

Apuntes de

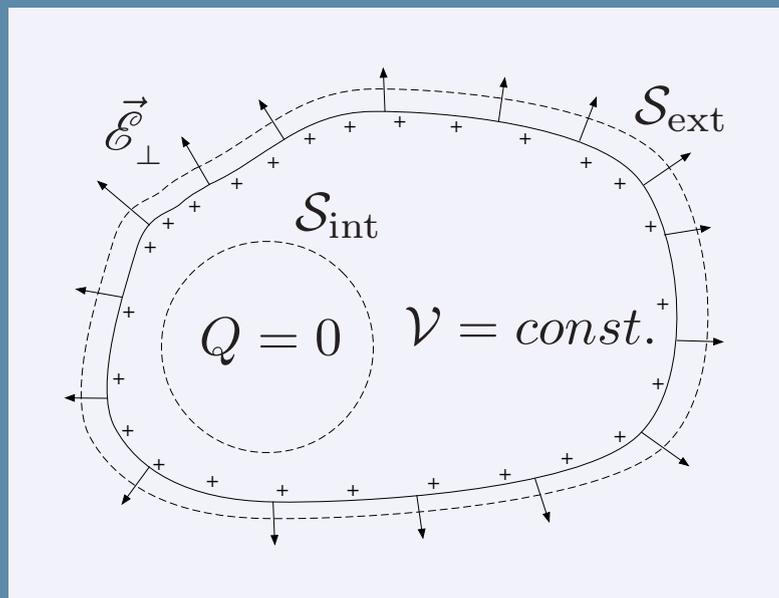
ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Volumen 3 de la serie:
MANUALES DE FÍSICA GENERAL

por

A. BADIA & B. VILLACAMPA

Departamento de Física de la Materia Condensada,
Universidad de Zaragoza (España)



APUNTES DE **ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO**

Colección de Manuales de Física General

Vol. 3

Esta colección recoge una serie de textos de Física General desarrollados como material de apoyo para nuestros alumnos de varias titulaciones científico-técnicas en la Universidad de Zaragoza.

Apuntes de Electricidad y Magnetismo
Primera edición revisada
Zaragoza, 2019

Autores:

Antonio Badía Majós y M. Belén Villacampa Naverac



Departamento de
Física de la
Materia Condensada
Universidad Zaragoza

BADÍA MAJÓS, Antonio & VILLACAMPA NAVERAC, M Belén
“APUNTES DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO”
PRIMERA EDICIÓN REVISADA, ZARAGOZA, 2019

Este trabajo está licenciado bajo *Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License*.



El documento electrónico y las condiciones de uso pueden obtenerse en
http://personal.unizar.es/anabadia/pag_docencia/libros_docentes.html

Acerca de los autores

<http://personal.unizar.es/anabadia/index.html>

<http://personal.unizar.es/bvillaca/index.html>

Índice

PRÓLOGO	XIII
I ELEMENTOS MATEMÁTICOS	1
INTRODUCCIÓN	3
1. MAGNITUDES, UNIDADES Y DIMENSIONES	5
1.1. <i>Conceptos básicos</i>	5
1.2. <i>Magnitudes escalares: análisis dimensional</i>	7
1.3. <i>Incertidumbre y cifras significativas</i>	8
2. PROPIEDADES VECTORIALES	11
2.1. <i>Magnitudes vectoriales</i>	11
2.2. <i>Representaciones coordenadas. Componentes de un vector</i> . .	12
2.3. <i>Operaciones con vectores: propiedades</i>	15
3. PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y ANALÍTICAS	19
3.1. <i>Geometría básica</i>	19
3.2. <i>Trigonometría básica</i>	20
3.3. <i>Cálculo diferencial e integral</i>	22
3.4. <i>Gradiente de una función escalar</i>	24

II	EL CAMPO ELECTROSTÁTICO	29
	INTRODUCCIÓN	31
4.	CAMPO ELECTROSTÁTICO CREADO POR DISTRIBUCIONES DE CARGA	33
4.1.	<i>Ley de Coulomb</i>	33
4.2.	<i>Campo electrostático. Líneas de fuerza</i>	35
4.3.	<i>Principio de superposición</i>	38
4.3.1.	Distribuciones de carga continua	38
4.3.2.	Ejemplos de cálculo de $\vec{\mathcal{E}}$ por superposición.	42
5.	LA LEY DE GAUSS	47
5.1.	<i>Flujo del campo electrostático</i>	47
5.1.1.	Vector superficie	48
5.1.2.	Flujo	48
5.2.	<i>Teorema de Gauss</i>	50
5.3.	<i>Cálculo del campo electrostático aplicando el Teorema de Gauss</i>	51
5.3.1.	Esfera de radio a cargada uniformemente con densidad volúmica de carga ρ_0	51
5.3.2.	Cilindro infinito de radio a , cargado uniformemente con densidad volúmica de carga ρ_0	53
5.3.3.	Lámina infinita cargada con densidad σ	55
6.	POTENCIAL ELECTROSTÁTICO	57
6.1.	<i>Definición de potencial electrostático</i>	57
6.2.	<i>Ejemplos de cálculo del potencial</i>	60
6.2.1.	Cálculo de \mathcal{V} mediante el principio de superposición	60
6.2.2.	Cálculo del potencial \mathcal{V} a partir del campo $\vec{\mathcal{E}}$	62
6.3.	<i>Superficies equipotenciales, vector gradiente</i>	63
6.3.1.	Gradiente del potencial	64
6.3.2.	Cálculo de $\vec{\mathcal{E}}$ a partir del potencial.	65
6.4.	<i>Energía electrostática de una distribución</i>	66

III ELECTROSTÁTICA EN LA MATERIA	69
INTRODUCCIÓN	71
7. ELECTROSTÁTICA EN MATERIALES CONDUCTORES	73
7.1. <i>Condiciones de equilibrio electrostático</i>	73
7.1.1. Ejemplo: Campo electrostático y potencial en presencia de conductores	75
7.1.2. Presión electrostática	76
7.2. <i>Apantallamiento y conexión a tierra</i>	77
7.2.1. Conductores con cavidades	77
7.2.2. Apantallamiento	78
7.2.3. Conductor conectado a tierra	79
7.3. <i>Capacidad. Concepto de condensador</i>	80
7.4. <i>Densidad de energía electrostática</i>	83
8. ELECTROSTÁTICA EN MATERIALES DIELECTRICOS	85
8.1. <i>El dipolo eléctrico</i>	86
8.1.1. Campo y potencial creados por el dipolo	87
8.1.2. Efectos de un campo externo sobre un dipolo	88
8.2. <i>Polarización de un dieléctrico</i>	89
8.3. <i>Ley de Gauss en dieléctricos, vector $\vec{\mathcal{D}}$</i>	92
8.4. <i>Tipos de materiales dieléctricos</i>	94
8.5. <i>Condensadores con dieléctrico</i>	95
IV CORRIENTE ELÉCTRICA	97
INTRODUCCIÓN	99
9. CORRIENTE ELÉCTRICA.	
LEY DE OHM	101
9.1. <i>Corriente y densidad de corriente</i>	102

9.2.	<i>Ley de Ohm. Resistencia</i>	104
9.3.	<i>Transición al equilibrio electrostático</i>	107
9.3.1.	Ecuación de continuidad	107
9.3.2.	Transitorio en una esfera conductora	108
9.4.	Visión global sobre la conducción eléctrica	109
10.	INTRODUCCIÓN	
	A LA TEORÍA DE CIRCUITOS	111
10.1.	<i>Generadores de tensión</i>	112
10.1.1.	Fuerza electromotriz. Generadores reales.	113
10.2.	<i>Potencia en un circuito</i>	113
10.3.	<i>Leyes de Kirchhoff</i>	114
10.4.	<i>Transitorios en circuitos RC</i>	117
10.4.1.	Procesos de carga y descarga en circuitos <i>RC</i>	118
V	EL CAMPO MAGNETOSTÁTICO	121
	INTRODUCCIÓN	123
11.	LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA	125
11.1.	<i>Experimento de Ampère, fuerza de Lorentz</i>	125
11.1.1.	Ejemplo 1: Trayectoria de una partícula cargada	128
11.1.2.	Ejemplo 2: Fuerza entre hilos paralelos	130
11.1.3.	Ejemplo 3: Momento de una espira	131
11.2.	<i>Inducción magnética. Ley de Biot-Savart</i>	134
11.2.1.	Ejemplos de cálculo de la inducción magnética	135
12.	LA LEY DE AMPÈRE	139
12.1.	<i>Circulación de $\vec{\mathcal{B}}$</i>	139
12.2.	<i>Ley de Ampère</i>	141
12.3.	<i>Ejemplos de aplicación de Ley de Ampère</i>	144
12.3.1.	Ejemplo 1: cálculo de $\vec{\mathcal{B}}$ en un solenoide infinito	144

12.3.2. Ejemplo 2: cálculo de $\vec{\mathcal{B}}$ en un solenoide toroidal	145
VI ELECTROMAGNETISMO	149
INTRODUCCIÓN	151
13. INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA	153
13.1. <i>Ley de Faraday</i>	156
13.2. <i>Autoinducción e inducción mutua</i>	158
13.3. <i>Densidad de energía magnetostática</i>	160
13.3.1. Energía de autoinducción.	160
13.3.2. Densidad de energía almacenada en el campo: ejemplo .	161
14. ECUACIONES DE MAXWELL. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS	163
14.1. <i>Ley de Ampère-Maxwell</i>	164
14.2. <i>Ecuaciones de Maxwell</i>	166
14.3. <i>Ondas electromagnéticas</i>	167
VII ADDENDA	171
GLOSARIO	173
VIII FORMULARIO	179
FORMULARIO SOBRE ELECTROMAGNETISMO	181

PRÓLOGO

Este manual forma parte de una serie de textos concebidos como herramientas de apoyo para los estudiantes de las asignaturas de Física de primer curso de Universidad impartidas por los autores. Dada la variedad de titulaciones involucradas, en cada caso se hace mayor hincapié en aquellos aspectos que recojan los contenidos relevantes para la formación de los alumnos, de acuerdo con el plan de estudios y guías docentes del correspondiente grado. Así pues, no se conciben como “tratados” generalistas en los que el estudiante deba seleccionar contenidos, sino más bien como un manual de nuestras clases. No obstante, podemos afirmar que el nivel de profundidad con el que se tratan los temas debiera ser asequible (a grandes rasgos) para cualquier alumno de los primeros cursos de grados científico-técnicos.

El que nos ocupa recoge la teoría electromagnética formulada en los términos apropiados para un primer curso de Ingeniería, Física o Matemáticas. Hacemos énfasis en la formulación integral de las leyes del Electromagnetismo, teniendo bien presente que en esta etapa de su formación el estudiante conoce el Cálculo Diferencial de un modo básico. En este sentido, se trabaja con geometrías sencillas que permitan realizar cálculos de poca complejidad, insistiendo más en la necesidad de comprender el planteamiento matemático del problema. A modo de ejemplo, sería esperable que ante la expresión “ $\int dQ$ ” el estudiante entienda sin dudar que estamos simplemente ante la carga total de un sistema, en lugar de realizar un cálculo complicado transformando el problema en una integración “típica” sobre las coordenadas del objeto.

Sobre los contenidos propiamente dichos, la exposición sigue el orden clásico: Electrostática, Corriente Eléctrica, Magnetostática, Inducción Electromagnética y Campo Electromagnético. Haremos énfasis en que el lector vaya interiorizando el hecho de que no se trata de fenómenos separados, sino que van mostrando los diferentes aspectos de la interacción entre cargas eléctricas. En el glosario final se ha recogido la notación utilizada en el manual. Se ha incluido el alfabeto griego, cuya familiaridad será de gran ayuda por lo frecuente del uso del mismo. También recopilamos las expresiones básicas que recogen las

leyes físicas que van apareciendo en los apuntes. Con esto se pretende favorecer la visión integradora antes mencionada.

El trabajo personal de los alumnos es una necesidad incuestionable. A lo largo del texto, se encontrarán algunos ejercicios propuestos y sugerencias; así, cuando en un apartado se lee que un resultado dado “se puede comprobar”, es muy recomendable que el lector intente completar el desarrollo. Dichas comprobaciones deben considerarse como ejercicios adicionales a los problemas propiamente dichos propuestos en los distintos temas.

La resolución de problemas es un aspecto fundamental en el estudio de la Física. Ayudan a asimilar los conocimientos previamente adquiridos y aplicarlos a casos prácticos, que el futuro científico o ingeniero deberán resolver. Para poder desenvolverse en esto, es indispensable comprender los conceptos físicos expuestos en la parte teórica que tratamos en estos manuales. En toda esta tarea, la asistencia a las clases y las tutorías con el profesor son un gran aliado.

Queremos destacar que, a pesar de que este manual pretende ser autoconsistente, en el sentido de que los contenidos se van apoyando en los que ya han sido introducidos, la idea básica en la redacción ha sido recopilar las notas correspondientes al curso. Por tanto, no se trata tanto de material de estudio autodidacta como de material de apoyo para facilitar el seguimiento de la asignatura.

Los autores desean hacer constar que en la redacción se ha utilizado el género masculino para aligerar la lectura. Debe sobreentenderse “lector o lectora”, “alumno o alumna” cada vez que se lea “lector”, “alumno”.

Debemos agradecer la inestimable ayuda de M. Luisa Ramón en la edición de este manual.

Por último, no queremos dejar de señalar que serán bienvenidos los comentarios que nos ayuden a mejorar este trabajo. En esta edición revisada hemos incorporado una serie de cambios como consecuencia de innumerables anotaciones y acertados comentarios de nuestra compañera, la profesora Irene Lucas.

Octubre 2019, Zaragoza - España

Parte I

ELEMENTOS MATEMÁTICOS

INTRODUCCIÓN

La Física Fundamental está integrada por una serie de disciplinas una de las cuales es el Electromagnetismo, motivo de estos apuntes. Entre ellas, existen diferencias no sólo en el fenómeno de interés, sino también en los métodos de descripción. Por ejemplo, la Dinámica de una partícula se ocupa de la expresión completa de las coordenadas que definen el movimiento (trayectoria) de ésta en el espacio. La electrostática, por contra, proporciona una serie de métodos para calcular el valor que adquiere en cada punto del espacio el denominado “campo electrostático”, magnitud “intangible” salvo a través de su acción sobre las cargas eléctricas.

No obstante, una característica esencial compartida por todos los casos es el carácter cuantitativo del estudio. En el terreno experimental esto significa que las mediciones deben proporcionar datos numéricos, objetivos y contrastables. En el terreno teórico, hemos de tener en cuenta que las leyes que gobiernan los procesos físicos deben expresarse mediante ecuaciones matemáticas cuyas variables y parámetros serán las magnitudes físicas.

De estos aspectos nos ocuparemos en los capítulos que forman esta parte introductoria. Concretamente, revisaremos cómo deben expresarse las magnitudes físicas teniendo en cuenta su carácter escalar o vectorial. Introduciremos algunos conceptos de Análisis Dimensional, que no es otra cosa que el requerimiento de la consistencia entre las magnitudes que se relacionan mediante una ley física. Por ejemplo, resultaría inadmisibles igualar (o sumar) un campo eléctrico con una distancia, aunque nada impide su producto, que de hecho da lugar al concepto de potencial. Se hará hincapié asimismo en la importancia de conocer y expresar correctamente la incertidumbre inherente a cualquier medida física, que deberá quedar reflejada en los valores numéricos (p.e.: cifras decimales a conservar) obtenidos al realizar operaciones con los datos que se manejan. Otro asunto de indudable importancia es al manejo del Cálculo Diferencial. La práctica totalidad de las ecuaciones que se van a manejar son relaciones entre elementos diferenciales o sus integrales. Si bien, el uso que vamos a hacer es básico requiere una mínima comprensión de conceptos como derivada de una función o su integral definida, que repasaremos aquí.

En el sentido de lo dicho anteriormente, y con la misma validez que tendría en caso de ocuparnos de otra rama de la Física, haremos una breve recopilación de conceptos matemáticos imprescindibles. El detalle con el que se revisarán estos elementos es el que corresponde a la exposición del Electromagnetismo en los cursos generales introductorios en la enseñanza universitaria.

Capítulo 1

MAGNITUDES, UNIDADES Y DIMENSIONES

1.1. *Conceptos básicos*

Como se ha mencionado, es esencial el carácter cuantitativo de la Física. La verificación de cualquier teoría sobre los fenómenos físicos se basa en la medición y la concordancia de los resultados numéricos. Llamamos **Magnitud Física** a cualquier propiedad utilizada para caracterizar un fenómeno físico que se puede medir de forma reproducible. Serían ejemplos: tiempo, velocidad, energía, carga eléctrica, voltaje,...

Por otra parte, todas las magnitudes físicas se miden en términos de unos patrones que se conocen como **unidades**. El uso correcto y la soltura en el manejo de las unidades es imprescindible en Física.

Se llama **Magnitudes Fundamentales** a un conjunto básico de magnitudes en función del cual pueden expresarse todas las demás mediante las leyes físicas. Así, construir un **sistema de unidades** implica la elección de las unidades de las magnitudes fundamentales y derivar de ellas las demás.

El sistema internacional (SI), aceptado por convenios internacionales en prácticamente todo el mundo, considera hasta siete magnitudes fundamentales, que se muestran en la tabla 1.1.

Este sistema se conoce también como MKS, por las iniciales de las unidades fundamentales de las tres primeras magnitudes (metro, kilogramo, segundo). A partir de esas siete, aparece un gran número de unidades que se derivan de

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad lumínica	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Cuadro 1.1: Magnitudes fundamentales del Sistema Internacional de unidades. En Física 1 solo utilizaremos algunas de ellas.

Potencia de 10	Prefijo	SÍMBOLO	Ejemplo
10^{-15}	femto	f	fs (femtosegundo)
10^{-12}	pico	p	pF (picofaradio)
10^{-9}	nano	n	nA (nanoamperio)
10^{-6}	micro	μ	μ Pa (micropascal)
10^{-3}	mili	m	mJ (milijulio)
10^3	kilo	k	kV (kilovoltio)
10^6	mega	M	MW (megawatio)
10^9	giga	G	GHz (gigahertzio)
10^{12}	tera	T	T Ω (teraohmio)

Cuadro 1.2: Prefijos con que se nombran los múltiplos y subdivisiones de las distintas unidades.

ellas (por ejemplo el ms^{-1} , unidad de velocidad). Algunas unidades derivadas importantes tienen nombre propio, como el Voltio (potencial eléctrico), el Julio (energía: $E \propto mv^2 \Rightarrow \text{Julio} = \text{kilogramo metro}^2/\text{segundo}^2$), el Newton (fuerza), etc.

Además del SI hay otros sistemas de unidades, como el CGS (por las iniciales de centímetro, gramo, segundo), que se usa en áreas específicas de la Física. Por otra parte, en disciplinas técnicas se utiliza el Sistema Técnico, cuyas magnitudes fundamentales son longitud (metro), fuerza (kilogramo-fuerza o simplemente kilogramo) y tiempo (segundo).

En muchas ocasiones, las unidades básicas son demasiado grandes o pequeñas para expresar la medida que nos interesa de modo razonable. En estos casos se utilizan los múltiplos y subdivisiones de las unidades (ver tabla 1.2).

MAGNITUD	UNIDADES	DIMENSIONES
Longitud	metro (m)	[L]
Masa	kilogramo (kg)	[M]
Tiempo	segundo (s)	[T]
Intensidad de corriente	amperio (A)	[I]
Carga eléctrica	culombio (C)	[Q] = [I] [T]
Energía	julio (J)	[M] [L] ² [T] ⁻²

Cuadro 1.3: Ecuación de dimensiones de algunas magnitudes fundamentales del sistema MKS, así como de la carga y de la energía.

1.2. Magnitudes escalares: análisis dimensional

Para describir algunas magnitudes físicas basta una cantidad numérica y la unidad correspondiente. Es el caso de la masa o la temperatura, por ejemplo. Se conocen como **magnitudes escalares**.

Sin embargo, muchas magnitudes físicas requieren ser descritas mediante vectores, esto es, con módulo (con las correspondientes unidades), dirección, sentido (en ocasiones habrá que precisar también el punto de aplicación). Son las llamadas **magnitudes vectoriales**. Ejemplos de magnitudes vectoriales: velocidad, fuerza, campo eléctrico..

Para revisar el concepto de vector y sus tipos, así como algunas operaciones que se pueden realizar con ellos y sus propiedades, remitimos al lector al capítulo 2. En lo que sigue nos centraremos en las magnitudes escalares (o en el módulo de las magnitudes vectoriales) para introducir el concepto de análisis dimensional.

La expresión de una magnitud física en función de las fundamentales nos da las *dimensiones de la magnitud*. Llamamos **Ecuación de Dimensiones** a la expresión de cualquier magnitud en función de las magnitudes fundamentales en el correspondiente sistema de unidades.

Siguiendo con el ejemplo del sistema MKS, en la tabla 1.3 se proporciona la ecuación de dimensiones de algunas magnitudes fundamentales y derivadas.

Las ecuaciones que contienen magnitudes físicas han de ser **dimensionalmente consistentes**, es decir, sólo se pueden sumar o igualar términos con las mismas dimensiones. Este es un primer criterio de comprobación de la corrección de un resultado.

Ejemplo: Comprobar como ejercicio cuál de las dos expresiones que se proporcionan para la frecuencia de oscilación de la masa m (Fig. 1.1) es dimensionalmente consistente:

$$\nu_a = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m} \right]^{1/2}$$

$$\nu_b = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{k_1 + k_2}{m k_1 k_2} \right]^{1/2}$$

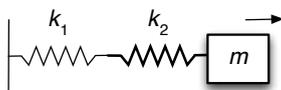


Figura 1.1: Masa oscilante m unida a dos muelles de constantes elásticas distintas.

1.3. Incertidumbre y cifras significativas

Cualquier medida va acompañada de una incertidumbre inherente a la misma. Si se mide un bolígrafo con una regla ordinaria, no tendría sentido decir, por ejemplo, que su longitud es 145,25 mm, porque la regla solo permite medir de forma “confiable” al mm más cercano. Por el contrario, si se utiliza un micrómetro, que mide distancias aproximándose al 0,01 mm más cercano, la medida anterior si que sería posible. Esa **incertidumbre** (también llamada **error**) se expresa habitualmente como un “ \pm ” que acompaña al valor numérico; así, en el primer caso diríamos que la longitud es 145 ± 1 mm, (o $14,5 \pm 0,1$ cm) . Eso debe interpretarse como que es poco probable que el bolígrafo mida más de 14,6 cm o menos de 14,4 cm. En el caso del micrómetro se expresaría la longitud como $145,25 \pm 0,01$ mm.

No es extraño expresar la incertidumbre en forma porcentual. Por ejemplo, si una resistencia viene expresada como $R = 680 \pm 10\%$ ohmios, debe interpretarse que lo más probable es que el valor real de la resistencia esté comprendido en un rango de ± 7 ohmios alrededor de 680.

A menudo no se da explícitamente la incertidumbre, sino que se indica con el número de **cifras significativas** (dígitos informativos) con el que se expresa la medida. Si se indica que un folio mide 31,5 cm de alto, hay que entender que los dos primeros dígitos (3 y 1) son correctos, pero que el tercero está afectado por un error de 0,1 cm.

Cuando se realizan cálculos con números con un cierto error, el resultado también estará afectado por incertidumbre. Así, si se están multiplicando o dividiendo números, el resultado no puede tener más cifras significativas que el que menos tuviera de los números originales. La superficie de una hoja de papel de 31,5 cm de alto y 20,9 cm de ancho, será 658 cm^2 . Si se están sumando o restando dos números, el resultado no puede tener más dígitos significativos a la derecha de la coma decimal que el término que menos tenga. Por ejemplo, si se suma 11,24 más 13,1, el resultado da 24,3 no 24,34 (hasta las décimas, como el 13,1).

Es importante recordar que al reducir al número correcto de cifras significativas hay que **redondear**: la regla a seguir es que la última cifra significativa se aumentará en una unidad si la primera no significativa a su derecha es mayor o igual que 5 y se dejará igual si dicha cifra es menor que 5. Por ejemplo, si se desea redondear el número 1,3563342 a tres cifras significativas, lo correcto sería expresarlo como 1,36 y el número 1,4428638 como 1,44.

Cuando se utilizan números muy grandes o muy pequeños, es frecuente usar la **notación científica** que consiste en escribir la coma decimal tras la primera cifra significativa y a continuación el resto de cifras significativas. Finalmente, se multiplica ese número por 10 elevado a la potencia correspondiente. (Los números entre 0 y 10 se expresan sin la potencia). Por ejemplo, el número 0,00285 se expresaría como $2,85 \cdot 10^{-3}$. El uso de potencias de 10 es muy útil para aplicar bien el convenio de cifras significativas (3 en el ejemplo).

Para terminar, querríamos señalar que **exactitud** y **precisión** no son sinónimos en este contexto. La exactitud se refiere al grado de concordancia entre el valor exacto (“real”, “verdadero”) de la magnitud y el valor medido. La precisión se refiere, por una parte a la sensibilidad del aparato de medida. Una balanza de cocina bien calibrada, que es capaz de apreciar hasta 1 gramo, es menos precisa que una de laboratorio capaz de apreciar 0,1mg. Pero si ésta no está bien calibrada, no será exacta, aunque sea muy precisa. La precisión también hace referencia al grado de concordancia entre los resultados de las diferentes medidas.

Capítulo 2

PROPIEDADES VECTORIALES

Revisaremos el concepto de vector y sus tipos, así como algunas de las operaciones que se pueden realizar con ellos. Asimismo mostraremos algunas propiedades y aplicaciones de dichas operaciones. Se han recopilado aquellas que resultan esenciales para el desarrollo de la asignatura.

2.1. *Magnitudes vectoriales*

Retomando la clasificación de las magnitudes introducida en el capítulo 1.2, recordemos que muchas magnitudes físicas requieren ser descritas mediante vectores, esto es, con módulo (con las correspondientes unidades), dirección, sentido siendo relevante en ocasiones el punto de aplicación (origen del vector). Son las llamadas **magnitudes vectoriales**. Tal es el caso de la aceleración, la fuerza o los campos eléctrico y magnético.

Definición: Un vector es un segmento orientado.

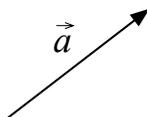


Figura 2.1: Un vector.

Existen distintos tipos de vectores desde un punto de vista matemático, pero cuyas diferencias son importantes a la hora de aplicar sus propiedades a las diferentes magnitudes físicas que tienen carácter vectorial.

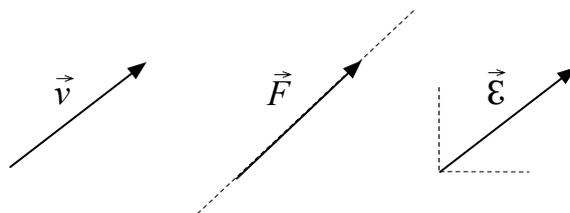


Figura 2.2: Ejemplos de vectores: libre (velocidad), deslizante (fuerza) y ligado (campo eléctrico).

Así, dependiendo de si su *punto de aplicación* puede trasladarse, los vectores se clasifican en **libres** (el origen puede trasladarse a cualquier punto, sin alterar el efecto de su acción: ej. velocidad de la luz), **deslizantes** (ej. el origen puede trasladarse a lo largo de la línea de acción del vector: fuerza aplicada sobre un sólido) o **ligados** (el origen no puede moverse: ej. el campo eléctrico en un punto dado).

Aquellos vectores tales que en su definición interviene un *giro*, se denominan **axiales** (como la velocidad angular, el par o momento de una fuerza o el momento angular). Todos los demás se clasifican en la categoría de **polares** (como el momento lineal). Es importante tener en cuenta que en una igualdad física los vectores a ambos lados de la igualdad deben ser del mismo tipo.

2.2. Representaciones coordenadas. Componentes de un vector

Todo vector admite representaciones en distintas bases del espacio. Generalmente, se suelen utilizar bases de vectores unitarios ortogonales:

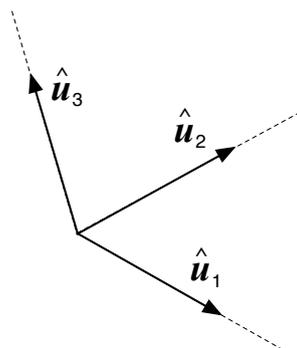


Figura 2.3: Vectores unitarios ortogonales.

Expresaremos los vectores en términos de la base del modo

$$\vec{a} = a_1 \hat{u}_1 + a_2 \hat{u}_2 + a_3 \hat{u}_3$$

siendo a_1 , a_2 y a_3 las **componentes del vector** en la base dada. Veámoslo de modo explícito en dos casos de bases ortogonales usuales en Física:

1. COORDENADAS CARTESIANAS

Fijemos un punto O en el espacio (origen del sistema de referencia) y consideremos tres direcciones perpendiculares preferentes X, Y y Z.

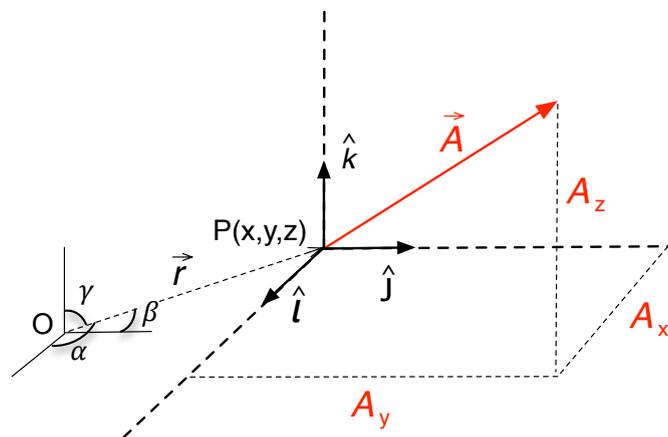


Figura 2.4: Componentes cartesianas del vector \vec{A} .

Los vectores unitarios correspondientes a esas direcciones \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} forman una base ortogonal en cada punto del espacio.

En este sistema, las coordenadas de un punto P vienen dadas por las componentes del vector de posición \vec{r} de dicho punto (\vec{r} =vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto). Por otra parte, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ reciben el nombre de **cosenos directores** y determinar de forma unívoca la dirección del vector \vec{r} .

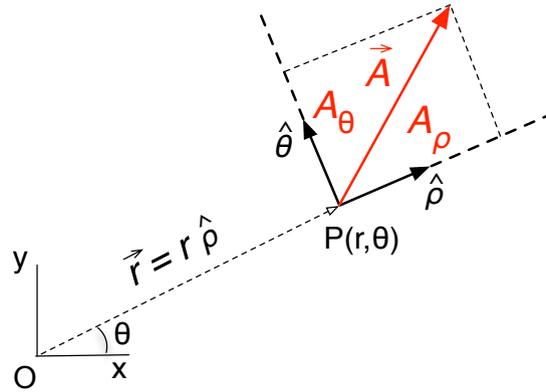
Un vector \vec{A} cualquiera con origen en P se puede representar como:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (2.1)$$

Nótese que los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , son independientes del punto P elegido.

2. COORDENADAS POLARES EN EL PLANO

Fijemos de nuevo un punto O en el plano y consideremos un eje preferente (por convenio el X).

Figura 2.5: Componentes polares del vector \vec{A} .

En este caso, como se indica en la figura, la posición del punto P se especifica mediante las coordenadas r y θ , que corresponden a la distancia desde el origen y el ángulo con el eje X . Debe notarse que la base ortogonal $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ es distinta en cada punto del plano $P(r, \theta)$.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_\rho \hat{\rho} + A_\theta \hat{\theta} \\ A_\rho &= A_\rho(r, \theta) \\ A_\theta &= A_\theta(r, \theta)\end{aligned}$$

Resultan útiles las siguientes expresiones, que relacionan las componentes cartesianas y polares de un punto determinado, así como los vectores unitarios en éste.

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \tan \theta = y/x \\ x &= r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad ; \quad \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \\ \hat{i} &= \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta} \quad ; \quad \hat{j} = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{\theta}\end{aligned}$$

Estos conceptos quedarán más claros al aplicarlos en diferentes casos, que mostrarán la utilidad de usar sistemas coordenados adaptados a diferentes situaciones. Por ahora, se recomienda practicar con ellas de modo explícito mediante el ejercicio que se propone a continuación.

Ejemplo: Considérese un vector \vec{A} , con origen en el punto (1,2) y extremo en (4,3) expresados en coordenadas cartesianas. Obténgase las componentes

cartesianas y polares de \vec{A} . Representétese gráficamente el vector y sus componentes en ambos sistemas.

2.3. Operaciones con vectores: propiedades

Revisemos de modo escueto algunas operaciones que se pueden realizar con vectores y sus propiedades.

1. SUMA (el resultado es un vector)

Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} en componentes cartesianas, su suma se obtiene aplicando:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k} \quad (2.3)$$

También puede efectuarse la operación suma mediante la siguiente construcción geométrica, que muestra la suma de dos vectores realizada de modo gráfico (regla del paralelogramo).

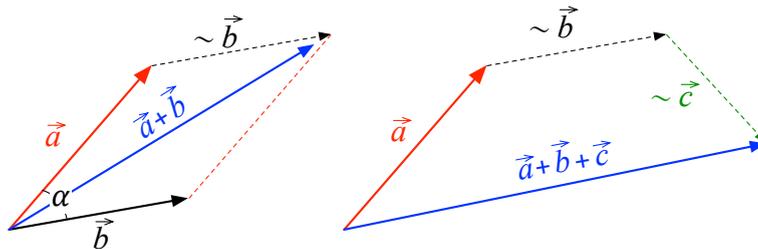


Figura 2.6: Interpretación gráfica de la suma de vectores.

En la construcción de la izquierda de la Fig. 2.6 puede verse que en este caso el módulo del vector suma se calcula aplicando el teorema del coseno:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 a b \cos \alpha}$$

Recordemos algunas propiedades de la suma:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ |\vec{a} + \vec{b}| &\leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. PRODUCTO ESCALAR (es un escalar)

El producto escalar de dos vectores \vec{a} y \vec{b} definidos en coordenadas cartesianas se calcula así:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

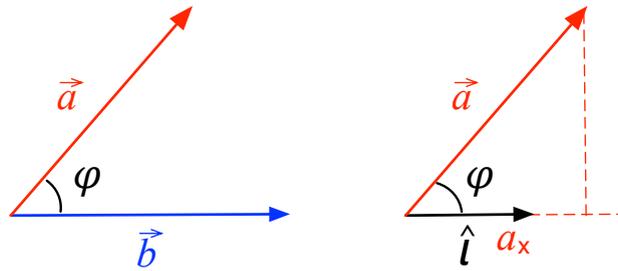


Figura 2.7: Interpretación geométrica del producto escalar.

En su interpretación geométrica (ver Fig. 2.7):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \varphi \quad (2.5)$$

Donde φ es el ángulo formado por \vec{a} y \vec{b} llevados a un origen común, y a y b los módulos de los vectores.

Nótese que $\vec{a} \cdot \vec{b}$ nos proporciona la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} si \vec{b} es unitario (en general, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \text{ proy}_a b = b \text{ proy}_b a$). Aprovechando esta propiedad, se plantea el siguiente ejercicio: dadas las expresiones vistas en las ecuaciones 2.2 de cambio de coordenadas cartesianas a polares, partiendo de las directas obtenga las inversas.

Pista: $\hat{\rho} \cdot \hat{i} = \cos \theta$; $\hat{\theta} \cdot \hat{i} = -\text{sen } \theta$ ($\hat{i} = \cos \theta \hat{\rho} - \text{sen } \theta \hat{\theta}$).

3. PRODUCTO VECTORIAL (es otro vector)

Dadas las componentes cartesianas de los vectores \vec{a} y \vec{b} , su producto vectorial \vec{c} en coordenadas cartesianas se expresa:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} \quad (2.6)$$

En su interpretación geométrica :

$$|\vec{c}| = a b \text{ sen } \varphi = S$$

S es el área del paralelepípedo definido por los vectores \vec{a} y \vec{b} cuando se hace coincidir su punto de aplicación, y \vec{c} apunta en la dirección perpendicular al plano que forman \vec{a} y \vec{b} .

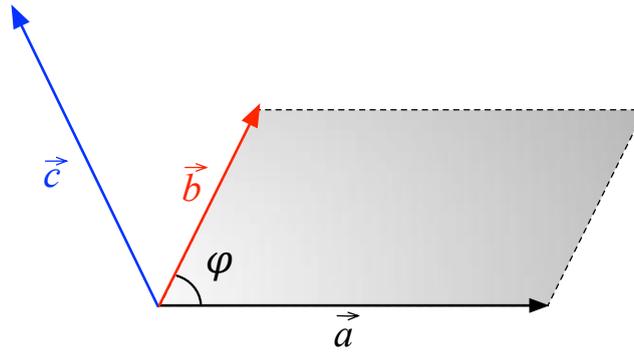
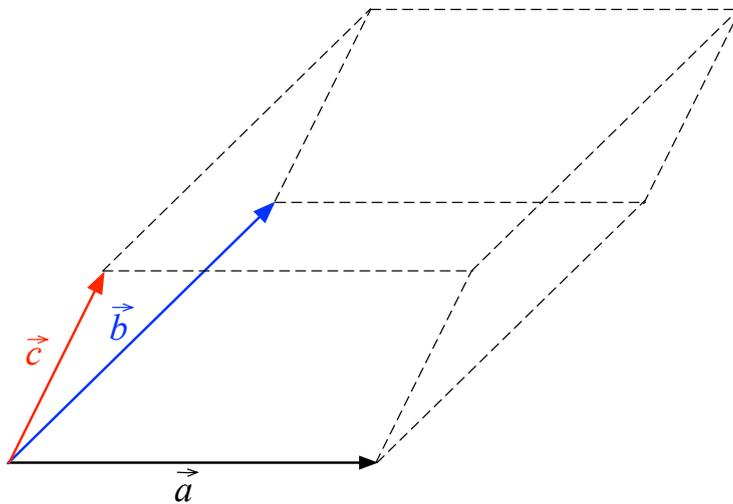


Figura 2.8: Producto vectorial.

Figura 2.9: Producto mixto: $V = \vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

4. PRODUCTO MIXTO (es un escalar)

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (2.7)$$

Se propone como ejercicio obtener su expresión en función de las componentes cartesianas de los vectores, utilizando las definiciones de producto escalar y vectorial en componentes cartesianas.

En su interpretación geométrica, el producto mixto corresponde al volumen del paralelepípedo formado por \vec{a} , \vec{b} y \vec{c}

PROPIEDADES: Se muestran a continuación algunas propiedades de las operaciones con vectores que pueden resultar de utilidad:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \cdot \vec{d})$$

Capítulo 3

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y ANALÍTICAS

En este tercer capítulo de la sección introductoria se presenta una recopilación de algunas propiedades geométricas y analíticas que deben conocerse bien.

