e circunferência.



A - ponto exterior
B - ponto da circunferência
D - ponto interior

método - Comparar a distância d entre o ponto e o centro da circunferência, com o raio R.
a) se $d > R$, o ponto é exterior à circunferência.
b) se $d = R$, o ponto pertence à circunferência.
c) se $d < R$, o ponto está no interior da circunferência.



1º método - Comparar a distância d entre a reta e o centro da circunferência, com o raio R.
a) se $d > R$, a reta é exterior à circunferência.
b) se $d = R$, a reta é tangente à circunferência.
c) se $d < R$, a reta é secante à circunferência.

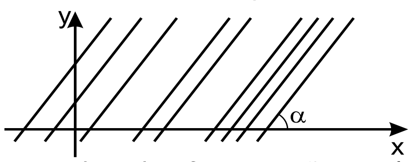
2º método - Resolver o sistema de equações, procurando as intersecções entre a reta e a circunferência.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \end{cases}$$

a) se $\Delta > 0$, a reta é secante pois tem 2 soluções.
b) se $\Delta = 0$, a reta é tangente pois tem apenas uma solução.
c) se $\Delta < 0$, a reta é exterior pois não tem nenhuma solução.

II - Feixe de retas.

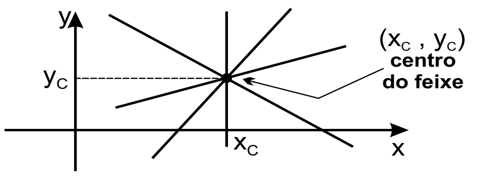
Feixe de retas paralelas.



$ax + by + k = 0$ equação geral do feixe
$k \in \mathbb{R}$

$y = mx + k'$ equação reduzida do feixe
$k' \in \mathbb{R}$

Feixe de retas concorrentes.



$y - y_C = m(x - x_C)$ equação fundamental do feixe
$m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists m$

Exercícios

01) Determine a posição de cada ponto abaixo em relação à circunferência (λ) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 36$. (GeoJeca)

a) A(2 , 3)

b) B(0 , 5)

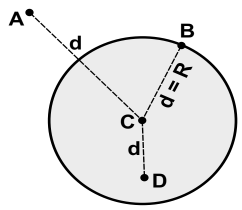
c) D(-10 , 1)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

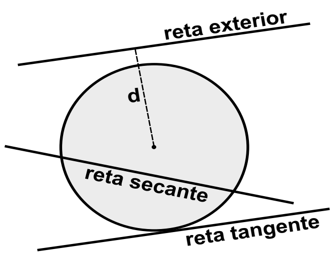
Geometria Analítica
Aula 09
Posições relativas entre ponto, reta e circunferência. Feixe de retas.

I - Posições relativas entre ponto, reta e circunferência.



A - ponto exterior
B - ponto da circunferência
D - ponto interior

método - Comparar a distância d entre o ponto e o centro da circunferência, com o raio R.
a) se $d > R$, o ponto é exterior à circunferência.
b) se $d = R$, o ponto pertence à circunferência.
c) se $d < R$, o ponto está no interior da circunferência.



1º método - Comparar a distância d entre a reta e o centro da circunferência, com o raio R.
a) se $d > R$, a reta é exterior à circunferência.
b) se $d = R$, a reta é tangente à circunferência.
c) se $d < R$, a reta é secante à circunferência.

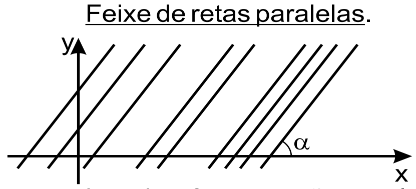
2º método - Resolver o sistema de equações, procurando as intersecções entre a reta e a circunferência.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \end{cases}$$

a) se $\Delta > 0$, a reta é secante pois tem 2 soluções.
b) se $\Delta = 0$, a reta é tangente pois tem apenas uma solução.
c) se $\Delta < 0$, a reta é exterior pois não tem nenhuma solução.

II - Feixe de retas.

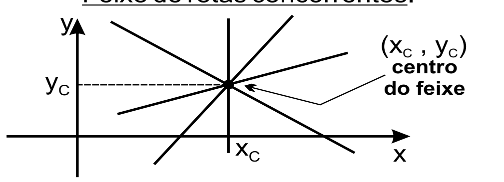
Feixe de retas paralelas.



$ax + by + k = 0$ equação geral do feixe
$k \in \mathbb{R}$

$y = mx + k'$ equação reduzida do feixe
$k' \in \mathbb{R}$

Feixe de retas concorrentes.



$y - y_C = m(x - x_C)$ equação fundamental do feixe
$m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists\, m$

Exercícios

01) Determine a posição de cada ponto abaixo em relação à circunferência (λ) $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 36$. (GeoJeca)

a) A(2 , 3)

Centro e raio da circunferência
C(-4 , 1) , R = 6

Determinação da distância AC

$d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} =$

$= \sqrt{(-4 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{40}$

Se $d_{AC} > R$, então o ponto A é um ponto exterior à circunferência. (resp)

b) B(0 , 5)

Centro e raio da circunferência
C(-4 , 1) , R = 6

Determinação da distância BC

$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =$

$= \sqrt{(-4 - 0)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{32}$

Se $d_{BC} < R$, então o ponto B é um ponto interior à circunferência. (resp)

c) D(-10 , 1)

Centro e raio da circunferência
C(-4 , 1) , R = 6

Determinação da distância DC

$d_{DC} = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} =$

$= \sqrt{(-4 - (-10))^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{36} = 6$

Se $d_{DC} = R$, então o ponto D pertence à circunferência. (resp)

02) Dados os pontos A(1 , -2) e B(-1 , 3), verifique as posições de A e de B em relação à circunferência $(\lambda)\ 2x^2 + 2y^2 - 8x + 16y - 2 = 0$. (GeoJeca)

03) Determine, se existirem, os pontos de intersecção entre a circunferência $(\lambda)\ x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$ e a reta (r) $3x - y - 3 = 0$. (GeoJeca)

04) Determine os pontos de intersecção entre a circunferência (λ) $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0}$ e a reta (r) $\mathbf{x - 5y - 11 = 0}$, se existirem. (GeoJeca)

05) Determine os pontos de intersecção entre a circunferência (λ) $\mathbf{x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0}$ e a reta (r) $\mathbf{2x - y = 0}$, se existirem. (GeoJeca)

02) Dados os pontos A(1 , -2) e B(-1 , 3), verifique as posições de A e de B em relação à circunferência (λ) $2x^2 + 2y^2 - 8x + 16y - 2 = 0$. (GeoJeca)

Dividindo por 2: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 1 = 0$

$-2x_C = -4$
$x_C = 2$
$-2y_C = 8$
$y_C = -4$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = -1$
$4 + 16 + 1 = R^2$
$R^2 = 21$
$R = \sqrt{21}$

Centro e raio da circunferência: C(2 , -4) , $R = \sqrt{21}$

Determinação da distância AC

$d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} =$

$= \sqrt{(2 - 1)^2 + (-4 - (-2))^2} = \sqrt{5}$

Se $d_{AC} < R$, então o ponto A é um ponto interior à circunferência. (resp)

Determinação da distância BC

$d_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} =$

$= \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-4 - 3)^2} = \sqrt{58}$

Se $d_{BC} > R$, então o ponto B é um ponto exterior à circunferência. (resp)

03) Determine, se existirem, os pontos de intersecção entre a circunferência (λ) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0$ e a reta (r) $3x - y - 3 = 0$. (GeoJeca)

$$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 + 2x - 8y - 3 = 0 \\ (r)\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

Isolando y em r: $y = 3x - 3$

Substituindo em λ: $x^2 + (3x - 3)^2 + 2x - 8(3x - 3) - 3 = 0$

$x^2 + 9x^2 - 18x + 9 + 2x - 24x + 24 - 3 = 0$
$10x^2 - 40x + 30 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \begin{cases} x_A = 3 \\ x_B = 1 \end{cases}$

Mas $y = 3x - 3$

Se $x_A = 3 \longrightarrow y_A = 3 \cdot 3 - 3 = 6 \longrightarrow$ A(3 , 6) (resp)

Se $x_B = 1 \longrightarrow y_B = 3 \cdot 1 - 3 = 0 \longrightarrow$ B(1 , 0) (resp)

04) Determine os pontos de intersecção entre a circunferência (λ) $\mathbf{x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0}$ e a reta (r) $\mathbf{x - 5y - 11 = 0}$, se existirem. (GeoJeca)

$$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \\ (r)\ x - 5y - 11 = 0 \end{cases}$$

Isolando x em r: $x = 5y + 11$

Substituindo em λ: $(5y + 11)^2 + y^2 - 6(5y + 11) - 2y - 3 = 0$

$25y^2 + 110y + 121 + y^2 - 30y - 66 - 2y - 3 = 0$
$26y^2 + 78y + 52 = 0$

$y^2 + 3y + 2 = 0 \quad \begin{cases} y_A = -2 \\ y_B = -1 \end{cases}$

Mas $x = 5y + 11$

Se $y_A = -2 \longrightarrow x_A = 5 \cdot (-2) + 11 = 1 \longrightarrow$ A(1 , -2) (resp)

Se $y_B = -1 \longrightarrow x_B = 5 \cdot (-1) + 11 = 6 \longrightarrow$ B(6 , -1) (resp)

05) Determine os pontos de intersecção entre a circunferência (λ) $\mathbf{x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0}$ e a reta (r) $\mathbf{2x - y = 0}$, se existirem. (GeoJeca)

$$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0 \\ (r)\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Isolando y em r: $y = 2x$

Substituindo em λ: $x^2 + (2x)^2 - 10x + 21 = 0$

$x^2 + 4x^2 - 10x + 21 = 0$

$5x^2 - 10x + 21 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)2 - 4 \cdot 5 \cdot 21 = 100 - 420 = -320$

D = -320 < 0 Não tem solução

Portanto, a reta é exterior à circunferência. (resp)

06) Determine a equação geral do feixe de retas paralelas à reta (r) $x + 4y - 3 = 0$.
(GeoJeca)

07) Determine a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta (r) $y = -3x + 5$.
(GeoJeca)

08) Determine a equação geral do feixe de retas paralelas à reta (r) $x - 5 = 0$.
(GeoJeca)

09) Determine a equação fundamental do feixe de retas concorrentes na origem do sistema cartesiano.
(GeoJeca)

10) Determine a equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(-4 , 1).
(GeoJeca)

11) Determine a equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(7 , -3).
(GeoJeca)

12) Determine a equação geral da reta do feixe de retas concorrente $(y + 3) = m(x - 5)$ que é paralela à reta (r) $2x + 6y - 1 = 0$. (m pertence ao conjunto dos números reais)
(GeoJeca)

13) Determine a equação geral do feixe de retas concorrentes que contém as retas (r) $5x - 2y + 7 = 0$ e (s) $y + 4 = 0$
(GeoJeca)

14) Determine a equação geral da reta que pertence ao feixe de retas paralelas $5x - 2y + k = 0$ e que passa pelo ponto P(-1 , 4). (k pertence ao conjunto dos números reais)
(GeoJeca)

15) Determine a equação fundamental do feixe de retas concorrentes que contém as retas (r) $3x - y + 8 = 0$ e (s) $x + y - 4 = 0$.
(GeoJeca)

06) Determine a equação geral do feixe de retas paralelas à reta (r) $x + 4y - 3 = 0$. (GeoJeca)

(r) $x + 4y - 3 = 0$ (eq. geral da reta r)

$x + 4y + k = 0$
$k \in \mathbb{R}$ (eq. geral do feixe de retas paralelas a r)

07) Determine a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta (r) $y = -3x + 5$. (GeoJeca)

(r) $y = -3x + 5$ (eq. reduzida da reta r)

$y = -3x + k$
$k \in \mathbb{R}$ (eq. reduzida do feixe de retas paralelas a r)

08) Determine a equação geral do feixe de retas paralelas à reta (r) $x - 5 = 0$. (GeoJeca)

(r) $x - 5 = 0$ (eq. geral da reta r)

$x + k = 0$
$k \in \mathbb{R}$ (eq. geral do feixe de retas paralelas a r)

09) Determine a equação fundamental do feixe de retas concorrentes na origem do sistema cartesiano. (GeoJeca)

$\left.\begin{array}{l} m \in \mathbb{R} \\ P(0\ ,\ 0) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 0 = m(x - 0)$
$m \in \mathbb{R}$ (eq. fundamental do feixe de retas concorrentes na origem do sistema cartesiano.

10) Determine a equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(-4 , 1). (GeoJeca)

$\left.\begin{array}{l} m \in \mathbb{R} \\ P(-4\ ,\ 1) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = m(x - (-4))$
$y - 1 = mx + 4m$

$mx - y + 4m + 1 = 0$
($m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists$ m) (eq. geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(-4 , 1).

11) Determine a equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(7 , -3). (GeoJeca)

$\left.\begin{array}{l} m \in \mathbb{R} \\ P(7\ ,\ -3) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y + 3 = m(x - 7)$
$y + 3 = mx - 7m$

$mx - y - 7m - 3 = 0$
($m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists$ m) (eq. geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(7 , -3).

12) Determine a equação geral da reta do feixe de retas concorrente $(y + 3) = m(x - 5)$ que é paralela à reta (r) $2x + 6y - 1 = 0$. (m pertence ao conjunto dos números reais) (GeoJeca)

Determinação do coeficiente angular de r.
(r) $2x + 6y - 1 = 0 \longrightarrow 6y = -2x + 1 \longrightarrow y = \frac{-2x}{6} + \frac{1}{6}$

$y = \frac{-x}{3} + \frac{1}{6}$ $\left\{\begin{array}{l} m_r = -1/3 \\ q_r = 1/6 \end{array}\right.$

Se a reta do feixe é paralela à reta r, então tem o mesmo coeficiente angular de r.

$y + 3 = m(x - 5)$ (feixe)

$y + 3 = \frac{-1}{3}(x - 5) \longrightarrow x + 3y + 4 = 0$ (resp)

13) Determine a equação geral do feixe de retas concorrentes que contém as retas (r) $5x - 2y + 7 = 0$ e (s) $y + 4 = 0$ (GeoJeca)

Se as retas r e s pertencem ao feixe de retas concorrentes, então o ponto de intersecção delas é o centro do feixe de retas.

$\left\{\begin{array}{l} (r)\ 5x - 2y + 7 = 0 \\ (s)\ y + 4 = 0 \end{array}\right.$

Resolvendo o sistema de equações, tem-se:
C(-3 , -4) (centro do feixe)

$\left.\begin{array}{l} m \\ C(-3\ ,\ -4) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (-4) = m(x - (-3))$
$y + 4 = m(x + 3)$
$y + 4 = mx + 3m$

$mx - y + 3m - 4 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists$m)
(eq. geral do feixe de retas concorrentes que contém r e s.)

14) Determine a equação geral da reta que pertence ao feixe de retas paralelas $5x - 2y + k = 0$ e que passa pelo ponto P(-1 , 4). (k pertence ao conjunto dos números reais) (GeoJeca)

Se o ponto P(-1 , 4) pertence a uma das retas do feixe de retas paralelas, então as coordenadas de P satisfazem a equação do feixe.

$5x - 2y + k = 0$ (eq. do feixe)
P(-1 , 4)

$5 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 + k = 0$
$-5 - 8 + k = 0$
$k = 13$

Portanto, a reta do feixe que passa por P(-1 , 4) , tem equação geral
$5x - 2y + 13 = 0$ (resp)

15) Determine a equação fundamental do feixe de retas concorrentes que contém as retas (r) $3x - y + 8 = 0$ e (s) $x + y - 4 = 0$. (GeoJeca)

Se as retas r e s pertencem ao feixe de retas concorrentes, então o ponto de intersecção delas é o centro do feixe de retas.

$\left\{\begin{array}{l} (r)\ 3x - y + 8 = 0 \\ (s)\ x + y - 4 = 0 \end{array}\right.$

Resolvendo o sistema de equações, tem-se:
C(-1 , 5) (centro do feixe)

$\left.\begin{array}{l} m \\ C(-1\ ,\ 5) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 5 = m(x - (-1))$

$y - 5 = m(x + 1)$
($m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists$m) Equação fundamental do feixe de retas concorrentes que contém as retas r e s.

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 09.

16) Dados os pontos A(1 , 5) e B(-2 , -1), determine as posições de A e de B em relação à circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$. (GeoJeca)

17) Dados os pontos A(6 , 1) e B(5 , 7), determine as posições de A e de B em relação à circunferência $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 16$ (GeoJeca)

18) Determine o valor de k para que o ponto P(2 , k) seja um ponto exterior à circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ (GeoJeca)

19) Determine o valor de k para que o ponto P(k , -1) seja um ponto interior à circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ (GeoJeca)

20) Determine a posição da reta (r) $3x + y - 6 = 0$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. (GeoJeca)

21) Determine a posição da reta (r) $x - y + 4 = 0$ em relação à circunferência $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$. (GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Exercícios complementares da Aula 09.

16) Dados os pontos A(1 , 5) e B(-2 , -1), determine as posições de A e de B em relação à circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 19 = 0$. (GeoJeca)

$-2x_C = -8$
$x_C = 4$
$-2y_C = 2$
$y_C = -1$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = -19$
$16 + 1 + 19 = R^2$
$R^2 = 36$
$R = 6$

Centro e raio da circunferência: C(4 , -1) , R = 6

Distância entre os pontos A e C: $d_{AC} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Se $d_{AC} > R$, então o ponto A é exterior à circunferência.

Distância entre os pontos B e C: $d_{BC} = 6$

Se $d_{AC} = R$, então o ponto B pertence à circunferência.

17) Dados os pontos A(6 , 1) e B(5 , 7), determine as posições de A e de B em relação à circunferência $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 16$ (GeoJeca)

Centro e raio da circunferência: C(8 , 3) , R = 4

Distância entre os pontos A e C: $d_{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Se $d_{AC} < R$, então o ponto A é interior à circunferência.

Distância entre os pontos B e C: $d_{BC} = 5$

Se $d_{AC} > R$, então o ponto B é exterior à circunferência.

18) Determine o valor de k para que o ponto P(2 , k) seja um ponto exterior à circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$ (GeoJeca)

$-2x_C = -8$
$x_C = 4$
$-2y_C = 0$
$y_C = 0$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 3$
$16 + 0 - 3 = R^2$
$R^2 = 13$
$R = \sqrt{13}$

Centro e raio da circunferência: C(4 , 0) , $R = \sqrt{13}$

$d_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (k - 0)^2} = \sqrt{4 + k^2}$

Se P é um ponto exterior à circunferência, então $d_{CP} > R$

Portanto $\sqrt{4 + k^2} > \sqrt{13} \longrightarrow 4 + k^2 > 13$

$k^2 > 9 \longrightarrow k < -3$ ou $k > 3$ (resp)

19) Determine o valor de k para que o ponto P(k , -1) seja um ponto interior à circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ (GeoJeca)

$-2x_C = -6$
$x_C = 3$
$-2y_C = 4$
$y_C = -2$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = -3$
$9 + 4 + 3 = R^2$
$R^2 = 16$
$R = 4$

Centro e raio da circunferência: C(3 , -2) , R = 4

$d_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = \sqrt{(k - 3)^2 + (-1 - (-2))^2}$

$d_{CP} = \sqrt{k^2 - 6k + 10}$

Se P é um ponto interior à circunferência, então $d_{CP} < R$

Portanto, $\sqrt{k^2 - 6k + 10} < 4 \longrightarrow k^2 - 6k + 10 < 16$

Resolvendo: $k^2 - 6k - 6 = 0$, tem-se $3 - \sqrt{15} < k < 3 + \sqrt{15}$

20) Determine a posição da reta (r) $3x + y - 6 = 0$ em relação à circunferência $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$. (GeoJeca)

$-2x_C = 2$
$x_C = -1$
$-2y_C = -8$
$y_C = 4$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = -8$
$1 + 16 + 8 = R^2$
$R^2 = 25$
$R = 5$

Centro e raio da circunferência: C(-1 , 4) , R = 5

Distância entre o centro da circunferência e a reta r. (1º método)

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y - 6 = 0 \\ C(-1 \ , \ 4) \end{array}\right\} \quad d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{Cr} = \frac{|3 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Se $d_{Cr} < R$, então a reta é secante à circunferência. (resp)

21) Determine a posição da reta (r) $x - y + 4 = 0$ em relação à circunferência $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 9$. (GeoJeca)

Centro e raio da circunferência: C(5 , -1) , R = 3

Distância entre o centro da circunferência e a reta r. (1º método)

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 4 = 0 \\ C(5 \ , \ -1) \end{array}\right\} \quad d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d_{Cr} = \frac{|1 \cdot 5 - 1 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

Se $d_{Cr} > R$, então a reta é exterior à circunferência. (resp)

22) Determine a posição da reta $7x + y - 18 = 0$ em relação à circunferência (λ) $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$ e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

(GeoJeca)

23) Determine a posição da reta $2x + y + 2 = 0$ em relação à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 9 = 0$ e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

(GeoJeca)

24) Determinar a posição da reta $3x + y - 11 = 0$ em relação à circunferência (λ) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$ e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

(GeoJeca)

25) Determinar a posição da reta $x + 7y - 6 = 0$ em relação à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

(GeoJeca)

22) Determine a posição da reta $7x + y - 18 = 0$ em relação à circunferência (λ) $x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$ e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

(GeoJeca)

$$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0 \\ (r)\ 7x + y - 18 = 0 \end{cases}$$

Isolando y em r, tem-se: $y = 18 - 7x$

Substituindo em λ, tem-se:

$x^2 + (18 - 7x)^2 + 2x - 24 = 0$
$x^2 + 324 - 252x + 49x^2 + 2x - 24 = 0$
$50x^2 - 250x + 300 = 0$
Dividindo por 50, tem-se:

$x^2 - 5x + 6 = 0$ → $x_A = 3$, $x_B = 2$

Mas $y = 18 - 7x$

Se $x_A = 3 \longrightarrow y_A = 18 - 7 . 3 = -3 \longrightarrow A(3\ ,\ -3)$ (resp)

Se $x_B = 2 \longrightarrow y_B = 18 - 7 . 2 = 4 \longrightarrow B(2\ ,\ 4)$ (resp)

Portanto, a reta é secante à circunferência. (resp)

23) Determine a posição da reta $2x + y + 2 = 0$ em relação à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 9 = 0$ e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

(GeoJeca)

$$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 - 10x + 4y + 9 = 0 \\ (r)\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

Isolando y em r, tem-se: $y = -2x - 2$

Substituindo em λ, tem-se:

$x^2 + (-2x - 2)^2 - 10x + 4(-2x - 2) + 9 = 0$
$x^2 + 4x^2 + 8x + 4 - 10x - 8x - 8 + 9 = 0$
$5x^2 - 10x + 5 = 0$
Dividindo por 5, tem-se:

$x^2 - 2x + 1 = 0$ → $x_A = 1$, $x_B = 1$

Existe um único ponto de intersecção.
A reta é tangente.

Mas $y = -2x - 2$

Se $x_A = 1 \longrightarrow y_A = -2 . 1 - 2 = -4 \longrightarrow A(1\ ,\ -4)$ (resp)

24) Determinar a posição da reta $3x + y - 11 = 0$ em relação à circunferência (λ) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$ e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

(GeoJeca)

$$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0 \\ (r)\ 3x + y - 11 = 0 \end{cases}$$

Isolando y em r, tem-se: $y = 11 - 3x$

Substituindo em λ, tem-se:

$x^2 + (11 - 3x)^2 + 2x - 8(11 - 3x) + 7 = 0$
$x^2 + 121 - 66x + 9x^2 + 2x - 88 + 24x + 7 = 0$
$10x^2 - 40x + 40 = 0$
Dividindo por 10, tem-se:

$x^2 - 4x + 4 = 0$ → $x_A = 2$, $x_B = 2$

Existe um único ponto de intersecção.
A reta é tangente.

Mas $y = 11 - 3x$

Se $x_A = 2 \longrightarrow y_A = 11 - 3 . 2 = 5 \longrightarrow A(2\ ,\ 5)$ (resp)

25) Determinar a posição da reta $x + 7y - 6 = 0$ em relação à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ e as coordenadas dos pontos de intersecção, se existirem.

(GeoJeca)

$$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \\ (r)\ x + 7y - 6 = 0 \end{cases}$$

Isolando x em r, tem-se: $x = 6 - 7y$

Substituindo em λ, tem-se:

$(6 - 7y)^2 + y^2 - 4(6 - 7y) + 6y - 12 = 0$
$36 - 84y + 49y^2 + y^2 - 24 + 28y + 6y - 12 = 0$
$50y^2 - 50y = 0$
Dividindo por 50, tem-se:
$y^2 - y = 0$
$y(y - 1) = 0$ → $y_A = 0$, $y_B = 1$

Mas $x = 6 - 7y$

Se $y_A = 0 \longrightarrow x_A = 6 - 7 . 0 = 6 \longrightarrow A(6\ ,\ 0)$ (resp)

Se $y_B = 1 \longrightarrow x_B = 6 - 7 . 1 = -1 \longrightarrow B(-1\ ,\ 1)$ (resp)

Portanto, a reta r é secante à circunferência. (resp)

26) Determine a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta (r) $2x - 5y + 1 = 0$. (GeoJeca)

27) Determine a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta (r) $y + 4 = 0$. (GeoJeca)

28) Determine a equação fundamental do feixe de retas concorrentes no ponto P(-2 , 5). (GeoJeca)

29) Determine o coeficiente angular das retas que pertencem ao feixe de retas paralelas representado pela equação $3x + 7y + k = 0$. (GeoJeca)

30) Determine a equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(7 , -3). (GeoJeca)

31) Determine o centro do feixe de retas concorrentes representado pela equação $mx - y - m - 5 = 0$. ($m \in R$) (GeoJeca)

32) Determinar a equação geral do feixe de retas concorrentes que contém as retas (r) $x + y - 3 = 0$ e (s) $2x - y + 9 = 0$. (GeoJeca)

33) Determine k para que as retas (r) $x + 2y - 7 = 0$, (s) $y = x + 2$ e (t) $8x - 2y + k = 0$ pertençam ao mesmo feixe de retas concorrentes. (GeoJeca)

34) Sendo (r) $3x + y = 0$ e (s) $x - y - 4 = 0$, duas das infinitas retas de um feixe de retas concorrentes, determine a equação geral da reta que pertence a esse feixe e faz um ângulo de 135º com o semieixo positivo das abscissas. (GeoJeca)

35) Determine as equações gerais das retas que são paralelas à reta (r) $2y + 6 = 0$ e que são tangentes à circunferência (λ) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$. (GeoJeca)

26) Determine a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta (r) $2x - 5y + 1 = 0$. (GeoJeca)

(r) $2x - 5y + 1 = 0$
$5y = 2x + 1$

$y = \frac{2x}{5} + \frac{1}{5}$ (eq. reduzida da reta r)

$y = \frac{2x}{5} + k$, $k \in \mathbb{R}$

(eq. reduzida do feixe de retas paralelas à reta r) (resp)

27) Determine a equação reduzida do feixe de retas paralelas à reta (r) $y + 4 = 0$. (GeoJeca)

(r) $y + 4 = 0$
$y = -4$ (eq. reduzida da reta r)

$y = k$, $k \in \mathbb{R}$

(eq. reduzida do feixe de retas paralelas à reta r) (resp)

28) Determine a equação fundamental do feixe de retas concorrentes no ponto P(-2 , 5). (GeoJeca)

$\left.\begin{array}{l} m \\ P(-2\ ,\ 5) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 5 = m(x - (-2))$

$y - 5 = m(x + 2)$, $m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists m$

(eq. fundamental do feixe de retas concorrentes no ponto P(-4 , 1).

