

Bien commencer : Les nombres complexes

1 L'ENSEMBLE $\mathbb{C}$ DES NOMBRES COMPLEXES

Bien que les nombres complexes soient introduits au lycée immédiatement après la résolution des équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ (pour tous $a \neq 0, b$ et c réels), leur invention n'est pas due à cela. Elle vient en fait d'algébristes du XI^e siècle tentant de résoudre les équations du troisième degré. En effet, après avoir transformé l'équation $x^3 + bx + cx + d = 0$ en $X^3 + pX + q = 0$ par la translation $X = x + \frac{b}{3}$, les italiens déterminent que (formule dite de Cardan)

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{27}}}$$

Mais lorsque $4p^3 + 27q^2 < 0$, l'équation $X^3 + pX + q = 0$ admet 3 racines réelles (étudier la fonction $X \mapsto X^3 + pX + q$ pour s'en convaincre), ce qui bloquait longtemps les algébristes. Bombelli élucida alors ce cas en introduisant ce que l'on note aujourd'hui i et $-i$. C'est Leonhard Euler (1707-1783) qui a introduit la notation pour représenter un tel nombre dont le carré vaut -1 . A l'époque, ils écrivaient $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ (et parfois on l'écrit encore dans les articles actuels).

1.1 FORME ALGÈBRIQUE, CONJUGUÉ, MODULE

Définition 1 : Nombres complexes

- ① L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$ et est composé de l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ d'un certain élément i pour lequel $i^2 = -1$, et de toutes les multiplications et additions que l'on peut faire avec (appelés combinaisons linéaires de i et des nombres réels).
- ② Tout nombre complexe z s'écrit donc d'une et une seule manière sous la forme dite algébrique

$$z = a + ib$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$. Le réel a est appelé la partie réelle de z et noté $\operatorname{Re}(z)$, le réel b est appelé la partie imaginaire de z et noté $\operatorname{Im}(z)$.

- ③ Les réels sont exactement les nombres complexes de partie imaginaire nulle.
- ④ Un nombre complexe de partie réelle nulle est appelé un **imaginaire pur**.

Exemple 1

Déterminons les parties réelle et imaginaire du nombre complexe sous forme de fraction $\frac{3+i}{2+i}$. En multipliant par le conjugué du dénominateur les deux termes de cette fraction, on obtient

$$\frac{3+i}{2+i} = \frac{(3+i)(2-i)}{5} = \frac{1}{5}(7-i).$$

Ainsi, la partie réelle est $\frac{7}{5}$, la partie imaginaire $-\frac{1}{5}$.

Unicité de la forme algébrique

L'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe est utilisée le plus souvent pour faire des identifications. Donc l'égalité

$$a + ib = a' + ib'$$

est équivalente à

$$a = a' \text{ et } b = b'.$$

Une égalité de nombres complexes	=	Deux égalités de nombres réels
-------------------------------------	---	-----------------------------------

Proposition 1

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ des nombres complexes. Alors

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \text{ et } zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

Donc

$$\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z'),$$

et

$$\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z').$$

Enfin, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Linéarité

On peut montrer tout aussi facilement que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Re}(z) + \mu \operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \operatorname{Im}(z) + \mu \operatorname{Im}(z').$$

On dit que les parties réelles et imaginaires sont des **applications $\mathbb{R}$ -linéaires**.

⚠ ATTENTION Je ne veux pas voir

$$\operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z'), \quad \operatorname{Im}(zz') \neq \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z'),$$

et donc pas non plus

$$\operatorname{Re}(z^2) \neq \operatorname{Re}(z)^2 \quad \text{ou} \quad \operatorname{Im}(z^2) \neq \operatorname{Im}(z)^2.$$

Preuve. Calculs directs. $\square$

Sommes et produits de complexes

Les notations Σ et $\prod$ sont donc transposables aux nombres complexes, et leur propriétés restent vraies. On a donc encore, par exemple

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \quad (z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k},$$

ou

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad \sum_{k=p}^q z^k = z^p \cdot \frac{z^{q-p+1} - 1}{z - 1}.$$

⚠ ATTENTION On ne peut pas dire qu'un nombre complexe est positif ou négatif !

$z \not\leq 0$

On dit que que $\mathbb{C}$ n'a pas de relation d'ordre compatible avec l'addition et la multiplication.

Définition 2 : Conjugué, module

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- ① On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\bar{z} := \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$,
- ② On appelle **module** de z le réel positif ou nul $|z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$.

Proposition 2 : Propriétés du conjugué

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

- ① $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$,
- ② $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,
- ③ $\bar{\bar{z}} = z$,
- ④ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$,
- ⑤ $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$,
- ⑥ $z\bar{z} = |z|^2$.

Exemple 2

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, le conjugué de $5 - iz$ vaut $\overline{5 - iz} = 5 - \bar{i} \times \bar{z} = 5 + i\bar{z}$ et non pas $5 + iz$!

Corollaire 2.1

Pour tout nombre complexe z ,

- ① $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- ② $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$.

Exemple 3

Ce dernier résultat est très utile en pratique !

Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Montrons par exemple que $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R} \iff |u| = 1$.