3.1. Geometría básica

En los temas siguientes utilizaremos con frecuencia la relación entre un ángulo y el arco que abarca.

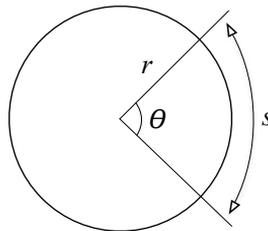


Figura 3.1: Circunferencia de radio r , ángulo central θ y arco abarcado s .

Definición del ángulo en radianes:

$$\theta = s/r \quad \text{radianes}$$

Es importante saber identificar la igualdad entre ángulos opuestos, alternos, o formados por segmentos perpendiculares, como muestra la figura.

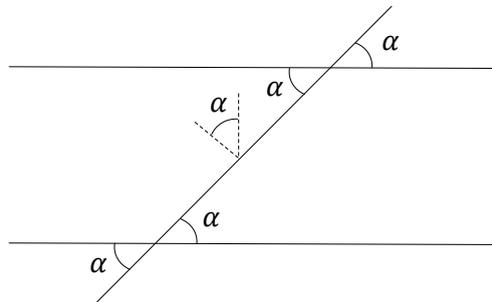


Figura 3.2: Igualdad entre diferentes ángulos definidos por secantes entre rectas paralelas o segmentos perpendiculares.

3.2. Trigonometría básica

Recordemos las definiciones básicas de la trigonometría y algunas relaciones que pueden ser útiles a lo largo de la asignatura.

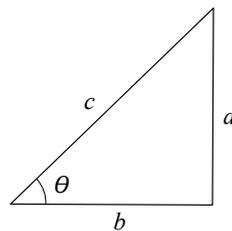


Figura 3.3: Triángulo rectángulo: notación utilizada en las definiciones de las razones trigonométricas.

Definiciones:

$$\text{sen } \theta = a/c$$

$$\text{cos } \theta = b/c$$

$$\text{tan } \theta = a/b$$

Relación fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

Otras relaciones trigonométricas de utilidad:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A \pm B}{2} \cos \frac{A \mp B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{B - A}{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

Circunferencia trigonométrica: Es una construcción muy útil, que permite visualizar de modo sencillo la relación entre las funciones trigonométricas de ángulos que difieren en ciertos valores notables, como $\pi/2, \pi, \dots$. Por ejemplo:

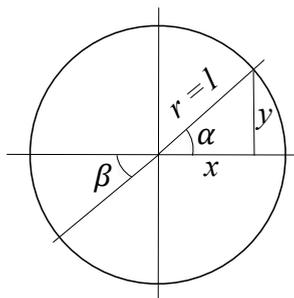


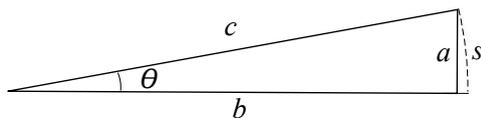
Figura 3.4: Circunferencia trigonométrica (radio unidad).

$$y = \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad x = \cos \alpha$$

$$\text{Si } \beta = \pi + \alpha: \quad \operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha, \quad \cos \beta = -\cos \alpha.$$

Aproximaciones útiles:

Para finalizar esta parte, mostraremos una propiedad que nos resultará útil más adelante, y se refiere al caso límite de ángulos muy pequeños. Como se deduce de la figura, en ese caso podemos aproximar con gran precisión los valores de algunas funciones trigonométricas mediante expresiones muy sencillas.

Figura 3.5: Aproximación $a \approx s$.

De manera exacta, tenemos $\theta = s/c$

Pero además, si el ángulo θ es muy pequeño, $s \approx a$ y entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= a/c \approx s/c = \theta \text{ rad} \\ \tan \theta &= a/b \approx s/b \approx s/c = \theta \text{ rad} \\ \cos \theta &= b/c \approx 1 (\text{en una primera aproximación}); \cos \theta \approx 1 - \theta^2/2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.3. Cálculo diferencial e integral

En muchos casos, las leyes que expresan relaciones entre magnitudes físicas involucran expresiones diferenciales (derivadas) o integrales. En este apartado recordaremos algunas definiciones básicas para funciones de una variable. Nos apoyaremos en la figura 3.6, que recoge las ideas esenciales. Derivar una función es una operación que nos proporciona información local, en concreto nos dice cómo cambia la función en un punto determinado (si aumenta o disminuye al realizar pequeños desplazamientos en su variable). Por el contrario, la integración es una operación que proporciona información global del comportamiento de la función sobre una zona de su dominio. En el caso de una única variable, esto corresponde al área bajo la gráfica entre dos límites fijados. En términos más precisos, esto se expresa como sigue.

1. **Derivada de una función.** En la figura 3.6 se ilustra el concepto de derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 . Nótese que indicamos que al incrementar la variable en Δx , el valor de la función se ve incrementado en Δf . El cociente entre dichos incrementos, que es lo que vamos a entender como derivada, puede interpretarse de modo geométrico. Si los incrementos son muy pequeños ($\Delta x \rightarrow 0$, en cuyo caso lo denominaremos diferencial: dx), la función se confunde con su tangente en ese punto y el cociente de incrementos corresponde a la tangente del ángulo α :

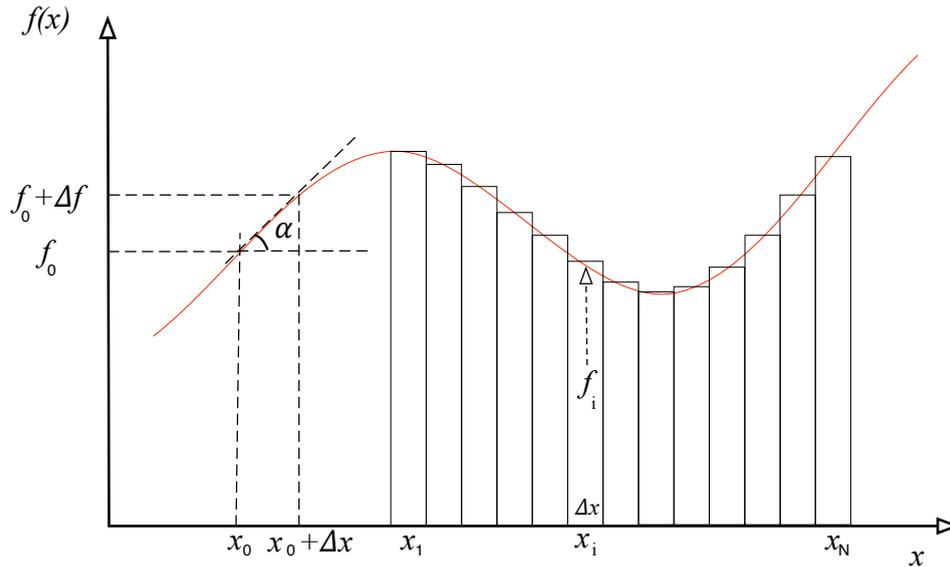


Figura 3.6: Aproximación a los conceptos de derivada e integral.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Así pues, la expresión df/dx es algo más que una notación; nos va a permitir obtener $df = f'(x) dx$. Esto justifica manipulaciones habituales, que realizaremos a lo largo del texto, del tipo:

$$\frac{dv}{dt} = -k v \Rightarrow dv = -k v dt \quad (3.2)$$

2. **Integral de una función.** El concepto de integral definida de una función también admite una interpretación geométrica sencilla (ver Fig. 3.6). En el caso que se muestra, representamos la suma incremental de los elementos de área rectangulares $f_i \Delta x_i$, que obviamente aproximarán el área bajo la gráfica en el caso límite ($\Delta x_i \rightarrow 0$). Esto se indica:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i$$

El concepto de *integral* de la función no debe confundirse con el de *primitiva* de la función. Éste último hace referencia al modo que habitualmente tenemos de evaluar la integral de una función. Así pues, si definimos $F(x)$ (primitiva de $f(x)$) como aquella que cumple $F'(x) = f(x)$, se va a verificar

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = F(x_N) - F(x_1)$$

Esto puede demostrarlo el lector aplicando la relación $df = f'(x) dx$ de forma reiterada en el sumatorio anterior.

Como es bien sabido, encontrar la primitiva de una función puede resultar muy complicado fuera de los casos elementales. Existen técnicas que nos pueden ayudar como son los cambios de variable, integración por partes, etc. No obstante, insistiendo una vez más en que una cosa es integrar una función y otra hallar su primitiva, debemos indicar que en muchas ocasiones se aplican otros métodos, por ejemplo de tipo computacional, que pueden resultar muy convenientes.

Continuando con la expresión 3.2, como $dv = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \Delta v$ podemos escribir:

$$\frac{dv}{v} = -kdt; \quad \int \frac{dv}{v} = \int -kdt$$

Resolviendo las dos integrales -directas en este caso- se obtiene la función $v(t)$.

3.4. Gradiente de una función escalar

Con cierta frecuencia, en Física se utilizan los conceptos de derivada direccional y de gradiente, cuyo significado es fácil de comprender en términos de la definición de derivada tratada en el punto anterior. La idea fundamental, que generaliza el concepto de derivada de una función, es la siguiente: si la función que nos interesa depende de más de una variable (por ejemplo $f(x, y)$) los incrementos de ésta tendrán relación con los valores de Δx y Δy y con un nuevo aspecto, la tasa de variación de ambos ($\Delta y/\Delta x$). Puesto que este cociente define un ángulo en el plano XY que es donde la función toma valores, hablaremos de derivada direccional. En términos sencillos, la variación de la función depende no sólo de cuánto nos movamos, sino de hacia dónde nos movamos. Veámoslo con un ejemplo.

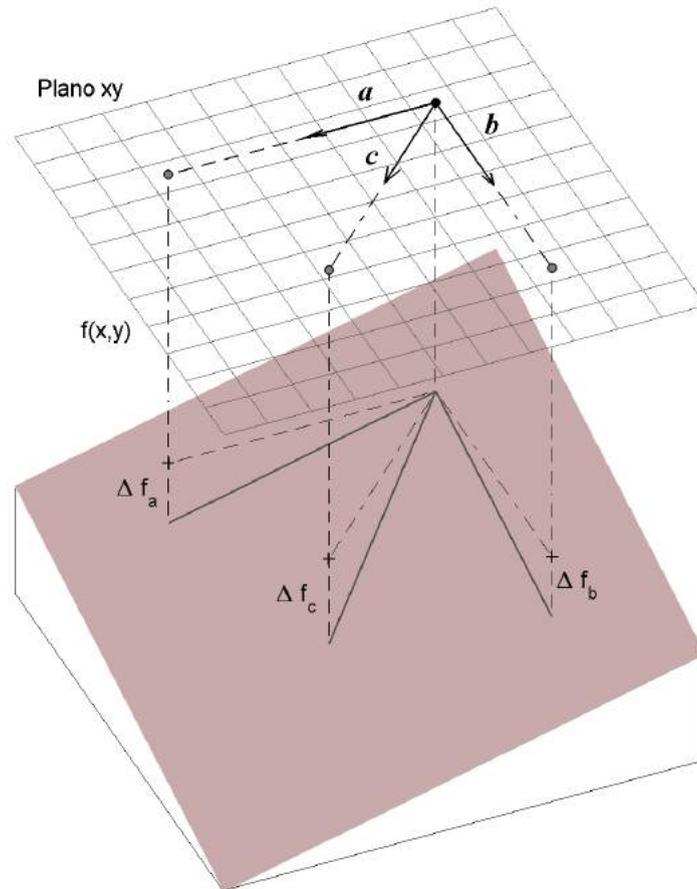


Figura 3.7: Aproximación al concepto de derivada direccional y gradiente.

Consideraremos la función que representa la profundidad de una piscina medida desde la superficie del agua. El fondo está inclinado, de modo que puede expresarse mediante la relación $f(x, y) = p_0 + p_1x + p_2y$ siendo p_0, p_1 y p_2 constantes positivas. Evidentemente, tal como muestra la figura, si nos colocamos en un punto determinado de coordenadas (x, y) las variaciones de profundidad dependen de la dirección en la que nos movamos. Hemos representado tres casos, dados por variaciones a lo largo de los vectores unitarios \hat{a} , \hat{b} y \hat{c} sobre el plano XY , y está claro que para desplazamientos de la misma longitud, la variación en profundidad es mayor a lo largo de la dirección de \hat{c} .

Matemáticamente lo expresaremos del siguiente modo.

1. Derivada direccional

Se define la **derivada direccional** dada por el desplazamiento a lo largo de la dirección definida por el vector \hat{c} como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \epsilon \hat{c}) - f(\vec{r})}{\epsilon}$$

donde $\vec{r} \equiv (x, y)$ y $\epsilon \equiv \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

En el caso de que el vector de dirección coincida con alguno de los de la base cartesiana, hablaremos de derivada parcial respecto a la coordenada correspondiente. Así, en el ejemplo que mostramos ($\hat{a} = \hat{i}, \hat{b} = \hat{j}$), y la derivada parcial respecto a x será:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \epsilon \hat{i}) - f(\vec{r})}{\epsilon}$$

De forma análoga se puede escribir la derivada parcial respecto a y .

2. Gradiente

En el apartado anterior, al tratar el concepto de derivada de una función $f(x)$, se ha visto que es posible escribir $df = f'(x) dx$.

Planteemos ahora la cuestión en el caso de una función que depende de varias variables; se pretende averiguar la relación entre la variación df y un desplazamiento $d\vec{r}$ (que puede llevar cualquier dirección). Escribamos por el momento, por analogía con la expresión anterior, $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$, siendo $d\vec{r}$ un desplazamiento arbitrario (dx, dy) y $\vec{\nabla} f$ un vector cuyo significado vamos a discutir, apoyándonos en la figura 3.8.

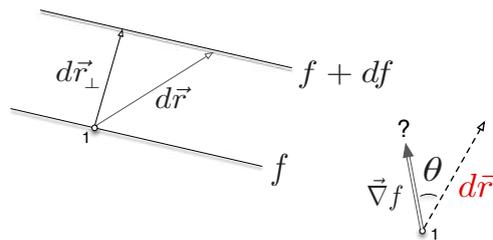


Figura 3.8: Aproximación al concepto de gradiente.

En la figura se han representado dos líneas en el plano XY en las que el valor de la función es constante (f y $f + df$, respectivamente). Tomemos como referencia un punto cualquiera 1 (sobre la línea f), en el

que $\vec{\nabla} f$ tendrá un valor y llevará una dirección determinada. Es evidente que partiendo del punto 1 hay una infinidad de desplazamientos $d\vec{r}$ que permiten alcanzar $f + df$, y que el más corto, $d\vec{r}_\perp$, proporciona la mayor tasa de variación de la función con respecto al desplazamiento. Volviendo a la expresión de df ,

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \nabla f dr \cos\theta \quad ; \quad \frac{df}{dr} = \nabla f \cos\theta$$

donde df/dr representa la derivada direccional de f a lo largo de la dirección genérica de $d\vec{r}$ y θ es el ángulo entre $\vec{\nabla} f$ y dicha dirección. Evidentemente el máximo valor se dará para $\cos\theta = 1$. Como ya se ha dicho, la derivada direccional es máxima a lo largo de $d\vec{r}_\perp$, de donde resulta que el vector que hemos introducido $\vec{\nabla} f$ debe llevar la dirección de la variación máxima ($\vec{\nabla} f \parallel d\vec{r}_\perp$), y que el módulo de $\vec{\nabla} f$ coincide con el valor de la derivada direccional a lo largo de esa dirección. A $\vec{\nabla} f$ se le denomina **gradiente** de la función f .

En la práctica, y para una función de dos variables, se puede calcular en coordenadas cartesianas mediante la expresión:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

Se propone como ejercicio obtener el vector gradiente para el ejemplo dado en la figura 3.7, y evaluar los incrementos que sufre la función f , es decir df_a, df_b, df_c para variaciones a lo largo de las direcciones indicadas. (Sol.: $\vec{\nabla} f = (p_1, p_2)$ sobre el plano XY)

Aprovecharemos el ejemplo utilizado para poner de manifiesto el interés de estos conceptos en la Física. La función $f(x, y)$ puede representar la energía potencial gravitatoria de una partícula puntual sobre la superficie mencionada (bastaría multiplicar por su masa, por la aceleración de la gravedad, y cambiar el signo $U(x, y) = -m g f(x, y)$). Si dicha partícula se apoyase sin fricción sobre la superficie y la depositáramos en un punto de coordenadas (x, y) se deslizaría hacia el fondo a lo largo de la línea definida por la dirección de $\vec{\nabla} f$ (trayectoria central en el dibujo), o lo que es lo mismo de $-\vec{\nabla} U$. Diremos, por tanto, que las líneas de fuerza vienen dadas por la dirección del gradiente de la energía potencial (cambiado de signo).

Parte II

EL CAMPO ELECTROSTÁTICO

INTRODUCCIÓN

En gran medida, los conceptos básicos de la Mecánica Clásica, de los cuales nos ocupamos en el volumen primero de esta serie, se van a extrapolar al caso de la Electricidad y el Magnetismo, cuyo ámbito empieza a tratarse en el capítulo que sigue. Así pues, frecuentemente, refiriéndonos a las cargas eléctricas hablaremos en el sentido habitual de *fuerza*, *trabajo*, *energía potencial* ...

Comenzaremos por los aspectos relativos a la interacción electrostática, es decir, lo que se refiere a campos de fuerzas (sobre cargas) producidos por otras cargas, que se encuentran en reposo.

Capítulo 4

CAMPO ELECTROSTÁTICO CREADO POR DISTRIBUCIONES DE CARGA

Aunque la descripción cuantitativa de los fenómenos es mucho más reciente (siglo XVIII), la existencia de la interacción electrostática ya fue observada por los griegos, que descubrieron que una varilla de ámbar frotada con el pelo era capaz de atraer pequeños fragmentos de paja. Observaron asimismo que dos varillas de ámbar frotadas se repelen, mientras que una de ámbar y otra de vidrio se atraen.

4.1. *Ley de Coulomb*

Del mismo modo que ocurre con el ámbar y el vidrio, se ha observado que multitud de sustancias se atraen o repelen al ser frotadas. Esto se describe diciendo que la propiedad inducida al frotar es la adquisición de **carga eléctrica**.

Siguiendo el convenio propuesto por B. Franklin, denominaremos carga eléctrica **positiva** a la que adquiere la varilla de vidrio al ser frotada, y diremos que cualquier sustancia que repela al vidrio posee carga positiva, mientras que las que sean atraídas poseen carga negativa.

Los resultados de los experimentos con varillas pueden explicarse hoy en día en función de la estructura de la materia, la cual está constituida por átomos o moléculas que de modo global son eléctricamente neutros. Por ejemplo, lo

que ocurre cuando frotamos el vidrio con la seda es que ésta queda cargada negativamente porque **arranca electrones** de los átomos de vidrio, dejándolo con **balance de carga positivo**.

Para llegar a una descripción cuantitativa de la interacción electrostática, estudiemos el experimento *pensado* planteado en la figura 4.1.

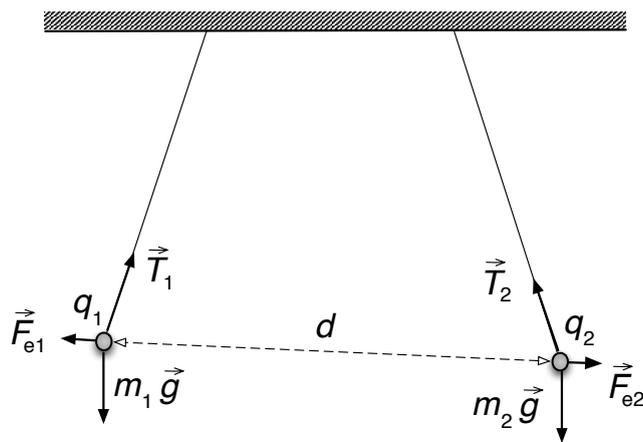


Figura 4.1: Repulsión electrostática entre dos esferas con cargas eléctricas del mismo signo.

Si realizáramos el estudio de la posición de equilibrio del sistema conduciría a las siguientes conclusiones:

- La fuerza eléctrica que surge entre las esferas lleva la dirección de la línea que las une.
- Su magnitud es inversamente proporcional a d^2 .
- Su magnitud es proporcional a la carga de cada esfera.
- Su magnitud es independiente del signo de las cargas, pero no su sentido.

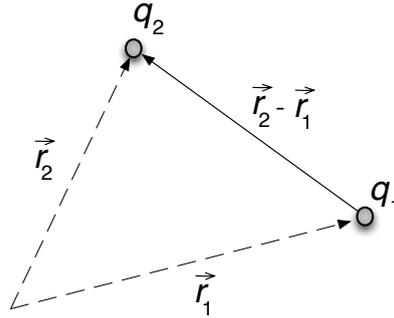


Figura 4.2: Representación vectorial de la fuerza electrostática entre cargas puntuales.

En términos cuantitativos, la fuerza sobre una carga puntual q_2 debida a la presencia de otra carga puntual q_1 se puede expresar mediante la fórmula (Ley de Coulomb):

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r_{21}^3} \vec{r}_{21} \quad (4.1)$$

donde $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, y k es una constante de proporcionalidad que depende del sistema de unidades utilizado. Así, en el sistema M.K.S. (esto es, en el Sistema Internacional de unidades), la unidad de carga es el Coulomb (C), y el valor de k es:

$$k = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} = 8.9875 \times 10^9 \frac{N m^2}{C^2}$$

Para un conjunto de partículas, se encuentra que la fuerza sobre cualquiera de ellas (q_i en este caso) cumple el principio de superposición:

$$\vec{F}_i = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij}$$

Aquí, \vec{r}_{ij} debe ser interpretado de acuerdo con el esquema de la figura 4.2, pero aplicado a las cargas q_i y q_j .

4.2. Campo electrostático. Líneas de fuerza

La expresión anterior nos permite evaluar las fuerzas que ejercen las cargas eléctricas entre sí, pero no es operativa en problemas reales donde, por ejemplo, no conocemos *a priori* las cargas presentes. Sirva como ejemplo el caso de un electrodo conectado a una batería, que analizaremos más adelante.

Una noción útil para trabajar con este tipo de sistemas es la de **campo electrostático** $\vec{\mathcal{E}}$ creado por un sistema de cargas.

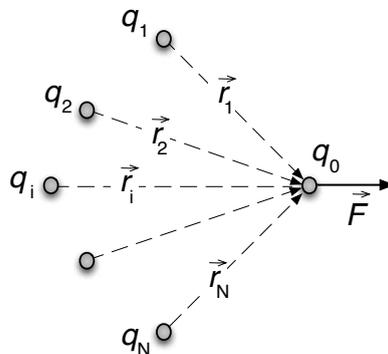


Figura 4.3: Fuerza realizada por un sistema de cargas sobre una carga puntual de prueba q_0 colocada a una cierta distancia de ellas.

Se define el campo electrostático como:

$$\vec{\mathcal{E}} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Entendemos por \vec{F} la fuerza que el sistema ejerce sobre una carga puntual de prueba. La consideramos muy pequeña para que su presencia no distorsione la configuración de la distribución original.¹ Tendremos:

$$\vec{F} = q_0 \vec{\mathcal{E}}$$

La importancia conceptual de esta magnitud residirá en que desarrollaremos métodos para calcularlo sin conocer el detalle de las cargas que lo producen. Por ahora, no es más que un reescalado de la fuerza.

Una forma útil de poner de manifiesto la estructura de un campo es la representación gráfica de sus **líneas de fuerza**: en cada punto del espacio dichas líneas tienen por dirección tangente la del campo electrostático en ese lugar.

¹Pensemos que las cargas de la distribución podrían ser móviles y sus posiciones variarían por la presencia de la carga de prueba

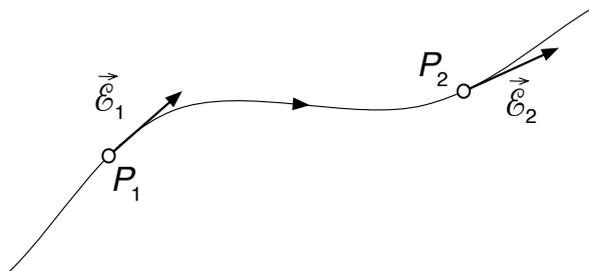


Figura 4.4: En cada punto del espacio, el vector campo electrostático es tangente a sus líneas de fuerza.

Como veremos, las líneas de fuerza pueden incluir, además, información cuantitativa sobre la magnitud del campo en cada punto. Esto se corresponderá con la disminución del espaciado entre ellas allí donde el campo es más intenso. Dicha propiedad será explicada de modo general en el siguiente capítulo. Sin embargo, el lector puede comprender su esencia mediante el caso particular del campo creado por una carga puntual. Tomando origen en la posición que ésta ocupa, dicho campo electrostático se expresa

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (4.2)$$

Entonces, la distancia entre dos líneas de fuerza del campo se puede cuantificar mediante la longitud del arco de circunferencia $s = r\theta$ (ver figura). Basta notar que s aumenta linealmente con la distancia, mientras que la intensidad del campo disminuye con su cuadrado.

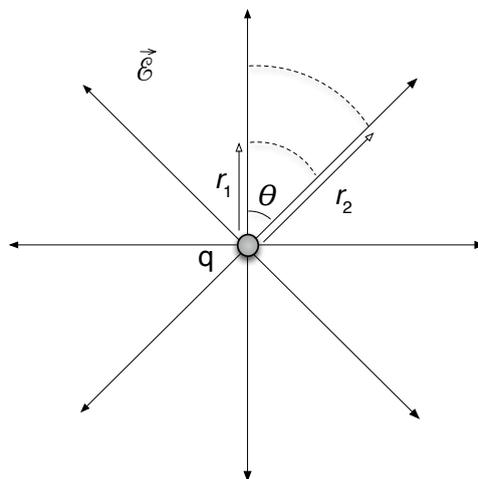


Figura 4.5: La intensidad del campo electrostático disminuye al aumentar el espaciado entre las líneas de fuerza.

Ejercicio para el lector: proponemos “dibujar” la estructura de líneas de campo debido a un dipolo (cargas $+q$ y $-q$ separadas por una cierta distancia). Ténganse en cuenta la aditividad de efectos y argumentos de simetría.

4.3. Principio de superposición

El campo creado por una carga puntual viene dado por la expresión 4.2 cuando la posición que ocupa ésta se utiliza como origen de coordenadas. Por otra parte, debido al carácter aditivo de la fuerza electrostática, para calcular el campo creado por un sistema de cargas, utilizaremos el **Principio de Superposición**:

$$\vec{\mathcal{E}} = \lim_{q_o \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_o} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = \sum_i \vec{\mathcal{E}}_i$$

Debe notarse que \vec{r}_i representa el vector de posición que une a la carga q_i de la distribución con el punto donde colocamos la carga de prueba, es decir, donde estamos evaluando el campo electrostático (ver figura 4.3)

4.3.1. Distribuciones de carga continua

Aunque, desde el punto de vista clásico, las cargas eléctricas pueden considerarse puntuales (iones, electrones,...), en los problemas que incluyen cuerpos macroscópicos se puede hablar de **distribuciones de carga continuas**. Esto significa que la descripción matemática del problema se hará mediante los conceptos del cálculo infinitesimal, es decir, entenderemos que los objetos se componen de elementos de volumen diferenciales, dentro de los cuales la carga se subdivide de manera continua. Dicho de otro modo, los fenómenos físicos involucrados no son *sensibles* al hecho de que haya localizaciones concretas donde la carga se concentra u otras “vacías”. Para entender la validez de esta hipótesis, consideremos por ejemplo, las propiedades de un fragmento de oro. Su densidad es 19.3 g/cm^3 , y su peso atómico 196.97 g/mol . Entonces, en un centímetro cúbico de oro tendremos 5.9×10^{22} átomos. Ciertamente, podemos pensar que cada fragmento del metal, por pequeño que sea, contiene una cantidad de carga proporcional a su volumen. Matemáticamente: $dq = \rho dV$

En los problemas con distribuciones de carga aplicaremos la idea de superposición en el continuo: $\vec{\mathcal{E}} = \int d\vec{\mathcal{E}}$. Esta expresión indica que obtendremos el campo creado por una distribución mediante integración de las contribuciones diferenciales de cada uno de sus elementos de carga ($dq \rightarrow d\mathcal{E}$). Nótese que esta expresión contiene, en realidad, las tres siguientes, asociadas a cada componente del campo electrostático y que en la práctica deberán ser resueltas por

separado:

$$\mathcal{E}_x = \int d\mathcal{E}_x, \quad \mathcal{E}_y = \int d\mathcal{E}_y, \quad \mathcal{E}_z = \int d\mathcal{E}_z$$

Por otra parte, dependiendo de la configuración concreta del sistema de cargas, hablaremos de distribuciones lineales, superficiales o volúmicas. Veamos las expresiones formales a utilizar en cada caso.²

²Nótese que, en adelante, usaremos el convenio que identifica los puntos en que se encuentran las cargas que crean el campo (fuentes) con \vec{r}' . Así, $dq(\vec{r}')$ es un elemento de carga de la distribución de las cargas “fuente”.

- Distribución lineal de carga:

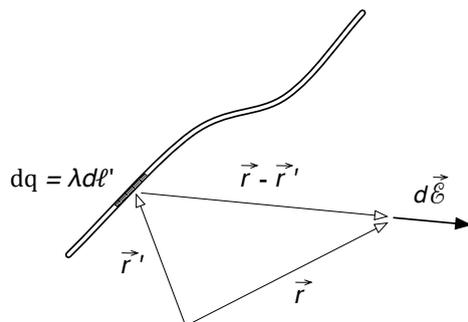


Figura 4.6: Campo electrostático creado por una distribución lineal de carga.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl' \quad (4.3)$$

- Distribución superficial de carga:

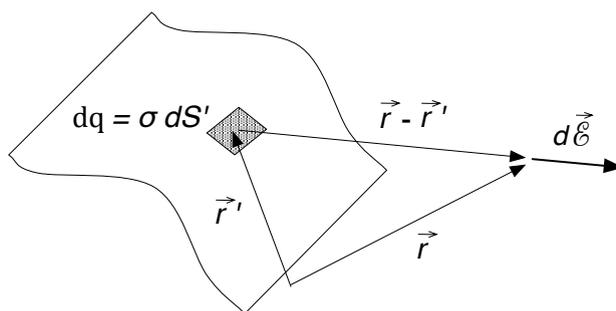


Figura 4.7: Campo electrostático creado por una distribución superficial de carga.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS'$$

- Distribución volúmica de carga:

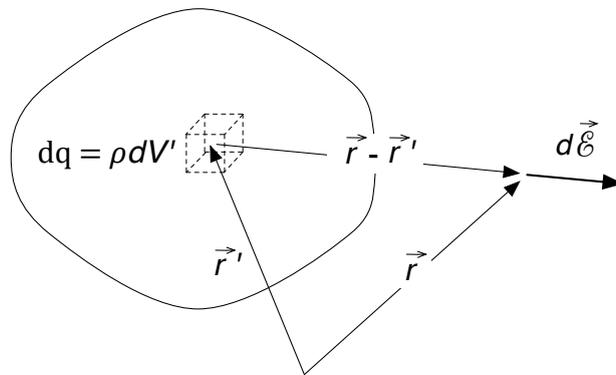


Figura 4.8: Campo electrostático creado por una distribución volúmica de carga.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

★ En la práctica, y para los casos planteados en el presente curso, lo más habitual será utilizar la expresión 4.3. En muchas ocasiones nos preguntaremos directamente por el campo creado por distribuciones lineales: segmentos, anillos, ... En otros casos, apelando a la generalidad del principio de superposición, partiremos del campo creado por una distribución lineal para obtener el de una superficial como suma. Por ejemplo, el campo de un disco se calcula sumando el de los anillos diferenciales que lo componen.

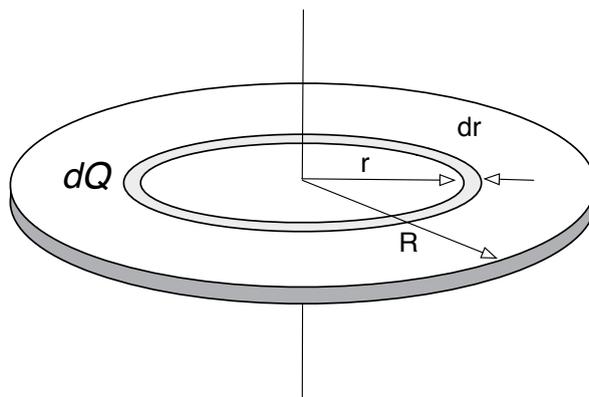


Figura 4.9: Una distribución de carga superficial en forma de disco, se puede considerar como una superposición de anillos cada uno de ellos con carga $dQ = \sigma(2\pi r)dr$.

4.3.2. Ejemplos de cálculo de $\vec{\mathcal{E}}$ por superposición.

Campo creado por un anillo de radio R y carga Q

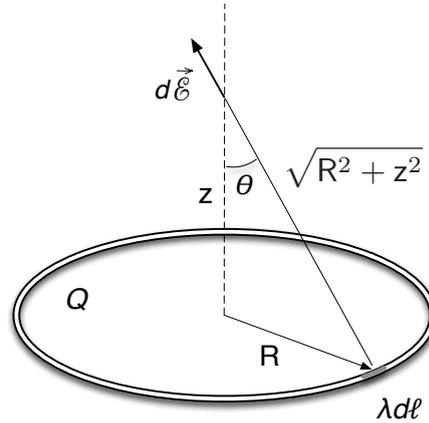


Figura 4.10: Campo creado por los elementos de un anillo uniformemente cargado en los puntos de su eje.

En este caso vamos a analizar el campo electrostático debido a un anillo con densidad de carga uniforme $\lambda = Q/(2\pi R)$. Lo calcularemos en el eje de simetría del anillo, en el cual se anularán las componentes horizontales de $\vec{\mathcal{E}}$. Tendremos, por tanto, $\vec{\mathcal{E}} = (0, 0, \mathcal{E}_z)$ con

$$\mathcal{E}_z = \int d\mathcal{E}_z$$

Ahora

$$d\mathcal{E}_z = d\mathcal{E} \cos \theta$$

siendo

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad ; \quad d\mathcal{E} = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)}$$

de modo que

$$\mathcal{E}_z = \frac{\lambda z}{4\pi\epsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dl$$

Nótese que la integración no requiere una evaluación explícita, puesto que de modo evidente $\int dl = 2\pi R$. Entonces, podemos concluir

$$\mathcal{E}_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_o(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.4)$$

Invitamos al lector a considerar el comportamiento asintótico de esta expresión para grandes distancias, en el cual debe reproducirse la fórmula del campo creado por una carga puntual.³

Campo creado por un disco de carga Q (uniforme) y radio R

En este ejemplo trataremos el caso de una distribución de carga superficial. Planteamos el cálculo del campo electrostático creado por un disco uniformemente cargado con densidad $\sigma = Q/(\pi R^2)$. De nuevo, lo evaluaremos en los puntos de su eje de simetría, donde por razones obvias, vamos a tener $\vec{\mathcal{E}} = (0, 0, \mathcal{E}_z)$.

Como decíamos anteriormente, aunque se trate de un problema bidimensional, puede reducirse a un cálculo con distribuciones lineales. De hecho, atendiendo al esquema de la figura 4.9, el campo del disco puede obtenerse como superposición del que crea una colección de anillos, cada uno con carga

$$dQ = \sigma ds = \sigma(2\pi r)dr$$

Entonces, reemplazando $Q \rightarrow dQ$, $R \rightarrow r$ en la expresión 4.4 del campo debido a un anillo, tenemos

$$d\mathcal{E}_z = \frac{\sigma z r dr}{2\epsilon_o(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Debe notarse que aquí $d\mathcal{E}_z$ se refiere al campo creado por un “elemento” diferencial de carga en forma de anillo, como constituyente del disco. Es decir, la aplicación del concepto de superposición adquiere un sentido amplio, y no necesariamente ha de consistir en la división en elementos “casi-puntuales”, sino que puede adaptarse a la geometría del problema que nos pueda interesar.⁴

Finalmente, si integramos la expresión anterior para acumular el efecto de todos los anillos diferenciales:

$$\int d\mathcal{E}_z = \int_0^R \frac{\sigma z r dr}{2\epsilon_o(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (4.5)$$

³Nótese que en ese caso $R^2 + z^2 \rightarrow z^2$

⁴Procediendo de modo análogo al caso del disco, el lector puede analizar el campo creado por un cascarón esférico hueco. Si llamamos Q a la carga total ($Q = 4\pi R^2\sigma$) y lo dividimos en anillos superficiales, se puede demostrar que en el interior del cascarón $\mathcal{E} = 0$, mientras que en su exterior $\mathcal{E} = Q/(4\pi\epsilon_o r^2)$.

expresión que también resulta interesante analizar en casos límite. De hecho, (i) a distancias pequeñas ($z/R \rightarrow 0$) tenemos $\mathcal{E}_z \sim \sigma/2\epsilon_o$, mientras que (ii) en el caso opuesto, osea al alejarnos más y más del disco ($R/z \rightarrow 0$), se cumple $\mathcal{E}_z \sim Q/(4\pi\epsilon_o z^2)$

Campo creado por un segmento rectilíneo

Se plantea el cálculo del campo electrostático sobre los puntos de la mediatriz de un segmento de longitud $2L$ y carga total Q , que se distribuye de modo uniforme ($\lambda \equiv Q/2L$).

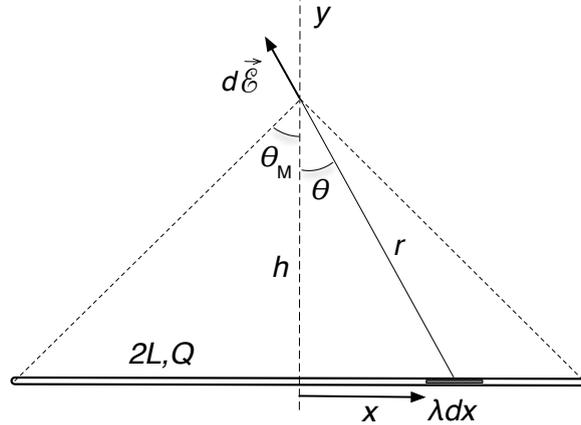


Figura 4.11: Campo creado por los elementos de un segmento rectilíneo en la mediatriz del mismo.

Dada la simetría del problema, podemos anticipar que $\vec{\mathcal{E}} = (0, \mathcal{E}_y, 0)$, por lo cual, aplicaremos la ecuación 4.3 para la componente y :

$$\mathcal{E}_y = \int d\mathcal{E}_y$$

donde

$$d\mathcal{E}_y = d\mathcal{E} \cos \theta$$

siendo $d\mathcal{E}$ el módulo del campo electrostático creado por el elemento señalado, es decir:

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{\lambda dx}{r^2}$$

Nótese que, con la finalidad de simplificar la notación, en la expresión anterior utilizamos r para indicar el módulo del vector de posición relativo desde el elemento de carga hasta el punto donde calculamos el campo. Debemos

tener presente que, en realidad nos referimos al módulo del vector $\vec{r} - \vec{r}'$ de la figura 4.6.