29) Determine o coeficiente angular das retas que pertencem ao feixe de retas paralelas representado pela equação $3x + 7y + k = 0$. (GeoJeca)

$3x + 7y + k = 0$
$7y = -3x - k$

$y = \frac{-3x}{7} - \frac{k}{7}$

Pertencem a esse feixe de retas paralelas todas as retas que têm coeficiente angular -3/7. (resp)

30) Determine a equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(7 , -3). (GeoJeca)

$\left.\begin{array}{l} m \\ P(7\ ,\ -3) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - (-3) = m(x - 7)$
$y + 3 = m(x - 7)$
$y + 3 = mx - 7m$

$mx - y - 7m - 3 = 0$
($m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists m$)

Eq. geral do feixe de retas concorrentes no ponto P(7 , -3).

31) Determine o centro do feixe de retas concorrentes representado pela equação $mx - y - m - 5 = 0$. ($m \in R$) (GeoJeca)

Para m = 1 , tem-se: $1.x - y - 1 - 5 = 0$
Portanto: (r) $x - y - 6 = 0$ é uma reta do feixe.
Para m = 2 , tem-se: $2.x - y - 2 - 5 = 0$
Portanto: (s) $2x - y - 7 = 0$ é uma reta do feixe.
O centro do feixe é o ponto de intersecção das retas r e s.
(r) $x - y - 6 = 0$
(s) $2x - y - 7 = 0$
Resolvendo o sistema, tem-se: C(1 , -5) (centro do feixe) (resp)

32) Determinar a equação geral do feixe de retas concorrentes que contém as retas (r) $x + y - 3 = 0$ e (s) $2x - y + 9 = 0$. (GeoJeca)

Se o feixe de retas concorre com as retas r e s, então o centro do feixe de retas concorrentes é o ponto de intersecção das retas r e s.

$\begin{cases} (r)\ x + y - 3 = 0 \\ (s)\ 2x - y + 9 = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, tem-se:
C(-2 , 5) - centro do feixe

$\left.\begin{array}{l} m \\ C(-2\ ,\ 5) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 5 = m(x - (-2))$
$y - 5 = mx + 2m$

$mx - y + 2m + 5 = 0$
($m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists m$)

Eq. geral do feixe de retas concorrentes que tem centro C(-2 , 5) e contém as retas r e s.

33) Determine k para que as retas (r) $x + 2y - 7 = 0$, (s) $y = x + 2$ e (t) $8x - 2y + k = 0$ pertençam ao mesmo feixe de retas concorrentes. (GeoJeca)

Se as retas r, s e t pertencem ao mesmo feixede retas concorrentes, então a reta t passa pelo ponto de intersecção das retas r e s.

$\begin{cases} (r)\ x + 2y - 7 = 0 \\ (s)\ y = x + 2 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, tem-se:
C(1 , 3) - centro do feixe

O ponto C(1 , 3) pertence à reta (t) $8x - 2y + k = 0$

$8 . 1 - 2 . 3 + k = 0 \longrightarrow k = -2$ (resp)

34) Sendo (r) $3x + y = 0$ e (s) $x - y - 4 = 0$, duas das infinitas retas de um feixe de retas concorrentes, determine a equação geral da reta t que pertence a esse feixe e faz um ângulo de 135° com o semieixo positivo das abscissas. (GeoJeca)

O centro do feixe de retas concorrentes é o ponto de intersecção das retas r e s.

$\begin{cases} (r)\ 3x + y = 0 \\ (s)\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, tem-se:
C(1 , -3) - centro do feixe

$\left.\begin{array}{l} m_t = \text{tg } 135° = -1 \\ C(1\ ,\ -3) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - (-3) = -1(x - 1)$
$y + 3 = -x + 1$

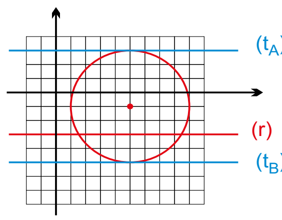
(t) $x + y + 2 = 0$ (eq. geral da reta t) (resp)

35) Determine as equações gerais das retas que são paralelas à reta (r) $2y + 6 = 0$ e que são tangentes à circunferência (λ) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 16$. (GeoJeca)

Centro e raio da circunferência: C(5 , -1), R = 4.

Pela equação, sabe-se que a reta r é paralela ao eixo x.

(r) $2y + 6 = 0 \longrightarrow y + 3 = 0 \longrightarrow y = -3$



(t_A) $y - 3 = 0$ (resp)
(r) $2y + 6 = 0$
(t_B) $y + 5 = 0$ (resp)

36) Determinar as equações gerais das retas que passam pelo ponto P(2 , 10) e são tangentes à circunferência (λ) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 5$, se existirem.

(GeoJeca)

37) Determinar as equações gerais das retas que passam pelo ponto P(4 , -1) e são tangentes à circunferência $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$, se existirem.

(GeoJeca)

36) Determinar as equações gerais das retas que passam pelo ponto P(2 , 10) e são tangentes à circunferência (λ) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 5$, se existirem.

(GeoJeca)

Centro e raio da circunferência
C(-3 , 5) , $R = \sqrt{5}$

Verificar a posição do ponto em relação à circunferência.

P(2 , 10)
C(-3 , 5)

$d_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$

$d_{CP} = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (10 - 5)^2}$

$d_{CP} = 5\sqrt{2}$

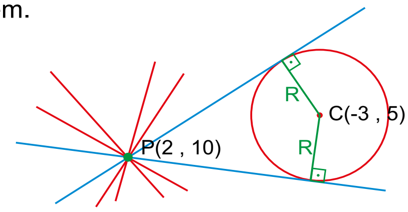
$d_{CP} > R$
Portanto, P é exterior a λ.

Eq. do feixe de retas concorrentes em P(2 , 10)

$\left.\begin{array}{l} m \\ P(2\ ,\ 10) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - 10 = m(x - 2)$
$y - 10 = mx - 2m$

$mx - y - 2m + 10 = 0$

Eq. geral do feixe de retas concorrentes em P(2 , 10).



$\left.\begin{array}{l} mx - y - 2m + 10 = 0 \\ C(-3\ ,\ 5) \\ d = R = \sqrt{5} \end{array}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\sqrt{5} = \dfrac{|m\ .\ (-3) - 1\ .\ 5 - 2m + 10|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$

$\sqrt{5}\ .\sqrt{m^2 + (-1)^2} = |5 - 5m|$

Elevando os dois termos ao quadrado para eliminar as raízes, tem-se

$5(m^2 + 1) = 25 - 50m + 25m^2$
$5m^2 + 5 = 25 - 50m + 25m^2$
$20m^2 - 50m + 20 = 0$
Dividindo por 10, tem-se

$2m^2 - 5m + 2 = 0$

$m_A = 2$

$m_B = 1/2$

Impor que as duas retas tangentes pertencem ao feixe de retas concorrentes com centro em P(2 , 10) e distam $R = \sqrt{5}$ do centro C(-3 , 5) da circunferência.

Equações das retas tangentes.
Para $m_A = 2$:

$mx - y - 2m + 10 = 0$

$2x - y - 2\ .\ 2 + 10 = 0$

(t_A) $2x - y + 6 = 0$ (1ª tangente)

Para $m_B = 1/2$:

$(1/2)x - y - 2\ .\ (1/2) + 10 = 0$

$(1/2)x - y + 9 = 0$

Multiplicando todos os termos por 2 , tem-se:

(t_B) $x - 2y + 18 = 0$ (2ª tangente)

37) Determinar as equações gerais das retas que passam pelo ponto P(4 , -1) e são tangentes à circunferência $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 10$, se existirem.

(GeoJeca)

Centro e raio da circunferência
C(-1 , 4) , $R = \sqrt{10}$

Verificar a posição do ponto em relação à circunferência.

P(4 , -1)
C(-1 , 4)

$d_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$

$d_{CP} = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (-1 - 4)^2}$

$d_{CP} = 5\sqrt{2}$

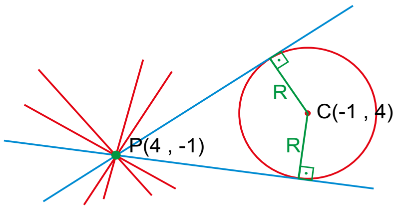
$d_{CP} > R$
Portanto, P é exterior a λ.

Eq. do feixe de retas concorrentes em P(4 , -1)

$\left.\begin{array}{l} m \\ P(4\ ,\ -1) \end{array}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - (-1) = m(x - 4)$
$y + 1 = mx - 4m$

$mx - y - 4m - 1 = 0$

Eq. geral do feixe de retas concorrentes em P(4 , -1).



$\left.\begin{array}{l} mx - y - 4m - 1 = 0 \\ C(-1\ ,\ 4) \\ d = R = \sqrt{10} \end{array}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\sqrt{10} = \dfrac{|m\ .\ (-1) - 1\ .\ 4 - 4m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$

$\sqrt{10}\ .\sqrt{m^2 + (-1)^2} = |-5 - 5m|$

Elevando os dois termos ao quadrado para eliminar as raízes, tem-se

$10(m^2 + 1) = 25 + 50m + 25m^2$
$10m^2 + 10 = 25 + 50m + 25m^2$
$15m^2 + 50m + 15 = 0$
Dividindo por 5, tem-se

$3m^2 + 10m + 3 = 0$

$m_A = -3$

$m_B = -1/3$

Impor que as duas retas tangentes pertencem ao feixe de retas concorrentes com centro em P(4 , -1) e distam $R = \sqrt{10}$ do centro C(-1 , 4) da circunferência.

Equações das retas tangentes.
Para $m_A = -3$:

$mx - y - 4m - 1 = 0$

$-3x - y - 4\ .\ (-3) - 1 = 0$

(t_A) $3x + y - 11 = 0$ (1ª tangente)

Para $m_B = -1/3$:

$(-1/3)x - y - 4\ .\ (-1/3) - 1 = 0$

$(-1/3)x - y + 1/3 = 0$

Multiplicando todos os termos por (-1/3) , tem-se:

(t_B) $x + 3y - 1 = 0$ (2ª tangente)

38) Dada a reta (r) $x + 2y + b = 0$, determine os valores de b sabendo que r é uma reta exterior à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 80 = 0$.

39) Dada a reta (r) $y = 5x + k$, determine os valores de k sabendo que r é uma reta secante à circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 10 = 0$.

38) Dada a reta (r) $x + 2y + b = 0$, determine os valores de b sabendo que r é uma reta exterior à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 80 = 0$.

$-2x_C = -16$
$x_C = 8$
$-2y_C = -12$
$y_C = 6$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 80$
$64 + 36 - 80 = R^2$
$R^2 = 20$
$R = \sqrt{20}$

Centro e raio da circunferência:
$C(8\ ,\ 6)$, $R = \sqrt{20}$

(r) $x + 2y + b = 0$
$2y = -x - b$

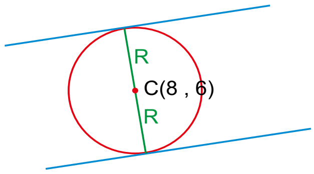
$y = \frac{-x}{2} - \frac{b}{2}$ $\begin{cases} m_r = -1/2 \\ q_r = -b/2 \end{cases}$

Conforme varia o valor de b, obtém-se retas paralelas a r, com coeficientes lineares diferentes.
Portanto, as retas procuradas pertencem ao feixe de retas paralelas cujo coeficiente angular é -1/2.

Eq. geral do feixe de retas paralelas a r.

(r) $x + 2y + b = 0$ (reta r)

$x + 2y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$
(Equação do feixe de retas paralelas a r)



Determinar os valores de k supondo que as retas sejam tangentes a λ.
Para tal, impor que as duas retas procuradas pertencem ao feixe $x + 2y + k = 0$ e a distância delas ao centro $C(8\ ,\ 6)$ seja igual ao raio $R = \sqrt{20}$.

Conhecendo esses valores, determina-se o conjunto de valores que b pode assumir para que as retas sejam exteriores a λ.

$\left.\begin{array}{l} x + 2y + k = 0 \\ C(8\ ,\ 6) \\ d = R = \sqrt{20} \end{array}\right\}$ $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\sqrt{20} = \frac{|1 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + k|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$

$\sqrt{20} = \frac{|20 + k|}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = |20 + k|$

$10 = |20 + k|$

Supondo positivo

$10 = 20 + k \implies k = -10$

Supondo negativo

$-10 = 20 + k \implies k = -30$

$k = -10$
ou
$k = -30$
essas retas são tangentes

Portanto, se as retas são exteriores à circunferência λ, então

$b < -30$ ou $b > -10$ (resp)

39) Dada a reta (r) $y = -3x + k$, determine os valores de k sabendo que r é uma reta secante à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 16 = 0$.

Observação.
Este exercício é semelhante ao exercício anterior e pode ser resolvido da mesma maneira.
Como ilustração, a resolução segue outra imposição.

Impor que as retas procuradas sejam secantes à circunferência λ e portanto a tocam em dois pontos distintos.
Portanto, o discriminante da equação de 2º grau tem que ser positivo.

$\begin{cases} (\lambda)\ x^2 + y^2 - 2x - 10y + 16 = 0 \\ (r)\ y = -3x + k \end{cases}$

Substituindo y em λ, tem-se

$x^2 + (k - 3x)^2 - 2x - 10(k - 3x) + 16 = 0$

$x^2 + k^2 - 6kx + 9x^2 - 2x - 10k + 30x + 16 = 0$

$10x^2 + (28 - 6k)x + k^2 - 10k + 16 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (28 - 6k)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (k^2 - 10k + 16)$
$\Delta = 784 - 336k + 36k^2 - 40k^2 + 400k - 640$
$\Delta = -4k^2 + 64k + 144$

$\Delta = -4k^2 + 64k + 144$

Mas, se as retas são secantes, então tem 2 intersecções.
Portanto, $D > 0$.

Para analisar o sinal do discriminante, iguala-se a zero, e determina-se o intervalo onde Δ é positivo.

Novamente, tem-se uma equação do 2º grau (na incógnita k)

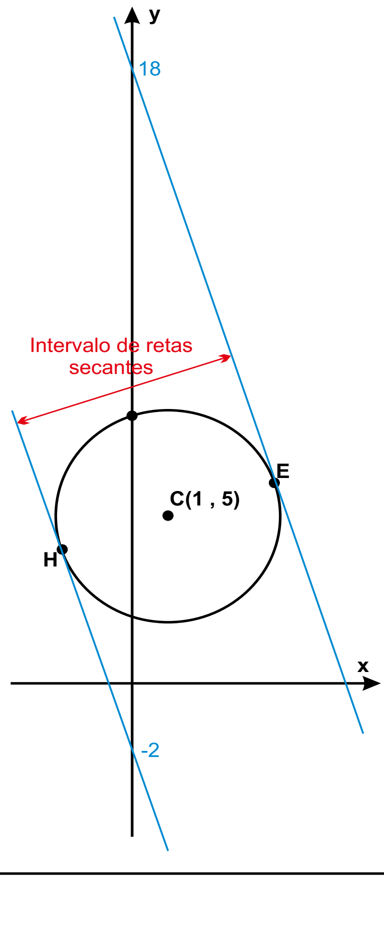
$-4k^2 + 64k + 144 = 0$

Dividindo por (-4) , tem-se

$k^2 - 16k - 36 = 0$ $\begin{array}{l} \nearrow k_1 = -2 \\ \searrow k_2 = 18 \end{array}$

Se a reta (r) $y = -3x + k$ é secante à circunferência λ , então

$-2 < k < 18$ (resp)



40) Dado o ponto P(-1 , -3) , exterior à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$, determine os coeficientes angulares das retas que passam por P e são exteriores a λ.

41) Sabendo que o ponto A(2 , 3) é uma das extremidades do diâmetro AG da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$, determine as coordenadas do ponto G.

42) Dado o ponto P(-1 , -3) , exterior à circunferência (λ) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$, determine a tangente do ângulo agudo formado pelas retas que passam por P e são tangentes a λ.

40) Dado o ponto P(-1 , -3) , exterior à circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$, determine os coeficientes angulares das retas que passam por P e são exteriores a λ.

$-2x_C = -8$
$x_C = 4$
$-2y_C = -4$
$y_C = 2$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 15$
$16 + 4 - 15 = R^2$
$R^2 = 5$
$R = \sqrt{5}$

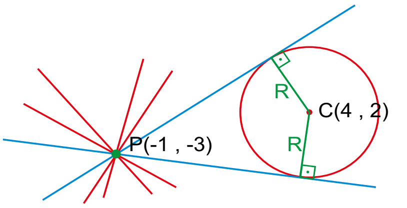
Centro e raio da circunferência
C(4 , 2) , $R = \sqrt{5}$

Determinação da equação geral do feixe de retas concorrentes em P.

$\left.\begin{matrix} m \\ P(-1 , -3) \end{matrix}\right\}$ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - (-3) = m(x - (-1))$
$y + 3 = m(x + 1)$
$y + 3 = mx + m$

$mx - y + m - 3 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists m$
(eq. do feixe de retas concorrentes em P)



Impor que as duas retas tangentes pertencem ao feixe de retas concorrentes com centro em P(-1 , -3) e distam $R = \sqrt{5}$ do centro C(4 , 2) da circunferência.

$\left.\begin{matrix} mx - y + m - 3 = 0 \\ C(4 , 2) \\ d = R = \sqrt{5} \end{matrix}\right\}$ $d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\sqrt{5} = \dfrac{|m . 4 - 1 . 2 + m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$

$\sqrt{5} . \sqrt{m^2 + (-1)^2} = |5m - 5|$

Elevando ao quadrado para eliminar as raízes, tem-se

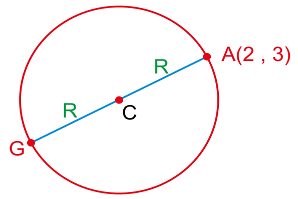
$5(m^2 + 1) = 25m^2 - 50m + 25$
$5m2 + 5 = 25m2 - 50m + 25$
$20m^2 - 50m + 20 = 0$
Dividindo por 10, tem-se

$2m^2 - 5m + 2 = 0$ $\begin{cases} m_1 = 1/2 \\ m_2 = 2 \end{cases}$

Se as retas são exteriores à circunferência λ , então

$m < 1/2$ ou $m > 2$ (resp)

41) Sabendo que o ponto A(2 , 3) é uma das extremidades do diâmetro AG da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$, determine as coordenadas do ponto G.



$-2x_C = -8$
$x_C = 4$
$-2y_C = -4$
$y_C = 2$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 15$
$16 + 4 - 15 = R^2$
$R^2 = 5$
$R = \sqrt{5}$

Centro e raio da circunferência
C(4 , 2) , $R = \sqrt{5}$

O centro C(4 , 2) é o ponto médio do diâmetro AG.

A(2 , 3)
$G(x_G , y_G)$
C(4 , 2)

$\dfrac{x_A + x_G}{2} = 4$

$2 + x_G = 8 \Longrightarrow x_G = 6$

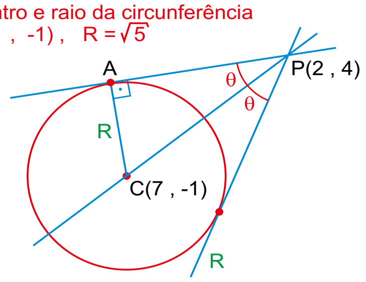
$\dfrac{y_A + y_G}{2} = 2$

$3 + y_G = 4 \Longrightarrow y_G = 1$

Portanto, G(6 , 1) (resp)

42) Dado o ponto P(2 , 4) , exterior à circunferência (λ) $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 5$, determine a tangente do ângulo agudo formado pelas retas que passam por P e são tangentes a λ.

Centro e raio da circunferência
C(7 , -1) , $R = \sqrt{5}$



P(2 , 4)
C(7 , -1)

$d_{CP} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$

$d_{CP} = \sqrt{(2 - 7)^2 + (4 - (-1))^2}$

$d_{CP} = 5\sqrt{2}$

No triângulo PCA, tem-se

$(PC)^2 = (AC)^2 + (AP)^2$
$(5\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + (AP)^2$
$50 = 5 + (AP)^2$
$(AP)^2 = 45$
$AP = 3\sqrt{5}$

$\text{tg } \theta = \dfrac{co}{ca} = \dfrac{AC}{AP}$

$\text{tg } \theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{1}{3}$

Da trigonometria, tem-se

$\text{tg } 2\theta = \dfrac{2.\text{tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta}$

$\text{tg } 2\theta = \dfrac{2(1/3)}{1 - (1/3)^2}$

$\text{tg } 2\theta = 3/4$ (resp)

43) Dada a reta (r) $x + 2y + 9 = 0$ e a circunferência (λ) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$, determine as equações gerais das retas perpendiculares a r e tangentes a λ.

44) Sendo A e B os pontos de intersecção entre a circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 80 = 0$ e a reta (r) $x - 2y + 4 = 0$, determine a medida da corda AB.

45) Dada equação geral do feixe de retas concorrentes, $mx - y + 3m + 7 = 0$, determine a equação normal da circunferência que tem centro no centro do feixe e é tangente ao eixo das abscissas.

43) Dada a reta (r) $x + 2y + 9 = 0$ e a circunferência (λ) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$, determine as equações gerais das retas perpendiculares a r e tangentes a λ.

Centro e raio da circunferência.
C(4 , 2) , $R = \sqrt{5}$

(r) $x + 2y + 9 = 0$
$2y = - x - 9$

$$y = \frac{-x}{2} - \frac{9}{2} \quad \begin{cases} m_r = -1/2 \\ q_r = -9/2 \end{cases}$$

Se $m_r = -1/2$, então as retas perpendiculares a r têm coeficiente angular igual a 2.

Equação geral do feixe de retas perpendiculares a r.

$$\left.\begin{matrix} mp = 2 \\ q = k \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} y = mx + q \\ y = 2x + k \end{matrix}$$

$2x - y + k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$

Impor que as duas retas tangentes pertencem ao feixe de retas perpendiculares a r e distam $R = \sqrt{5}$ do centro C(4 , 2) da circunferência.

$$\left.\begin{matrix} 2x - y + k = 0 \\ C(4 \ , \ 2) \\ d = R = \sqrt{5} \end{matrix}\right\} \quad d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{|2 . 4 - 1 . 2 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{5}}$$

$5 = |6 + k|$

$5 = |6 + k|$

Supondo positivo
$5 = 6 + k \longrightarrow k = -1$

Portanto
(t_1) $2x - y - 1 = 0$ (1ª tngente) (resp)

Supondo negativo
$-5 = 6 + k \longrightarrow k = -11$

Portanto
(t_2) $2x - y - 11 = 0$ (2ª tangente) (resp)

44) Sendo A e B os pontos de intersecção entre a circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 80 = 0$ e a reta (r) $x - 2y + 4 = 0$, determine a medida da corda AB.

Determinação dos pontos A e B.

$$\begin{cases} (\lambda) \ x^2 + y^2 - 16x - 12y + 80 = 0 \\ (r) \ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$$

Isolando x em r, tem-se
$x = 2y - 4$

Substituindo em λ, tem-se

$(2y - 4)^2 + y^2 - 16(2y - 4) - 12y + 80 = 0$
$4y^2 - 16y + 16 + y^2 - 32y + 64 - 12y + 80 = 0$
$5y^2 - 60y + 160 = 0$
Dividindo por 5, tem-se

$y^2 - 12y + 32 = 0$ → $y_A = 8$, $y_B = 4$

Mas, $x = 2y - 4$

Para $y_A = 8$, tem-se
$x_A = 2 . 8 - 4 = 12$
Portanto, A(12 , 8)

Para $y_B = 4$, tem-se
$x_B = 2 . 4 - 4 = 4$
Portanto, B(4 , 4)

A medida da corda AB é a distância entre os pontos A e B.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(4 - 12)^2 + (4 - 8)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \quad \text{(resp)}$$

45) Dada equação geral do feixe de retas concorrentes, $mx - y + 3m + 7 = 0$, determine a equação normal da circunferência que tem centro no centro do feixe e é tangente ao eixo das abscissas.

O centro do feixe é o ponto de intersecção de duas retas do feixe.

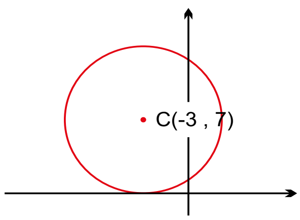
Para m = 0, tem-se
$0.x - y + 3.0 + 7 = 0$
$-y + 7 = 0$
(r) $y - 7 = 0$ é uma reta do feixe.

