



# *Électro- magnétisme*

*Appliqué en Génie électriques*

*KHELLOUFI Khadidja*

---

*Ce polycopié en électromagnétisme s'adresse aux étudiants en génie électrique et en physique des écoles d'ingénieurs et des universités.*

*Le rôle de l'électromagnétisme est absolument déterminant dans le monde moderne. Sans une solide connaissance, l'ingénieur et le scientifique seraient démunis devant la variété des nouveaux problèmes de l'industrie qui se rapportent à l'électricité.*

*On attend de l'ingénieur non seulement des solutions simples, élégantes, économiques et innovatrices aux problèmes courants, mais aussi des idées créatrices. On suppose que le lecteur est déjà familier avec l'électrostatique.*

*Les divers sujets sont traités avec un maximum de simplicité et de rigueur, visant l'acquisition de bases solides en vue de perfectionnements ultérieurs. On exploite les analogies qui existent entre divers phénomènes pour faciliter l'intégration des connaissances.*

# Table de la Matière

## Chapitre I : Rappels Mathématique

I. Introduction .....	02
II. Définitions .....	02
II.A) Le champ de vecteur.....	02
II.B) Le Flux d'un champ de vecteur .....	02
II.C) La circulation d'un champ de vecteur .....	03
III. Les opérateurs Mathématiques: .....	03
III.A) Le gradient .....	03
III.B) La divergence .....	04
III.C) Le rotationnel .....	06
III.D) Le Laplacien .....	07

## Chapitre II : Equations de Maxwell

I. Introduction .....	08
II. Sources d'un champ électromagnétique .....	08
III. L'équation locale de la conservation de la charge .....	10
IV. Les équations de maxwell .....	10
IV.A) Notion du champ électromagnétique .....	11
IV.B) Les équations de Maxwell .....	11
V. Le potentiel .....	12
V.A) Potentiel vecteur .....	12
V.B) Potentiel scalaire .....	13
VI. Relation de passage du champ électromagnétique (équations de continuité) .....	14

## Chapitre III : Electrostatique et Magnétostatique

I. Formulation de Maxwell en électrostatique.....	15
II. Équation de Poisson et potentiel .....	15
III. Les champs électro/magnétostatique .....	16
IV. Force de Laplace .....	17
IV.A) densité volumique de la force de Laplace .....	17

IV.B)	La force de Laplace .....	17
V.	Théorème d'Ampère .....	18
VI.	Dipôle magnétique .....	18
IV.A)	Moment magnétique .....	18
IV.B)	Dipôle magnétique .....	18
IV.C)	Champ magnétique crée par un dipôle magnétique .....	19
IV.D)	Approximation dipolaire .....	19
IV.E)	Actions subies par un dipôle magnétique .....	20
<i>IV.E.1)</i>	Force subit par un dipôle magnétique .....	20
<i>IV.E.2)</i>	Moment subi par un dipôle magnétique .....	21
IV.F)	Energie potentielle magnétique .....	21

## **Chapitre IV : Approximation des régimes quasi-permanent**

### **ARQS**

I.	Définition .....	22
II.	Équations locales de Maxwell dans ARQS .....	22
III.	Équation de la conservation de la charge .....	23
IV.	Etude énergétique .....	24
IV.A)	Puissance fournis aux charges mobiles .....	24
IV.B)	Le vecteur Poynting et grandeur énergétique .....	25
IV.C)	Equation locale de Poynting .....	25
IV.D)	Bilan énergétique globale .....	26

## **Chapitre V : Induction Magnétique**

I.	Définition .....	27
II.	Force électromotrice (f.e.m) .....	27
III.	Champ électromoteur .....	27
IV.	Force électromotrice induite .....	28
IV.A)	Circuit ouvert .....	28
IV.A.1)	Notion de la résistance électrique .....	28
IV.A.2)	Force électromotrice induite .....	29
IV.B)	Circuit fermé : .....	29

IV.B.1) Induction électromagnétique .....	29
V. Flux magnétique et force électromotrice .....	29
V.A) Loi de Faraday .....	30
V.B) Loi de Lenz .....	30
VI. Quantité d'électricité induite.....	30
VII. Type d'induction.....	31
VII.A) Auto-induction .....	31
VII.B) Induction mutuelle .....	34
VIII. Les courants de Foucault .....	37

## **Chapitre VI : Matériaux Magnétiques**

I.Définition .....	38
I.A) Champ d'excitation magnétique H .....	38
I.B) Théorème d'ampère.....	38
II. Classification des matériaux .....	39
II.A) Matériaux non magnétique .....	39
IV.A.1) Matériaux diamagnétiques .....	39
IV.A.2) Matériaux paramagnétiques .....	39
IV.A.3) Matériaux Antiferromagnétiques .....	40
II.B) Matériaux Magnétiques .....	40
II.B.1) Matériaux Ferrimagnétiques .....	40
II.B.2) Matériaux Ferromagnétiques .....	42
III. Propriété des Matériaux magnétique .....	43
III.A)Domaine de Weiss .....	43
III.B)Effet du champ d'excitation H et les Courbes caractéristiques .....	44
III.B.1) Courbe de la 1 <sup>ère</sup> aimantation .....	44
III.B.2) Courbe de perméabilité relative .....	45
III.B.3) Courbe de l'Intensité d'aimantation .....	45
III.C)Effet de la température .....	46
III.D)Irréversibilité des matériaux .....	46
III.D.1) Cycle d'hystérésis« statique » .....	46
III.D.1.a)Matériaux doux .....	47
III.D.1.b)Matériaux durs .....	47

III.D.2) Cycle d'hystérésis« Dynamique » .....	48
III.D.3) Pertes magnétiques par hystérésis .....	48
III.D.4) Pertes magnétiques par courant de Foucault .....	49

## **Chapitre VII : Circuits Magnétiques**

I.Définition .....	50
II. Propriétés des circuits magnétiques .....	50
II.A) Force magnétomotrice .....	50
II.B) Réluctance d'un circuit magnétique .....	50
II.C) La perméance magnétique .....	52
II.D) Différence de potentielle magnétique .....	52
II.E) Inductance d'un circuit magnétique .....	52
III. Types de circuit magnétiques .....	52
III.A) Circuit à entrefer .....	52
III.B) Circuit Couplée .....	53
IV. Réduction du courant de Foucault .....	54

*Dans ce chapitre, nous introduisons les principaux outils mathématiques utilisés dans l'étude des systèmes électromagnétiques*

### **I. Introduction :**

La démarche d'un mouvement physique et/ou mécanique n'est pas toujours empirique, elle recommande la création des modèles mathématiques qui mette ses événements en équation.

Le but de ce chapitre est de mettre à la disposition de l'étudiant les outils mathématiques dont qu'il aura besoin dans l'étude des phénomènes d'électromagnétisme.

### **II. Définitions :**

**II.A) Le champ de vecteur :** Un champ est une grandeur physique qui est définie en tous points d'un volume de l'espace (ou plus rarement d'une surface). Il dépend généralement des coordonnées spatiales du point considéré et même il peut être en fonction des coordonnées temporelles.

Deux types principaux du champ vecteur sont définis selon leur dépendance :

- Un champ vecteur est stationnaire lorsqu'il est indépendant du temps.
- Un champ vecteur est uniforme lorsqu'il est indépendant des coordonnées spatiales du point considéré.

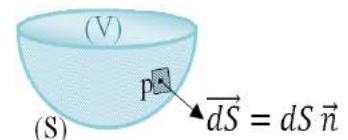
**II.B) Le Flux d'un champ de vecteur :** Soit  $\vec{V}$  un champ de vecteur, et S une surface, le flux  $\phi$  du champ  $\vec{V}$  à travers la surface (S) s'écrit :

$$\phi = \iint \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS$$

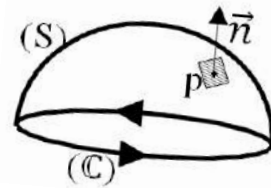
Où : -  $\overrightarrow{dS}$  : le vecteur *surface élémentaire*, il est centré au point (P) de la surface (S).

- $\vec{n}$  : le vecteur unitaire normal à l'élément  $dS$  au point (P) orient selon la nature de la surface fermé ou ouvert.
- Surface fermé : la surface (S) est fermée si elle délimite un volume constant V, la vecteur normal à la surface dans ce cas est toujours sortant de (S), et donc le flux sera :

$$\phi = \oiint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS$$



- Surface ouvert : la surface (S) est une surface ouvert si elle s'appuie nécessairement sur une ligne fermé (contour fermé C), le sens du vecteur normal  $\vec{n}$  dans se cas est déterminé par la réglé de tire bouchon selon le choix du sens de contour c.

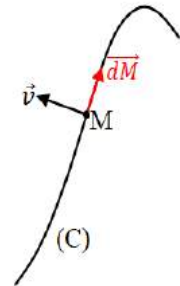


**II.C) La circulation d'un champ de vecteur :** la circulation d'un champ de vecteur  $\vec{V}$  le long d'une courbe (C) est l'intégrale curviligne C définie comme :

$$c = \int_c \vec{v} \cdot d\vec{M}$$

Remarque :  $\sum C = C \sum$

Intégrale curviligne est l'intégrale où la fonction intégrable s'évalue sur la courbe.



### III. Les opérateurs Mathématiques:

**III.A) Le gradient :** le gradient est un vecteur obtenu à partir d'un champ scalaire dans un système de coordonnées spatiales. Il décrit les variations des valeurs du champ sur des courtes distances ou sur des déplacements élémentaires  $\vec{dl}$  tell que :

$$\vec{grad} f \cdot \vec{dl} = df$$

Ou  $df$  est la différentielle totale de la fonction scalaire  $f$  :

- Le gradient est perpendiculaire à la surface iso d'un champ de vecteur non uniforme, il est toujours orienté dans le sens des valeurs croissantes de champ.
- Le gradient admet les expressions suivantes dans les différents systèmes de coordonnées :

- Cartésiennes :

$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

- Cylindrique :

$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

- Sphérique :

$$\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$



La circulation d'un gradient ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, mais seulement de la valeur du champ scalaires  $f$  en A et B

$$C = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{dl} = f(B) - f(A)$$

- La circulation d'un gradient est conservative
- Le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}}$  s'exprime aussi par le vecteur nabla  $\vec{\nabla}$ .
- Un champ de vecteur  $\vec{V}$  est à circulations conservative, s'il existe une fonction scalaire  $f$  dont ce champ est le gradient :  $\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$

**III.B) La divergence** : la divergence est un scalaire obtenu à partir d'un champ de vecteur  $\vec{V}$ , chaque terme correspond à une déviation des composantes du vecteur par rapport au coordonné de l'espace ; l'expression de la divergence dans différent système de coordonnées est:

- Cartésiennes :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- Cylindrique :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- Sphérique :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (V_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}$$

La divergence est nulle ( $\text{div } \vec{V} = 0$ ) si la norme de  $\vec{V}$  reste constante lorsqu'on déplace sur la ligne de champ, réciproquement elle est différent du zéro ( $\text{div } \vec{V} \neq 0$ ) s'il existe une source du champ sur les points de la ligne du champ, qui fait croître la norme de  $\vec{V}$  jusqu'elle diverge.

Si la divergence d'un vecteur est nulle ( $\text{div } \vec{V} = 0$ ), donc le vecteur  $\vec{V}$  dérive d'un potentiel vecteur tel que :  $\text{div } \vec{V} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V} = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A}$

Etant  $\vec{A}$  un potentiel vecteur (Voir Chapitre II)

## Chapitre I : Rappels Mathématiques

### ➤ La formule d'Ostrogradsky:

Le flux d'un champ de vecteur  $\vec{V}$  à travers une surface fermée (s) est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume délimité par cette surface(s).

$$\oiint_S \vec{v} \cdot \vec{ds} = \iiint_V \text{div } \vec{V} \cdot dV$$

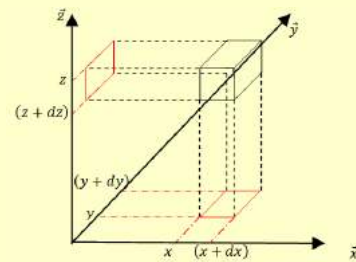
Cette formule est très utile dans les phénomènes d'électromagnétisme, elle permet la démonstration du théorème de Gauss.

Dans un système de coordonnées cartésiennes, soit un volume  $V$ , constitué des éléments volumiques simples  $\oiint_{(s)} \vec{V} \cdot \vec{n}_i \cdot ds_i$ .

Le flux du champ  $\vec{V}$  à travers le volume  $V$  est la somme des flux du champ  $\vec{V}$  à travers les surfaces (faces) du parallélépipède :  $\iiint \text{div } \vec{V} dV = \text{div } \vec{V} dV_s$

Définissant l'élément de surface  $\vec{ds}$  à chaque point de l'espace :

$$\begin{cases} x + dx \rightarrow \vec{ds} = dy \cdot dz \cdot \vec{u}_x \\ y + dy \rightarrow \vec{ds} = dx \cdot dz \cdot \vec{u}_y \\ z + dz \rightarrow \vec{ds} = dy \cdot dx \cdot \vec{u}_z \end{cases}$$



Calculons maintenant le flux du champ  $\vec{V}$  à travers la surface élémentaire (s) :

$$\begin{aligned} \oiint \vec{v} \cdot \vec{ds} &= [V_x(x+dx) - V_x(x)] dy dz + [V_y(y+dy) - V_y(y)] dx dz + [V_z(z+dz) - V_z(z)] dx dy \\ &\Leftrightarrow \oiint \vec{v} \cdot \vec{ds} = \left[ \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right] dy dz + \left[ \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right] dx dz + \left[ \frac{\partial V_z}{\partial z} dz \right] dx dy \end{aligned}$$

Sachant  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  alors :

$$\oiint \vec{v} \cdot \vec{ds} = \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) dV \Leftrightarrow \text{div } \vec{V} \cdot dV_s = \iiint \text{div } \vec{V} \cdot dV$$

Un champ de vecteur  $\vec{V}$  est dit à flux conservatif si :

- Le flux  $\Phi$  à travers toute surface fermée (s) est nul  $\oiint \vec{V} \cdot \vec{ds} = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{V} = 0$ .
- Le flux  $\Phi$  à travers toute surface ouverte (s) dépend seulement du contour sur laquelle elle s'appuie  $ds = ds_1 + ds_2 \Rightarrow \Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = 0 \Rightarrow \Phi_2 = \Phi_1$

## Chapitre I : Rappels Mathématiques

**III.C) Le rotationnel :** le rotationnel est un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteur, il décrit la rotation d'un champ de vecteur déplaçant dans une direction non orthogonale.