Transformamos las expresiones para pasar a una variable de integración conveniente. En este caso, elegiremos el ángulo θ . Lo hacemos utilizando las relaciones

$$h = r \cos \theta \quad ; \quad x = h \tan \theta$$

$$\Downarrow$$

$$r = \frac{h}{\cos \theta} \quad ; \quad dx = \frac{h}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Entonces

$$\mathcal{E}_y = \int d\mathcal{E}_y = 2 \int_0^{\theta_M} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 h} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 h} \text{sen } \theta_M \quad (4.6)$$

donde hemos usado la simetría entre las dos mitades del segmento. Analicemos el resultado para situaciones límite con interpretación física inmediata: (i) en puntos muy próximos al segmento (así se vería el campo en un hilo infinito) tenemos $\mathcal{E}_y \simeq \lambda/(2\pi\epsilon_0 h)$ ya que $\theta_M \simeq \pi/2$. Por otra parte, (ii) si nos colocamos en puntos muy alejados: $\mathcal{E}_y \simeq Q/(4\pi\epsilon_0 h^2)$ como correspondería a ver el segmento como una carga prácticamente puntual. Aquí hemos utilizado que para ángulos pequeños el seno y la tangente se confunden ($\text{sen } \theta_M \simeq \tan \theta_M$).

Otro ejemplo que podría resolverse utilizando el procedimiento de superposición (a modo de lo que se hizo con el disco) sería el del campo electrostático creado por una lámina cuadrada de carga con densidad superficial σ . Por ejemplo, partiendo de la expresión 4.6 se obtiene que el campo creado en los puntos del eje que divide al cuadrado en dos partes iguales es $\mathcal{E}_y = \sigma/(2\pi\epsilon_0) \ln [(\sec \theta_M + \tan \theta_M)/(\sec \theta_m + \tan \theta_m)]$, siendo θ_M y θ_m los ángulos máximo y mínimo formados por el punto del eje con los vértices de la lámina. Proponemos al lector verificar este resultado.

Capítulo 5

LA LEY DE GAUSS

El teorema de Gauss (o ley de Gauss) constituye un resultado fundamental en la teoría electromagnética. En el fondo, resulta ser una consecuencia de tipo *geométrico* de la expresión $\vec{\mathcal{E}} = (kq/r^2)\hat{r}$, la cual, nos da el campo electrostático creado por las cargas puntuales. Expresa la relación existente entre la localización de las fuentes del campo (las cargas) y una propiedad global del mismo en torno a éstas. Dicha propiedad se denomina flujo superficial del campo y su valor nos permite conocer la carga neta contenida en el volumen delimitado por dicha superficie.¹

Por otra parte, su aplicación en el sentido recíproco es de enorme interés. Conocidas las cargas, el concepto global de flujo nos puede conducir al cálculo del campo electrostático asociado. En algunos problemas, esta idea proporciona un método muy conveniente para evaluar $\vec{\mathcal{E}}$ como alternativa al de superposición presentado en el capítulo anterior.

5.1. *Flujo del campo electrostático*

Como decíamos arriba, la ley de Gauss se refiere a una propiedad “global” del campo electrostático denominada *flujo*. En realidad, el concepto al que se refiere coincide con la idea del mismo aplicada al caso de un fluido. Cuantificaremos el hecho de que las líneas de campo atraviesan una determinada superficie, de modo análogo al que lo hacen las trayectorias de las partículas de un fluido en movimiento. Con esta finalidad, vamos a introducir algunos conceptos matemáticos necesarios para dotar a la idea de un carácter numérico.

¹Realmente, como veremos en capítulos posteriores, se trata de una propiedad de tipo topológico. Esto significa: independiente de la forma y tamaño de las superficies y volúmenes que involucra.

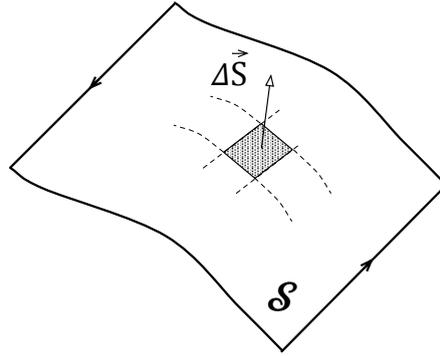


Figura 5.1: Vector superficie asociado a un elemento de superficie. Se indica también el criterio de orientación para superficies abiertas con un sentido de circulación en el perímetro.

5.1.1. Vector superficie

La asignación del denominado **vector superficie** \vec{S} a una superficie dada es única si ésta es plana. En caso de que no lo sea a nivel global, tomaremos elementos suficientemente pequeños para que así se pueda considerar. Entonces, $\Delta\vec{S}$ se define como perpendicular a ésta y su módulo se hace coincidir con su área. El sentido del vector superficie se asigna mediante el siguiente convenio:

- Si la superficie es cerrada, sentido hacia el exterior.
- Si la superficie es abierta pero tiene definido un sentido de recorrido de su perímetro, se elige según éste (ver Figura 5.1).
- Si no se da ninguno de los dos casos anteriores, se puede elegir el sentido.

5.1.2. Flujo

El flujo “elemental” de un campo vectorial a través de un elemento de superficie se define como el valor escalar sobre éste:

$$\Delta\Phi = \vec{\mathcal{E}} \cdot \Delta\vec{S} = |\vec{\mathcal{E}}| |\Delta\vec{S}| \cos\theta$$

La expresión anterior es la del flujo del campo electrostático $\vec{\mathcal{E}}$, pero el flujo de cualquier otro campo vectorial sobre una superficie se define de forma análoga. $\Delta\vec{S}$ se refiere al elemento de área que rodea al punto elegido y θ es el ángulo que forman ambos vectores en dicho punto.

Nótese que el producto escalar “seleccionará” la componente de $\vec{\mathcal{E}}$ que atraviesa la superficie perpendicularmente.

Si consideramos una superficie extensa y curva, de modo que $\Delta\vec{S}$ pueda variar de punto a punto, el flujo total que la atraviesa se debe calcular mediante una suma extendida a todos los elementos (cuasi-planos) que la constituyen:

$$\Phi_S = \sum_i \vec{\mathcal{E}}_i \cdot \Delta\vec{S}_i$$

En el límite continuo:

$$\Phi_S = \int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S}$$

En el caso particular de superficies cerradas, la integral se suele expresar así:

$$\Phi_S = \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S}$$

Ejemplo: Calcular el flujo a través de una superficie esférica de radio R del campo creado por una carga puntual situada en su centro.

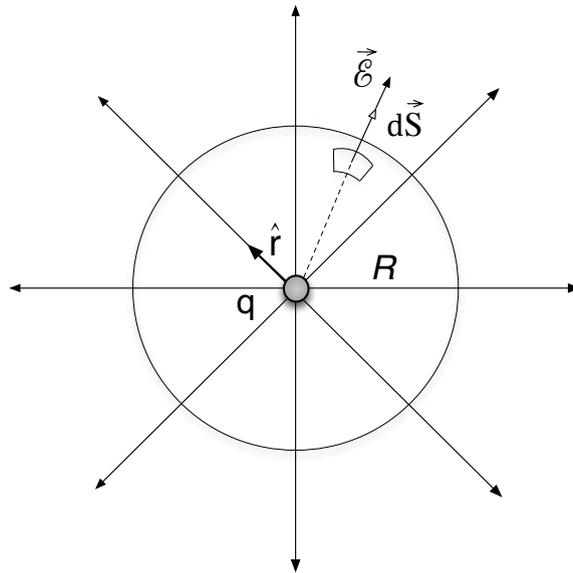


Figura 5.2: Flujo del campo electrostático de una carga puntual a través de una superficie esférica centrada.

La expresión del campo electrostático generado por la carga es:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{r}$$

Teniendo en cuenta que $d\vec{S} = dS \hat{r}$:

$$\Phi_S = \oint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \hat{r} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \oint_S dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

En la línea de los comentarios que se hicieron al principio del capítulo, este resultado se puede interpretar del siguiente modo. Si “medimos” el flujo Φ_S , se obtiene el valor de la carga dentro de la superficie S dividido por ϵ_0 . Nótese que Φ_S no depende del radio de la esfera sobre la que se ha trabajado. En realidad, según veremos a continuación, Φ_S seguiría siendo el mismo incluso si la carga no estuviese en el centro, o lo que es más, si la superficie fuese cualquier otra, siempre que contenga a la carga q .

5.2. Teorema de Gauss

Este teorema, de vital importancia en electrostática, se puede enunciar así:

El flujo total del campo electrostático a través de una superficie cerrada S , es igual al producto de $1/\epsilon_0$ por la suma algebraica de las cargas existentes dentro de S .

$$\Phi_S = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

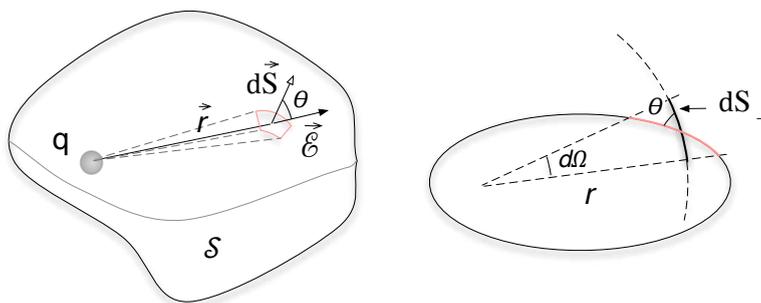


Figura 5.3: Esquema para la demostración del teorema de Gauss aplicado a una carga puntual. En la parte derecha se muestra el esquema de la definición de ángulo sólido sustentado por un elemento de área. Por claridad, representamos una sección.

Demostración:

- Para una carga puntual:

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{S}$$

donde $\hat{r} \cdot d\vec{S} = dS \cos \theta$.

Teniendo en cuenta que $\frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{dS_{\perp}}{r^2}$ es el ángulo sólido² $d\Omega$ sostenido por dS respecto al punto P (ver Figura 5.3):

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} d\Omega = \frac{4 \pi q}{4 \pi \epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Aparte de su interés teórico, el teorema de Gauss resulta muy útil cuando $\vec{\mathcal{E}} \parallel d\vec{S}$ y $|\vec{\mathcal{E}}| = \text{constante}$ sobre la superficie \mathcal{S} . Nótese que, en ese caso, $\Phi_{\mathcal{S}} = \mathcal{E}S$ y podemos usarlo para obtener \mathcal{E} .

- Para generalizarlo a la carga total Q encerrada por la superficie considerada, basta recordar que $\vec{\mathcal{E}}$ cumple el principio de superposición.
- Respecto a las cargas no encerradas en \mathcal{S} , basta darse cuenta de que producen flujo neto nulo.

5.3. Cálculo del campo electrostático aplicando el Teorema de Gauss

Como se deduce de los comentarios anteriores, el Teorema de Gauss se puede aplicar para calcular el campo electrostático en situaciones donde existe simetría. De hecho, será en estas situaciones cuando podamos afirmar que $\Phi_{\mathcal{S}} = \mathcal{E}S$. Veámoslo en varios casos concretos.

5.3.1. Esfera de radio a cargada uniformemente con densidad volúmica de carga ρ_0

Como es evidente, la simetría que presenta la distribución de carga conducirá a una estructura de campo electrostático con líneas radiales, a modo del creado por una carga puntual (Figura 5.2). En este sentido la elección de la superficie \mathcal{S} para aplicar el Teorema de Gauss será en forma de superficie esférica concéntrica a la de la distribución. Por otra parte, teniendo en cuenta que el flujo está determinado por las cargas “encerradas”, resulta natural pensar que

²Este concepto generaliza el de ángulo plano (θ), el cual, en radianes se define como, arco/radio con ayuda de una circunferencia. Así, el valor máximo del ángulo plano resulta ser: $\theta_M = 2\pi r/r = 2\pi$. El ángulo sólido (Ω), sin embargo, se define con ayuda de una superficie esférica auxiliar como $\text{área}/\text{radio}^2$. Entonces su valor máximo es: $\Omega_M = 4\pi r^2/r^2 = 4\pi$.

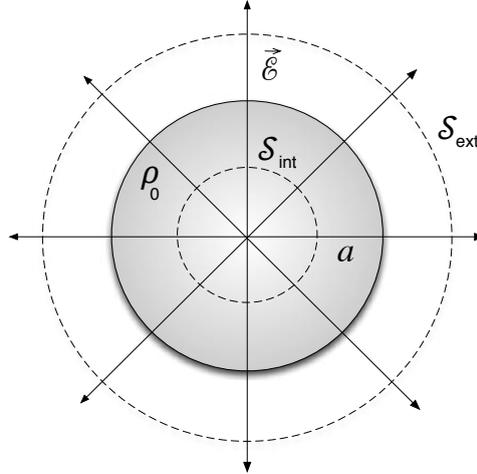


Figura 5.4: Superficies esféricas consideradas para calcular el campo electrostático en el interior y en el exterior de una esfera de radio a cargada uniformemente con densidad volúmica de carga ρ_0 .

la expresión de \mathcal{E} depende de si nos referimos a puntos interiores o exteriores a la esfera de carga. Por tanto, haremos el estudio distinguiendo entre ambos casos.

Campo en el exterior:

Para calcular el campo electrostático en el exterior de la esfera aplicando el Teorema de Gauss, consideremos una superficie esférica \mathcal{S}_{ext} de radio $r_e > a$ a través de la cual calculamos el flujo (ver Figura 5.4):

$$\oint_{\mathcal{S}_{\text{ext}}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \mathcal{E}_r 4 \pi r_e^2$$

Por otra parte, la carga encerrada por \mathcal{S}_{ext} es la carga total de la esfera:

$$Q = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 \quad (5.1)$$

Igualando el flujo y la carga encerrada (dividida por ϵ_0) tenemos:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_0 a^3}{3 \epsilon_0} \frac{1}{r_e^2} \hat{r} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r_e^2} \hat{r}$$

Ésta es la expresión del campo electrostático para cualquier punto situado en el exterior de la esfera, a una distancia r_e del centro de ésta. Nótese que es la misma que correspondería a una carga puntual del mismo valor, colocada en el centro de la esfera.

Campo en el interior:

Consideremos ahora una superficie esférica \mathcal{S}_{int} de radio $r_i < a$ (ver Figura 5.4). Procediendo del mismo modo que en el caso exterior, pero teniendo en cuenta que ahora la carga encerrada es una fracción de la total:

$$\oint_{\mathcal{S}_{\text{int}}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \mathcal{E}_r 4 \pi r_i^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}_{\text{int}}} \rho_0 dv = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r_i^3 \rho_0$$

Despejando se obtiene la expresión que permite calcular el campo electrostático en un punto situado dentro de la esfera cargada, a una distancia r_i de su centro:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_0}{3 \epsilon_0} r_i \hat{r} \equiv \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 a^3} r_i \hat{r}$$

donde Q sigue siendo la carga total de la esfera.

En la figura 5.5 se muestra cómo varía el campo electrostático con la distancia al centro de la esfera, atendiendo a las dos expresiones anteriores.

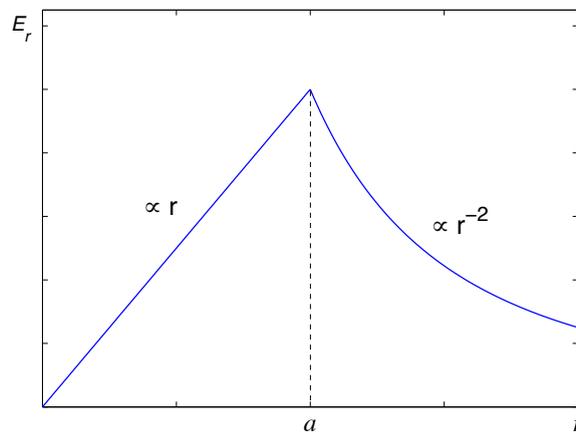


Figura 5.5: Gráfica de \mathcal{E}_r para una esfera de radio a cargada uniformemente

5.3.2. Cilindro infinito de radio a , cargado uniformemente con densidad volúmica de carga ρ_0 .

De nuevo, éste es un problema que reúne condiciones de simetría que permiten encontrar una superficie “gaussiana” en la cual el cálculo del flujo resulta trivial.

Supongamos que el conductor de la figura 5.6 está uniformemente cargado con densidad volúmica ρ_0 . Vamos a calcular el campo electrostático dentro y fuera del conductor aplicando el Teorema de Gauss.

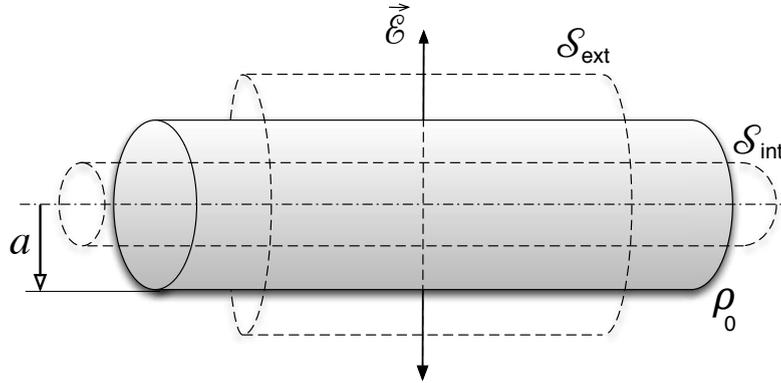


Figura 5.6: Superficies gaussianas consideradas para calcular el campo electrostático en el interior y en el exterior de un conductor cilíndrico infinito de radio a cargado uniformemente con densidad ρ_0 .

La simetría del problema nos indica que $\vec{E} = E_r \hat{\rho}$.³ Tomaremos, por tanto, superficies gaussianas cilíndricas coaxiales a la que envuelve a la distribución de carga. Nótese que el flujo se anula sobre las bases de dichas superficies, de modo que el flujo total proviene de la zona lateral.

Campo en el exterior:

Calculemos el flujo a través de la superficie lateral cilíndrica S_L de radio r_e mayor que el radio a de la distribución (ver Figura 5.6).

$$\int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \int_{S_L} dS = E_r 2 \pi r_e L_e$$

Teniendo en cuenta que se cumple

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0 \pi a^2 L_e}{\epsilon_0},$$

al aplicar el teorema de Gauss y despejar se obtiene el campo electrostático:

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^2}{2 \epsilon_0} \frac{1}{r_e} \hat{\rho}$$

³Estamos utilizando el sistema de coordenadas polares definido en el apartado 2.2

Campo en el interior:

Lo que cambia respecto a la situación anterior es que en este caso la carga encerrada dentro de la superficie gaussiana cilíndrica \mathcal{S}_{int} ya no es la carga total del cilindro, sino $\rho_0 \pi r_i^2 L$. Así:

$$\int_{\mathcal{S}_L} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \mathcal{E}_r \int_{\mathcal{S}_L} dS = \mathcal{E}_r 2 \pi r_i L_i = \frac{\rho_0 \pi r_i^2 L_i}{\epsilon_0}$$

Despejando el campo electrostático se obtiene:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_0}{2 \epsilon_0} r_i \hat{\rho}$$

La representación gráfica del campo electrostático en función de la distancia al centro del cilindro cargado se propone como ejercicio. Tendrá un aspecto muy similar a la de la Figura 5.5.

Se propone también como ejercicio calcular el campo electrostático generado por un hilo infinito uniformemente cargado de densidad lineal de carga λ a una distancia r del mismo. Nótese que se trata de un procedimiento del todo análogo al desarrollado para el campo exterior del cilindro macizo. De hecho, el resultado puede obtenerse directamente sin más que sustituir $\rho_0 \pi a^2 \rightarrow \lambda$ en la expresión del campo en el exterior.

5.3.3. Lámina infinita cargada con densidad σ

Esta geometría (simetría traslacional en el plano de la lámina) representa el último conjunto de problemas de cálculo de campo electrostático que pueden ser resueltos aplicando la ley de Gauss.

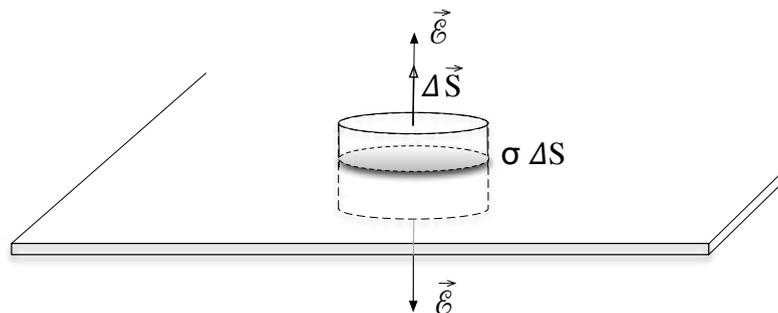


Figura 5.7: Superficie cilíndrica considerada para calcular el campo electrostático alrededor de una lámina infinita de carga.

Como se indica en la figura, la simetría traslacional determina que las líneas de $\vec{\mathcal{E}}$ sean perpendiculares a la lámina. Entonces, resulta sencillo aplicar el teo-

rema de Gauss en una superficie cilíndrica cuyo eje sea también perpendicular a la lámina. Tendremos:

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} &= 2\mathcal{E}\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\epsilon_0} \\ &\Downarrow \\ \mathcal{E} &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

Vamos a resolverlo para el caso de una lámina bidimensional, aunque el método puede servir como pauta para casos análogos como sería una lámina “gruesa” con densidad volúmica de carga o asociaciones de láminas cargadas y paralelas entre sí.

El lector puede verificar que (como cabe esperar) esta expresión coincide con el límite para distancias pequeñas de la fórmula 4.5, que se obtuvo por el método de superposición para un disco cargado.

Capítulo 6

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

Vamos a extender al caso del campo electrostático los conceptos de trabajo y energía introducidos en los capítulos de Mecánica. En particular, comenzaremos verificando que la fuerza electrostática presenta carácter conservativo. Esto conducirá a introducir el concepto de energía potencial electrostática \mathcal{U} y, a partir de él, el de potencial electrostático \mathcal{V} . Este último resultará de gran interés por múltiples razones. Digamos, en particular, que a nivel teórico el cálculo del potencial puede resultar mucho más directo que el del campo $\vec{\mathcal{E}}$, y que éste se puede obtener eventualmente a partir de \mathcal{V} . Por otra parte, a nivel práctico, el potencial se puede “medir” con instrumentación y métodos sencillos, de modo que permite una rápida caracterización de los sistemas electrostáticos.

6.1. Definición de potencial electrostático

Vamos a considerar que una carga puntual q_0 se desplaza entre los puntos a y b , en el seno del campo electrostático creado por otra carga q (Fig. 6.1), y evaluaremos el trabajo que realiza el campo en dicho desplazamiento.

La expresión del campo creado por q es:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

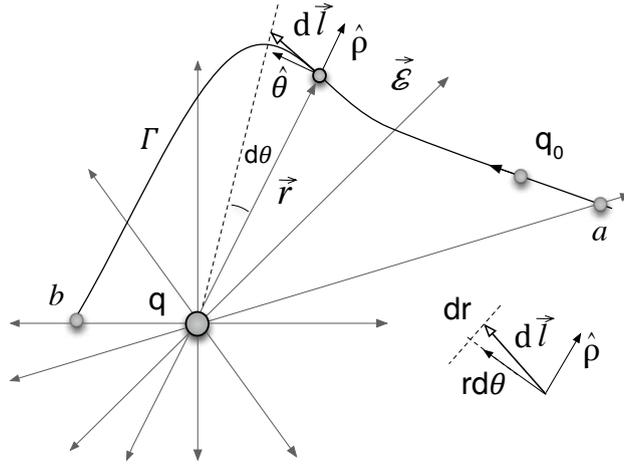


Figura 6.1: Desplazamiento por el camino Γ de una carga puntual q_0 en el seno del campo electrostático generado por q .

Nótese, por otra parte (Fig.6.1), que la relación entre el vector desplazamiento tangente a la trayectoria $d\vec{l}$ y los vectores unitarios polares es

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} \quad (6.1)$$

Por lo tanto, el trabajo realizado por el campo electrostático $\vec{\mathcal{E}}$ en el recorrido Γ entre a y b :

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{\Gamma} q_0 \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} q_0 \mathcal{E} dr = q_0 \int_{\Gamma} \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$$

$$W_{a \rightarrow b} = \frac{q_0 q}{4 \pi \epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \equiv \mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b = -\Delta \mathcal{U}$$

Es decir, el resultado es independiente de Γ , sólo depende de los extremos (distancias r_a y r_b), y por lo tanto, podemos definir la función de punto **energía potencial electrostática** de modo que $W_{a \rightarrow b} = \mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b$. De hecho, esta relación determina la función \mathcal{U} salvo una constante global arbitraria c .

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \frac{q_0 q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r} + c$$

Para los problemas en los que no hay carga en el infinito, se suele tomar $c = 0$, de modo que $\mathcal{U}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. En lo que sigue, utilizaremos este convenio.¹

¹Nótese que, puesto que la suma de constantes arbitrarias es una constante arbitraria, la energía potencial en presencia de distribuciones permite “elegir” una referencia arbitraria para la energía potencial: $C = \sum_i c_i$

De manera obvia, la energía potencial cumple el principio de superposición. Así pues, si la carga q_0 está en presencia de un conjunto de cargas $\{q_i\}$, siendo r_i la distancia a cada una de ellas:

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \sum_i \left(\frac{q_i}{r_i} \right)$$

Para distribuciones continuas, el sumatorio se transforma en integral, y la carga q_i en un diferencial de carga $dq(\vec{r}')$: en distribuciones lineales de carga $dq = \lambda(\vec{r}') d\ell'$, en distribuciones superficiales $dq = \sigma(\vec{r}') dS'$, y en distribuciones volumétricas $dq = \rho(\vec{r}') dV'$. En general, lo expresaremos:

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4 \pi \epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.2)$$

siendo \vec{r} la posición ocupada por q_0 y \vec{r}' la que ocupa $dq(\vec{r}')$ (fuente de potencial).

Por otra parte, en lugar de manejar la energía potencial electrostática que depende de la partícula q “de prueba”, se suele definir la **energía potencial por unidad de carga**, más conocida como **potencial**, que se denota \mathcal{V} :

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{U}}{q_0}$$

Nótese que el potencial electrostático puede relacionarse con el campo electrostático. De hecho, la variación de potencial asociada a un desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ viene dada por:²

$$\boxed{\delta\mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l}} \quad (6.3)$$

En esta relación fundamental se entiende (ver Fig.6.1): $\delta\mathcal{V} = \mathcal{V}(\vec{r} + d\vec{l}) - \mathcal{V}(\vec{r})$ y que $\vec{\mathcal{E}}$ es aproximadamente uniforme sobre $d\vec{l}$.

En cuanto a las unidades, la energía potencial electrostática se mide en Julios (= N m), y el potencial en Voltios (J/C).

²Es importante recalcar que a lo largo de este capítulo utilizaremos las expresiones $\delta\mathcal{V}$ y $d\mathcal{V}$ asociadas al potencial electrostático. La primera, como define la ecuación 6.3, corresponde a la variación que experimenta \mathcal{V} al pasar de un punto a otro del espacio. Por contra, $d\mathcal{V}$ denotará el elemento de potencial creado en un punto por un elemento diferencial de carga dq , según indica 6.4.

6.2. Ejemplos de cálculo del potencial

Veamos algunos ejemplos de cálculo del potencial creado por distribuciones de carga, utilizando diferentes métodos

6.2.1. Cálculo de \mathcal{V} mediante el principio de superposición

En primer lugar recurriremos al principio de superposición, es decir, aplicaremos la expresión 6.2 que “acumula” las contribuciones de los elementos de carga $dq(\vec{r}')$ que componen una cierta distribución. Concretamente:

$$\mathcal{V}(\vec{r}) = \int d\mathcal{V} = \int \frac{dq(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (6.4)$$

Lo haremos para dos ejemplos de distribución lineal de carga, el de un anillo y el de un segmento.

Potencial creado por un anillo cargado

Nos vamos a referir al ejemplo de la figura, que simboliza un anillo cargado con densidad uniforme, así como su eje de simetría en el que evaluamos el potencial.

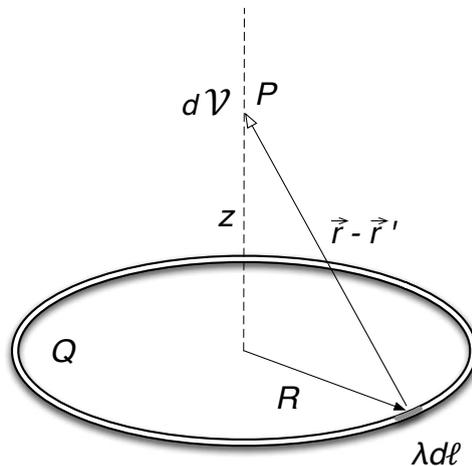


Figura 6.2: Anillo cargado con densidad uniforme $\lambda = Q/(2\pi R)$.

$$dq(\vec{r}') = \lambda dl$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 + z^2}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{V} = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_o\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o\sqrt{R^2 + z^2}} \int d\ell = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Nótese que la integral ha resultado ser trivial puesto que no hay variación del integrando. Nótese también que si nos movemos en torno al punto P donde hemos evaluado \mathcal{V} la derivada $(-\delta\mathcal{V}/dz)$ de la expresión anterior produce justamente el valor del campo \mathcal{E}_z para el anillo, recogido en la fórmula 4.4.

Potencial creado por un segmento de carga

Si consideramos ahora el caso de la figura, es decir, el de un segmento de longitud $2L$, densidad uniforme $\lambda = Q/2L$, y nos planteamos calcular el potencial creado en los puntos de su mediatriz, tendremos:

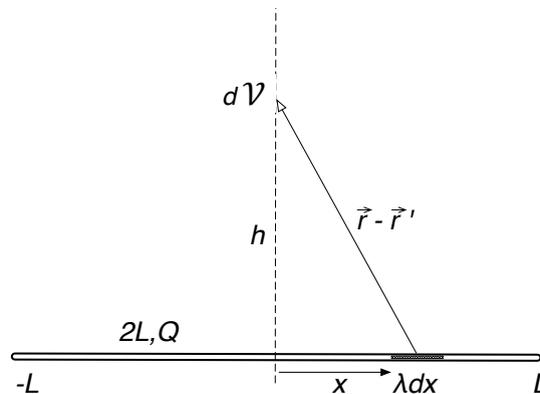


Figura 6.3: Segmento cargado con densidad uniforme $\lambda = Q/(2L)$.

$$dq(\vec{r}') = \lambda dx$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x^2 + h^2}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{V} = 2 \int_0^L \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

Si calculamos la integral y evaluamos en los límites indicados:

$$\mathcal{V} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o} \ln \left(\frac{L}{h} + \sqrt{1 + L^2/h^2} \right)$$

Es un ejercicio interesante verificar que la derivada de esta expresión ($-\delta\mathcal{V}/dh$) coincide con la ecuación 4.6 que nos da el campo electrostático creado por el segmento. Esta propiedad, que hemos verificado en los dos ejemplos tratados, no es casual y será reconsiderada en la sección siguiente, puesto que hace referencia a un posible método para obtener $\vec{\mathcal{E}}$.

6.2.2. Cálculo del potencial \mathcal{V} a partir del campo $\vec{\mathcal{E}}$

Vamos a calcular el potencial electrostático asociado a una distribución esférica de carga de radio a y densidad uniforme ρ_o , para la que ya obtuvimos $\vec{\mathcal{E}}$ en el apartado 5.3 (ver Fig. 5.4).

- En el interior de la esfera tenemos:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_o}{3 \epsilon_o} \vec{r} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_o a^3} r \hat{r}$$

Entonces, integrando la expresión (6.3)³ a lo largo del radio que conecta un punto interior (radio r) con la superficie (radio a)

$$\mathcal{V}_i(r) - \mathcal{V}_i(a) = \int_r^a \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_o a^3} \int_r^a r dr = \frac{Q}{8 \pi \epsilon_o a^3} (a^2 - r^2)$$

$$\mathcal{V}_i(r) = \frac{Q}{8 \pi \epsilon_o a^3} (a^2 - r^2) + \mathcal{V}_i(a)$$

- En el exterior:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho_o a^3}{3 \epsilon_o} \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_o} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

Si procedemos como antes, ahora integrando desde un punto exterior de radio r hasta “infinito” con la elección $\mathcal{V}_e(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\mathcal{V}_e(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_o} \frac{1}{r}$$

Finalmente, la solución completa quedará determinada por la condición de continuidad en la superficie

$$\mathcal{V}_i(a) = \mathcal{V}_e(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o a}$$

³En el sentido del procedimiento definido en la Fig.6.1

Por lo tanto:

$$\mathcal{V}_i(r) = \frac{Q}{8 \pi \epsilon_0 a^3} (3 a^2 - r^2) \quad (6.5)$$

$$\mathcal{V}_e(r) = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

En la figura 6.4 se muestra cómo varía el potencial electrostático con la distancia al centro de la esfera.

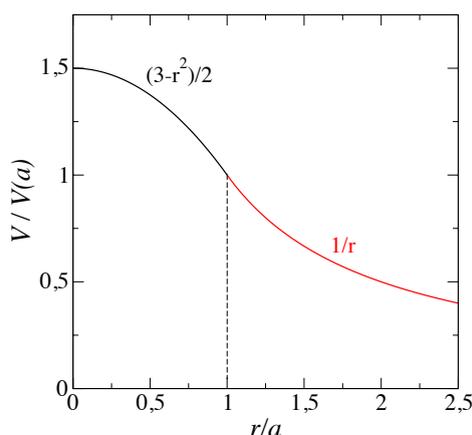


Figura 6.4: Potencial electrostático debida a una distribución esférica de carga (radio a). Se han usado unidades normalizadas a los valores en la superficie de la esfera, tanto para \mathcal{V} como para la distancia al centro de la esfera.

6.3. Superficies equipotenciales, vector gradiente

El potencial electrostático es una función escalar, cuyos valores dependen del punto del espacio en el que lo calculemos. Por ejemplo, si se trata del que crea una carga puntual, podemos representarlo mediante la expresión:

$$\mathcal{V}(x, y, z) = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \equiv \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

si tomamos como origen de coordenadas el lugar que ocupa la carga.

Nótese que los valores de \mathcal{V} son constantes en aquellos conjuntos de puntos que verifiquen la condición $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, que evidentemente corresponden a las superficies esféricas centradas en la carga. Nótese también que dichas superficies son perpendiculares a las líneas de fuerza del campo electrostático que crea q y se verifica la relación $\mathcal{E}^e = -\delta\mathcal{V}/dr$

Estas propiedades del campo y del potencial que ilustramos en el caso trivial de la carga puntual no le son exclusivas. De hecho, como veremos a continuación, pueden expresarse de modo muy general para el campo y el potencial creados por cualquier distribución de carga.

6.3.1. Gradiente del potencial

Recordemos, por una parte, que la relación entre campo y variaciones infinitesimales de potencial se expresa (ecuación 6.3):

$$\delta\mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l},$$

lo cual significa que el incremento que experimenta el potencial cuando nos desplazamos entre los puntos \vec{r} y $\vec{r} + d\vec{l}$ viene dado por $-\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l}$ como indica la figura 6.6.

Por otro lado, tal y como se recoge en el capítulo 3, sabemos que para una función escalar, como es el caso de $\mathcal{V}(x, y, z)$, las variaciones producidas por un incremento arbitrario de sus variables vienen dadas por la siguiente relación en términos del denominado vector gradiente, allí definido:

$$\delta\mathcal{V} = \vec{\nabla}\mathcal{V} \cdot d\vec{l}$$

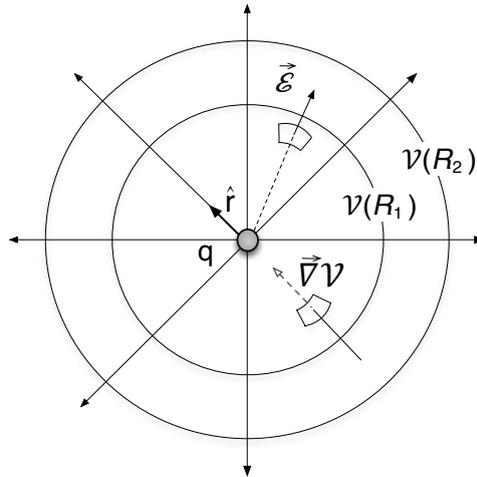


Figura 6.5: Líneas de campo electrostático y superficies equipotenciales alrededor de una carga puntual. Se indica también la dirección del gradiente de la función potencial.

Se sigue que el campo puede obtenerse a partir del potencial mediante la relación:

$$\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}\mathcal{V}, \quad (6.6)$$

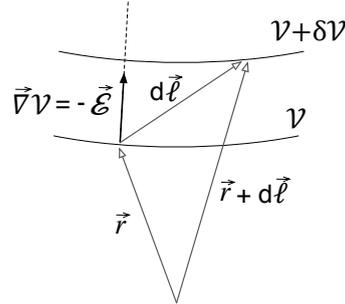


Figura 6.6: Representación gráfica de la variación del potencial entre superficies equipotenciales, su gradiente y la relación con el campo electrostático.

resultado que el lector puede verificar para el caso de la carga puntual, utilizando la expresión

$$\vec{\mathcal{E}} = - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \hat{k} \right) \equiv - \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} \right)$$

que se introdujo en el apartado 3.4.⁴

Nótese que la relación anterior no es otra cosa que la generalización a tres dimensiones de las fórmulas unidimensionales para problemas de una sola variable. En concreto, de la conocida expresión:

$$\mathcal{E}_x = - \frac{\delta \mathcal{V}}{dx}$$

Digamos para concluir el análisis que, de manera evidente, se cumple que el vector gradiente (y por tanto el campo electrostático) es perpendicular a las superficies equipotenciales, ya que por cualquier desplazamiento $d\vec{l}$ que tenga lugar dentro de dichas superficies,

$$\delta \mathcal{V} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \mathcal{V} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \mathcal{V} \perp d\vec{l}$$

También es obvio que $\vec{\nabla} \mathcal{V}$ apunta en la dirección de máxima tasa de variación como ya se dijo, puesto que ésta debe coincidir con la perpendicular a las equipotenciales: para la misma variación $\delta \mathcal{V}$, el desplazamiento es mínimo.

