

Intégration par parties (IPP)

Soient u et v deux fonctions dérivables.

On a la formule:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

L'intégration par parties est juste l'utilisation de cette formule pour l'intégrale:

$$\int_a^b (uv)'(x) dx = \int_a^b (u'v + (uv)') dx = \int_a^b u'(x)v(x) dx + \int_a^b (u(x)v'(x)) dx$$

$$\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b$$

$x^n, x, \dots$

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = - \int_a^b u(x)v'(x) dx + [u(x)v(x)]_a^b$$

En pratique:

on primitive u' (exp, cos, sin, ...)

On a 2 fonctions dans l'intégrale et on veut en dériver une pour la supprimer (ici $v(x)$)

Formule de l'IPP:

$$\int_a^b u(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

où U est la primitive de u

Exemple:

Calculez $\int_0^2 x e^{2x+1} dx$

Pas de primitive directe.

Difficile d'associer $x \mapsto e^{ax+b}$ avec une autre fonction pour le calcul d'une primitive

On dérive $x \mapsto x$

on primitive $x \mapsto \frac{2x+1}{2}$

$$= \left[x \frac{e^{2x+1}}{2} \right]_0^2 - \int_0^2 1 \frac{e^{2x+1}}{2} dx$$

$x \mapsto e^{ax+b}$ se dérive et se primitive facilement!

Rappel: Si $f(x) = e^{2x+1}$
 $\Rightarrow f'(x) = 2 e^{2x+1}$
 et $F(x) = \frac{e^{2x+1}}{2}$

$$= \cancel{2} \frac{e^{4+1}}{2} - 0 \times \frac{e^1}{2} - \int_0^2 \frac{e^{2x+1}}{2} dx$$

$$= e^5 - \left[\frac{e^{2x+1}}{4} \right]_0^2$$

$$= e^5 - \left(\frac{e^5}{4} - \frac{e^1}{4} \right)$$

$$= \frac{3e^5}{4} + \frac{e}{4}$$

Exercices d'applications:

$$(1) \quad I = \int_1^3 (2x+1) e^{x-1} dx$$

$$(2) \quad J = \int_0^3 x^2 e^{2x} dx$$

$$(3) \quad K = \int_{-1}^1 x^3 \cos(x) dx$$

Exemples d'IPP

$$I_1 = \int_{-1}^3 x^2 e^{x+1} dx$$

d'abord on primitive!
... Mais ici c'est facile : c'est "exp"!

Ici, on sait calculer $\int e^{x+1} dx = [e^{x+1}]$
On va donc supprimer le " x^2 " en le dérivant avec l'IPP.

$$I_1 = \left[x^2 e^{x+1} \right]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 2x e^{x+1} dx$$

et on dérive l'autre!

$$I_1 = (3^2 e^4 - (-1)^2 e^0) - 2 \int_{-1}^3 x e^{x+1} dx$$

On sort la constante de l'intégrale. Pas la peine de se compliquer la vie!

$$I_1 = 9e^4 - 1 - 2 \int_{-1}^3 x e^{x+1} dx$$

$$I_1 = 9e^4 - 1 - 2 \left(\left[x e^{x+1} \right]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 1 e^{x+1} dx \right)$$

$$I_1 = 9e^4 - 1 - 2 \left[x e^{x+1} \right]_{-1}^3 + 2 \int_{-1}^3 e^{x+1} dx$$

et plus de facteur en " x "!
et on sait primitiver ...

$$I_1 = 9e^4 - 1 - (2 \times 3 e^4 - 2 \times (-1) e^0) + 2 [e^{x+1}]_{-1}^3$$

$$I_1 = 9e^4 - 1 - 6e^4 - 2 + 2e^4 - 2e^0$$

$$I_1 = 5e^4 - 5$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} x \cos(2x) dx$$

Ici, c'est pareil! On sait que calculer la primitive de " $x \mapsto \cos(x)$ " ou de " $x \mapsto \sin(x)$ ". On va utiliser l'IPP pour isoler cette fonction!

$$I_2 = \left[\underset{\textcircled{2} \text{ Dérive!}}{x} \cdot \underset{\textcircled{1} \text{ Primitive!}}{\frac{\sin(2x)}{2}} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(2x) dx$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [x \sin(2x)]_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx$$

On sort la constante. Pas la peine de se compliquer la vie!

$$I_2 = \frac{1}{2} (\pi \underbrace{\sin(2\pi)}_{=\sin(0)=0} - 0) - \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(2\pi)}{2} - -\frac{\cos(0)}{2} \right)$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$I_3 = \int_1^2 x^7 \ln(x^3) dx$$

Ici, on remarque que si on primitive " x^7 " et on dérive " $\ln(x^3)$ ", l'intégrande devient un monôme " x^2 ".

$$I_3 = \left[\frac{x^8}{8} \ln(x^3) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^8}{8} \cdot \frac{3x^2}{x^3} dx$$

$$I_3 = \frac{1}{8} [x^8 \ln(x^3)]_1^2 - \frac{3}{8} \int_1^2 x^7 dx$$

$$I_3 = \frac{1}{8} \left(2^8 \ln(2^3) - 1^8 \ln(1^3) \right) - \frac{3}{8} \left[\frac{x^8}{8} \right]_1^2$$

Rappel: $\ln(x^a) = a \ln(x)$

$$I_3 = \frac{2^8}{8} \times 3 \ln(2) - 0 - \left(3 \times \frac{2^8}{8 \times 8} - \frac{1^8}{8 \times 8} \right) = 96 \ln(2) - 96 - \frac{1}{16}$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+7}} dx$$

Ici le "x" nous gêne.
On le supprime avec une IPP.

$$I_4 = \left[\overset{\textcircled{1}}{x} \times \underset{\textcircled{2}}{2\sqrt{x+7}} \right]_1^2 - \int_1^2 1 \times 2\sqrt{x+7} dx$$

$$I_4 = 2 \left[x \sqrt{x+7} \right]_1^2 - 2 \int_1^2 \sqrt{x+7} dx$$

$$I_4 = 2 \left(2\sqrt{9} - \sqrt{8} \right) - 2 \left[\frac{(x+7)^{3/2}}{3/2} \right]_1^2$$

$$I_4 = 4 \times 3 - 2\sqrt{2} - 2 \times \frac{2}{3} \left((9)^{3/2} - (8)^{3/2} \right)$$

Rappel: $x^{a \cdot b} = (x^a)^b$

$$I_4 = 12 - 2\sqrt{2} - \frac{4}{3} (27 - 16\sqrt{2})$$

$$I_4 = -24 + \frac{58}{3} \sqrt{2}$$

$$I_5 = \int \ln(x) dx = \int \overset{\textcircled{1}}{1} \times \ln(x) dx$$

$$= \left[\overset{\textcircled{1}}{x} \times \overset{\textcircled{2}}{\ln(x)} \right] - \int x \times \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln(x) - \int 1 dx$$

$$I_5 = x \ln(x) - x$$