

Applications linéaires

Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$.

1 RAPPELS

1.1 DÉFINITIONS ET EXEMPLES

Définition 1 : Application linéaire

On dit que $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire si

- $\forall (x, y) \in E^2, u(x + y) = u(x) + u(y)$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x) = \lambda u(x)$

Ce qui peut se contracter en $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Rappel de vocabulaire

Isomorphisme	=	Application linéaire bijective
Endomorphisme	=	Application linéaire de E dans E
Automorphisme	=	Endomorphisme de E bijectif
Forme linéaire	=	Application linéaire de E dans $\mathbb{K}$

N'oubliez pas...

Une application linéaire est un morphisme de groupes (pour la loi additive),

$$u(0_E) = 0_F.$$

Une application linéaire "conserve" les combinaisons linéaires

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i).$$

Exemple 1

L'application nulle, $0_{\mathcal{L}(E, F)} : E \rightarrow F$, définie par $0_{\mathcal{L}(E, F)}(x) = 0_F$, pour tout $x \in E$, est une application linéaire.

L'application identité $\text{Id}_E : E \rightarrow E$, définie par $\text{Id}_E(x) = x$, est une application linéaire.

Les homothéties, $h_\lambda : E \rightarrow E$, définie, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, par $h_\lambda(x) = \lambda x$, sont des applications linéaires.

Les translations, $t_y : E \rightarrow E$, définie, pour tout $y \in E$, par $t_y(x) = x + y$, **ne sont pas** des applications linéaires.

La fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **n'est pas** une application linéaire.

Pour tout intervalle I , l'application $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

L'application $f \mapsto \int_0^1 f$ est une forme linéaire de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

L'application $u \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est une forme linéaire de l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.

Pour tout $x \in \mathbb{K}$, l'application $P \mapsto P(x)$ d'évaluation en x est une forme linéaire de $\mathbb{K}[X]$.

Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, l'application $P \mapsto AP$ de multiplication par A est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, l'application $P \mapsto P \circ Q$ de composition à droite par Q est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

L'application $P \mapsto P'$ de dérivation est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

Vous avez donc beaucoup d'exercices à faire !

Cas des application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Il est possible de montrer que si une application

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{j=1}^n f_{j1}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n f_{jn}x_j \right),$$

où les f_{ji} sont des scalaires qui définissent f , donne les coordonnées du vecteur arrivée par combinaisons linéaires des coordonnées du vecteur de départ, alors f est linéaire. Prenez par exemple,

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - 5y + z, x - 2y - z).$$

Ce sont en fait les seules applications linéaires !

Par exemple, si on ajoute une constante

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x - 5y + z + 1, x - 2y - z)$$

perd sa linéarité.

Aussi, quand on a une multiplication entre deux coordonnées (on appelle cela un terme quadratique), on perd encore la linéarité. Les applications

$$\tilde{f}_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \tilde{f}_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (2xy - 5y + z, x - 2y - z) \quad \text{et} \quad (x, y, z) \longmapsto (2x - 5y + z^2, x - 2y - z)$$

ne sont pas linéaires.

1.2 IMAGE ET IMAGE RÉCIPROQUE

Vous connaissez les définitions d'image et d'image réciproque. On les rappelle pour en être bien sûr. Soit une application $f : E \rightarrow F$. Soient $X \subset E$ et $Y \subset F$.

L'image de f	$\text{Im}(f) = f(E) := \{f(x) \mid x \in E\}.$
L'image de X par f	$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\}.$
L'image réciproque de Y par f	$f^{-1}(Y) := \{x \in E \mid f(x) \in Y\}.$

Quelques souvenir sur les morphismes doivent vous rappeler que

f surjective	$\iff$	$f(E) = F.$
f injective	$\iff$	$\text{Ker}(f) := f^{-1}(\{0_F\}) = \{0_E\}.$
f bijective	$\iff$	f surjective et injective.

Proposition 1 : Rappel sur les images de sous-espaces vectoriels

Soient E_1 un sous espace vectoriel de E et F_1 un sous espace vectoriel de F .

- ① $f(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F
- ② $f(\text{Vect}(X)) = \text{Vect } f(X)$
- ③ $f^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Cas particuliers

Quelques cas particuliers utiles de la proposition

- ① Si $E_1 = E$, la propriété ① montre que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F .
- ② Si $X =: \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E , la propriété ② montre que l'image de f est engendrée par les $(f(e_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.
- ③ Si $F_1 = \{0_F\}$, la propriété ② montre que le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E .

⚠ ATTENTION On ne se trompe pas d'ensemble ambiant.
 $\text{Ker } f$ est inclus dans l'ensemble de départ ! Pas dans l'ensemble d'arrivée !

1.3 OPÉRATIONS, GROUPE LINÉAIRE**Proposition 2 : Opérations qui conservent la linéarité**

Pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- ① $g_1 \circ f_1 \in \mathcal{L}(E, G)$,
- ② $f_1 + \lambda f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$,
- ③ $g_1 \circ (f_1 + \lambda f_2) = g_1 \circ f_1 + \lambda g_1 \circ f_2$,
- ④ $(g_1 + \lambda g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + \lambda g_2 \circ f_1$,
- ⑤ Si f_1 est un isomorphisme, $f_1^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ a donc une structure d'anneau et $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

⚠ ATTENTION On a jamais dit que $f \cdot g$ était une application linéaire... Qu'il faudrait d'ailleurs définir !

