MATEMÁTICAS FINANCIERAS

Programa

Unidad I : Fórmulas que involucran intereses.

1.1 .- Introducción.

1.2 .- Importancia del Interés.

1.3 .- Definiciones.

1.4 .- Importancia del Tiempo.

1.5 .- Tasas de Interés.

1.6 .- Clases de Interés.

1.7 .- Ecuaciones de Valores Equivalentes.

1.8 .- Tasas Equivalentes.

1.9 .- Tasas Especiales.

1.10 .- Interpolación.

Unidad II : Anualidades.

2.1 .- Introducción.

2.2 .- Definición.

2.3 .- Tipos de Anualidades.

2.3.1 .- Anualidades Vencidas.

2.3.2 .- Anualidades Anticipadas.

2.3.3 .- Anualidades Diferidas.

2.4 .- Amortización.

2.5 .- Fondo de Amortización.

Unidad III : Gradientes.

3.1 .- Introducción.

3.2 .- Gradiente Aritmético.

3.3 .- Calculo de Factores de Pago Único y Serie Uniforme.

- Capital y Monto.
- Anualidades.

Unidad IV : Depreciación.

4.1 .- Conceptos Básicos.

4.2 .- Importancia de la Depreciación.

4.3 .- Objetivos y Valores de la Depreciación.

4.4 .- Métodos de Depreciación.

4.4.1 .- Línea Recta.

4.4.2 .- Suma de Dígitos al Año.

4.4.3 .- Fondo de Amortización.

Unidad V : Análisis de Alternativas de Inversión.

5.1 .- Introducción y Conceptos.

5.2 .- Calculo de Valores.

5.2.1 .- Valor Presente.

5.2.2 .- Costo Anual Uniforme Equivalente (CAVE).

5.2.3 .- Tasa Interna de Rendimiento (TIR).

5.3 .- Criterios Generales para Comparar Alternativas de Inversión.

5.3.1 .- Método de Valor Presente.

5.3.2 .- Método de Costo Anual.

5.3.3 .- Método de la Tasa Interna de Rendimiento.

Bibliografía :

1) Matemáticas Financieras.
Alfredo Díaz Mata.
Mc Graw Hill.

2) Matemáticas Financieras.
José Luis Villalobos.
Gpo. Editorial Iberoamérica.

3) Matemáticas Financieras.
Esther H. Highland.
Roverta S. Rosenbaun.
Prentice Hall.

4) Matemáticas Financieras.
Hugo M. Zendejas Núñez.
Trillas.

5) Matemáticas Financieras
Jaime A. García.
Pearson.

6) Matemáticas Financieras.
Jorge Rivera Salcedo.
I. P. H.

7) Matemáticas Financieras.
Linconyan Portos Govinden.
Mc Graw Hill.

8) Ingeniería Económica.
Leland T. Blank.
Anthony J. Tarquin.
Mc Graw Hill.

9) **Ingeniería Económica.** **G. J. Thuesen.**
H. G. Thuesen. **Prentice Hall.**
W. J. Fabrycky.

Unidad I : Fórmulas que Involucran Intereses.

1.1 .- Introducción : Las matemáticas financieras son una de las partes más útiles e interesantes de matemáticas aplicadas, sobre todo en los tiempos actuales, cuando todo mundo aspira a lograr con su dinero, el máximo de los beneficios como comprador y óptimos rendimientos como inversionista.

La actual situación económica de nuestro país exige de las personas relacionadas con el medio financiero un amplio conocimiento, así como la actualización de las operaciones, y técnicas aplicadas a éste mercado. Los principales conceptos matemáticos y las técnicas aplicadas en la solución de operaciones que se generan en el medio financiero; es el resultado del análisis de éste mercado, el cual requiere de hombres de negocios ampliamente preparados en el mismo. Lo anterior demanda cada vez más un mayor número de profesionales y asesores que sean capaces de efectuar cálculos financieros, y dar orientación adecuada a todos los que se hallan en la necesidad de conseguir dinero prestado, o que disponen de capitales para prestarlo o ponerlo a producir en inversiones.

1.2 .- Importancia del Interés : El uso del dinero no es gratuito, como tampoco lo es de cualquier otro activo (una casa, un automóvil); y tampoco lo de un servicio (luz, agua, teléfono, etc.); por tanto, el usuario del dinero, activos o servicios, debe satisfacer los deseos de utilidad de quien las proporciona. En el paso del dinero, esta utilidad se mide en utilidades monetarias, la cual unida al capital en uso hace que este cambie de valor del dinero con el tiempo, y por esto se habla del valor del dinero en el tiempo. Frases como "Dinero crea dinero", "El dinero tiene un valor en el tiempo" son consecuencias de estos deseos de utilidad y esto genera el concepto de "interés", el cual podríamos definir diciendo que la compensación pagada o recibida por el uso del dinero o cualquier otro activo.

El concepto de interés constituye la base fundamental no solo de las matemáticas financieras, sino de toda operación financiera particular en la que intervienen valores y tiempos.