Le rotationnel non nul signifie l'existence d'une source de champ en ce point, sont expressions dans les différent systèmes de coordonnées est :

- Cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

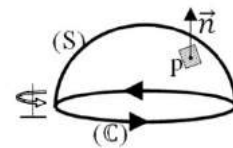
- Cylindrique :

- Sphérique :

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial(V_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\phi$$

- **La formule de Stokes** : la circulation d'un champ de vecteur  $\vec{V}$  le long d'un contour C est égale au flux de son rotationnel à travers toute surface ouverte (s) s'appuyant sur ce contour.

$$c = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_s \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \cdot d\vec{s}$$



Cette formule est utilisée dans la démonstration de la loi de Faraday.

Soit la surface ouverte (s) du vecteur normale  $\vec{n} \equiv \vec{u}_z$ , la circulation du champ  $\vec{V}$  à travers la surface (s) est la somme des circulations correspondante au coté du contour qu'elle s'appuie sur.

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \vec{V}(x, y) dx \vec{u}_x + \vec{V}(x + dx, y) dy \vec{u}_y - \vec{V}(x + dx, y + dy) dx \vec{u}_x - \vec{V}(x, y + dy) dy \vec{u}_y$$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = V_x(x, y) dx + V_y(x + dx, y) dy - V_x(x + dx, y + dy) dx - V_y(x, y + dy) dy$$

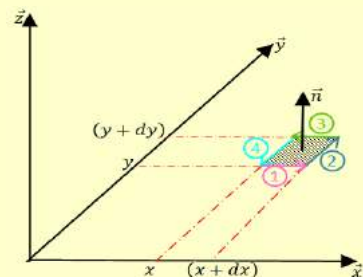
$$\Leftrightarrow \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = V_x(x, y) dx + V_y(x + dx, y) dy - \left[ V_x(x, y + dy) + \frac{\partial V_x(x, y)}{\partial x} dx \right] dx - \left[ V_y(x, y) + \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial y} dy \right] dy$$

En se limitant au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = [v_x(x, y) - v_x(x, y + dy)] dx + [v_y(x + dx, y) - v_y(x, y)] dy$$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = - \left( \frac{\partial V_x(x, y)}{\partial y} dy \right) dx + \left( \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial x} dx \right) dy$$

$$\Leftrightarrow \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \left( \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial V_x(x, y)}{\partial y} \right) ds \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \cdot d\vec{s} \equiv \iint_{r, \theta} \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \cdot d\vec{s}$$



➤ **Champ à circulation conservative** : un champ de vecteur  $\vec{V}$  est dit à circulation conservative lorsque la circulation de long d'un contour fermé est nulle.

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ce champ de vecteur  $\vec{V}$  dérive d'un potentiel scalaire ( $\vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} u$ ), car son rotationnel est nul :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{ds} = 0 \quad (\overrightarrow{ds} \neq 0)$$

**III.D) Le Laplacien** : est un opérateur de dérivation spatiale qui peut s'appliquer à un champ scalaire ou vectoriel

$$\Delta = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Lorsqu'il s'applique à une fonction scalaire, le résultat est un scalaire et s'exprime comme :

$$\Delta u = \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} u)$$

Alors qu'il est un vecteur lorsqu'il s'applique à un champ de vecteur :

$$\Delta \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{V}) - \overrightarrow{\text{Rot}} (\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V})$$

Si un champ de vecteur  $\vec{V}$  est à divergence nul ( $\text{div} \vec{V} = 0$ ), il existe toujours un champ de vecteur  $\vec{A}$  dites potentiel vecteur dont il est le rotationnel

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{A}$$

## Chapitre II : Equations de Maxwell

---

*Dans ce chapitre, nous exposant les équations locales du Maxwell, les composantes du champ électromagnétique et leurs sources.*

### **I. Introduction :**

D'un point de vue historique, les lois physiques de l'électromagnétique ont été découverte indépendamment les uns avec les autres; la théorie d'électrostatique et magnétostatique.

Cette indépendance fait l'objet de l'incompréhension et l'inachèvement des plusieurs phénomènes d'électromagnétique, ceci a inspiré Maxwell à tires des équations plus générales reliant les grandeurs électriques avec celle magnétiques, au même temps les composantes du champ avec leurs sources.

Les équations locales de Maxwell sont des équations vectorielles valables en tous points de l'espace, du milieu et pour tous instants.

**II. Sources d'un champ électromagnétique :** Ce sont les charges électriques fixes ou mobiles définie dans le système.

Lorsqu'on parlera de charge électrique fixe, il est recommandé de définir le milieu qui la contient si c'est :

- Volume: pour un volume élémentaire  $d\tau$  centré en  $p$  englobant une charge électrique élémentaire  $dq$ , la charge totale en  $V$  est définie par :

$$q = \iiint_{\tau} dq = \iiint_{\tau} \rho(p) d\tau$$

Etant que :  $\rho(p)$  la densité volumique de charge elle est exprimé en  $C.m^{-3}$  ( $\rho(p) = \frac{dq}{d\tau}$ )

- Surface: on dit qu'une charge électrique admet une densité de charge surfacique  $\sigma(p)$ , si l'épaisseur  $\Delta l$  de la surface (S) est négligeable par rapport aux dimensions de (S), dans ce cas on définit la charge totale  $q$  par :

$$q = \iint_{(s)} dq = \iint_{s} \sigma(p) \cdot dS$$

Cependant dans le cas des charges mobiles la connaissance du milieu est indispensable pour la définition de la densité du courant qui se crée lors du mouvement des charges électriques :

## Chapitre II : Equations de Maxwell

- Volume: Soit un volume élémentaire  $d\tau$  modélisé par un cylindre de base  $dS$  et d'hauteur  $dl$  colinéaire au courant électrique,

La charge totale portée par le courant électrique  $I$  est équivalent au nombre totale des porteurs ( $dN$ ) de charge libres  $q$  sur le volume totale  $\tau$ .

$$dq = q dN = n q \overrightarrow{ds} \overrightarrow{dl}$$

Etant que :  $dN = n d\tau = n \overrightarrow{ds} \overrightarrow{dl}$

Au même temps, les charges mobiles sur l'hauteur  $dl$  du volume élémentaire  $d\tau$  définissent un vecteur vitesse  $\vec{v}$  tel que  $\overrightarrow{dl} = \vec{v} dt$ , et une intensité élémentaire  $dI$  du courant électrique donné par :

$$dI = \frac{dq}{dt} = q \frac{dN}{dt} = n q \vec{v} \overrightarrow{dS}$$

Par intégration sur la section du conducteur (S), le courant électrique sera:

$$I = \iint_{(S)} n \cdot q \cdot \vec{v} \cdot \overrightarrow{dS}$$

On définit, le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  comme le facteur de proportionnalité entre  $I$  et  $\overrightarrow{dS}$  :

$$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v}$$

Etant que  $\rho_m = nq$  la densité volumique de charge mobile possédant la vitesse  $\vec{v}$ .

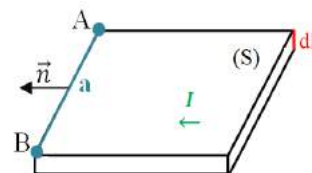
*L'intensité totale du courant  $I$  qui travers une section (S) de conducteur est équivalent au flux de vecteur densité du courant  $\vec{j}$  à travers cette section*

- Surface : si l'épaisseur  $dl$  est négligeable par rapport aux dimensions de la section  $dS$ , on peut simuler le volume occupé par les charges mobiles comme une nappe de courant circulant sur une surface (S), la densité de courant est donc surfacique  $\vec{j}_s$  et elle est donné par :

$$\vec{j}_s = \int_0^{\Delta l} \vec{j} \overrightarrow{dl}$$

Et par conséquent, le courant électrique  $I$  est :

$$I = \int_A^B dI = \int_A^B \vec{j}_s \cdot \vec{n} \cdot da$$



Etant que :  $da$  élément de longueur sur  $[AB]$  et  $\vec{n}$  le vecteur normale à  $[AB]$ .

**III. L'équation locale de la conservation de la charge :** Soit un volume  $\tau$  délimité par une surface (S), dans laquelle il existe une densité volumique de charge  $\rho$  non uniforme est variable par rapport au temps, la charge totale contenue dans ce volume est donnée par :

$$Q(t) = \iiint_{\tau} \rho(p, t) \cdot d\tau$$

La variation de  $Q$  pendant un intervalle du temps  $[t, t + dt]$  est :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho(p, t) d\tau = \iiint_{\tau} \frac{d\rho(p, t)}{dt} d\tau$$

D'autre côté, si on examine le mouvement des charges électriques qui traverse (S) pendant l'intervalle  $[t, t + dt]$  on aura un courant sortant  $I$  donné par :

$$I = - \oint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{ds} = - \iiint_{(\tau)} \text{div} \vec{j} d\tau = \frac{dQ(t)}{dt}$$

Dès deux dernières équations, on aura l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \frac{d\rho(p, t)}{dt} d\tau &= - \iiint_{(\tau)} \text{div} \vec{j} d\tau \\ \Leftrightarrow \iiint_{\tau} \left( \frac{d\rho(p, t)}{dt} - \text{div} \vec{j} \right) d\tau &= 0 \end{aligned}$$

Alors, L'équation locale de la conservation de la charge est définie par :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Etant que :  $\text{div} \vec{j}$  représente le flux de la charge à travers la surface (S) et  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  décrit l'augmentation de la charge présente en un point du volume  $\tau$

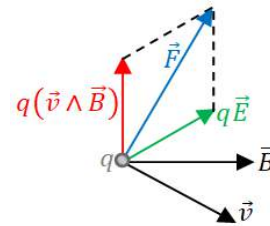
*L'équation exprime que la variation de la charge en un point du milieu est due seulement à l'existence d'un déplacement (entrée ou sortie de charge), n'est pas à la création de nouvelles charges.*

**IV. Les équations de Maxwell :** dans cette partie, les milieux considérés sont des milieux non magnétique et non diélectrique, ou on prend respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité électrique égale à celle du vide ( $\mu_0, \epsilon_0$ ).

**IV.A) Notion du champ électromagnétique :** le champ électromagnétique définie en tous point du milieu est crée par la réunion des densités de charge  $\rho(p)$  et du courant  $\vec{j}(p)$  sur l'ensemble des point p de l'espace.

L'origine du champ électromagnétique est la force exercé par une particule de charge q passant en un point quelconque (M) du milieu, cette force électromagnétique est connue par le nom « force le Lorentz », elle définie par la formule suivante :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$



Etant que :  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  le champ électrique et magnétique crée par la charge q en M.

La force de Lorentz s'applique aux plusieurs phénomènes scientifique (physique et chimique), elle est déduite à partir de la formulation lagrangienne et elle induit des effets quantiques qui ont été examiné dans le cadre d'électrodynamique quantique.

**IV.B) Les équations de Maxwell :** sont des équations locales, valables en tous points de l'espace, ne possédant pas des propriétés matérielles ( $\mu = \mu_0, \epsilon = \epsilon_0$ )

Ces équation permet l'étude de la variation du champ électromagnétique EM en un point fixe de l'espace ou bien pour une photo instantanée à cause des dérivé spéciale et/ou temporelle qu'il la contient.

L'ensemble de ces équations est définie par :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 & ; & & \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & ; & & \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Physiquement, l'ensemble de ces équations permet la compréhension des causes des phénomènes électromagnétiques (côté droit) et l'existence des champs électrique et magnétique (côté gauche).



## Chapitre II : Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell ont été découvertes sur la base des diverses lois expérimentales précédentes (lois de l'électrostatique, du magnétisme, de l'induction...), chacun de ces équations décrit une partie des variations des composantes du champ électromagnétique et leurs sources en fonction du temps et de l'espace.

**Équations flux magnétique :** exprime la conservation du champ magnétique  $\vec{B}$ , car le flux de  $\vec{B}$  à travers une surface fermée ( $S$ ) est nul.

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oiint \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0 .$$

**Équations Maxwell-Faraday :** décrit les variations temporelles du magnétique  $\vec{B}$ , qui induit nécessairement la présence d'un électrique  $\vec{E}$  à circulations nulles, c'est le phénomène d'induction

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \iint_S \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} \right) \Leftrightarrow \oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

**Équations Maxwell-Gauss :** Montre que la densité de charge électrique est la source du champ électrique  $\vec{E}$ . Ainsi qu'elle exprime le flux créé par le champ électrique  $\vec{E}$  à travers toute surface de Gauss fermée ( $S$ )

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \iiint_{\tau} \text{div } \vec{E} \, d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0} \, d\tau \Leftrightarrow \oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Le champ électrique  $\vec{E}$  peut diverger à partir d'un point où se trouvent les charges électriques, c'est la théorie de Gauss dans un régime variable.

**Équations Maxwell-Ampère :** énonce les différentes manières pour la création du champ magnétique, soit par des courants électriques (densité de courant c'est le théorème d'Ampère), soit par variation temporelle d'un champ électrique  $\vec{E}$

$$\overrightarrow{\text{Rot}} \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$$

Etant que :  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  la densité de courant de déplacement, c'est l'apport de Maxwell sur cette loi

V. **Le potentiel :** la théorie d'électromagnétisme définit deux principaux types de potentiel, vectoriel et scalaire

V.A) **Potentiel vecteur :** sachant que le champ magnétique  $\vec{B}$  est conservatif, il est donc orthogonal au vecteur nabla  $\vec{\nabla}$  en tous points de l'espace, ce qui traduit par l'existence d'un champ de vecteur  $\vec{A}$  tel que :  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

## Chapitre II : Equations de Maxwell

On définit  $\vec{A}$ , comme potentiel vecteur du champ magnétique  $\vec{B}$ , ce potentiel n'est pas unique il peut toujours s'exprimer de la manière suivante :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{grad}u$$

Sachant que :  $u$  est un champ scalaire quelconque.

**V.B) Potentiel scalaire** : ce dernier dérive des variations du champ électrique, tel que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Rot}\vec{E} &= -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial(\overrightarrow{rot}\vec{A})}{\partial t} \quad (\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A}) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{Rot}.\vec{E} &= -\overrightarrow{Rot}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) \Rightarrow \overrightarrow{Rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc la quantité  $\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$  reste en tous de l'espace colinéaire à  $\vec{\nabla}$ , et par conséquent il existe un champ scalaire  $V$  tel que :  $\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{grad}V$ , et donc on définit le potentiel scalaire par le champ scalaire  $V$ , et le champ électrique  $\vec{E}$  par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

Ce potentiel n'est pas unique il peut être exprimé sous la forme :

$$\overrightarrow{grad}v' = \overrightarrow{grad}v + f(t) + k$$

Sachant que :  $f(t)$  quelconque dépend du temps seulement,  $k$  est une constante.