Le complexe $\frac{z - u\bar{z}}{1 - u}$ est réel si, et seulement s'il est égal à son conjugué, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} &\iff (z - u\bar{z})(1 - \bar{u}) = (\bar{z} - \bar{u}z)(1 - u) \\ &\iff z - \bar{u}z - u\bar{z} + |u|^2\bar{z} = \bar{z} - u\bar{z} - \bar{u}z + |u|^2z \\ &\iff (z - \bar{z})(1 - |u|^2) = 0 \\ &\iff |u|^2 = 1 \quad \text{car } z \text{ n'est pas réel donc } z \neq \bar{z}. \end{aligned}$$

Proposition 3 : Propriétés du module

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On a

- ① $|\bar{z}| = |z|$,
- ② $|zz'| = |z| \times |z'|$,
- ③ $|z| = 0 \iff z = 0$,
- ④ si $z' \neq 0$, $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$,
- ⑤ $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$,
- ⑥ $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Les deux inégalités triangulaires sont vérifiées

$$||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|.$$

Identité remarquable

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2.$$

En effet,

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_2 \bar{z}_1 + \overline{z_2 \bar{z}_1} + |z_2|^2, \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire

Comme pour les nombres réels, on a la première inégalité triangulaire

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs $z' = \lambda z$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. On ne démontre que l'inégalité triangulaire. Les autres propriétés sont presque immédiates. Vous pouvez les démontrer en exercice. Commençons par démontrer l'inégalité. On a

$$\begin{aligned} |z + z'| &\leq |z| + |z'| \\ \iff |z + z'|^2 &\leq (|z| + |z'|)^2 & \iff (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') &\leq (|z| + |z'|)^2 \\ \iff |z|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} + |z'|^2 &\leq |z|^2 + 2|z| \cdot |z'| + |z'|^2 & \iff \frac{z\bar{z}' + \bar{z}z'}{2} &\leq |z| \cdot |z'| \\ \iff \operatorname{Re}(z\bar{z}') &\leq |z| \cdot |z'| & \iff \operatorname{Re}(z\bar{z}') &\leq |z\bar{z}'| \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire, par équivalence.

Étudions le cas d'égalité. La partie réel d'un nombre complexe est égale à son module si et seulement si ce nombre est réel et positif. Donc

$$\operatorname{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'| \iff z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+.$$

Or

$$z\bar{z}' \in \mathbb{R}_+ \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } z\bar{z}' = \lambda.$$

Mais $z\bar{z}' = \lambda \iff z\bar{z}'z' = \lambda z'$ $\iff |z'|^2 = \lambda z'$. Or si $z' = 0$, on a bien $z' = \lambda z$, pour $\lambda = 0$ et si $z' \neq 0$, on a $z = \frac{\lambda}{|z'|^2} z'$, avec $\frac{\lambda}{|z'|^2} \in \mathbb{R}_+$. $\square$

Corollaire 3.1

Pour tous $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Preuve. Démontrons le par récurrence. $\square$

1.2 LES COMPLEXES ET LA GÉOMÉTRIE - PARTIE 1

La construction de $\mathbb{C}$ repose sur une identification ensembliste de $\mathbb{C}$ au plan. On peut en déduire facilement une utilisation des complexes en géométrie. A partir de maintenant, on se place dans le repère habituel $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 3 : Affixe

On appelle **affixe** d'un point $M(x, y)$ du plan, le complexe $z = x + iy$.

Complexes vs vecteurs

La partie réelle (respectivement imaginaire) d'un complexe z est la coordonnée du point d'affixe z sur l'axe des abscisses (respectivement ordonnées).

Prenons alors un vecteur $\overrightarrow{AB}$. Par définition, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$, alors $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$. Mais $A(x_A, y_A)$

veut dire que l'abscisse du point A est $z_A = x_A + iy_A$ et $B(x_B, y_B)$ veut dire que l'abscisse du point B est $z_B = x_B + iy_B$.
Donc l'abscisse du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ($x_B - x_A, y_B - y_A$) est bien

$$z_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A + i(y_B - y_A) = z_B - z_A.$$

Exemple 4

Soit z, z' dans $\mathbb{C}$. Le milieu du segment entre les points d'abscisse z et z' a pour abscisse $\frac{z + z'}{2}$.

En passant aux modules dans la remarque précédente on obtient la proposition suivante.

Proposition 4

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan d'abscisses respectives u et v , alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour abscisse $\lambda u + \mu v$.
- Soient deux points du plan A et B d'abscisses respectives z_A et z_B . On a

$$|\overrightarrow{AB}| = |z_A - z_B|.$$

On dit que la distance euclidienne entre deux points du plan A et B d'abscisses z_A et z_B est le module $|z_A - z_B|$.

Mais qu'est ce qu'une distance ?

L'application

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (z, z') & \longmapsto & |z - z'| \end{array}$$

est, en un sens plus général, une **distance** car elle vérifie les propriétés suivantes,

- ① $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad d(z, z') = 0 \Rightarrow z = z',$
- ② $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad d(z, z') = d(z', z),$
- ③ $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad d(z, z') \leq d(z, z'') + d(z'', z').$

Toutes les distances doivent vérifier ces propriétés.

Module et conjugué

Soit A un point d'abscisse $z_A \in \mathbb{C}$.

- Le point d'abscisse $\bar{z}_A$ est le symétrique de A par rapport à (Ox) , comme $\bar{z}_A$ a une partie imaginaire opposée à z_A .
- Le point d'abscisse $-z_A$ est le symétrique de A par rapport à O , comme $-z_A$ a une partie réelle et une partie imaginaire opposées à z_A .
- Le nombre réel positif $|z_A| = |z_A - 0|$ représente la distance de A à 0 .

1.3 ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ : PAS DE GRAND CHANGEMENT

En fait, si on reprend les solutions par le discriminant des équations du second degré dans le cas des réels, on a :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

et on peut continuer à factoriser, si et seulement si $\Delta := b^2 - 4ac$ est positif. Seulement, dans le corps des complexes, on a la propriété suivante.