Structure d'anneau de $\mathcal{L}(E)$

Comme la loi produit de l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est la composition, et que la loi de multiplication n'a pas vraiment de sens deux endomorphismes de E , on omet souvent de noter le symbole $\circ$ de composition en notant gf à la place de $g \circ f$ pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

Pour tous $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $f^n := \begin{cases} \text{Id}_E & \text{si } n = 0, \\ \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$

On se rappelle de la structure d'anneau. Pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$ **qui commutent**,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad (\text{formule du binôme}) \quad \text{et} \quad f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k g^{n-k-1}.$$

Preuve. Pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(g \circ f)(\lambda x + y) = g(f(\lambda x + y)) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g(f(x)) + g(f(y)) = \lambda(g \circ f)(x) + (g \circ f)(y).$$

Le reste a déjà été démontré. $\square$

Exemple 2

L'application $\Phi : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire, comme composée des applications linéaires

$$f \longmapsto \int_0^1 f(t^2) dt,$$

$$f \longmapsto (f \circ (t \longmapsto t^2)) \text{ et } f \longmapsto \int_0^1 f(x) dx.$$
Définition 2

On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E . On l'appelle le **groupe linéaire** de E .

GL(E) est un groupe

C'est pour cela qu'on l'appelle **groupe linéaire**.

On montre que c'est un sous-groupe de E^E , mais tout a déjà été démontré ! La composée de deux applications linéaires bijectives est une application linéaire bijective et la réciproque d'une application linéaire bijective est bijective et linéaire !

Proposition 3 : Détermination d'une application linéaire sur une somme directe

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$.

Il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

Preuve. Par hypothèse, $E = E_1 \oplus E_2$, donc tout vecteur de E est la somme, d'une unique manière, d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 .

Analyse Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$. Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, $u(x) = u(x_1 + x_2) = u(x_1) + u(x_2) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. Cette expression qui ne dépend que de u_1, u_2 et x montre l'unicité cherchée.

Synthèse Pour tout $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, posons $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$. On définit ainsi une application de E dans F .

- Pour tout $x_1 \in E_1$, $u(x_1) = u(x_1 + 0_E) = u_1(x_1) + u_2(0_E) = u_1(x_1)$, donc $u|_{E_1} = u_1$, et de même $u|_{E_2} = u_2$.
- Pour la linéarité de u , soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2 \in E$ avec $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$. Alors $\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2)$ avec: $\lambda x_1 + y_1 \in E_1$ et $\lambda x_2 + y_2 \in E_2$, donc

$$\begin{aligned} u(\lambda x + y) &= u_1(\lambda x_1 + y_1) + u_2(\lambda x_2 + y_2) = (\lambda u_1(x_1) + u_1(y_1)) + (\lambda u_2(x_2) + u_2(y_2)) \\ &= \lambda(u_1(x_1) + u_2(x_2)) + (u_1(y_1) + u_2(y_2)) = \lambda u(x) + u(y) \end{aligned}$$

□

1.4 IMAGE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Proposition 4

Une application linéaire est entièrement définie par les images des vecteurs d'une base.

Autrement dit, si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E . Alors

$$\forall (y_i)_{i \in I} \in F^I, \exists ! u \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in I, u(e_i) = y_i$$

Preuve. Déjà vue. □

Proposition 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E . Alors

- | | | | | | |
|---|----------------|--------|---|--------|--|
| ① | u injective | $\iff$ | $(u(e_i))_{i \in I}$ forme une famille libre de F | $\iff$ | u envoie toute famille libre sur une famille libre |
| ② | u surjective | $\iff$ | $(u(e_i))_{i \in I}$ forme une famille génératrice de F | $\iff$ | u envoie toute famille génératrice sur une famille génératrice |
| ③ | u bijective | $\iff$ | $(u(e_i))_{i \in I}$ forme une base de F | $\iff$ | u envoie toute base de E sur une base de F |

Preuve.

A vous ! $\square$

On dit que deux espaces vectoriels sont **isomorphes** si et seulement si il existe un isomorphisme entre les deux. Vous pouvez alors considérer que ces deux espaces sont "les mêmes" en tant qu'espaces vectoriels.

2 PROJECTIONS, SYMÉTRIES

Définition 3 : Projection, Symétrie

Soient E_1, E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E . On a alors,

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, \quad x = x_1 + x_2.$$

On appelle (première) **projection (ou projecteur) sur E_1 parallèlement à E_2** l'application $p_1 : E \rightarrow E$ qui à $x \in E$ associe l'unique x_1 de E_1 de la décomposition de x dans la somme supplémentaire $E = E_1 \oplus E_2$.

On appelle (deuxième) **projection (ou projecteur) sur E_2 parallèlement à E_1** l'application $p_2 : E \rightarrow E$ qui à $x \in E$ associe l'unique x_2 de E_2 de la décomposition de x dans la somme supplémentaire $E = E_1 \oplus E_2$.

On peut réécrire alors $x = p_1(x) + p_2(x)$, pour tout $x \in E$.

On appelle **symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2** l'application $s_1 : E \rightarrow E$ qui à $x \in E$ associe $x_1 - x_2$.

On appelle **symétrie par rapport E_2 parallèlement à E_1** l'application $s_2 : E \rightarrow E$ qui à $x \in E$ associe $x_2 - x_1$.