6.3.2. Cálculo de $\vec{\mathcal{E}}$ a partir del potencial.

La expresión (6.6) es de gran importancia porque, como ya se dijo, hay situaciones en las que se dispone de la función $\mathcal{V}(x, y, z)$ y podemos calcular el

⁴Se puede constatar que en este caso concreto (simetría esférica) la operación gradiente se realiza de modo simplificado mediante la expresión $\vec{\nabla} \mathcal{V} = (\delta \mathcal{V} / dr) \hat{r}$

campo $\vec{\mathcal{E}}$ de un modo más sencillo que por integración directa. Por ejemplo, ya hemos indicado que en los casos del apartado 6.2, el lector puede verificar que la expresión de $\vec{\mathcal{E}}$ obtenida por este método coincide con la que ya conocíamos mediante la técnica de superposición. Digamos por completitud que en el caso del anillo, resulta evidente que el potencial en el eje cumple:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = -\mathcal{E}_z$$

Esto ocurre porque cuando nos desplazamos perpendicularmente al eje mediante: $d\vec{l} = (dx, dy, 0)$ el potencial ha de variar simétricamente, es decir: $\mathcal{V}(dx) = \mathcal{V}(-dx)$ y $\mathcal{V}(dy) = \mathcal{V}(-dy)$, por lo que se anulará su derivada.

Mediante un razonamiento similar podemos concluir que en el caso del segmento, \mathcal{V} no puede depender de x ni de z :

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_x = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} = -\mathcal{E}_y$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_z = 0$$

6.4. Energía electrostática de una distribución

6.4.1. Definición

Hemos visto que para una carga puntual en presencia de un cierto campo electrostático puede definirse una función energía potencial, de modo que cuando la carga se mueve entre dos puntos a y b , el campo realiza un trabajo $W_{a \rightarrow b} = \mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b$. En vista de esto podemos inferir que para crear una cierta distribución de carga tendremos que realizar un trabajo opuesto al que realizará el campo en dicho proceso. Por ejemplo, para construir un sistema formado por dos cargas puntuales iguales separadas entre sí por una distancia

d tendremos que colocar la segunda carga en el potencial de la primera, es decir, invertiremos una energía

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

Nótese que ésta energía queda “almacenada” si el sistema de las dos cargas permanece estable. Obviamente, para que así sea es necesaria la acción de fuerzas adicionales que mantengan las cargas ancladas en sus posiciones. Si se libera dicho mecanismo, las dos cargas se separarían de nuevo por acción de su repulsión mutua, liberando justamente la energía almacenada.

Calculemos el trabajo necesario para crear una distribución formada por un conjunto de n cargas puntuales. Esto implica evaluar el trabajo que hay que realizar **contra** el campo (nótese el signo en $\Delta\mathcal{U}$) al ir llevando cada carga “desde el infinito” hasta su posición final (ver Fig. 6.7). Supondremos que el proceso se realiza una por una, de modo que cuando la carga q_i llega a la posición \vec{r}_i lo hace en presencia de las $i - 1$ anteriores.

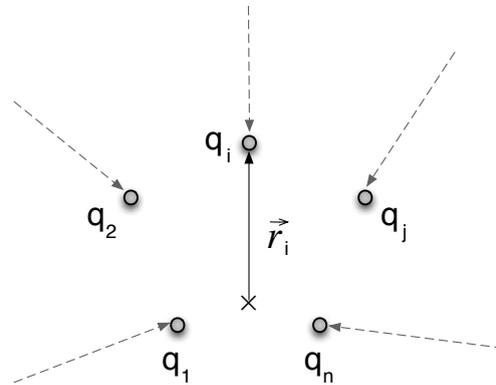


Figura 6.7: Creación de una distribución discreta de cargas llevando cada una de ellas desde el infinito hasta su posición.

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{\infty \rightarrow \vec{r}_1}^1 = \mathcal{U}(\vec{r}_1) = 0 \\ W_{\infty \rightarrow \vec{r}_2}^2 = \mathcal{U}_1(\vec{r}_2) = q_2 \mathcal{V}_1(\vec{r}_2) \\ W_{\infty \rightarrow \vec{r}_3}^3 = q_3 (\mathcal{V}_1(\vec{r}_3) + \mathcal{V}_2(\vec{r}_3)) \\ \vdots \\ W_{\infty \rightarrow \vec{r}_n}^n = \sum_{i=1}^{n-1} q_n \mathcal{V}_i(\vec{r}_n) \end{array} \right.$$

El trabajo total necesario para construir la distribución será:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n W_{\infty \rightarrow \vec{r}_i}^i = \sum_{i=1}^n \left(q_i \sum_{j < i} \mathcal{V}_j(\vec{r}_i) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j(\vec{r}_i) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \mathcal{V}(\vec{r}_i) \equiv \mathcal{U} \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado la notación:

- $\mathcal{V}_j(\vec{r}_i)$ es el potencial en \vec{r}_i debido a la carga q_j .
- $\mathcal{V}(\vec{r}_i)$ es el potencial total en \vec{r}_i .

Y también la propiedad $q_i \mathcal{V}_j(\vec{r}_i) = q_j \mathcal{V}_i(\vec{r}_j)$

Por otra parte, si lo que tenemos es una distribución continua de carga, la expresión anterior se transforma en:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \mathcal{V}(\vec{r}) dV$$

6.4.2. Ejemplo

Analizaremos una vez más el caso de la distribución uniforme de carga sobre el volumen de una esfera (Fig.5.4). En esta ocasión, analizaremos la energía invertida en la construcción de dicho sistema. Evidentemente, para evaluar \mathcal{U} mediante la expresión anterior, hemos de integrar en el volumen que ocupan las cargas, utilizando la fórmula del potencial interior dada por la ecuación (6.5)

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \mathcal{V}(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \int_0^a \rho_0 \frac{Q}{8 \pi \epsilon_0 a^3} (3 a^2 - r^2) dV$$

Sustituyendo $dV = 4 \pi r^2 dr$ en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{2} \rho_0 \frac{Q}{8 \pi \epsilon_0 a^3} 4 \pi \int_0^a (3 a^2 r^2 - r^4) dr \\ &= \frac{\pi \rho_0^2}{3 \epsilon_0} \left[\frac{4}{5} a^5 \right] = \frac{4}{15} \frac{\pi \rho_0^2 a^5}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Parte III

ELECTROSTÁTICA EN LA MATERIA

INTRODUCCIÓN

Hasta el momento, las cargas eléctricas (fuentes del campo electrostático y partículas que reciben su acción) se han tratado de un modo idealizado. Esto significa que los problemas que hemos resuelto pertenecen al nivel académico. Hemos aprendido a utilizar algunos métodos de cálculo basados en diferentes conceptos (principio de superposición, ley de Gauss, ...) mediante ejemplos como las distribuciones de cargas puntuales o la esfera con densidad uniforme de carga. Evidentemente, la gran mayoría de ellos no representan un sistema real, que por ejemplo, pudiéramos analizar en el laboratorio.

No obstante, las cargas eléctricas están presentes en toda la materia y existen multitud de ejemplos y aplicaciones que podemos describir cuantitativamente mediante las técnicas aprendidas. Evidentemente, esto será posible hasta cierto nivel de aproximación. En concreto, se tendrá que suponer que la geometría de los objetos considerados es sencilla o se permite suponer que está próxima a serlo. Esto es necesario para poder abordar operaciones matemáticas como la integración mediante métodos básicos.

En particular, los dos capítulos que forman esta parte, se dedican al estudio de las propiedades básicas de los materiales conductores (metales) y dieléctricos, dentro de los cuales las cargas muestran comportamientos bien diferentes.

Capítulo 7

ELECTROSTÁTICA EN MATERIALES CONDUCTORES

En este capítulo nos ocuparemos del comportamiento de los materiales conductores bajo la acción de campos electrostáticos.¹

La característica esencial de los materiales conductores es que en presencia de un campo, por débil que sea, el medio posee cargas que se van a desplazar a lo largo de sus líneas de fuerza. Hay diversos aspectos que podríamos considerar acerca de la dinámica de dichas cargas pero, por el momento, nos centraremos en los denominados “estados de equilibrio”. Éstos se alcanzarán cuando la distribución de las cargas en el conductor dé lugar a un campo total que sea nulo allí donde pudiera existir movimiento de las mismas.

7.1. *Condiciones de equilibrio electrostático*

Vamos a demostrar que, utilizando el concepto de material conductor junto con principios básicos expuestos en los capítulos anteriores, se puede obtener la configuración de equilibrio en estos sistemas. Más concretamente, analizaremos la distribución de las cargas eléctricas una vez alcanzado el equilibrio, como respuesta a procesos inducidos por un agente externo: ceder/retirar cargas, someter a campos o potenciales, etc.

¹Nota: muchas veces se habla indistintamente de conductores o de metales.

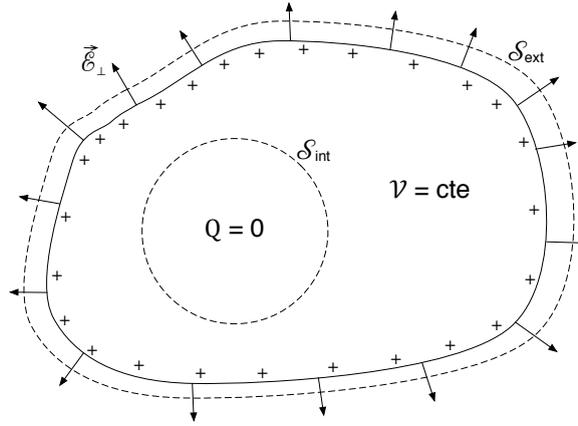


Figura 7.1: Esquema del estado de equilibrio de un conductor. Si el sistema posee carga neta, ésta se reparte a lo largo de su superficie. \mathcal{S}_{ext} encierra la carga total, pero \mathcal{S}_{int} no puede encerrar carga neta.

Así pues, los aspectos específicos para el análisis serán:

- En el interior de un conductor en equilibrio no puede existir campo electrostático (las cargas se moverían, rompiendo la condición de equilibrio).
- Al ser nulo el campo, el potencial electrostático permanecerá constante dentro del conductor:

$$\delta\mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow \mathcal{V} = \text{cte.}$$

- Al ser nulo el campo, el conductor no puede “contener cargas”:

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_{\mathcal{S}_i} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 0$$

- Si el conductor posee carga neta, en equilibrio, ésta sólo puede situarse sobre su superficie.
- Cuando el conductor posee carga neta, el campo electrostático aparece en su exterior siendo perpendicular a la superficie.²

Todos estas propiedades se ilustran en la figura 7.1.

²Cualquier otra opción rompería la condición de equilibrio. Por ejemplo, una componente de $\vec{\mathcal{E}}$ paralela a la superficie provoca el movimiento de cargas a lo largo de la misma. También se deduce de $\delta\mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = 0$ & $\mathcal{E} \neq 0$

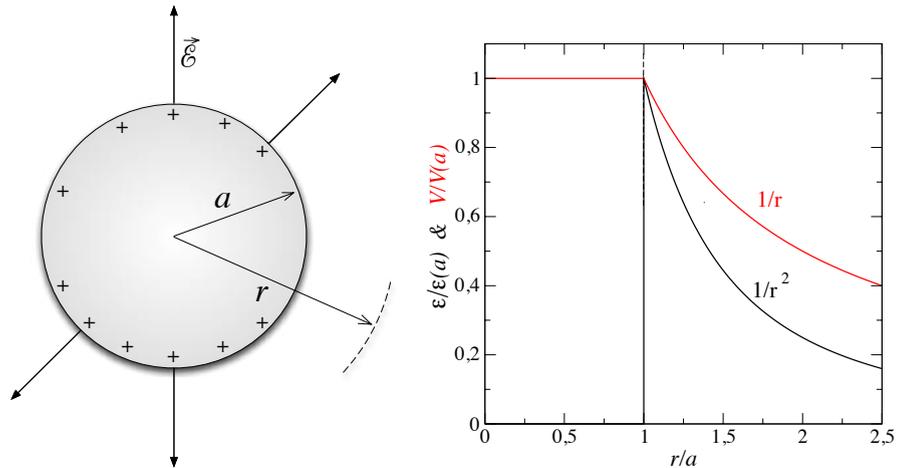


Figura 7.2: Campo electrostático y potencial en el interior y exterior de una esfera conductora cargada.

7.1.1. Ejemplo: Campo electrostático y potencial en presencia de conductores

Vamos a ilustrar los conceptos anteriores mediante un ejemplo que permite una evaluación cuantitativa: el caso de una esfera conductora a la que se comunica una carga neta Q (ver figura 7.2). Por aplicación directa de la ley de Gauss se obtiene:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & , \quad r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & , \quad r \geq a \end{cases} \quad (7.1)$$

y por otra parte:

$$V = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} & , \quad r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & , \quad r \geq a \end{cases} \quad (7.2)$$

Nótese que el potencial en el interior de un conductor en equilibrio es constante y se puede obtener su valor por prolongación del potencial exterior.

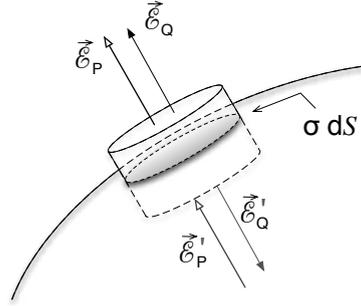


Figura 7.3: El campo electrostático en el entorno de la superficie de un conductor cargado, como superposición del que crea el elemento de carga inferior σdS , esto es \mathcal{E}_Q , y el resto del conductor (\mathcal{E}_P).

7.1.2. Presión electrostática

Un efecto importante a tener en cuenta cuando se trabaja con materiales conductores es que cada elemento de carga $dQ = \sigma dS$ (sobre la superficie) sufre una repulsión debida a la acción del campo creado por el resto, tendiendo a ser expulsado. Vamos a cuantificar esta repulsión calculando la contribución al campo total en cada punto de la superficie del propio elemento de carga allí situado y del resto de ellas. Llamaremos \mathcal{E}_Q a la primera y \mathcal{E}_P a la segunda. Usaremos la notación ' para referirnos a los puntos interiores al conductor. Nótese, en primer lugar (ver figura 7.3) que aplicando la ley de Gauss para la superficie cilíndrica indicada, obtenemos que en los puntos exteriores el campo total vale

$$\mathcal{E}_P + \mathcal{E}_Q = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Por otra parte, en los puntos interiores se tiene $\mathcal{E}_P' = -\mathcal{E}_Q'$ debido a la condición de campo nulo. Puesto que por simetría ha de cumplirse $\mathcal{E}_Q' = -\mathcal{E}_Q$, y por proximidad $\mathcal{E}_P' = \mathcal{E}_P$, se deduce que $\mathcal{E}_P = \mathcal{E}_Q$. Consecuentemente, en el exterior del conductor la contribución al campo total se hace por partes iguales y tenemos:

$$\mathcal{E}_Q = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$$

Así, la fuerza repulsiva que sufre el elemento σdS viene dada por:

$$dF = \frac{\sigma^2 dS}{2 \epsilon_0}$$

En conclusión, podemos definir una presión sobre la superficie:

$$P = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0}$$

Esta expresión explica el denominado *efecto punta*: dado que allí donde la superficie de los conductores presenta puntas, σ es mayor,³ es por ese lugar por donde se van a liberar las cargas. Nótese que P aumenta rápidamente al hacerlo la densidad.

7.2. Apantallamiento y conexión a tierra

Las propiedades del equilibrio electrostático en materiales conductores ofrecen una opción muy importante en el campo de las aplicaciones, que es el “apantallamiento”. Dicho en breve, esto significa que aprovechando la propiedad de campo nulo en equilibrio electrostático, podemos usar los metales como “capas de invisibilidad electrostática”. Como veremos bastará con introducir el sistema que se desea apantallar en una cavidad dentro de un conductor. En el conductor se inducirán las distribuciones de carga oportunas que harán que el interior sea invisible al exterior y viceversa.

7.2.1. Conductores con cavidades

Supongamos que se tiene un conductor que posee una cavidad interior (Figura 7.4). Las condiciones de equilibrio (carga y campo nulos en su volumen) determinan que las cargas netas (de existir) se localizarán en la superficie. Como este sistema posee dos superficies (interna y externa) podrá haber un reparto entre ambas. Dicho reparto vendrá dado por la presencia de posibles cargas adicionales, tanto en el interior de la cavidad, como en el exterior del conductor. Como hechos principales, que se visualizan en la figura, debe notarse que (i) al aplicar el teorema de Gauss a la superficie \mathcal{S} concluimos que de haber carga en la cavidad (digamos $+Q$) se inducirá una carga total $-Q$ en la cara interna. (ii) Si el conductor permanece aislado de posible fuentes de carga, habrá de mantenerse su neutralidad, por lo que junto con la aparición de $-Q$ deberá hacerlo $+Q$ en la cara externa.

³Para entender este efecto basta considerar la relación entre densidades de carga para dos conductores esféricos de radios a_1, a_2 y sometidos al mismo potencial. Dado que $V = Q/4\pi\epsilon_0 a$ y $Q = 4\pi a^2 \sigma$ se tiene $\sigma_1/\sigma_2 = a_2/a_1$, así que donde el radio es menor, la densidad de carga es proporcionalmente mayor.

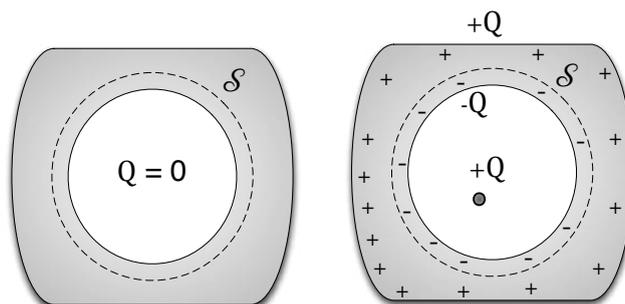


Figura 7.4: En un conductor aislado con una cavidad se inducen cargas de superficie al colocar una carga en el interior de la cavidad.

7.2.2. Apantallamiento

Siguiendo con el conductor hueco del caso anterior, supongamos ahora que la carga $+Q$ se sitúa en el exterior (Figura 7.5). Como se indica de modo esquemático en la figura, el material reacciona induciéndose cargas de superficie para producir campo nulo en la zona conductora. Nótese que, estando el conductor aislado, debe mantenerse la neutralidad global. Por otra parte, la ausencia de campo en el interior del conductor implica que en la zona de la cavidad la presencia de la carga externa resulta “invisible”. Decimos que el interior está apantallado.

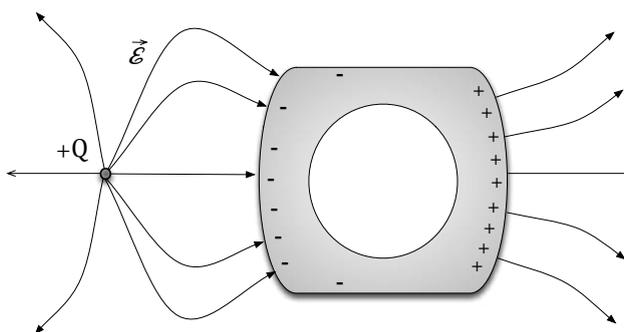


Figura 7.5: Conductor aislado en presencia de una carga exterior.

Es importante recalcar que en la práctica no es necesario que el conductor “envuelva” por completo la zona que se desea apantallar. En realidad, basta colocar una cierta barrera como indica el ejemplo de la figura 7.6. En este caso presentamos la solución exacta (campo y potencial) correspondiente a someter a un campo externo uniforme el sistema de dos láminas paralelas unidas por un hilo. Se obtuvo mediante un método computacional. Debe notarse que, si bien el campo tiende a penetrar mínimamente por los extremos, queda perfectamente

apantallado en gran parte de la zona entre las láminas. Como se indica, en éstas, se mantiene la neutralidad global, induciéndose carga en sus zonas externas.

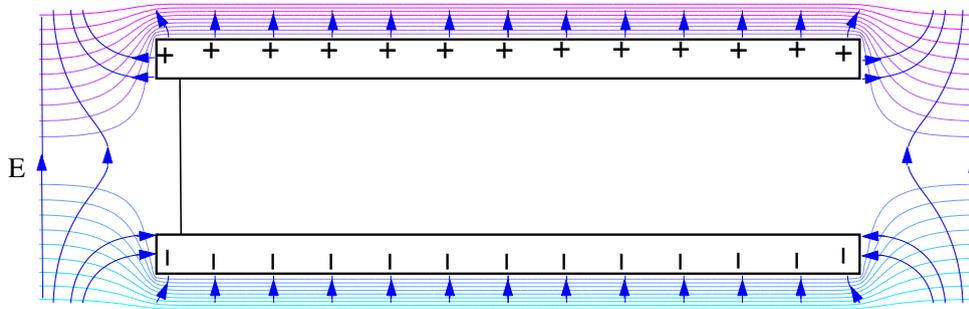


Figura 7.6: Apantallamiento de un campo electrostático uniforme (vertical) por parte de un sistema de dos láminas conductoras unidas mediante un hilo. Se indican las líneas equipotenciales y las líneas del campo total \vec{E} . Para mayor claridad, la figura se muestra con una relación de ejes 1:5.

7.2.3. Conductor conectado a tierra

Para terminar esta sección, introduciremos el concepto de *tierra*. La idea básica es que se trata de una reserva inagotable de carga, a la que podemos conectar cualquier sistema, del que retirará o al que suministrará las cargas necesarias para que el conjunto (sistema + tierra) se mantenga a potencial **nulo** (osea, al valor de referencia que corresponde al creado por cargas muy alejadas, con las que la interacción es despreciable).

A nivel teórico, podemos identificar la tierra como un conductor de tamaño infinito, de modo que, asociada a las variaciones de carga, la variación de su potencial es prácticamente nula. Por ejemplo, si suponemos que es una esfera de radio enorme (partiendo de la ecuación 7.2) tenemos que

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 a} \rightarrow 0 \quad \text{ya que} \quad a \rightarrow \infty$$

En la práctica, los instrumentos e instalaciones eléctricas se conectan a tierra mediante una varilla clavada en el suelo en el exterior del edificio.

Por lo que se refiere a los problemas con conductores, la idea básica es que todo aquello que se conecte a tierra estará a potencial 0, sin perjuicio de que para ello deba tomar o ceder carga hasta un cierto valor *no necesariamente*

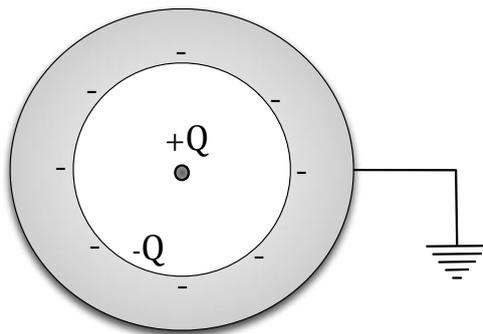


Figura 7.7: Conductor con una cavidad, conectado a tierra y al que se ha colocado una carga en su interior.

nulo. Como ejemplo, véase la figura 7.7 en la cual el conductor externo está conectado a tierra. Nótese que en este caso el exterior queda “apantallado” de la presencia de la carga $+Q$.

7.3. Capacidad. Concepto de condensador

Como hemos visto, cuando se establece el equilibrio electrostático en una región del espacio en presencia de conductores cargados, las cargas se distribuyen en las superficies de estos, de modo que $\vec{\mathcal{E}}$ se anula en su interior y surge perpendicularmente a sus superficies hacia el exterior.

En general, dado un sistema de conductores, el valor de $\vec{\mathcal{E}}$ (y equivalentemente el de \mathcal{V}) está determinado por los valores de sus cargas totales: Q_1, Q_2, \dots, Q_n y sus formas y posiciones relativas. En otras palabras, la distribución precisa de las cargas en la configuración de equilibrio vendrá determinada por los valores de éstas y por factores geométricos. Estos factores pueden determinarse “a priori” para cada sistema de conductores. Veámoslo en algún caso sencillo.

Ejemplo: para una esfera conductora cargada de radio a sabemos que su potencial viene dado por la expresión

$$\mathcal{V} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a},$$

de modo que el coeficiente geométrico que determina \mathcal{V} a partir de Q es $1/(4\pi\epsilon_0 a)$. Se le denomina *coeficiente de potencial* P , y establece la relación $\mathcal{V} = PQ$. Al coeficiente geométrico que nos da la relación inversa, es decir

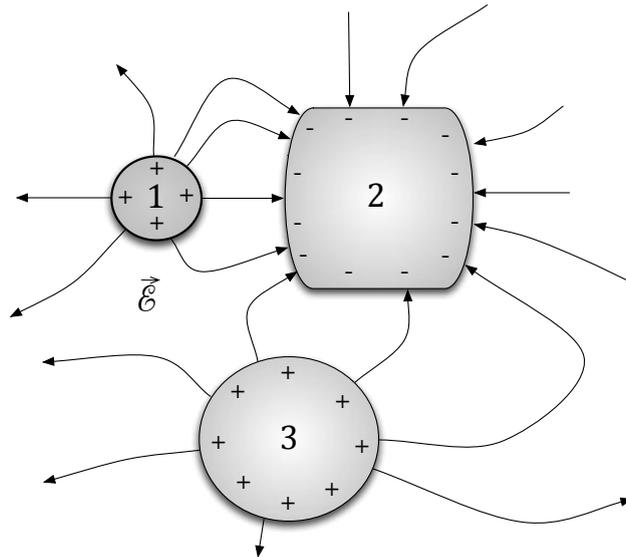


Figura 7.8: Objetos conductores cargados (etiquetados como 1, 2 y 3) en equilibrio electrostático. Se muestran las líneas del campo electrostático de modo esquemático.

$Q = (1/P)\mathcal{V} \equiv C\mathcal{V}$ se le llama capacidad y en este caso sería

$$C = 4\pi\epsilon_0 a$$

Nótese que (dependiendo tan solo de la geometría) C indica la facilidad con que un conductor es capaz de almacenar carga. Si C es grande, Q puede serlo sin que \mathcal{V} crezca demasiado. La capacidad se mide en faradios:

$$\text{Faradio (F)} = \frac{\text{Coulombio}}{\text{Voltio}}$$

Dado que los valores reales que toma C en los sistemas técnicos de interés son muy pequeños en estas unidades, en la práctica se utilizan subdivisiones: μF o nF .

Si admitimos la presencia de más de un conductor, la relación entre las cargas de cada uno de ellos y los potenciales es más compleja. Así, tendremos que el potencial del conductor i -ésimo sería

$$\mathcal{V}_i = \sum_j P_{ij} Q_j \quad \text{o bien} \quad Q_i = \sum_j C_{ij} \mathcal{V}_j$$

donde P_{ij} y C_{ij} dependerán de tamaños, orientación, distancias, ... No obstante, hay un caso particular en el cual esta relación se simplifica notablemente: dos conductores, uno de los cuales está contenido en una cavidad del otro. Como hemos visto en la sección previa, el campo en la región interior, y por

tanto el potencial, es independiente de lo que ocurra en el exterior. Además, las cargas en sus caras enfrentadas serían iguales y opuestas ($+Q$ y $-Q$ por ejemplo).

Se dice que este sistema forma un **condensador**. La diferencia de potencial⁴ entre los dos conductores se relaciona exclusivamente con la carga Q a través de un coeficiente puramente geométrico, de modo que tenemos

$$Q = C\Delta^+\mathcal{V}.$$

Aquí C es la capacidad del condensador. Veámoslo en un caso concreto

Ejemplo 1: el condensador esférico

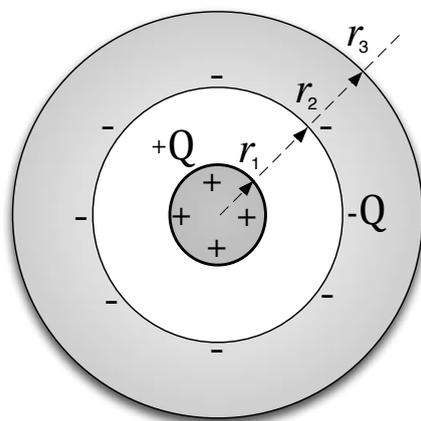


Figura 7.9: Condensador esférico, formado por un conductor interior macizo (radio r_1) y uno exterior hueco con radios r_2 y r_3 .

La diferencia de potencial entre los dos conductores será:

$$\begin{aligned}\Delta^+\mathcal{V} &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &\Downarrow \\ C &= \frac{Q}{\Delta^+\mathcal{V}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\end{aligned}$$

Ejemplo 2: el condensador plano

En la práctica, la región situada entre dos conductores plano-paralelos muy próximos está apantallada del exterior. Como ya se comentó, los efectos de dispersión de las líneas de campo en los extremos serán despreciables si las

⁴ $\Delta^+\mathcal{V}$ se refiere a la diferencia de potencial positiva $\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-$ entre el conductor que posee carga $+Q$ y el que posee $-Q$.

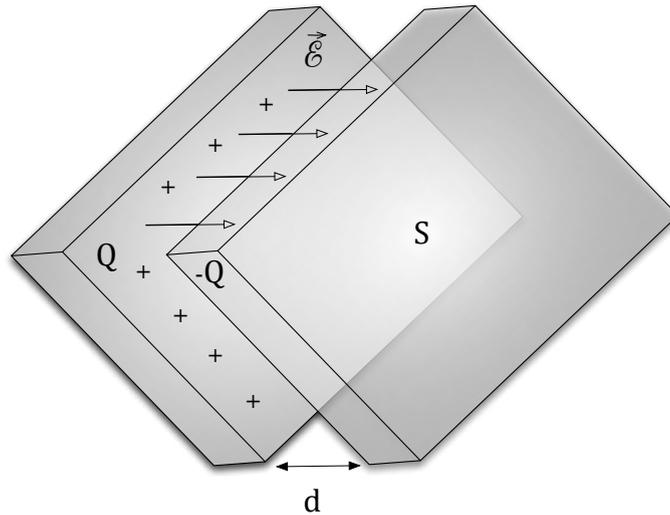


Figura 7.10: Condensador plano, de placas paralelas con sección S y separadas por una distancia d .

láminas están muy próximas. Entonces, podemos suponer que \mathcal{E} es uniforme y decir

$$\Delta^+ \mathcal{V} = \mathcal{E} d = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q d}{\epsilon_0 S}$$

con lo cual, en este caso

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

donde S es el área de las placas.

Usando esta expresión podemos estimar el valor típico de capacidad en un condensador real. Para una superficie de las placas de unos 10 cm^2 y una separación entre placas de 1 mm , se obtiene una capacidad del orden de los picofaradios (pF).

7.4. Densidad de energía electrostática

Basándonos en el caso de un condensador plano y aprovechando la sencillez de las expresiones matemáticas que lo caracterizan, vamos a introducir un nuevo concepto relacionado con la energía que almacena un sistema de cargas. Supongamos que el condensador tiene cargas $+Q$ y $-Q$ en sus placas y que estas se hallan a una diferencia de potencial $\Delta^+ \mathcal{V}$. De acuerdo con lo que se dijo en la sección 6.4 este sistema almacena una energía

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \mathcal{V}_i = \frac{1}{2}(Q\mathcal{V}^+ - Q\mathcal{V}^-) = \frac{1}{2} Q \Delta^+ \mathcal{V} = \frac{1}{2} C \Delta^+ \mathcal{V}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

donde hemos utilizado que todas las cargas sobre la placa positiva están al mismo potencial (\mathcal{V}^+), y las de la placa negativa a \mathcal{V}^- .

Debe notarse que \mathcal{U} puede expresarse de diferentes modos, dependiendo de las variables de interés en cada caso. Por otra parte, existe una opción adicional, que consiste en referirse al campo electrostático entre las placas. Así pues, usando, por ejemplo que $\mathcal{E} = \sigma/\epsilon_0$ y $Q = \sigma S$ tenemos:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 S d$$

es decir

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 V,$$

siendo V el volumen entre las placas.

Puesto que en este sistema, el campo está básicamente confinado en el espacio entre las placas, podemos interpretar que la energía se extiende en forma de una densidad, en todo el volumen en el cual las placas crean un campo, y considerar que existe una densidad de energía $u = \epsilon_0 \mathcal{E}^2/2$ allí donde existe \mathcal{E} . Esta interpretación de la energía electrostática, en términos de los campos que crean las cargas asociadas es, de hecho, general. Como ejemplo, en un sistema muy diferente, el lector la puede verificar para el caso de una esfera (no conductora) con densidad volúmica de carga.⁵

⁵La expresión de la energía electrostática almacenada en una esfera con densidad de carga uniforme (6.7) se puede obtener a partir de la expresión $\mathcal{U} = \int u dV = \int u_{int} dV_{int} + \int u_{ext} dV_{ext}$, que implica integrar por separado en el interior y exterior de la esfera, utilizando las expresiones de \mathcal{E}_{int} y \mathcal{E}_{ext} ya conocidas.

Capítulo 8

ELECTROSTÁTICA EN MATERIALES DIELÉCTRICOS

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de otro tipo de materiales, los dieléctricos, bajo la acción de campos electrostáticos. En los denominados “dieléctricos” las cargas del medio no poseen la libertad de moverse a través del mismo como en el caso de los conductores, pero pueden hacerlo con amplitud suficiente como para producir efectos observables y técnicamente aprovechables. El mecanismo fundamental consiste en la “polarización” a nivel molecular. En cuanto a su distribución de cargas se refiere, en el caso de las moléculas puede favorecerse el desplazamiento interno de las mismas, y eso se traduce en efectos macroscópicos como indica la figura inferior.

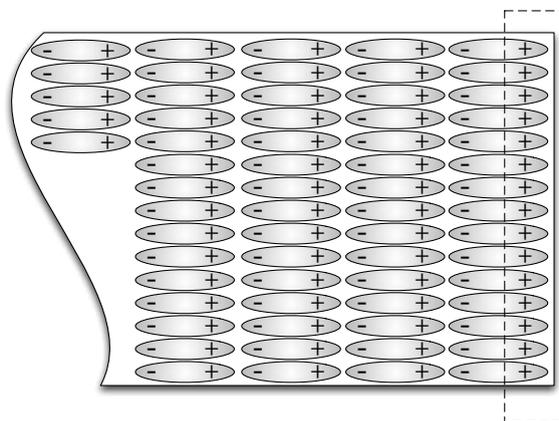


Figura 8.1: Esquema de un material dieléctrico con sus moléculas polarizadas y orientadas. La carga neta observable sólo aparece en la superficie derecha, ya que en cualquier otro punto, la proximidad de cargas positivas y negativas produce una cancelación efectiva.

Así pues, la descripción básica de un dieléctrico considera que éste se compone de moléculas (eléctricamente neutras) que acumulan carga positiva en unas zonas y negativa en otras. Veremos que si las moléculas son móviles (al menos en cuanto a rotaciones) la aplicación de un campo externo provocará un estado colectivo del medio en forma de respuesta electrostática medible. A nivel macroscópico, la acumulación de carga en ciertas zonas por orientación de las moléculas provocará campos eléctricos detectables. Así por ejemplo, el sistema de la figura 8.1 equivale a una lámina de carga positiva en la superficie derecha.

En lo que sigue expondremos una teoría básica para caracterizar estos materiales y sus propiedades. Los principios físicos que se usarán están basados en la imagen de un dieléctrico que se presenta en la figura anterior.

8.1. El dipolo eléctrico

En la línea de los comentarios anteriores, el elemento básico que se va a utilizar para la descripción de los materiales dieléctricos es el **dipolo eléctrico**. De forma idealizada lo vamos a describir como el conjunto de dos cargas puntuales, una positiva $+q$ y otra negativa $-q$, separadas entre sí por una distancia a . Convencionalmente, se define el **vector distancia** \vec{a} como el que tiene origen en $-q$ y extremo en $+q$. Asimismo se define el **vector momento dipolar** \vec{p} :

$$\vec{p} \equiv q \vec{a}$$

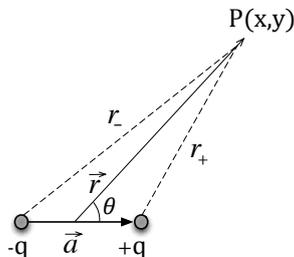


Figura 8.2: Representación de un dipolo eléctrico y de un punto P del espacio que lo rodea válida en cualquier plano definido por \vec{a} y P .

Es evidente que para aquellas propiedades físicas que se investigan en escalas de tamaño “grandes” frente a las dimensiones de la molécula, aproximar a cada una de ellas por un momento dipolar \vec{p}_i resultará una descripción coherente. Bajo esta perspectiva, a continuación presentaremos la caracterización

eléctrica del dipolo. En primer lugar, obtendremos las expresiones del campo y potencial electrostáticos que crea un dipolo en el espacio que lo rodea. Después analizaremos los efectos de un campo o potencial externos sobre un dipolo.

8.1.1. Campo y potencial creados por el dipolo

Respecto a la forma que tienen el campo y potencial electrostáticos creados por un dipolo, para nuestros fines, será suficiente obtener las expresiones aproximadas para distancias grandes ($r \gg a$).

Calculemos el campo electrostático debido a un dipolo en un punto P alejado del mismo (ver Fig. 8.2).

$$\mathcal{V}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r_- - r_+)}{r_- r_+}$$

Si $r \gg a$, se pueden aplicar las aproximaciones $r_- - r_+ \approx a \cos \theta$ y $r_- r_+ \approx r^2$. Entonces:

$$\mathcal{V}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q a \cos \theta}{r^2}$$

$$\mathcal{V}(r, \theta) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La expresión anterior corresponde al potencial dipolar expresado en términos de las coordenadas polares del punto P . Nótese que en cartesianas:

$$\mathcal{V}(x, y) = \frac{p x}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Entonces, si utilizamos la relación $\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla} \mathcal{V}$ obtenemos el campo electrostático creado por el dipolo:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3 \vec{p} \cdot \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

Es importante mencionar que los campos obtenidos decaen más rápidamente que los que corresponden a una carga puntual (en este caso \mathcal{V} decae con el factor r^{-2} y $\vec{\mathcal{E}}$ con r^{-3}). Este hecho se comprende al considerar que a la disminución propia del campo de cada una de las cargas se suma el hecho de que la carga positiva y negativa producen campos que “compiten”. Otro hecho a destacar es que tanto \mathcal{V} como $\vec{\mathcal{E}}$ dependen de \vec{p} , combinación de q y a , pero no de cada parámetro por separado. Dicho de otro modo, si se duplica q pero se reduce a a la mitad, el campo es el mismo. Por tanto, caracterizaremos los dipolos por su momento dipolar asociado, sin necesidad de mencionar sus cargas o distancias entre ellas.

8.1.2. Efectos de un campo externo sobre un dipolo

Supongamos ahora que el dipolo de la figura 8.2 está sometido a un campo externo, digamos $\vec{\mathcal{E}}^E$. Si consideramos al dipolo como un sistema rígido, de modo que el vector \vec{a} (y por tanto \vec{p}) puede trasladarse o rotar, pero no variar su longitud, los posibles movimientos vendrán descritos por la acción de la fuerza y par de fuerzas externos totales. En concreto, tendremos:

- **Fuerza total**

$$\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}^E(\vec{r}_q) - q\vec{\mathcal{E}}^E(\vec{r}_{-q}) = q[\vec{\mathcal{E}}^E(\vec{r}_q) - \vec{\mathcal{E}}^E(\vec{r}_{-q})]$$

donde $\vec{\mathcal{E}}^E(\vec{r}_q)$ y $\vec{\mathcal{E}}^E(\vec{r}_{-q})$ representan los valores del campo electrostático externo en las posiciones ocupadas por las cargas positiva y negativa respectivamente. Dichos valores se pueden considerar iguales en la mayoría de las situaciones,¹ por lo que la fuerza total será nula.