Proposition 5

Pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, il existe deux solutions (opposées) à l'équation $z^2 = a$.

En particulier, si Δ est un nombre réel négatif, on a quand même $\Delta = (i\sqrt{-\Delta})^2$, et on peut continuer à factoriser !

Preuve. Soient $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Identifions les parties imaginaires et réelles dans l'équation $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta$; on obtient le système non-linéaire

$$\begin{cases} x^2 - y^2 &= \alpha \\ 2xy &= \beta \end{cases}$$

Pour simplifier la résolution de celui-ci, on ajoute la condition sur le module $|x + iy|^2 = |\alpha + i\beta|$ qui s'écrit $x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} x^2 &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2} \\ y^2 &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2} \\ 2xy &= \beta \end{cases}$$

ce qui permet de trouver rapidement les deux valeurs possibles de (x, y)

$$\left(\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}, \frac{\beta}{\sqrt{2(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha)}} \right) \text{ et } \left(-\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}}, -\frac{\beta}{\sqrt{2(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha)}} \right)$$

Les premières équations donnent $|x|$ et $|y|$, la dernière nous donne le signe de x en fonction de celui de y . $\square$

⚠ ATTENTION Par définition d'une fonction, celle-ci doit avoir une et une unique image pour chaque élément de l'ensemble de départ. On vient de voir, qu'il n'existe pas une mais toujours **2** racines à un nombre complexe. Donc la racine n'est pas une fonction sur $\mathbb{C}$ et donc vous n'écrirez jamais, pour $z \in \mathbb{C}^*$,



Rappel Si P est un polynôme (même à coefficients complexes), on dit que $a \in \mathbb{C}$ est racine de P lorsque $P(a) = 0$. Dans ce cas, il existe un polynôme Q tel que

$$P(z) = Q(z)(z - a) .$$

Proposition 6 : Équations du second degré à coefficients complexes

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont

$$\frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \delta}{2a}$$

où δ est l'une des deux racines carrées du discriminant $b^2 - 4ac$.

Si $b^2 - 4ac = 0$, ces deux solutions sont confondues.

Preuve. On vient de la faire ! Il suffit de finir ce que l'on a fait au dessus. $\square$

Exemple 5

Cherchons les solutions de $z^2 + 2iz - 4 + 4i = 0$.

Le discriminant est $\Delta = 12 - 16i$ dont une racine est $\delta = 4 - 2i$. Les solutions sont donc $\frac{-2i - (4 - 2i)}{2} = -2$ et $\frac{-2i + (4 - 2i)}{2} = 2 - 2i$.

Comment trouver les racines d'un nombre complexe

Pour trouver les racines d'un nombre complexe z , on procède comme dans la preuve de la Proposition 5 ! On pose $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha + i\beta)^2 = z$. On obtient donc 3 équations :

$$\begin{cases} |z| &= \alpha^2 + \beta^2 \\ \operatorname{Re}(z) &= \alpha^2 - \beta^2 \\ \operatorname{Im}(z) &= 2\alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{|z| + \operatorname{Re}(z)}{2} &= \alpha^2 \\ \frac{|z| - \operatorname{Re}(z)}{2} &= \beta^2 \\ \operatorname{Im}(z) &= 2\alpha\beta \end{cases}$$

On trouve donc α et β à un signe près. Comme les deux racines sont l'opposée l'une de l'autre, il suffit de savoir si α et β ont les mêmes signes, ou des signes opposés. La dernière équation nous le dit !

Exemple 6

Calculons les racines carrées de $24 + 10i$.

Pour tout $\omega = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ sous forme algébrique :

$$\begin{aligned} \omega^2 = 24 + 10i &\iff \omega^2 = 24 + 10i \text{ et } |\omega|^2 = |24 + 10i| = 2 \times |12 + 5i| \\ \iff \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 24 \\ 2\alpha\beta = 10 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 2\sqrt{12^2 + 5^2} = 26 \end{cases} &\iff \begin{cases} \alpha^2 = \frac{26+24}{2} = 25, \\ \beta^2 = \frac{26-24}{2} = 1 \\ \alpha\beta = 5 \end{cases} \\ \stackrel{\alpha\beta=5 \geq 0}{\iff} (\alpha, \beta) = \pm(5, 1) &\iff \omega = 5 + i \quad \text{ou} \quad \omega = -(5 + i). \end{aligned}$$

Le corollaire suivant peut être intéressant dans certains exercices :

Corollaire 6.1

Soit a, b et c trois complexes, avec $a \neq 0$. Si z_1 et z_2 sont les racines (éventuellement confondues) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors on a :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Utiliser le produit et la somme des racines

Il y a trois cas principaux :

- Si z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, et si l'on connaît une de ces racines, alors on peut facilement en déduire l'autre.
- Si l'on sait que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors on peut exprimer toute expression symétrique en z_1 et z_2 (c'est-à-dire invariante quand on échange z_1 et z_2), en fonction de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$, et donc de a, b et c , sans avoir à expliciter z_1 et z_2 .
- On obtient aussi :
Soit s et p deux nombres complexes.
Alors les nombres complexes z_1 et z_2 vérifient le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 &= s \\ z_1 z_2 &= p \end{cases}$$

si, et seulement si, z_1 et z_2 sont les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation

$$z^2 - sz + p = 0.$$

2 L'EXPONENTIELLE COMPLEXE ET SES APPLICATIONS

2.1 LES NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

Pour l'histoire - Hors programme

Pour tout nombre réel x , la seule application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $f' = xf$ et $f(0) = 1$ est l'application $t \mapsto \exp(xt)$. On le verra dans le chapitre sur les équations différentielles.