Dans les deux cas, E_1 est appelé la **base** et E_2 la **direction** de la projection p_1 ou de la symétrie s_1 .

Lien entre symétrie et projection

Au vue de la définition, il est clair du lien fort entre ces deux objets mathématiques. Par exemple,

$$s_1 = p_1 - p_2 = 2p_1 - \text{Id}_E \quad \text{et} \quad p_1 = \frac{s_1 + \text{Id}_E}{2}.$$

Exemple 3

On considère l'endomorphisme $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$s(x, y, z) = (-x - 4y - 2z, 4x + 9y + 4z, -8x - 16y - 7z)$$

Montrer que s est une symétrie et donner les espaces la caractérisant $F = \ker(s - \text{Id})$ et $G = \ker(s + \text{Id})$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (s \circ s)(x, y, z) &= s(s(x, y, z)) = s(\underbrace{-x - 4y - 2z}_X, \underbrace{4x + 9y + 4z}_Y, \underbrace{-8x - 16y - 7z}_Z) \\ &= (-X - 4Y - 2Z, 4X + 9Y + 4Z, -8X - 16Y - 7Z). \end{aligned}$$

Or, $-X - 4Y - 2Z = x$, $4X + 9Y + 4Z = y$ et $-8X - 16Y - 7Z = z$. On a donc $s \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et donc s est une symétrie.

On a $(x, y, z) \in F$ si et seulement si $\begin{cases} -x - 4y - 2z = x \\ 4x + 9y + 4z = y \\ -8x - 16y - 7z = z \end{cases} \iff x + 2y + z = 0.$

Donc $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\} = \text{vect}((-2, 1, 0), (-1, 0, 1))$

De même, on a $(x, y, z) \in G$ si et seulement si

$$\begin{cases} -x - 4y - 2z = -x \\ 4x + 9y + 4z = -y \\ -8x - 16y - 7z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 4x + 8y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -4x \\ y + 2x = 0 \end{cases}.$$

Donc $G = \{(x, -2x, 4x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, -2, 4))$.

Proposition 6 : Propriétés

Soit $i \in \{1, 2\}$.

① On a $p_i \in \mathcal{L}(E)$ et s_i est un automorphisme de E .

② On a $E_i = \text{Im } p_i = \text{Ker } p_{3-i} = \text{Ker}(s_i - \text{Id}_E) = \text{Ker}(s_{3-i} + \text{Id}_E)$.

③ On a $p_i \circ p_{3-i} = p_{3-i} \circ p_i = 0$.

④ **Caractérisation d'un projecteur** $p_i \circ p_i = p_i$.

De plus, si $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$, alors p est le projecteur sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

⑤ **Caractérisation d'une symétrie** $s_i \circ s_i = \text{Id}_E$.

De plus, si $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que $s \circ s = \text{Id}_E$, alors s est la symétrie sur $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

⚠ ATTENTION Les hypothèses $p \in \mathcal{L}(E)$ et $s \in \mathcal{L}(E)$ ne sont pas là pour décorer ! Il faut vérifier que vos applications sont bien linéaires avant de conclure que ce sont des projecteurs ou symétries.

La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{sinon,} \end{cases}$ n'est pas une symétrie de $\mathbb{R}$!

Preuve. Soit $i \in \{1, 2\}$.

① Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $x + \lambda y = x_1 + x_2 + \lambda(y_1 + y_2) = x_1 + \lambda y_1 + x_2 + \lambda y_2$, où $x_1 + \lambda y_1 \in E_1$ et $x_2 + \lambda y_2 \in E_2$. La décomposition étant unique, on a

$$p_i(x + \lambda y) = x_i + \lambda y_i = p_i(x) + \lambda p_i(y),$$

ce qui prouve la linéarité. Elle implique celle de s_i qui est combinaison linéaire d'applications linéaires.

De plus,

$$\text{Ker } s_i = \{x \in E \mid s_i(x) = 0_E\} = \{x \in E \mid x_i - x_{3-i} = 0_E\} = \{x \in E \mid x_i = x_{3-i}\} = E_i \cap E_{3-i}.$$

Or $E_i \cap E_{3-i} = \{0_E\}$, donc $\text{Ker } s_i = \{0_E\}$ et s_i est injective.

Enfin, pour tout $y \in E$, on a $s_i(y_1 - y_2) = y_1 + y_2 = y$. Donc s_i est surjective.

D'où s_i est un automorphisme de E .

② Il suffit de calculer directement l'image et le noyau par leur définitions. A vous !

③ Pour tout $x \in E$, on a $p_i \circ p_{3-i}(x) = p_i(x_{3-i}) = 0$, car $x_{3-i} \in E_{3-i} = \text{Ker } p_i$.

④ Pour tout $x \in E$, on a $p_i \circ p_i(x) = p_i(x_i) = p_i(x_i + 0 \cdot x_{3-i}) = x_i = p_i(x)$.

Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$, tel que $p \circ p = p$. Alors, on montre que $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$. En effet, pour tout $x \in E$, on a $x - p(x) \in \text{Ker } p$ et donc $x = \underbrace{p(x)}_{\in \text{Im } p} + \underbrace{x - p(x)}_{\in \text{Ker } p}$.

De plus, si $x \in \text{Im } p \cap \text{Ker } p$, alors $x = p(x) = 0_E$, donc la somme est bien directe.