- **Par de fuerzas total:** el par de fuerzas sobre el dipolo vendrá dado por la expresión

$$\begin{aligned}\vec{\tau}^E &= \vec{r}_{-q} \times \vec{F}_{-q}^E + \vec{r}_q \times \vec{F}_q^E \\ &= \vec{r}_{-q} \times (-q\vec{\mathcal{E}}^E) + \vec{r}_q \times (q\vec{\mathcal{E}}^E) \\ &= q(\vec{r}_q - \vec{r}_{-q}) \times \vec{\mathcal{E}}^E = \vec{p} \times \vec{\mathcal{E}}^E\end{aligned}\quad (8.1)$$

Esto significa que, sometido a un campo externo, el momento dipolar tenderá a rotar hasta alinearse con éste, de modo que $\vec{\tau}^E = 0$.

De hecho existen dos posiciones de equilibrio: (i) “estable” cuando los vectores sean paralelos, (ii) “inestable” cuando sean antiparalelos, como puede razonarse fácilmente suponiendo pequeños desplazamientos en torno a ellas.

Podemos concluir que el sistema de dipolos que constituye la descripción básica del material dieléctrico, responderá a un campo electrostático tendiendo a “alinearse” los momentos según las líneas de ese campo, puesto que esa es la disposición de equilibrio estable.

¹En el material dieléctrico hablaremos del campo $\vec{\mathcal{E}}_i^E$ en la posición ocupada por el dipolo \vec{p}_i . $\vec{\mathcal{E}}_i^E$ está creado por (i) fuentes lejanas, que producirán valores del campo prácticamente idénticos en todo el dipolo y (ii) por las moléculas próximas, que en la mayoría de las simetrías posibles también crean el mismo campo sobre la carga positiva o negativa.

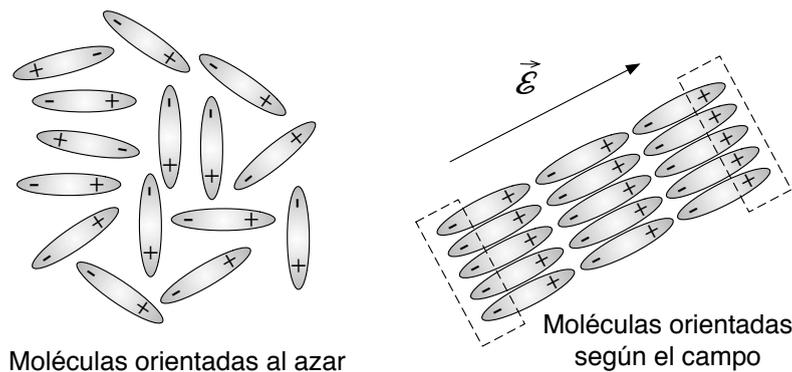


Figura 8.3: Representación de un conjunto de moléculas polares (dipolos), bajo la acción de un campo electrostático.

Según podemos observar en la figura 8.3, las moléculas del medio dieléctrico se orientan hasta que se cumpla la condición $\vec{p}_i \times \vec{\mathcal{E}}_i^E = 0$, tendiendo a producir una distribución efectiva de carga neta en las caras del material. Puede apreciarse que esta distribución (láminas negativa y positiva resaltadas en la figura) produce un campo electrostático que se opone al que produjo la polarización. En los apartados siguientes introduciremos algunos conceptos básicos relativos al análisis cuantitativo del campo producido por el material. Como veremos, la respuesta dieléctrica es de gran interés en aplicaciones tecnológicas.

8.2. Polarización de un dieléctrico

En las figuras anteriores hemos representado el dieléctrico mediante una serie de momentos dipolares. A modo ilustrativo y por claridad, en las figuras aparece únicamente un pequeño conjunto de ellos, pero hemos de pensar que en un medio real (sólido o líquido convencionales) puede haber del orden de 10^{20} moléculas en 1 mm^3 de material. Esto significa que en una situación típica en la que pensemos en aplicaciones macroscópicas, podremos tratar las propiedades del medio mediante variables continuas. Concretamente, podremos asumir que el “diferencial de volumen” (elemento infinitesimal comparado con el tamaño de la muestra dieléctrica con la que trabajemos) contiene, no obstante, un número enorme de moléculas y así definir un “momento dipolar efectivo por unidad de volumen” como

$$\vec{\mathcal{P}} = \sum_{i \in dV} \vec{p}_i / dV \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}$$

donde el índice i representa a la colección de moléculas contenidas en dV . Dicho de otro modo, el momento dipolar total que corresponde a las moléculas contenidas en el volumen dV sería $d\vec{p} = \vec{\mathcal{P}} dV$.

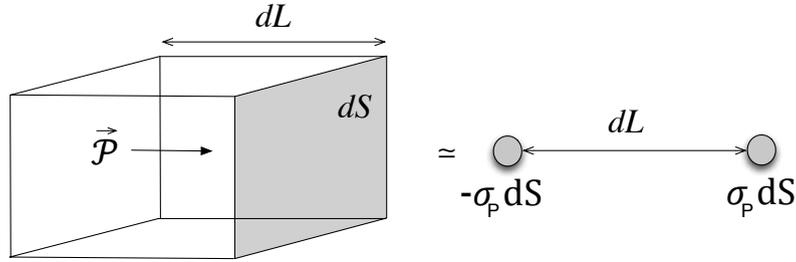


Figura 8.4: Equivalencia de un diferencial de momento dipolar volúmico y un dipolo ideal correspondiente.

Vamos a ver que el concepto de momento dipolar por unidad de volumen resulta muy importante. De hecho, existe una relación directa entre el valor de $\vec{\mathcal{P}}$ y las láminas (densidades superficiales) de carga que representan la respuesta del dieléctrico. Esto se indica en la figura 8.4. Nótese que el momento dipolar del elemento de volumen considerado se expresaría como $\vec{\mathcal{P}} vol = \vec{\mathcal{P}} dS dL$, pero de igual modo, en términos de las cargas en sus caras:

$$\mathcal{P} vol = dQ dL = \sigma_P dS dL = \sigma_P vol,$$

de manera que la densidad de carga efectiva en las superficies de un dieléctrico, σ_P , coincide con el valor de la polarización:

$$\sigma_P = \mathcal{P} \quad (8.2)$$

Esta expresión se ha obtenido utilizando un paralelepípedo con uno de sus ejes a lo largo del vector $\vec{\mathcal{P}}$ y debe generalizarse para otras configuraciones. De hecho, utilizando la figura 8.5, es fácil deducir que si $\vec{\mathcal{P}}$ no es perpendicular a la superficie, la expresión a utilizar sería:

$$\sigma_P = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{u} \quad (8.3)$$

con \hat{u} un vector unitario perpendicular a la superficie ².

²Naturalmente, la ecuación 8.3 incluye a la ecuación 8.2 como caso particular ($\vec{\mathcal{P}} \parallel \hat{u}$).

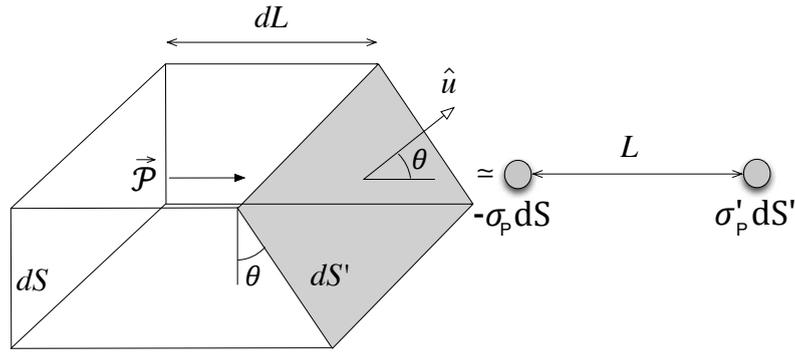


Figura 8.5: Equivalencia de un diferencial de momento dipolar volúmico y un dipolo ideal correspondiente. Nótese que el área de la cara oblicua es $dS' = dS/\cos\theta$.

Existe un método alternativo y físicamente instructivo para demostrar la equivalencia entre el medio dieléctrico y las densidades de carga σ_P . Partiendo de la expresión 8.2 del potencial dipolar e integrando el volumen del material. Esto es un cálculo complejo en un caso general. Aquí lo realizamos para una geometría sencilla, indicada en la figura 8.6.

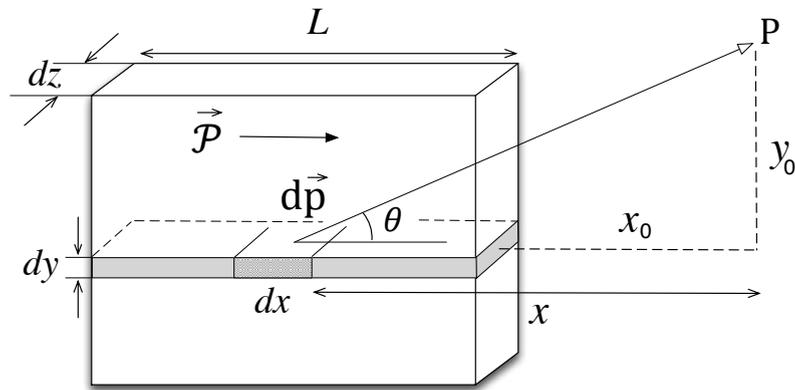


Figura 8.6: Esquema de cálculo del potencial creado por un medio eléctricamente polarizado.

Fijémonos en el elemento de volumen $dx dy dz$ señalado en el esquema. Creará un potencial electrostático en P dado por:

$$dV = \frac{dp \cos\theta}{4 \pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\mathcal{P} \cos\theta dx dy dz}{4 \pi \epsilon_0 r^2}$$

Veamos el potencial debido a la franja de longitud L de la que forma parte:

$$\int_{x_0}^{x_0+L} dV = \frac{\mathcal{P} dy dz}{4 \pi \epsilon_0} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{\cos\theta}{r^2} dx = \frac{\mathcal{P} dy dz}{4 \pi \epsilon_0} \int_{x_0}^{x_0+L} \frac{x}{(x^2 + y_0^2)^{3/2}} dx$$

$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{P} dy dz}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_0 + L)^2 + y_0^2}} \right)$$

resultado que puede interpretarse del modo siguiente: el potencial equivale al creado por un diferencial de carga $\mathcal{P} dy dz$ colocado en el extremo derecho y otro de valor $-\mathcal{P} dy dz$ en el izquierdo. Dicho de otro modo, es como si en los extremos de la franja señalada existiera una distribución de carga superficial de densidad $\sigma_P = \mathcal{P}$.

8.3. Ley de Gauss en dieléctricos, vector $\vec{\mathcal{D}}$

De acuerdo con el apartado anterior, podemos decir que el campo y potencial producidos por un material polarizado uniformemente son los mismos que crearía una distribución de cargas superficiales con densidad $\sigma_P = \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{u}$.³

A continuación presentaremos un resultado muy útil para trabajar con materiales dieléctricos. Existe una expresión de la ley de Gauss que permite incorporar el efecto de las cargas asociadas a la polarización (σ_P) en un modo sencillo y con una clara interpretación física.

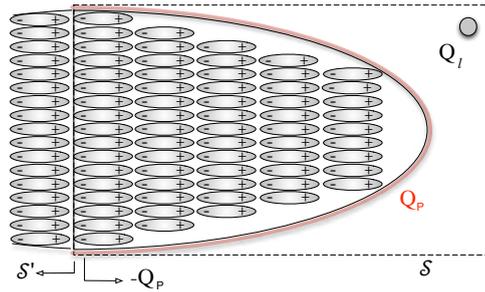


Figura 8.7: Aplicación del Teorema de Gauss en un problema con dieléctricos. La superficie \mathcal{S} encierra parte del dieléctrico, intersectando con este en la superficie \mathcal{S}' .

Partiremos del esquema de la figura 8.7. Aplicando el Teorema de Gauss sobre la superficie \mathcal{S} obtenemos:

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\mathcal{S}} = \frac{Q}{\epsilon_0} \equiv \frac{Q_l + Q_p}{\epsilon_0}$$

³En el caso de tener $\vec{\mathcal{P}}$ no uniforme dentro del material deberíamos considerar cargas de volumen en su interior. Esto requiere un tratamiento más avanzado que el que daremos en estos apuntes.

donde hemos introducido el concepto de cargas de polarización (en superficie) visto antes. Además, para que no exista confusión utilizaremos Q_l para las cargas (libres) que no forman parte de los dipolos del dieléctrico. Se trata de las cargas que pueden “moverse” por hallarse en materiales conductores, en el vacío alrededor del dieléctrico o incluso de las que puedan existir atrapadas en el interior de éste, pero no tienen origen en la polarización de sus moléculas.

Siguiendo con la expresión anterior, debe notarse que Q_p (carga superficial de polarización) se puede calcular en términos del vector de polarización dentro del medio:⁴

$$Q_p = \int_{S'} \vec{\mathcal{P}} \cdot \hat{u} dS = - \int_{S'} \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = - \oint_S \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S}$$

Entonces, la ley de Gauss queda

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}) \cdot d\vec{S} = Q_l$$

Lo interpretamos del siguiente modo: así como el flujo del campo electrostático depende de la carga total en el problema (libre + polarizada), existe un campo, $\epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}$, que en adelante llamaremos $\vec{\mathcal{D}}$, cuyo flujo sólo depende de las cargas libres encerradas. Se le denomina **vector desplazamiento**.

Así pues, en los problemas que incluyen dieléctricos suele utilizarse la ley de Gauss en el modo:

$$\oint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{S} = Q_l \quad (8.4)$$

siendo Q_l la carga libre encerrada en la superficie S .

Para entender la utilidad de este concepto, pensemos en un problema con cargas libres y dieléctricos. Las primeras actuarán produciendo un campo que induce la polarización $\vec{\mathcal{P}}$ y por tanto la aparición de las cargas Q_p . Podríamos proceder calculando en primer lugar $\vec{\mathcal{D}}$, ya que habitualmente eso no requiere conocer Q_p . Conocido $\vec{\mathcal{D}}$, y mediante el modelo de material dieléctrico apropiado, podemos obtener el campo total $\vec{\mathcal{E}}$ y finalmente $\vec{\mathcal{P}}$, con lo que se determina la solución. Esquemáticamente:

$$Q_l \longrightarrow \vec{\mathcal{D}} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \longrightarrow \vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{D}} - \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$$

⁴Nótese que, tal como se indica esquemáticamente en la figura 8.7, la condición de neutralidad del dieléctrico implica que la carga de polarización superficial encerrada en la superficie S (Q_p) es justamente opuesta al valor de la carga sobre la parte de la superficie S que intersecta el dieléctrico, es decir S' . Ésta se puede obtener en términos de $\vec{\mathcal{D}}$ usando los argumentos de la sección 8.2.

8.4. Tipos de materiales dieléctricos

Hasta el momento hemos visto cómo la polarización $\vec{\mathcal{P}}$ permite expresar de modo sencillo la respuesta del material dieléctrico, es decir, caracterizar el campo y potencial debido a la presencia de las moléculas polares. No obstante, queda abierta una cuestión muy importante que es relacionar $\vec{\mathcal{P}}$ con el material específico con el que se trabaja. En particular, es importante saber si la polarización del medio es una propiedad dada que podemos conocer *a priori* o, por el contrario, ésta depende de las condiciones de trabajo. En realidad, se trata de una cuestión compleja que vamos a tratar en un modo simplificado.

Hablaremos de modo genérico de dos tipos de materiales dieléctricos:

- Materiales con polarización permanente (electretos).

En éstos, la polarización existe y se puede considerar constante con independencia de la acción de campos externos. No son el caso más frecuente en las aplicaciones. Puesto que el vector polarización será constante (digamos $\vec{\mathcal{P}}_0$) para resolver problemas con medios de este tipo basta obtener las correspondientes densidades de carga $\sigma_P = \vec{\mathcal{P}}_0 \cdot \hat{u}$ y resolver el problema electrostático asociado. Por ejemplo, en el caso de un cilindro con $\vec{\mathcal{P}}_0$ a lo largo de su eje, sustituiríamos el dieléctrico por dos discos con densidades de carga $+\vec{\mathcal{P}}_0$ y $-\vec{\mathcal{P}}_0$ separados por una distancia L .

- Materiales polarizables.

Existe una gran variedad de dieléctricos no permanentes, cuya polarización $\vec{\mathcal{P}}$ puede depender de forma compleja de los campos polarizantes. Aquí nos limitaremos al caso más sencillo, los denominados i.h.l. (isótropos, homogéneos y lineales), para los cuales la polarización es sencillamente proporcional al campo de excitación. Esto se expresa:

$$\vec{\mathcal{P}} = \chi_e \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}}$$

siendo χ_e una constante de proporcionalidad que llamaremos **susceptibilidad dieléctrica** y será propia de cada material.

Es importante notar que el campo “polarizante” es el campo total $\vec{\mathcal{E}}$. Esto significa que cuando las moléculas se polarizan lo hacen tanto bajo la acción externa, como bajo su propia acción. Matemáticamente, eso significa que existe una dependencia $\chi_e(\vec{\mathcal{E}})$.

En los medios i.h.l. la situación se simplifica notablemente. Son aquellos en los que χ_e es una constante. Entonces:

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_0 \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{\mathcal{E}} \equiv \epsilon \vec{\mathcal{E}}$$

Aquí hemos definido la permitividad del medio ϵ , que no es sino la del vacío ϵ_0 multiplicada por la denominada permitividad relativa o constante dieléctrica:

$$\epsilon_r \equiv \kappa_e \equiv 1 + \chi_e$$

8.5. Condensadores con dieléctrico

Como ya se dijo, los materiales dieléctricos son de gran utilidad en las aplicaciones tecnológicas. El caso más relevante es su utilización para aumentar la capacidad en los condensadores como veremos a continuación. Cuando se introduce un material dieléctrico entre las placas de un condensador, el efecto básico es multiplicar su capacidad C por la permitividad relativa del medio.

En el caso de los condensadores electrolíticos, esto supone aproximadamente un factor 1000, por lo que en los de dimensiones típicas (7.3 ejemplo 2), las capacidades pasan del rango de los nF a los μF .

Ejemplo: Cálculo de la capacidad del sistema de la figura, en el cual el dieléctrico que se inserta en el condensador es un medio i.h.l. de permitividad relativa ϵ_r .

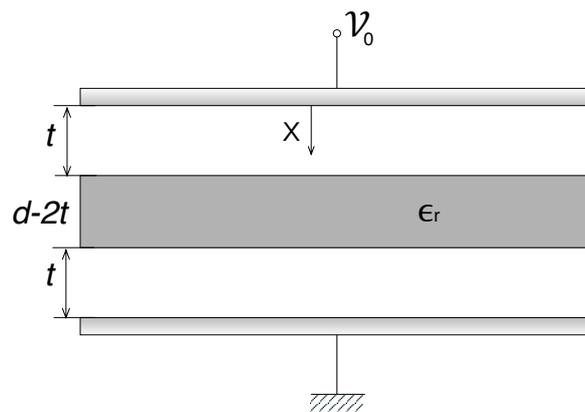


Figura 8.8: Condensador plano de placas paralelas (de área S entre las que se coloca una lámina dieléctrica).

Digamos en primer lugar que la capacidad se define en términos de la carga en las placas (Q_l) y la diferencia de potencial entre ellas (\mathcal{V}_0 en este caso). Por otra parte, no debemos olvidar que \mathcal{V}_0 ha de calcularse en términos del campo electrostático:

$$\mathcal{V}_0 = \int_{x=0}^{x=d} \mathcal{E} dx$$

Expresaremos \mathcal{E} en función de \mathcal{D} y éste en función de Q_l ⁵. Nótese que hay que separar la integral en dos partes, correspondiendo a las dos zonas que se definen en el interior del condensador:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= 2 \int_0^t \frac{\mathcal{D}}{\epsilon_0} dx + \int_t^{d-t} \frac{\mathcal{D}}{\epsilon} dx \\ &= 2 \int_0^t \frac{Q_l/S}{\epsilon_0} dx + \int_t^{d-t} \frac{Q_l/S}{\epsilon} dx \\ &= \left(\frac{2t}{\epsilon_0 S} + \frac{d-2t}{\epsilon_r \epsilon_0 S} \right) Q_l \end{aligned} \quad (8.5)$$

es decir:

$$\frac{1}{C} = \frac{2t}{\epsilon_0 S} + \frac{d-2t}{\epsilon S},$$

expresión que permite dar algunas conclusiones interesantes:

(i) si considerásemos que $t = 0$, es decir, el dieléctrico llena completamente el espacio entre placas, tendríamos $C = \epsilon S/d$. Este resultado justifica la conocida regla de trabajo que consiste en reemplazar $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ en las expresiones de campos en el vacío. No obstante, se entiende que esta idea ha de manejarse con cuidado, pues requiere que el dieléctrico llene todo el espacio en el que existe campo electrostático para el problema en cuestión. De no ocurrir así, el vector desplazamiento y su teorema de Gauss proporcionan el método general correcto.

(ii) La solución de este problema podría haberse obtenido utilizando el equivalente de dos condensadores en serie, uno de anchura $2t$ vacío, y uno de anchura $d - 2t$ “lleno” de dieléctrico.

⁵Esto se puede hacer por aplicación de la ley de Gauss para \mathcal{D} (Eq.8.4), que resulta análoga a la que permite obtener \mathcal{E} dentro de un condensador sin dieléctrico. En este caso, da lugar a $\mathcal{D} = Q_l/S = \sigma_l$

Parte IV

CORRIENTE ELÉCTRICA

INTRODUCCIÓN

En el capítulo 7 hemos estudiado las propiedades de equilibrio electrostático en materiales conductores. Asumiendo que dicho estado se alcanza y sin más que aplicar las propiedades de la interacción electrostática, podemos deducir cómo se distribuyen las cargas, los campos y potenciales generados, etc. Por contra, en los capítulos que siguen, presentaremos la descripción teórica de diferentes aspectos relacionados con el movimiento de cargas en un conductor. Introduciremos algunas magnitudes y modelos físicos que permitirán representar la dinámica de las cargas desde el nivel microscópico (partículas cargadas en movimiento dentro de un material) hasta el macroscópico (circuitos eléctricos). En este último caso hablaremos de modelos de “parámetros concentrados” en el sentido siguiente: en un circuito, por ejemplo, una resistencia se describe como un elemento entre cuyos extremos aparece una caída de tensión proporcional al valor de ésta (ley de Ohm: $\Delta^+ \mathcal{V} = I R$). Esta relación puede entenderse como el resultado de promediar el movimiento de las cargas sometidas a campos eléctricos dentro del material. Sin embargo, conociendo el valor de R podemos prescindir de dicho detalle para resolver nuestro circuito.

Capítulo 9

CORRIENTE ELÉCTRICA. LEY DE OHM

De acuerdo con la conocida ley de Ohm, la corriente eléctrica que fluye a lo largo de un cable conductor es proporcional a la caída de tensión ($\Delta^+ \mathcal{V} = I R$)¹ siendo R una propiedad del cable pero independiente de los valores de I y de $\Delta^+ \mathcal{V}$. En este capítulo vamos a presentar un modelo sencillo que permite deducir esta expresión, así como relacionarla tanto con las propiedades extrínsecas del conductor (forma y dimensiones) como con sus propiedades intrínsecas (de los portadores de carga y su interacción con el medio). La exposición de estos conceptos requiere conectar apropiadamente las variables macroscópicas ($\Delta^+ \mathcal{V}$ e I) con los objetos microscópicos subyacentes (portadores de carga, sus trayectorias, las fuerzas que actúan) por lo que comenzaremos definiendo algunas magnitudes físicas relacionadas con el movimiento de las cargas y analizando sus propiedades.

Continuaremos con la deducción de la forma macroscópica de la ley de Ohm a partir de principios básicos, y concluiremos el tema con el estudio de las corrientes que intervienen en la formación del estado de equilibrio electrostático. Como ya se anunció en el capítulo 7, las propiedades allí estudiadas se refieren únicamente al estado final que se alcanza cuando a un conductor se le aplica un campo eléctrico. En este capítulo describiremos la dinámica que conduce al equilibrio.

¹Del mismo modo que se hizo en el capítulo 7 para el caso de los condensadores, la notación $\Delta^+ \mathcal{V}$ se introduce en el siguiente sentido. Nos referimos a la “caída de tensión” $\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-$, por lo tanto con relación al campo eléctrico $\Delta^+ \mathcal{V} = \int_+^- \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell}$. Es decir, no se trata del “incremento” en el sentido literal, sino del valor definido positivo.

9.1. Corriente y densidad de corriente

El concepto elemental de corriente eléctrica aplica al caso en el cual el nivel de descripción necesario no requiere especificar las dimensiones transversales del conductor. Esto significa que se pueden ignorar la forma y el tamaño de su sección y tratarlo como un sistema unidimensional.

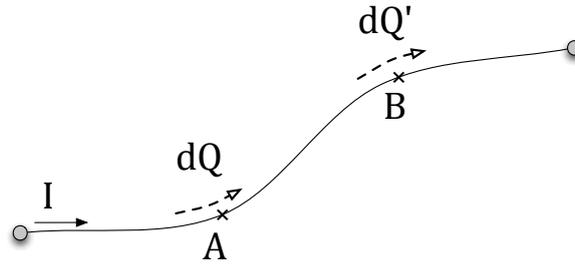


Figura 9.1: Esquema del transporte de corriente unidimensional.

Como se indica en el esquema (Fig. 9.1) se define **intensidad de corriente** como la cantidad de carga que atraviesa un cierto punto del hilo en la unidad de tiempo:

$$I \equiv \frac{dQ}{dt}$$

La intensidad de corriente se mide en *Culombios/segundo* \equiv *Amperios*.

Diremos que el transporte de corriente es “estacionario” si en cada instante de tiempo se tiene que $dQ = dQ'$ para cualquier combinación de puntos A, B sobre el hilo. En caso contrario ($dQ \neq dQ'$) es evidente que se produce acumulación (o disminución) de carga entre aquellos puntos para los cuales no coinciden la cantidad entrante y saliente.²

Supongamos ahora que no puede ignorarse la dimensión transversal del conductor, pero que no obstante tiene un perfil que se puede considerar plano. Estaremos en un sistema bidimensional (Fig. 9.2) y la definición del movimiento de las cargas requiere el uso de una magnitud vectorial. Nótese que las cargas podrían moverse a lo largo de trayectorias muy variadas dentro del conductor. Definiremos la **densidad de corriente superficial**, \vec{K} , como un vector que en cada punto del conductor apunta en la dirección que allí tiene el movimiento

²En la gran mayoría de los casos prácticos con circuitos eléctricos pueden suponerse condiciones estacionarias. Como veremos al final de este capítulo, los tiempos característicos de establecimiento del régimen estacionario son despreciables salvo en el caso de trabajar a muy altas frecuencias.

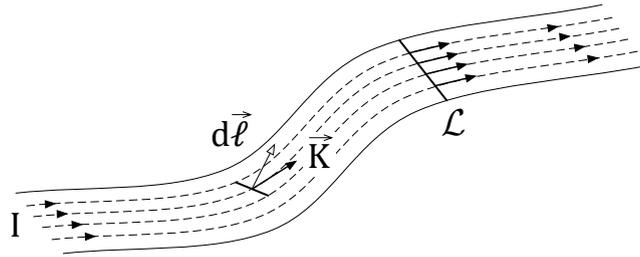


Figura 9.2: Esquema del transporte de corriente bidimensional.

de cargas y cuyo módulo nos indica la cantidad de carga q que atraviesa una línea imaginaria en ese lugar del conductor:

$$dI(\vec{r}) \equiv \vec{K}(\vec{r}) \cdot d\vec{l}$$

Hemos definido el vector $d\vec{l}$ como aquel que apunta perpendicularmente a la línea en cuestión y tiene como módulo su longitud. Evidentemente, el flujo de cargas es máximo si $\vec{K} \parallel d\vec{l}$. Obviamente \vec{K} se mide en amperios/metro, e integrado en una línea que atraviesa el conductor de lado a lado nos da la intensidad de corriente total (ver figura):

$$I = \int_{\mathcal{L}} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

Por último, definiremos el concepto de **densidad de corriente volúmica**. En este caso, el objeto de estudio requiere considerar la sección transversal del conductor, a través del cual los portadores de carga recorrerán trayectorias que serán tridimensionales. La figura 9.3 muestra los detalles y magnitudes físicas a considerar.

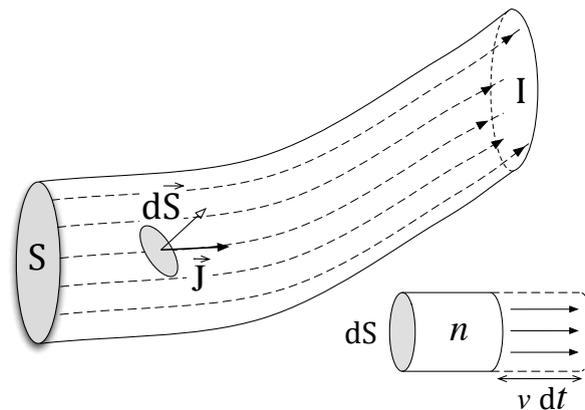


Figura 9.3: Esquema del transporte de corriente tridimensional.

La densidad de corriente volúmica \vec{J} es un campo vectorial que en cada punto indica el sentido del movimiento de las cargas, y cuyo módulo informa sobre la cantidad de corriente que atraviesa el elemento de área:

$$dI = \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

y si $\vec{J} \parallel d\vec{S}$:

$$J = \frac{dI}{dS}$$

La corriente total que atraviesa el conductor será obviamente

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Digamos para concluir esta sección que el concepto de \vec{J} permite conectar con las propiedades microscópicas. Así pues, si consideramos una situación en la cual un conductor de forma cilíndrica posee n portadores de carga por unidad de volumen, cada uno con carga q y que se mueven todos con velocidad uniforme v paralela al eje del cilindro (detalle inferior de la Fig. 9.3), se tiene:

$$J = \frac{dI}{dS} = \frac{dQ/dt}{dS} = \frac{n q v dt dS/dt}{dS} = n q v$$

relación que usaremos más adelante.

Para obtenerla, hemos utilizado el hecho de que la carga que atraviesa la sección al transcurrir dt es aquella que está situada en el cilindro de longitud $v dt$ y sección dS .

9.2. Ley de Ohm. Resistencia

Una vez introducidas las magnitudes físicas que nos permiten conectar las propiedades de movimiento de las partículas con las variables medibles, es decir: $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$ y $\vec{J} = nq\vec{v}$, podemos plantear el esquema que da lugar a la ley de Ohm. Vamos a ver que, mediante argumentos de tipo mecánico (en realidad *termodinámico*) resulta posible justificar la relación lineal entre $\Delta^+\mathcal{V}$ e I . Asumiremos que todos los portadores de carga (electrones en un metal) se pueden describir como partículas clásicas utilizando las leyes de Newton. Por otra parte, las interacciones básicas serán las de dichos electrones sometidos

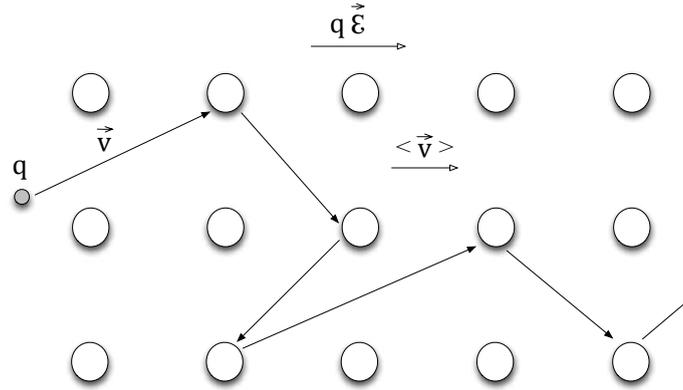


Figura 9.4: Esquema de las colisiones experimentadas por los portadores de carga dentro de un medio conductor, que avanzan a velocidad promedio $\langle \vec{v} \rangle$.

a un campo eléctrico aplicado y las que tienen con los iones del metal. Esta últimas se traducen en procesos de colisión que los electrones sufren de forma aleatoria en su avance a lo largo del medio.³ Entonces podemos decir:

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} \Rightarrow \frac{-e \vec{\mathcal{E}}}{m} = \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\tau} = \frac{\vec{J}}{-n e \tau},$$

con lo cual

$$\vec{J} = \frac{n e^2 \tau}{m} \vec{\mathcal{E}} \equiv \sigma \vec{\mathcal{E}} \quad (9.1)$$

En esta ecuación hemos utilizado $q = -e$ (carga del electrón) e introducido el tiempo medio entre colisiones τ , para estimar la aceleración en función de la velocidad media de los electrones. La magnitud σ refleja las propiedades microscópicas del medio y es el enlace con las leyes macroscópicas. Se denomina *conductividad* y, a través de los parámetros propios de cada metal, permite comprender fenómenos como la variación de la conductividad con la temperatura.⁴ Por razones prácticas, en muchas ocasiones se utiliza la magnitud inversa, $\rho = 1/\sigma$ (resistividad).

Nótese que, en el razonamiento anterior, se ha eliminado la velocidad inicial con la que emerge cada electrón tras la colisión, reemplazando por un valor medio para todo el colectivo

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_o}{\tau} \rightarrow \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\tau}$$

³Esta interpretación básica de los fenómenos físicos relacionados con el movimiento de la colectividad de electrones constituyen lo que se denomina *modelo de Drude*.

⁴Téngase en cuenta, por ejemplo, que al aumentar la temperatura lo hace la amplitud de las vibraciones de la red de iones y consecuentemente las colisiones de los electrones serán más frecuentes, disminuyendo el tiempo entre ellas τ y por lo tanto σ .

Esto significa que hay un efecto “promediado” introducido por el enorme número de procesos de colisión que ocurren, dando lugar al valor $\langle \vec{v} \rangle$ que apuntará en la dirección de $\vec{\mathcal{E}}$.

La ecuación 9.1 es la forma microscópica de la ley de Ohm. Vamos a ver que mediante su integración sobre la región que ocupa el conductor (Figura 9.5) obtendremos su relación con la ley macroscópica. Lo haremos mediante un ejemplo.

Ejemplo: transporte de corriente a lo largo de un conductor cilíndrico de conductividad σ (Figura 9.5).

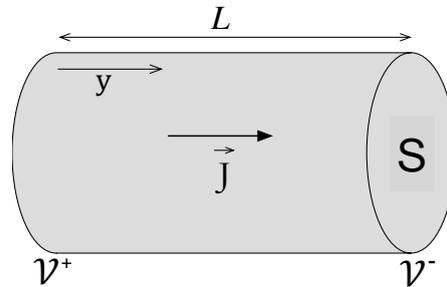


Figura 9.5: Esquema de cálculo de la caída de tensión cuando una corriente atraviesa un conductor cilíndrico.

La “caída de tensión” ($\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-$) que tiene lugar cuando la corriente atraviesa el conductor se puede calcular por integración del campo eléctrico a lo largo del mismo:

$$\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^- = \int_0^L \mathcal{E} dy = \int_0^L \frac{J}{\sigma} dy = \int_0^L \frac{I/S}{\sigma} dy$$

↓

$$\Delta^+ \mathcal{V} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} I = \rho \frac{L}{S} I$$

↓

$$\Delta^+ \mathcal{V} \equiv RI \tag{9.2}$$

En definitiva, queda demostrado que la forma lineal de la ley de Ohm macroscópica [Eq.(9.2)] se deduce de la expresión microscópica [Eq.(9.1)], estableciéndose la relación entre la propiedad medible R y la propiedad del material

ρ , a través de la geometría del sistema (L, S en este caso). En el sistema internacional, las unidades para esta magnitud quedan establecidas por las del potencial y la intensidad de corriente: *Ohmio* (Ω) = *Voltio/Amperio*.

9.3. Transición al equilibrio electrostático

9.3.1. Ecuación de continuidad

Vamos a presentar una expresión que resulta muy útil para resolver algunos problemas de corriente eléctrica, especialmente en lo que se refiere al establecimiento del régimen estacionario. Se trata de la denominada “ecuación de continuidad”, que recoge el hecho de que la carga eléctrica se conserva. Básicamente es la expresión matemática del siguiente principio: *si la carga eléctrica contenida en un volumen aumenta o disminuye lo hace mediante su flujo a través de la superficie que lo rodea*. En términos de las magnitudes definidas antes y según el esquema de la figura 9.6 esto es

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (9.3)$$

Nótese que el signo negativo aparece porque el vector superficie se define

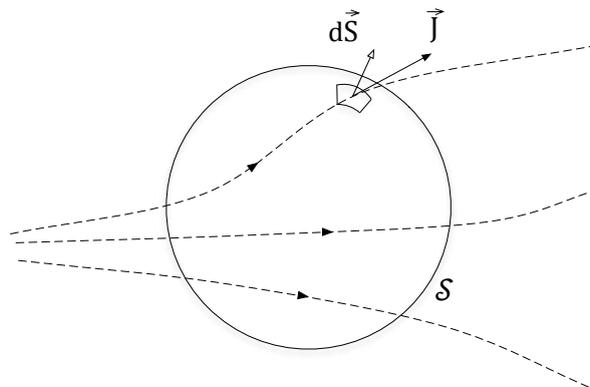


Figura 9.6: Esquema del flujo de corriente tridimensional sobre una superficie cerrada.

hacia fuera de la superficie. Entonces, un flujo positivo de carga corresponde a una disminución de la misma dentro del volumen. Digamos también que la ecuación (9.3) establece una condición de contorno para los problemas con corriente estacionaria:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

9.3.2. Transitorio en una esfera conductora

Como aplicación de la ecuación de continuidad, vamos a realizar el cálculo que permite evaluar el tiempo que transcurre en el establecimiento del equilibrio electrostático. Supondremos que se deposita una cierta cantidad de carga Q en el centro de una esfera conductora y veremos cómo evoluciona hacia la superficie.

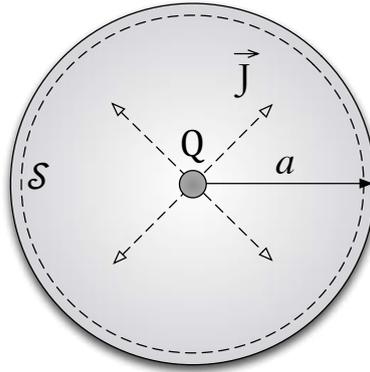


Figura 9.7: Dinámica de las cargas colocadas en el centro de una esfera conductora hacia la configuración de equilibrio electrostático.