L'application f définie par

$$f(x) = \cos x + i \sin x$$

vérifie

$$f'(x) = i \cos x - \sin x = if \text{ et } f(0) = 1$$

Si on pouvait la définir, elle coïncide donc avec l'application $x \mapsto \exp(ix)$. Cela justifie la notation utilisée dans la définition 4. La démonstration se fait avec les développements en série entières,.. que vous verrez l'an prochain.

Cette nouvelle fonction, est bien sûr compatible avec l'exponentielle réelle, sur son point de concours. En effet,

$$e^0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0 .$$

Définition 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta) .$$

Définition 5 : Ensemble des nombres complexes de module 1

On pose

$$\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} .$$

Géométriquement, cela représente le cercle trigonométrique de centre 0 et de rayon 1.

Proposition 7

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta} .$$

Donc

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} .$$

- Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' [2\pi] .$$

Exemple 7

On a en particulier $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ et $e^{i\pi} = -1$.

Preuve. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$. Réciproquement, pour tout nombre complexe z de module 1, z est sur le cercle trigonométrique. Donc son abscisse est $\cos \theta$ et son ordonnée $\sin \theta$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle qui détermine z . Donc on a bien $z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$. $\square$

Proposition 8 : Propriétés de l'exponentielle $i\theta$

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

① **Conjugaison** $\overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}$,

② **Formules d'Euler** $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

③ **Transformation des sommes en produits** $e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$.

④ **Formules de Moivre**

$$\cos(nx) = \operatorname{Re}\left((\cos x + i \sin x)^n\right) \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \operatorname{Im}\left((\cos x + i \sin x)^n\right).$$

Preuve. Tout se démontre en remplaçant $e^{i\theta}$ par sa formule. Pour Moivre,

$$\cos(nx) + i \sin(nx) = e^{inx} \stackrel{\textcircled{3}}{=} (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n.$$

□

Exemple 8

Cela rend la forme exponentielle bien plus pratique que la forme algébrique dès que l'on fait des multiplications ou que l'on met à la puissance !

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Résolvons, par exemple, l'équation $\operatorname{Re}(z^n) = \operatorname{Im}(z^n)$.

Difficile avec la forme algébrique... Cherchons plutôt les solutions sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation se réécrit alors $r^n \cos(n\theta) = r^n \sin(n\theta)$ soit $r = 0$ ou $n\theta = \frac{\pi}{4}[\pi]$.

En conclusion, les solutions de l'équation sont donc 0 et, pour tout $r > 0$ et tout entier k ,

$$r \exp\left(i \frac{(4k+1)\pi}{4n}\right).$$

Une nouvelle méthode pour linéariser !

On a, pour le cas des puissances 3,

$$\begin{aligned} \cos^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) \\ &= \frac{1}{8} ((e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + 3(e^{i\theta} + e^{-i\theta})) = \frac{1}{4} (\cos(3\theta) + 3 \cos \theta) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{i3\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) \\ &= -\frac{1}{8i} ((e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})) = \frac{1}{4} (-\sin(3\theta) + 3 \sin \theta) \end{aligned}$$

Plus difficile,

$$\begin{aligned} \sin^5 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i} (e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta}) \\ &= \frac{1}{32i} ((e^{5i\theta} - e^{-5i\theta}) - 5(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) + 10(e^{i\theta} - e^{-i\theta})) = \frac{\sin(5\theta) - 5 \sin(3\theta) + 10 \sin \theta}{16}. \end{aligned}$$

Technique de l'angle moitié

En utilisant les formules d'Euler, on peut factoriser une expression de la forme $e^{i\theta_1} \pm e^{i\theta_2}$ en mettant en facteur $e^{i(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})}$; le deuxième facteur sera alors un réel ou un imaginaire pur.

Exemple 9

Par exemple, pour tout réel θ , on a

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ 1 - e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(-2i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Retrouvons les formules de $\cos p + \cos q$ et $\sin p + \sin q$. Soit $p \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}$. On a

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}} \right) = e^{i\frac{p+q}{2}} 2 \cos \frac{p-q}{2}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire des deux membres de l'égalité, on obtient

$$\operatorname{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = \cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

et

$$\operatorname{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = \sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$$

En écrivant $e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{i\frac{q-p}{2}} \right) = e^{i\frac{p+q}{2}} 2i \sin \frac{p-q}{2}$, on trouve de même

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \quad \text{et} \quad \sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right)$$

Une nouvelle méthode pour dupliquer !

On utilise cette fois-ci la formule de Moivre puis la formule du binôme de Newton ! En effet, on a $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^n\right) = \operatorname{Re}\left((\cos \theta + i \sin \theta)^n\right)$, que l'on peut développer avec la formule du binôme.

Exemple 10

Par exemple, pour $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$.

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta - i \sin^3 \theta$$

et donc en séparant partie réelle et partie imaginaire

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)) &= \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \operatorname{Im}(\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)) &= \sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta \end{aligned}$$

en utilisant l'égalité $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Exemple 11

$$\text{Calcul de } \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^n \sin(k\theta),$$

puis $Z_n = S_n + iT_n$. On a alors, d'après la formule de Moivre :

$$Z_n = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^n (e^{i\theta})^k$$

Si $e^{i\theta} \neq 1$, c'est-à-dire $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, on obtient, en utilisant la technique de l'angle moitié :

$$Z_n = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \left(e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} \right)}{e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}} \right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

On en déduit :

$$S_n = \operatorname{Re} Z_n = \frac{\cos \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad T_n = \operatorname{Im} Z_n = \frac{\sin \frac{n\theta}{2} \sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, on trouve directement $Z_n = n+1$ et donc $S_n = n+1$ et $T_n = 0$.