Alors p est bien la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

- ⑤ Pour tout $x \in E$, on a $s_i \circ s_i(x) = s_i(x_i - x_{3-i}) = x_i + x_{3-i} = x$.

Réciproquement, soit $s \in \mathcal{L}(E)$, tel que $s \circ s = \text{Id}_E$. Alors, on montre que $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

En effet, pour tout $x \in E$, on a $x = \underbrace{\frac{s(x) + x}{2}}_{\in \text{Ker}(s - \text{Id}_E)} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in \text{Ker}(s + \text{Id}_E)}$.

De plus, $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x = -x\} = \{0_E\}$, donc la somme est bien directe.

Alors s est bien la projection sur $\text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

□

Exemple 4

Soit F et G les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par
$$\begin{cases} F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}, \\ G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y = -z\}. \end{cases}$$

Démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$, puis donner l'expression analytique de la projection p sur F parallèlement à G et celle de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G .

Somme directe. On commence par remarquer que $F \cap G = \{0\}$. En effet, si $(x, y, z) \in F \cap G$, on a $x + y + 2z = 0$, d'où, en utilisant $x = -z$ et $y = z$, $2z = 0$, soit $z = 0$, et finalement $x = y = z = 0$.

D'autre part,

$$F = \text{Vect}(f_1, f_2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(g_3),$$

avec $f_1 = (-1, 1, 0)$ et $f_2 = (-2, 0, 1)$ et $g_3 = (-1, 1, 1)$. Les vecteurs étant libre, $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$. On déduit de la formule de Grassmann que

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = 3$$

et donc que $F + G = \mathbb{R}^3$.

Projection. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On va le décomposer sous la forme $u = u_F + u_G$, où $u_F \in F$ et $u_G \in G$. On a donc $u_G = (-\lambda, \lambda, \lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $u_F = u - u_G = (x + \lambda, y - \lambda, z - \lambda) \in F$, donc

$$x + y + 2z - 2\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{x + y + 2z}{2}$$

$$\text{d'où} \quad u_F = \left(\frac{3x + y + 2z}{2}, \frac{-x + y - 2z}{2}, \frac{-x - y}{2} \right) \quad \text{et} \quad u_G = \left(-\frac{x + y + 2z}{2}, \frac{x + y + 2z}{2}, \frac{x + y + 2z}{2} \right).$$

Ainsi,

$$p(x, y, z) = u_F = \left(\frac{3x + y + 2z}{2}, \frac{-x + y - 2z}{2}, \frac{-x - y}{2} \right)$$

Symétrie. D'après les liens entre projection et symétrie, $s(x, y, z) = u_F - u_G = (2x + y + 2z, -x - 2z, -x - y - z)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

En pratique

Ici on fait, de la géométrie. Donc faites des dessins ! Cela aide beaucoup pour la compréhension d'un problème.

Avec un seul projecteur p , il faut tout de suite décomposer l'espace $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$. Cela permet de calculer facilement l'image du projecteur pour tout vecteur x de E .

Pour une symétrie s , on fait de même en écrivant $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

3 CAS PARTICULIER DE LA DIMENSION FINIE - MATRICES

En dimension finie, les applications linéaires sont **toujours** des matrices !

Soient E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}_E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et F un espace vectoriel de dimension m muni d'une base $\mathcal{B}_F = \{f_1, \dots, f_m\}$. On va voir que la donnée d'une application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est équivalente à la donnée d'un tableau de nombre (que l'on appellera matrice). Pour définir une matrice, il suffit de connaître l'image par u de chaque élément de $\mathcal{B}_E$. En effet, si on connaît la valeur de $u(e_i)$, pour tout $i = 1, \dots, n$, alors, pour tout $x \in E$, il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, tel que $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et donc

$$u(x) = u(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 u(e_1) + \dots + x_n u(e_n),$$

par linéarité de u .

Comme $u(e_i) \in F$, elle s'écrit, de manière unique, comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}_F$. Donc pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^m u_{ji} f_j, \quad (1)$$

où $u_{ji} \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$.

Il y a donc $n \times m$ nombres u_{ji} que l'on peut classer dans un tableau de nombre avec n colonnes et m lignes, appelé *matrice* :

$$U := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pour plus de simplicité on note souvent

$$U = (u_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

On dit que U est une matrice à m lignes et n colonnes ou une matrice $m \times n$. On note souvent $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Proposition 7

L'association décrite ci-dessus qui à toute application linéaire u de E dans F associe une matrice $U := \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Pourquoi ça marche ?

On garde les mêmes notations que précédemment.

① L'image d'un vecteur par une application linéaire est une multiplication de matrices

Soit

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto u(x) \end{aligned}.$$

Si on décompose $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ sur la base $\mathcal{B}_E$, on peut l'écrire sous la forme d'une matrice colonne qui contient exactement les mêmes informations

$$x \mapsto \text{Mat}(x, \mathcal{B}_E) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}.$$

On rappelle que

$$U := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{pmatrix}.$$

est la matrice associée à u . On remarque alors que

$$u(x) = x_1 u(e_1) + \cdots + x_n u(e_n) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m u_{ji} f_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i u_{ji} f_j = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n u_{ji} x_{i1} \right) f_j,$$

en utilisant la décomposition de $u(e_i)$ sur la base $\mathcal{B}_F$ dans (1). Comme nous avons écrit x en matrice colonne, on peut écrire $u(x)$ en matrice colonne à m lignes de ses coefficients dans la base $\mathcal{B}_F$. on obtient

$$u(x) \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n u_{1i} x_{i1} \\ \sum_{i=1}^n u_{2i} x_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n u_{mi} x_{i1} \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \cdot \text{Mat}(x, \mathcal{B}_E),$$

en utilisant la définition de la multiplication des matrices.