Según la ecuación de continuidad, el ritmo de variación de la carga contenida en la superficie \mathcal{S} (cuyo radio es ligeramente menor que el de la esfera) es:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Utilizando la ley de Ohm

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_{\mathcal{S}} \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

y si suponemos que la conductividad es uniforme

$$\frac{dQ}{dt} = -\sigma \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\sigma \frac{Q}{\epsilon_0},$$

donde hemos aplicado la ley de Gauss, por lo que Q representa la carga interior a \mathcal{S} (la que todavía no ha alcanzado la superficie). En definitiva:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{\rho\epsilon_0} \Rightarrow Q = Q_0 e^{-t/(\rho\epsilon_0)}$$

Esto significa que la carga que queda en el interior de la esfera disminuye a ritmo exponencial. Lo hace con una constante de tiempo $\tau = \rho\epsilon_0$, que un metal típico (como el cobre, y dentro de las limitaciones de nuestro modelo) toma el valor aproximado $\approx 10^{-19} \text{ s}$. Podemos, por tanto, concluir que el equilibrio electrostático se establece de modo prácticamente instantáneo.

9.4. Visión global sobre la conducción eléctrica

En el capítulo 7 y en el presente se han tratado diversas propiedades de los materiales conductores. Bajo la premisa general de que por su naturaleza atómica permiten el movimiento de cargas a escala macroscópica, se desarrolló (i) la teoría de los estados de equilibrio que se alcanzan tras una cierta perturbación (cap.7) y (ii) algunas propiedades de la dinámica de las cargas cuando evolucionan a lo largo del medio (este capítulo). Para concluir nuestra aproximación al problema de la conducción eléctrica, daremos una visión global del problema, tratando de unificar y dar coherencia a los aspectos anteriores. Nos basaremos en la figura 9.8, que muestra un cilindro de material conductor sometido a 2 procesos diferentes.

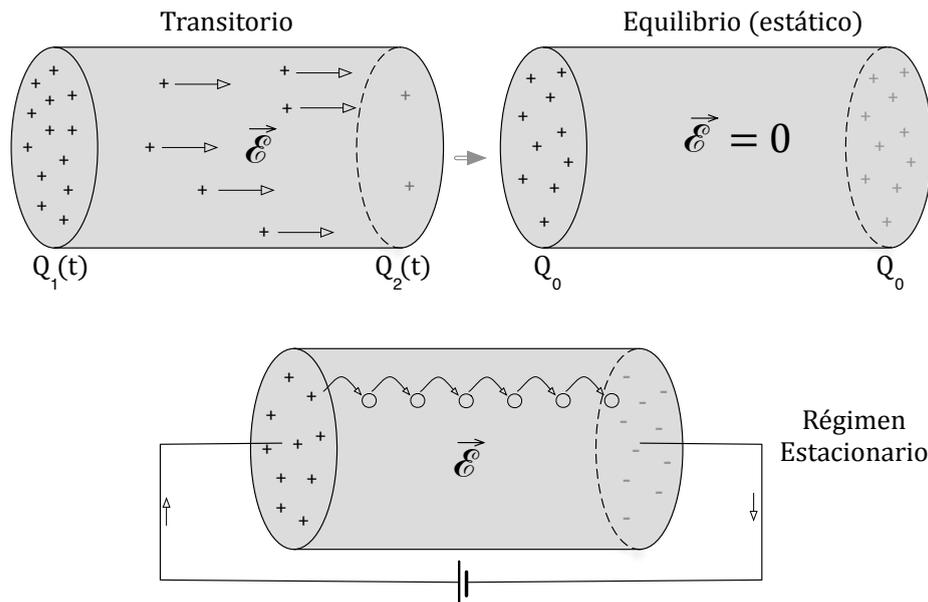


Figura 9.8: Esquema de los diferentes regímenes en relación a la dinámica de cargas en un conductor: transitorio, equilibrio, estacionario.

Se especifican 3 estados posibles del medio, que el lector debe distinguir:

- Estado transitorio
- Estado de equilibrio
- Estado estacionario

En el estado transitorio se indica que al proporcionar carga a una de las caras del cilindro ($Q_1(t = 0) = 2Q_0$, $Q_2(t = 0) = 0$) aparecerá un campo eléctrico

co que impulsará su movimiento a lo largo del conductor. Eventualmente se alcanzará un estado de equilibrio (cap. 7) caracterizado por cargas de superficie y campo nulo en el interior.⁵ Si conociésemos la conductividad del metal podríamos además evaluar el proceso transitorio (método de la sección 9.3).

La parte inferior de la figura plantea el modo de comprender, en este marco, el proceso de conducción de corriente en el estado estacionario. Como ya se indicó esto significa que aunque haya movimiento de cargas a lo largo del conductor no se produce acumulación (ni disminución) de éstas en lugar alguno del mismo ($dQ/dt = 0$). Este régimen resulta posible debido a la existencia de campo eléctrico $\vec{\mathcal{E}}$ en el interior, el cual debe cumplir:

- (i) $\vec{\mathcal{E}}$ se compensará con el “campo” de fuerzas resistivas, proporcionado por acciones internas, que se oponen al movimiento de las cargas. Como resultado el movimiento es a velocidad promedio constante.
- (ii) $\vec{\mathcal{E}}$ se puede relacionar con cargas situadas en los extremos del conductor, y resulta esencial que una fuerza externa (la batería) se ocupe de “rellenar” y “retirar” las cargas que salen de un extremo y van hacia el otro, para mantener el valor de $\vec{\mathcal{E}}$. De lo contrario, la corriente iría decayendo.
- (iii) En régimen estacionario, la existencia de $\vec{\mathcal{E}}$ no implica la existencia de cargas en el interior del conductor. De hecho, si aplicamos la ecuación de continuidad:⁶

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow Q = 0$$

Nótese que, en realidad, cada carga que se mueve en el conductor va reemplazando el lugar que ocupaba otra, de modo que no hay carga neta salvo en los extremos.

⁵Entiéndase $Q_1 = Q_2 = Q_0$ como el hecho de que cada mitad del conductor poseerá la mitad de carga. El detalle exacto de la distribución dependerá de la relación longitud/radio. La figura no debe interpretarse literalmente, sino como un esquema

⁶Sólamante, si S abarca puntos externos al conductor es posible que haya carga encerrada

Capítulo 10

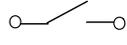
INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CIRCUITOS

Atendiendo a los conceptos que se introdujeron en los capítulos anteriores (7, 8, 9) el comportamiento eléctrico de la materia se describe mediante modelos matemáticos, expresando las leyes físicas que rigen la evolución espacio-temporal de los campos, en particular $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$. A nivel macroscópico, la integración de las ecuaciones puntuales (promediando las variaciones dentro del material) conduce a relaciones que involucran magnitudes fácilmente medibles en el laboratorio. Por ejemplo, integrando $\vec{\mathcal{E}}$ en el espacio entre los conductores que forman las placas de un condensador llegamos al concepto de capacidad, que es la relación entre la carga total almacenada y la caída de tensión medible $Q = C \Delta^+ \mathcal{V}$. En el caso de tener corriente estacionaria a través de un conductor, la integración de $\vec{\mathcal{E}}$ conduce a la célebre ley de Ohm $\Delta^+ \mathcal{V} = I R$, que puede verificarse de modo sencillo en un experimento.

La teoría de circuitos, que aquí presentamos a nivel introductorio, se ocupa justamente de aquellas situaciones en las que el nivel descriptivo macroscópico resulta apropiado para caracterizar el sistema. Así pues, refiriéndonos a una resistencia necesitaremos conocer el valor de R sin importar su relación con los parámetros materiales o geométricos (como podría ser $R = \rho L/S$ en un hilo de longitud L y sección S). Se habla de modelos de “parámetros concentrados”, refiriéndose en concreto a los valores de R o C aludidos anteriormente.

A modo de resumen, la tabla siguiente recoge los elementos que van a componer los circuitos que vamos a estudiar.

Conviene aclarar que los “cables” que unirán entre sí a los diferentes elementos para formar un circuito, serán materiales conductores. La diferencia con las resistencias propiamente dichas será que a efectos prácticos, el bajo

Nombre	Notación	Símbolo
Generador	\mathcal{E}_{MF}	
Resistencia	R	
Condensador	C	
Cable		
Interruptor	S	

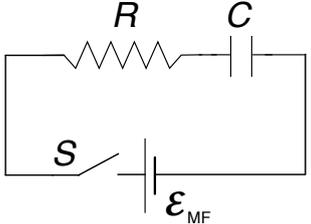


Figura 10.1: Tabla resumen de los elementos en un circuito y sus símbolos.

valor de su resistividad (y por tanto de su resistencia) hace que la caída de tensión a lo largo de ellos sea despreciable frente a la que tiene lugar en las resistencias propiamente dichas, en la mayoría de los casos.

10.1. Generadores de tensión

Como se comentó en el capítulo anterior, el establecimiento del régimen estacionario de corriente a lo largo de un conductor requiere la acción de un agente externo que “mantenga” el campo eléctrico necesario para compensar las fuerzas resistivas que se oponen al movimiento de las cargas. Dicho agente, que vamos a denominar generador se ocupará de proporcionar las cargas necesarias para mantener la diferencia de potencial entre dos puntos determinados cuando circula una corriente.

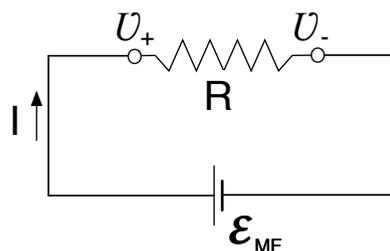


Figura 10.2: Generador en un circuito simple.

Evidentemente, los generadores deben involucrar procesos físicos diferentes a los electrostáticos, ya que éstos conducirían inevitablemente al “equilibrio

electrostático". De hecho, comunmente se basan en fenómenos electro-químicos o electro-magnéticos.

10.1.1. Fuerza electromotriz. Generadores reales.

Un generador ideal es aquel que, independientemente del circuito al que se conecta, proporciona siempre la misma diferencia de potencial entre sus extremos. La denominaremos fuerza electromotriz del generador. En la figura 10.2 es la que determina la caída de tensión en la resistencia

$$\Delta^+ \mathcal{V} \equiv \mathcal{E}_{\text{MF}} \quad (10.1)$$

En la práctica, los generadores reales no son capaces de mantener el mismo voltaje para cualquier valor de la intensidad que se les requiera proporcionar. Para valores grandes de I la tensión de salida del generador caerá. Esto se modeliza mediante el parámetro llamado *resistencia interna*, r , inherente a todo generador. Por ejemplo, en el caso de la figura, que supone la conexión del generador en un circuito simple con una resistencia R , tenemos

$$\Delta^+ \mathcal{V} = \mathcal{E}_{\text{MF}} - Ir \Rightarrow \Delta^+ \mathcal{V} = \mathcal{E}_{\text{MF}} \frac{R}{R + r} \quad (10.2)$$

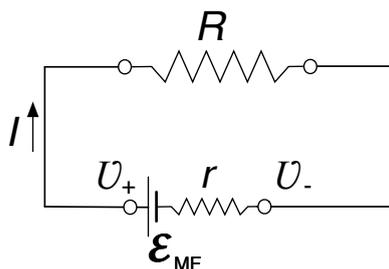


Figura 10.3: Generador real en un circuito simple.

10.2. Potencia en un circuito

Recordemos que en el régimen estacionario, el movimiento de las cargas a través de un conductor tiene lugar bajo la acción del campo eléctrico. Éste proporciona la energía que se consume en las colisiones de los portadores con los átomos del metal, por lo que la velocidad media de avance es constante. Por unidad de tiempo, si se mueve una carga ΔQ entre \mathcal{V}^+ y \mathcal{V}^- se tiene:

$$\mathcal{P} = \Delta Q \frac{\Delta^+ \mathcal{V}}{\Delta t} = I \Delta^+ \mathcal{V}, \quad (10.3)$$

de modo que la potencia que se está suministrando a una resistencia R que es atravesada por una intensidad I vale

$$\mathcal{P} = I^2 R = \frac{(\Delta^+ \mathcal{V})^2}{R} \quad (10.4)$$

Máxima transferencia de potencia Nótese que cuando conectamos una resistencia a un generador real, puede optimizarse la transferencia energética. Por ejemplo, en el circuito sencillo de la figura 10.3 se tiene

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\mathcal{E}_{\text{MF}}}{R + r} \right)^2 R = \frac{\mathcal{E}_{\text{MF}}^2 R}{(R + r)^2}, \quad (10.5)$$

por lo cual

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = r \quad (10.6)$$

10.3. Leyes de Kirchhoff

Se trata de dos igualdades de gran utilidad en la resolución de circuitos eléctricos. Fueron enunciadas por el físico alemán Gustav Kirchhoff en 1845 y hacen referencia a las intensidades de corriente y las caídas de tensión en un circuito complejo. Antes de exponerlas, definiremos algunos conceptos necesarios.

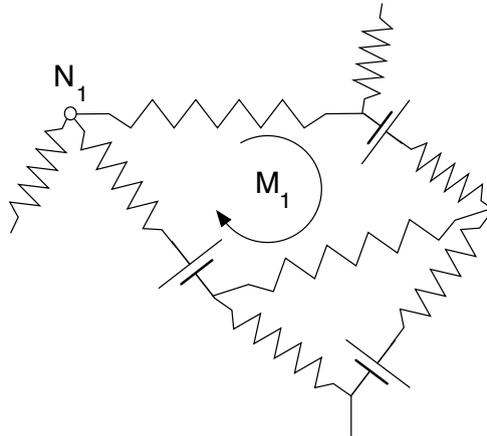


Figura 10.4: Definición de elementos (nudo y malla) en un circuito complejo.

1. **Rama:** es cada uno de los elementos de circuito.
2. **Nudo:** es un punto en un circuito donde concurren al menos dos ramas.
3. **Malla:** cada uno de los circuitos que se pueden formar sin utilizar dos veces la misma rama.

1ª ley de Kirchhoff Se trata de la expresión de la conservación de la carga. En el fondo es la forma discreta (circuital) de la ecuación de continuidad (sección 9.3). Dice que (en régimen estacionario) no puede haber acumulación de carga en los nudos de un circuito.

$$\sum_{i_j} I_{i_j} = 0, \quad \forall N_j \quad (10.7)$$

Nótese que I_{i_j} representa la corriente que llega al nudo j a través de la rama i_j . El sumatorio se extiende a todas las ramas que confluyen en éste. En el circuito de la figura 10.5, en su nudo N_1 esto se expresaría:

$$I_{1_1} - I_{2_1} - I_{3_1} = 0$$

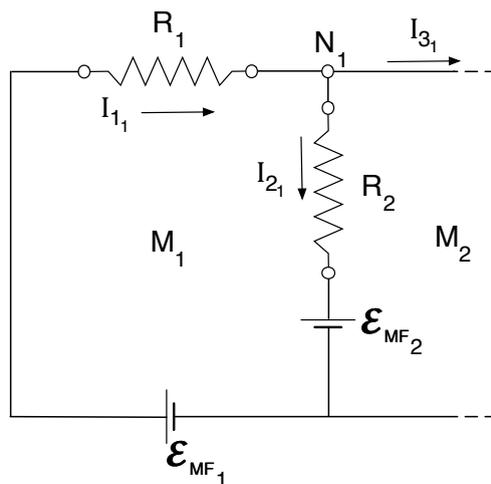


Figura 10.5: Aplicación de la 2ª ley de Kirchhoff en un circuito complejo (método de nudos).

2ª ley de Kirchhoff La caída de tensión neta que existe al recorrer una malla y volviendo al mismo nudo, debe ser nula. Esto se sigue sin más que

aplicar que existe la función potencial de punto ($\mathcal{V}(\vec{r}) - \mathcal{V}(\vec{r}') = 0$). En el circuito de la figura, esto se expresa del siguiente modo para la malla M_1 .

$$I_{21}R_2 + \mathcal{E}_{\text{MF}_2} - \mathcal{E}_{\text{MF}_1} + I_{11}R_2 = 0 \quad (10.8)$$

Como resulta evidente del planteamiento anterior, en un problema de circuitos utilizamos las expresiones correspondientes a las dos leyes de Kirchhoff para generar tantas ecuaciones como incógnitas I_i tenga nuestro problema. En general, se debe resolver un problema de ecuaciones lineales.

Existe una formulación más compacta del problema, el denominado método de “intensidades de malla”, que en un lenguaje algebraico consiste en elegir una base adecuada de intensidades, cuyas combinaciones cumplirán automáticamente la primera ley. En la figura 10.6 definimos dichas intensidades, que debemos interpretar como circulaciones cerradas y aditivas en aquellas ramas de circuito en que coinciden. En el ejemplo considerado, la segunda ley de Kirchhoff tomando como referencia el nudo N_1 diría

$$I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_2 + \mathcal{E}_{\text{MF}_2} - \mathcal{E}_{\text{MF}_1} = 0 \quad (10.9)$$

En circuitos planos, el método de mallas resulta habitualmente más simple, ya que se reduce el número de incógnitas a resolver.

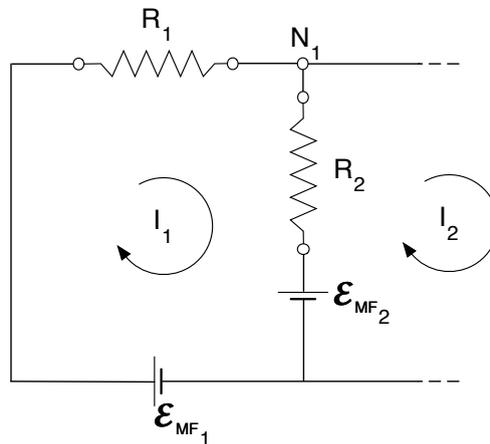


Figura 10.6: Aplicación de la 2ª ley de Kirchhoff en un circuito complejo (método de mallas).

10.4. Transitorios en circuitos RC

En el apartado anterior, hemos limitado el análisis a circuitos que contienen generadores y resistencias. Nos centrábamos en el régimen estacionario. En esta sección, analizaremos el efecto de introducir condensadores en el sistema, lo que básicamente se traducirá en la aparición de fenómenos transitorios relevantes en escalas de tiempo que llegarán incluso a los segundos.

Físicamente, al introducir un condensador como elemento de circuito se acentúan los efectos capacitivos que, aunque presentes, son despreciables en los propios cables o en las resistencias. Aumentar la capacidad significa poder “acumular” cargas con mayor facilidad, lo cual se traduce en que los tiempos de transición se hacen mucho mayores. Para poder comprender este fenómeno de modo cuantitativo, revisemos el ejemplo de la sección 9.3, en el que estudiábamos el transitorio de distribución de cargas en geometría esférica. Vimos allí que el tiempo característico de duración del transitorio viene dado por $\tau = \rho\epsilon_0$. Si consideramos que las cargas se colocaron inicialmente sobre un electrodo de radio δ es fácil verificar que se cumple¹

$$\tau = RC = \rho\epsilon_0 \quad (10.10)$$

siendo

$$R = \frac{\rho(a - \delta)}{4\pi a\delta} \quad \text{y} \quad C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a\delta}{a - \delta} \quad (10.11)$$

la resistencia y capacidad asociados al sistema. En definitiva, el transitorio viene determinado por la acción conjunta de efectos resistivos y capacitivos en el sistema. En general, el valor de C asociado a los elementos de circuito que no son explícitamente condensadores será extraordinariamente pequeño, y por tanto C despreciable. No obstante, si en un circuito se combinan un condensador (diseñado para aportar valor elevado de C) y una resistencia (lo que introduce valores elevados de R), τ pasa a tener valores muchísimo mayores. Por ejemplo, si $R = 10 \text{ k}\Omega$ y $C = 10 \mu\text{F}$ tenemos $\tau = 0.1 \text{ s}$.

Analizaremos los transitorios subsiguientes en el próximo apartado.

¹De hecho, puede verificarse que la relación $RC = \rho\epsilon_0$ es válida para cualquier geometría, sin más que aplicar las leyes de Gauss y de Ohm a un sistema genérico formado por dos conductores que pueden utilizarse bien sea como condensador o como puntos de alimentación para un medio resistivo que llena el espacio entre ambos.

10.4.1. Procesos de carga y descarga en circuitos RC

Vamos a estudiar los procesos de carga/descarga de un condensador en circuitos RC sencillos. Lo haremos bajo la hipótesis de que el sistema evoluciona de modo cuasi-estacionario. Esto significa que las magnitudes físicas dependerán del tiempo, pero no de la posición: $\mathcal{V}(t)$, $I(t)$, $Q(t)$. En términos de lo dicho anteriormente, puesto que los transitorios asociados al establecimiento de la corriente en los conductores pueden despreciarse, en cada instante de tiempo la corriente que pasa por una rama del circuito es prácticamente la misma, y la cantidad de carga sólo variará en las placas del condensador. Esta aproximación es excelente en el ámbito de los generadores de tensión continua y en un enorme rango de aplicación de los circuitos de corriente alterna. Debería ser revisada en el caso de estudiar circuitos de corriente alterna a frecuencias muy elevadas.

Proceso de descarga en un circuito RC Supondremos, como indica la figura, que partimos de un condensador cargado ($\pm Q_0$). Si cerramos el interruptor, se establece una corriente a través de la resistencia que inicia el proceso de neutralización de la carga. Inicialmente:

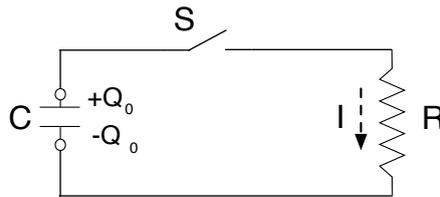


Figura 10.7: Proceso de descarga de un condensador.

$$I_0 = \frac{\mathcal{V}_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} \quad (10.12)$$

La corriente cuasi-estacionaria subsiguiente vendrá dada por

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} \quad (10.13)$$

Aplicando la 2ª ley de Kirchhoff:

$$\begin{aligned}
 IR - \frac{Q}{C} &= 0 \\
 \Downarrow \\
 \frac{dQ}{dt} &= -\frac{Q}{RC} \\
 \Downarrow \\
 Q &= Q_0 e^{-t/RC} \\
 \Downarrow \\
 I &= \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}
 \end{aligned} \tag{10.14}$$

Proceso de carga en un circuito RC Supongamos ahora, como indica la figura, que el condensador está inicialmente descargado y que en un instante dado cerramos el interruptor S . Se establecerá una intensidad de corriente I dada por las cargas que proporciona la batería, de modo que si aplicamos la 2ª ley de Kirchhoff en cada instante de tiempo (ahora $I = dQ/dt$):

$$\begin{aligned}
 IR + \frac{Q}{C} - \mathcal{E}_{\text{MF}} &= 0 \\
 \Downarrow \\
 RC \frac{dQ}{dt} &= C \mathcal{E}_{\text{MF}} - Q \\
 \Downarrow \\
 Q &= C \mathcal{E}_{\text{MF}} \left(1 - e^{-t/RC}\right) \\
 \Downarrow \\
 I &= \frac{\mathcal{E}_{\text{MF}}}{R} e^{-t/RC}
 \end{aligned} \tag{10.15}$$

Nótese que estos resultados significan que el proceso de carga del condensador finaliza (asintóticamente) con la desaparición de la intensidad de corriente y la acumulación de carga en las placas, que produce la diferencia de potencial \mathcal{E}_{MF} en “sentido” opuesto a la del generador.

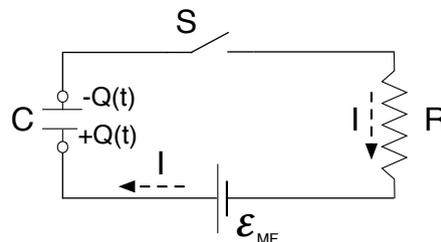


Figura 10.8: Proceso de carga de un condensador.

Parte V

EL CAMPO MAGNETOSTÁTICO

INTRODUCCIÓN

La magnetostática constituye un paso más en la comprensión de los fenómenos físicos relacionados con la interacción entre cargas eléctricas. Así pues, hasta el momento, conocemos el campo ($\vec{\mathcal{E}}$) y potencial (\mathcal{V}) electrostáticos, magnitudes creadas por cargas en reposo, y que determinan: las fuerzas que actúan sobre cualquier otra carga y el término que debe añadirse a la energía total de estas segundas.

Respecto a cargas eléctricas en movimiento, los aspectos cubiertos hasta el momento cubren evidentemente: (i) la dinámica de cargas individuales sometidas a la fuerza ($\vec{F} = q\vec{\mathcal{E}}$) (basada en las leyes de Newton, como para cualquier otra fuerza que hayamos tratado), y (ii) la descripción del movimiento de las cargas dentro de un material (basada en los conceptos de densidad de corriente y ley de Ohm).

En los capítulos que componen esta parte, denominado *magnetostática* incluiremos un aspecto adicional. Se trata de una fuerza asociada a un nuevo campo, que va a ser creado por cargas en movimiento, y actuará sobre cargas en movimiento. Más apropiadamente, deberíamos decir que aparece asociado al movimiento relativo entre las cargas, pero por el momento, bastará hablar de los movimientos absolutos de las cargas involucradas.

Como se verá más adelante, el término *magnetostática* hace referencia al hecho de que las cargas que generan este nuevo campo se van a mover en forma de corrientes estacionarias (las que cumplen $dI/dt = 0$). Entonces, la fuerza que surge sobre las cargas que reciben la acción no depende del tiempo.

Capítulo 11

LA INDUCCIÓN MAGNÉTICA

Los fenómenos físicos relacionados con la interacción magnética son conocidos ya desde la Antigüedad. Así pues, durante siglos se conoció la propiedad de algunos materiales naturales de atraer a otros. En particular, estos conocimientos pudieron dar lugar a la invención de la brújula. No obstante, no fue hasta el siglo XIX que se comprendió la relación existente entre estas fuerzas y las interacciones eléctricas.

Los experimentos de Ampère, que describiremos en el siguiente apartado, fueron clave en esta disciplina. Entre 1820 y 1825 realizó una serie de estudios sistemáticos acerca de la fuerza de interacción entre corrientes eléctricas, básicamente en régimen estacionario. Recordemos que esto significa que no son relevantes los procesos de acumulación de carga.¹ Por consiguiente, las fuerzas entre corrientes, tal y como vamos a ver, aparecen relacionadas con magnitudes y parámetros físicos distintos de los que aparecen en la ley de Coulomb.

Digamos para concluir que el término “magnetostática” también se relaciona con el hecho de que las corrientes sean estacionarias. Entonces, la fuerza que surge no depende del tiempo y de ahí dicho calificativo.

11.1. *Experimento de Ampère, fuerza de Lorentz*

Los experimentos de Ampère constituyeron una sistematización de las observaciones de Ørsted, quien descubrió el efecto de orientación de una brújula por acción de las corrientes en un circuito cercano. De hecho, la conclusión de Ampère fue que las citadas fuerzas aparecen incluso entre circuitos eléctricos

¹De hecho en los circuitos eléctricos no van a existir cargas netas (salvo quizá en las interfases de contacto) en tanto que no se trabaje a frecuencias muy elevadas.

(ver Fig. 11.1), obteniendo la siguiente relación (fuerza que sobre el circuito C ejerce C')

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I I' d\vec{\ell} \times [d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (11.1)$$

En esta expresión, μ_0 (permeabilidad magnética del vacío) es la constante que parametriza la nueva interacción y que toma el valor $4\pi \times 10^{-7} \text{ m kg C}^{-2}$. Por otra parte, la doble integración indica que la fuerza puede expresarse mediante una doble suma que conlleva la “adición” de la interacción básica entre cada dos “elementos de corriente” $I d\vec{\ell}$ e $I' d\vec{\ell}'$:

$$d\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \times [I' d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (11.2)$$

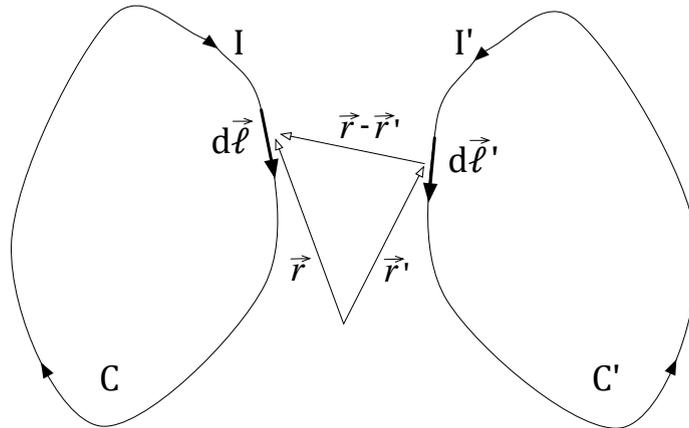


Figura 11.1: Esquema de dos circuitos eléctricos próximos (C y C') que transportan corrientes I e I' respectivamente, sometidos a la interacción descrita por la ley (11.1).

Queremos destacar que, históricamente, esta segunda expresión no fue el origen, sino la consecuencia de la ecuación 11.1. De hecho, en los experimentos no existe modo de acceder al comportamiento de los elementos de circuito si no es a través del circuito completo del que forman parte. En cualquier caso, tomando la ecuación 11.2 como punto de partida, se puede incluso obtener una expresión más básica, que nos daría la fuerza de tipo magnético entre dos cargas puntuales.² Obtenemos (ver Fig.11.1):

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1 \vec{v}_1 \times (q_2 \vec{v}_2 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \quad (11.3)$$

²Basta introducir la relación $I d\vec{\ell} = dq d\vec{\ell}/dt = dq \vec{v}$ que se refiere a la carga incremental que pasa por el elemento de circuito considerado. Nótese que hay una relación de orientación entre el sentido del vector $d\vec{\ell}$ y el de movimiento de las cargas que indica la circulación de la corriente.

Así pues, si pudiera medirse la fuerza total entre dos cargas puntuales, se sumarían los efectos electro- y magnetostático, de modo que se tendría una fuerza total (o *Fuerza de Lorentz*): $\vec{F}_{\text{total}} = \vec{F}_e + \vec{F}_m$, combinación de las ecuaciones (4.1) y (11.3). Debe notarse, que el valor relativo de las componentes electrostática y magnetostática puede estimarse mediante la expresión:

$$\frac{F_m}{F_e} \approx \frac{v_1 v_2}{c^2}$$

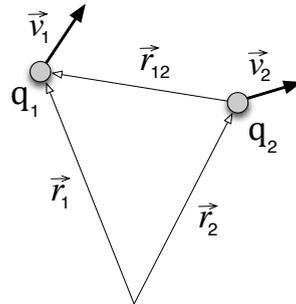


Figura 11.2: Esquema de interacción entre dos cargas puntuales en movimiento.

Aquí hemos utilizado $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, siendo c la velocidad de la luz ($3 \times 10^8 \text{ m/s}$). La consecuencia evidente es que salvo para el caso de partículas con velocidades próximas a la de la luz (¡lo cual es una situación realmente poco frecuente!), la interacción electrostática es muchísimo más intensa que la magnética. El hecho de que esta nos resulte observable reside en la “neutralidad” de las corrientes estacionarias antes mencionada.

Un último aspecto que debemos analizar en relación a la ecuación (11.3) es que, de igual modo que se hizo en el caso electrostático, podemos introducir el concepto de *campo*. Así pues, podríamos pensar que la carga q_1 se ve sometida a un *campo de inducción magnética*³ creado por q_2 y que se expresa

$$\vec{\mathcal{B}} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 \vec{v}_2 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} \tag{11.4}$$

de modo que la fuerza que actúa sobre ella es

$$\vec{F}_m = q_1 \vec{v}_1 \times \vec{\mathcal{B}}(\vec{r}_1). \tag{11.5}$$

³Históricamente, la denominación *inducción magnética* \mathcal{B} se ha utilizado para remarcar el hecho de que el magnetismo aparece relacionado con el movimiento de cargas de cualquier tipo, sean corrientes de transporte en un conductor o circuitos microscópicos en un medio magnético. Esto se expresa mediante la relación $\mathcal{B} = \mu_0(\mathcal{H} + \mathcal{M})$, en la que \mathcal{M} representa la denominada *imanación* del medio. \mathcal{H} (que llamamos *campo magnético*) coincide con \mathcal{B} (salvo factores multiplicativos) cuando no se tienen materiales magnéticos presentes ($\mathcal{M} = 0$)

Más adelante analizaremos los métodos para calcular $\vec{\mathcal{B}}$ aplicando la expresión (11.4) y el método de superposición. Por el momento, vamos a ilustrar el concepto de fuerzas magnéticas recurriendo, o bien directamente a la ecuación (11.1), o bien a una ecuación de la forma (11.5) suponiendo que $\vec{\mathcal{B}}$ tiene una expresión conocida de antemano.

11.1.1. Ejemplo 1: Trayectoria de una partícula cargada

A partir de la ecuación (11.5) es posible deducir que cuando una partícula cargada se somete a un campo magnético uniforme, va a realizar una órbita con proyección circular en el plano perpendicular a éste. Dicha propiedad se ha ilustrado en la figura 11.3.

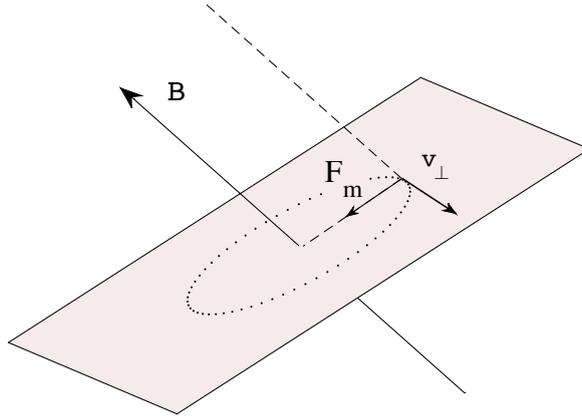


Figura 11.3: Fuerza magnética sobre una partícula cargada moviéndose dentro de un campo magnético de inducción uniforme.

Efectivamente, siempre resulta posible “descomponer” el vector velocidad del modo

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (11.6)$$

siendo

$$\vec{v}_{\parallel} \equiv \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{\mathcal{B}}}{\mathcal{B}} \right) \frac{\vec{\mathcal{B}}}{\mathcal{B}} \quad (11.7)$$

y

$$\vec{v}_{\perp} \equiv \vec{v} - \vec{v}_{\parallel} \quad (11.8)$$

Por otra parte, como $\vec{v}_{\parallel} \times \vec{\mathcal{B}} = 0$ se tiene

$$\vec{F}_m = q \vec{v}_{\perp} \times \vec{\mathcal{B}} \quad (11.9)$$

es decir, la fuerza magnética está contenida en el plano perpendicular a $\vec{\mathcal{B}}$ y sólo depende de la componente v_{\perp} . Por consiguiente, la partícula mantendrá su componente paralela de velocidad. Además, dentro del plano perpendicular el movimiento será circular uniforme. Esto se debe a que \vec{F}_m no tiene componente tangencial a la velocidad.

Respecto a la circunferencia concreta que describirá la partícula, podemos obtener su radio (*radio ciclotrón*) a partir de la expresión de aceleración normal

$$a_n = \frac{v_{\perp}^2}{R} = \frac{F_m}{m} = \frac{qv_{\perp}\mathcal{B}}{m}$$

$$\downarrow$$

$$R = \frac{mv_{\perp}}{q\mathcal{B}} \tag{11.10}$$

El centro de la circunferencia se puede calcular como el punto que se encuentra a una distancia R del lugar en el que la partícula inicia su movimiento, medida a lo largo de la dirección $\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}}$. Vamos a aplicarlo para resolver la trayectoria de una partícula que se “inyecta” en la frontera entre dos regiones de campo magnético uniforme y de sentido opuesto del modo indicado en la figura 11.4. Proponemos como ejercicio para el lector verificar que dicha partícula se mueve

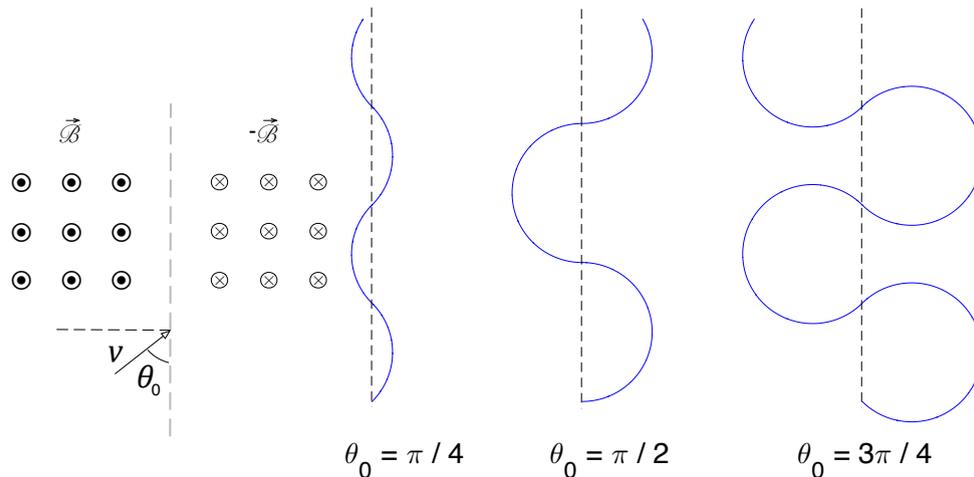


Figura 11.4: Trayectorias posibles de una partícula en una región de doble campo magnético uniforme.

siguiendo tramos de arco de circunferencia, cuya longitud está determinada por el ángulo inicial θ_0 . A partir de la longitud de los mismos y la relación (11.10) puede demostrarse que la velocidad media de avance vertical es

$$\langle v_y \rangle = \frac{\text{sen}\theta_0}{\theta_0} v_{\perp} \tag{11.11}$$

11.1.2. Ejemplo 2: Fuerza entre hilos paralelos

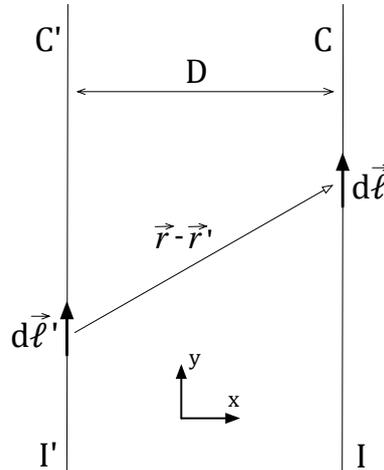


Figura 11.5: Esquema de interacción entre las corrientes que circulan por dos hilos paralelos.

Nos planteamos en segundo lugar calcular la fuerza entre dos hilos paralelos muy largos, separados por una distancia D y que transportan corrientes I e I' respectivamente. Lo haremos por aplicación de la ecuación 11.1. Este es un caso límite que idealiza situaciones prácticas de hilos muy próximos en relación a su longitud. Lo presentamos en la figura 11.5.