Les potentiels vecteur et scalaire sont reliés entre eux par la Jauge de Lorentz en tant que couple :

$$\text{div } \vec{v} + \epsilon_0 \cdot \mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \left(\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0\right)$$

*La jauge de Lorentz est largement utilisée dans la théorie relative d'électrodynamique, elle décrit la formation d'un quadrvecteur potentiel à partir des potentiels scalaire et vecteur associé respectivement aux champs électrique et magnétique*

$$A^\mu = \begin{pmatrix} V/c \\ \vec{A} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \text{Composante temporelle} \\ \text{Composante spatiale} \end{pmatrix}$$

**VI. Relation de passage du champ électromagnétique (équations de continuité) :**

Les éléments du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  définie un ensemble des équations de continuités sur leurs composantes normale et tangentielle :

Dans le cas du champ électrique  $\vec{E}$ , la composante normale est discontinuée

$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1] \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \frac{\delta}{\epsilon_0} \leftrightarrow \vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \frac{\delta}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Alors que la composante tangentielle conservative

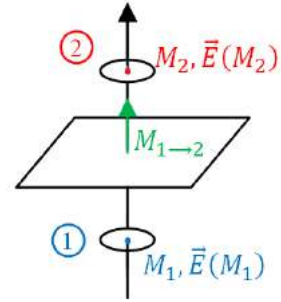
$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1] \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{E}_{2T} - \vec{E}_{1T}$$

Cependant, pour le cas d'un champ magnétique, la composante normale est conservative

$$[\vec{B}_2 - \vec{B}_1] \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{B}_{2N} = \vec{B}_{1N}$$

Alors que la composante tangentielle est discontinuée

$$[\vec{B}_2 - \vec{B}_1] \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \vec{j} \leftrightarrow [\vec{B}_1 - \vec{B}_2] \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 \vec{j}$$



## Chapitre III : Electrostatique et Magnétostatique

---

*Dans ce chapitre nous s'intéressons à la caractérisation des phénomènes électrique et magnétique indépendamment du temps, c'est le régime stationnaire.*

### **I. Formulation de Maxwell en électrostatique :**

La théorie d'électro/magnétostatique découle de l'étude des phénomènes de charge électrique statique caractérisé par la formule fondamentale de coulomb

$$\vec{F}_1(2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{(r_{12})^2} = -\vec{F}_2(1)$$

Ces effets statique découple les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  les un par rapport au autre, ce qui signifie l'existence de chacun des champs sans la présence de l'autre, cette indépendance est exprimé par la formulation de Maxwell comme :

- *Electrostatique* :  $\vec{B} = \vec{0}$ ,  $\vec{j} = \vec{0}$  et  $\rho \neq 0$  donc

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- *Magnétostatique* :  $\vec{E} = \vec{0}$ ,  $\rho = 0$  et  $\vec{j} \neq \vec{0}$  donc

$$\operatorname{Rot} \vec{E} = \vec{0} \quad ; \quad \operatorname{Rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

### **II. Équation de Poisson et potentiel :**

En régime stationnaire, les potentiels vecteur est scalaire sont définie par :

$$\vec{B} = \operatorname{Rot} \vec{A} \quad ; \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

Introduisant la valeur de  $\vec{E}$  en fonction du potentiel scalaire dans l'équation de Maxwell-Gauss, on trouvera l'équation de Poisson pour un potentiel scalaire:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} &\Leftrightarrow \operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ &\Leftrightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \end{aligned}$$

- S'il n'y'a pas de charge électrique  $\rho = 0$ , l'équation de Laplace se réduit en  $\Delta V = 0$
- Le résultat de l'équation de Poisson admet une valeur scalaire de :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{p \in \tau} \frac{\rho(P)}{PM} d\tau \quad (PM = r)$$

### Chapitre III : Electrostatique et Magnétostatique

Cependant, l'équation de Poisson pour potentiel vecteur découle de l'expression du Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{Rot}}(\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}) = \mu_0\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

Sachant  $\text{div}\vec{A} = \vec{0}$  selon la jauge de coulomb, l'équation de Poisson est donc :

$$\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = \vec{0}$$

- Le résultat de l'équation de Poisson de potentiel vecteur définit la loi de Biot et Savart :

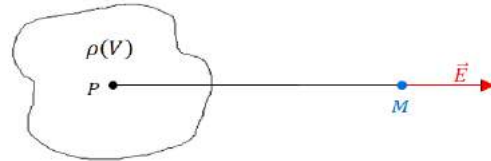
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{p \in \tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau \quad (PM = r)$$

#### III. Les champs électro/magnétostatique :

Les valeurs des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  découlent respectivement des valeurs du potentiel scalaire  $V$  et vecteur  $\vec{A}$  obtenue autour d'un point quelconque M de l'espace, où ils subiront une variation spatial infinitésimal.

- Champ électrostatique :

Sachant que :  $\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}} V(M)$  alors :



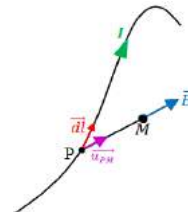
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{p \in \tau} \frac{\rho(P) \cdot \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau \Leftrightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{p \in \tau} \frac{\rho(P)}{PM^2} d\tau \cdot \overrightarrow{u_{PM}}$$

Etant que :  $\overrightarrow{u_{PM}}$  le vecteur unitaire porté par PM

- Champ Magnétostatique :

Utilisant le rotationnel par rapport à M du potentielle vecteur  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{A}$ , le champ magnétique  $\vec{B}$  créés en un point M par une distribution volumique de courant centré en un point P d'un volume  $\tau$  est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{p \in \tau} \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{u_{PM}}}{PM^2} d\tau$$



Plus simplement, la célèbre loi de *Biot et Savart* donne la valeur du champ magnétique  $\vec{B}$  créés par un courant filiforme :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{p \in l} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{u_{PM}}}{pM^2} \quad I = \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

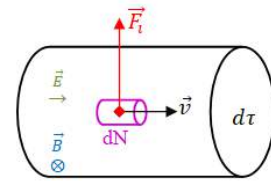
## Chapitre III : Electrostatique et Magnétostatique

### IV. Force de Laplace :

S'applique aux phénomènes magnétostatiques, elle définit la force qu'a subit un conducteur parcouru par un courant électrique sous l'action d'un champ magnétique  $\vec{B}$  dans lequel il est plongé.

**IV.A) densité volumique de la force de Laplace :** La force totale  $\vec{F}_l$  exercée sur un ensemble de charge ( $dN = n d\tau$ ) contenue dans un volume ( $d\tau = dl \cdot dS$ ) centré en un point M et soumis à une vitesse constante  $\vec{v}$  est donné par :

$$d^3\vec{F}_l = dN \cdot \vec{F}_l = n q \vec{v} \wedge \vec{B} d\tau = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$



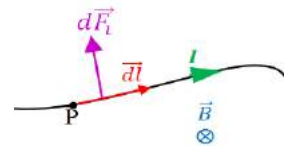
Etant que :  $\vec{F}_l$  La force de Lorentz applique sur un point M d'un élément de volume.

La variation de cette force totale par unité de volume définie la densité volumique de la force de Laplace

$$\frac{d^3\vec{F}_l}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

**IV.B) La force de Laplace :** La force de Laplace dépend essentiellement de la nature du conducteur et la direction du vecteur densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\vec{F}_l = \iiint_{\tau} d^3\vec{F}_l = \int_{fil} \left( \iint_S (\vec{j} \wedge \vec{B}) d\vec{S} \right) d\vec{l}$$



Sachant que  $\vec{j}$  et  $d\vec{l}$  sont colinéaire car le conducteur est filiforme donc :

$$\vec{F}_l = \int_{fil} \left( \iint_S \vec{j} d\vec{S} \right) d\vec{l} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{F}_l = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

De la même manière, on définit le moment des forces de Laplace à un point A quelconque de l'espace par :

$$\vec{M}_A = \int_{\Gamma} d\vec{M}_A = \int_{P \in \Gamma} \vec{AP} \wedge (I d\vec{l} \wedge \vec{B}) = \iiint_{P \in \tau} \vec{AP} \wedge (\vec{j}(P) \wedge \vec{B}(P)) d\tau$$

Etant que  $\Gamma$ , domaine linéaire du  $\tau$

## Chapitre III : Electrostatique et Magnétostatique

### V. Théorème d'Ampère :

S'applique aussi aux phénomènes de la magnéto

statique, il sert à calculer le flux de la densité de courant  $\vec{j}$  à travers une surface (S) qui s'appuie sur le contour d'Ampère qu'on a choisie :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} \propto I : \text{avec } I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

Si la distribution de courant est volumique le champ  $\vec{B}$  est continu en tous points du domaine S limité par le contour d'Ampère  $\Gamma$  , ce qui signifie que :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{Rot}}\vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Sachant que :  $\overrightarrow{\text{Rot}}\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{j}$  alors  $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{(S)} = \mu_0 \sum I_{int}$

- les courant qui ne traverse pas la surface considérée ne constituée pas une source de champ magnétique qui régné au point M appartenue au contour d'Ampère.

### VI. Dipôle magnétique:

**IV.A) Moment magnétique** : soit une spire circulaire de rayon R traversé par un courant I suivant la normal  $\vec{n}$  ; le moment magnétique d'un circuit filiforme (spire) est donné par :

$$\vec{\mathcal{M}} = I \cdot \vec{s}$$

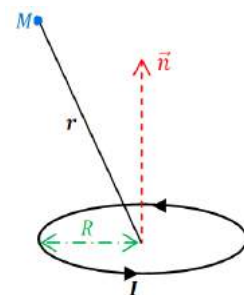
Avec  $\vec{s}$  le vecteur surface de la spire :  $\vec{s} = \iint ds \cdot \vec{n} = \pi R^2 \vec{n}$

Alors tout circuit électrique parcouru par un courant électrique I posséd donc un moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  qui est soit :

- Actif : s'il est créé par le moment magnétique lui même sur d'autres courants
- Passif : s'il est créé par un champ magnétique extérieur créé par d'autres courants, qui influe sur le moment.

**IV.B) Dipôle magnétique** : c'est une boucle de courant dont on considéré le champ magnétique à grande distance, il se présente sous deux formes :

- Actif : si l'étendue du moment magnétique est inferieur à la distance à laquelle on étudie le champ magnétique  $\vec{B}$  qu'il le crée ( $R \ll r$ ).



### Chapitre III : Electrostatique et Magnétostatique

- Passif: si l'étendue du moment magnétique est inférieur à la distance caractéristique de la variation du champ magnétique  $\vec{B}$  extérieur dont il subit.

**IV.C) Champ magnétique crée par un dipôle magnétique** : selon l'équation de Poisson, le potentiel vecteur  $\vec{A}$  admet une valeur de :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{p \in \tau} \frac{\vec{J}(p)}{PM} \cdot d\sigma = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint I \frac{\vec{dl}}{r'}$$

Sachant que  $r'$  dépend du point (p), on peut réécrire l'intégrale linéaire  $\oint \frac{\vec{dl}}{r'}$  comme étant un intégrale surfacique on utilisons le développement limité de la fonction  $\frac{1}{r'}$  donc :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\vec{dl}}{r'} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_{(s)} \vec{dS} \wedge \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r'} \right)$$

On se limitant au 1<sup>er</sup> ordre :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \iint_{(s)} Ids \right) \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Sachant que  $\vec{\mathcal{M}} = I \cdot \vec{s}$  donc le potentiel vecteur approximé vau la valeur de :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Par conséquent, le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le dipôle obtenue par  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  en coordonné sphérique sera :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

En forme générale :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} 3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\mu}_r) \cdot \vec{\mu}_r - \vec{\mathcal{M}}$$

En cas d'une spire circulaire, le champ  $\vec{B}$  est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(\sqrt{R^2 + z^2})^3} \cdot \vec{\mu}_z$$

**IV.D) Approximation dipolaire** : il existe il une grande similitude entre les champs crée par un dipôle magnétique d'un part et le dipôle électrique d'autre part où :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{sphérique}} \quad \vec{E} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{sphérique}}$$

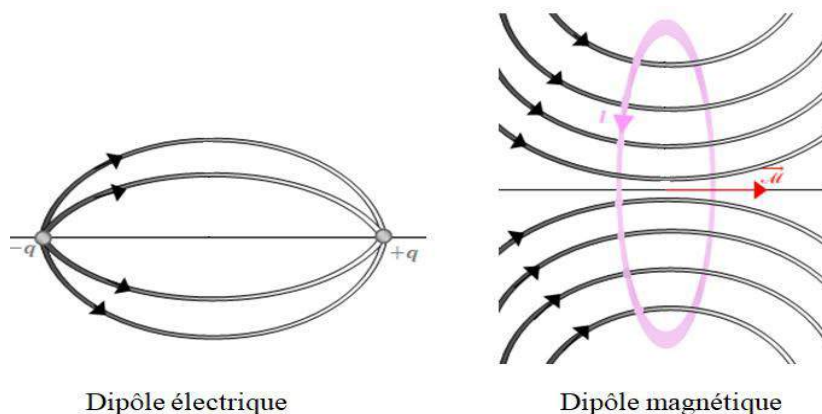


### Chapitre III : Electrostatique et Magnétostatique

Etant que  $\vec{p} = q\vec{a}$  le moment dipolaire électrique et  $\vec{a}$  le distance séparant les charges constituant le dipôle.

Donc, l'approximation dipolaire sert à déduire les grandeurs électriques à partir de celles magnétiques et vice-versa, il suffit juste de remplacer  $\vec{\mathcal{M}}$  par  $\vec{p}$  et  $\mu_0$  par  $\frac{1}{\epsilon_0}$  à condition de respecter la distance d'approximation **i.e.** loin du dipôle.

Proche du dipôle les lignes de champ devient fondamentalement différentes, elles vont de la charge négative (-) vers celle positive (+) dans électrostatique alors qu'elles passent dans la spire sans jamais toucher le courant dans le cas de magnéto



#### IV.E) Actions subies par un dipôle magnétique :

**IV.E.1) Force subit par un dipôle magnétique :** soit un dipôle magnétique plongé dans un champ  $\vec{B}$  uniforme modélisé par une spire circulation de rayon R et parcourue par un courant électrique I, la force de Laplace subie par ce dipôle est :

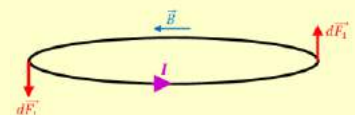
$$\vec{F} = \oint_{\Gamma} I \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

Sachant que le circuit  $\Gamma$  est fermé et que  $\vec{B}$  est uniforme la force de Laplace  $\vec{F}$  est nulle

$$\vec{F} = I(\oint \vec{dl}) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Cette égalité montre que les forces élémentaires de Laplace exerçant sur deux éléments symétriques de la spire sont égaux en module mais opposés en direction ce qui signifie que le champ magnétique  $\vec{B}$  ne provoque aucun mouvement de translation sur le dipôle magnétique.