② La composition de deux applications linéaires est une multiplication de matrices

Soit

$$\begin{aligned} u : E &\longrightarrow F & \text{et} & & v : F &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto u(x) & & & x &\longmapsto v(x) \end{aligned}$$

deux applications linéaires. On garde comme précédemment la notation sous forme de matrice à 1 colonne, les vecteurs de chaque espace vectoriel. Donc $\forall x \in E, y \in F$ et $z \in G$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z \mapsto \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{p1} \end{pmatrix}.$$

Comme précédemment on pose, $\forall x \in E$ et $y \in F$, les éléments u_{ji} et v_{kj} comme suit:

$$u(x) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n u_{ji} x_{i1} \right) f_j,$$

et

$$v(y) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^m v_{kj} y_{j1} \right) g_k,$$

où l'on a noté $\mathcal{B}_G = \{g_1, \dots, g_p\}$ une base de G . Donc

$$\begin{aligned} v \circ u(x) &= v(u(x)) = \sum_{k=1}^p \left[\sum_{j=1}^m v_{kj} \left(\sum_{i=1}^n u_{ji} x_{i1} \right) \right] g_k \\ &= \sum_{k=1}^p \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m v_{kj} u_{ji} \right) x_{i1} \right] g_k \end{aligned}$$

Ce qui correspond, en tant que vecteur de G à la matrice

$$v \circ u(x) \mapsto \begin{pmatrix} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m v_{1j} u_{ji} \right) x_{i1} \right] \\ \vdots \\ \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m v_{pj} u_{ji} \right) x_{i1} \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^m v_{1j} u_{j1} \right) & \dots & \left(\sum_{j=1}^m v_{1j} u_{jn} \right) \\ \vdots & & \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^m v_{pj} u_{j1} \right) & \dots & \left(\sum_{j=1}^m v_{pj} u_{jn} \right) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = (V \cdot U) \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}$$

en utilisant la définition de la multiplication des matrices. Donc la matrice de $v \circ u$ est la matrice

$$V \cdot U = \text{Mat}(v, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \cdot \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

Exemple 5

Soient

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \text{et} & & v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (2x - 5y + z, x - 2y - z) & & & (x, y) &\longmapsto (x, 2x - 4y, y) \end{aligned}$$

Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$u \circ v(x, y) = u(v(x, y)) = u(x, 2x - 4y, y) = (-8x + 21y, -3x + 7y).$$

Du côté des matrices :

La matrice de u est donnée par

$$U := \left(u(1, 0, 0), u(0, 1, 0), u(0, 0, 1) \right) = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

et celle de v :

$$V := \left(v(1, 0), v(0, 1) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient bien

$$U \cdot V = \begin{pmatrix} -8 & 21 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

ce qui correspond à la matrice de $u \circ v$ dans les mêmes bases canoniques.

3.1 CAS D'UN ISOMORPHISME

Proposition 8 : Espace isomorphes et dimension finie

- ① Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Si E est de dimension finie et si F est isomorphe à E , alors F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$.
- ② Réciproquement, deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de mêmes dimensions finies sont isomorphes. En particulier, tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Preuve.

- ① On suppose $E \neq \{0_E\}$. Soit f un isomorphisme de E sur F . L'espace E a une base $(e_1, \dots, e_n)$, avec $\dim E = n$. En particulier, d'après 5, $F = \text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ et $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F . Donc F est de dimension finie, égale à n .
- ② Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie n . On peut supposer $n \neq 0$. Alors E et F possèdent une base $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ respectivement. Posons $\varphi : E \rightarrow F$, l'application linéaire définie par $\varphi(e_i) = f_i$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la proposition 5, f est une bijection, car elle envoie une base sur une base. Donc E et F sont isomorphes.

□

Corollaire 8.1

Soit E , et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est de dimension finie égale à $\dim E \cdot \dim F$.

Preuve. En effet, d'après la proposition 7, il y a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{\dim F, \dim E}(\mathbb{K})$. Or d'après la proposition précédente, ces deux espaces vectoriels doivent donc avoir la même dimension, ce qui donne la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$. □

Proposition 9 : Matrice inversible ~ Isomorphisme

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est un isomorphisme si et seulement si on peut fixer une base $\mathcal{B}_E$ de E la matrice $\text{Mat}(u, \mathcal{B}_E)$ est inversible. Dans ce cas

$$\text{Mat}(u^{-1}, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(u, \mathcal{B}_E)^{-1}.$$

L'isomorphisme de la proposition 7 est alors une bijection entre les automorphismes $\text{GL}(E)$ et les matrices carrées inversibles $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 6

Dans l'exemple précédent, $u \circ v$ est un isomorphisme car UV est inversible. Quelle est la manière la plus rapide de l'obtenir ?

Exemple 7

Dans $\mathbb{R}^n$, une projection est inversible, si et seulement si, c'est l'application identité.