Nótese que en este caso

$$d\vec{\ell} \times (\vec{r} - \vec{r}') = -D \, d\ell' \, \hat{k} \quad (11.12)$$

y por otra parte

$$d\vec{\ell} \times [d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] = -D \, d\ell \, d\ell' \, \hat{i}$$

En definitiva, la expresión a evaluar queda:

$$\vec{F}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' D \int_C \int_{C'} \frac{d\ell \, d\ell'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \hat{i}$$

Esta integral debe considerarse con cuidado. Por ejemplo, tomando origen en un punto arbitrario sobre el eje vertical:

$$\vec{F}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' D \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \, dy'}{[D^2 + (y - y')^2]^{3/2}} \hat{i},$$

lo cual se evalúa del siguiente modo:

$$\vec{F}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' D \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{[D^2 + (y - y')^2]^{3/2}} \right] \hat{i}$$

donde, la integral en la variable y' es igual a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy'}{[D^2 + y'^2]^{3/2}} = \frac{2}{D^2} \left[\frac{y'}{\sqrt{D^2 + y'^2}} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{D^2}.$$

En definitiva, obtenemos:

$$\vec{f}_m = -\frac{\mu_0 I I'}{2\pi D} \hat{i}, \quad (11.13)$$

resultado que se refiere a la fuerza por unidad de longitud $f_m \equiv F_m/L$. En realidad, nótese que \vec{F}_m contiene un término (la denominada integral impropia $\int dy = L \rightarrow \infty$) que diverge y, por tanto, hemos “dividido” por él. Lógicamente, la fuerza total entre dos hilos infinitos sería infinita.⁴

11.1.3. Ejemplo 3: Momento de una espira

En este caso vamos a evaluar la fuerza sobre un circuito eléctrico basándonos en la ecuación (11.5). Es decir, supondremos el circuito sometido a la acción de una inducción creada por otros circuitos. Concretamente, consideraremos una espira rígida rectangular sometida a un campo magnético uniforme. Veremos que la fuerza total que actúa sobre ella es nula,⁵ pero no así el momento resultante.

Para comenzar, consideremos la forma “circuital” de la ecuación (11.5). Tal como se dijo, esta se obtiene realizando la equivalencia $q\vec{v} \leftrightarrow Id\vec{\ell}$, por lo cual, la fuerza sobre el lado i de la espira será:

$$\vec{F}_i = \int Id\vec{\ell} \times \vec{\mathcal{B}} = I\vec{\ell}_i \times \vec{\mathcal{B}} \quad (11.14)$$

⁴Matemáticamente, la operación realizada genera una indeterminación del tipo ∞/∞ , que en este caso se resuelve dando el valor finito de la expresión (11.13). Desde el punto de vista físico, lo que hacemos es encontrar una expresión que aproxima muy bien el problema de dos hilos paralelos muy largos ($\int dy \rightarrow \infty$) con un análisis simplificado. El lector puede verificar que la expresión anterior se puede obtener también integrando entre 0 y L y posteriormente utilizando $D/L \ll 1$

⁵El lector puede verificar que esta es una propiedad general que se cumple para cualquier circuito cerrado en un campo uniforme (Pista: $\oint d\vec{\ell} = 0$)

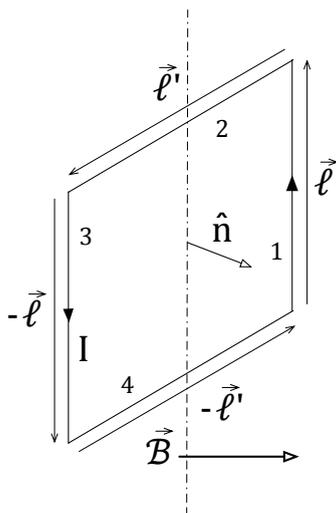


Figura 11.6: Espira rectangular situada en un campo de inducción magnética uniforme. Se han etiquetado sus lados mediante los números 1, 2, 3, 4.

Así pues, la fuerza total que actúa sobre cada uno de los lados de nuestra espira será (ver Fig. 11.6):

- Lado 1:

$$\vec{F}_1 = I \vec{\ell} \times \vec{\mathcal{B}}$$

- Lado 2:

$$\vec{F}_2 = I (\vec{\ell}' \times \vec{\mathcal{B}})$$

- Lado 3:

$$\vec{F}_3 = I (-\vec{\ell} \times \vec{\mathcal{B}})$$

- Lado 4:

$$\vec{F}_4 = I (-\vec{\ell}') \times \vec{\mathcal{B}}$$

Es evidente que se cumple la condición

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0.$$

Por otra parte, se cumple que \vec{F}_2 y \vec{F}_4 dan un par nulo respecto a cualquier punto del espacio, y que \vec{F}_1 y \vec{F}_3 dan un par no nulo:

$$\vec{\tau}_{13} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = I \vec{r}_{13} \times (\vec{\ell} \times \vec{\mathcal{B}})$$

siendo $\vec{r}_{13} = -\vec{\ell}'$.

Puede demostrarse que en este caso el doble producto vectorial admite reagruparse del modo siguiente:

$$\vec{r}_{13} \times (\vec{\ell} \times \vec{\mathcal{B}}) = (\vec{r}_{13} \times \vec{\ell}) \times \vec{\mathcal{B}},$$

de modo que:

$$\vec{\tau}_{13} = I (\vec{r}_{13} \times \vec{\ell}) \times \vec{\mathcal{B}}.$$

En esta expresión, $\vec{r}_{13} \times \vec{\ell}$ es el vector área del circuito que transporta la corriente: $\vec{S} \equiv S \hat{n}$. En definitiva:

$$\vec{\tau}_{13} = I \vec{S} \times \vec{\mathcal{B}} \equiv \vec{m} \times \vec{\mathcal{B}}$$

donde hemos definido el momento magnético de la espira $\vec{m} \equiv I \vec{S}$.

Queremos destacar que la expresión $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{\mathcal{B}}$ es generalizable a una espira de forma arbitraria en un campo magnético $\vec{\mathcal{B}}$ constante, siendo \vec{m} el momento dipolar determinado por la corriente que la atraviesa y su área. Esto puede verificarse mediante la idea de *superposición* aplicada al conjunto de las espiras “elementales” en que la podemos considerar descompuesta (Fig.11.7).

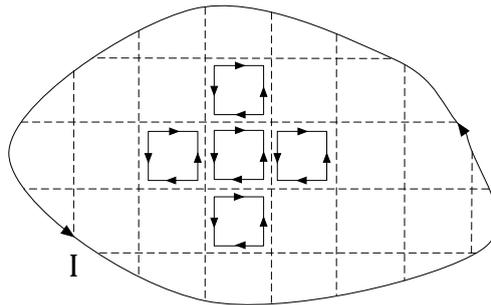


Figura 11.7: Una espira plana de contorno arbitrario “equivale” a un conjunto de espiras rectangulares, cada una de las cuales transporta la intensidad total.

Nótese para terminar que en un campo magnético de inducción uniforme $\vec{\mathcal{B}}$ tiene el efecto de orientar los momentos magnéticos paralelamente ($\vec{m} \parallel \vec{\mathcal{B}}$). De hecho (Fig.11.8):

- si $\vec{\mathcal{B}}$ es paralelo a \vec{m} , el equilibrio es estable.
- si $\vec{\mathcal{B}}$ es antiparalelo a \vec{m} , el equilibrio es inestable.

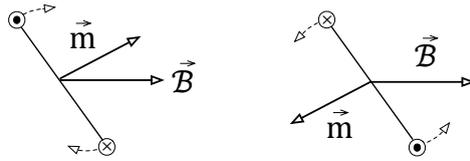


Figura 11.8: Reacción de un momento magnético ante pequeños giros en torno a la posición de equilibrio estable (izquierda) e inestable (derecha).

11.2. Inducción magnética. Ley de Biot-Savart

Como hemos expuesto en la sección anterior, del mismo modo que las cargas en movimiento sufren una fuerza cuando están en presencia de una inducción magnética $\vec{\mathcal{B}}$, podemos decir que las fuentes de esta inducción son las propias cargas en movimiento. De hecho, de acuerdo con la ecuación (11.4) si pudiésemos medir la inducción que produce una carga puntual en movimiento observaríamos que:

- La magnitud de $\vec{\mathcal{B}}$ es proporcional a la carga q y su velocidad v , e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la carga y el punto donde se evalúa campo.
- El campo es proporcional al seno del ángulo formado por el vector de posición del punto y el vector velocidad de la carga.
- La dirección de $\vec{\mathcal{B}}$ es perpendicular a los vectores \vec{v} y \vec{r} , y su sentido el de giro de \vec{v} sobre \vec{r} .

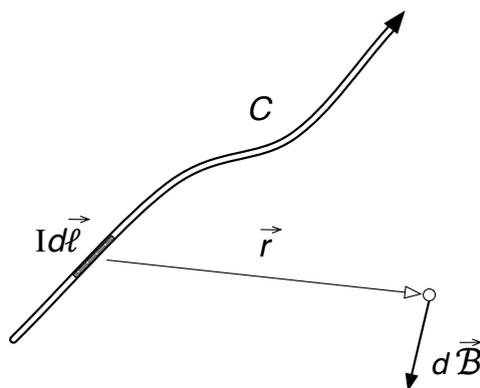


Figura 11.9: Esquema de la inducción magnética creada por un elemento de circuito.

La Ley de Biot-Savart constituye la aplicación del principio de superposición para calcular el valor de $\vec{\mathcal{B}}$ asociado a las cargas en movimiento a lo largo de un circuito C . Partiendo de la ecuación 11.4 y de la equivalencia $q\vec{v} \rightarrow Id\vec{\ell}$ esto es:

$$\vec{\mathcal{B}} \equiv \int_C d\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \quad (11.15)$$

Debe tenerse en cuenta que, en esta expresión, \vec{r} se refiere al vector de posición que conecta el punto fuente donde está el elemento de corriente $Id\vec{\ell}$ y el punto donde calculamos $\vec{\mathcal{B}}$ (Fig.11.9).

A continuación, mostraremos cómo se materializa la fórmula anterior en el caso de algunos circuitos de interés.

11.2.1. Ejemplos de cálculo de la inducción magnética

Ejemplo 1: Inducción magnética en el eje de una espira circular

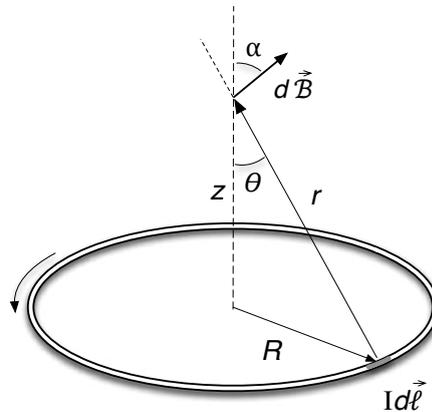


Figura 11.10: Espira circular de corriente.

Nótese que las componentes de $\vec{\mathcal{B}}$ fuera del eje se anulan dos a dos, quedando sólo la componente $\mathcal{B}_z = \int d\mathcal{B}_z = \int d\mathcal{B} \cos \alpha = \int d\mathcal{B} \sin \theta$. Concretamente, tenemos:

$$d\mathcal{B}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl |\hat{r}|}{r^2} \cos \alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{R^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{B}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{I R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (11.16)$$

Ejemplo 2: Inducción magnética en el eje de un solenoide

Vamos a calcular el valor del campo creado por un solenoide cilíndrico que contiene N espiras distribuidas uniformemente a lo largo de su longitud (ver Fig.11.11). Lo haremos en un punto de su eje, definido por la distancia a uno de los extremos, a . Por otra parte, supondremos que el solenoide es atravesado por una intensidad de corriente I .

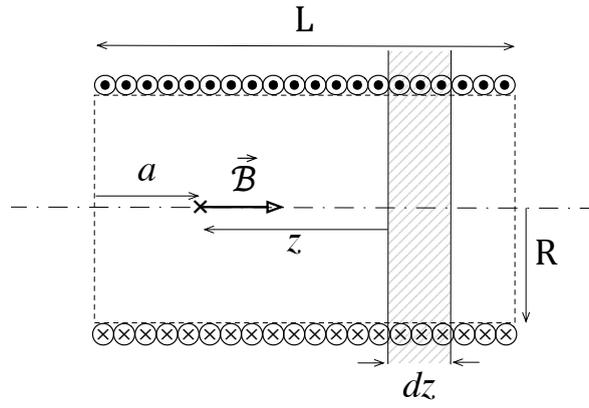


Figura 11.11: Solenoide cilíndrico formado por N espiras de radio R , a lo largo de una longitud L .

Aplicaremos el principio de superposición del siguiente modo. Consideraremos que las espiras contenidas en un elemento de longitud dz pueden describirse como una única espira “efectiva”, y utilizaremos para esta espira la expresión del apartado anterior. Dicha espira transporta una corriente

$$dI = I \frac{N}{L} dz \equiv In dz$$

y entonces

$$d\mathcal{B} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I n dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} R^2,$$

por lo que el valor de \mathcal{B} en un punto situado a una distancia a del extremo será

$$\mathcal{B} = \int_{-a}^{L-a} d\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I n R^2}{2} \int_{z=-a}^{z=L-a} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Es decir:

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I n}{2} \left(\frac{L-a}{\sqrt{R^2 + (L-a)^2}} + \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} \right)$$

Es de destacar que en el caso de solenoides muy largos y en puntos interiores alejados del extremo ($a \gg R, L-a \gg R$) se obtiene $\mathcal{B} \rightarrow \mu_0 In$, expresión

que se conoce como “aproximación de solenoide infinito” y que más adelante obtendremos por un método alternativo.

Para concluir este apartado vamos a mostrar el esquema de las líneas de inducción magnética en la zona ocupada por el solenoide. Se han obtenido mediante un método numérico de integración de la expresión (11.15), lo cual permite evaluar el vector \vec{B} en cualquier punto del espacio alrededor del solenoide. Debe notarse que estas líneas tienden a “homogeneizarse” y concentrarse en el interior del solenoide conforme crece el cociente L/R .

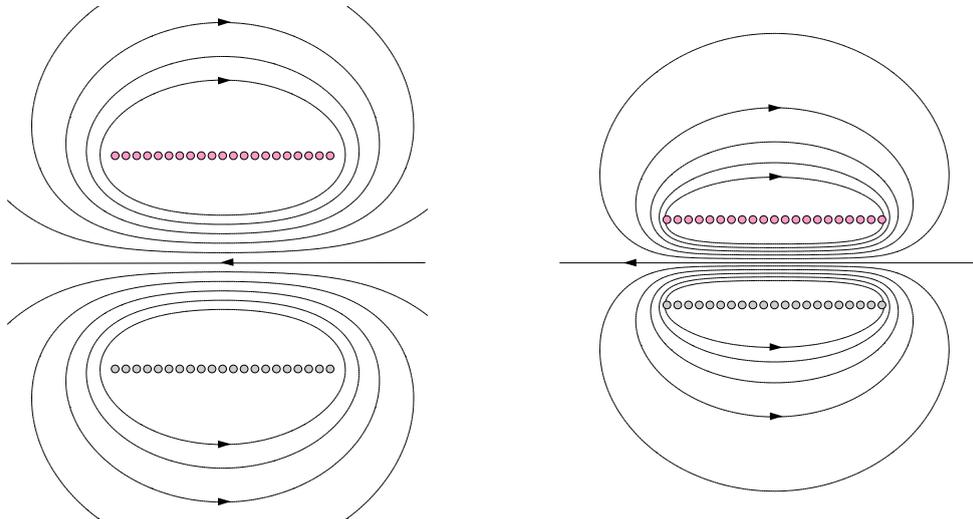


Figura 11.12: Representación de líneas de campo para dos solenoides cilíndricos con diferentes relaciones de longitud/radio.

Capítulo 12

LA LEY DE AMPÈRE

La ley de Ampère es una expresión integral para $\vec{\mathcal{B}}$, en cierto modo análoga a la ley de Gauss para el campo electrostático. De manera similar, y en este caso como consecuencia de la expresión elemental $d\vec{\mathcal{B}} = (\mu_0 I/4\pi)d\vec{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}/r^2$, existe una propiedad geométrica global en torno a las fuentes del campo. No obstante, aparecen diferencias fundamentales entre las propiedades de $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$ que, por ejemplo, se manifiestan en que las líneas de campo magnético son cerradas en torno a sus fuentes (Fig.11.12) en lugar de surgir de ellas, como ocurre en el caso electrostático. Entonces, la magnitud integral de interés no va a ser el flujo (que de hecho es nulo para $\vec{\mathcal{B}}$) sino la denominada *circulación* del vector a lo largo de una línea cerrada

12.1. Circulación de $\vec{\mathcal{B}}$

Antes de proceder a enunciar de modo general la propiedad de la circulación de $\vec{\mathcal{B}}$ en una situación arbitraria presentaremos un ejemplo que permite introducir los conceptos básicos.

Ejemplo: circulación de $\vec{\mathcal{B}}$ alrededor de un hilo infinito

Consideremos de nuevo el caso planteado en la sección 11.1, en el cual las corrientes circulan a través de hilos rectilíneos muy largos. Partiendo de la ecuación (11.12) es evidente que la inducción magnética producida por el circuito C' se puede calcular como

$$\vec{\mathcal{B}} = \int_{C'} d\vec{\mathcal{B}} = -\frac{\mu_0 I'}{4\pi} D \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\ell'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \hat{\mathbf{k}}$$

La integral que aquí aparece se evaluó anteriormente y toma el valor $2/D^2$, por lo cual tenemos:

$$\vec{\mathcal{B}} = -\frac{\mu_0 I'}{2\pi D} \hat{\mathbf{k}}, \quad (12.1)$$

expresión dada en términos de los vectores unitarios definidos en la figura 11.5 y que aplica en el punto señalado.

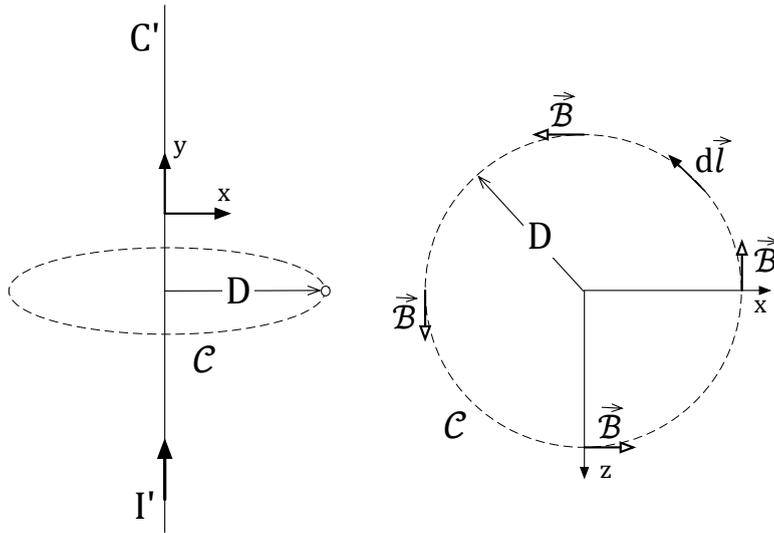


Figura 12.1: Esquema del vector de inducción magnética alrededor de un hilo de longitud infinita.

Si ahora consideramos la estructura de $\vec{\mathcal{B}}$ alrededor del hilo C' (ver Fig.12.1), es evidente que los vectores $\vec{\mathcal{B}}$ y $d\vec{l}$ allí representados serán paralelos sobre cada circunferencia C centrada en la línea C' . Como también el módulo de $\vec{\mathcal{B}}$ es constante sobre C , podemos concluir que la denominada “circulación”¹ de $\vec{\mathcal{B}}$ vale

$$\oint_C \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mathcal{B} \oint_C dl = \mathcal{B} 2\pi D$$

y sustituyendo \mathcal{B} por su valor:

$$\oint_C \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I'$$

Por consiguiente, la circulación de $\vec{\mathcal{B}}$ a lo largo de la curva C es igual a la intensidad de corriente que la genera multiplicada por la permitividad magnética del vacío. A continuación vamos a demostrar que este resultado es una expresión particular de una propiedad geométrica general de $\vec{\mathcal{B}}$.

¹Evidentemente, se trata de la integral de la proyección de $\vec{\mathcal{B}}$ sobre el vector $d\vec{l}$, tangente a lo largo de la curva C (o dicho de otro modo la componente tangencial de $\vec{\mathcal{B}}$ sobre C).

12.2. Ley de Ampère

En cualquier configuración de corrientes, la inducción magnética verifica:

La circulación de la inducción magnética creada por un sistema de corrientes estacionarias a lo largo del contorno \mathcal{C} de una superficie abierta \mathcal{A} es igual a la suma algebraica (con signo)² de las corrientes que atraviesan \mathcal{A} , multiplicada por μ_0 .

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (12.2)$$

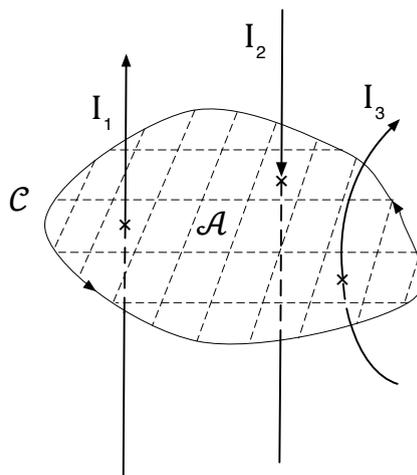


Figura 12.2: Esquema de la superficie abierta \mathcal{A} y su contorno \mathcal{C} en términos de los que se enuncia la ley de Ampère para un sistema de corrientes (en este caso $\{I_1, -I_2, I_3\}$).

Queremos enfatizar que \mathcal{C} y \mathcal{A} son elementos geométricos auxiliares, no necesariamente identificables con objetos materiales. Los utilizamos en los razonamientos asociados a la ley de Ampère.

Demostración:

Consideraremos, en primer lugar que $\vec{\mathcal{B}}$ es creado por un solo circuito de corriente. Suponiendo que se trata de una corriente a lo largo de un hilo muy

²El signo viene dado por la orientación del contorno al realizar la circulación. En el caso de la figura 12.2 sería $I_1 - I_2 + I_3$

largo, como la que se consideraba en la figura 12.1 podemos expresar

$$\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{(z, 0, -x)}{x^2 + z^2} \equiv \frac{\mu_o I}{2\pi} (b_x, 0, b_z)$$

$$d\vec{l} = (dx, 0, dz)$$

donde hemos definido el campo “reducido” \vec{b} con la finalidad de simplificar las fórmulas subsiguientes.

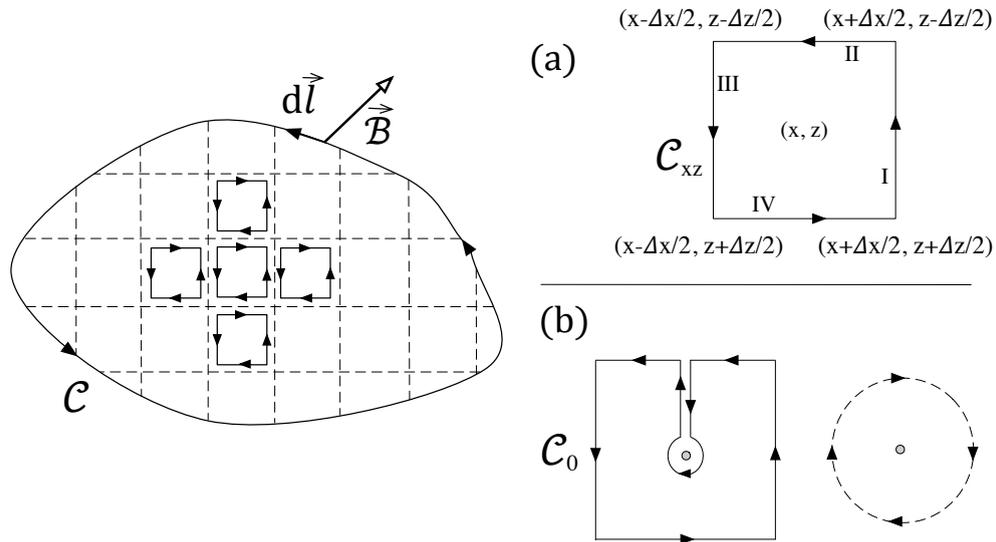


Figura 12.3: Esquema para la demostración de la ley de Ampère en un sistema de corrientes estacionarias. A la izquierda se muestra el contorno \mathcal{C} a lo largo del que se calcula la circulación de $\vec{\mathcal{B}}$ y su subdivisión en contornos elementales. A la derecha se muestra uno de esos contornos elementales para los casos en los que no encierre corriente (a), o aquel en que sí lo haga (b).

Por otra parte, nótese que la integración a lo largo del contorno \mathcal{C} puede descomponerse en contornos elementales del modo indicado en la figura 12.3. En cada una de esas celdas, como la definida en el panel (a), la integración de

$\vec{b} \cdot d\vec{l}$ toma la forma:

$$\begin{aligned} \oint_{C_{xz}} \vec{b} \cdot d\vec{l} &= \int_I \vec{b} \cdot d\vec{l} + \int_{II} \vec{b} \cdot d\vec{l} + \int_{III} \vec{b} \cdot d\vec{l} + \int_{IV} \vec{b} \cdot d\vec{l} \\ &\simeq -\frac{b_z(x + \Delta x/2, z - \Delta z/2) + b_z(x + \Delta x/2, z + \Delta z/2)}{2} \Delta z \\ &\quad -\frac{b_x(x - \Delta x/2, z - \Delta z/2) + b_x(x + \Delta x/2, z - \Delta z/2)}{2} \Delta x \\ &\quad +\frac{b_z(x - \Delta x/2, z - \Delta z/2) + b_z(x - \Delta x/2, z + \Delta z/2)}{2} \Delta z \\ &\quad +\frac{b_x(x - \Delta x/2, z + \Delta z/2) + b_x(x + \Delta x/2, z + \Delta z/2)}{2} \Delta x \end{aligned}$$

Si agrupamos los términos alternos y aplicamos el concepto de derivada parcial:

$$\begin{aligned} \oint_{C_{xz}} \vec{b} \cdot d\vec{l} &\simeq \left(-\frac{\partial b_z}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial z} \right) \Delta x \Delta z \\ &= \left(\frac{z^2 - x^2}{x^2 + z^2} + \frac{x^2 - z^2}{x^2 + z^2} \right) \Delta x \Delta z \end{aligned}$$

Evidentemente, $\oint \vec{b} \cdot d\vec{l} = 0$ salvo en el caso de que $(x, z) = (0, 0)$, es decir, la integral se anula en todas las celdas que no son “atravesadas” por el hilo de corriente. En la celda travesada, sin embargo, la integración puede reconsiderarse por asimilación al ejemplo del hilo muy largo. Basta considerar para dicha celda el esquema de la parte (b) de la figura 12.3. Por analogía con lo anteriormente visto, resulta evidente que, en dicha configuración, la integración alrededor del punto $(0, 0)$ donde se encuentra el hilo resuelve la indeterminación $0/0$ dando como resultado $\oint \vec{b} \cdot d\vec{l} = 2\pi$.

Puesto que el campo magnético total creado por un sistema de corrientes obedece al principio de superposición, la situación descrita será aplicable a todos y cada uno de los hilos de corriente que lo componen, de modo que la ley de Ampère toma la forma dada por la ecuación 12.2.³

★ La ley de Ampère resulta de gran utilidad para obtener la inducción magnética debida a distribuciones de corriente con alta simetría. De hecho, en el caso del hilo infinito considerado anteriormente hemos partido del conocimiento de $\vec{\mathcal{B}}$ para verificar que su circulación coincide con el valor $\mu_o I'$, pero podríamos aplicar el argumento inverso. Partiendo del concepto de simetría que nos dice

³En realidad, quedaría por demostrar que lo dicho anteriormente sigue siendo válido para el caso de hilos que atraviesan la superficie \mathcal{A} de modo oblicuo. Esto se puede hacer en términos de deformaciones infinitesimales, alabeando las celdas consideradas.

que $\vec{\mathcal{B}}$ tiene que formar circunferencias alrededor del hilo, es evidente que si tomamos contornos circulares, la aplicación directa de la ley de Ampère nos dice:

$$\oint_C \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mathcal{B} 2\pi D = \mu_o I' \Rightarrow \mathcal{B} = \frac{\mu_o I'}{2\pi D}$$

Así pues, el cálculo de \mathcal{B} se puede simplificar notablemente (frente a la integración que conlleva la ley de Biot-Savart) si el sistema posee un grado de simetría suficiente, como es el caso del hilo infinito. Se trata de identificar *a priori* las líneas de campo sobre las que el módulo permanece constante y calcular sobre ellas la circulación. Lo veremos en los ejemplos del apartado siguiente.

12.3. Ejemplos de aplicación de Ley de Ampère

12.3.1. Ejemplo 1: cálculo de $\vec{\mathcal{B}}$ en un solenoide infinito

Teniendo en cuenta el esquema de líneas de $\vec{\mathcal{B}}$ que presentamos en la figura 11.12, podemos argumentar que cuando la longitud del solenoide aumenta mucho (en relación a su radio) existe una zona cada vez más grande en torno a su parte central para la cual dichas líneas tienden a ser paralelas al eje en el interior del solenoide. Por otra parte, conforme aumente la uniformidad de dichas líneas dentro del solenoide, en el exterior \mathcal{B} será cada vez más débil en las proximidades del mismo.⁴ Esto sugiere la construcción que muestra la figura 12.4 para obtener el valor de \mathcal{B} mediante aplicación de la ley de Ampère en el circuito \mathcal{C}

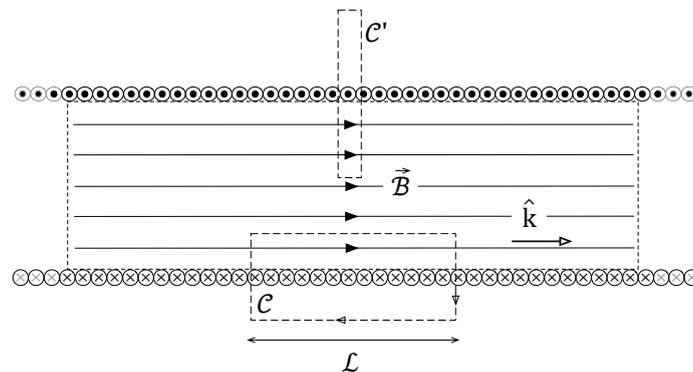


Figura 12.4: Representación de las líneas de $\vec{\mathcal{B}}$ en la zona interior (alejada de los extremos) de un solenoide cilíndrico muy largo

⁴Esto se puede razonar aplicando la ley de Ampère a un circuito como \mathcal{C}' en la figura 12.4. El valor de \mathcal{B} en el punto exterior es una medida de la diferencia en los puntos interiores

Si llamamos n al número de espiras por unidad de longitud del solenoide, la aplicación de la ley de Ampère al circuito \mathcal{C} :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I \mathcal{L}$$

pero, por otra parte

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mathcal{B} \mathcal{L}$$

Igualando ambas expresiones se obtiene:

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{k}}$$

Nótese que esta expresión es consistente con el análisis asintótico propuesto en la sección 11.2 para el caso de un solenoide cilíndrico finito, en el cual la relación L/R va tendiendo a infinito.

Nótese también que se han tenido en cuenta los aspectos “orientacionales” en la circulación sobre \mathcal{C} y el signo de la corriente, como requiere la ley de Ampère.

12.3.2. Ejemplo 2: cálculo de $\vec{\mathcal{B}}$ en un solenoide toroidal

Para terminar, vamos a evaluar el campo en el interior de un solenoide formado por un elevado número de espiras N enrolladas sobre un toroide de sección circular con radio interior a y radio exterior b según indica la figura 12.5. Dichas espiras son recorridas por una intensidad de corriente I . En estas condiciones, podremos suponer que las líneas de $\vec{\mathcal{B}}$ son circunferencias concéntricas alrededor del eje de revolución del toroide y que se encuentran restringidas al espacio interior del mismo.⁵

⁵Dicha propiedad es consecuencia inmediata de la simetría del problema, que puede asimilarse al caso anterior “cerrado sobre sí mismo”.

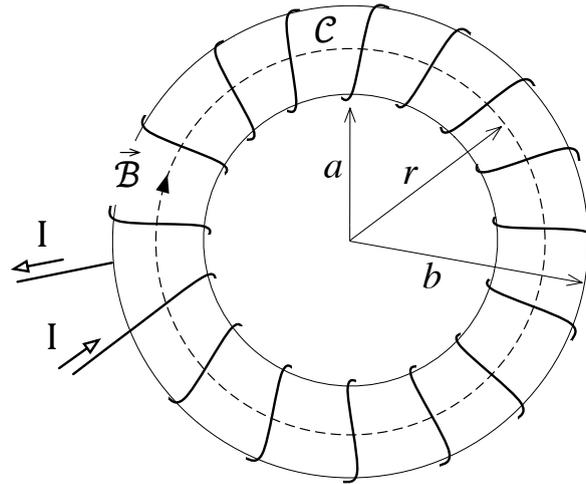


Figura 12.5: Representación de un solenoide toroidal recorrido por una intensidad de corriente I . De modo esquemático se representa un pequeño número de espiras aunque, en realidad, se supondrá que el sistema está constituido por un número muy elevado de ellas.

Aplicamos la Ley de Ampère a la circunferencia de radio r interior al toroide r (ver Fig. 12.5).

$$\oint_C \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mu_0 N I$$

$$\mathcal{B} 2 \pi r = \mu_0 N I \Rightarrow \mathcal{B} = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi r}$$

Como decíamos antes, para $r < a$ o $r > b \Rightarrow \mathcal{B} = 0$.

Por otra parte, en el caso de que $b - a \ll a, b$, es decir, si la sección de las espiras puede considerarse muy pequeña, el campo en el interior es prácticamente de módulo constante y se puede calcular como:

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi r_m}$$

donde r_m es el denominado radio medio:

$$r_m = \frac{a + b}{2}$$

La aproximación anterior constituye una herramienta útil en el frecuente caso de solenoides construidos sobre un núcleo toroidal, pero no debemos olvidar que la exactitud de la expresión requiere que se cumpla la hipótesis de simetría de revolución, lo cual sólo es válido si se tiene un elevado número de espiras de hilo muy fino. En los sistemas reales, para los que es habitual que el

solenoide esté formado por unas pocas vueltas de hilo de cierto grosor habrá que aplicarla con precaución. La forma y valor exactos del campo $\vec{\mathcal{B}}$ deberán ser obtenidos mediante procedimientos numéricos de integración de la ley de Biot-Savart.

Parte VI

ELECTROMAGNETISMO

INTRODUCCIÓN

Los capítulos que componen esta parte, denominada “Electromagnetismo” culminan la exposición de los fenómenos de interacción entre cargas en el nivel de la Física Clásica. En el capítulo 13 presentaremos un último aspecto de los mismos, que se hace presente cuando intervienen corrientes no estacionarias. A este respecto, las observaciones experimentales de M. Faraday (s. XIX) dieron lugar a la necesidad de incluir un nuevo concepto en la teoría de la Electricidad y el Magnetismo. Así pues, en general, los campos eléctrico y magnético, que hemos introducido como manifestaciones “disjuntas” (asociadas bien a cargas estáticas, bien a corrientes estacionarias) no pueden separarse si aparecen fenómenos no estacionarios. Una corriente eléctrica variable en el tiempo creará en su entorno un campo eléctrico y uno magnético ligados por la denominada Ley de Faraday.

Además de añadir la Ley de Faraday a las ya conocidas, la consideración de los fenómenos electromagnéticos conducirá a la reformulación de la Ley de Ampère en su forma estacionaria.

Finalmente, debemos añadir que, junto al indudable interés teórico que tienen estos temas, por ofrecer un panorama completo de una interacción fundamental en la naturaleza, los fenómenos electromagnéticos pueden considerarse la base de tecnologías fundamentales para nuestra sociedad. Baste citar las aplicaciones de la corriente alterna y de las ondas electromagnéticas.

Capítulo 13

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

En el capítulo 10 se introdujo el concepto de *fuerza electromotriz*. Decíamos que mantener una corriente estacionaria en un circuito requiere mantener un campo eléctrico (o una diferencia de potencial correspondiente), que el generador se ocupa de proporcionar. En muchos casos la naturaleza de estos generadores es de tipo *electromagnético*. En el siguiente ejemplo introductorio veremos cómo puede explicarse el fenómeno físico en el que están basados. El capítulo presente trata precisamente de estos fenómenos en los que las interacciones eléctricas y magnéticas se consideran con generalidad.

Ejemplo: movimiento de una varilla conductora dentro de un campo magnético

Analizaremos varias situaciones relacionadas con este sistema. Por orden de complejidad, estudiaremos los regímenes estático, estacionario y transitorio en lo que se refiere al movimiento de las cargas.

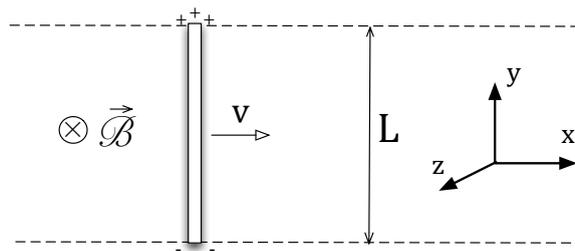


Figura 13.1: Varilla que se desplaza en el seno de un campo magnético.

1.- SITUACIÓN DE EQUILIBRIO (ESTÁTICA)

En la geometría que muestra la figura 13.1 se asume que una acción externa (por ejemplo, una fuerza mecánica) hace que la varilla se mueva con una cierta

velocidad v . Como indica el gráfico, se producirá una separación de cargas, que alcanzará una situación de equilibrio descrita por:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_e + \vec{F}_m &= 0 \\
 \downarrow \\
 \vec{F}_e &= -q\vec{v} \times \vec{\mathcal{B}} \\
 \downarrow \\
 \vec{\mathcal{E}} &= -v\mathcal{B}\hat{\mathbf{j}}
 \end{aligned} \tag{13.1}$$

Entonces, se establecerá una caída de tensión dada por:

$$\Delta^+ \mathcal{V} = v\mathcal{B}L = \mathcal{E}_{MF} \tag{13.2}$$

lo cual corresponde a presencia de una fuerza electromotriz, que esquemáticamente podemos representar por un generador como indica la figura 13.2

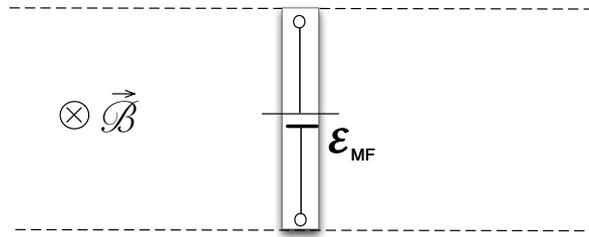


Figura 13.2: Fuerza electromotriz y generador equivalente en el movimiento de la varilla.