2.2 PÉRIODE D'UNE FONCTION CIRCULAIRE

On peut donc toujours transformer une somme de cos et sin en un seul sin ou cos, ce qui nous donne la période de la fonction circulaire.

Proposition 9

Soit a et b des réels non tous deux nuls. Il existe un réel θ tel que, pour tout réel x ,

$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \theta),$$

où $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Preuve. Par hypothèse, le complexe $a + ib$ est non nul. En notant $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ son module et θ l'un de ses arguments, on peut écrire :

$$a \cos x + b \sin x = r \cos \theta \cos x + r \sin \theta \sin x = r \cos(x - \theta).$$

□

Exemple 12

Essayons par exemple de résoudre l'équation $2 \cos x + \sin x = \frac{1}{2}$. **sur** $\mathbb{R}$.

$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. On impose

$$\sqrt{5} \cos \theta = 2, \quad \sqrt{5} \sin \theta = 1,$$

donc $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On peut prendre $\theta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, avec $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ainsi

$$2 \cos x + \sin x = \sqrt{5} \cos(x - \theta).$$

L'équation de départ est donc équivalente à

$$\cos(x - \theta) = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

Il nous faut la fonction arccos pour finir, que nous verrons bientôt.

2.3 FORME TRIGONOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Pour localiser un point du plan, on peut donner son abscisse et son ordonnée. On peut aussi donner son angle et sa distance à $(0,0)$. C'est le principe de la forme trigonométrique d'un nombre complexe. Pour cela, on remarquera que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = 1, \text{ c'est à dire que } \frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}.$$

Proposition 10

Tout nombre complexe non-nul peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$z = re^{i\theta} \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in]-\pi, \pi]$$

Cette écriture de z s'appelle la forme **trigonométrique** (ou exponentielle).

r est appelé le module de z (on va voir tout de suite pourquoi...) et θ est appelé l'**argument** de z .

Le couple (r, θ) est aussi appelé un couple de **coordonnées polaire** du point d'affixe z .

Module et arguments

Dans l'écriture $z = re^{i\theta}$, le réel r est unique car on va voir dans la preuve que $r = |z|$, mais θ est seulement unique à 2π près et est appelé un argument de z . Il existe en revanche un et un seul argument de z dans $]-\pi, \pi]$, et celui-ci est appelé l'argument (principal) de z et noté $\arg(z)$.

Preuve. Il suffit de remarquer que

$$\left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Donc, d'après la proposition 7, il existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Vérifions que θ est unique sur $]-\pi, \pi]$. Deux réels θ et φ sont des arguments d'un même complexe si, et seulement si, $e^{i\theta} = e^{i\varphi}$ donc $e^{i(\theta-\varphi)} = 1$. Cette condition équivaut à $\cos(\theta - \varphi) = 1$ et $\sin(\theta - \varphi) = 0$, c'est-à-dire à $\theta - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. $\square$

Exemple 13

Les formes trigonométriques des réels et des imaginaires purs sont à connaître !

- **Cas des réels** Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x = xe^{i0}$ si $x > 0$ et $x = (-x)e^{i\pi}$ si $x < 0$.
- **Cas des imaginaires purs**
Pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, $iy = ye^{\frac{i\pi}{2}}$ si $y > 0$ et $iy = (-y)e^{-\frac{i\pi}{2}}$ si $y < 0$.

⚠ ATTENTION 0 n'a pas d'argument !

Exemple 14

Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants.

$$z_1 = -\sqrt{3} + i, \quad z_2 = 1 + 2i, \quad z_3 = -\frac{3}{2} - i, \quad z_4 = -e^{2 + \frac{3i\pi}{4}}, \quad z_5 = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-i\pi}{5}}$$

Corollaire 10.1

Deux nombres complexes non nuls sont égaux si, et seulement s'ils ont même module et des arguments égaux modulo 2π .

Proposition 11 : Propriétés des arguments

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^*$,

$$\textcircled{1} \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi] \quad \textcircled{2} \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi] \quad \textcircled{3} \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi].$$

Preuve. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

$$\textcircled{1} \quad zz' = |z|e^{i\arg(z)} |z'|e^{i\arg(z')} = |zz'|e^{i(\arg(z) + \arg(z'))}, \quad \text{donc} \quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi].$$

$$\textcircled{2} \quad \bar{z} = \overline{|z|e^{i\arg(z)}} = |z|e^{-i\arg(z)} = |\bar{z}|e^{-i\arg(z)}, \quad \text{donc} \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi].$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{i\arg(z)}} = \frac{1}{|z|}e^{-i\arg(z)}, \quad \text{donc} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi].$$

□

Et c'est utile ?

Il est plus facile de calculer des produits, des quotients et des puissances de nombres complexes non nuls écrits sous forme trigonométrique. Par exemple, pour $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, si $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, alors

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1} |z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

et

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

et de même pour la puissance $z_1^n = |z_1|^n e^{in\theta_1}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 15

Par exemple, passer à la forme trigonométrique permet de calculer plus rapidement des quotients

$$\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2e^{-\frac{i\pi}{3}}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}+\frac{i\pi}{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{\sqrt{2}}.$$

Lien entre la forme algébrique et les formes trigonométriques

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ de forme algébrique $z = x+iy$ et de forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$. Comment passer de l'une à l'autre ?

- **Trigonométrie vers algébrique** On a $z = re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta$. Donc

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- **Algébrique vers trigonométrie**

Cas où $x > 0$: Alors $\cos \theta > 0$ donc $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[+ 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Or $\tan \theta = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \frac{y}{x}$ donc $\theta \equiv \text{Arctan} \frac{y}{x} [2\pi]$.