En effet, c'est un isomorphisme, si et seulement si, sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ est inversible.

Soit p la projection parallèlement à F sur G . Prenons $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ de $\mathbb{R}^n$, où $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_G$ est une base de G . Ceci est possible car F et G sont en somme directe.

On obtient alors

$$\text{Mat}(p, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{Id}_G \end{pmatrix},$$

qui est inversible, si et seulement si $F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

3.2 CAS DES DIMENSIONS ÉGALES

On vient de montrer que deux espaces vectoriels de dimensions finies égales sont isomorphes. Essayons d'avoir les propriétés des applications linéaires entre ces deux espaces.

On suppose donc que $\dim E = \dim F = n$.

Matrices d'une application linéaire entre deux espaces de dimension n

Entre deux espaces vectoriels de dimension n , la matrice d'une application linéaire f est une matrice de taille $n \times n$, donc une matrice carrée !

Si $E = F$, on a la proposition suivante.

Proposition 10

L'isomorphisme de la proposition 7 est alors un isomorphisme entre les $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 11

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre :

$$(i) f \text{ injective}, \quad (ii) f \text{ surjective}, \quad (iii) f \text{ bijective}.$$

Preuve. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une famille de F de même cardinal que la dimension de F .

Ainsi, cette famille est libre si et seulement si c'est une base de F si et seulement si c'est une famille génératrice. D'après la proposition 5, cela revient à donner les équivalences demandées. $\square$

Proposition 12

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre :

$$(i) f \text{ admet un inverse à gauche}, \quad (ii) f \text{ admet un inverse à droite}, \quad (iii) f \text{ admet un inverse}.$$

Preuve.

- f inversible à gauche $\implies \exists g \in \mathcal{L}(F, E), g \circ f = Id_E \implies g \circ f$ bijective $\implies f$ injective $\implies f$ bijective.
- f inversible à droite $\implies \exists g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g = Id_E \implies f \circ g$ bijective $\implies f$ surjective $\implies f$ bijective.

Les dernières implications sont immédiates. $\square$

Démonstration d'un résultat admis pour les matrices

Vous devez vous rappeler de

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

$$(i) A \text{ est inversible à gauche}, \quad (ii) A \text{ est inversible à droite}, \quad (iii) A \text{ est inversible}.$$

qui maintenant peut être démontré !

Preuve. Il suffit de montrer que $(1) \Rightarrow (3)$. La preuve est la même pour $(2) \Rightarrow (3)$. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. Alors

$$BA = I_n.$$

L'astuce ici est de voir les matrices comme des applications linéaires, puisqu'on sait que "si $u \circ v = Id$, alors u est surjective". Mais ici, u est un endomorphisme, donc u est bijective, et donc la matrice de u , la matrice B , est inversible ! D'où :

$$BAB = B \iff B^{-1}BAB = B^{-1}B \iff AB = I_n.$$

Donc A est inversible d'inverse B . $\square$

Les liens entre matrices et applications linéaires ne s'arrêtent pas là !

Proposition 13

$A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes en tant que vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

C'est bien sûr pareil pour les lignes !

Comme les lignes de A sont les colonnes de ${}^t A$ et que $({}^t A)^{-1} = {}^t(A^{-1})$. Alors si les colonnes de ${}^t A$ sont linéairement indépendantes, c'est aussi le cas pour les lignes de A qui représentent les mêmes vecteurs mais transposés en ligne !

Preuve. Supposons que A est inversible. Alors toute combinaison linéaire des colonnes s'écrit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Supposons, par l'absurde, que les colonnes ne soient pas linéairement indépendantes. Alors, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = 0$. Donc

$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0.$$

Comme A est inversible, alors, en multipliant à gauche par A^{-1} des deux côtés, on a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0,$$

ce qui est absurde. Donc "A inversible" $\Rightarrow$ "Les colonnes de A sont linéairement indépendantes".

Supposons à présent que les colonnes de A soient linéairement indépendantes. Alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul, $AX \neq 0$. Posons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire qui à un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ associe l'unique vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont données par le vecteur colonne $A \cdot \text{Mat}(x, \mathcal{B})$. On a alors

$$\text{Ker}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot \text{Mat}(x, \mathcal{B}) = 0\} = \{0\}.$$

Donc a est injective, et comme c'est un endomorphisme, a est bijective. D'après la Proposition 9 et comme $A = \text{Mat}(a, \mathcal{B})$, alors A est inversible. $\square$

3.3 CAS GÉNÉRAL ET THÉORÈME DU RANG

Rappel :

On a déjà vu une notions de *rang*.

Soit $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_p\}$ une famille de vecteurs de E . Le rang de $\mathcal{F}$, noté $\text{rg}(\mathcal{F})$ est défini par :

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim \text{Vect}\{u_1, \dots, u_p\}.$$

C'est aussi le cardinal d'une sous-famille libre maximale L de $\mathcal{F}$.

Définition 4 : Rang d'une matrice / d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le **rang de f** est la dimension de l'image de f .

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On note $A_1, \dots, A_p \in M_{m,1}(\mathbb{K})$ les colonnes de A . Le **rang de A** , noté par $\text{rg}A$, est le rang de la famille formée par les colonnes de A .

Ce sont tous les mêmes !