Para m = 1, tem-se
$1.x - y + 3.1 + 7 = 0$
(s) $x - y + 10 = 0$ é outra reta do feixe.

$$\begin{cases} (r) \ y - 7 = 0 \\ (s) \ x - y + 10 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, tem-se

P(-3 , 7) - centro do feixe



Centro e raio da circunferência
C(-3 , 7) , R = 7

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - (-3))^2 + (y - 7)^2 = 7^2$

$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 49$
(eq. reduzida da circunferência)

$x^2 + 6x + 36 + y^2 - 14y + 49 - 49 = 0$

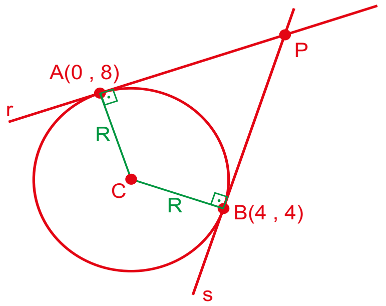
$x^2 + y^2 + 6x - 14y + 36 = 0$

(eq. normal da circunferência) (resp)

46) As retas (r) $x - 3y + 24 = 0$ e (s) $3x - y - 8 = 0$ tangenciam a circunferência λ nos pontos $A(0, 8)$ e $B(4, 4)$, respectivamente. Determine a equação normal da circunferência λ.

47) As retas (r) $y = 2x + 14$ e (s) $y = 2x - 6$ são tangentes à circunferência λ. Sabe-se que o centro C da circunferência λ encontra-se sobre a reta (w) $5x - y - 2 = 0$. Determine a equação normal da circunferência λ.

46) As retas (r) $x - 3y + 24 = 0$ e (s) $3x - y - 8 = 0$ tangenciam a circunferência λ nos pontos A(0 , 8) e B(4 , 4), respectivamente. Determine a equação normal da circunferência λ.



O centro C é o ponto de intersecção das retas AC e BC.

Determinação das equações das retas AC e BC.

(r) $x - 3y + 24 = 0$
$3y = x + 24$
$y = \frac{x}{3} + 8 \quad \begin{cases} m_r = 1/3 \\ q_r = 8 \end{cases}$

Reta AC
$m_{AC} = -1/m_r = -1/(1/3) = -3$

$\left.\begin{matrix} m_{AC} = -3 \\ A(0\ ,\ 8) \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 8 = -3(x - 0) \\ y - 8 = -3x \end{matrix}$

(AC) $3x + y - 8 = 0$

(s) $3x - y - 8 = 0$
$y = 3x - 8 \quad \begin{cases} m_s = 3 \\ q_s = -8 \end{cases}$

Reta BC
$m_{BC} = -1/m_s = -1/3$

$\left.\begin{matrix} m_{BC} = -1/3 \\ B(4\ ,\ 4) \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 4 = \frac{-1}{3}(x - 4) \end{matrix}$

$3y - 12 = -x + 4$

(BC) $x + 3y - 16 = 0$

Determinação do centro C.
$\begin{cases} \text{(AC)}\ 3x + y - 8 = 0 \\ \text{(BC)}\ x + 3y - 16 = 0 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, tem-se C(1 , 5)

O raio da circunferência λ é a distância entre os pontos A e C.

$d_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$d_{AC} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (5 - 8)^2}$

$d_{AC} = \sqrt{10}$

Centro e raio da circunferência λ.

C(1 , 5) , $R = \sqrt{10}$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 10$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 - 10 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 16 = 0$
(eq. normal da circunferência λ) (resp)

47) As retas (r) $y = 2x + 14$ e (s) $y = 2x - 6$ são tangentes à circunferência λ. Sabe-se que o centro C da circunferência λ encontra-se sobre a reta (w) $5x - y - 2 = 0$. Determine a equação normal da circunferência λ.

(r) $y = 2x + 14 \quad \begin{cases} m_r = 2 \\ q_r = 14 \end{cases}$

(s) $y = 2x - 6 \quad \begin{cases} m_s = 2 \\ q_s = -6 \end{cases}$

Pela análise dos coeficientes angulares, nota-se que r e s são retas paralelas.
Se a circunferência λ é tangente às retas r e s, então o centro C de λ encontra-se sobre a reta k, que é paralela a r e a s e equidistante de ambas.

Portanto, $q_k = (q_r + q_s)/2$
$q_k = (14 - 6)/2 = 4$

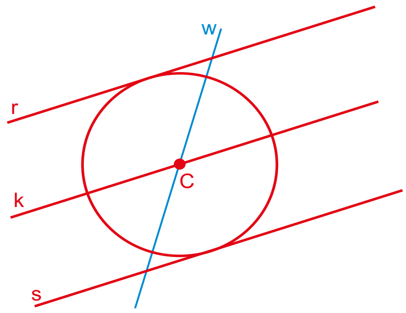
Equação da reta k.

$\left.\begin{matrix} m_k = 2 \\ q_k = 4 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} y = mx + q \\ \text{(k)}\ y = 2x + 4 \end{matrix}$

Se o centro C pertence às retas k e w, então é o ponto de intersecção dessas retas.

$\begin{cases} \text{(w)}\ 5x - y - 2 = 0 \\ \text{(k)}\ y = 2x + 4 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, tem-se C(2 , 8)



O raio da circunferência λ é a metade da distância entre as retas r e s.
A distância entre as retas r e s é a distância entre um ponto P de r e a reta s.

O ponto P(0 , 14) pertence a r.

(s) $y = 2x - 6$

$\left.\begin{matrix} \text{(s)}\ 2x - y - 6 = 0 \\ P(0\ ,\ 14) \end{matrix}\right\} \quad d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 14 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$

$d = \frac{|-20|}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$

$R = d/2 = 2\sqrt{5}$

Centro e raio da circunferência λ.

C(2 , 8) , $R = 2\sqrt{5}$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$(x - 2)^2 + (y - 8)^2 = 20$
$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 16y + 64 - 20 = 0$

$x^2 + y^2 - 4x - 16y + 48 = 0$
(eq. normal da circunferência λ) (resp)

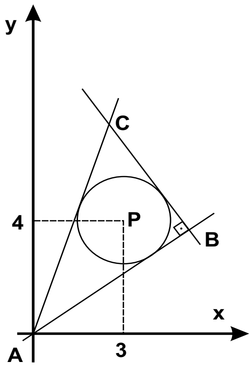
48) (Fuvest-SP) Uma reta de coeficiente angular $m > 0$ passa pelo ponto $(2 , 0)$ e é tangente à circunferência inscrita no quadrado de vértices $(1 , 1)$, $(5 , 1)$, $(5 , 5)$ e $(1 , 5)$. Então

a) $0 < m < 1/3$
b) $m = 1/3$
c) $1/3 < m < 1$
d) $m = 1$
e) $1 < m < 5/3$

49) (Fuvest-SP) Na figura abaixo, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo B o ângulo reto. Sabendo-se que $A = (0 , 0)$, B pertence à reta $x - 2y = 0$ e $P = (3 , 4)$ é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas

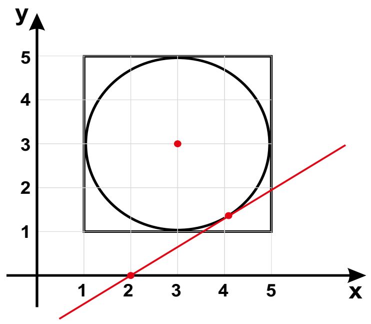
(GeoJeca)

a) do vértice B.
b) do vértice C.



48) (Fuvest-SP) Uma reta de coeficiente angular $m > 0$ passa pelo ponto $(2\ ,\ 0)$ e é tangente à circunferência inscrita no quadrado de vértices $(1\ ,\ 1)$, $(5\ ,\ 1)$, $(5\ ,\ 5)$ e $(1\ ,\ 5)$. Então

a) $0 < m < 1/3$
b) $m = 1/3$
c) $1/3 < m < 1$
d) $m = 1$
e) $1 < m < 5/3$



Aplicando-se o conceito de coeficiente angular (tangente do ângulo que a reta faz com o semieixo positivo das abscissas), é possível, rapidamente eliminar as alternativas a), b), d) e e), obtendo-se a resposta: alternativa c).

Supondo que a questão fosse dissertativa e solicitasse o valor exato de m.

A resolução seria mais trabalhosa.

Centro e raio da circunferência
$C(3\ ,\ 3)$, $R = 2$

Equação geral do feixe de retas concorrentes que passam no ponto $P(2\ ,\ 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} m \\ P(2\ ,\ 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 0 = m(x - 2) \\ y = mx - 2m \end{array}$$

$mx - y - 2m = 0$, com $m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists\, m$
(eq. geral do feixe)

Impor que a reta procurada pertence ao feixe e dista $R = 2$ do centro da circunferência.

$$\left.\begin{array}{l} mx - y - 2m = 0 \\ C(3\ ,\ 3) \\ d = R = 2 \end{array}\right\} d = \frac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$2 = \frac{|\,m \,.\, 3 - 1 \,.\, 3 - 2m\,|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$$

$$2 \,.\, \sqrt{m^2 + (-1)^2} = |\,m - 3\,|$$

Elevando os dois termos ao quadrado para eliminar a raiz, tem-se

$$4(m^2 + 1) = m^2 - 6m + 9$$
$$4m^2 + 4 = m^2 - 6m + 9$$
$$3m^2 + 6m - 5 = 0$$

$$3m^2 + 6m - 5 = 0 \quad \begin{array}{l} m_1 = \dfrac{2\sqrt{6} - 3}{3} \\ m_1 = \dfrac{2\sqrt{6} - 3}{3} \end{array}$$

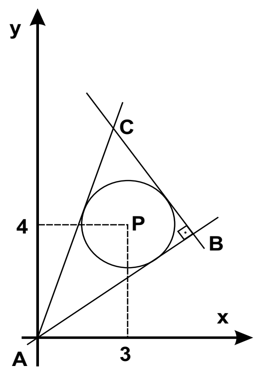
$\sqrt{6} \simeq 2{,}45$

$m_1 \simeq 0{,}63$

Portanto $1/3 < m < 1$ (resp c)

49) (Fuvest-SP) Na figura abaixo, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo B o ângulo reto. Sabendo-se que $A = (0\ ,0)$, B pertence à reta $x - 2y = 0$ e $P = (3\ ,4)$ é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas
a) do vértice B.
b) do vértice C.

(GeoJeca)



O raio da circunferência é a distância entre o ponto $P(3\ ,\ 4)$ e a reta $x - 2y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ P(3\ ,\ 4) \end{array}\right\} d = \frac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|\,1 \,.\, 3 - 2 \,.\, 4\,|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5} = R$$

Centro e raio da circunferência
$C(3\ ,\ 4)$, $R = \sqrt{5}$

Equação geral do feixe de retas concorrentes no ponto $A(0\ ,\ 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} m \\ A(0\ ,\ 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y - 0 = m(x - 0) \\ y = mx \end{array}$$

$mx - y = 0$, com $m \in \mathbb{R}$ ou $\nexists\, m$
(eq. do feixe de retas concorrentes)

Impor que as retas AB e AC pertencem ao feixe e distam $R = \sqrt{5}$ de $P(3\ ,\ 4)$

$$\left.\begin{array}{l} mx - y = 0 \\ P(3\ ,\ 4) \\ d = R = \sqrt{5} \end{array}\right\} d = \frac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{|\,m \,.\, 3 - 1 \,.\, 4\,|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$$

$$\sqrt{5} \,.\, \sqrt{m^2 + (-1)^2} = |\,3m - 4\,|$$

Elevando ao quadrado para eliminar a raiz, tem-se

$$5(m^2 + 1) = 9m^2 - 24m + 16$$
$$5m^2 + 5 = 9m^2 - 24m + 16$$

$$4m^2 - 24m + 11 = 0 \quad \begin{array}{l} m_{AC} = 11/2 \\ m_{AB} = 1/2 \end{array}$$

Reta AB: $x - 2y = 0$

Reta AC: $11x - 2y = 0$

Se a reta BC é perpendicular à reta AB, então $m_{BC} = -1/m_{AB} = -1/(1/2) = -2$

$$\left.\begin{array}{l} m_{BC} = -2 \\ q = k \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = mx + q \\ y = -2x + k \end{array}$$

$2x + y - k = 0$, com $k \in \mathbb{R}$
(feixe de retas paralelas à reta BC)

Impor que a reta BC pertence ao feixe e dista $R = \sqrt{5}$ de $P(3\ \sqrt{4})$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y - k = 0 \\ P(3\ ,\ 4) \\ d = R = \sqrt{5} \end{array}\right\} d = \frac{|\,ax_0 + by_0 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sqrt{5} = \frac{|\,2 \,.\, 3 + 1 \,.\, 4 - k\,|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$5 = |\,10 - k\,| \quad \begin{array}{l} k = 15 \quad (q_{BC}) \\ k = 5 \quad \text{(não convém)} \end{array}$$

Reta BC: $2x + y - 15 = 0$

Determinação do ponto B

$$\left\{\begin{array}{l} (AB)\ \ x - 2y = 0 \\ (BC)\ \ 2x + y - 15 = 0 \end{array}\right. \qquad B(6\ ,\ 3) \text{ (resp)}$$

Determinação do ponto C

$$\left\{\begin{array}{l} (AC)\ \ 11x - 2y = 0 \\ (BC)\ \ 2x + y - 15 = 0 \end{array}\right. \qquad C(2\ ,\ 11) \text{ (resp)}$$

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 10
Lugar Geométrico Plano (LG).

I - Lugar Geométrico .

Lugar Geométrico Plano (LG) é o conjunto dos pontos do plano que satisfazem uma determinada propriedade.

O Lugar Geométrico é uma equação com 2 variáveis x e y, que representa todos os pontos do plano que satisfazem a propriedade desejada.

Para a obtenção da equação com duas variáveis que representa o LG, impõe-se a propriedade desejada a um ponto P(x , y) genérico, que representa os infinitos pontos do plano que satisfazem a propriedade desejada.

Exercícios

01) (MAPOFEI-72) Num sistema cartesiano plano são dados os pontos O(0 , 0) e A(3 , 0). Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) tais que OP = 2 . AP. (GeoJeca)

02) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) do plano, cuja distância ao ponto C(0 , 3) seja igual a 5. (GeoJeca)

03) Obter a equação da mediatriz do segmento de extremos A(7 , 2) e B(-1 , 6). (GeoJeca)

Observação

- Mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano, eqüidistantes de A e de B.

04) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) alinhados com os pontos A(-3 , 1) e B(0 , 4). (GeoJeca)

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 10
Lugar Geométrico Plano (LG).

I - Lugar Geométrico .

Lugar Geométrico Plano (LG) é o conjunto dos pontos do plano que satisfazem uma determinada propriedade.

O Lugar Geométrico é uma equação com 2 variáveis x e y, que representa todos os pontos do plano que satisfazem a propriedade desejada.

Para a obtenção da equação com duas variáveis que representa o LG, impõe-se a propriedade desejada a um ponto P(x , y) genérico, que representa os infinitos pontos do plano que satisfazem a propriedade desejada.

Exercícios

01) (MAPOFEI-72) Num sistema cartesiano plano são dados os pontos O(0 , 0) e A(3 , 0). Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) tais que OP = 2 . AP. (GeoJeca)

O(0 , 0)
A(3 , 0)
P(x , y)

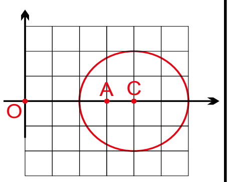
$d_{OP} = 2\, d_{AP}$ (propriedade)

$$\sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} = 2\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}$$

Elevando ao quadrado para eliminar as raízes e substituindo os valores das cooredenadas, tem-se

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4(x - 3)^2 + (y - 0)^2$
$x^2 + y^2 = 4(x^2 - 6x + 9 + y^2)$
$x^2 + y^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2$
$3x^2 + 3y^2 - 24x + 36 = 0$
Dividindo por 3 , tem-se

$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ (eq. do LG) (resp)



Observação.
O lugar geométrico é uma circunferência de centro C(4 , 0) e raio 2. Qualquer ponto dessa circunferência satisfaz a propriedade imposta.

02) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) do plano, cuja distância ao ponto C(0 , 3) seja igual a 5. (GeoJeca)

C(0 , 3)
P(x , y)

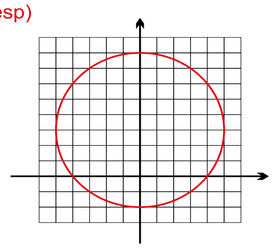
$d_{CP} = 5$ (propriedade)

$$\sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} = 5$$

Elevando os dois termos ao quadrado para eliminar a raiz, tem-se:

$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

$x^2 + (y - 3)^2 = 25$ (eq. do LG) (resp)



Observação.
O lugar geométrico é uma circunferência de centro C(0 , 3) e raio 5. Qualquer ponto dessa circunferência satisfaz a propriedade imposta.

03) Obter a equação da mediatriz do segmento de extremos A(7 , 2) e B(-1 , 6). (GeoJeca)

Observação
- Mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano, eqüidistantes de A e de B.

A(7 , 2)
B(-1 , 6)
P(x , y)

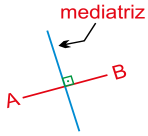
$d_{AP} = d_{BP}$ (propriedade)

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

Elevando os dois termos ao quadrado para eliminar as raízes e substituindo os valores das coordenadas, tem-se

$(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = (x - (-1))^2 + (y - 6)^2$
$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 12y + 36$
$16x - 8y - 16 = 0$
Dividindo por 8 , tem-se

$2x - y - 2 = 0$ (eq. do LG) (resp)



Observação.
O lugar geométrico é uma reta, perpendicular ao segmento AB no seu ponto médio.

04) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) alinhados com os pontos A(-3 , 1) e B(0 , 4). (GeoJeca)

P(x , y)
A(-3 , 1)
B(0 , 4)

Se A, B e P estão alinhados, então $m_{AB} = m_{BP}$

$m_{AB} = m_{BP}$ (propriedade do LG)

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_P - y_B}{x_P - x_B}$$

$$\frac{4 - 1}{0 - (-3)} = \frac{y - 4}{x - 0}$$

$y - 4 = x$

$x - y + 4 = 0$ (eq. do LG) (resp)

Observação.
O lugar geométrico é a equação da reta que passa pelos pontos A(-3 , 1) e B(0 , 4).

05) Determinar o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, tais que a soma dos quadrados das distâncias aos pontos $A(0, 5)$ e $B(0, -5)$ é 100. (GeoJeca)	06) Determinar o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, tais que a diferença dos quadrados das distâncias aos pontos $A(0, 5)$ e $B(0, -5)$ é 20. (GeoJeca)
07) Determinar o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, eqüidistantes das retas (r) $2x - y - 8 = 0$ e (s) $x - 2y - 1 = 0$. (GeoJeca)	08) Determinar o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, eqüidistantes das retas (r) $3x - 2y + 12 = 0$ e (s) $3x - 2y - 2 = 0$. (GeoJeca)
09) Determinar o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, cuja distância ao ponto $C(4, -1)$ seja igual a 7. (GeoJeca)	10) Determinar o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano, cuja distância à reta (r) $x + 2y - 4 = 0$ seja o dobro da distância à reta (s) $2x - y + 9 = 0$. (GeoJeca)

05) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) do plano, tais que a soma dos quadrados das distâncias aos pontos A(0 , 5) e B(0 , -5) é 100.

(GeoJeca)

A(0 , 5)
B(0 , -5)
P(x , y)

$(d_{AP})^2 + (d_{BP})^2 = 100$ (propriedade do LG)

$\left(\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}\right)^2 = 100$

$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 = 100$

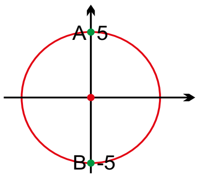
$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 + (x - 0)^2 + (y - (-5))^2 = 100$

$x^2 + y^2 - 10y + 25 + x^2 + y^2 + 10y + 25 = 100$

$2x^2 + 2y^2 - 50 = 0$

Dividindo por 2 , tem-se

$x^2 + y^2 = 25$ (eq. do LG) (resp)



observação.
O lugar geométrico é uma circunferência de centro C(0 , 0) e raio igual a 5.

06) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) do plano, tais que a diferença dos quadrados das distâncias aos pontos A(0 , 5) e B(0 , -5) é 20.

(GeoJeca)

A(0 , 5)
B(0 , -5)
P(x , y)

$(d_{AP})^2 - (d_{BP})^2 = 20$ (propriedade do LG)

$\left(\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2}\right)^2 - \left(\sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}\right)^2 = 20$

$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 - (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2 = 20$

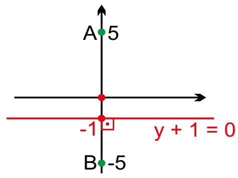
$(x - 0)^2 + (y - 5)^2 - [(x - 0)^2 + (y - (-5))^2] = 20$

$x^2 + y^2 - 10y + 25 - x^2 - y^2 - 10y - 25 = 20$

$20y + 20 = 0$

Dividindo por 20 , tem-se

$y + 1 = 0$ (eq. do LG) (resp)



observação.
O lugar geométrico é uma reta paralela ao eixo x.

07) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) do plano, eqüidistantes das retas (r) 2x - y - 8 = 0 e (s) x - 2y - 1 = 0.

(GeoJeca)

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\quad d_{Pr} = d_{Ps}$ (propriedade do LG)

P(x , y)
(r) 2x - y - 8 = 0

P(x , y)
(s) x - 2y - 1 = 0

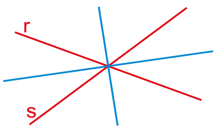
$\dfrac{|2 . x - 1 . y - 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|1 . x - 2 . y - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$

$\dfrac{|2x - y - 8|}{\sqrt{5}} = \dfrac{|x - 2y - 1|}{\sqrt{5}} \longrightarrow |2x - y - 8| = |x - 2y - 1|$

Supondo positivo
$2x - y - 8 = x - 2y - 1$
$x + y - 7 = 0$

Supondo negativo
$2x - y - 8 = -x + 2y + 1$
$3x - 3y - 9 = 0$
$x - y - 3 = 0$

Observação.
O lugar geométrico representa as duas bissetrizes das retas r e s.



08) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) do plano, eqüidistantes das retas (r) 3x - 2y + 12 = 0 e (s) 3x - 2y - 2 = 0.

(GeoJeca)

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\quad d_{Pr} = d_{Ps}$ (propriedade do LG)

P(x , y)
(r) 3x - 2y + 12 = 0

P(x , y)
(s) 3x - 2y - 2 = 0

$\dfrac{|3 . x - 2 . y + 12|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|3 . x - 2 . y - 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$

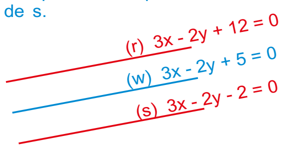
$\dfrac{|3x - 2y + 12|}{\sqrt{13}} = \dfrac{|3x - 2y - 2|}{\sqrt{13}}$

$|3x - 2y + 12| = |3x - 2y - 2|$

Supondo positivo
$3x - 2y + 12 = 3x - 2y - 2$
$12 = -2$ (impossível)

Supondo negativo
$3x - 2y + 12 = -3x + 2y + 2$
$6x - 4y + 10 = 0$
$3x - 2y + 5 = 0$ (resp)

Observação.
O lugar geométrico representa a reta paralela e equidistante de r e de s.



09) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) do plano, cuja distância ao ponto C(4 , -1) seja igual a 7.

(GeoJeca)

$d_{PC} = 7$ (propriedade do LG)

P(x , y)
C(4 , -1)

$d_{PC} = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2}$

$7 = \sqrt{(x - 4)^2 + (y - (-1))^2}$

Elevando os dois termos ao quadrado para eliminar a raiz.

$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49$ (eq. do LG) (resp)

Observação.
O lugar geométrico representado acima é a equação reduzida de uma circunferência de centre C(4 , -1) e raio 7.

10) Determinar o lugar geométrico dos pontos P(x , y) do plano, cuja distância à reta (r) x + 2y - 4 = 0 seja o dobro da distância à reta (s) 2x - y + 9 = 0.

(GeoJeca)

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\quad d_{Pr} = 2.d_{Ps}$ (propriedade do LG)

P(x , y)
(r) x + 2y - 4 = 0

P(x , y)
(s) 2x - y + 9 = 0

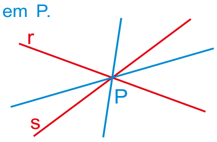
$\dfrac{|1 . x + 2 . y - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = 2.\left(\dfrac{|2 . x - 1 . y + 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}\right)$ $\quad \sqrt{1^2 + (-2)^2}$

$\dfrac{|x + 2y - 4|}{\sqrt{5}} = 2.\dfrac{|2x - y + 9|}{\sqrt{5}} \longrightarrow |x + 2y - 4| = 2.|2x - y + 9|$

Supondo positivo
$x + 2y - 4 = 4x - 2y + 18$
$3x - 4y + 22 = 0$ (resp)

Supondo negativo
$x + 2y - 4 = -4x + 2y - 18$
$5x + 14 = 0$
$x + 14/5 = 0$ (resp)

Observação.
O lugar geométrico representado são duas retas do feixe de retas com centro em P.



Respostas das aulas 09 e 10.

Respostas da Aula 09

01) a) $d_{AC} > R$ ponto exterior
b) $d_{BC} < R$ ponto interior
c) $d_{CC'} = R$ ponto da circunferência

02) A é ponto interior a λ.
B é ponto exterior a λ.