Un dipôle magnétique plongé dans un champ  $\vec{B}$  uniforme ne déplace pas



### Chapitre III : Electrostatique et Magnétostatique

**IV.E.2) Moment subi par un dipôle magnétique** : le dipôle magnétique ne subit pas de force mais probablement du moment non nul ; soit O le centre de la spire, P centre de l'élément de longueur  $\vec{dl}$ , le moment élémentaire  $\vec{\mu}$  subi par l'élément  $\vec{dl}$  est :

$$\vec{\mu} = \oint_{\Gamma} \vec{OP} \wedge d\vec{F} = \oint_{\Gamma} \vec{OP} \wedge (I \vec{dl} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{\mu} = I \oint_{\Gamma} (\vec{OP} \cdot \vec{B}) \vec{dl} - (\vec{OP} \cdot \vec{dl}) \vec{B}$$

Sachant que  $\vec{OP} = R \vec{u}_r$  ;  $\vec{dl} = R d\theta \vec{u}_\theta$  donc  $\vec{OP} \cdot \vec{dl} = 0$  et donc :

$$\vec{\mu} = I \oint_{\Gamma} (\vec{OP} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{dl}$$

Par intégration sur  $\theta[0, 2\pi]$  en base cartésienne, le moment subie par un dipôle magnétique vaut la valeur de :

$$\vec{\mu} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Etant que  $\vec{\mu} = I \cdot \vec{s}$ , le moment magnétique de la spire.

*Sous l'effet d'un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ , un dipôle magnétique à tendance à s'orienter dans le sens du champ **i.e.** Le dipôle magnétique subira un mouvement rotationnel.*

**IV.F) Energie potentielle magnétique** : l'énergie potentielle magnétique  $E_p$  définie pour tous moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  plongé dans un champ extérieur  $\vec{B}$  est donné par :

$$E_p = \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

Cette énergie est déduite par l'analogie avec l'énergie potentielle de l'électrostatique :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_i Q_i \cdot V_i = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\tau} E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint_s V \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Si le champ  $\vec{B}$  est non uniforme, la force qui subit le dipôle est :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B})$$

## Chapitre IV : Approximation des régimes quasi-permanente (stationnaire) ARQS

*Dans ce chapitre, nous exposant la méthode d'approximation des régimes quasi-permanent pour le champ électromagnétique.*

### **I. Définition :**

L'approximation des régimes quasi-permanente consiste à négliger les temps de propagation du champ électromagnétique, ce qui est raisonnable si les fréquences et les dimensions du circuit ne sont pas trop grand par rapport la longueur d'onde électromagnétique.

Cette approximation est valable lorsque le régime est lentement variable ou la propagation d'onde électromagnétique est considéré comme infinie **i.e.** la durée de la propagation doit être inférieure à la durée caractéristique du régime variable (période harmonique  $T$ )

$$t_{prop} \ll T$$

Cette durée de propagation est proportionnelle au rapport de la distance séparant un observateur du champ électromagnétique et la célérité ( $c$ ):

$$t_{prop} \cong \frac{PM}{c} \ll T$$

Par conséquent, la distance caractéristique des variations du champ électromagnétique ( $D$ ) est :

$$D \ll cT$$

Etant que :  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

### **II. Équations locales de Maxwell dans ARQS :**

Soit  $D, T$  la distance et la durée caractéristique des variations du champ électromagnétique respectivement, la variation du champ revient donc par ordre de grandeur à diviser les équations des Maxwell par  $T$  ou  $D$  :

- Équation de Flux magnétique : elle ne subira aucun changement  $div \vec{B} = 0$  .

- Équation de Maxwell-Gauss : définit la relation entre l'amplitude du champ  $\vec{E}$  et ces

sources  $div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \frac{E}{D} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

## Chapitre IV : Approximation des régimes quasi-permanente (stationnaire) ARQS

- Équation de Maxwell-Faraday : décrit le rapport entre l'amplitude électrique et magnétique  $\overrightarrow{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow \frac{E}{D} = \frac{B}{T}$

- Équation de Maxwell-Ampère : dans cette équation on néglige le courant de déplacement en raison d'ordre de grandeur où :

$$\left(\overrightarrow{Rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \rightarrow \left(\frac{B}{D} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{E}{T}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right]}{[\overrightarrow{Rot}\vec{B}]} = \frac{\frac{1}{c^2 T} E}{\frac{B}{D}} = \frac{E \cdot D}{C^2 T B} = \frac{D^2}{C^2 T^2} \quad \left(E = \frac{DB}{T}\right)$$

Sachant que :  $D \ll cT$  donc  $\left(\frac{D}{cT}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \ll \overrightarrow{Rot}\vec{B}$  donc :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Sachant que le courant de déplacement  $\vec{j}_D$  est négligeable, les lois de la magnétostatique sont valables dans ARQS tel que le théorème d'Ampère et la loi du Biot et Savart

### III. Équation de la conservation de la charge :

L'équation de la conservation de la charge dans ARQS est obtenue à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère où :

$$div(\overrightarrow{Rot}\vec{B}) = div \mu_0\vec{j} \Leftrightarrow \mu_0 div \vec{j} = 0 \Rightarrow \mathbf{div}\vec{j} = \mathbf{0}$$

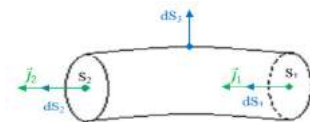
Cette équation de conservation de la charge n'est valable que si  $\frac{\partial\rho}{\partial t}$  est négligeable.

En outre, la divergence nulle de la densité de courant implique un flux conservatif et une intensité identique du courant à travers chacune des deux sections du fil électrique, ce qui montre la loi des *nœuds* et la loi des *mailles*.

Soit une surface cylindrique fermée (s), dont la hauteur est formée par la paroi d'un fil électrique et les bases par des sections circulaires  $s_1$  et  $s_2$  :

$$\oiint \vec{j} \cdot \vec{ds} = \iint_{s_1} \vec{j}_1 \cdot \vec{ds}_1 + \iint_{s_2} \vec{j}_2 \cdot \vec{ds}_2 + \iint_{s_3} \vec{j}_3 \cdot \vec{ds}_3$$

$$\oiint \vec{j} \cdot \vec{ds} = I_1 + I_2 + I_3 = I_1 - I_2$$



De même on à :

$$\oiint \vec{j} \cdot \vec{ds} = \iiint_{\tau} div\vec{j} d\tau = 0$$

## ***Chapitre IV : Approximation des régimes quasi-permanente (stationnaire) ARQS***

Donc, la loi des nœuds exprime l'égalité entre la somme des intensités des courants entrantes avec celles qui sortent du même nœud.

$$I_{\text{sortant}} = I_{\text{entrant}} \Leftrightarrow I_1 = I_2$$

Au même temps, on déduit la loi des mailles qui montre que la somme algébrique des intensités de courant partant d'un seul nœud est nulle :

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{j} \, d\tau \Leftrightarrow I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Néanmoins, cette dernière indique aussi que la somme algébrique des différences de potentiel le long de la maille est constamment nulle.

$$\sum_i^j U_{ij} = 0 \Leftrightarrow U_{ij} = -U_{ji}$$

### **IV. Etude énergétique :**

#### **IV.A) Puissance fournis aux charges mobiles :**

Soit une charge ( $q$ ) possédant une vitesse  $\vec{v}$  plongée dans un champ électromagnétique, la charge subira donc une force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , La puissance fournis par cette force est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Considérant maintenant une densité de charge mobile  $\rho'$  dont la distribution volumique de cette dernière est  $dq = q \, dN = n \, q \, d\tau = \rho' \, d\tau$ . La puissance dotée aux charges mobiles sera donc:

$$d\mathcal{P} = dq \vec{E} \cdot \vec{v} = \rho' \vec{E} \cdot \vec{v} \, d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Par conséquent, la puissance volumique de la force de Lorentz fournis par l'onde électromagnétique aux charges électriques est :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Cette densité est connue dans le domaine des milieux conducteur par la *loi d'Ohm locale* :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 \geq 0$$

Etant que :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  et  $\gamma$  la conductivité du métal

*La puissance fournis par le champ électromagnétique ne peut pas être emmagasinée dans le conducteur sous effet joule elle se perdre comme chaleur*

**IV.B) Le vecteur Poynting et grandeur énergétique :**

Le vecteur Poynting correspond à la densité du flux d'énergie électromagnétique, il est défini par :

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Ce vecteur est homogène à une puissance surfacique, il signifie le débit de l'énergie électromagnétique transportée par le champ EM à travers une surface (s) traversée par leur flux.

$$[\vec{\mathcal{R}}] = Wm^{-2}$$

En outre, La densité volumique d'énergie électromagnétique est définie comme :

$$\frac{dW}{d\tau} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad ; \quad \left[ \frac{dW}{d\tau} \right] = J.m^{-3}$$

**IV.C) Equation locale de Poynting :**

Soit M un point quelconque de l'espace dont les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  sont créés par des densités de charge fixe et mobile respectivement, utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, la densité de courant est définie comme :

$$\vec{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{Rot} \vec{B}$$

La puissance volumique de la force de Lorentz sera donc:

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{E}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{Rot} \vec{B}$$

Sachant que :  $div(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{Rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{Rot} \vec{B}$  et  $\overrightarrow{Rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} &= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} div(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \overrightarrow{Rot} \vec{E} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{P}}{d\tau} &= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} div(\vec{E} \wedge \vec{B}) - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

En outre, selon les lois mathématiques nous avons :  $f \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{f^2}{2} \right)$

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2}{2\varepsilon_0} \right) - div \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right)$$

## Chapitre IV : Approximation des régimes quasi-permanente (stationnaire) ARQS

Sachant que la densité volumique d'énergie électromagnétique égale à  $\left(\frac{E^2}{2\epsilon_0} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)$  et le vecteur Poynting égale à  $\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right)$ , l'équation locale de Poynting s'exprime donc comme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div} \vec{R} = 0$$

*L'équation locale de Poynting signifie que le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fermée est égal à la somme de la variation d'énergie électromagnétique et d'effet Joule dans le volume intérieur de la surface, elle traduit donc le bilan énergétique local dans le milieu.*

### IV.D) Bilan énergétique globale :

Sert à établir une signification des termes présentés dans l'équation locale de Poynting, par intégration sur un volume  $\tau$  d'éliminer par une surface fermée (s) :

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) d\tau &= - \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \iiint_{\tau} \text{div} \vec{R} d\tau \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \left( \frac{dW}{d\tau} \right) d\tau &= - \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \oint_{(s)} \vec{R} \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

Par intégration, l'équation globale de conservation de l'énergie électromagnétique est définie par :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau - \oint_{(s)} \vec{R} \cdot \vec{n} dS$$

Etant que :

- $W$  : énergie électromagnétique contenue dans le volume  $\tau$
- $\iiint_{\tau} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$  : perte par effet Joule (fourni à la matière)
- $\oint_{(s)} \vec{R} \cdot \vec{n} dS$  : perte par rayonnement

*Dans ce chapitre, nous décrivons l'ensemble des grandeurs électromagnétique aboutissant à l'effet d'induction magnétique et leurs conséquents.*

**I. Définition :**

La notion d'induction électromagnétique découverte par Faraday en 1831, a pour résultat la production d'une différence de potentiel aux bornes d'un conducteur électrique soumis à un champ électromagnétique variable.

Cette variation temporelle du champ magnétique est l'origine d'une source de champ électrique qui possède une circulation non conservative connue sous le nom « force électromotrice » au même temps elle généré un courant induit appelés Courant de Foucault.

Le phénomène d'induction électromagnétique s'exprime à travers l'équation locale de Maxwell-Faraday :

$$\text{Rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$\vec{E}$  étant le champ électrique,  $\vec{B}$  le champ magnétique.

L'induction magnétique a tant d'applications technologiques tel que le moteur électrique, alternateurs, les transformateurs, le freinage par courant de Foucault ...

**II. Force électromotrice (f.e.m) :**

Correspond au travail fournit par un générateur au circuit par unité de charge. Elle s'oppose dans son sens à la mise en place du champ magnétique. Dans un tel cas, elle est diffusée sur l'ensemble du circuit.

La force électromotrice est associée à une maille du circuit, elle résulte de l'intégrale du chemin de la force électromagnétique induite sur cette maille sur chaque élément de longueur par la variation du champ magnétique, ce qui définit la notion du champ électromoteur.

**III. Champ électromoteur :**

Sachant que le champ magnétique  $\vec{B}$  dérive d'un potentielle vecteur  $\vec{A}$ , et au même temps induit un champ électrique  $\vec{E}$  selon la loi de Maxwell-Faraday :



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \text{Rot } \vec{A} \\ \text{Rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}V} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}V} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

La circulation du champ électrique  $\vec{E}$  sur un contour fermée ( $\Gamma$ ) est :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{dl} - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl}$$

Sachant qu'un gradient est à circulation conservative:

$$\oint_{\Gamma} \overrightarrow{\text{grad}V} \cdot \vec{dl} = \oint_{\Gamma} dV = V(A) - V(A) = 0$$

Alors, par analogie on définit le champ lié à la variation temporelle du champ magnétique par champ électromoteur ou le champ de Neumann par :

$$\vec{E}_m = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = -\oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl}$$

#### IV. Force électromotrice induite :

La force électromotrice induite ou *FEM* correspond à la différence de potentiel aux bornes d'une bobine (ou circuit *ouvert*) de fil qui déplace à travers un champ magnétique. C'est elle qui permet de mettre en mouvement les charges électriques et d'obtenir un courant électrique.

##### IV.A) Circuit ouvert :

*IV.A.1) Notion de la résistance électrique* : On considère une portion de circuit conducteur délimité par les borne A et B, le vecteur densité de courant de déplacement de ce circuit est donnée par la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

En effet, le courant électrique qui traverse le conducteur est donnée par :

$$I = \int \vec{j} \cdot \vec{ds}$$

Le potentiel électrique est donnée donc par :

$$dV = V(A) - V(B) = -\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{dl} - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl}$$

$$\Delta V = - \oint_{\Gamma} \frac{\vec{J}}{\gamma} \cdot d\vec{l} - \iint \text{Rot} \vec{A} \cdot d\vec{s} = - \oint_{\Gamma} \frac{I}{\gamma S} d\vec{l} - \iint \text{Rot} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta V = - \frac{I}{\gamma S} \oint_{\Gamma} d\vec{l} - \frac{d\Phi}{dt}$$

Etant que  $R = - \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{l}}{\gamma S}$  la résistance électrique, alors :

$$\Delta V = RI - \varepsilon$$

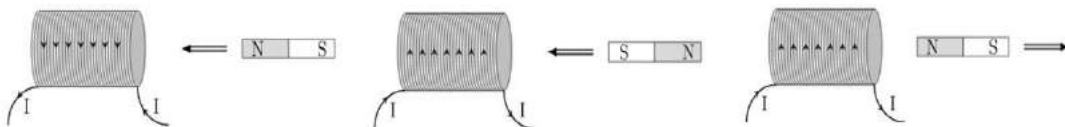
**IV.A.2) Force électromotrice induite :** Dans un régime variable, la force électromotrice induite d'un fil conducteur (AB) est la différence de potentielle entre les borne de ce fil.

$$\varepsilon \cong V_B - V_A$$

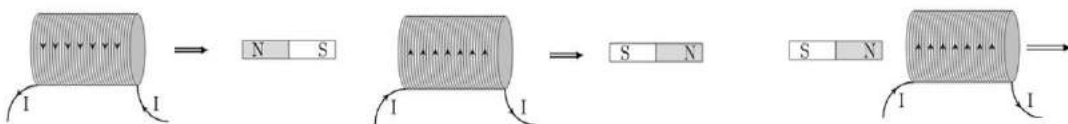
**IV.B) Circuit fermé :**

**IV.B.1) Induction électromagnétique :** les phénomènes d'induction magnétique décrit l'apparition d'un courant induit appelés « courants de Foucault » dans un circuit où conducteur grâce à une variation du champ magnétique. Deux façons sont définies pour le phénomène d'induction :

- Induction de Neumann : réaliser en déplaçant un champ magnétique stationnaire au voisinage d'un circuit électrique fixe :



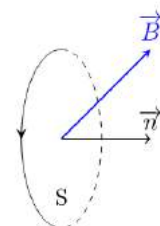
- Induction de Lorentz : réaliser lorsqu'en déplace (ou déforme) un circuit électrique au voisinage d'un champ magnétique stationnaire fixe



**V. Flux magnétique et force électromotrice:**

Le flux magnétique est une mesure du champ magnétique total qui passe à travers une surface donnée. C'est un outil dont on se sert pour représenter les effets de la force magnétique sur un objet occupant une surface quelconque (S).