La relation avec la première notion vient du fait que, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E , alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}\{f(e_1), \dots, f(e_p)\}$, et donc

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(\{f(e_1), \dots, f(e_p)\}) .$$

Donc le rang d'une application linéaire est le rang de sa matrice dans n'importe quelles bases, et est aussi le rang de la famille de vecteurs formée par l'image de toute base de l'espace de départ, autrement dit

$$\text{rg } f = \text{rg } \text{Mat}(f, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \text{rg}(\{f(e_1), \dots, f(e_p)\}) .$$

Remarques pratiques

Comme le rang d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes, il ne change pas si :

- on permute les colonnes
- on multiplie une colonne par un scalaire non nul,
- on retire une colonne nulle,
- on retire une colonne qui est combinaison linéaire des autres,
- on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

On dit que f est de **rang fini**, si $\text{rg } f < +\infty$.
Sinon, f est de **rang infini**.

Proposition 14

On ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant à gauche ou à droite par un isomorphisme. Plus précisément, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ sont deux applications linéaires de rang fini. Alors $g \circ f$ est de rang fini et

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g)) .$$

Preuve. Soit E, F, G, H quatre $\mathbb{K}$ espaces vectoriels. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de rang fini, et $\varphi \in \mathcal{L}(G, E)$, et $\psi \in \mathcal{L}(F, H)$ deux isomorphismes. Soit $r = \text{rg } u$, et $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ une base de $\text{Im } u$.

- Alors comme $\text{Im } \psi \circ u = \text{Im } \psi|_{\text{Im } u} = \text{Vect}(\psi(f_1), \dots, \psi(f_r))$. Ainsi $(\psi(f_i))_{1 \leq i \leq r}$ est une famille génératrice de $\text{Im } \psi \circ u$, mais elle est aussi libre comme image d'une famille libre par un isomorphisme. C'est donc une base de $\text{Im } \psi \circ u$, qui est donc de dimension r .

- Regardons $u \circ \varphi$.

On a $\text{Im } u \circ \varphi = \text{Im } u|_{\text{Im}(\varphi)} = \text{Im } u|_E = \text{Im } u$ car φ est surjective. D'où l'égalité des rangs.

□

Caractérisations par le rang

Comme F est de dimension finie, alors toute application à valeurs dans F est de **rang fini** et $\text{rg}(f) \leq \dim F$. De plus,

$$f \text{ surjective} \iff \text{rg } f = \dim F .$$

Comme E est de dimension finie, $\text{rg}(f) \leq \dim E$. De plus,

$$f \text{ injective} \iff \text{rg } f = \dim E .$$

Proposition 15 : Premier théorème d'isomorphisme

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels pas nécessairement de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Ker } f$ possède un supplémentaire V dans E , alors $f|_V$ est un isomorphisme de V sur $\text{Im } f$.

Preuve. Par restriction, $f|_V$ est linéaire de V dans $\text{Im } f$.

Injectivité On sait que V et $\text{Ker } f$ sont en somme directe, donc $\text{Ker } f|_V = \{x \in V \mid f(x) = 0_E\} = V \cap \text{Ker } f = \{0_E\}$.

Surjectivité Soit $y \in \text{Im } f$, alors $\exists x \in E$, $y = f(x)$.

Comme $E = V \oplus \text{Ker } f$, $\exists v \in V$ et $\exists k \in \text{Ker } f$, tels que $x = v + k$.

Donc $y = f(x) = f(v) + f(k) = f(v) + 0_F = f|_V(v)$ et $f|_V$ est surjective.

□

Théorème 1 : Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie,

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f.$$

Preuve. Comme E est de dimension finie, $\text{Ker } f$ possède un supplémentaire V dans E . Ensuite, $f|_V$ est un isomorphisme de V sur $\text{Im } f$ d'après la proposition 15.

Donc $\dim V = \dim \text{Im } f$. Mais on sait que $E = V \oplus \text{Ker } f$, donc

$$\dim E = \dim V + \dim \text{Ker } f = \dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f.$$

□

4 FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

⚠ ATTENTION Tu ne confondras pas **application** linéaire et **forme** linéaire !

Rappel et idée intuitive en dimension finie :

Une forme linéaire est seulement une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Voyons ce qu'il se passe en toute généralité. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et de base $(e_1, \dots, e_n)$ et une forme linéaire φ de E . Posons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i = \varphi(e_i)$. Alors pour tout vecteur x de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$, on a

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n f_i x_i.$$

L'image de x n'est donc rien d'autre qu'une combinaison linéaire de ses coordonnées.

Définition 5 : Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non trivial.

On appelle **hyperplan de E** tout noyau d'une forme linéaire non nulle de E .

Exemple 8

Déterminer la forme linéaire f définie sur $\mathbb{R}^3$ telle que $f(1, 1, 1) = 0$, $f(2, 0, 1) = 1$ et $f(1, 2, 3) = 4$, puis donner une base du noyau de f .

f est donné par $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$. D'après l'énoncé,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \gamma = 1 \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 4 \end{cases}$$

On résout ce système et on trouve $\alpha = -1$, $\beta = -2$ et $\gamma = 3$. Ainsi, on a $f(x, y, z) = -x - 2y + 3z$. On en déduit

$$f(x, y, z) = 0 \iff \begin{cases} x = -2y + 3z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Une base de $\text{ker}(f)$ est donc donnée par la famille des deux vecteurs $(-2, 1, 0)$ et $(3, 0, 1)$.