03) A(3 , 6) e B(1 , 0)

04) A(1 , -2) B(6 , -1)

05) D = - 320 < 0 não existe intersecção - reta exterior

06) $x + 4y + k = 0$, $k \in R$

07) $y = -3x + k$, $k \in R$

08) $x + k = 0$, $k \in R$

09) $y = mx$, $m \in R$ ou $\nexists m$

10) $mx - y + 4m + 1 = 0$, $m \in R$ ou $\nexists m$

11) $mx - y - 7m - 3 = 0$, $m \in R$ ou $\nexists m$

12) $x + 3y + 4 = 0$

13) $mx - y + 3m - 4 = 0$, $m \in R$ ou $\nexists m$

14) $5x - 2y + 13 = 0$

15) $y - 5 = m(x + 1)$, $m \in R$ ou $\nexists m$

16) A é exterior B pertence à circunferência

17) A é interior B é exterior

18) $S = \{k \in R \ / \ k < -3 \text{ ou } k > 3\}$

19) $S = \{k \in R \ / \ 3 - \sqrt{15} < k < 3 + \sqrt{15}\}$

20) $\Delta = 9 > 0$ - reta secante (A(2 , 0) e B(-1 , 9))

21) $d = 5\sqrt{2} > R$ - reta exterior

22) Reta secante A(3 , -3) B(2 , 4)

23) Reta tangente T(1 , -4)

24) Reta tangente T(2 , 5)

25) Reta secante A(6 , 0) B(-1 , 1)

26) $y = \dfrac{2x}{5} + k$, $k \in R$

27) $y = k$, $k \in R$

28) $y - 5 = m(x + 2)$, $m \in R$ ou $\nexists m$

29) $m = -3/7$

30) $mx - y - 7m - 3 = 0$, $m \in R$ ou $\nexists m$

31) C(1 , -5)

32) $mx - y + 2m + 5 = 0$, $m \in R$ ou $\nexists m$

33) $k = -2$

34) $x + y + 2 = 0$

35) (t_A) $y - 3 = 0$ (t_B) $y + 5 = 0$

Respostas da Aula 09

36) (t_A) $2x - y + 6 = 0$ (t_B) $x - 2y + 18 = 0$

37) (t_A) $3x + y - 11 = 0$ (t_B) $x + 3y - 1 = 0$

38) $b < -30$ ou $b > -10$

39) $-2 < k < 18$

40) $m < 1/2$ ou $m > 2$

41) G(6 , 1)

42) $tg\, 2\theta = 3/4$

43) (t_1) $2x - y - 1 = 0$ (t_2) $2x - y - 11 = 0$

44) $d_{AB} = 4\sqrt{5}$

45) $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 36 = 0$

46) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 16 = 0$

47) $x^2 + y^2 - 4x - 16y + 48 = 0$

48) $1/3 < m < 1$ (resp c)

49) a) B(6 , 3)
b) C(2 , 11)

Respostas da Aula 10

01) $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$

02) $x^2 + (y - 3)^2 = 25$

03) $2x - y - 2 = 0$

04) $x - y + 4 = 0$

05) $x^2 + y^2 = 25$

06) $y + 1 = 0$

07) $x + y - 7 = 0$ ou $x - y - 3 = 0$

08) $3x - 2y + 5 = 0$

09) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 49$

10) $3x - 4y + 22 = 0$ ou $x + 14/5 = 0$

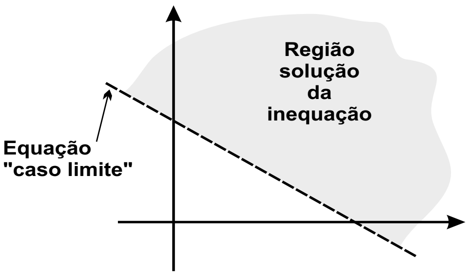
Favor comunicar eventuais erros deste trabalho através do e-mail
jecajeca@uol.com.br Obrigado.

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados
pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 11
Inequações no plano cartesiano.

I - Inequações.



Convenção

Linha cheia ———— ($\geq$ ou $\leq$)

Linha tracejada - - - - - - - - - ($>$ ou $<$)

Resolução gráfica de inequações.

1) Achar o "caso limite" transformando a inequação em equação (mudar $>$ ou $<$ para $=$)

2) Desenhar o "caso limite" usando a convenção adotada. (———— ou - - - - - - - -)

3) Testar na **inequação** as coordenadas de um ponto não pertencente ao "caso limite". (se possível usar a origem O(0 , 0))

4) Se o ponto testado satisfizer a inequação, então esse ponto é parte da "Região solução". Se não satisfizer, a "Região solução" é a parte do plano que não contém o ponto testado.

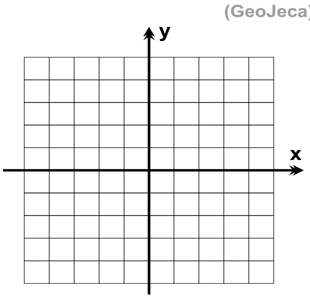
Importante: Equação = curva Inequação = região do plano que começa numa curva.

Exercícios

01) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

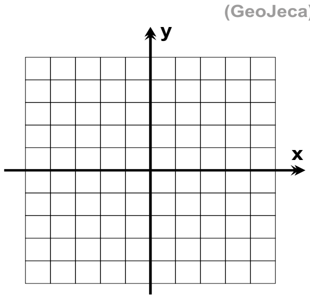
$x - 4 < 0$



02) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

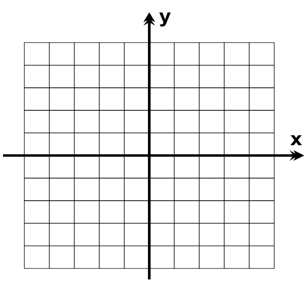
$2x + 6 \geq 0$



03) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

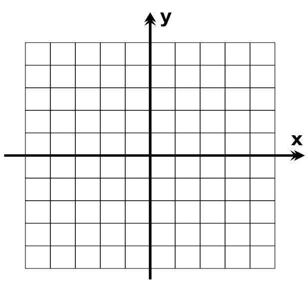
$y - 2 < 0$



04) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

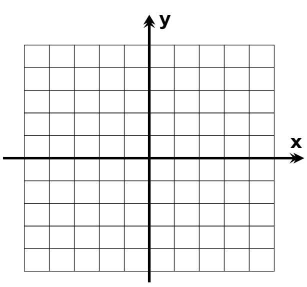
$3y - 3 \leq 0$



05) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

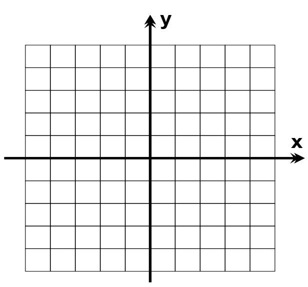
$x + y - 2 \geq 0$



06) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

$y < 2x + 4$

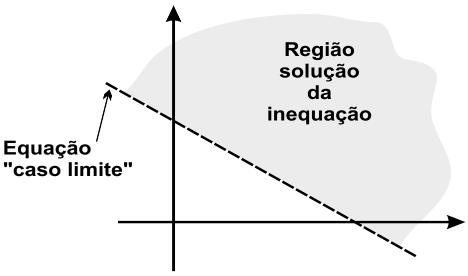


GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 11
Inequações no plano cartesiano.

I - Inequações.



Convenção
Linha cheia ———— ($\geqslant$ ou $\leqslant$)
Linha tracejada - - - - - - - ($>$ ou $<$)

Resolução gráfica de inequações.

1) Achar o "caso limite" transformando a inequação em equação (mudar $>$ ou $<$ para $=$)
2) Desenhar o "caso limite" usando a convenção adotada. (———— ou - - - - - - - -)
3) Testar na **inequação** as coordenadas de um ponto não pertencente ao "caso limite". (se possível usar a origem O(0 , 0))
4) Se o ponto testado satisfizer a inequação, então esse ponto é parte da "Região solução". Se não satisfizer, a "Região solução" é a parte do plano que não contém o ponto testado.

Importante: Equação = curva   Inequação = região do plano que começa numa curva.

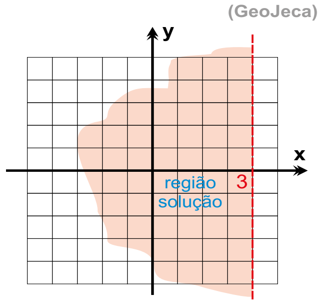
Exercícios

01) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

$x - 4 < 0$

$x - 4 < 0$
$x < 4$
"caso limite"
$x = 4$



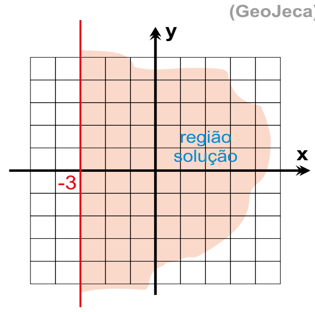
02) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

$2x + 6 \geqslant 0$

$2x + 6 \geqslant = 0$
$x + 3 \geqslant 0$
$x \geqslant -3$

"caso limite"
$x = -3$



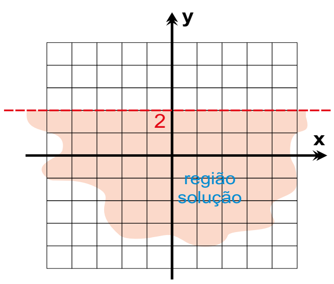
03) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

$y - 2 < 0$

$y - 2 < 0$
$y < 2$

"caso limite"
$y = 2$



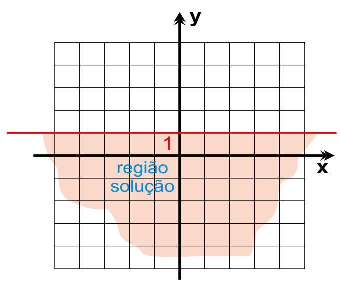
04) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

$3y - 3 \leqslant 0$

$3y - 3 \leqslant 0$
$3y \leqslant 3$
$y \leqslant 1$

"caso limite"
$y = 1$



05) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

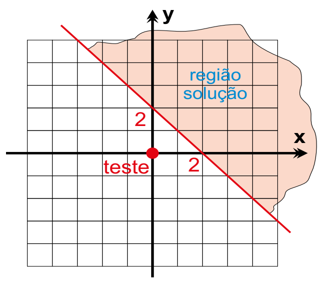
$x + y - 2 \geqslant 0$

$x + y - 2 \geqslant 0$

"caso limite"
$x + y - 2 = 0$

teste O(0 , 0)
$x + y - 2 \geqslant 0$
$0 + 0 - 2 \geqslant 0$
$-2 \geqslant 0$ (falso)

O ponto O(0 , 0) não está na "região solução"



06) Resolver graficamente a inequação abaixo.

(GeoJeca)

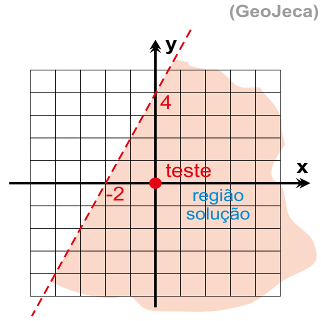
$y < 2x + 4$

$y < 2x + 4$

"caso limite"
$y = 2x + 4$

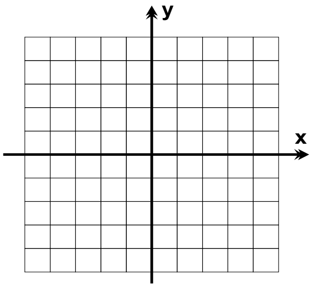
teste
O(0 , 0)
$0 < 2 . 0 + 4$
$0 < 4$ (verdade)

O ponto O(0 , 0) está na "região solução"



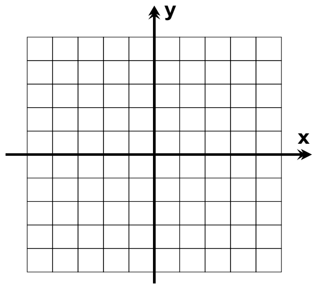
07) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

$x - 3y + 3 \leqslant 0$



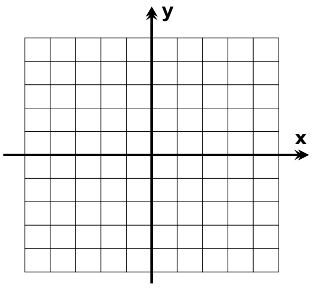
08) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

$4x + y + 4 > 0$



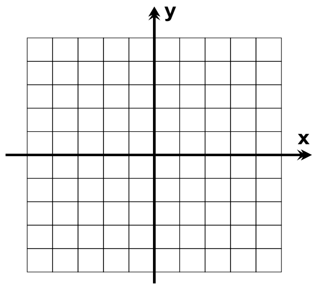
09) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

$x^2 + y^2 \geqslant 16$



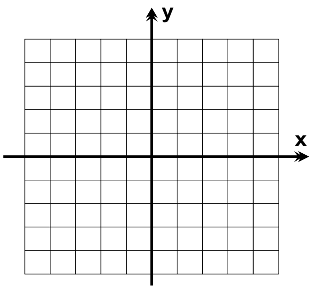
10) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

$(x + 1)^2 + y^2 \leqslant 9$



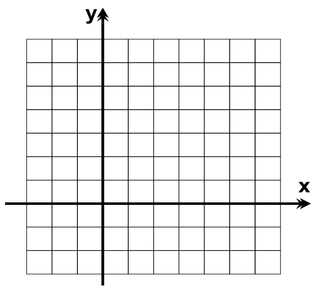
11) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

$x^2 + y^2 < 16$



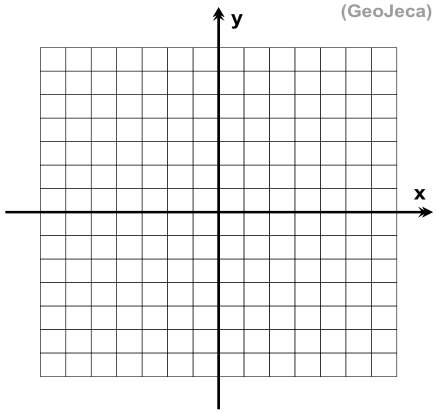
12) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geqslant 4$



13) Resolver graficamente o sistema de a inequações abaixo (GeoJeca)

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 16 \\ x - 2y \geqslant 2 \\ y > -1 \end{cases}$$



07) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

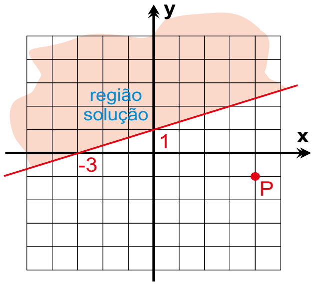
$x - 3y + 3 \leq 0$

$x - 3y + 3 \leq 0$

"caso limite"
$x - 3y + 3 = 0$

teste P(4 , -1)
$x - 3y + 3 \leq 0$
$4 - 3 . (-1) + 3 \leq 0$
$10 \leq 0$ (falso)

O ponto P(4 , -1) não está na "região solução"



08) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

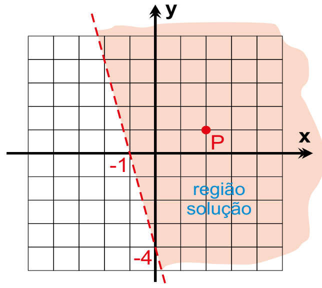
$4x + y + 4 > 0$

$4x + y + 4 > 0$

"caso limite"
$4x + y + 4 = 0$

teste P(2 , 1)
$4x + y + 4 > 0$
$4 . 2 + 1 . 1 + 4 > 0$
$13 > 0$ (verdade)

O ponto P(2 , 1) está na "região solução"



09) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

$x^2 + y^2 \geq 16$

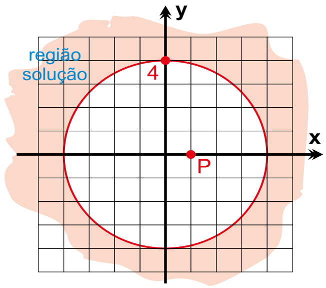
$x^2 + y^2 \geq 16$

"caso limite"
$x^2 + y^2 = 16$

teste P(1 , 0)

$x^2 + y^2 \geq 16$
$1^2 + 0^2 \geq 16$
$1 \geq 16$ (falso)

O ponto P não está na "região solução"



10) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

$(x + 1)^2 + y^2 \leq 9$

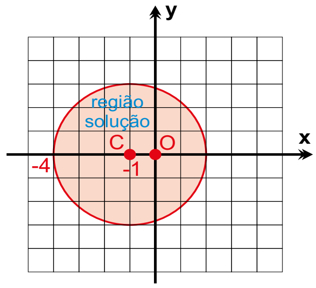
$(x + 1)^2 + y^2 \leq 9$

"caso limite"
$(x + 1)^2 + y^2 = 9$

teste O(0 , 0)

$(x + 1)^2 + y^2 \leq 9$
$(0 + 1)^2 + 0^2 \leq 9$
$1 \leq 9$ (verdade)

O ponto P está na "região solução"



11) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

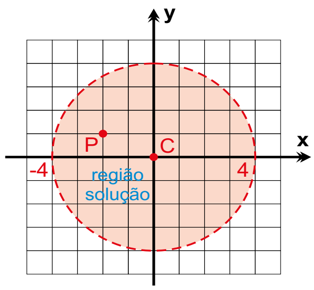
$x^2 + y^2 < 16$

$x^2 + y^2 < 16$

"caso limite"
$x^2 + y^2 = 16$

teste P(-2 , 1)
$x^2 + y^2 < 16$
$(-2)^2 + 1^2 < 16$
$5 < 16$ (verdade)

O ponto P está na "região solução"



12) Resolver graficamente a inequação abaixo. (GeoJeca)

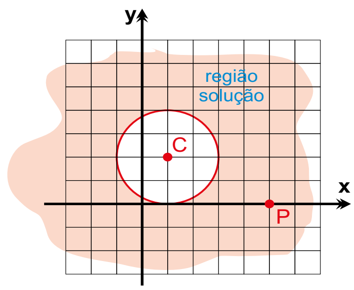
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 4$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 4$

"caso limite"
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

teste P(5 , 0)
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq 4$
$(5 - 1)^2 + (0 - 2)^2 \geq 4$
$20 \geq 4$ (verdade)

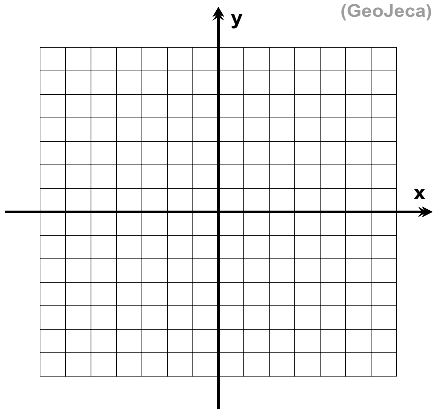
O ponto P está na "região solução"



13) Resolver graficamente o sistema de a inequações abaixo (GeoJeca)

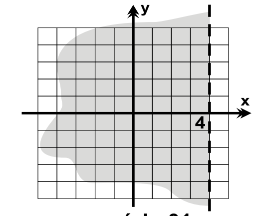
$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 16 \\ x - 2y \geq 2 \\ y > -1 \end{cases}$$

Resolução na próxima página

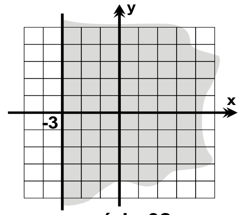


Respostas da aula 11

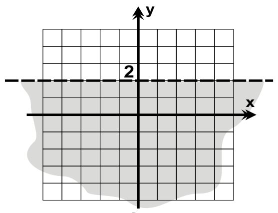
Respostas da Aula 11



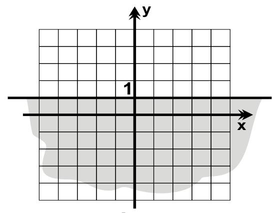
exercício 01



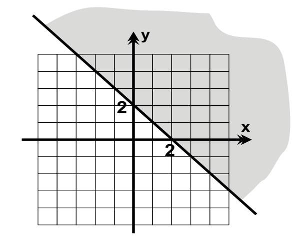
exercício 02



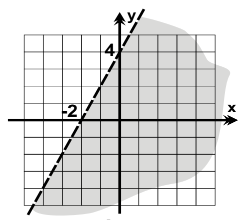
exercício 03



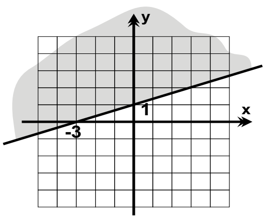
exercício 04



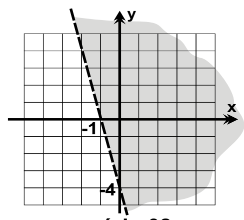
exercício 05



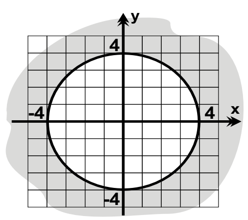
exercício 06



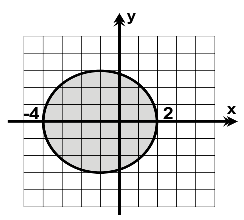
exercício 07



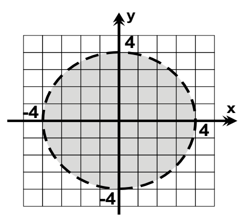
exercício 08



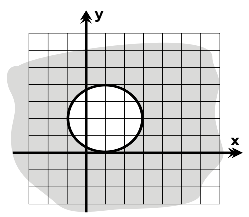
exercício 09



exercício 10



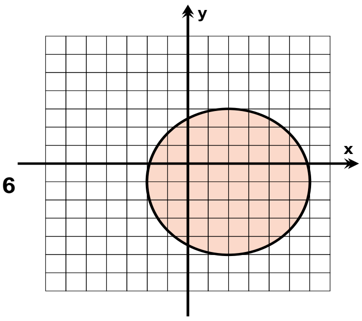
exercício 11



exercício 12

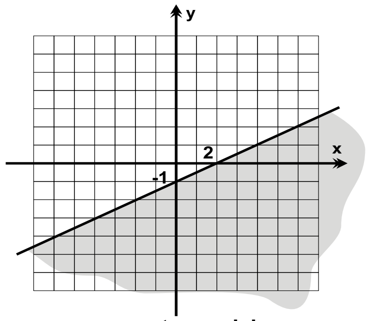
exercício 13

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leqslant 16$



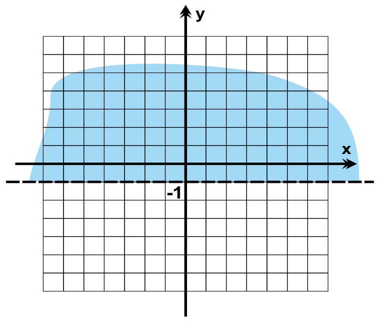
resposta parcial

$x - 2y \geqslant 2$

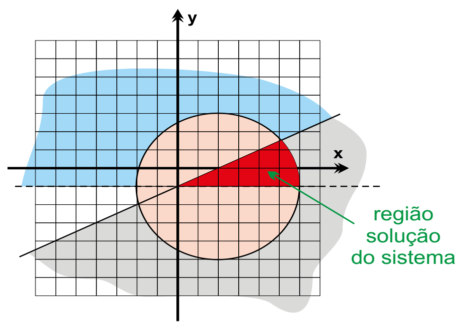


resposta parcial

$y > -1$



resposta parcial



resposta final

Favor comunicar eventuais erros deste trabalho através do e-mail
jecajeca@uol.com.br Obrigado.

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 12
Estudo das cônicas - Parábola.

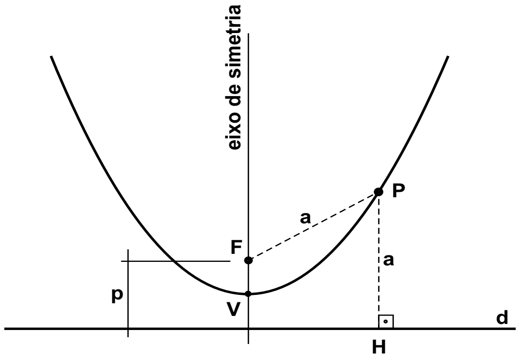
I - Parábola.

Dado um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz), denomina-se parábola o conjunto de pontos do plano eqüidistantes do ponto F e da reta d.

Resumindo FP = PH = a

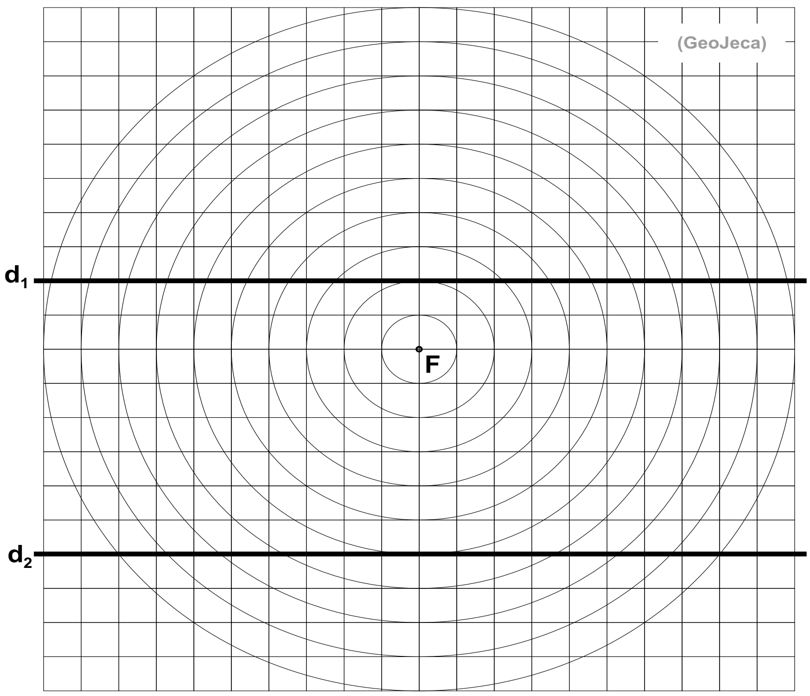
Elementos da parábola.

F - foco da parábola.
P - ponto qualquer da parábola.
d - diretriz da parábola.
V - vértice da parábola.
Reta FV - eixo de simetria.
p - parâmetro da parábola.



EXERCÍCIO 01 - Na figura ao lado, obedecendo a definição de parábola, para um mesmo foco F, traçar duas parábolas; uma em relação à diretriz d_1 e outra em relação à diretriz d_2.

OBSERVAÇÃO - Depois de traçadas as parábolas, note que quanto maior o parâmetro (distância entre o foco e a diretriz), mais aberta é a parábola.



Pré-requisitos de Geometria Analítica para o estudo das parábolas.

Distância entre dois pontos.

Dados os pontos $A(x_A , y_A)$ e $B(x_B , y_B)$, a distância entre A e B é dada por :

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Distância entre ponto e reta.

Dada a equação geral de uma reta (r) ax + by + c = 0 e um ponto $P(x_0 , y_0)$, a distância entre a reta r e o ponto P é dada por :

$$d_{P(r)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados
pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

Geometria Analítica
Aula 12
Estudo das cônicas - Parábola.