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n} ds$$



V.A) **Loi de Faraday** : la loi de Faraday dit que la force électromotrice induite dans un bobinage fermé placé dans un champ magnétique est proportionnelle à la variation au court du temps du flux du champ magnétique qui entre dans le circuit

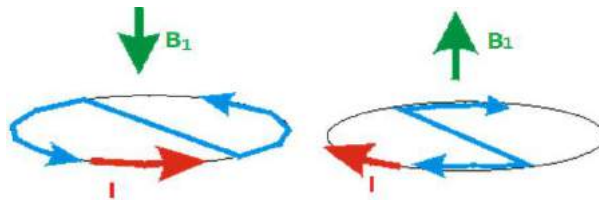
$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi}{dt}$$

Etant que  $\vec{F}$  la force qui s'exerce sur une charge  $q$  pour la mettre en mouvement dans le circuit,  $\vec{E}_m$  la circulation du champ électrique induit (le champ électromoteur)

V.B) **Loi de Lenz** : si l'on approche un aimant d'un solénoïde relié à un ampèremètre, on constate l'apparition d'un courant induit dans le circuit. L'aimant induit une FEM ( $\varepsilon$ ) dont la valeur est :

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = - \iint \text{Rot} \vec{A} \cdot d\vec{s} = - \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

En outre, si on approche le pôle nord suivant l'axe de la bobine, le courant s'oriente dans une direction spécifique (comme mentionné dans la figure) et il génère lui-même un champ magnétique  $\vec{B}_1$  induit qui tend à s'opposer au champ magnétique de l'aimant  $\vec{B}$ , si on recule le pôle nord, le courant  $I$  s'inverse.



Le signe négatif (-) correspond au sens du courant induit car le champ magnétique est une fonction positive par rapport au temps :

$$dV = V(A) - V(B) = RI - \varepsilon = 0$$

Sachant que le circuit est fermé (A confondue à B), alors  $I = \frac{\varepsilon}{R} < 0$

### VI. **Quantité d'électricité induite** :

La quantité d'électricité induite est la quantité de charge  $Q$  qui circule dans le circuit fermé suite au phénomène d'induction électromagnétique.

Le courant électrique induit qui traverse le conducteur est définie par :

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Etant que  $dq$  est la charge élémentaire liée à  $I$

En plus, puisque le circuit est fermé on a :  $\mathbf{RI} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$  donc :

$$\varepsilon = R \frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

Ce qui mène à définir  $dq = \frac{d\Phi}{R}$ , et par conséquent :

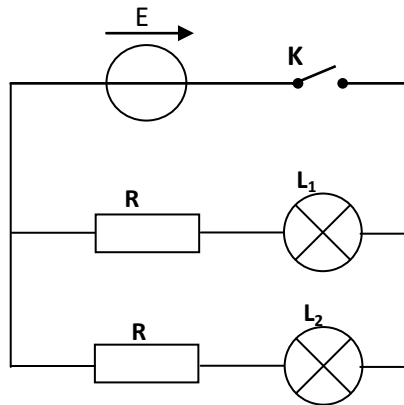
$$Q = \int dq = \frac{\Delta\Phi}{R}$$

**VII. Type d'induction :**

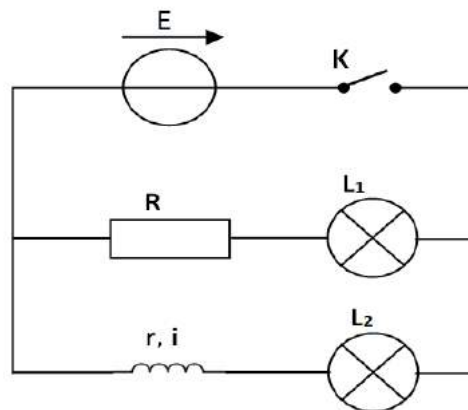
Les type d'induction magnétique jouet un rôle important dans l'application des phénomènes d'induction dans les domaines variés de la science

**VII.A) Auto-induction :**

**VII.A.1) Mise en évidence :** Soit le circuit (1) suivant :



Si on ferme l'interrupteur (K), les lampes  $L_1$  et  $L_2$  s'allument simultanément, mais si on remplace l'une des résistances par une bobine de résistance interne  $r=R$ , suivant le circuit (2) ci-dessous, la 2<sup>ème</sup> lampes s'allume après un certain temps de l'allumage de la 1<sup>er</sup> (retard temporelle par rapport au circuit (1)).



**VII.A.2) Interprétation** : Enfermant l'interrupteur (**K**), l'intensité du courant dans la bobine est variable de  $0 \rightarrow I \neq 0$ , au même temps un champ magnétique variable  $\vec{B} = 0 \rightarrow \|\vec{B}\| \neq 0$  se crée au niveau de la bobine établit une rétroaction des variations du courant dans le circuit sur elles-mêmes.

Cette rétroaction due à la création d'un courant induit ( $i'$ ), s'oppose à la cause qui fait naissance (courant principale du circuit  $I$ ) d'où l'apparition du retard temporelle dans l'allumage des lampes dans le circuit (2).

Ce phénomène est connu par *l'auto-induction magnétique*, où la bobine joue le rôle d'un inducteur et d'un induit.

**VII.A.3) Coefficient d'induction propre** : décrit l'amplitude d'une bobine à s'opposé à toute variation du courant dans le circuit, sa valeur ( $L$ ) est donnée à l'aide de la loi de Biot et Savart, elle est le facteur de proportionnalité entre le flux magnétique  $\Phi$  et le courant  $I$  :

$$\Phi_{\Gamma} = \iint_{M \in S} \vec{B}(M) \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{avec: } \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{p \in \Gamma} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Alors :

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{M \in S} \left( \oint_{p \in \Gamma} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{n} \, dS \quad \text{Car: } \Phi_{\Gamma} = LI$$

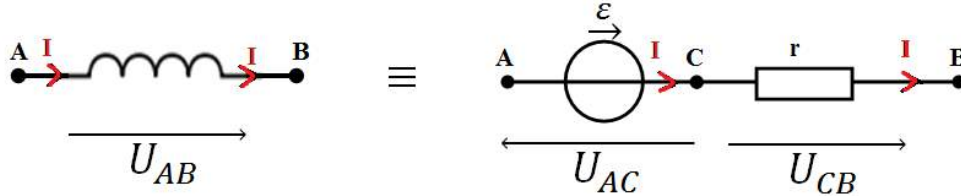
Le coefficient d'induction propre ( $L$ ) ne dépend que de la bobine (forme,  $n^{br}$  de spire, rayon ...), sa valeur est donné par **Henry « H »**, il est souvent dit coefficient de self, et parfois coefficient d'auto-induction.

**VII.A.4) Force électromotrice d'auto-induction** : La force électromotrice est toujours donnée par la loi de Faraday :

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_{\Gamma}}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Ceci confirme que la FEM s'oppose (signe -) à la source qui fait naissance ( $I$ ).

VII.A.5) Schéma équivalent et tension aux bornes d'une bobine : Soit la bobine suivant, elle est borné par deux point A et B, la tension au borne AB est donné à l'aide du schéma équivalent suivant :



La tension  $U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} \Leftrightarrow U_{AB} = -\varepsilon + rI$

Sachant que la force électromotrice d'auto induction est :  $\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$  alors la tension au borne de la bobine est égale donc à :

$$U_{AB} = L \frac{dI}{dt} + rI$$

VII.A.6) Bilan énergétique et l'énergie électromagnétique émmagasinée dans la bobine : le bilan énergétique entre deux instant t et t+dt, nécessite la connaissance de la puissance équivalente, cette dernière est donné en multipliant la tension  $U_{AB}$  par le courant I :

$$U_{AB}I = LI \frac{dI}{dt} + rI^2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{LI^2}{2} \right) + rI^2$$

Alors, l'énergie reçue par la bobine pendant une période dt est égale à la somme de l'énergie dissipée par effet de Joule ( $rI^2$ ) et une autre  $\left( d \left( \frac{LI^2}{2} \right) \right)$  émmagasinée dans la bobine :

$$U_{AB}Idt = d \left( \frac{LI^2}{2} \right) + rI^2 dt$$

On note alors, l'énergie total émmagasiné par la bobine par :

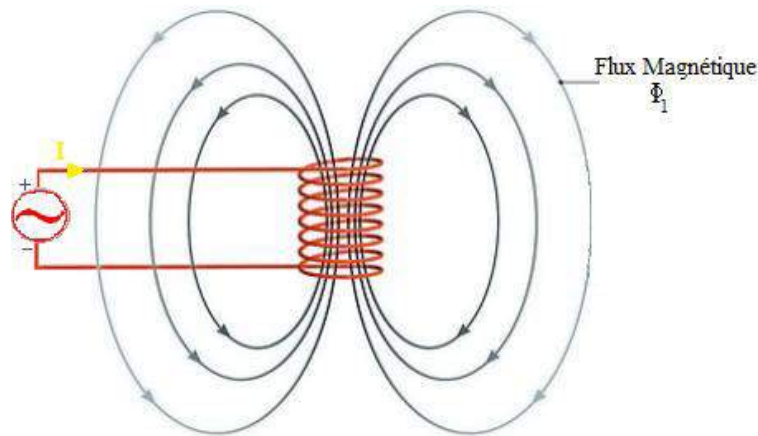
$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

Cette énergie est localisé dans l'espace de bobinage qui constitue le circuit, car le champs magnétique est null en dehors de la bobine. Ainsi elle interdit les discontinuités du courant, c'est pour ca on dit que l'auto-induction *lisse les courants*

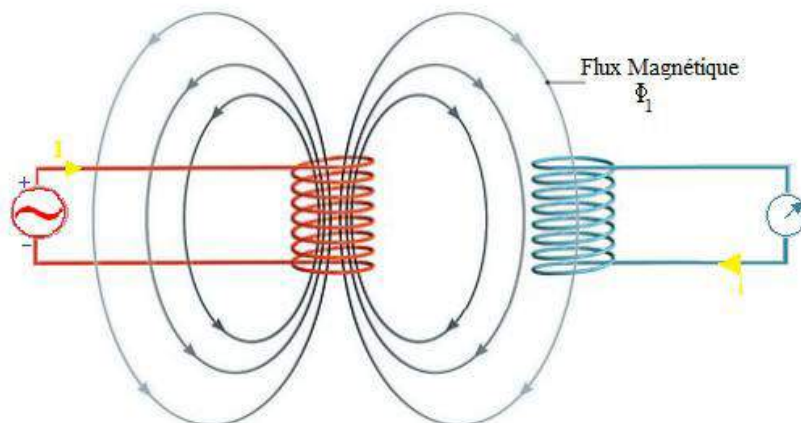
**VII.B) Induction mutuelle :**

**VII.B.1) Définition et mise en évidence :** l'induction mutuelle est le phénomène apparue lorsqu'une variation du courant dans une bobine (1) induit une force électromotrice magnétique (FEM) dans une autre bobine placé proche d'elle.

Soit une bobine (1) relié à un générateur de courant alternative I, la variation du courant induit une force électromotrice magnétique aux bornes de la bobine qui s'oppose au courant principale I (selon la Loi de Lenz), cette force est définie par des lignes du champ magnétique qui décrit le flux  $\Phi_1$ .



Ce flux forme une liaison avec celui d'une autre bobine (bobine (2)) si on la met si près de la premier bobine (bobine (1)) traduit par l'apparition d'un courant induit qui circule dans la bobine 2 :



Cette liaison, décrit le phénomène d'induction mutuelle qui n'est que le flux du champ magnétique crée par la bobine (1) à travers la surface de la bobine (2), il est noté  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ .

**VII.B.2) Coefficient d'induction mutuelle :** décrit l'amplitude du flux magnétique créée par un champ  $\vec{B}_1$  d'un circuit (bobine (1)) à travers une surface  $S_2$  d'un autre circuit (bobine(2)) :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{M \in S_2} \vec{B}_1(M) \cdot \vec{n}_2 dS \quad \text{avec: } \vec{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{p \in \Gamma_1} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Ce flux est proportionnelle à  $I_1$ , et le facteur de proportionnalité définie le coefficient d'induction mutuelle du circuit (1) sur le circuit (2), noté  $M_{12}$ :

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{M \in S_2} \left( \oint_{p \in \Gamma_1} \frac{d\vec{l} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{n}_2 dS \quad \text{Car: } \Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} I_1$$

De même, le circuit (2) crée un flux magnétique  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  à travers la surface  $S_1$  qui s'appuie sur le circuit (1) :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} I_2$$

Les coefficients d'induction mutuelle ( $M_{ij}$ ) ne dépend que des caractéristiques du circuit (la bobine) tel que la forme, le nombre de spire, le rayon ..., leurs valeurs est donné par **Henry « H »**.