Cas où $x < 0$: On se ramène au cas $x > 0$ en factorisant par $-1 = e^{i\pi}$,

$$z = x + iy = e^{i\pi}(-x - iy).$$

Donc

$$\theta \equiv \begin{cases} \text{Arctan} \frac{y}{x} [2\pi] & \text{si } x > 0 \\ \pi + \text{Arctan} \frac{y}{x} [2\pi] & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

2.4 EXPONENTIELLE COMPLEXE**Définition 6**

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe de z , notée $\exp(z)$ ou e^z par

$$e^z := e^{\text{Re}(z)} e^{i\text{Im}(z)}$$

Ainsi le module de e^z est $e^{\text{Re}(z)}$ et un argument de e^z est $\text{Im}(z)$.

Exemple 16

$$e^{2+\frac{i\pi}{4}} = e^2 e^{\frac{i\pi}{4}} = e^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{e^2}{\sqrt{2}} + \frac{ie^2}{\sqrt{2}}.$$

Proposition 12

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

① **Périodicité** $e^z = e^{z'} \iff z \equiv z' [2i\pi].$

② **Transformation des sommes en produits** $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ et $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Preuve.

① On identifie les formes trigonométriques.

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\iff e^{\operatorname{Re}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z')} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi] \\ &\iff \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(z) \equiv \operatorname{Im}(z') [2\pi] \iff z \equiv z' [2i\pi] \end{aligned}$$

② $e^{z+z'} = e^{\operatorname{Re}(z+z')} e^{i \cdot \operatorname{Im}(z+z')} = e^{\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Re}(z')} e^{i \cdot \operatorname{Im}(z)+i \cdot \operatorname{Im}(z')} = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{\operatorname{Re}(z')} e^{i \cdot \operatorname{Im}(z)} e^{i \cdot \operatorname{Im}(z')} = e^z e^{z'}.$

□

Résolution de $e^z = a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ dont la forme trigonométrique est $a = re^{i\theta}$. On a donc

$$\begin{aligned} e^z = a &\Leftrightarrow e^z = re^{i\theta} = e^{\ln(r)} e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow e^z = e^{\ln(r)+i\theta} \\ &\Leftrightarrow z - \ln(r) - i\theta \in 2i\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de $e^z = a$ est

$$\{\ln(r) + i(\theta + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple 17

Les solutions de $e^z = 2 + 3i$ sont les $\frac{1}{2} \ln(13) + \arctan(3/2)i + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2.5 RACINES $n^{\text{ièmes}}$ DE NOMBRES COMPLEXES

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction racine $n^{\text{ième}}$ est la réciproque de la fonction puissance n sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$: $y = \sqrt[n]{x} \iff x = y^n$.

Définition 7 : Racines $n^{\text{ièmes}}$, ensemble $\mathbb{U}_n$

Pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine $n^{\text{ièmes}}$** de z tout nombre complexe ζ pour lequel

$$z = \zeta^n.$$

En particulier, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 sont appelées les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et leur ensemble est noté

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

On doit quand même montrer l'égalité affirmée.

Preuve. Un complexe $z = |z|e^{i\theta}$ appartient à $\mathbb{U}_n$ si, et seulement si, $|z|^n = 1$ et $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $|z| \in \mathbb{R}_+, |z| = 1$. D'où la première égalité.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ (quotient et reste de la division euclidienne de k par n) tel que $k = qn + r$. Ainsi,

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ir\pi}{n}} \in \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Donc

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z} \right\} \subset \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

L'autre inclusion est évidente et l'on vérifie que ces n complexes sont deux à deux distincts (car les arguments principaux sont distincts). $\square$

ATTENTION Comme pour la racine carrée, ne JAMAIS écrire



Sinon, il faudra expliquer quelle racine $n^{\text{ièmes}}$ vous notez comme cela !

Polygones

Les points d'affixes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité forment un polygone régulier à n sommets, inscrit dans le cercle unité et qui admet $(1, 0)$ pour sommet. En effet, l'angle au centre défini par deux racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité consécutives est un argument de $\frac{e^{\frac{2i(k+1)\pi}{n}} - 0}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 0} = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, donc de mesure $\frac{2\pi}{n}$.

Exemple 18

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité ont beaucoup de propriétés intéressantes. Voyons en 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifiant l'équation $\omega^n = 1$. On a vu alors qu'il existe $l \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $\omega = e^{\frac{2i\pi l}{n}}$.

Produit de racines de l'unité. On a $\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{n(n-1)/2} = e^{i\pi(n-1)l} = (-1)^{(n-1)l}$.

Somme des racines de l'unité. Par ailleurs, $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = \frac{1 - e^{2i\pi l}}{1 - e^{\frac{2i\pi l}{n}}} = 0$.

Pour $l = 1$, on a le résultat que la somme des racines de l'unité est nulle !