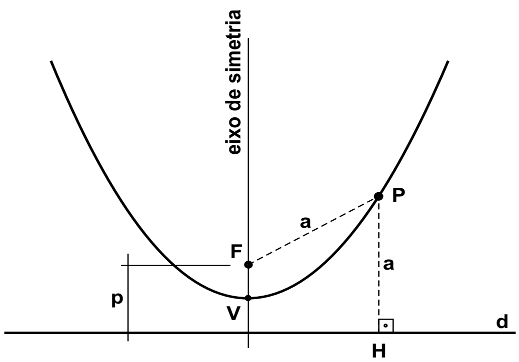
I - Parábola.

Dado um ponto F (foco) e uma reta d (diretriz), denomina-se parábola o conjunto de pontos do plano eqüidistantes do ponto F e da reta d.

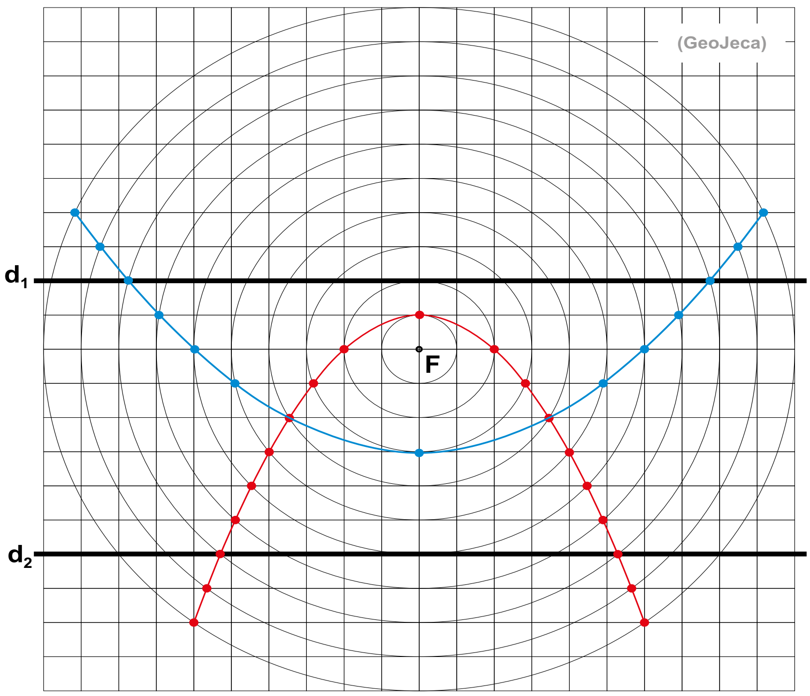
Resumindo FP = PH = a

Elementos da parábola.

F - foco da parábola.
P - ponto qualquer da parábola.
d - diretriz da parábola.
V - vértice da parábola.
Reta FV - eixo de simetria.
p - parâmetro da parábola.



EXERCÍCIO 01 - Na figura ao lado, obedecendo a definição de parábola, para um mesmo foco F, traçar duas parábolas; uma em relação à diretriz d_1 e outra em relação à diretriz d_2.



OBSERVAÇÃO - Depois de traçadas as parábolas, note que quanto maior o parâmetro (distância entre o foco e a diretriz), mais aberta é a parábola.

Pré-requisitos de Geometria Analítica para o estudo das parábolas.

Distância entre dois pontos.

Dados os pontos $A(x_A , y_A)$ e $B(x_B , y_B)$, a distância entre A e B é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

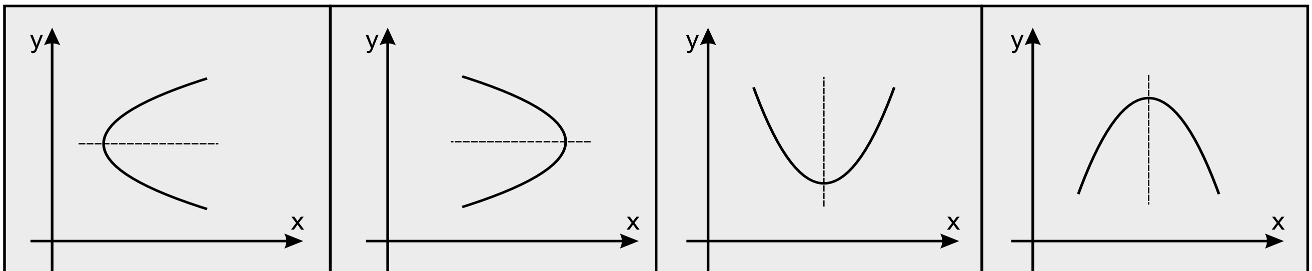
Distância entre ponto e reta.

Dada a equação geral de uma reta (r) $ax + by + c = 0$ e um ponto $P(x_0 , y_0)$, a distância entre a reta r e o ponto P é dada por:

$$d_{P(r)} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Equações reduzidas das parábolas com eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados.

Eixo de simetria paralelo ao eixo x.	Eixo de simetria paralelo ao eixo y.

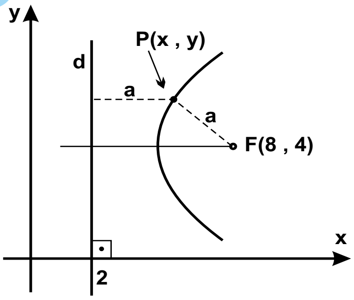


$(y - y_v)^2 = 2p(x - x_v)$ $\quad$ $(y - y_v)^2 = -2p(x - x_v)$ $\quad$ $(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v)$ $\quad$ $(x - x_v)^2 = -2p(y - y_v)$

($V(x_V , y_V)$ são as coordenadas do vértice e p é o parâmetro (distância entre o foco e a diretriz))

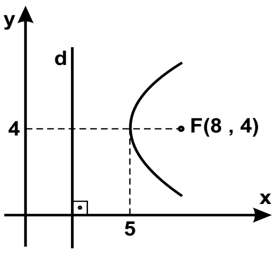
02) Usando a definição, determine a equação reduzida da parábola abaixo, sendo **F** o foco e **d** a diretriz.

(GeoJeca)

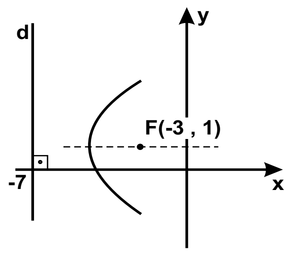


03) Determine a equação reduzida de cada parábola abaixo.

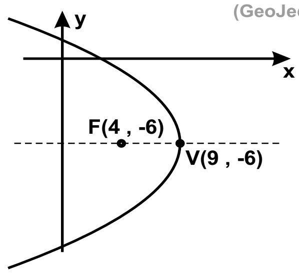
a) (GeoJeca)



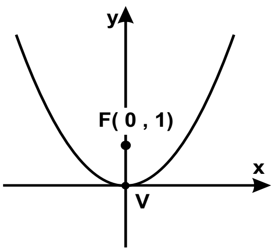
b) (GeoJeca)



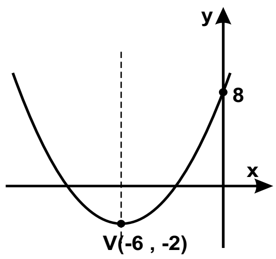
c) (GeoJeca)



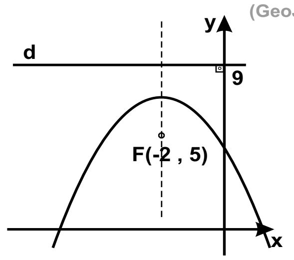
d) (GeoJeca)



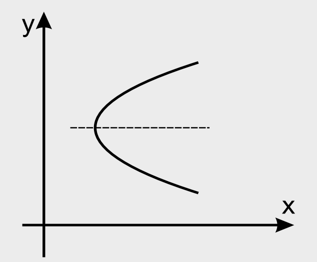
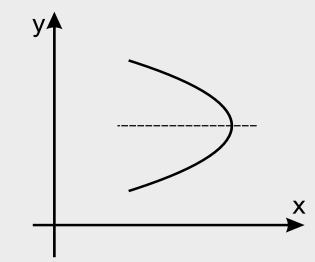
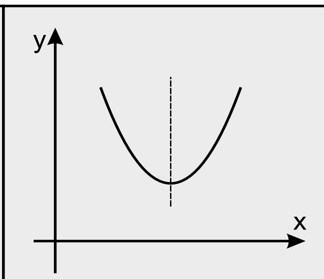
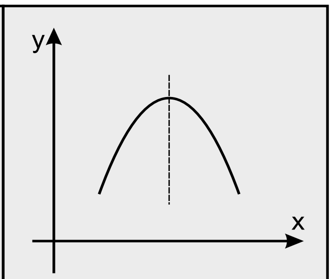
e) (GeoJeca)



f) (GeoJeca)



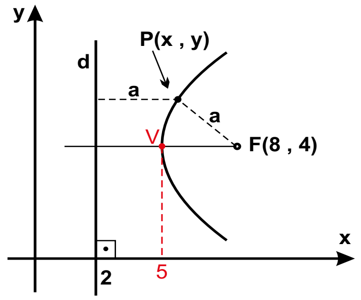
Equações reduzidas das parábolas com eixo de simetria paralelo a um dos eixos coordenados.

Eixo de simetria paralelo ao eixo x.		Eixo de simetria paralelo ao eixo y.	
			
$(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V)$	$(y - y_V)^2 = -2p(x - x_V)$	$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$	$(x - x_V)^2 = -2p(y - y_V)$

($V(x_V , y_V)$ são as coordenadas do vértice e p é o parâmetro (distância entre o foco e a diretriz))

02) Usando a definição, determine a equação reduzida da parábola abaixo, sendo **F** o foco e **d** a diretriz.

(GeoJeca)



$d_{FP} = d_{Pd}$ - definição de parábola

$\sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = x_P - 2$

Elevando os dois termos ao quadrado para eliminar a raiz e substituindo os valores das coordenadas de F, tem-se

$(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = (x - 2)^2$

$x^2 - 16x + 64 + (y - 4)^2 = x^2 - 4x + 4$

Organizando, tem-se

$(y - 4)^2 = 12x - 60$

$(y - 4)^2 = 12(x - 5)$ (resp)

Note que a equação obtida é do tipo

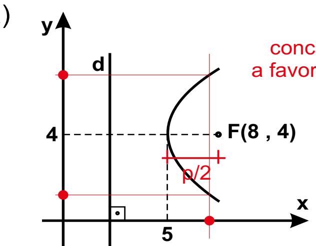
$(y - y_V)^2 = 2.p(x - x_V)$

onde V - vértice da parábola

p - parâmetro da parábola.

03) Determine a equação reduzida de cada parábola abaixo.

a) (GeoJeca)



concavidade a favor do eixo x

1 ponto no eixo x, 2 pontos no eixo y

Portanto, y vai ao quadrado.

$p/2 = 3 \Longrightarrow p = 6$

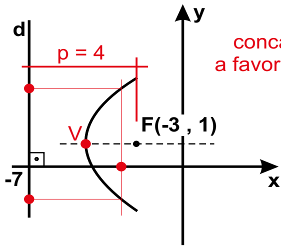
$\left.\begin{array}{l} p = 6 \\ V(5 , 4) \end{array}\right\}$ $(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V)$

$(y - 4)^2 = 2.6.(x - 5)$

$(y - 4)^2 = 12(x - 5)$ (resp)

(Compare com a resolução do exerc. 2)

b) (GeoJeca)



concavidade a favor do eixo x

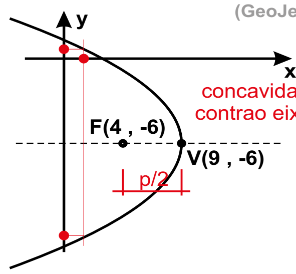
$\left.\begin{array}{l} p = 4 \\ V(-5 , 1) \end{array}\right\}$ $(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V)$

$(y - 1)^2 = 2p(x - (-5))$

$(y - 1)^2 = 8(x + 5)$ (resp)

(eq. reduzida da parábola)

c) (GeoJeca)



concavidade contrao eixo x

$p/2 = 5 \Longrightarrow p = 10$

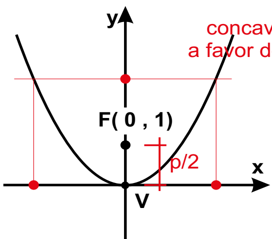
$\left.\begin{array}{l} p = 10 \\ V(9 , -6) \end{array}\right\}$ $(y - y_V)^2 = -2p(x - x_V)$

$(y - (-6))^2 = -2 . 10.(x - 9)$

$(y + 6)^2 = -20(x - 9)$ (resp)

(eq. reduzida da parábola)

d) (GeoJeca)



concavidade a favor do eixo y

$p/2 = 1 \Longrightarrow p = 2$

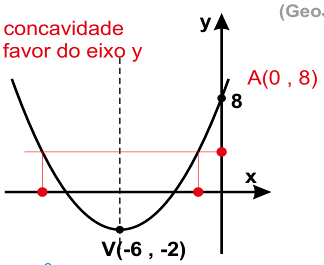
$\left.\begin{array}{l} p = 2 \\ V(0 , 0) \end{array}\right\}$ $(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$

$(x - 0)^2 = 2 . 2(y - 0)$

$x^2 = 4y$ (resp)

e) (GeoJeca)

concavidade a favor do eixo y



$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$

O ponto A(0 , 8) pertence à parábola

$(0 - (-6))^2 = 2 . p . (8 - (-2))$

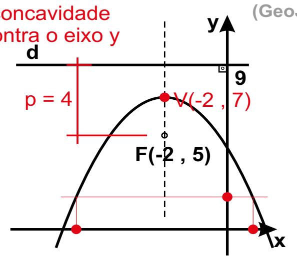
Portanto, p = 9/5

$(x - (-6))2 = 2 . (9/5)(y - (-2))$

$(x + 6)^2 = (18/5)(y + 2)$ (resp)

f) (GeoJeca)

concavidade contra o eixo y



$p = 9 - 5 = 4$

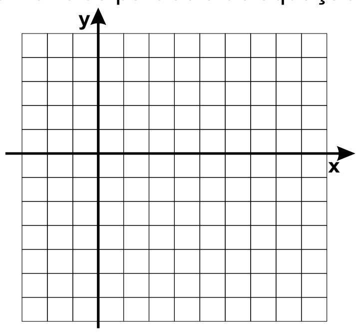
$\left.\begin{array}{l} p = 4 \\ V(-2 , 7) \end{array}\right\}$ $(x - x_V)^2 = -2p(y - y_V)$

$(x - (-2))^2 = -2 . 4(y - 7)$

$(x + 2)^2 = -8(y - 7)$ (resp)

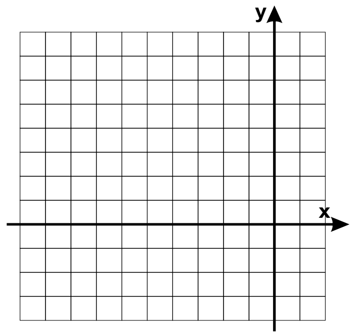
04) Determine as coordenadas do vértice e do foco, a equação da diretriz e o parâmetro da parábola de equação $(y+1)^2 = -16(x-3)$. Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

(GeoJeca)



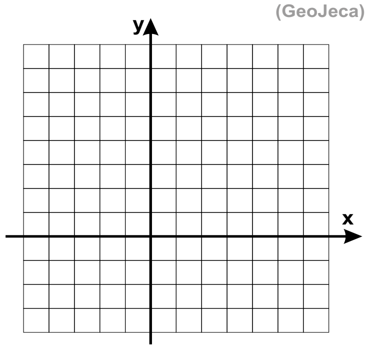
05) Determine as coordenadas do vértice e do foco, a equação da diretriz e o parâmetro da parábola de equação $(x+4)^2 = 12(y-2)$. Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

(GeoJeca)



06) Determine o parâmetro, as coordenadas do vértice e a equação reduzida da parábola que tem foco F(1 , -3) e diretriz (d) $y - 7 = 0$. Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

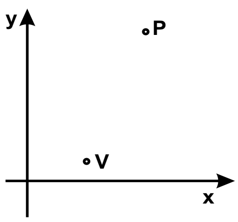
(GeoJeca)



07) Determine as equações reduzidas das parábolas que têm vértice no ponto V(3 , 1) e que passam pelo ponto P(6 , 7).

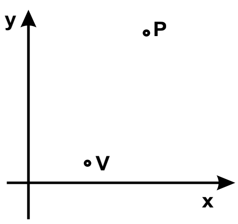
(GeoJeca)

<u>1º caso</u> - eixo de simetria paralelo ao eixo y.



(GeoJeca)

<u>2º caso</u> - eixo de simetria paralelo ao eixo x.



04) Determine as coordenadas do vértice e do foco, a equação da diretriz e o parâmetro da parábola de equação $(y + 1)^2 = -16(x - 3)$. Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

(GeoJeca)

Analisando a equação, comprova-se que é do tipo

$(y - y_V)^2 = -2p(x - x_V)$

Comparando os termos, tem-se

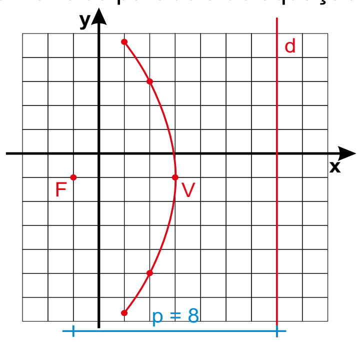
$x_V = 3$
$y_V = -1$
$-2p = -16$

Portanto:
V(3 , -1)
p = 8

-2p - concavidade contra o eixo x
p/2 = 4

Coordenadas do foco
$x_F = x_V - p/2 = 3 - 4 = -1$
$y_F = y_V = -1$
F(-1 , -1)

Equação da diretriz
(d) x - 7 = 0



05) Determine as coordenadas do vértice e do foco, a equação da diretriz e o parâmetro da parábola de equação $(x + 4)^2 = 12(y - 2)$. Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

(GeoJeca)

Analisando a equação, comprova-se que é do tipo

$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$

Comparando os termos, tem-se

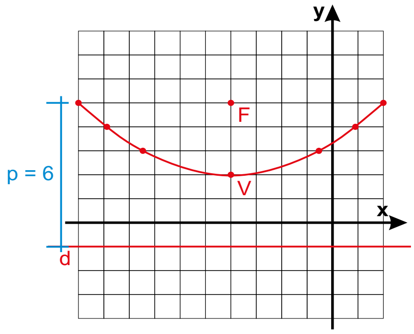
$x_V = -4$
$y_V = 2$
$2p = 12$

Portanto:
V(-4 , 2)
p = 6

2p - concavidade a favor do eixo y
p/2 = 3

Coordenadas do foco
$x_F = x_V = -4$
$y_F = y_V + p/2 = 2 + 3 = 5$
F(-4 , 5)

Equação da diretriz
(d) y + 1 = 0



06) Determine o parâmetro, as coordenadas do vértice e a equação reduzida da parábola que tem foco F(1 , -3) e diretriz (d) y - 7 = 0. Faça um esboço do gráfico dessa parábola.

(GeoJeca)

parâmetro - distância entre a diretriz e o foco.

p = 7 - (-3) = 10

Se a diretriz é uma reta paralela ao eixo x, então a parábola tem eixo de simetria paralelo ao eixo y.

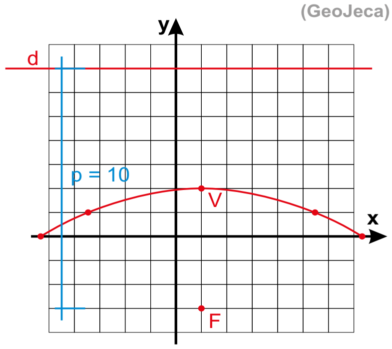
Se o foco está abaixo da diretriz, então a parábola tem concavidade para baixo.

$(x - x_V)^2 = -2p(y - y_V)$

$x_V = x_F = 1$
$y_V = y_F + p/2 = -3 + 10/2 = 2$
Portanto, V(1 , 2)

$(x - 1)^2 = -2 \cdot 10(y - 2)$

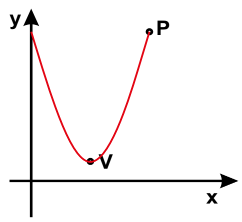
$(x - 1)^2 = -20(y - 2)$ (eq. reduzida)



07) Determine as equações reduzidas das parábolas que têm vértice no ponto V(3 , 1) e que passam pelo ponto P(6 , 7).

(GeoJeca)

<u>1º caso</u> - eixo de simetria paralelo ao eixo y.



$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$

$(x - 3)^2 = 2p(y - 1)$

Se o ponto P pertence á parábola, então as coordenadas de P satisfazem a equação da parábola.

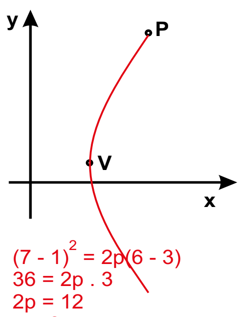
$(6 - 3)^2 = 2p(7 - 1)$
$9 = 2p \cdot 6$
$2p = 3/2$
$p = 9/12 = 3/4$

Equação reduzida da parábola

$(x - 3)^2 = \frac{3}{2}(y - 1)$ (resp)

(GeoJeca)

<u>2º caso</u> - eixo de simetria paralelo ao eixo x.



$(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V)$

$(y - 1)^2 = 2p(x - 3)$

Se o ponto P pertence á parábola, então as coordenadas de P satisfazem a equação da parábola.

$(7 - 1)^2 = 2p(6 - 3)$
$36 = 2p \cdot 3$
$2p = 12$
$p = 6$

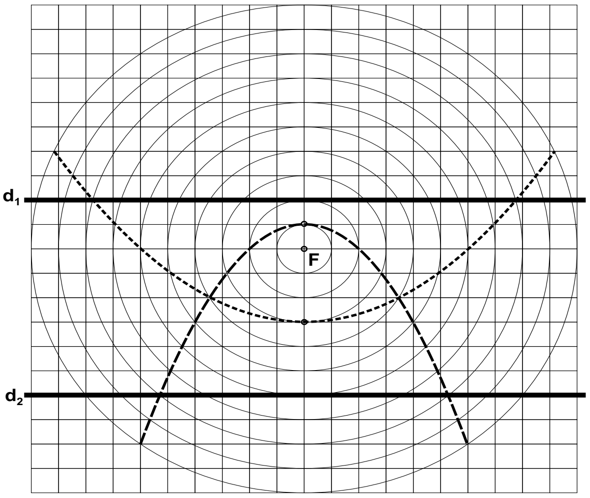
Equação reduzida da parábola

$(y - 1)^2 = 12(x - 3)$ (resp)

Respostas da aula 12.

Respostas da Aula 12

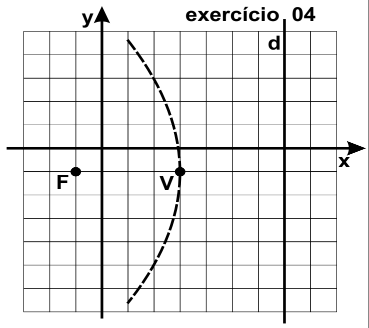
01)



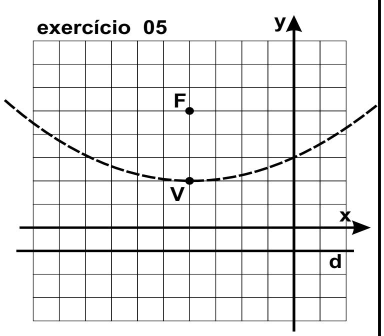
02) $(y-4)^2 = 12(x-5)$

03) a) $(y-4)^2 = 12(x-5)$
b) $(y-1)^2 = 8(x+5)$
c) $(y+6)^2 = -20(x-9)$
d) $x^2 = 4y$
e) $(x+6)^2 = (18/5).(y+2)$
f) $(x+2)^2 = -8(y-7)$

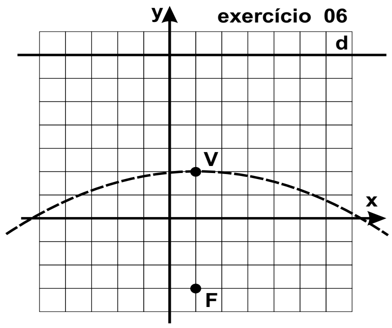
04) V(3 , -1)
F(-1 , -1)
(d) $x - 7 = 0$
$p = 8$



05) V(-4 , 2)
F(-4 , 5)
(d) $y + 1 = 0$
$p = 6$



06) $p = 10$
V(1 , 2)
$(x-1)^2 = -20(y-2)$



07) 1º caso $(x-3)^2 = \frac{3}{2}(y-1)$

2º caso $(y-1)^2 = 12(x-3)$

Favor comunicar eventuais erros deste trabalho através do e-mail
jecajeca@uol.com.br Obrigado.

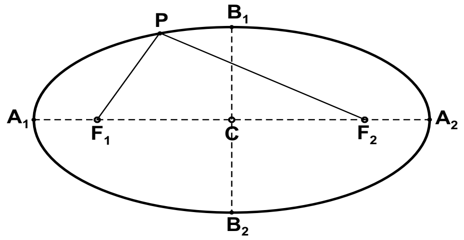
GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

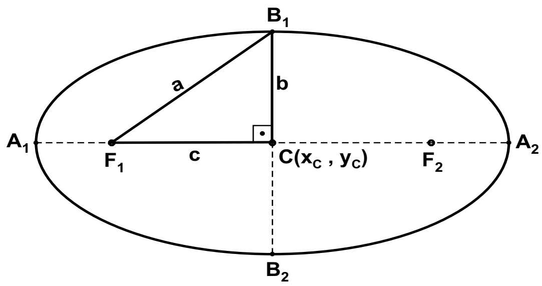
Geometria Analítica
Aula 13
Estudo das cônicas - Elipse.

I - Elipse.

Dados dois pontos F_1 e F_2 (focos da elipse), denomina-se elipse o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a esses dois pontos é a constante **2a**, maior que a distância **2c** entre esses dois pontos.



Resumindo $PF_1 + PF_2 = 2a$



Elementos da elipse.