2.- SITUACIÓN ESTACIONARIA

Si se forma un circuito mediante la varilla anterior del modo indicado en la figura 13.3 puede alcanzarse un régimen estacionario de conducción. Éste puede describirse en términos de una sucesión de estados cuasi-estáticos correspondiendo a que la acción del generador es “rellenar” de carga sus terminales (podemos pensar en los extremos de la varilla) en intervalos de tiempo infinitesimales que se van sucediendo. Así pues, según representamos en la figura, podemos pensar en un circuito atravesado por una intensidad de corriente I dada por

$$I = \frac{\mathcal{E}_{MF}}{R} = \frac{\mathcal{B}Lv}{R} \tag{13.3}$$

Debe notarse que, al establecerse la corriente a lo largo de la varilla, surgirá una fuerza magnética $I\vec{L} \times \vec{\mathcal{B}}$ que se opone al movimiento de la misma. Por

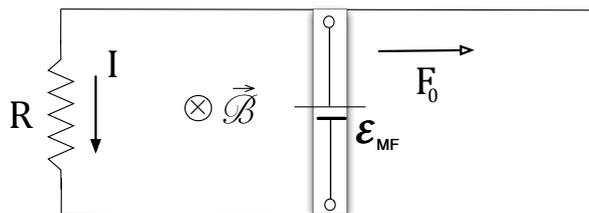


Figura 13.3: Fuerza electromotriz y generador equivalente en el movimiento de la varilla.

tanto, el régimen de velocidad constante (estacionario) se mantendrá en tanto en cuanto se aplique una fuerza mecánica (\vec{F}_0) que contrarreste el efecto de frenado de la fuerza magnética. Esta tendrá el valor:

$$\vec{F}_0 = \frac{\mathcal{B}^2 L^2}{R} v \hat{i} \quad (13.4)$$

Un resultado importante que puede verificarse mediante este ejemplo es el balance energético en el sistema. Nótese que la potencia que suministra la fuerza externa (es decir $\vec{F}_0 \cdot \vec{v}$) coincide con la que se está disipando en la resistencia $I^2 R$

3.- SITUACIÓN TRANSITORIA

En el anterior apartado hemos supuesto que existe una acción externa F_0 que se ocupa de proporcionar la energía que pierden las cargas al recorrer el circuito. Podríamos decir que el fenómeno electromagnético realiza un papel intermediario al transferir energía mecánica que se invierte en compensar las pérdidas. Resulta evidente que para cada valor de la velocidad de la varilla existe un valor de la fuerza que compensa las pérdidas correspondientes (dado por la ecuación (13.4)). Sin embargo, es obvio que al aplicar la fuerza F_0 desde un cierto estado inicial con una velocidad “no correspondiente” deberá transcurrir un cierto transitorio de acomodo al estado final estacionario. Para describirlo basta plantear la segunda ley de Newton del sistema. Si la varilla posee una masa M tenemos:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_0 + \vec{F}_m &= M \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 \Downarrow \\
 F_0 - \frac{\mathcal{B}^2 L^2}{R} v &= M \frac{dv}{dt} \\
 \Downarrow \\
 \frac{M dv}{F_0 - (\mathcal{B}^2 L^2 / R) v} &= dt \\
 \Downarrow \\
 v(t) &= \frac{RF_0}{\mathcal{B}^2 L^2} \left[1 - e^{-(\mathcal{B}^2 L^2 / MR)t} \right] \quad (13.5)
 \end{aligned}$$

13.1. Ley de Faraday

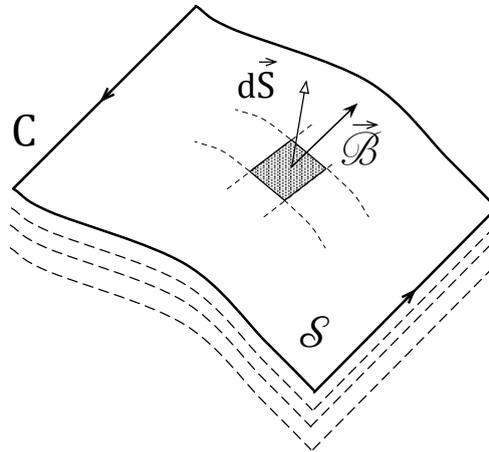


Figura 13.4: Definición de flujo a través de un circuito.

Alrededor del año 1830 Michael Faraday realizó una serie de experimentos que sistematizaron y generalizaron las observaciones de aparición de fuerza electromotriz en sistemas electromagnéticos. En este apartado enunciaremos la “ley de Faraday”, que expresa de modo matemático las conclusiones de dichos experimentos. Como veremos, contiene en particular los resultados que hemos analizado en el experimento descrito antes.

Para comenzar, recurrimos de nuevo al concepto de flujo, elemento clave de la ley de Gauss (Cap.5). En el caso que nos ocupa, trabajaremos con el flujo del campo magnético a través de superficies abiertas (Fig.13.4). Frecuentemente,

en los problemas que trataremos, el contorno de dichas superficies coincidirá con “circuitos” por los que puede circular corriente de carga. En la figura, el flujo de $\vec{\mathcal{B}}$ a través del circuito marcado se expresa¹

$$\Phi_B \equiv \int_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S} \quad (13.6)$$

Para aplicaciones posteriores, conviene aclarar que si el circuito perimetral está formado por un arrollamiento de N espiras como indica la figura, el flujo a calcular será

$$\Phi_B = N \int_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S} \quad (13.7)$$

Digamos también que $\vec{\mathcal{B}}$ es el campo magnético total que existe sobre la superficie S . Puede tener su origen tanto en sistemas externos como en una posible corriente que circule a lo largo del circuito C .

Hechas los anteriores comentarios, la Ley de Faraday se expresa mediante la relación²

$$\mathcal{E}_{MF} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (13.8)$$

es decir: *la fuerza electromotriz inducida sobre un circuito dado es igual a la variación temporal (derivada negativa) del flujo magnético que atraviesa dicho circuito* Para concluir este apartado, conviene hacer algunos comentarios

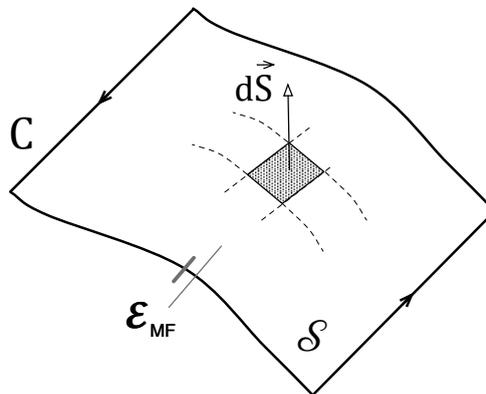


Figura 13.5: Aspectos *orientacionales* de la ley de Faraday.

¹Se puede demostrar que el flujo es el mismo para cualquier superficie topológicamente equivalente a la que se muestra

²lo cual es evidente que recoge la situación descrita en la figura 13.3 sin más que considerar $\Phi_B = \mathcal{B}Lx$

adicionales.

★ **Aspectos geométricos (orientación):** la ecuación (13.8) contiene de modo implícito algunos aspectos de orientación que deben tenerse en cuenta. Podemos entenderlos en la figura 13.5. Así pues, el cálculo de Φ_B lleva incluido un sentido para el vector de superficie $d\vec{S}$, que corresponde al sentido de circulación indicado (y elegible) en el perímetro C . Una vez elegido dicho sentido, entendemos por \mathcal{E}_{MF} la fuerza electromotriz en la misma orientación. El signo que obtengamos al calcular \mathcal{E}_{MF} mediante (13.8) en un problema concreto nos indicará si corresponde al sentido elegido (caso +) o al opuesto (caso -).

Para comprender mejor el sentido orientacional de \mathcal{E}_{MF} debemos considerar que esta magnitud “circuital” no es otra cosa que el trabajo realizado por el campo para desplazar la unidad de carga por el circuito, es decir

$$\mathcal{E}_{MF} = \oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} \quad (13.9)$$

donde $d\vec{l}$ apunta en el sentido correspondiente a la elección de giro sobre C .

Variación temporal de Φ_B : nótese que, dado un circuito C determinado, Φ_B puede cambiar tanto por movimiento o deformación del mismo, como por variación temporal del campo \mathcal{B} que “fluye” a través de él (eventualmente de ambos aspectos). En el ejemplo inicial que se presentó en este capítulo nos centrábamos en un problema en el cual la variación estaba asociada a la “deformación” del circuito (figura 13.3). En el siguiente apartado lo haremos en el caso de circuitos indeformables e inmóviles, sometidos a un campo magnético variable.

13.2. Autoinducción e inducción mutua

Si suponemos un circuito **aislado**, **inmóvil** e **indeformable**, recorrido por una cierta intensidad de corriente, las variaciones de Φ_B estarán asociadas a las de la intensidad que lo atraviesa $I(t)$:

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \equiv L \frac{dI}{dt}$$

donde el coeficiente L se denomina coeficiente de autoinducción y se mide en henrios: $1 \text{ h} = 1 \text{ T m}^2/\text{A}$.

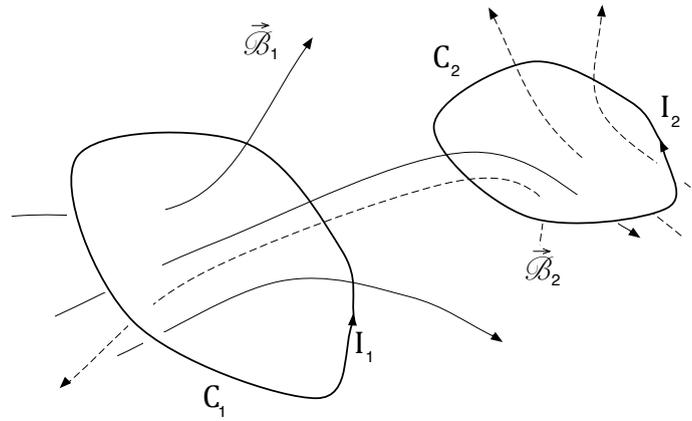


Figura 13.6: Efectos de autoinducción e inducción mutua entre circuitos de corriente.

En muchas situaciones puede asumirse linealidad,³ es decir: $\Phi_B = k I \Rightarrow L = \Phi_B/I$.

Nótese que, para un circuito aislado, rígido e inmóvil la ley de Faraday se expresa:

$$\mathcal{E}_{MF} = -L \frac{dI}{dt}$$

Cuando en lugar de tener un solo circuito coexisten varios, el flujo que produce cada uno de ellos influye en todos los demás. Esto se ilustra en la figura 13.6. Supondremos en lo que sigue que todos los circuitos son rígidos e indeformables. Si aplicamos el principio de superposición:

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^N \Phi_{ij}$$

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \sum_j \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt} \equiv M_{ij} \frac{dI_j}{dt}$$

donde M_{ij} son los denominados coeficientes de inducción mutua. Cuando los subíndices coinciden esto se reduce al caso anterior, es decir: $M_{ii} \equiv L_i$.

A efectos prácticos, es conveniente mencionar dos propiedades de los coeficientes de inducción que pueden demostrarse en términos de las expresiones del campo magnético generado por un circuito de corriente:

³En general, esto es válido si las fuentes de campo magnético se restringen a circuitos de corrientes libres. Así ocurre, en particular, en ausencia de materiales magnéticos no lineales

$$\begin{aligned} L_i &> 0 \quad \forall i \\ M_{ij} &= M_{ji} \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (13.10)$$

Ejemplo: coeficiente de autoinducción de un solenoide cilíndrico.

En el caso de un solenoide cilíndrico muy largo (ver figura 12.4) el cálculo de L por unidad de longitud es como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_B}{\ell} &= n\mathcal{B}S = \mu_0 n^2 I S \\ &\quad \downarrow \\ \frac{L}{\ell} &= \frac{1}{\ell} \frac{d\Phi_B}{dI} = \mu_0 n^2 S \end{aligned} \quad (13.11)$$

siendo S la sección del solenoide y ℓ su longitud.

Nótese que L es una propiedad geométrica del sistema de corrientes al que se asocia.

13.3. Densidad de energía magnetostática

13.3.1. Energía de autoinducción.

Recordemos que la expresión de la potencia suministrada por el campo electromagnético a un sistema por el que circula corriente I , sometido a una caída de tensión $\Delta^+ \mathcal{V}$ es $\mathcal{P} = \Delta^+ \mathcal{V} I$. Si lo aplicamos al caso de “cargar de corriente” un circuito, teniendo en cuenta el efecto de fuerza electromotriz se tiene que la potencia suministrada será:

$$\mathcal{P} = \mathcal{E}_{MF} I = L I \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) \equiv \frac{dU_B}{dt}$$

El *sector* de energía U_B que acabamos de definir se puede considerar almacenado en el campo magnético asociado a la corriente eléctrica final. Aquí lo hemos expresado en términos de dicha corriente y el coeficiente de autoinducción.

13.3.2. Densidad de energía almacenada en el campo: ejemplo

En este caso obtendremos U_B para un toroide de radio medio r_m , N vueltas y sección S como el estudiado en el segundo ejemplo del apartado 12.3.

Recordemos que aplicando la Ley de Ampère:

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 N I}{2 \pi r_m}$$

por lo tanto

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 N^2 I S}{2 \pi r_m}.$$

Entonces:

$$L = \frac{d\Phi_B}{dI} = \frac{\mu_0 N^2 S}{2 \pi r_m}$$

y la energía almacenada

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 N^2 S}{2 \pi r_m} \right) I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 2 \pi r_m N^2 S}{(2 \pi r_m)^2} I^2.$$

Nótese que este resultado permite obtener una forma alternativa para expresar U_B en términos de una densidad de energía (u_B) asociada al campo magnético

$$U_B = \left(\frac{\mathcal{B}^2}{2 \mu_0} \right) vol \equiv u_B vol$$

Capítulo 14

ECUACIONES DE MAXWELL. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

En los capítulos 4 a 6 estudiábamos las propiedades esenciales del campo electrostático $\vec{\mathcal{E}}$. Este se relaciona con la existencia de la carga eléctrica y define la interacción coulombiana entre ellas. Como resultado central se vio que $\vec{\mathcal{E}}$ cumple la ley de Gauss, propiedad geométrica global¹ que relaciona su flujo sobre una superficie cerrada con la carga total contenida en esta.

En los capítulos 11 a 12 hemos introducido el otro campo esencial relacionado con la interacción entre cargas, la inducción magnético $\vec{\mathcal{B}}$, que incorpora un aspecto adicional: el movimiento de estas. En este caso, como propiedad geométrica global hemos obtenido la ley de Ampère, que se relaciona con la circulación de $\vec{\mathcal{B}}$ en torno a las corrientes que la producen.

Finalmente, en el capítulo 13 hemos analizado algunos aspectos del fenómeno electromagnético general. Como resultado básico hemos obtenido otra propiedad global, la ley de Faraday, que relaciona la aparición de campo eléctrico a lo largo de un circuito (en realidad de una *fuerza electromotriz*, o trabajo sobre la carga unidad) con la variación temporal del flujo de $\vec{\mathcal{B}}$ a través de la superficie que limita dicho contorno.

En el presente capítulo vamos a completar la visión sobre el campo electromagnético. Tomaremos como idea básica que los campos $\vec{\mathcal{E}}$ y $\vec{\mathcal{B}}$ son, en realidad, manifestaciones de una interacción que los engloba: en el primer caso, la que resulta evidente para cargas netas en reposo para el observador, y en el segundo para cargas en movimiento cuando se mantiene la neutralidad

¹En un sentido más fundamental podemos decir que la ley de Gauss es una ecuación topológica, puesto que es válida para superficies cerradas de tamaño y forma arbitraria alrededor de las cargas.

del medio. En forma preliminar, este concepto fue brillantemente introducido por J. C. Maxwell en 1861, que completó las leyes anteriormente citadas con la idea esencial de simetría en las leyes de la Física. En particular, formuló la acción de un flujo de campo eléctrico variable en el tiempo como fuente de *fuerza magnetomotriz* o circulación de $\vec{\mathcal{B}}$ sobre un circuito. La compilación de todas estas ideas constituye el conjunto de “Ecuaciones de Maxwell”, piedra angular de la teoría electromagnética.

Para finalizar el capítulo, y a modo de aplicación de las leyes de Maxwell, daremos una breve introducción a la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío.

14.1. Ley de Ampère-Maxwell

En el capítulo 12 se demostró que, en el caso de corriente estacionaria, la circulación de $\vec{\mathcal{B}}$ a lo largo de un contorno \mathcal{C} coincide con la suma de las corrientes que atraviesan la superficie \mathcal{S} cuyo contorno es \mathcal{C} . Esto constituye la ley de Ampère y su validez radica en la expresión de $\vec{\mathcal{B}}$, que a su vez procede del experimento de Ampère para corrientes estacionarias. Por otra parte, hemos introducido el concepto de ecuación topológica y parecería que la ley de Ampère pertenece a esta categoría. Sin embargo, basta pensar en un sencillo experimento como el que muestra la figura 14.1 para comprender que la ley debe ser modificada, con el fin de poder incluir el caso de corrientes no estacionarias.

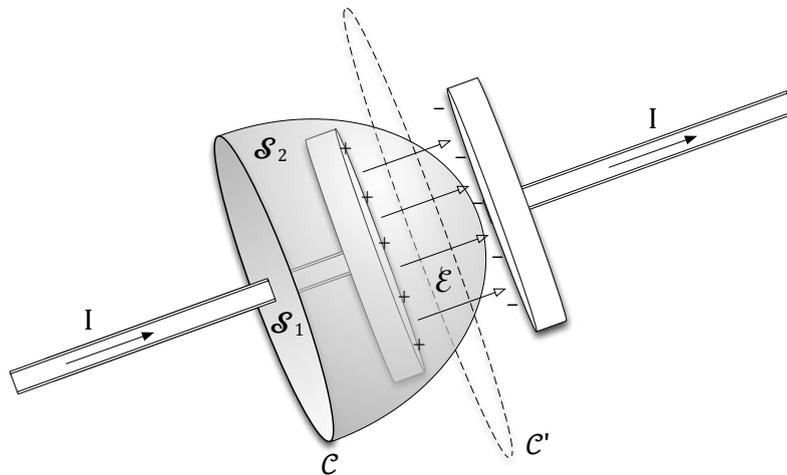


Figura 14.1: Proceso de acumulación de carga en un condensador plano-paralelo

Si aplicamos la ley de Ampère al circuito \mathcal{C} obtenemos:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

en el caso de considerar \mathcal{S}_1 como superficie soportada por \mathcal{C} .

Sin embargo, si consideramos \mathcal{S}_2 :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = 0,$$

contradicción que debe ser resuelta, puesto que es inconsistente con el esperado carácter topológico de la ley (lo contrario significaría que el resultado obtenido depende de la elección de la superficie auxiliar \mathcal{S} !!)

La solución, brillantemente propuesta por Maxwell consiste en generalizarla mediante un término adicional que se hace presente en situaciones no estacionarias. Basta introducir un término de corriente equivalente, asociado a la acumulación de carga

$$\frac{dQ}{dt} = I_d$$

que denominaremos “corriente de desplazamiento”.

Nótese que si aplicamos la Ley de Gauss para el flujo del campo eléctrico a la superficie cerrada que forman \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 tenemos:²

$$\frac{dQ}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}_2} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S}$$

puesto que

$$\int_{\mathcal{S}_1} \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 0$$

Así pues, añadiendo el término de corriente de desplazamiento a la ley de Ampère, tenemos

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} \equiv \mu_0 I_{enc} + \mu_0 I_d = \mu_0 \left(I_{enc} + \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right).$$

Con esto logramos que la identidad se cumpla tanto si consideramos \mathcal{S}_1 (entonces $I_d = 0$), como si tomamos \mathcal{S}_2 (entonces $I_{enc} = 0$) si se satisface la igualdad

$$I_d = I_{enc} \equiv I \tag{14.1}$$

²En este capítulo, de forma excepcional nos referimos al flujo del campo eléctrico como ϕ_E . Se hace así para evitar confusión puesto que también se menciona el flujo del campo magnético.

Esta igualdad, en realidad, confiere sentido físico a la corriente de desplazamiento. Puesto que la carga eléctrica se conserva, no es otra cosa que la consecuencia de la acumulación de carga cuando ésta es transportada en un circuito no cerrado.

Un método experimental para verificar la realidad de esta ley sería medir \mathcal{B} a lo largo de las curvas \mathcal{C} y \mathcal{C}' . Según la ecuación 14.1, en ambos casos obtendríamos

$$\mathcal{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (14.2)$$

(cosa que realmente ocurre en los experimentos).

La ecuación 14.1 se denomina ley de Ampère-Maxwell y como anunciábamos al principio del capítulo es la equivalente a la ley de Faraday, relaciona la variación temporal de Φ_E con la fuerza magnetomotriz $\oint \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l}$.

14.2. Ecuaciones de Maxwell

Como decíamos anteriormente, uno de los grandes logros de J. C. Maxwell fue la introducción del concepto de corriente de desplazamiento. Entre otras consecuencias, al completar la ley de Ampère mediante dicho término se pone de relevancia la simetría de la naturaleza, en cuanto a la generación de campos eléctricos o magnéticos, mediante la variación de flujo de la otra magnitud. Este es un hecho fundamental en la teoría electromagnética, que Maxwell formuló en términos de 4 ecuaciones que recopilamos a continuación y que acoplan los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} entre sí y con sus fuentes. Debemos recalcar que la unificación de los fenómenos eléctricos y magnéticos fue un gran logro, ya que hasta ese momento se describían como relacionados pero de diferente naturaleza.

- Primera Ley de Maxwell:

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc}$$

Esta es la Ley de Gauss para el campo eléctrico. En esencia describe la naturaleza de sus fuentes. Allí donde hay cargas, nacen o mueren las líneas de campo eléctrico, cuyo flujo a través de una superficie está determinado por la cantidad total de carga encerrada.

- Segunda Ley de Maxwell (ley de Gauss para \mathcal{B}):

$$\oint_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S} = 0$$

Esta Ley establece que el flujo de $\vec{\mathcal{B}}$ es nulo a través de cualquier superficie cerrada. Corresponde al hecho de que las líneas de $\vec{\mathcal{B}}$ no convergen hacia ni divergen desde ningún punto del espacio. Dicho de otro modo, no existe la “carga magnética”. Puede demostrarse que esta ley es consecuencia directa de la expresión de Biot-Savart (capítulo 11).

- Tercera Ley de Maxwell:

$$\oint_C \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S}$$

Ésta es la Ley de Ampère generalizada, que se trató en el apartado anterior.

- Cuarta Ley de Maxwell:

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S}$$

Es la Ley de Faraday. Describe la aparición de campos eléctricos por variación temporal del flujo de $\vec{\mathcal{B}}$.

14.3. Ondas electromagnéticas

Probablemente, la aplicación más importante de las ecuaciones de Maxwell sea la comprensión del fenómeno de propagación del campo electromagnético en el vacío. En palabras del propio Einstein, *Maxwell fue la primera persona en comprender verdaderamente la naturaleza de la propagación de la luz*. En este apartado, vamos a comprobar que las ondas planas transversales constituyen una solución coherente de las ecuaciones de Maxwell.³ Más concretamente, verificaremos que, en el vacío, un campo electromagnético con la siguiente configuración en un cierto marco de coordenadas:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= (0, \mathcal{E}(x, t), 0) \\ \vec{\mathcal{B}} &= (0, 0, \mathcal{B}(x, t)), \end{aligned} \quad (14.3)$$

³Debemos recalcar que nos limitaremos a presentar un argumento de plausibilidad, analizando una situación particular. La generalidad del resultado puede obtenerse mediante técnicas de cálculo diferencial vectorial. La elección de una solución en la cual $\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{B}}$ resulta *razonable* si pensamos en la estructura de los campos en las configuraciones típicas estudiadas (por ejemplo, la que muestra la figura 14.1).

y que se propaga a una cierta velocidad v a lo largo del eje x es una solución de las ecuaciones de Maxwell, en tanto en cuanto v coincida con la velocidad de la luz.

Supongamos, como indica la figura 14.2, que un fenómeno electromagnético dado por la expresión 14.3 avanza en el sentido positivo del eje x . El avance de la propagación se traduce en que el campo electromagnético va alcanzando puntos del espacio en los que inicialmente teníamos $\mathcal{E} = 0, \mathcal{B} = 0$ (los que se encuentran a la derecha del elemento de volumen considerado en el instante que se visualiza, para el cual \mathcal{E} y \mathcal{B} adquieren un valor uniforme dentro del paralelepípedo).⁴

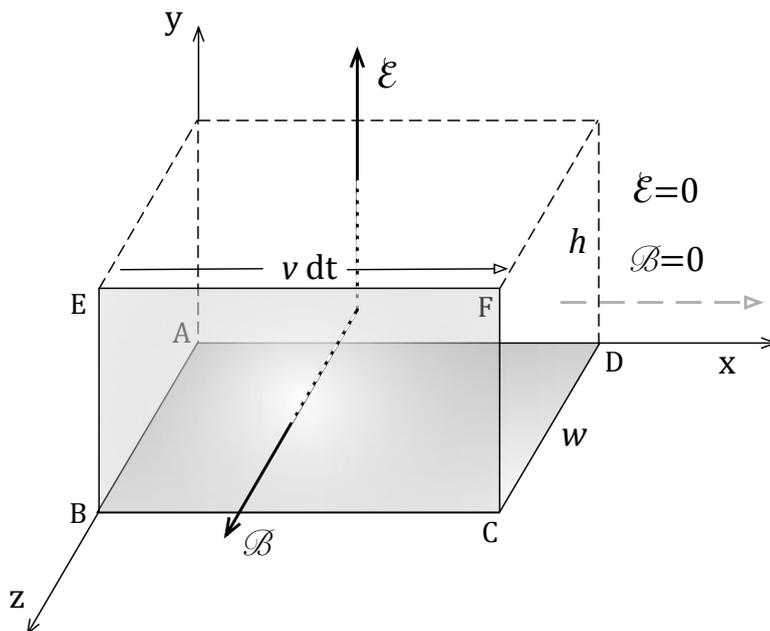


Figura 14.2: Campos eléctrico y magnético que se propagan a velocidad v a lo largo del eje x , correspondiendo a las expresiones (14.3)

En primer lugar, vamos a verificar que los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} propuestos cumplen las leyes de Gauss correspondientes. En el esquema de la figura resulta sencillo entender que:

$$\oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = 0$$

⁴En cuanto al posible origen físico de este tipo de perturbación, los campos \mathcal{E} y \mathcal{B} mostrados podrían originarse mediante la oscilación de cargas eléctricas en la dirección del eje y .

y

$$\oint_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S} = 0,$$

ecuaciones que corresponden a un campo electromagnético en una región con ausencia de cargas (vacío).⁵

En cuanto a la ley de Ampère-Maxwell, veamos qué implica su aplicación al circuito ABCD.⁶ Al no existir corriente de transporte de carga:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} \\ &\Downarrow \\ \mathcal{B}w &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\mathcal{E}wvdt}{dt} \\ &\Downarrow \\ \mathcal{B} &= \mu_0 \epsilon_0 v \mathcal{E} \end{aligned} \quad (14.4)$$

Por otro lado, si aplicamos la ley de Faraday al circuito BCFE

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S} \\ &\Downarrow \\ -\mathcal{E}h &= -\frac{\mathcal{B}hvdt}{dt} \\ &\Downarrow \\ \mathcal{E} &= v\mathcal{B}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Evidentemente, para que los campos cumplan ambas leyes debe verificarse que

$$\mu_0 \epsilon_0 v^2 = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \equiv c \quad (14.6)$$

es decir, *la propagación transversal de un campo electromagnético en el modo que indica la figura 14.2 cumple las leyes de Maxwell en el vacío, con una velocidad de avance c , que es la velocidad de la luz.*

⁵Los flujos de \mathcal{E} y \mathcal{B} se cancelan puesto que ambos vectores se suponen constantes en las caras opuestas de la superficie cerrada de la figura.

⁶En esta deducción vamos a suponer que el avance de los campos se produce a “saltos discretos”, es decir que en el instante dado podemos aproximar que tenemos valores uniformes de \mathcal{E} y \mathcal{B} en toda la región, que caen bruscamente a 0 a su derecha.

Para verificar que dicha propagación corresponde realmente a la de una onda que avanza a velocidad v sin deformación, basta reconsiderar las leyes de Ampère-Maxwell y Faraday con algo más de detalle. De hecho, volviendo a los circuitos ABCD y BCFE, pero considerando ahora que los campos no son nulos en el extremo derecho, sino que toman los valores $\mathcal{E}(x + dx, t)$ y $\mathcal{B}(x + dx, t)$ frente a $\mathcal{E}(x, t)$ y $\mathcal{B}(x, t)$ en el izquierdo,⁷ obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad (14.7)$$

Tomando derivadas cruzadas esto conduce a la conocida “ecuación de ondas” para ambos campos

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2}} \quad (14.8)$$

Digamos para concluir que la manipulación adecuada de las leyes de Maxwell permite obtener las propiedades de propagación de las ondas electromagnéticas en las condiciones de cada problema (tipo de fuente, simetría, ...). Un hecho común para todos ellos es que la radiación electromagnética no requiere soporte físico alguno para propagarse. Es el propio campo el que transporta energía y momento lineal en la dirección de avance de la onda.

Este último punto resulta de gran importancia conceptual. Por ejemplo, si se analiza la ecuación (11.3) se encuentra que existen configuraciones de sistemas de dos cargas puntuales en movimiento, para las cuales la interacción allí descrita “no cumple” la tercera ley de Newton. Puede demostrarse que el momento lineal que compensa el desequilibrio entre acción y reacción reside en el campo electromagnético, que transporta energía y momento lineal. El lector podrá verificar la aparente paradoja, aunque su solución requiere argumentos más especializados que los que aparecen en estos apuntes.

⁷Es decir, utilizando un modelo continuo, más realista que la simplificación anterior, que se basaba en una discretización, la cual describe el avance de los campos “a saltos”

Parte VII

ADDENDA

GLOSARIO

Para facilitar la lectura de estos apuntes, se incluye a continuación la lista de símbolos y abreviaturas más usados en el texto. Este glosario es de uso común para todos los volúmenes de la serie.

■ ALFABETO GRIEGO

Mayúsculas	Minúsculas	Nombre	Letra latina
A	α	Alfa	A
B	β	Beta	B
Γ	γ	Gamma	G (ga, gue,...)
Δ	δ	Delta	D
E	ϵ, ε	Épsilon	E (breve)
Z	ζ	Dseta	DS
H	η	Eta	E (larga)
Θ	θ	Zeta	Z (za, ce,...)
I	ι	Iota	I
K	κ	Kappa	K (ka, que,...)
Λ	λ	Lambda	L
M	μ	Mu	M
N	ν	Nu	N
Ξ	ξ	Xi	X (ks)
O	\omicron	Ómicron	O (breve)
Π	π	Pi	P
P	ρ	Rho	R
Σ	σ	Sigma	S
T	τ	Tau	T
Y	υ	Ípsilon	U francesa
Φ	ϕ, φ	Fi	F
X	χ	Ji	J
Ψ	ψ	Psi	PS
Ω	ω	Omega	O (larga)

- **A**

\vec{a} . Vector aceleración de una partícula.

\vec{A}_{CM} . Aceleración del Centro de Masas.

A. Amperio, unidad de corriente eléctrica del Sistema Internacional.

A. Amplitud de oscilación.

$d\vec{A}$. Vector superficie.

\mathcal{A} . Superficie completa de integración.

- **B**

$\vec{\mathcal{B}}$. Vector inducción del campo magnético.

- **C**

C. Capacidad.

CM. Centro de Masas.

CG. Centro de Gravedad.

C. Circuito de corriente.

\mathcal{C} . Circuito de integración.

- **D**

δ . Desfase que da la posición inicial en una oscilación.

$\vec{\mathcal{D}}$. Vector desplazamiento eléctrico.

$\delta\mathcal{V}$. Variación del potencial electrostático al pasar de un punto a otro.

$d\mathcal{V}$. Contribución al potencial por un elemento de carga dQ .

Δx . Incremento finito de la variable (o función) x

$d\vec{\ell}$. En magnetostática, elemento de circuito que lleva corriente.

$d\vec{l}$. En magnetostática, elemento de contorno al integrar $\vec{\mathcal{B}}$

- **E**

E . Energía mecánica.

$\vec{\mathcal{E}}$. Vector campo eléctrico.

\mathcal{E}_{MF} . Fuerza electromotriz.

ϵ_0 . Permeabilidad eléctrica del vacío.

ϵ . Permeabilidad eléctrica de un dieléctrico.

ϵ_r . Permeabilidad eléctrica relativa (también llamada constante dieléctrica).

■ **F**

\vec{F} . Vector fuerza.

\vec{F}_v . Vector fuerza de rozamiento viscoso.

Φ . Flujo del campo eléctrico (ocasionalmente Φ_E).

Φ_B . Flujo del campo magnético.

Fig(s). Figura(s)

■ **G**

\vec{g} . Aceleración de la gravedad.

G . Constante de gravitación universal.

■ **H**

\vec{H} . Vector campo magnético.

Hz. Unidad de frecuencia (ciclos / segundo).

■ **I**

\hat{i} . Vector unitario del eje X en un sistema de coordenadas cartesiano.

I. Momento de inercia o corriente eléctrica.

\vec{L} . Impulso lineal.

■ **J**

\hat{j} . Vector unitario del eje Y en un sistema de coordenadas cartesiano.

\vec{J} . Densidad volúmica de corriente eléctrica.

J. Julio, unidad de energía del Sistema Internacional.

\vec{J} . Impulso angular.

■ **K**

\hat{k} . Vector unitario del eje Z en un sistema de coordenadas cartesiano.

k . Constante elástica del muelle.

\vec{K} . Densidad superficial de corriente eléctrica.

kg. Kilogramo, unidad de masa del Sistema Internacional.

■ **L**

\vec{l} . Momento angular de una partícula.

\vec{L} . Momento angular de un sistema de partículas.

■ **M**

μ_0 . Permeabilidad del vacío.

μ . Coeficiente de rozamiento.

μ_d . Coeficiente de rozamiento dinámico.

μ_e . Coeficiente de rozamiento estático.

m. Metro, unidad de longitud del Sistema Internacional.

m . Masa de una partícula.

M . Masa de un sistema de partículas.

m_i . Masa inercial.

m_g . Masa gravitatoria.

MAS . Movimiento armónico simple.

■ **N**

ν . Frecuencia de oscilación.

n . Portadores de carga por unidad de volumen.

N . Suele utilizarse como valor final de un índice en sumatorios,
por ejemplo, al calcular la media indica el número de medidas.

\vec{N} . Normal, reacción del plano en que se apoya un cuerpo.

■ **O**

ω . Frecuencia angular.

Ω . Ohmio, unidad de resistencia.

■ **P**

Pág(s). Página(s).

\vec{p} . Momento lineal de una partícula.

\vec{P} . Momento lineal del sistema de partículas (o de la partícula CM).

\vec{P} . Peso.

\mathcal{P} . Potencia.

■ **Q**

q . Carga eléctrica.

Q . Carga eléctrica.

■ R

$\hat{\rho}$. Vector unitario en un sistema de coordenadas polares.

\vec{r} . Vector posición de una partícula.

R . Radio de circunferencia.

\vec{R} . Fuerza de ligadura o de reacción.

\vec{R} . Vector posición del Centro de Masas.

■ S

$d\vec{S}$. Vector superficie.

S . Superficie completa de integración.

σ_{n-1} . Desviación típica.

$\sigma_{\bar{x}}$. Error cuadrático medio.

s. Segundo, unidad de tiempo del Sistema Internacional.

Sol. Solución.

■ T

t . Variable tiempo.

T_i . Energía cinética de una partícula.

T . Energía cinética de un sistema de partículas.

\vec{T} . Tensión.

τ . Momento de una fuerza.

\mathcal{T} . Período.

■ U

\hat{u}_N . Vector unitario normal (coordenadas intrínsecas).

\hat{u}_T . Vector unitario tangencial (coordenadas intrínsecas).

\mathcal{U} . Energía potencial.

■ V

\vec{v} . Vector velocidad de una partícula.

\vec{V} . Velocidad del Centro de Masas.

\vec{v}_m . Vector velocidad media.

\mathcal{V} . Potencial electrostático.

η . Viscosidad.

■ **W**

$\vec{\omega}$. Velocidad angular.

ω_o . Frecuencia angular de oscilación.

W . Trabajo.

■ **X**

\bar{x} . Media aritmética de la variable x .

■ **Z**

$\hat{\theta}$. Vector unitario en un sistema de coordenadas polares.

Parte VIII

FORMULARIO

FORMULARIO SOBRE ELECTROMAGNETISMO

1.- Ley de Coulomb/Principio de superposición/Campo electrostático:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = \sum_{j \neq i} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} = q_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \equiv q_i \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}_i)$$

2.- Campo electrostático debido a distribuciones continuas:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}) = \int d\vec{\mathcal{E}} = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl'$$

3.- Ley de Gauss:

$$\Phi_S = \oint_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

4.- Relación campo/potencial electrostático:

$$\vec{\mathcal{E}} = -\vec{\nabla}\mathcal{V} \Leftrightarrow \delta\mathcal{V} = -\vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \Delta\mathcal{V} = \mathcal{V}_b - \mathcal{V}_a = \int_a^b \delta\mathcal{V} = - \int_a^b \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l}$$

5.- Energía electrostática almacenada:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j(\vec{r}_i) \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \mathcal{V}(\vec{r}_i) = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 d(vol)$$

6.- Campo electrostático en un dieléctrico lineal:

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{\vec{\mathcal{D}}}{k\epsilon_0} \equiv \frac{\vec{\mathcal{D}}}{\epsilon}$$

7.- Caída de tensión en una resistencia: ley de Ohm macro- y microscópica:

$$\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^- \equiv \Delta^+ \mathcal{V} = IR \Leftarrow \vec{\mathcal{E}} = \rho \vec{J}$$

8.- Ecuación de continuidad:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

9.- Fuerza magnética entre dos circuitos:

$$\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_{C'} \frac{I I' d\vec{\ell} \times [d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \equiv \oint_C [I d\vec{\ell} \times \vec{\mathcal{B}}]$$

10.- Par de giro sobre una espira:

$$\vec{\tau}_0 = I \vec{S} \times \vec{\mathcal{B}} \equiv \vec{m} \times \vec{\mathcal{B}}$$

11.- Ley de Biot-Savart:

$$\vec{\mathcal{B}} \equiv \int_{C'} d\vec{\mathcal{B}} = \frac{\mu_0 I'}{4\pi} \int_{C'} \frac{d\vec{\ell}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

12.- Ley de Ampère:

$$\oint_C \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc}$$

13.- Ley de Faraday:

$$\oint_C \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_{MF} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

14.- Coeficientes de autoinducción e inducción mutua:

$$\frac{d\Phi_i}{dt} = \sum_j \frac{d\Phi_{ij}}{dI_j} \frac{dI_j}{dt} \equiv \sum_j M_{ij} \frac{dI_j}{dt} \quad , \quad M_{ii} \equiv L_i$$

15.- Energía magnetostática almacenada (en un solenoide):

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \int \left(\frac{\mathcal{B}^2}{2\mu_0} \right) d(vol)$$

16.- Ley de Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{S}$$