Proposition 13

Tout nombre complexe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ possède exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$, à savoir :

$$\sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}, \quad k \text{ décrivant } \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Preuve. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons: $\zeta = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n}}$. Il est immédiat que : $\zeta^n = z$ et ζ est non nul puisque z ne l'est pas. Nous disposons ainsi déjà d'un exemple de racine $n^{\text{ième}}$ de z , et grâce à lui, nous allons les trouver toutes. Pour tout $\omega \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \omega^n = z &\iff \omega^n = \zeta^n \iff \left(\frac{\omega}{\zeta} \right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \frac{\omega}{\zeta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \omega = \sqrt[n]{r} e^{\frac{i\theta}{n} + \frac{2ik\pi}{n}}. \end{aligned}$$

$\square$

Nombre j

On note j la racine cubique de l'unité $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ce nombre est beaucoup utilisé dans les exercices. On peut montrer quelques relations intéressantes sur ce nombre

$$j^3 = 1, \quad \bar{j} = j^2, \quad 1 + j + j^2 = 0$$

et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + z + 1 = (z - j)(z - \bar{j}) .$$

Exemple 19

Déterminons les racines cinquièmes de $1 + i$. Comme $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, l'ensemble de ses racines cinquièmes est

$$\left\{ 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)} \mid k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket \right\} .$$

3 LES COMPLEXES ET LA GÉOMÉTRIE - PARTIE 2

Proposition 14

Soit a, b, z des complexes avec $z \neq a$ et $z \neq b$. On note M, A, B les images respectives dans le plan complexe de z, a, b . On a alors

$$\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \frac{MB}{MA}, \quad \text{et} \quad \arg \left(\frac{z-b}{z-a} \right) \equiv (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})[2\pi]$$

Preuve. On a

$$\left| \frac{z-b}{z-a} \right| = \frac{|z-b|}{|z-a|} = \frac{MB}{MA}$$

et

$$\arg \left(\frac{z-b}{z-a} \right) \equiv \arg \left(\frac{b-z}{a-z} \right) \equiv (\vec{i}, \overrightarrow{MB}) - (\vec{i}, \overrightarrow{MA}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})[2\pi]$$

□

Corollaire 14.1 : Alignement, orthogonalité

Soit a, b, z des complexes avec $z \neq a$ et $z \neq b$. On note M, A, B les images respectives dans le plan complexe de z, a, b .

A, B, M sont alignés si, et seulement si, $\frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R}$.
 (AM) et (BM) sont orthogonales si, et seulement si, $\frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$

Preuve.

$$\begin{aligned} A, B \text{ et } M \text{ sont alignés} &\iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv 0[2\pi] \text{ ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \pi[2\pi] \iff \frac{z-b}{z-a} \in \mathbb{R} \\ (AM) \text{ et } (BM) \text{ sont orthogonales} &\iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \iff \frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

□

Pour exprimer $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$, penser à utiliser le conjugué de cette quantité.

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$$

Exemple 20

Soit A et B deux points distincts du plan, d'affixes respectives a et b . Le point M d'affixe z appartient au cercle Γ de diamètre $[AB]$ si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, ce qui équivaut, si $M \neq A$, à $\frac{z-b}{z-a} \in i\mathbb{R}$, ou encore à

$$\frac{z-b}{z-a} = -\overline{\left(\frac{z-b}{z-a} \right)} = -\frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{z}-\bar{a}} .$$

Exemple 21

L'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que le triangle de sommets z, z^2, z^3 soit rectangle en z est constitué de la droite verticale d'équation $\operatorname{Re}(z) = -1$ et des deux points 0 et 1 . En effet, si $z = 0$ ou $z = 1$ c'est évident car le triangle est alors réduit à un point. Sinon, on résout

$$\frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z+1) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = -1$$

Exemple 22**Symétrie orthogonale**

Soit A, B deux points distincts d'affixe a et b . On peut se poser la question du calcul du symétrique orthogonal M' d'un point M , d'affixe z par rapport à la droite (AB) .

On va vérifier que ce point est $z' = a + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{a})$.

Ce point M' doit vérifier

$$\begin{cases} (MM') \perp (AB) \\ AM = AM' \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{z-z'}{a-b} \in i\mathbb{R} , \\ |z-a| = |z'-a| \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} \text{On a d'abord} \quad \frac{z-z'}{a-b} &= \frac{z-a - \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{a})}{a-b} \\ &= \frac{z\bar{b} - a\bar{b} - z\bar{a} + a\bar{a} - b\bar{z} + a\bar{z} + b\bar{a} - a\bar{a}}{(a-b)(\bar{b}-\bar{a})} \\ &= -\frac{(z\bar{b} - b\bar{z}) + (b\bar{a} - a\bar{b}) + (a\bar{z} - z\bar{a})}{|a-b|^2} \in i\mathbb{R} . \end{aligned}$$

car, pour tout $y \in \mathbb{C}$, $y - \bar{y} \in i\mathbb{R}$.

De plus, $|z'-a| = \left| \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(\bar{z}-\bar{a}) \right| = \left| \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}} \right| |\bar{z}-\bar{a}| = 1 \times |z-a| = |z-a|$.

Ce qui vérifie bien les conditions demandées.

Exemple 23**Points remarquables d'un cercle**

Soit A, B, C trois points non-alignés d'affixes respectives a, b et c tels que O , le centre du cercle circonscrit au triangle ABC , ait une affixe nulle, et donc $|a| = |b| = |c|$.

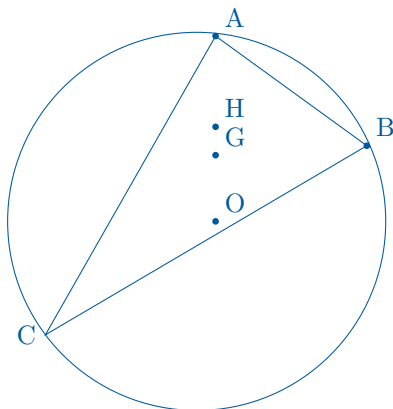
Montrons que l'orthocentre H a pour affixe $a+b+c$.