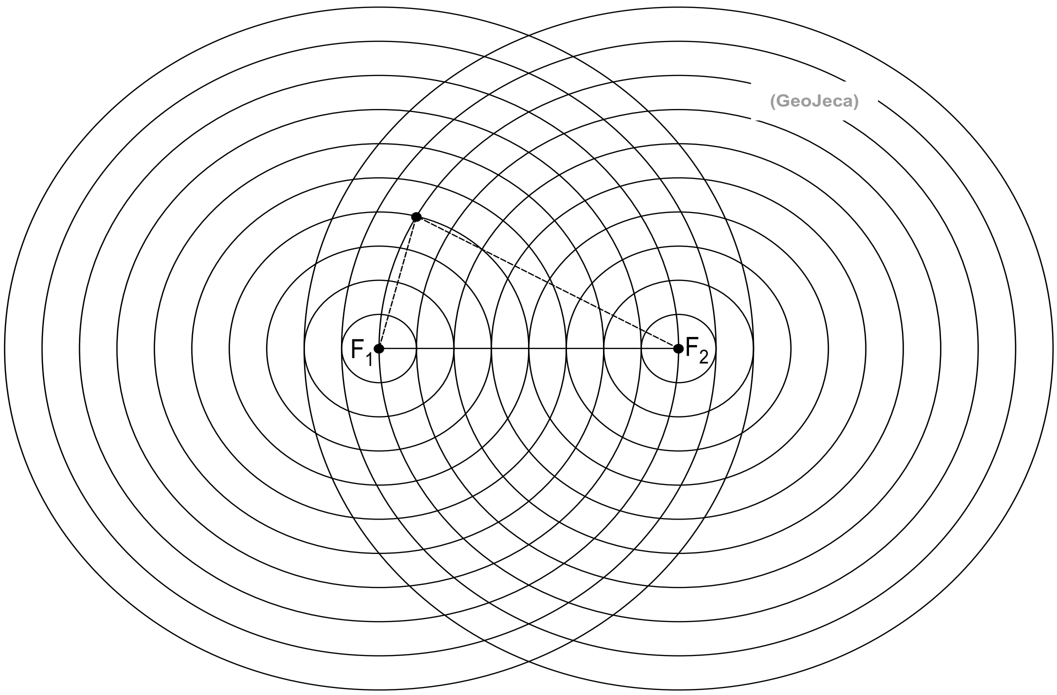
$\overline{A_1A_2} = 2a$ - eixo maior.
$\overline{B_1B_2} = 2b$ - eixo menor.
$\overline{F_1F_2} = 2c$ - distância focal.
$C(x_c , y_c)$ - centro da elipse

Relação fundamental.

$a^2 = b^2 + c^2$

$e = \dfrac{c}{a}$ - excentricidade

01) Na figura abaixo, usando a definição, desenhe uma elipse impondo que a soma das distâncias de um ponto qualquer do plano aos pontos F_1 e F_2 seja igual a 12. (supor os círculos com raios iguais a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.



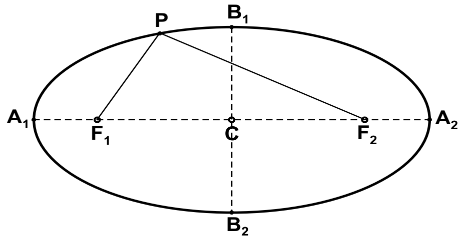
GeoJeca

Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

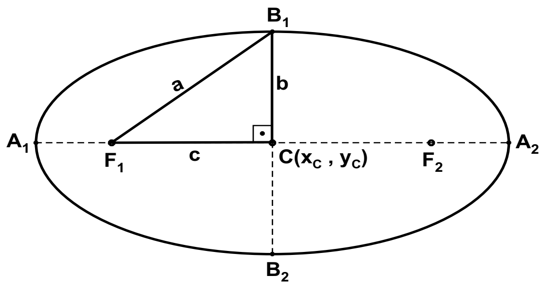
Geometria Analítica
Aula 13
Estudo das cônicas - Elipse.

I - Elipse.

Dados dois pontos F_1 e F_2 (focos da elipse), denomina-se elipse o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias a esses dois pontos é a constante **2a**, maior que a distância **2c** entre esses dois pontos.



Resumindo $PF_1 + PF_2 = 2a$



Elementos da elipse.

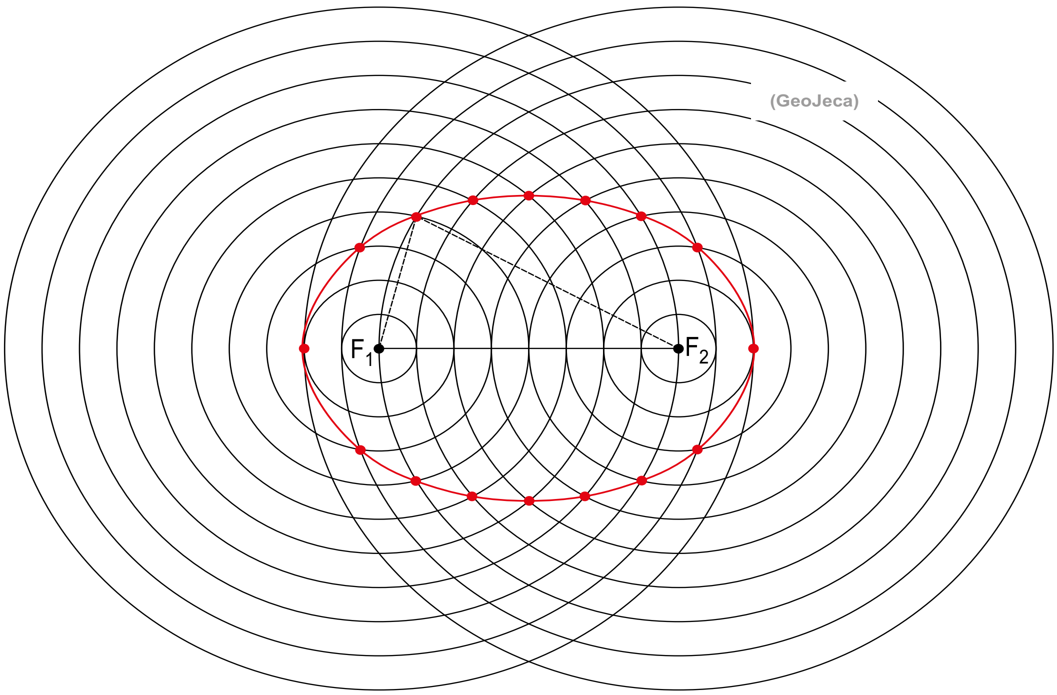
$\overline{A_1A_2} = 2a$ - eixo maior.
$\overline{B_1B_2} = 2b$ - eixo menor.
$\overline{F_1F_2} = 2c$ - distância focal.
$C(x_c, y_c)$ - centro da elipse

Relação fundamental.

$a^2 = b^2 + c^2$

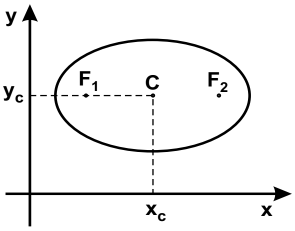
$e = \frac{c}{a}$ - excentricidade

01) Na figura abaixo, usando a definição, desenhe uma elipse impondo que a soma das distâncias de um ponto qualquer do plano aos pontos F_1 e F_2 seja igual a 12. (supor os círculos com raios iguais a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.



Equações reduzidas das elipses com eixos paralelos aos eixos coordenados.

Eixo maior paralelo ao eixo x.

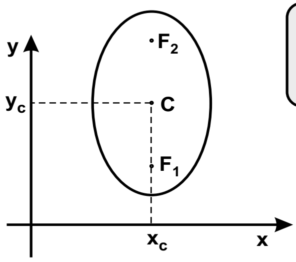


$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

$F_1(x_c - c\ ,\ y_c)$

$F_2(x_c + c\ ,\ y_c)$

Eixo maior paralelo ao eixo y.



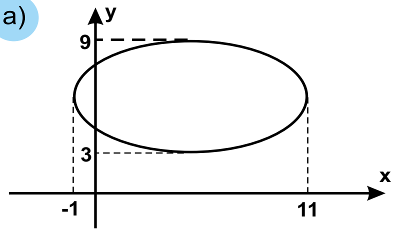
$$\frac{(x - x_c)^2}{b^2} + \frac{(y - y_c)^2}{a^2} = 1$$

$F_1(x_c\ ,\ y_c - c)$

$F_2(x_c\ ,\ y_c + c)$

02) Determine a equação reduzida, os focos, o centro, o eixo maior, o eixo menor, a distância focal e também a excentricidade de cada elipse abaixo.

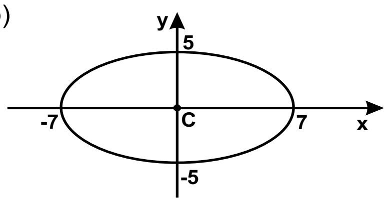
a) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

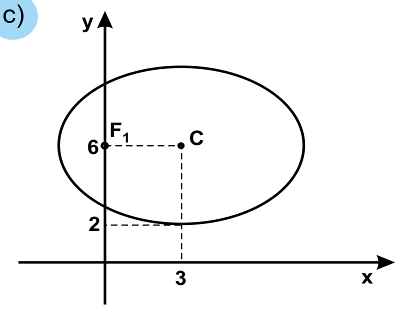
b) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

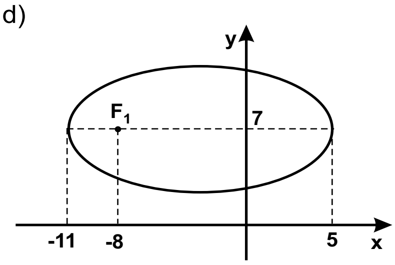
c) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

d) (GeoJeca)



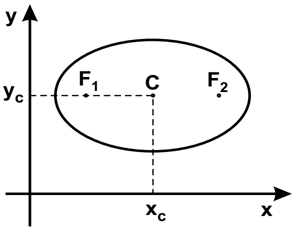
C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

Jeca 67

Equações reduzidas das elipses com eixos paralelos aos eixos coordenados.

Eixo maior paralelo ao eixo x.

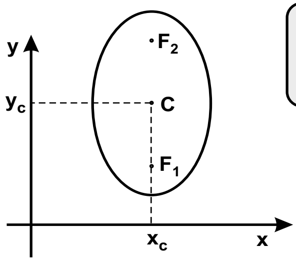


$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

$F_1(x_C - c \ , \ y_C)$

$F_2(x_C + c \ , \ y_C)$

Eixo maior paralelo ao eixo y.



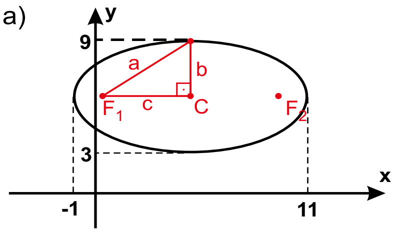
$$\frac{(x - x_C)^2}{b^2} + \frac{(y - y_C)^2}{a^2} = 1$$

$F_1(x_C \ , \ y_C - c)$

$F_2(x_C \ , \ y_C + c)$

02) Determine a equação reduzida, os focos, o centro, o eixo maior, o eixo menor, a distância focal e também a excentricidade de cada elipse abaixo.

a) (GeoJeca)



$x_C = (11 + (-1))/2 = 10/2 = 5$
$y_C = (3 + 9)/2 = 6$
Portanto, C(5 . 6)

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 3\sqrt{3}/6$
$e = \sqrt{3}/2$

2a - eixo maior
$2a = 11 - (-1) = 12$
$a = 6$

2b - eixo menor
$2b = 9 - 3 = 6$
$b = 3$

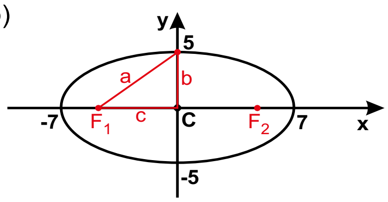
$a^2 = b^2 + c^2$
$6^2 = 3^2 + c^2$
$c^2 = 36 - 9 = 27$
$c = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x - 5)^2}{6^2} + \frac{(y - 6)^2}{3^2} = 1$$

(eq. reduzida da elipse) $$\frac{(x - 5)^2}{36} + \frac{(y - 6)^2}{9} = 1$$

C(5 , 6)	$F_1(5 - 3\sqrt{3} \ , \ 6)$	$F_2(5 + 3\sqrt{3} \ , \ 6)$	
2a = 12	2b = 6	$2c = 6\sqrt{3}$	$e = \sqrt{3}/2$

b) (GeoJeca)



C(0 , 0)

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 2\sqrt{6}/7$

2a - eixo maior
$2a = 7 - (-7) = 14$
$a = 7$

2b - eixo menor
$2b = 5 - (-5) = 10$
$b = 5$

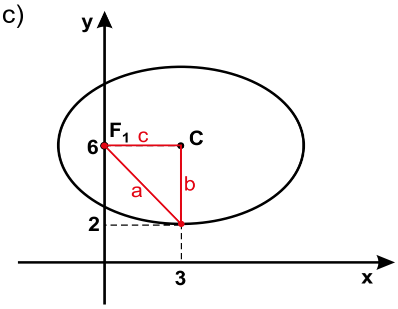
$a^2 = b^2 + c^2$
$7^2 = 5^2 + c^2$
$c^2 = 49 - 25 = 24$
$c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x - 0)^2}{7^2} + \frac{(y - 0)^2}{5^2} = 1$$

(eq. reduzida da elipse) $$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$$

C(0 , 0)	$F_1(-2\sqrt{6} \ , \ 0)$	$F_2(2\sqrt{6} \ , \ 0)$	
2a = 14	2b = 10	$2c = 4\sqrt{6}$	$e = 2\sqrt{6}/7$

c) (GeoJeca)



C(3 , 6)

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 3/5$

$b = 6 - 2 = 4$
2b - eixo menor
$2b = 8$

$c = 3 - 0 = 3$
2c - distância focal
$2c = 6$

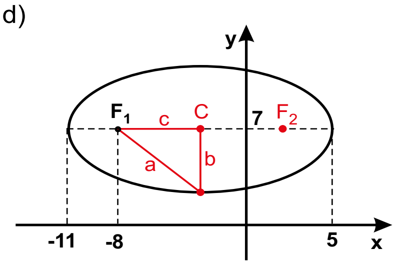
$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = 4^2 + 3^2 = 25$
$a = 5$
2a - eixo maior
$2a = 10$

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x - 3)^2}{5^2} + \frac{(y - 6)^2}{4^2} = 1$$

(eq. reduzida da elipse) $$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y - 6)^2}{16} = 1$$

C(3 , 6)	$F_1(0 \ , \ 6)$	$F_2(6 \ , \ 6)$	
2a = 10	2b = 8	2c = 6	e = 3/5

d) (GeoJeca)



$x_C = (-11 + 5)/2 = -6/2 = -3$
$y_C = y_{F1} = 7$
Portanto, C(-3 , 7)

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 5/8$

2a - eixo maior
$2a = 5 - (-11) = 16$
$a = 8$

2c - distância focal
$c = x_C - x_F$
$c = -3 - (-8) = 5$

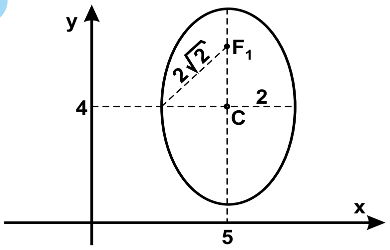
$a^2 = b^2 + c^2$
$8^2 = b^2 + 5^2$
$b^2 = 64 - 25 = 39$
$b = \sqrt{39}$

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x - (-3))^2}{8^2} + \frac{(y - 7)^2}{(\sqrt{39})^2} = 1$$

(eq. reduzida da elipse) $$\frac{(x + 3)^2}{64} + \frac{(y - 7)^2}{39} = 1$$

C(-3 , 7)	$F_1(-8 \ , \ 7)$	$F_2(2 \ , \ 7)$	
2a = 16	$2b = 2\sqrt{39}$	2c = 10	e = 5/8

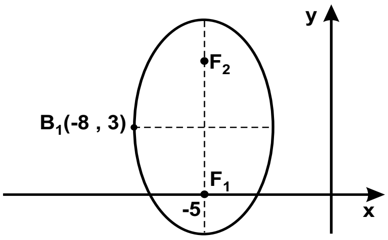
e) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

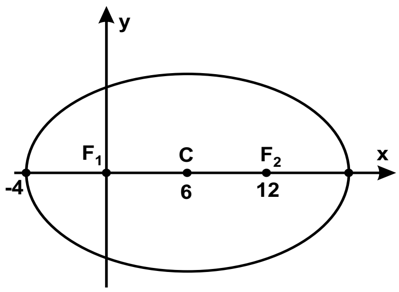
f) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

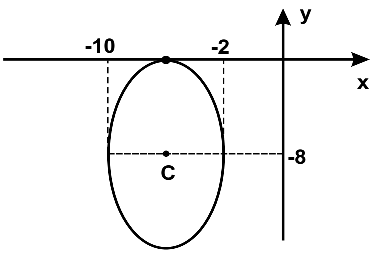
g) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

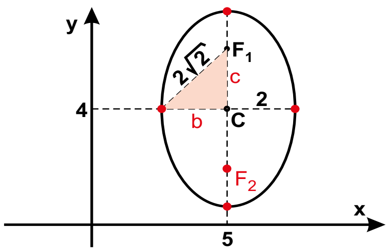
h) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

e) (GeoJeca)



$b = 2$
2b - eixo menor
$2b = 2 \cdot 2 = 4$

$a = 2\sqrt{2}$
2a - eixo maior
$2a = 4\sqrt{2}$

$a^2 = b^2 + c^2$
$(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + c^2$
$c^2 = 8 - 4 = 4$
$c = 2$
2c - distância focal
$2c = 4$

Centro da elipse
C(5 , 4)

Foco F_1
$F_1(5\ ,\ 6)$
Foco F_2
$F_2(5\ ,\ 2)$

Eixo maior paralelo ao eixo y.

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 2/(2\sqrt{2})$
$e = \sqrt{2}/2$

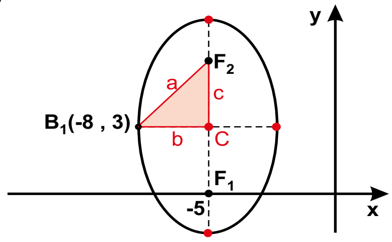
$$\frac{(x - x_C)^2}{b^2} + \frac{(y - y_C)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x - 5)^2}{2^2} + \frac{(y - 4)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$

(eq. reduzida da elipse) $$\frac{(x - 5)^2}{4} + \frac{(y - 4)^2}{8} = 1$$

C(5 , 4)	$F_1(5\ ,\ 6)$	$F_2(5\ ,\ 2)$	
$2a = 4\sqrt{2}$	$2b = 4$	$2c = 4$	$e = \sqrt{2}/2$

f) (GeoJeca)



$b = -5 - (-8) = 3$
2b - eixo menor
$2b = 2 \cdot 3 = 6$

$c = 3 - 0 = 3$
2c - distância focal
$2c = 2 \cdot 3 = 6$

$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = 3^2 + 3^2$
$a^2 = 18$
$a = 3\sqrt{2}$
2a - eixo maior
$2a = 6\sqrt{2}$

Centro da elipse
C(-5 , 3)

Foco F_1
$F_1(-5\ ,\ 0)$
Foco F_2
$F_2(-5\ ,\ 6)$

Eixo maior paralelo ao eixo y.

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 3/(3\sqrt{2})$
$e = \sqrt{2}/2$

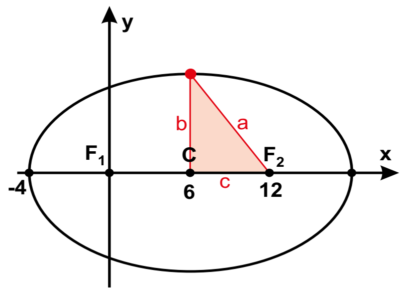
$$\frac{(x - x_C)^2}{b^2} + \frac{(y - y_C)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x - (-5))^2}{3^2} + \frac{(y - 3)^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$$

(eq. reduzida da elipse) $$\frac{(x + 5)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{18} = 1$$

C(-5 , 3)	$F_1(-5\ ,\ 0)$	$F_2(-5\ ,\ 6)$	
$2a = 6\sqrt{2}$	$2b = 6$	$2c = 6$	$e = \sqrt{2}/2$

g) (GeoJeca)



$c = 12 - 6 = 6$
2c - dist. focal
$2c = 12$

$a = 6 - (-4) = 10$
2a - eixo maior
$2a = 20$

$a^2 = b^2 + c^2$
$10^2 = b^2 + 6^2$
$b^2 = 100 - 36 = 64$
$b = 8$
2b - eixo menor
$2b = 16$

Centro
C(6 , 0)

Foco F_1
$F_1(0\ ,\ 0)$
Foco F_2
$F_2(12\ ,\ 0)$

Eixo maior paralelo ao eixo x.

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 6/10$
$e = 3/5$

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

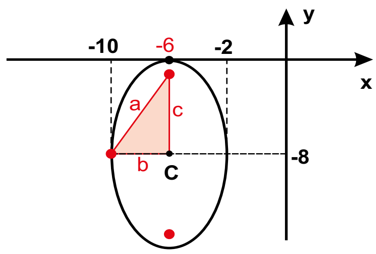
$$\frac{(x - 6)^2}{10^2} + \frac{(y - 0)^2}{8^2} = 1$$

$$\frac{(x - 6)^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

(eq. reduzida da elipse)

C(6 , 0)	$F_1(0\ ,\ 0)$	$F_2(12\ ,\ 0)$	
$2a = 20$	$2b = 16$	$2c = 12$	$e = 3/5$

h) (GeoJeca)



2b - eixo menor
$2b = -2 - (-10) = 8$
$b = 4$

$a = 0 - (-8) = 8$
2a - eixo maior
$2a = 16$

$a^2 = b^2 + c^2$
$8^2 = 4^2 + c^2$
$c^2 = 64 - 16 = 48$
$c = 4\sqrt{3}$
2c - dist. focal
$2c = 8\sqrt{3}$

Centro
C(-6 , -8)

Foco F_1
$F_1(-6\ ,\ -8 + 4\sqrt{3})$
Foco F_2
$F_2(-6\ ,\ -8 - 4\sqrt{3})$

Eixo maior paralelo ao eixo y.

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 4\sqrt{3}/8$
$e = \sqrt{3}/2$

$$\frac{(x - x_C)^2}{b^2} + \frac{(y - y_C)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x - (-6))^2}{4^2} + \frac{(y - (-8))^2}{8^2} = 1$$

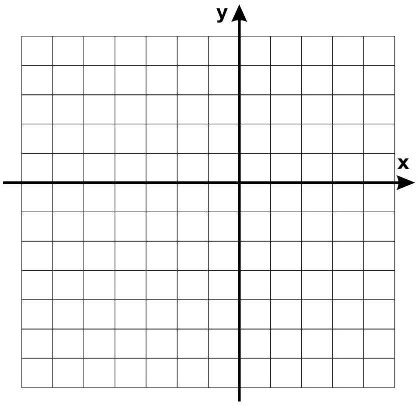
(eq. reduzida da elipse) $$\frac{(x + 6)^2}{16} + \frac{(y + 8)^2}{64} = 1$$

C(-6 , -8)	$F_1(-6\ ,\ -8 + 4\sqrt{3})$	$F_2(-6\ ,\ -8 - 4\sqrt{3})$	
$2a = 16$	$2b = 8$	$2c = 8\sqrt{3}$	$e = \sqrt{3}/2$

Jeca 68

03) Determine a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro e a equação reduzida da elipse de excentricidade 0,5 e focos (-4 , -1) e (2 , -1). Faça um esboço do gráfico da elipse.

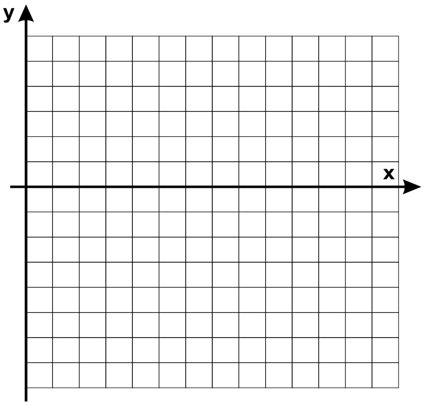
(GeoJeca)



04) Determine a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro, a excentricidade e as coordenadas dos focos da elipse de equação reduzida $\frac{(x-8)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1$.

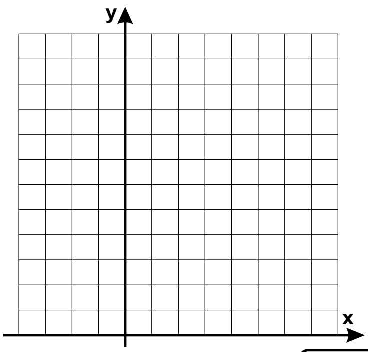
Faça um esboço da elipse.

(GeoJeca)



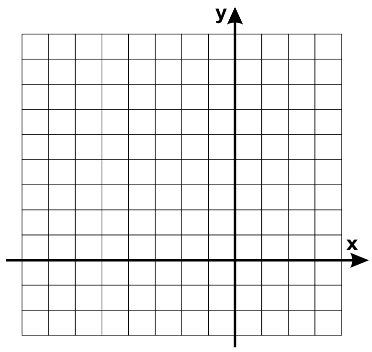
05) Determine o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro e dos focos e a excentricidade da elipse de equação $9(x-2)^2 + 25(y-6)^2 = 225$. Faça um esboço do gráfico da elipse.

(GeoJeca)



06) Sendo $A_1(-1 , 9)$ e $A_2(-1 , -3)$ as extremidades do eixo maior e $B_1(-4 , 3)$ e $B_2(2 , 3)$ as extremidades do eixo menor de uma elipse, faça um esboço do gráfico da mesma e determine as coordenadas do centro, a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas dos focos, a excentricidade e a equação reduzida dessa elipse.

(GeoJeca)



03) Determine a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro e a equação reduzida da elipse de excentricidade 0,5 e focos (-4 , -1) e (2 , -1). Faça um esboço do gráfico da elipse.