Proposition 16 : Caractérisation géométrique des hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et H un sous espace vectoriel de E différent de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- ① H est un hyperplan de E .
- ② Pour toute droite vectorielle $\mathcal{D}$ non contenue dans H , on a $H \oplus \mathcal{D} = E$.
- ③ Il existe une droite vectorielle $\mathcal{D}$ non contenue dans H , telle que $H \oplus \mathcal{D} = E$.

Preuve. On va faire une preuve circulaire.

- ① $\Rightarrow$ ② : Si H est un hyperplan, il est le noyau d'une forme linéaire $\varphi \neq 0$. Soit $a \in E \setminus H$. Alors $\varphi(a) \neq 0$. Montrons que $H \oplus \text{Vect}(a) = E$, par analyse synthèse.

Analyse Soit $x \in E$. S'il existe $h \in H$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = h + \lambda a$, en prenant les images par $\varphi : \varphi(x) = \lambda \varphi(a)$ or $\varphi(a)$ est un scalaire (pas un vecteur) non nul, donc $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a$: s'ils existent, ils sont uniques.

Synthèse Soit $x \in E$. On pose $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}a$. Alors $\lambda a \in \text{Vect}(a)$; et $h + \lambda a = x$.

Enfin, $\varphi(h) = \varphi(x) - \lambda \varphi(a) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0$. Donc $h \in H$.

- ② $\Rightarrow$ ③ : Immédiat

- ③ $\Rightarrow$ ① : On suppose qu'il existe un vecteur $a \in E \setminus \{0\}$ tel que : $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Montrons que H est un hyperplan. On prend p la projection sur $\text{Vect}(a)$ parallèlement à H , et c la forme linéaire coordonnée sur $\text{Vect}(a)$, définie par

$$\begin{aligned} c : \text{Vect}(a) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda a &\longmapsto \lambda. \end{aligned}$$

Soit $\varphi = c \circ p$. Tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique en un vecteur h de H et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = h + \lambda a$, et $\varphi(x) = \lambda$. Alors φ est une forme linéaire, et son noyau est H .

Donc H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, donc est un hyperplan.

□

Proposition 17

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n . Alors

- ① L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$.
- ② Tout sous-espace vectoriel de dimension $n - m$ est intersection de m hyperplans.

Preuve.

- ① Par récurrence sur m . Si $m = 1$, un hyperplan est de dimension $n - 1 \geq n - 1$. Soit $m \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$. On suppose que l'intersection de m hyperplans $H_1, H_2, \dots, H_m$ est de dimension $\geq n - m$. On considère un $m + 1$ ème hyperplan H_{m+1} . Par la formule de Grassmann,

$$\dim \bigcap_{i=1}^{m+1} H_i = \dim \bigcap_{i=1}^m H_i + \dim H_{m+1} - \dim \left(\left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) + H_{m+1} \right) \geq n - m + n - 1 - n.$$

On a utilisé l'hypothèse de récurrence et le fait que $\left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) + H_{m+1} \subset E$.

Donc $\dim \bigcap_{i=1}^{m+1} H_i \geq n - (m + 1)$. D'où la conclusion de récurrence.

- ② Soit F un sous espace vectoriel de dimension $n - m$. Soit $f_1, \dots, f_{n-m}$ une base de F complétée en $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .

On utilise les formes linéaires coordonnées $f_{n-m+1}^*, f_{n-m+2}^* \dots, f_n^*$, dont les noyaux sont les hyperplans $H_{n-m+1}, \dots, H_n$.

Ainsi, $F = \bigcap_{i=n-m+1}^n H_i$ est l'intersection d'exactly m hyperplans.

□

Définition 6 : Espace dual

On appelle **espace dual de E** , l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires de E . On le note E^* .

Proposition 18

Si E est de dimension finie, alors E^* aussi et $\dim E^* = \dim E$.

Exemple 9

On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, l'application $\phi(P) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)}{1 + \cos^2(t)} dt$.

Montrer que pour tout $x_0, \dots, x_n$ des nombres réels distincts, il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) = \lambda_0 P(x_0) + \dots + \lambda_n P(x_n)$.

On pose $\phi_i(P) = P(x_i)$. Puisque ϕ et les ϕ_i sont des formes linéaires sur E , on demande de prouver que ϕ est dans l'espace vectoriel engendré par $\phi_0, \dots, \phi_n$. Il suffit de prouver que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est une famille génératrice de E^* . Puisque $\dim(E^*) = \dim(E) = n + 1$ et que la famille comporte $(n + 1)$ éléments, cela revient à démontrer que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est une famille libre de E^* . Mais si $\lambda_0 \phi_0 + \dots + \lambda_p \phi_p = 0$, alors on évalue le membre de gauche pour le polynôme

$$P_j(X) = \prod_{k \neq j} (X - x_k)$$

Clairement, on a $\phi_i(P_j) = 0$ si $i \neq j$, et $\phi_j(P_j) = \prod_{k \neq j} (x_j - x_k) \neq 0$ sinon. Donc,

$$(\lambda_0 \phi_0 + \dots + \lambda_p \phi_p)(P_j) = \lambda_j \prod_{k \neq j} (x_j - x_k) = 0$$

ce qui entraîne $\lambda_j = 0$. La famille est donc libre, ce qui achève la preuve.