Pour cela, il suffit de vérifier que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BC}$. Les autres vérifications sont symétriques.

$$(a+b+c-a)\overline{(c-b)} = (b+c)\overline{(c-b)} = 0 .$$

Donc $(a+b+c-a)\overline{(c-b)} \in i\mathbb{R}$, et $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

Petite remarque : Comme le centre de gravité G admet pour affixe $\frac{1}{3}(a+b+c)$, parce que c'est l'isobarycentre des 3 points A, B et C , on retrouve avec ce résultat que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.



Grâce à l'exemple précédent, calculons les symétriques orthogonal H' de H par rapport à un côté AB et H'' de H par rapport au milieu du segment $[AB]$. On a

$$\begin{aligned} z' &= a + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(a+b+c-\bar{a}) = a + \frac{b-a}{\bar{b}-\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c}) \\ &= \frac{|b|^2 - |a|^2 - a\bar{c} + b\bar{c}}{\bar{b}-\bar{a}} = \frac{\bar{c}(b-a)}{\bar{b}-\bar{a}} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} z'' &= a+b+c+2 \times \left(\frac{a+b}{2} - (a+b+c) \right) \\ &= -c \end{aligned}$$

D'où z' et z'' sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC .

TRANSFORMATION DU PLAN

Si F est une application du plan dans lui-même, on peut lui associer une unique application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tous points M et M' d'affixes respectives z et z' on ait $M' = F(M)$ si, et seulement si, $z' = f(z)$. Réciproquement, l'application f caractérise F . On dit que F est représentée par f dans le plan complexe.

Définition 8 : Translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M , associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Proposition 15

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et a son affixe. La translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée dans le plan complexe par l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto z + a.$$

Définition 9 : Homothétie

Soit Ω un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout M , associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 16

L'homothétie de centre Ω , d'affixe ω , et de rapport λ est représentée dans le plan complexe par l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto \lambda(z - \omega) + \omega.$$

Exemple 24

La symétrie par rapport au point Ω , d'affixe ω , est l'homothétie de centre Ω et de rapport -1. Elle est donc représentée par l'application $z \mapsto -z + 2\omega$.

Définition 10 : Rotation

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui transforme Ω en Ω , et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que :

$$\Omega M = \Omega M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]$$

Proposition 17

La rotation r de centre Ω , d'affixe ω , et d'angle θ est représentée dans le plan complexe par l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega. \end{aligned}$$

Preuve.

On fait ici les démonstrations des 3 dernières propositions.

Proposition 15 Si les points M et M' ont pour affixes z et z' , alors M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$, si, et seulement si, l'égalité $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est vérifiée, ce qui équivaut à l'égalité des affixes $z' - z = a$ et donc à $z' = z + a$.

Proposition 16 Si les points M et M' ont pour affixes z et z' , alors M' est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport λ , si, et seulement si, l'égalité $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$ est vérifiée, ce qui équivaut à l'égalité des affixes $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$ et donc à $z' = \lambda(z - \omega) + \omega$.

Proposition 17 Soit $M \neq \Omega$ d'affixe z et $r(M) = M' \neq \Omega$ d'affixe z' . Par définition de la rotation r , on a :

$$\Omega M = \Omega M' \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]$$

ce qui se traduit, sur les affixes $z' - \omega$ et $z - \omega$ des vecteurs $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$, par :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Cela reste vrai si $z = \omega$, puisque $r(\Omega) = \Omega$.

□

Définition 11 : Similitude directe

On appelle **similitude directe** du plan toute application du plan dans lui-même représentée dans le plan complexe par $z \mapsto az + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

On voit assez facilement, que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe. Les similitudes directes conservent le sens des angles du plan.

Comment savoir ce qu'est une similitude directe ?

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et F la similitude du plan représentée par $z \mapsto az + b$.

- Lorsque $a = 1$, c'est une translation.
- Supposons $a \neq 1$. Un point M d'affixe z est invariant par F si, et seulement si, z vérifie l'équation $z = az + b$, qui a pour unique solution $\frac{b}{1-a}$ car $a \neq 1$. L'unique point invariant par F est donc le point Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1-a}$. De plus, pour tout point M d'affixe z , l'affixe z' du point $F(M)$ vérifie

$$z' - \omega = az + b - (a\omega + b) = a(z - \omega)$$

Soit R la rotation de centre Ω et d'angle α et H l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$. Vérifions que $F = H \circ R$. Soit M un point d'affixe z , z_1 l'affixe de $R(M)$ et z_2 l'affixe de $H(R(M))$. On a, d'après les propositions 17 et 16, les relations

$$z_1 - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega) \quad \text{et} \quad z_2 - \omega = |a|(z_1 - \omega)$$

ce qui donne

$$z_2 - \omega = |a|e^{i\alpha}(z - \omega) = a(z - \omega)$$

Le complexe z_2 est donc l'affixe du point $F(M)$, ce qui montre l'égalité $F = H \circ R$. On montre de même l'égalité $F = R \circ H$.

Le réel $|a|$ est appelé rapport de la similitude et α une mesure de l'angle de la similitude.

Exemple 25

$z \mapsto 2iz + 1$ est la similitude directe de centre $\frac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En effet, $2i \neq 1$ donc on résout $z = 2iz + 1$, c'est-à-dire $z = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}$. f a donc pour centre $\omega := \frac{1+2i}{5}$, pour rapport $|2i| = 2$, et pour angle $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$.

Similitudes indirectes (Hors programme)

L'application $z \mapsto \bar{z}$ représente la symétrie du plan par rapport à la droite $(O, \vec{i})$.

Il existe aussi des similitudes indirectes (qui ne sont pas au programme). Ce sont les transformations du plan représentées par les applications $z \mapsto a\bar{z} + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.