(GeoJeca)

$F_1(-4\ ,\ -1)$
$F_2(2\ ,\ -1)$
2c - distância focal
$2c = 2 - (-4) = 6$
$c = 3$

Centro
$C((-4 + 2)/2\ ,\ -1)$
$C(-1\ ,\ -1)$

Excentricidade
$e = c/a$
$0,5 = 3/a$
Portanto, $a = 6$

2a - eixo maior
$2a = 12$

$a^2 = b^2 + c^2$
$6^2 = b^2 + 3^2$
$b^2 = 36 - 9 = 27$
$b = 3\sqrt{3}$
2b - eixo menor
$2b = 6\sqrt{3}$

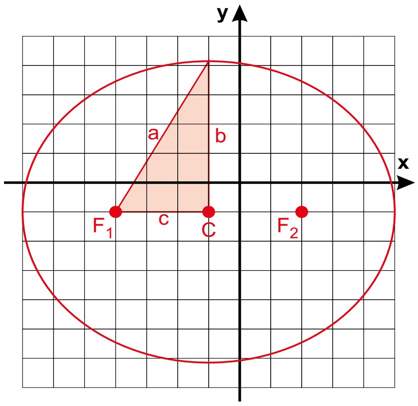
Se os dois focos têm a mesma ordenada, então o eixo focal e o eixo maior são paralelos ao eixo x.

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - (-1))^2}{6^2} + \frac{(y - (-1))^2}{(3\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\frac{(x + 1)^2}{36} + \frac{(y + 1)^2}{27} = 1$$

(eq. reduzida da elipse)



04) Determine a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro, a excentricidade e as coordenadas dos focos da elipse de equação reduzida $\frac{(x-8)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1$.

Faça um esboço da elipse.

(GeoJeca)

Da equação, tem-se
$a^2 = 36$
$a = 6$
2a - eixo maior
$2a = 12$

$b^2 = 16$
$b = 4$
2b - eixo menor
$2b = 8$

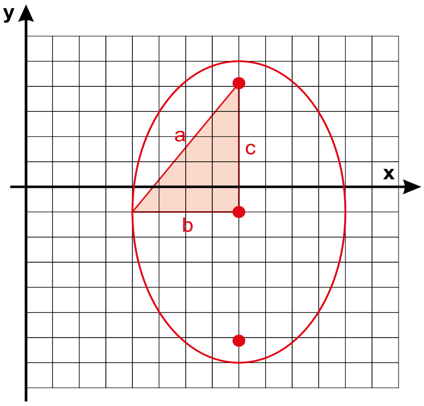
$a^2 = b^2 + c^2$
$6^2 = 4^2 + c^2$
$c^2 = 36 - 16 = 20$
$c = 2\sqrt{5}$
2c - dist. focal
$2c = 4\sqrt{5}$

Centro
$C(8\ ,\ -1)$

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 2\sqrt{5}/6$
$e = \sqrt{5}/3$

O termo $a^2 = 36$ é denominador do termo em y. Portanto a elipse tem eixo maior paralelo ao eixo y.

Foco F_1
$F_1(8\ ,\ -1 - 2\sqrt{5})$
Foco F_2
$F_2(8\ ,\ -1 + 2\sqrt{5})$



05) Determine o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas do centro e dos focos e a excentricidade da elipse de equação $9(x - 2)^2 + 25(y - 6)^2 = 225$. Faça um esboço do gráfico da elipse.

(GeoJeca)

Achar a equação reduzida

$$\frac{9(x - 2)^2}{225} + \frac{25(y - 6)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 6)^2}{9} = 1$$

Centro
$C(2\ ,\ 6)$

$a^2 = 25$
$a = 5$
2a - eixo maior
$2a = 10$

$b^2 = 9$
$b = 3$
2b - eixo menor
$2b = 6$

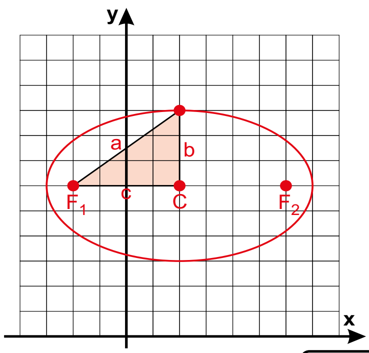
$a^2 = b^2 + c^2$
$5^2 = 3^2 + c^2$
$c^2 = 25 - 9 = 16$
$c = 4$
2c - distância focal
$2c = 8$

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 4/5$

O termo $a^2 = 25$ é denominador do termo em x. Portanto a elipse tem eixo maior paralelo ao eixo x.

Foco F_1
$F_1(2 - 4\ ,\ 6)$
$F_1(-2\ ,\ 6)$

Foco F_2
$F_2(2 + 4\ ,\ 6)$
$F_2(6\ ,\ 6)$



06) Sendo $A_1(-1 , 9)$ e $A_2(-1 , -3)$ as extremidades do eixo maior e $B_1(-4 , 3)$ e $B_2(2 , 3)$ as extremidades do eixo menor de uma elipse, faça um esboço do gráfico da mesma e determine as coordenadas do centro, a distância focal, o eixo maior, o eixo menor, as coordenadas dos focos, a excentricidade e a equação reduzida dessa elipse.

(GeoJeca)

As coordenadas do centro são as coordenadas do ponto médio do eixo maior.

$A_1(-1\ ,\ 9)$
$A_2(-1\ ,\ -3)$
$C(-1\ ,\ 3)$

2a - eixo maior
$2a = 9 - (-3) = 12$
$a = 6$

2b - eixo menor
$2b = 2 - (-4) = 6$
$b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2$
$6^2 = 3^2 + c^2$
$c^2 = 36 - 9 = 27$
$c = 3\sqrt{3}$
2c - distância focal
$2c = 6\sqrt{3}$

Excentricidade
$e = c/a$
$e = 3\sqrt{3}/6$
$e = \sqrt{3}/2$

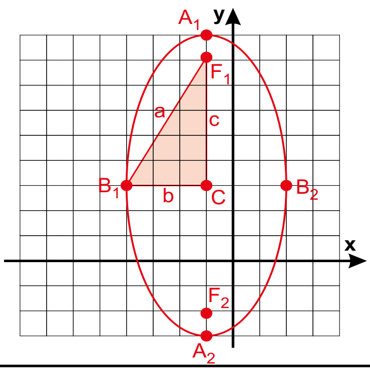
Foco F_1
$F_1(-1\ ,\ 3 + 3\sqrt{3})$

Foco F_2
$F_2(-1\ ,\ 3 - 3\sqrt{3})$

O eixo maior e o eixo focal são paralelos ao eixo y.

$$\frac{(x - x_C)^2}{b^2} + \frac{(y - y_C)^2}{a^2} = 1$$

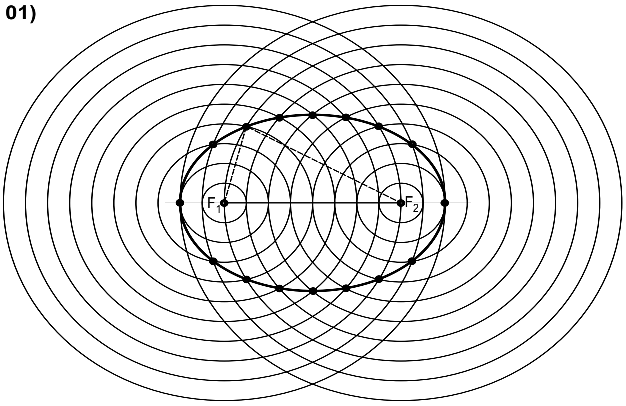
$$\frac{(x + 1)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{36} = 1$$



Respostas da aula 13.

Respostas da Aula 13

01)



02) a) $\dfrac{(x-5)^2}{36} + \dfrac{(y-6)^2}{9} = 1$

C(5 , 6) $F_1(5 - 3\sqrt{3}\ ,\ 6)$ $F_2(5 + 3\sqrt{3}\ ,\ 6)$

2a = 12 2b = 6 $2c = 6\sqrt{3}$ $e = \sqrt{3}/2$

02) b) $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

C(0 , 0) $F_1(-2\sqrt{6}\ ,\ 0)$ $F_2(2\sqrt{6}\ ,\ 0)$

2a = 14 2b = 10 $2c = 4\sqrt{6}$ $e = 2\sqrt{6}/7$

02) c) $\dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y-6)^2}{16} = 1$

C(3 , 6) $F_1(0\ ,\ 6)$ $F_2(6\ ,\ 6)$

2a = 10 2b = 8 2c = 6 e = 3 / 5

02) d) $\dfrac{(x+3)^2}{64} + \dfrac{(y-7)^2}{39} = 1$

C(-3 , 7) $F_1(-8\ ,\ 7)$ $F_2(2\ ,\ 7)$

2a = 16 $2b = 2\sqrt{39}$ 2c = 10 e = 5 / 8

02) e) $\dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{(y-4)^2}{8} = 1$

C(5 , 4) $F_1(5\ ,\ 6)$ $F_2(5\ ,\ 2)$

$2a = 4\sqrt{2}$ 2b = 4 2c = 4 $e = \sqrt{2}/2$

02) f) $\dfrac{(x+5)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{18} = 1$

C(-5 , 3) $F_1(-5\ ,\ 0)$ $F_2(-5\ ,\ 6)$

$2a = 6\sqrt{2}$ 2b = 6 2c = 6 $e = \sqrt{2}/2$

02) g) $\dfrac{(x-6)^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

C(6 , 0) $F_1(0\ ,\ 0)$ $F_2(12\ ,\ 0)$

2a = 20 2b = 16 2c = 12 e = 3 / 5

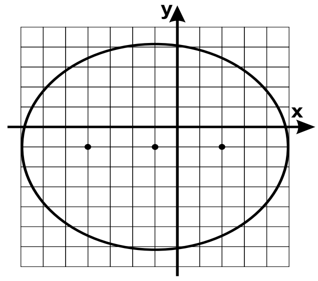
02) h) $\dfrac{(x+6)^2}{16} + \dfrac{(y+8)^2}{64} = 1$

C(-6 , -8) $F_1(-6\ ,\ -8 + 4\sqrt{3})$ $F_2(-6\ ,\ -8 - 4\sqrt{3})$

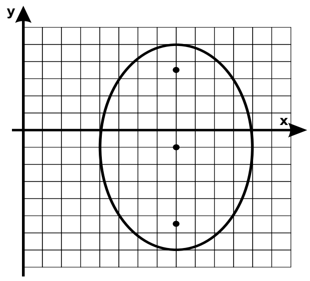
2a = 16 2b = 8 $2c = 8\sqrt{3}$ $e = \sqrt{3}/2$

03) 2c = 6
2a = 12
$2b = 6\sqrt{3}$
C(-1 , -1)

$\dfrac{(x+1)^2}{36} + \dfrac{(y+1)^2}{27} = 1$

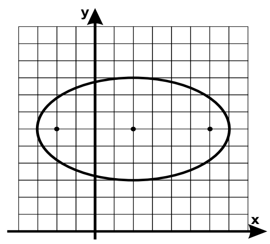


04) $2c = 4\sqrt{5}$
2a = 12
2b = 8
C(8 , -1)
$e = \sqrt{5}/3$
$F_1(8\ ,\ -1 + 2\sqrt{5})$
$F_2(8\ ,\ -1 - 2\sqrt{5})$



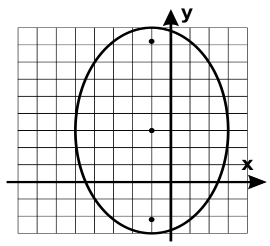
05) 2a = 10
2b = 6
C(2 , 6)
$F_1(-2\ ,\ 6)$
$F_2(6\ ,\ 6)$
e = 4/5

$\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y-6)^2}{9} = 1$



06) C(-1 , 3)
$2c = 6\sqrt{3}$
2a = 12
2b = 6
$F_1(-1\ ,\ 3 + 3\sqrt{3})$
$F_2(-1\ ,\ 3 - 3\sqrt{3})$
$e = \sqrt{3}/2$

$\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{36} = 1$



Favor comunicar eventuais erros deste trabalho através do e-mail
jecajeca@uol.com.br Obrigado.

GeoJeca

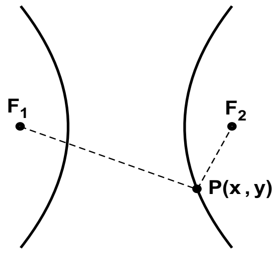
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca (Lucas Octavio de Souza) (São João da Boa Vista - SP)

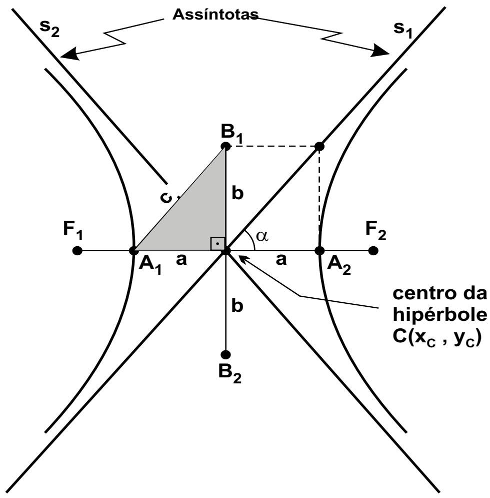
Geometria Analítica
Aula 14
Estudo das cônicas - Hipérbole.

I - Hipérbole.

Dados dois pontos F_1 e F_2 (focos da hipérbole), denomina-se hipérbole o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a esses dois pontos é a constante **2a**, menor que a distância **2c** entre esses dois pontos.

Resumindo $|PF_1 - PF_2| = 2a$





Elementos da hipérbole

$A_1A_2 = 2a$ - eixo real.
$B_1B_2 = 2b$ - eixo imaginário.
F_1 e F_2 - focos da hipérbole.
$F_1F_2 = 2c$ - distância focal.
$C(x_C , y_C)$ - centro da hipérbole.

Coeficiente angular das assíntotas.

$$m_{s_1} = \frac{b}{a}$$

$$m_{s_2} = \frac{-b}{a}$$

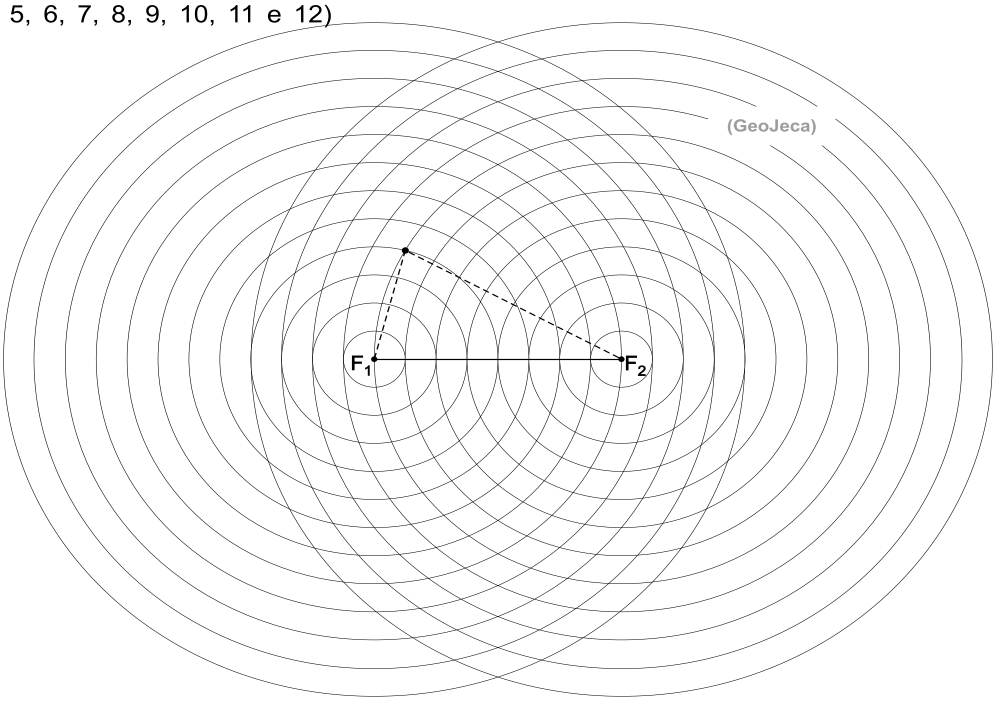
Relação fundamental.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Excentricidade.

$$e = \frac{c}{a}$$

01) Na figura abaixo, usando a definição, desenhe uma hipérbole impondo que o módulo da diferença das distâncias de um ponto qualquer do plano aos pontos F_1 e F_2 seja igual a 4. (supor os círculos concêntricos com raios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12)



GeoJeca

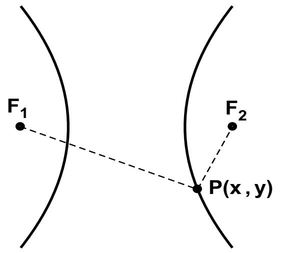
Estudos sobre Geometria realizados pelo prof. Jeca
(Lucas Octavio de Souza)
(São João da Boa Vista - SP)

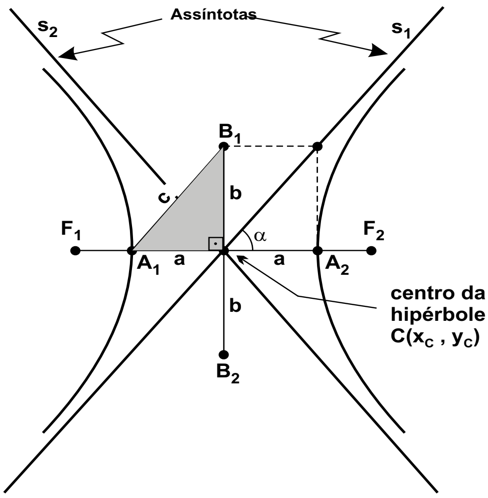
Geometria Analítica
Aula 14
Estudo das cônicas - Hipérbole.

I - Hipérbole.

Dados dois pontos **F_1** e **F_2** (focos da hipérbole), denomina-se hipérbole o conjunto dos pontos do plano cujo módulo da diferença das distâncias a esses dois pontos é a constante **2a**, menor que a distância **2c** entre esses dois pontos.

Resumindo $\left| PF_1 - PF_2 \right| = 2a$





Elementos da hipérbole

$A_1A_2 = 2a$ - eixo real.
$B_1B_2 = 2b$ - eixo imaginário.
F_1 e F_2 - focos da hipérbole.
$F_1F_2 = 2c$ - distância focal.
$C(x_C , y_C)$ - centro da hipérbole.

Coeficiente angular das assíntotas.

$$m_{s_1} = \frac{b}{a}$$

$$m_{s_2} = \frac{-b}{a}$$

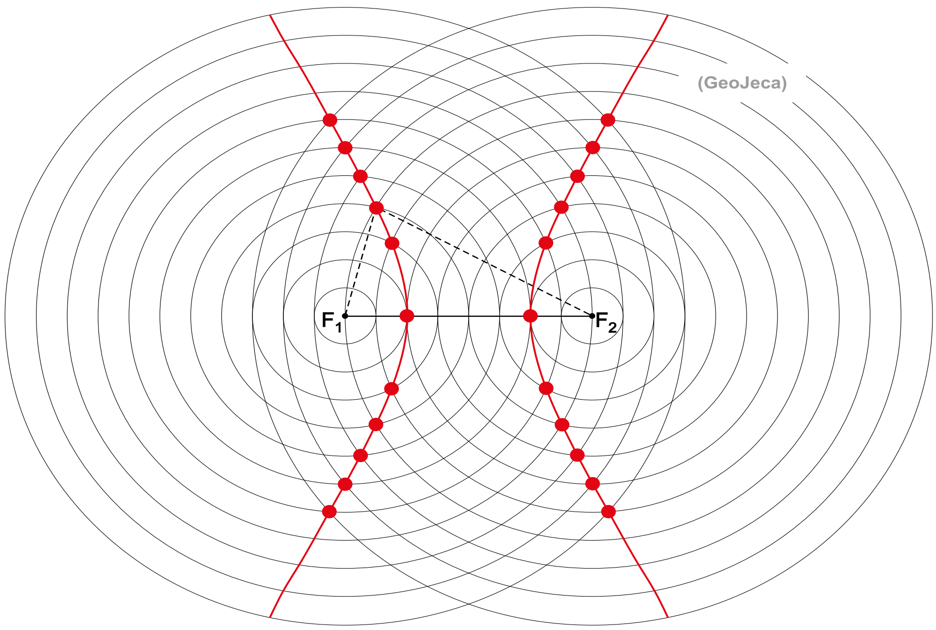
Relação fundamental.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Excentricidade.

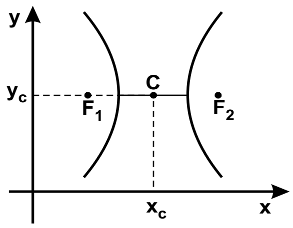
$$e = \frac{c}{a}$$

01) Na figura abaixo, usando a definição, desenhe uma hipérbole impondo que o módulo da diferença das distâncias de um ponto qualquer do plano aos pontos F_1 e F_2 seja igual a 4. (supor os círculos concêntricos com raios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12)



Equações reduzidas das hipérboles com eixo real paralelo aos eixos coordenados.

Eixo real paralelo ao eixo x.

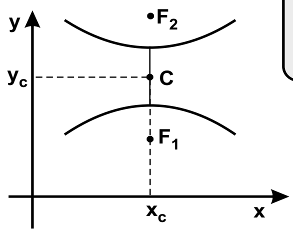


$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

$F_1(x_c - c\ ,\ y_c)$

$F_2(x_c + c\ ,\ y_c)$

Eixo real paralelo ao eixo y.



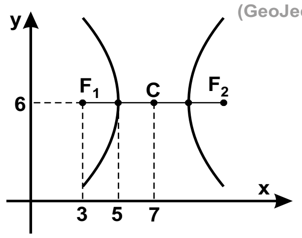
$$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} - \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1$$

$F_1(x_c\ ,\ y_c - c)$

$F_2(x_c\ ,\ y_c + c)$

02) Determine a equação reduzida, os focos, o centro, o eixo real, o eixo imaginário, a distância focal e também a excentricidade de cada hipérbole abaixo.

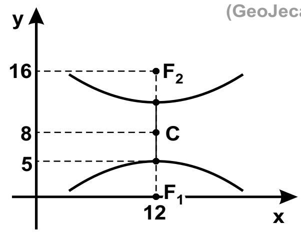
a) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

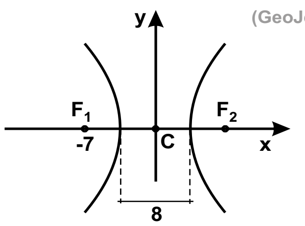
b) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

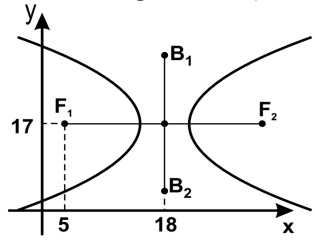
c) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

d) $\overline{B_1B_2}$ = 24 - eixo imaginário (GeoJeca)



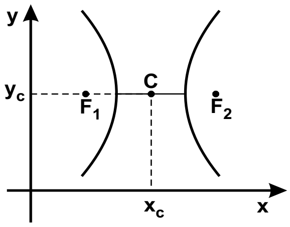
C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

Jeca 72

Equações reduzidas das hipérboles com eixo real paralelo aos eixos coordenados.

Eixo real paralelo ao eixo x.

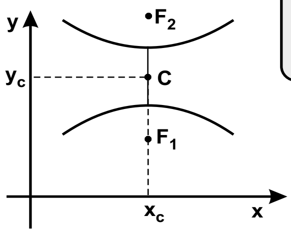


$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

$F_1(x_c - c \ , \ y_c)$

$F_2(x_c + c \ , \ y_c)$

Eixo real paralelo ao eixo y.



$$\frac{(y - y_c)^2}{a^2} - \frac{(x - x_c)^2}{b^2} = 1$$

$F_1(x_c \ , \ y_c - c)$

$F_2(x_c \ , \ y_c + c)$

02) Determine a equação reduzida, os focos, o centro, o eixo real, o eixo imaginário, a distância focal e também a excentricidade de cada hipérbole abaixo.

a) (GeoJeca)

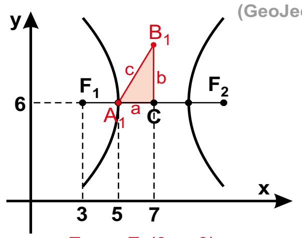
Centro
C(7 , 6)

a = 7 - 5 = 2
2a - eixo real
2a = 4

c = 7 - 3 = 4
2c - distância focal
2c = 8

$c^2 = a^2 + b^2$
$4^2 = 2^2 + b^2$
$b^2 = 16 - 4 = 12$
$b = 2\sqrt{3}$
2b - eixo imaginário
$2b = 4\sqrt{3}$

Excentricidade
e = c/a
e = 4/2 = 2



Foco $F_1(3 \ , \ 6)$
Foco $F_2(11 \ , \ 6)$
Eixo real paralelo ao eixo x.

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - 7)^2}{2^2} - \frac{(y - 6)^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\frac{(x - 7)^2}{4} - \frac{(y - 6)^2}{12} = 1$$

(eq. reduzida da hipérbole)

C(7 , 6)	F_1(3 , 6)	F_2(11 , 6)	
2a = 4	$2b = 4\sqrt{3}$	2c = 8	e = 2

b) (GeoJeca)

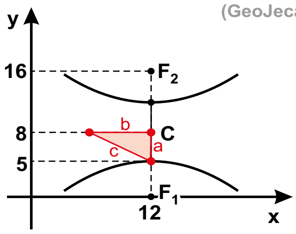
Centro C(12 , 8)

a = 8 - 5 = 3
2a - eixo real
2a = 6

c = 8 - 0 = 8
2c - distância focal
2c = 16

$c^2 = a^2 + b^2$
$8^2 = 3^2 + b^2$
$b^2 = 64 - 9 = 55$
$b = \sqrt{55}$
2b - eixo imaginário
$2b = 2\sqrt{55}$

Excentricidade
e = c/a
e = 8/3



Foco $F_1(12 \ , \ 0)$
Foco $F_2(12 \ , \ 16)$
Eixo real paralelo ao eixo y

$$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} - \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y - 8)^2}{3^2} - \frac{(x - 12)^2}{(\sqrt{55})^2} = 1$$

$$\frac{(y - 8)^2}{9} - \frac{(x - 12)^2}{55} = 1$$

(eq. reduzida da hipérbole)

C(12 , 8)	F_1(12 , 0)	F_2(12 , 16)	
2a = 6	$2b = 2\sqrt{55}$	2c = 16	e = 8/3

c) (GeoJeca)

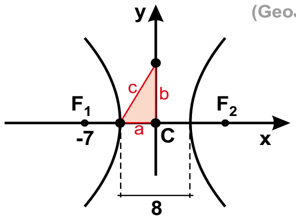
Centro C(0 , 0)

c = 0 - (-7) = 7
2c - distância focal
2c = 14

2a - eixo real
2a = 8
a = 4

$c^2 = a^2 + b^2$
$7^2 = 4^2 + b^2$
$b^2 = 49 - 16 = 33$
$b = \sqrt{33}$
2b - eixo imaginário
$2b = 2\sqrt{33}$

Excentricidade
e = c/a
e = 7/4



Foco F1 (-7 , 0)
Foco F2(7 , 0)
Eixo real paralelo ao eixo x.