Les coefficients mutuelles  $M_{12}$  et  $M_{21}$  sont unique selon le théorème de Neumann (en raison des symétries des circuits et flux).

$$M_{12} = M_{21} = M$$

**VII.B.3) Force électromotrice induite:** la force électromotrice est toujours générée par la loi de Faraday, la différence revient à la valeur du flux magnétique totale créée par le circuit :

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi_{tot}}{dt}$$

Dans ce cas, le flux magnétique créée par le circuit /Bobine (1) est la somme du flux auto-induction et celui induit par le circuit /Bobine (2) :

$$\Phi_{tot(1)} = \Phi_{\Gamma_1} + \Phi_{2 \rightarrow 1}$$

Alors, la force électromotrice induite dans le circuit /Bobine (1) est :

$$\varepsilon_{\Gamma_1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$$



De la même manière, la force électromotrice induite dans le circuit /Bobine (2) est :

$$\varepsilon_{\Gamma_2} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$$

**VII.B.4) Schéma équivalent et tension aux bornes d'une bobine :** la tension aux bornes du circuit/ bobine est toujours donnée par :

$$U_i = r_i I_i - \varepsilon_i$$

Se qui donne pour chacune des circuits /bobines :

$$\begin{cases} U_1 = r_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ U_2 = r_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

**VII.B.5) Bilan énergétique et l'énergie électromagnétique émmagasinée dans la bobine :** de la même manière que l'auto-induction, le bilan énergétique est donné par la multiplication des puissances par les courants qui les travers :

$$U_1 I_1 = r_1 I_1^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \right) + M I_1 \frac{dI_2}{dt}$$

$$U_2 I_2 = r_2 I_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \right) + M I_2 \frac{dI_1}{dt}$$

Ajoutons les membres de ces deux equations pour obtenir la puissance totale fournie par les 2 circuits :

$$U_1 I_1 + U_2 I_2 = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \right) + \frac{d}{dt} (M I_1 I_2)$$

Alors, l'énergie reçue par l'ensemble de circuit à l'exception des générateur entre un instant t et t+dt est :

$$U_1 I_1 dt + U_2 I_2 dt = (r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2) dt + d \left( \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \right) + d \left( \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \right) + d(M I_1 I_2)$$

Cette dernière est répartie entre :

- Energies dissipées par effet de Joule:  $(r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2) t$
- Energies propres émmagasinées dans chacun des circuit :  $\left( \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \right) + \left( \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \right)$
- Energie de couplage magnétique émmagasinée par l'ensemble des deux circuits en interaction l'un avec l'autre :  $(M I_1 I_2)$

**VIII. Les courants de Foucault :**

Se sont les courants induits dans une masse conductrice soit par une variation au cours du temps d'un champ magnétique externe traversant ce milieu, soit par un déplacement de cette masse dans un champ magnétique.

Les courants de Foucault sont responsables d'une partie des pertes Joules dans les bobines, circuits magnétique, les machines électriques alternatives et les transformateurs. C'est la raison pour laquelle les circuits magnétiques sont constitués des tôle feuilletées, afin de limiter ces courants et diminué les pertes par effet de Joules qui en découlent, ce qui améliore le rendement global des circuits (transformateurs).

Ces tôles sont construites par des matériaux magnétiques conducteurs qui permettent la circulation des courants induit d'un binage à un autre.

*Dans ce chapitre, nous caractérisant les différents matériaux disposant des propriétés magnétiques et leur application.*

**I. Définition :**

**I.A) Champ d'excitation magnétique H :** en présence d'un matériau magnétique, la relation entre le courant et le champ est difficilement établie car ils ne seront plus proportionnels. Pour ces raisons, on sépare les rôles joués par le circuit électrique de celui joué par le circuit magnétique et on introduit alors une grandeur intermédiaire appelée *excitation magnétique* notée  $\vec{H}$ .

Ce champ de vecteur d'excitation ne dépend que du circuit électrique qui produit le champ magnétique (intensité et géométrie). Il traduit la cause du phénomène, alors que le vecteur  $\vec{B}$  traduit l'effet.

Dans le vide, ces vecteurs  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  sont rigoureusement proportionnels, la distinction se faisant numériquement par la constante  $\mu_0$ .

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Dans un matériau, le champ d'excitation  $\vec{H}$  est toujours proportionnel au champ magnétique  $\vec{B}$  mais cette fois ci il faut tenir compte à la réaction des matériaux aux mouvements des charges électriques constituant le milieu.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Cette réaction du milieu à l'excitation magnétique  $\vec{H}$  se traduit par la présence d'une intensité d'aimantation  $\vec{J}$  (parfois  $\vec{M}$ ) qui est exprimé proportionnellement à  $\vec{H}$  comme:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}$$

Etant que  $\chi$  la susceptibilité magnétique, elle est fonction de la perméabilité relative des matériaux telle que :

$$\mu_r = (1 + \chi)$$

**I.B) Théorème d'ampère:** l'application du théorème d'ampère au champ d'excitation  $\vec{H}$ , permet d'établir une relation entre les champs magnétiques et les forces magnétomotrices :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum NI$$

Etant que :  $\sum NI$  est la somme algébrique de la force magnétomotrice résultante elle tient compte du sens des bobinages et du courant.

## II. Classification des matériaux :

L'électrotechnicien distinguera donc deux classes selon le comportement des champs  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  et la valeur de la susceptibilité magnétique :

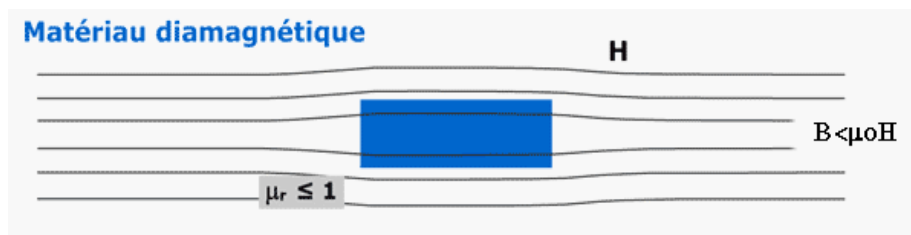
**II.A) Matériaux non magnétique :** ce sont des matériaux ayant des propriétés proches du vide où l'influence du milieu sur les champs magnétiques soit faible et négligeable telle que l'air, le cuivre, l'aluminium, le bois ...

Se sont des matériaux à faible susceptibilité ( $|\chi| \ll 1$ )  $\Rightarrow \mu_r \cong 1$  et ne s'attirent pas par des aimants. Dans ce cas, les champs  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  sont liés par une relation linéaire qui montre la seule source de champs magnétiques qui est le courant.

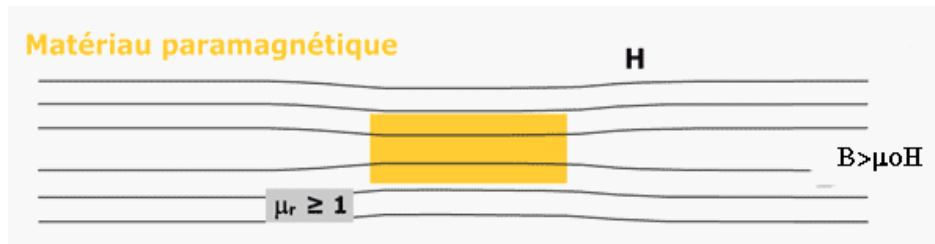
$$\vec{B} = \mu_r \vec{H}$$

Selon la valeur de la susceptibilité, on distingue trois familles des matériaux non magnétiques :

**IV.A.1) Matériaux diamagnétiques :** se sont des matériaux de susceptibilité négative ( $\chi < 0$ ), leur moment magnétique atomique est nul, elles s'aimantent faiblement proportionnellement au champ dans le qu'elles ils ont placés mais en sens inverse (Cuivre, Zinc, or, Argent)



**IV.A.2) Matériaux paramagnétiques :** sont des matériaux à susceptibilité positive ( $\chi > 0$ ), leurs moments magnétiques atomiques n'est pas nulles mais les moments de l'ensemble des atomes est nul. Leurs aimantation est proportionnelle et au même sens que le champ dans lequel ils sont placés (Aluminium, Platine, Manganèse).



**IV.A.3) Matériaux Antiferromagnétiques** : sont des matériaux à susceptibilité nul ( $\chi = 0$ ), leurs moments magnétiques atomiques est antiparallèles ce qui conduit à un moment magnétique globale nul, ils réagissent comme des matériaux non magnétiques (ni attiré, ni repoussé par un aimant), mais des phénomènes magnétiques interviennent tout de même au niveau microscopique. Ces constructions au comportement antiferromagnétique sont utilisées sur les têtes de lecture des disques durs, dans la mémoire vive magnétique...

**II.B) Matériaux Magnétiques** : ce sont des matériaux rares qui possèdent une très fortes susceptibilité magnétique ( $\chi \gg 1$ ), et qui n'obéi pas à la relation de proportionnalité définie précédemment entre les champs  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$ .

$$\vec{B} = \mu_r \vec{H} \quad \text{avec} \quad \mu_r = (1 + \chi)$$

Ces substances sont très intéressantes et permettent de modifier et de créer des champs magnétiques intenses avec des excitations faibles en canalisant les lignes de ce dernier selon leurs formes géométriques.

De plus, leurs propriétés magnétiques varient beaucoup avec la température et leur forte susceptibilité  $\chi$  est rarement constante et qui présente des problèmes de saturation et d'hystérésis.

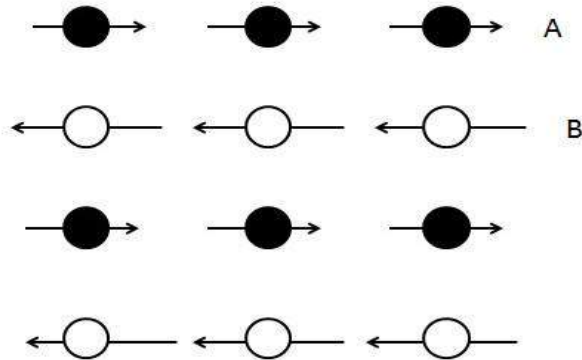
Deux familles principales de matériaux magnétiques ont été identifiées dont les effets sont distingués et importants et les applications sont nombreuses :

**II.B.1) Matériaux Ferrimagnétiques** : sont des oxydes de fer désignés généralement sous le terme de ferrites et souvent utilisés en haute fréquence. Ils sont obtenus par frittage et ont une *grande résistivité*.

Ces matériaux sont formés d'ions caractérisés par leur moment magnétique  $m_{ion}$ . Au sein d'elle des forts couplages antiferromagnétiques se forment et se caractérisent par l'orientation de ces moments ioniques.

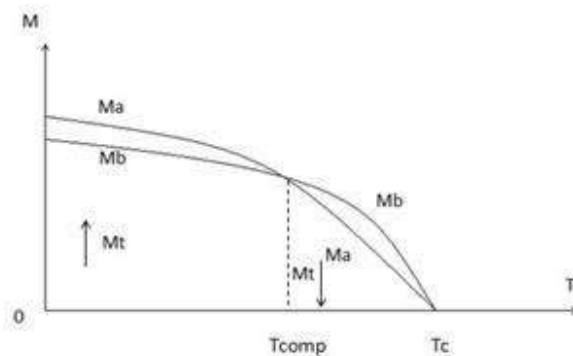
Ces moments magnétiques sont de modules très différents et d'orientations opposées de sorte qu'ils ne peuvent pas se compenser comme c'est le cas dans un matériau

antiferromagnétique (non magnétique). Il en résulte une intensité d'aimantation  $\vec{J}$  importante et constante même sans champ d'excitation  $\vec{H}$ .



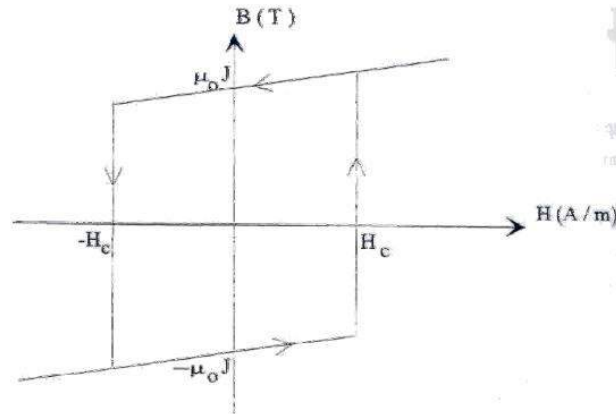
Les matériaux ferrimagnétiques peuvent être utilisés dans les composants électroniques pour diminuer les bruits à hautes fréquences comme les câbles USB.

À la température de Curie (température critique), le matériau ferrimagnétique perd son aimantation spontanée et devient progressivement paramagnétique. En d'autres termes, l'orientation des moments magnétiques devient aléatoire et le couplage disparaît il peut alors acquérir une aimantation sous l'effet d'un champ magnétique extérieur.



A la présence d'un champ d'excitation magnétique  $\vec{H}$ , le champ magnétique  $\vec{B}$  varie linéairement avec l'aimantation  $\vec{J}$  et le champ  $\vec{H}$  formant un cycle d'hystérésis carrée.

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0(1 + \chi)\vec{H} \approx \mu_0\chi\vec{H} = \mu_0\vec{J}$$

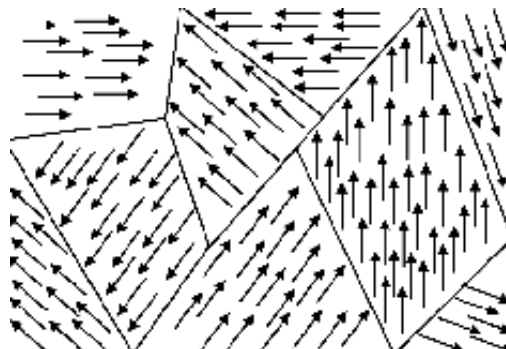


**II.B.2) Matériaux Ferromagnétiques :** sont généralement de bons conducteurs capable à s'aimanter sous l'effet d'un champ magnétique extérieur en gardant une partie de cette aimantation. Ils peuvent canaliser les lignes d'un champ magnétique en augmentant leur intensité formant donc des aimants permanents.

Ces substances capable de créer des forces suffisamment importantes, ils sont la base de l'électrotechnique industrielle (aimants, machines...). On retrouve notamment des corps simples (*Fer, Cobalt, Nickel*), des corps composés (*Ferrites (MOFe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), CrO<sub>2</sub>*) et des alliages (*alnico (aluminium, nickel, cobalt), ticonal (titane, nickel, cobalt)*).

Les matériaux ferromagnétiques possèdent des moments magnétiques permanents tous orientés dans le même sens du champ d'excitation magnétique appliqué, ce qui leur confère une perméabilité très grande et un très fort couplage magnétique, à l'absence du champ  $\vec{H}$ , il subsiste une aimantation très forte dite « aimantation spontanée » .

Le ferromagnétisme n'existe que dans les corps à l'état condensé. Il résulte d'une interaction entre les atomes d'une même structure cristalline. Il n'est pas une propriété atomique ou moléculaire comme le diamagnétisme ou le paramagnétisme. Les moments magnétiques sont regroupés par des domaines au sein desquels ils ont tous la même orientation. Ce sont les domaines de **WEISS**.

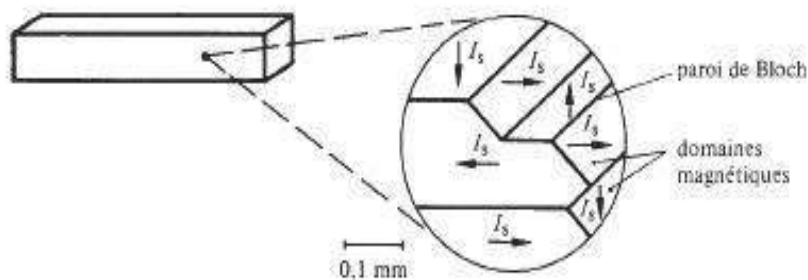


### III. Propriété des Matériaux magnétique :

**III.A) Domaine de Weiss :** est un domaine magnétique, ou une région d'un matériau dans laquelle les moments magnétiques sont orientés dans la même direction, l'aimantation  $y$  est donc uniforme. La région séparant les domaines magnétiques est appelée ***paroi de Bloch***, dans laquelle l'aimantation change progressivement de direction.

Dans un domaine magnétique, les moments magnétiques de chaque atome sont alignés les uns avec les autres et pointent dans la même direction. La structure des domaines magnétiques est responsable du comportement magnétique des matériaux ferromagnétique de leurs alliages, même les matériaux ferrimagnétique. Ces domaines magnétiques se forment dans des matériaux ayant un ordre magnétique, c'est-à-dire que les dipôles magnétiques du matériau s'alignent spontanément sous l'effet de l'interaction d'échange.

Dans les plus grandes extensions, les domaines de Weiss peuvent mesurer jusqu'à **1mm**, et même davantage dans des échantillons filiformes. Le module de la polarisation spontanée  $I_s$  a même valeur dans tous les domaines magnétiques d'un matériau homogène dont la température est uniforme.



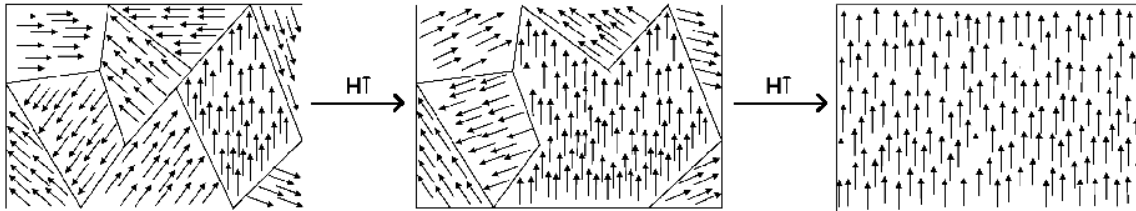
L'apparition d'un champ d'excitation magnétique  $\vec{H}$  implique une modification complète de la distribution des domaines de Weiss, c'est-à-dire que leur nombre, leur forme et leur répartition peuvent varier radicalement.

En outre, toutes les propriétés magnétiques des matériaux dépendent essentiellement de la structure des domaines magnétiques, et surtout de la variabilité plus ou moins grande de cette structure sous l'effet d'un champ extérieur ce qui intéressent le plus directement les ingénieurs à étudier (perméabilité, l'hystérésis, etc...).

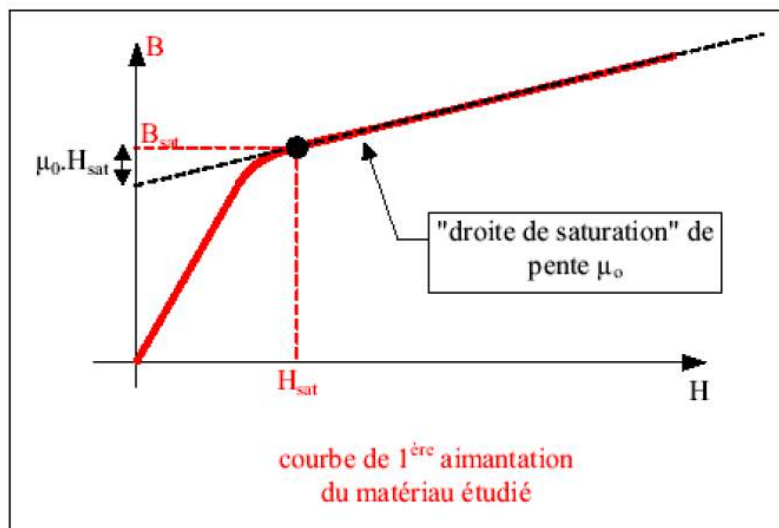


**III.B) Effet du champ d'excitation  $H$  et les Courbes caractéristiques :**

**III.B.1) Courbe de la 1<sup>ère</sup> aimantation :** Sous l'influence d'un champ magnétique  $\vec{H}$  appliqué, les moments magnétiques d'un tel matériau subissent une orientation excessive (« basculement ») dans le sens du champ  $\vec{H}$ .



Ceci induit des intensités d'aimantation ( $M_s = J_s = \chi H_{max}$ ) énormes et maximales lorsque tous les moments de tous les domaines ont basculé dans le sens du champ. Au-delà de ce champ d'excitation maximum, le champ magnétique  $\vec{B}$  ne peut plus croître. **La saturation** entraîne une allure horizontale de  $\mathbf{B(H)}$ .

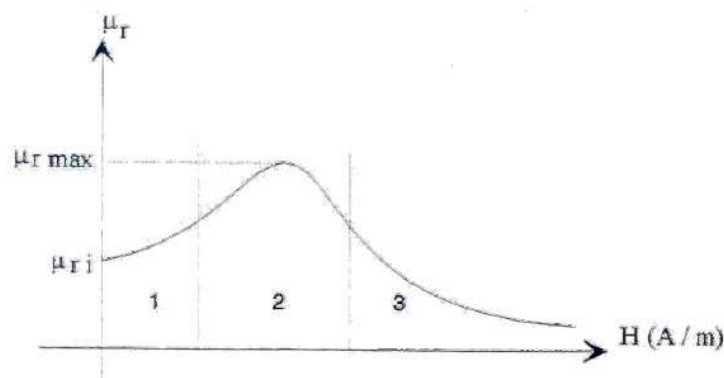


Alors, on peut y distinguer trois domaines de Weiss :

- une région de très faibles excitations dit domaine de **Rayleigh** où le flux croît très rapidement et le champ magnétique augmente de façon importante et parabolique pour de petite variation du champ  $\vec{H}$ . La susceptibilité ( $\chi = J/H$ ) peut donc y être très grande ( $\sim 10^4$ ) pour des valeurs extrêmement faible de  $\vec{H}$ .
- une région intermédiaire où le champ magnétique varie selon une loi complexe avec l'excitation magnétique. La relation  $B = f(H)$  bien que plus ou moins proche d'une fonction linéaire est impossible à traduire.

- une dernière région de fortes excitations. L'aimantation augmente de plus en plus lentement et tend vers un maximum. L'intensité du champ magnétique n'augmente plus, il est saturé  $B = B_{sat}$ , et même l'aimantation sature vers une valeur constant  $J_{sat}$  qui désigne l'orientation total de toutes les moments magnétique dans les domaines de Weiss au sens du champ  $\vec{H}$ .

**III.B.2) Courbe de perméabilité relative :** La perméabilité relative est la valeur dont il faut tenir compte lorsque nous caractérisant un matériau, elle décrit la facilité avec laquelle les charges magnétiques peuvent se déplacer dans le matériau. Il est possible de tracer l'allure de la perméabilité relative  $\mu_r = f(H)$  qui se décompose selon les 3 domaines.

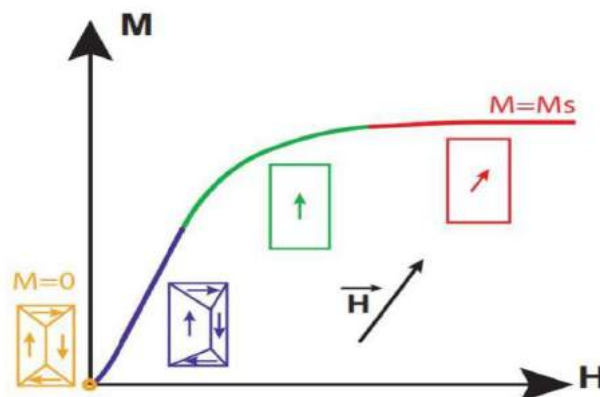


Bien que la perméabilité relative ne soit pas constante, elle peut néanmoins se calculer à partir de la pente de  $B(H)$ , soit :

$$\mu_r(H) = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$$

Les valeurs de la perméabilité relative seront d'autant plus élevées que la variation de  $B$  en fonction du champ d'excitation sera rapide.

**III.B.3) Courbe de l'Intensité d'aimantation :** L'aimantation étant également fonction de la susceptibilité et donc de la perméabilité relative  $\mu_r$ , nous pouvons également tracer la courbe  $J(H)$ .



**III.C) Effet de la température :**

Le caractère ferromagnétique des matériaux magnétique disparaît au-delà d'une température critique  $T_c$  dite de *Curie*. Les couplages à l'intérieur des domaines de WEISS disparaissent sous l'effet de l'agitation thermique. Ainsi, un morceau de matériau magnétique (fer) chauffé -au rouge- n'est plus attiré par un aimant. Les matériaux se comportent alors comme des matériaux paramagnétiques car la perméabilité relative  $\mu_r$  s'effondre alors que leur susceptibilité  $\chi$  suivra la loi de Curie-Weiss :

$$\chi_m = \frac{C_{Curie}^{te}}{T - T_c}$$

Le changement d'état est réversible, le matériau retrouve au refroidissement ses propriétés ferromagnétiques. Toutes les autres propriétés comme le champ rémanent, l'excitation coercitive, etc., sont affectées par l'élévation ou la diminution de la température.

**III.D) Irréversibilité des matériaux :**

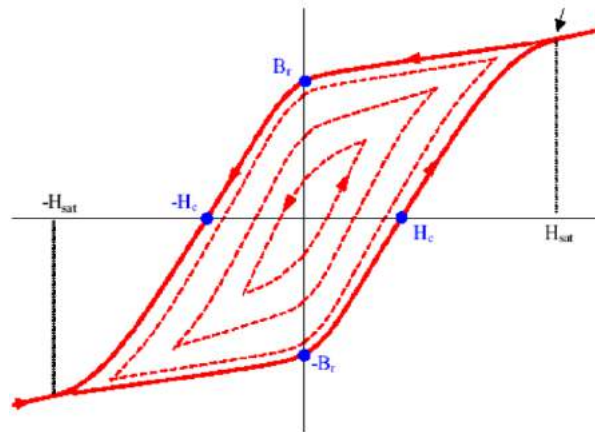
L'aimantation des matériaux ferromagnétique n'est pas réversible; de part sa première aimantation, il subit des échauffements, des déformations géométriques et des modifications de sa structure interne qui modifient sa perméabilité et donc sa prochaine réaction sous l'application d'un champ d'excitation extérieur.

**III.D.1) Cycle d'hystérésis« statique » :** les caractéristiques  $B(H)$  ou  $J(H)$  obtenues ne sont pas les mêmes selon qu'elles sont tracées à champ d'excitation croissant ou à champ d'excitation décroissant. Les spectres  $B(H)$  peuvent être très voisins ou au contraire très nettement séparés. Le graphe obtenu dit « **cycle d'hystérésis** » est étroit ou large selon le caractère de chaque famille de matériau magnétique.

L'irréversibilité de l'aimantation n'est jamais complète, car à chaque fois qu'on magnétise ou démagnétise un matériau il aura un retard d'aimantation entre les deux phénomènes en particulier à l'approche de la saturation, l'aimantation devient réversible, l'hystérésis disparaît et les deux courbes du cycle se confondent.

L'annulation du champ d'excitation magnétique  $H=0$ , n'implique jamais une annulation du champ magnétique total, il subsiste ce que l'on appelle un **champ rémanent d'intensité  $B_r$** . Alors pour démagnétiser totalement le matériau ( $B=0$ ), il faut donc inverser l'excitation  $H<0$  jusqu'à la valeur critique  $-H_c$  appelée **excitation coercitive**.

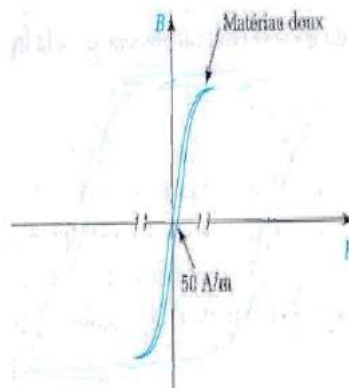
La courbe d'hystérésis s'évolue entre des parcours successifs entre  $+H_{max}$  et  $-H_{max}$  d'abord, puis se stabilise au bout de quelques dizaines de cycles.



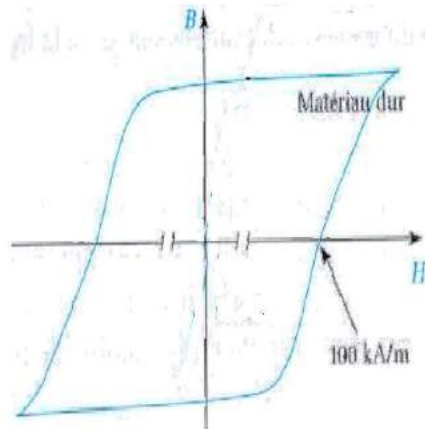
En fonction de la forme de la courbe d'aimantation  $B(H)$  et des valeurs de  $B_r$  et  $H_c$ , les matériaux magnétiques sont classés en plusieurs catégories correspondant à des domaines d'application précis. Il arrive parfois que cette classification se fasse à partir du rapport ( $B_r/H_c$ ).

Les matériaux ayant des rapports élevés sont dits « doux » contrairement aux matériaux magnétiques « durs » à faible rapport

**III.D.1.a) Matériaux doux** : sont des matériaux possédant une perméabilité élevée, leur aimantation est très importante mais elle disparaît en même temps que l'excitation. Ce qui implique un champ coercitif  $H_c$  faible et un cycle d'hystérésis haut et étroit c'est le cas du *Permalloy* dont les deux courbes coupent l'axe des H très près de Zéro et s'approchent de la courbe de première aimantation. Ces matériaux constituent les noyaux et les carcasses du matériel électrotechnique. (Fer pur, Fer silicié, Alliage Fer-Nickel...).



**III.D.1.b) Matériaux durs** : sont fréquemment utilisés pour la fabrication d'aimants permanents, ils subsistent une forte induction magnétique rémanente  $B_r$  à l'absence d'excitation ( $H=0$ ), qui ne peut s'annuler que par l'application d'une forte excitation magnétique  $H_c$ . Le cycle d'hystérésis est très large, c'est le cas de l'*Alnico*. (Ferrite de Baryum, Alnicos (Fer+Al+Cobalt)...)



**III.D.2) Cycle d'hystérésis« Dynamique »** : le cycle dynamique diffère légèrement du cycle statique. En effet, le flux magnétique n'est pas seulement dû à l'aimantation du matériau, des courants induits se développent et s'ajoutent au flux sortant ce qui entraîne un élargissement du cycle par rapport au cycle statique.