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - 0)^2}{4^2} - \frac{(y - 0)^2}{(\sqrt{33})^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{33} = 1$$

(eq. reduzida da elipse)

C(0 , 0)	F_1(-7 , 0)	F_2(7 , 0)	
2a = 8	$2b = 2\sqrt{33}$	2c = 14	e = 7/4

d) $\overline{B_1B_2}$ = 24 - eixo imaginário (GeoJeca)

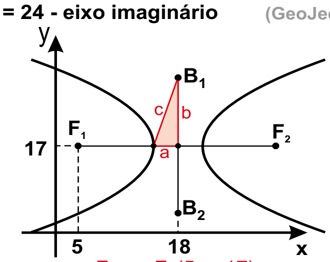
Centro C(18 , 17)

$\overline{B_1B_2} = 2b = 24$
b = 12

c = 18 - 5 = 13
2c - distância focal
2c = 26

$c^2 = a^2 + b^2$
$13^2 = a^2 + 12^2$
$a^2 = 169 - 144 = 25$
a = 5
2a - eixo real
2a = 10

Excentricidade
e = c/a
e = 13/5



Foco $F_1(5 \ , \ 17)$
Foco $F_2(31 \ , \ 17)$
Eixo real paralelo ao eixo x.

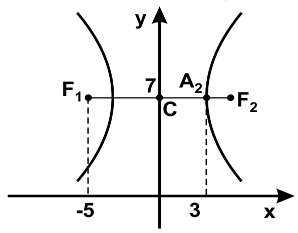
$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - 18)^2}{5^2} - \frac{(y - 17)^2}{12^2} = 1$$

(eq. red. da elipse) $\frac{(x - 18)^2}{25} - \frac{(y - 17)^2}{144} = 1$

C(18 , 17)	F_1(5 , 17)	F_2(31 , 17)	
2a = 10	2b = 24	2c = 26	e = 13/5

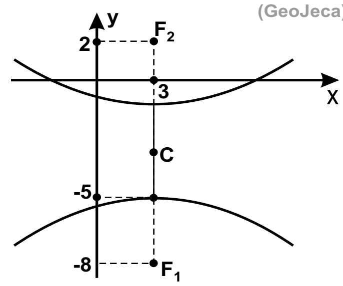
e) (GeoJeca)



C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

f) (GeoJeca)

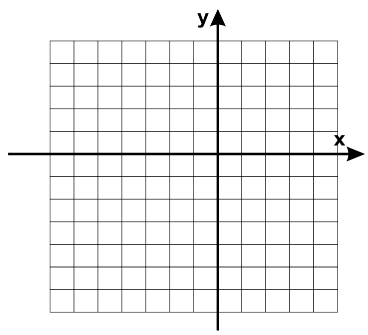


C(,)	F_1(,)	F_2(,)

2a =	2b =	2c =	e =

03) Determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, as coordenadas do centro e a equação reduzida da hipérbole de excentricidade 1,5 e focos (-4 , -1) e (2 , -1). Faça um esboço do gráfico da hipérbole.

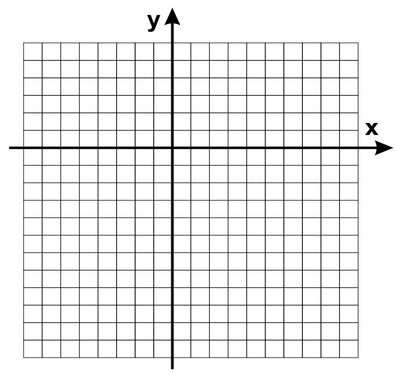
(GeoJeca)



04) Determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, as coordenadas do centro e dos focos e a excentricidade da hipérbole de equação reduzida abaixo. Faça um esboço do gráfico da hipérbole.

(GeoJeca)

$$\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$$



e) (GeoJeca)

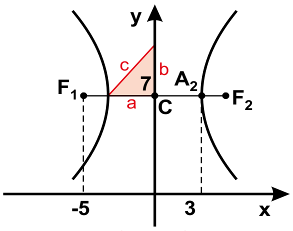
Centro C(0 , 7)

a = 3 - 0 = 3
2a - eixo real
2a = 6

c = 0 - (-5) = 5
2c - distância focal
2c = 10

$c^2 = a^2 + b^2$
$5^2 = 3^2 + b^2$
$b^2 = 25 - 9 = 16$
b = 4
2b - eixo imaginário
2b = 8

Excentricidade
e = c/a
e = 5/3



Foco $F_1(-5 , 7)$
Foco $F_2(5 , 7)$

Eixo real paralelo ao eixo x.

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - 0)^2}{3^2} - \frac{(y - 7)^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{(y - 7)^2}{16} = 1$$

(eq. reduzida da hipérbole)

C(0 , 7)	$F_1(-5 , 7)$	$F_2(5 , 7)$	
2a = 6	2b = 8	2c = 10	e = 5/3

f) (GeoJeca)

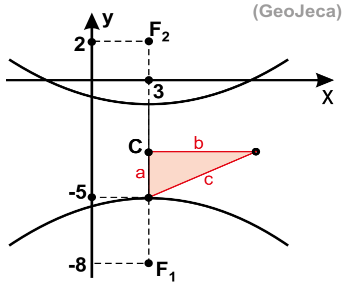
2c - distância focal
2c = 2 - (-8) = 10
c = 5

Centro C(3 , -3)

a = -3 - (-5) = 2
2a - eixo real
2a = 4

$c^2 = a^2 + b^2$
$5^2 = 2^2 + b^2$
$b^2 = 25 - 4 = 21$
$b = \sqrt{21}$
2b - eixo imaginário
$2b = 2\sqrt{21}$

Excentricidade
e = c/a
e = 5/2



Foco $F_1(3 , -8)$
Foco $F_2(3 , 2)$

Eixo real paralelo ao eixo y.

$$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} - \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y - (-3))^2}{2^2} - \frac{(x - 3)^2}{(\sqrt{21})^2} = 1$$

$$\frac{(y + 3)^2}{4} - \frac{(x - 3)^2}{21} = 1$$

(eq. reduzida da hipérbole)

C(3 , -3)	$F_1(3 , -8)$	$F_2(3 , 2)$	
2a = 4	$2b = 2\sqrt{21}$	2c = 10	e = 5/2

03) Determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, as coordenadas do centro e a equação reduzida da hipérbole de excentricidade 1,5 e focos (-4 , -1) e (2 , -1). Faça um esboço do gráfico da hipérbole.

(GeoJeca)

Foco $F_1(-4 , -1)$
Foco $F_2(2 , -1)$

2c - distância focal
2c = 2 - (-4) = 6
c = 3

Excentricidade
e = c/a
1,5 = 3/a
a = 3/1,5 = 2
2a - eixo real
2a = 4

$c^2 = a^2 + b^2$
$3^2 = 2^2 + b^2$
$b^2 = 9 - 4 = 5$
$b = \sqrt{5}$

2b - eixo imaginário
$2b = 2\sqrt{5}$

As coordenadas do centro são as coordenadas do ponto médio do segmento que representa da distância focal.

$F_1(-4 , -1)$
$F_2(2 , -1)$
C(-1 , -1)

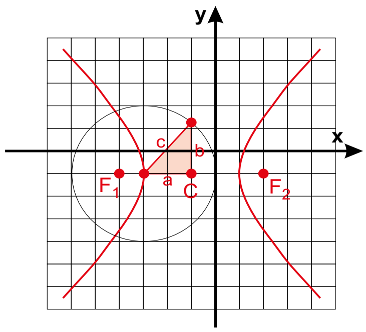
Como os dois focos têm a mesma ordenada, conclui-se que o eixo real é paralelo ao eixo x.

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - (-1))^2}{2^2} - \frac{(y - (-1))^2}{(\sqrt{5})^2} = 1$$

$$\frac{(x + 1)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{5} = 1$$

(eq. reduzida da hipérbole)



04) Determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, as coordenadas do centro e dos focos e a excentricidade da hipérbole de equação reduzida abaixo. Faça um esboço do gráfico da hipérbole.

(GeoJeca)

$$\frac{(y + 3)^2}{16} - \frac{(x - 1)^2}{9} = 1$$

Da equação acima, tem-se

Centro C(1 , -3)

$a^2 = 16$
a = 4
2a - eixo real
2a = 8

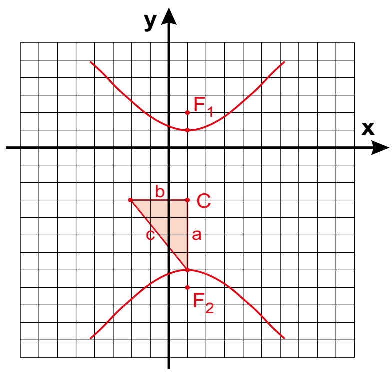
$b^2 = 9$
b = 3
2b - eixo imaginário
2b = 6

$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 4^2 + 3^2$
$c^2 = 25$
c = 5
2c - distância focal
2c = 10

Foco $F_1(1 , -3 + 5)$
$F_1(1 , 2)$
Foco $F_2(1 , -3 - 5)$
$F_2(1 , -8)$

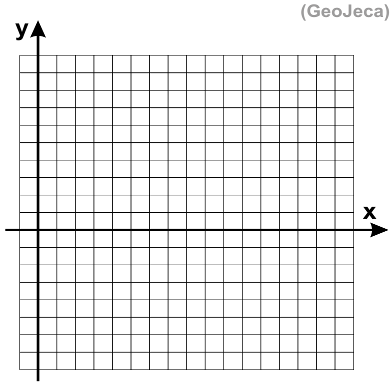
Excentricidade
e = c/a
e = 5/4

Como o termo positivo é o termo em y, conclui-se que a hipérbole tem eixo real paralelo ao eixo y.



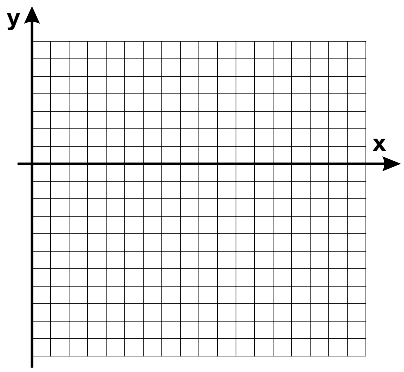
05) Dada a hipérbole de centro C(8 , 2), eixo real 6 e paralelo ao eixo y, eixo imaginário 14, determine a distância focal, as coordenadas dos focos, a equação reduzida e as equações gerais das assíntotas dessa hipérbole. Faça um esboço dessa curva.

(GeoJeca)



06) Sendo F(13 , -2) um dos focos da hipérbole de eixo real A_1A_2 , sendo $A_1(4 , -2)$ e $A_2(12 , -2)$, determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, a excentricidade, as coordenadas do centro e do outro foco, a equação reduzida e as equações das assíntotas da hipérbole. Faça um esboço do gráfico da hipérbole.

(GeoJeca)



05) Dada a hipérbole de centro C(8 , 2), eixo real 6 e paralelo ao eixo y, eixo imaginário 14, determine a distância focal, as coordenadas dos focos, a equação reduzida e as equações gerais das assíntotas dessa hipérbole. Faça um esboço dessa curva.

(GeoJeca)

Do enunciado, tem-se

Centro C(8 , 2)

2a - eixo real
2a = 6
a = 3

2b - eixo imaginário
2b = 14
b = 7

$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = 3^2 + 7^2 = 58$
$c = \sqrt{58}$
2c - distância focal
$2c = 2\sqrt{58}$

Foco $F1(8 \, , \, 2 - \sqrt{58})$
Foco $F2(8 \, , \, 2 + \sqrt{58})$

$$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} - \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y - 2)^2}{3^2} - \frac{(x - 8)^2}{7^2} = 1$$

$$\frac{(y - 2)^2}{9} - \frac{(x - 8)^2}{49} = 1$$

(eq. reduzida da hipérbole)

As assíntotas passam pelo centro da hipérbole C(8 , 2) e têm coeficientes angulares $m_1 = a/b$ e $m_2 = -a/b$.

$m_1 = 3/7$, C(8 , 2)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2 = \frac{3}{7}(x - 8)$

$7(y - 2) = 3(x - 8)$
$7y - 14 = 3x - 24$

$3x - 7y - 10 = 0$
(equação geral da 1ª assíntota)

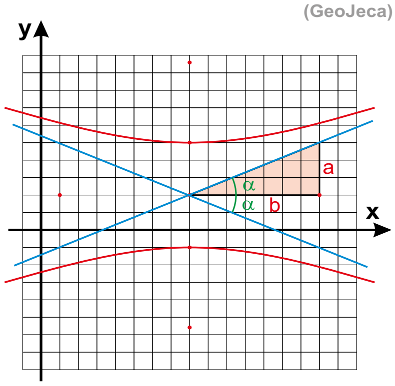
$m_1 = -3/7$, C(8 , 2)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2 = \frac{-3}{7}(x - 8)$

$7(y - 2) = -3(x - 8)$
$7y - 14 = -3x + 24$

$3x + 7y - 38 = 0$
(equação geral da 2ª assíntota)



06) Sendo F(13 , -2) um dos focos da hipérbole de eixo real A_1A_2, sendo $A_1(4 , -2)$ e $A_2(12 , -2)$, determine a distância focal, o eixo real, o eixo imaginário, a excentricidade, as coordenadas do centro e do outro foco, a equação reduzida e as equações das assíntotas da hipérbole. Faça um esboço do gráfico da hipérbole.

(GeoJeca)

O centro da hipérbole é o ponto médio do eixo real A_1A_2.

$A_1(4 \, , \, -2)$
$A_2(12 \, , \, -2)$
C(8 , -2)

A metade da distância focal é a distância entre o centro C e o foco F.

$c = x_F - x_C = 13 - 8 = 5$
2c - distância focal
2c = 10

2a - eixo real
2a = 12 - 4 = 8
a = 4

$c^2 = a^2 + b^2$
$5^2 = 4^2 + b^2$
$b^2 = 25 - 16 = 9$
b = 3
2b - eixo imaginário
2b = 6

Excentricidade
e = c/a
e = 5/4

Foco $F_1(13 \, , \, -2)$
Foco $F_2(3 \, , \, -2)$

Analisando as ordenadas do pontos A_1 e A_2 conclui-se que a hipérbole tem eixo real paralelo ao eixo x.

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x - 8)^2}{4^2} - \frac{(y - (-2))^2}{3^2} = 1$$

$$\frac{(x - 8)^2}{16} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

Equações das assíntotas
$m_1 = \text{tg}\ \alpha = b/a = 3/4$
$m_2 = -\text{tg}\ \alpha = -b/a = -3/4$

$m_1 = 3/4$, C(8 , -2)

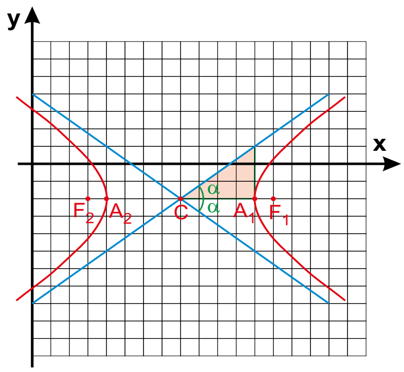
$y - y_0 = m(x - x_0)$

$3x - 4y - 32 = 0$
(1ª assíntota)

$m_1 = -3/4$, C(8 , -2)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

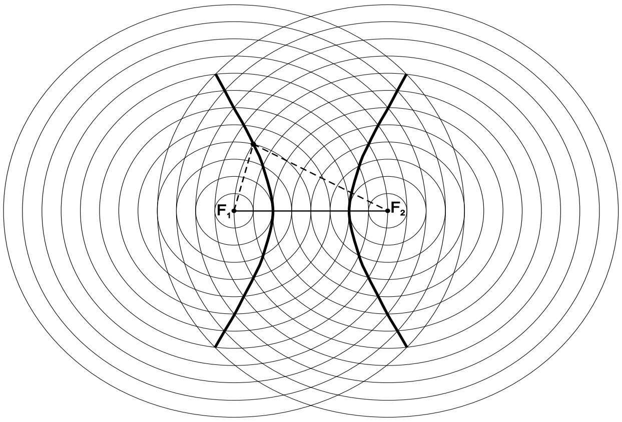
$3x + 4y - 16 = 0$
(2ª assíntota)



Jeca 74

Respostas da aula 14.

Respostas da Aula 14



02) a) $\dfrac{(x-7)^2}{4} - \dfrac{(y-6)^2}{12} = 1$

C(7 , 6) $F_1(3\ ,\ 6)$ $F_2(11\ ,\ 6)$
2a = 4 $2b = 4\sqrt{3}$ 2c = 8 e = 2

02) b) $\dfrac{(y-8)^2}{9} - \dfrac{(x-12)^2}{55} = 1$

C(12 , 8) $F_1(12\ ,\ 0)$ $F_2(12\ ,\ 16)$
2a = 6 $2b = 2\sqrt{55}$ 2c = 16 e = 8 / 3

02) c) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{33} = 1$

C(0 , 0) $F_1(-7\ ,\ 0)$ $F_2(7\ ,\ 0)$
2a = 8 $2b = 2\sqrt{33}$ 2c = 14 e = 7 / 4

02) d) $\dfrac{(x-18)^2}{25} - \dfrac{(y-17)^2}{144} = 1$

C(18 , 17) $F_1(5\ ,\ 17)$ $F_2(31\ ,\ 17)$
2a = 10 2b = 24 2c = 26 e = 13 / 5

02) e) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{(y-7)^2}{16} = 1$

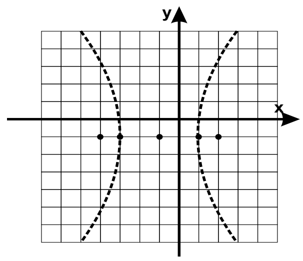
C(0 , 7) $F_1(-5\ ,\ 7)$ $F_2(5\ ,\ 7)$
2a = 6 2b = 8 2c = 10 e = 5 / 3

02) f) $\dfrac{(y+3)^2}{4} - \dfrac{(x-3)^2}{21} = 1$

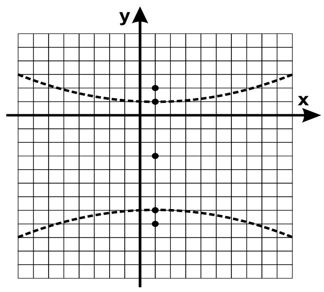
C(3 , -3) $F_1(3\ ,\ -8)$ $F_2(3\ ,\ 2)$
2a = 4 $2b = 2\sqrt{21}$ 2c = 10 e = 5 / 2

03) 2c = 6
2a = 4
$2b = 2\sqrt{5}$
C(-1 , -1)

$\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1$



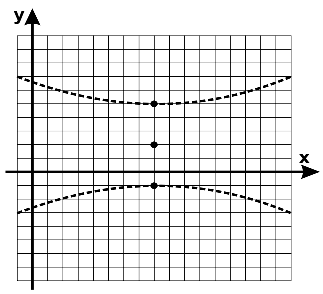
04) 2c = 10
2a = 8
2b = 6
C(1 , -3)
$F_1(1\ ,\ -8)$
$F_2(1\ ,\ 2)$
e = 5 / 4



05) $2c = 2\sqrt{58}$
$F_1(8\ ,\ 2+\sqrt{58})$
$F_2(8\ ,\ 2-\sqrt{58})$

$\dfrac{(y-2)^2}{9} - \dfrac{(x-8)^2}{49} = 1$

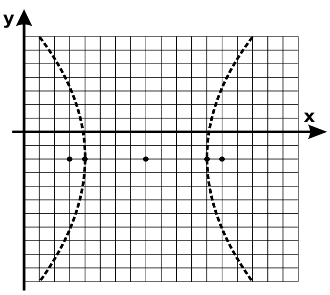
(a_1) 3x - 7y - 10 = 0
(a_2) 3x + 7y - 38 = 0



06) 2c = 10
2a = 8
2b = 6
e = 5 / 4
C(8 , -2)
F(3 , -2)

$\dfrac{(x-8)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{9} = 1$

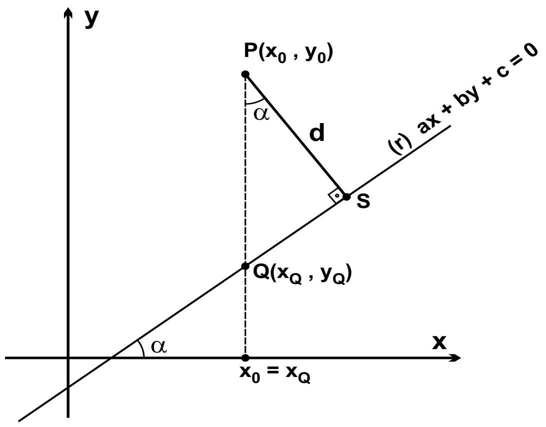
(a_1) 3x - 4y - 32 = 0
(a_2) 3x + 4y - 16 = 0



Favor comunicar eventuais erros deste trabalho através do e-mail
jecajeca@uol.com.br Obrigado.

Distância entre ponto e reta.

Demonstração da fórmula.



Os pontos P e Q têm a mesma abscissa.

$x_P = x_Q = x_0$

Se Q pertence à reta r, então

$ax_0 + by_Q + c = 0$

$by_Q = -ax_0 - c$

$y_Q = -(ax_0 + c) / b$

A distância PQ é dada por $d_{PQ} = y_0 - y_Q = y_0 - \dfrac{[-(ax_0 + c)]}{b} = \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{b}$

No triângulo PQS, tem-se **d** = PS = PQ.cos α

O coeficiente angular da reta r é m = tg α = -a/b

Lembrando que **tg** α **=** $\dfrac{\textbf{sen } \alpha}{\textbf{cos } \alpha}$ e que **sen**$^2\alpha$ **+ cos**$^2\alpha$ **= 1**, tem-se que **cos** α **=** $\dfrac{\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a^2 + b^2}}}$

$$\mathbf{d = PQ.\cos\alpha = \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{b} \cdot \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$$\mathbf{d = \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Se o ponto $P(x_0 , y_0)$ estiver localizado abaixo da reta r, tem-se

$$d_{PQ} = y_Q - y_0 = \dfrac{[-(ax_0 + c)]}{b} - y_0 = \dfrac{-(ax_0 + by_0 + c)}{b}$$

Nesse caso, tem-se

$$\mathbf{d = \dfrac{-(ax_0 + by_0 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Como a distância é sempre positiva e para que a fórmula seja válida para qualquer localização do ponto P, adota-se o módulo.

(GeoJeca)

Portanto, $$\boxed{\mathbf{d_{Pr} = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}}$$

Correções

aula:	10									
página:	53									
exercício:	02 Trocado									
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										
aula:										
página:										
exercício:										

Auxiliares gráficos

$-2x_C = -4$
$x_C = 2$
$-2y_C = 10$
$y_C = -5$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 20$
$4 + 25 - 20 = R^2$
$R^2 = 9$
$R = 3$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$-2x_C = -4$
$x_C = 2$
$-2y_C = 10$
$y_C = -5$

$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$x_C^2 + y_C^2 - R^2 = 20$
$4 + 25 - 20 = R^2$
$R^2 = 9$
$R = 3$

$\sqrt{\ }$	$\sqrt{\ }$	$\sqrt{\ }$	$\sqrt[3]{\ }$	$\sqrt[3]{\ }$	$\sqrt[3]{\ }$
$\in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ $\in \mathbb{R}$	$\mathbb{N}$ $\in \mathbb{N}$	$\Longrightarrow$ $\overrightarrow{\infty}$	$\pm$ $\neq$	$\forall$ $\simeq$
$\supset$ $\not\supset$ $\subset$ $\not\subset$	$\in$ $\notin$	$\nexists$			

Mas $y = 3x - 3$

Se $x_A = 3 \longrightarrow y_A = 3 \cdot 3 - 3 = 6 \longrightarrow A(3\ ,\ 6)$ (resp)

Se $x_B = 1 \longrightarrow y_B = 3 \cdot 1 - 3 = 0 \longrightarrow B(1\ ,\ 0)$ (resp)

$s \parallel r \longrightarrow m_s = m_r$

$s \perp r \longrightarrow m_s = \frac{-1}{m_r}$

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Mas $x = 5y + 11$

Se $y_A = -2 \longrightarrow x_A = 5 \cdot (-2) + 11 = 1 \longrightarrow A(1\ ,\ -2)$ (resp)

Se $y_B = -1 \longrightarrow x_B = 5 \cdot (-1) + 11 = 6 \longrightarrow B(6\ ,\ -1)$ (resp)

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$\left.\right\} y - y_0 = m(x - x_0)$

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$

$\left.\right\} d = \frac{|\, ax_0 + by_0 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

região
solução

$(y - y_V)^2 = 2p(x - x_V)$

$(y - y_V)^2 = -2p(x - x_V)$

$(x - x_V)^2 = 2p(y - y_V)$

$(x - x_V)^2 = -2p(y - y_V)$

$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$

$\frac{(x - x_C)^2}{b^2} + \frac{(y - y_C)^2}{a^2} = 1$

$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$

$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} - \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1$

Desempenho Máximo

www.desempenhomax.com.br

Contato: (11) 996-612-344

Endereço: Rua Itapeva, 378, 1º andar, Bela Vista
São Paulo, SP, 01332-000 (ao lado da FGV)