Le cycle d'hystérésis n'est donc pas une caractéristique intrinsèque du matériau et dépend non seulement des valeurs maximales d'excitation mais également de la fréquence. Le cycle s'élargit avec l'augmentation de la fréquence de H.

La diminution de la fréquence (de l'amplitude) fait donc décrire au matériau des cycles de plus en plus petits. L'amplitude maximale de l'excitation décroît lentement et régulièrement jusqu'à obtenir une aimantation rémanente nulle.

Après plusieurs milliers de cycles, nous obtenons une parfaite désaimantation du matériau.

**III.D.3) Pertes magnétiques par hystérésis** : Par l'intermédiaire du circuit d'excitation, il faut fournir de l'énergie au matériau pour l'aimanter jusqu'à saturation. Lors de la désaimantation jusqu'à annulation du champ, il restitue une partie seulement de cette énergie. En effet, la différence des trajets suivis sur le cycle d'hystérésis se traduit par une perte énergétique

Dans une machine électrique alternative où le circuit magnétique subit des cycles d'hystérésis à la fréquence imposée par le circuit électrique, la perte de puissance correspondant à l'échauffement est proportionnelle à l'aire du cycle et croît rapidement avec la fréquence de fonctionnement.

L'estimation de cette puissance dissipée (énergie perdue par unité de temps) dans le circuit, est calculée à partir de l'aire du cycle d'hystérésis suivant :

$$\text{Pertes} = dW = \oint H dB = \alpha B^2 f$$

Ces pertes diminuent la performance de la machine électrique ; c'est pourquoi les constructeurs utilisent des matériaux à cycle étroits présentant de faibles pertes.

**III.D.4) Pertes magnétiques par courant de Foucault :** Supposons un conducteur dans lequel n'existe initialement aucun courant volumique. Plongeons-le dans un champ magnétique uniforme  $B$ . En régime stationnaire, le champ magnétique pénètre uniformément dans le conducteur. S'il existe des variations du champ magnétique dans la matière, celles-ci génèrent par induction des courants induits qui se rebouclent sur eux-mêmes. Il y a donc échauffement par effet joule. Cette fois-ci, ces pertes sont proportionnelles au carré de la fréquence et du champ magnétique :

$$\text{Pertes} = KB_{\max}^2 f^2$$

Afin de limiter ces pertes, on cherche à réduire le parcours de ces courants induits. C'est pourquoi nous utilisons des circuits magnétiques feuilletés isolés.

Dans ce chapitre, nous exposant l'un des célèbres applications des matériaux magnétiques, ce sont les Circuits magnétiques.

### **I. Définition :**

Un circuit magnétique est un ensemble fermé de matériaux magnétiques à haute perméabilité (matériaux ferromagnétique) destiné à offrir un chemin privilégié au flux d'induction magnétique.

Le champ magnétique est généralement créé soit par des enroulements enserrant le circuit magnétique et traversés par des courants (transformateurs), soit par des aimants permanent contenus dans le circuit magnétique (loquet magnétique de portes).

Le circuit magnétique parfait est proportionnelle à un tube d'induction où la conservation du flux magnétique est nécessaire sur toutes les sections ce qui implique une uniformité d'induction dans toutes les tores du circuit.

**II. Propriétés des circuits magnétiques :** par analogie avec le circuit électrique, le circuit magnétique présente les propriétés suivantes :

**II.A) Force magnétomotrice :** c'est l'équivalent de la force électromotrice d'un générateur électrique, elle décrit la force d'un flux magnétique  $\phi$  à circuler dans le circuit

$$\mathcal{F} = NI$$

Cette force est proportionnelle au flux d'excitation magnétique du noyau selon la loi d'Ampère :

$$\mathcal{F} \propto \phi \quad \left( \mathcal{F} = \oint H dl \right)$$

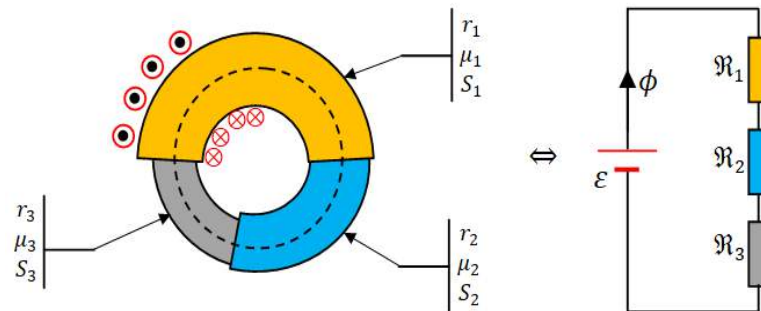
**II.B) Réluctance d'un circuit magnétique :** décrit l'équivalent d'une résistance électrique, elle exprime l'opposition faite au passage des charges électriques dans un circuit magnétique constitué par la matière. Nous parlons parfois de *résistance magnétique*.

Ce paramètre caractéristique n'est que le facteur de proportionnalité entre la force magnétomotrice et le flux magnétique « *relation d'Hopkinso* »:

$$\mathcal{F} = NI = \oint H dl = \oint \frac{B}{\mu_0 \mu_r} dl = \oint \frac{\phi}{S \mu_0 \mu_r} dl = \phi \oint \frac{1}{S \mu_0 \mu_r} dl = \mathcal{R} \phi$$

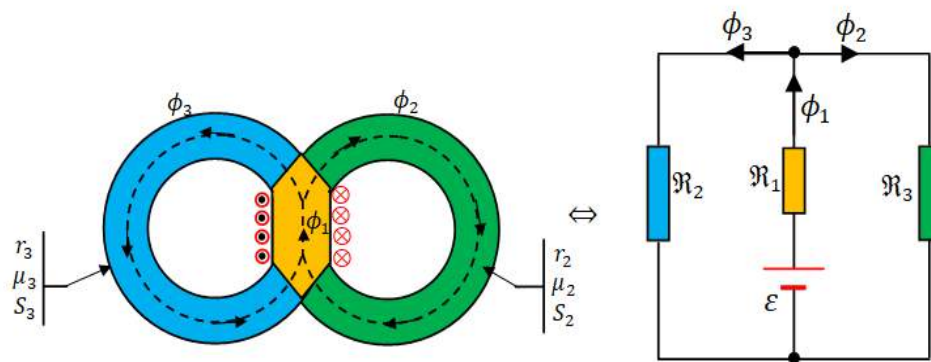
Si le circuit magnétique est constitué de plusieurs tronçons en série de section homogène et constante, de perméabilités différentes mais constantes, et de longueurs différentes, la réluctance totale de circuit aura la valeur suivante :

$$\mathfrak{R} = \sum_i^n \mathfrak{R}_i = \frac{1}{\mu_0} \sum_i^n \frac{l_i}{S_i \mu_{r_i}}$$



Alors que si les tronçons du circuit magnétique sont reliés parallèlement, la réluctance équivalente est donnée par :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_{eqi}} = \sum_i^n \frac{1}{\mathfrak{R}_i}$$



La réluctance se comporte comme une constante pour de faibles valeurs de l'excitation loin de la saturation, là où la perméabilité  $\mu_r$  du matériau est quasi-constante et l'approximation linéaire des circuits magnétiques possibles. Pour des valeurs plus élevées de  $H$ , la perméabilité n'est plus une constante, la réluctance n'est plus une constante et dans ce cas, l'utilisation du théorème d'ampère est préférée à la relation d'Hopkinson.



**II.C) La perméance magnétique :** c'est l'équivalent de la conductance d'un circuit électrique parallèle, elle mesure la quantité du flux magnétique qui conduit le circuit pour certain nombre de tours du courant. Elle est inversement proportionnelle à la longueur du matériau et à la réluctance magnétique.  $\mathcal{P}$

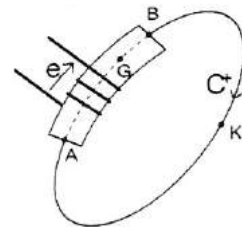
$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{1}{\mathfrak{R}_{AB}}$$

**II.D) Différence de potentielle magnétique :** La différence de potentielle d'un tronçon de circuit magnétique parfait filiforme qui porte un enroulement de force magnétique  $\varepsilon$  est donné par le l'application du théorème d'Ampère :

$$\varepsilon = \oint H dl = \int_{AGB} H dl + \int_{BKA} H dl = \sum_i I_K$$

Etant que :

$$\begin{cases} \int_{AGB} H dl = \mathfrak{R}\Phi \\ \int_{BKA} H dl = V_B - V_A \end{cases}$$



Donc la différence de potentielle est donné par :

$$V_B - V_A = \varepsilon - \mathfrak{R}\Phi$$

**II.E) Inductance d'un circuit magnétique :** Le flux total d'un circuit magnétique parfait enroulé par fil filiforme conducteur de force magnétique  $\varepsilon$  est équivalent au flux magnétique créés par chacune des spires d'une bobine uniforme d'inductance self  $L$  :

$$\begin{cases} \varepsilon = \mathfrak{R}\varphi = NI \\ \Phi = N\varphi = LI \end{cases} \Rightarrow L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

Sachant que :  $\mathfrak{R} = \frac{NI}{\varphi}$  on définit l'intensité du courant de saturation (inductance saturable) par :

$$I_{sat} = \frac{N B_{sat} S}{L}$$

**III. Types de circuit magnétiques :** la distinction des circuit magnétique se fait simplement selon la constitutions de chaque circuit :

**III.A) Circuit à entrefer :** L'entrefer est une coupure dans un circuit magnétique, elle se crée pour plusieurs raisons :

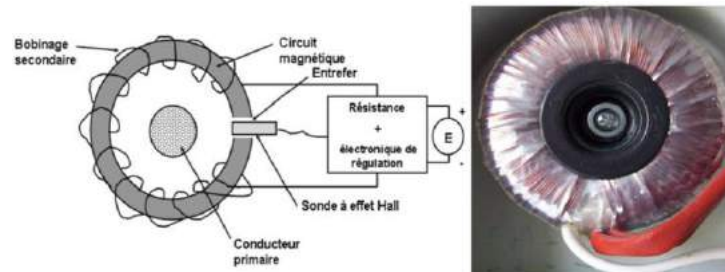
- Placer un appareil de mesure ou un capteur pour la mesure du champ circulant dans le circuit magnétique.
- Assurance de la mobilité d'une partie du circuit magnétique. C'est le cas pour les machines électriques où le stator et le rotor sont séparés d'un entrefer fonctionnel.
- Augmentation de la réluctance du circuit magnétique afin d'augmenter la valeur de l'intensité qui provoque la saturation du ce circuit.

L'entrefer doit être de faible épaisseur pour assurer la perpendicularité des lignes du champ magnétique entre les deux pièces métalliques de part et d'autre de l'entrefer.

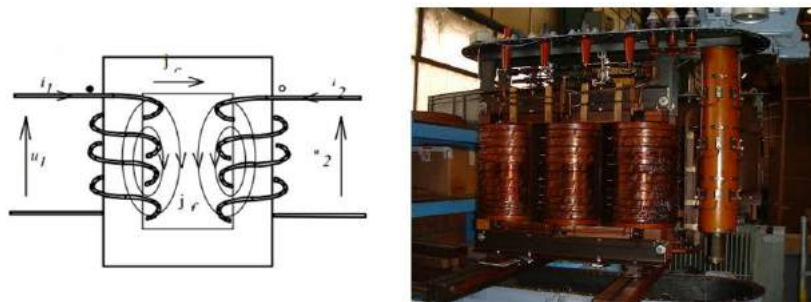
La réluctance d'un entrefer est donnée doc par :

$$\mathcal{R}_{\text{entrefer}} = \frac{e}{\mu_0 S}$$

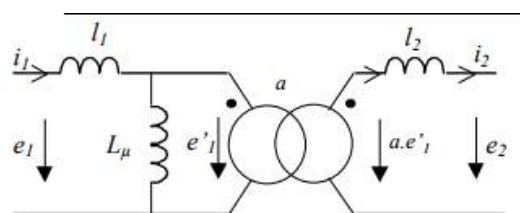
Etant que  $e$  et  $S$  sont respectivement l'épaisseur et la section de l'entrefer



**III.B) Circuit Couplée :** sont des circuits électriques bobinés autour d'un même circuit magnétiques par exemple deux enroulements d'un transformateur ou d'une machine électrique.



L'étude de fonctionnement de ces circuits mis en évidence différents modèles qui peuvent être établis en imposant la valeur d'un paramètre choisie de l'ensemble des éléments du circuit électrique. Ces modèles sont tous équivalents tant que l'on suppose le quadripôle purement inductif et parfaitement linéaire.

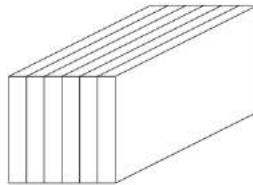


Le couplage magnétique représente le taux de transformation énergétique il est noté par le coefficient  $K_p$  où généralement  $a$  selon le modèle mathématique choisie.

Parmi ces modèles nous avons le modèle à fuites primaires ( $l_2 = 0$ ), le modèle à fuites secondaires ( $l_1 = 0$ ), le modèle à fuites séparées ( $m = a$ ) les transformateurs) et Enfin le modèle en T ( $a = 1$ ).

IV. **Réduction du courant de Foucault:** Le champ magnétique alternatif induit dans le noyau d'un circuit magnétique crée un courant induit dans le matériau. Ces courants induits créent des pertes  $\propto RI^2$  qui dissipent sous forme de chaleur.

Afin de minimiser ces courants induits, on utilise des noyaux formés de laminations isolées électriquement les unes des autres (pour le fonctionnement à basses fréquences) ou des noyaux en ferrite (pour le fonctionnement à hautes fréquences).



Noyau laminé ou feuilleté

L'estimation des pertes se fait à base des données de manufacturations avec la relation empirique suivante :

$$P_F = \frac{\pi^2 V}{6 \rho} (e \cdot f \cdot B_{max})^2$$

Etant que :  $e, \rho$  sont respectivement l'épaisseur d'une feuille du noyau et la résistivité du matériau

## **Bibliographie**

- Electromagnétisme MP cours, Méthodes et exercices résolus, P. KREMPF, Professor en class préparatoire à CPE Lyon. Breal edition 2004
- Magnétisme pour l'Electrotechnique, Licence Professionnel, Yann Cressault
- Electromagnétisme phénomène d'induction Jean Luc Dion ISBN 978-2-923565-19-4 (Québec)
- Electromagnetic Edward J. Rothwel and Michel J. Cloud ISBN 0-8493-1397-X
- Cours Licences Professionnelle, faculté de physique, université Pierre et Marie Curie, Nicolas Menguy
- Cours Professionnelle, Circuit Magnétique, ENSEA, 2009 :2010
- Cours Electrotechnique, département d'informatique et d'ingénierie, L'université de l'Outaouais et des Laurentides, canada
- Electrotechnique : électromagnétisme, Michel Piou, Chapitre 2, ferromagnétique et circuit magnétique, édition 2010