1.3 .- Definiciones :

Interés : Es el rédito que se paga por una suma de dinero tomada en préstamo, la cual depende de las condiciones contractuales, y varía en razón directa con la cantidad de dinero prestada (capital), el tiempo de duración del préstamo (plazo) y la tasa de interés aplicada.

Tasa de Interés : Es la tasa que se aplica en una operación comercial, la cual determina el interés a pagar, se expresa en tanto por ciento (%) y generalmente la tasa de interés se da por año.

Tiempo : Es el intervalo durante el cual tiene lugar la operación financiera en estudio, la unidad de tiempo es el año.

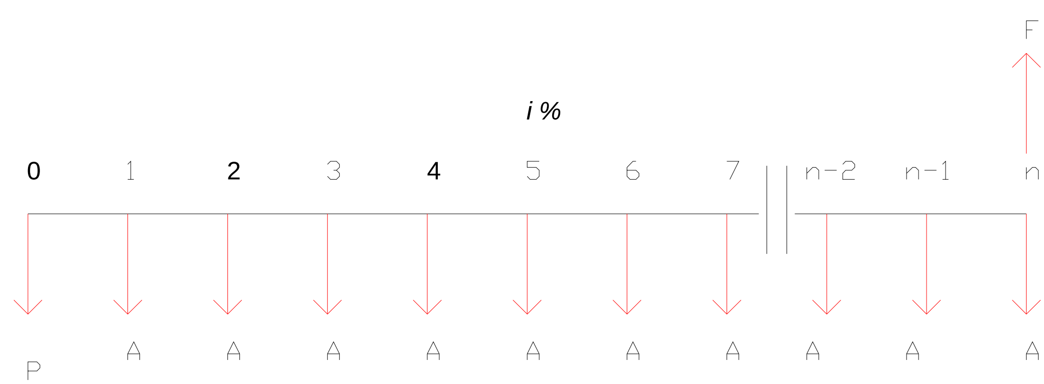
Periodo : Es el intervalo de tiempo en el que se liquida la tasa de interés (año, semestre, trimestre, bimestre, mes, quincena, semana, diario, etc.).

Capital : Es el dinero que se presta, comúnmente se le denomina valor presente.

Monto : Es el capital formado por el capital actual más los intereses devengados en el periodo, comúnmente se le denomina valor futuro.

Anualidad : Es el flujo de efectivo igual que se paga o se cobra cada cierto periodo.

Diagrama de Flujo de Caja : Es simplemente la representación gráfica de los flujos de caja dibujados a escala de tiempo. El diagrama debe representar el enunciado del problema y debe incluir datos dados o los que se haya que encontrar. El tiempo 0 (cero), se considera el tiempo presente, el tiempo 1 (uno), el final del periodo 1, y así sucesivamente hasta el periodo n.



P = Valor Presente.   A= Anualidad   *i* % = Tasa de Interés.

F = Valor Futuro.   N = Plazo. || = Corte.

Siendo: P y F factores de pago único y A factor de serie uniforme.

1.4 .- Importancia del Tiempo :

Es importante señalar que el año natural tiene 365 días o 366 días si es bisiesto, y que el año comercial sólo se consideran 12 meses de 30 días es decir de 360 días al año, es por ello que debemos considerar en algunas transacciones, los días transcurridos en forma exacta, así también, la fecha de vencimiento de un documento.

Días Transcurridos: Para obtener los días transcurridos de una operación financiera, primero: se obtiene la diferencia entre el día del mes terminal y el día del mes inicial; segundo: utilizando la tabla de tiempo exacto, obtenemos la cantidad de días definida por la intersección entre el mes inicial y el mes terminal; y tercero: sumar los días del primero y segundo paso y así obtener los días transcurridos.

Problema: Calcule el plazo de una transacción realizada el 4 de abril y con vencimiento el 19 de mayo del mismo año.

Primero : 19 – 4   Mayo

↓

Segundo : Abril → **30**

Tercero : 15 + 30 = 45 días.

Conclusión: El plazo de la transacción es de 45 días.

Problema: Calcule los días transcurridos entre el 3 de septiembre de un año y del 15 de abril del año siguiente.

Primero : 15 – 3 = 12 Abril

↓ **Conclusión:** El plazo de la transacción es de 224 días.

Segundo : Septiembre → 212

Tercero : 212 + 12 = 224 días.

Problema: Calcular los días transcurridos entre el 18 de marzo y el 10 de Noviembre del mismo año.

Primero : 10 – 18 = -8 Noviembre

↓ **Conclusión:** El plazo de la transacción es de 237 días.

Segundo : Marzo → **30**

Tercero : 245 + (-8) = 237 días.

Fecha de Vencimiento: Para encontrar la fecha de vencimiento de un documento, primero: se utiliza la tabla de tiempo exacto para localizar el mes de transacción y buscar por ese renglón el número de días más próximo o exacto al establecido en la transacción y con ello se encuentra el mes de vencimiento del documento; segundo: se obtiene la diferencia entre el número encontrado en la tabla y el establecido en el documento; y tercero: se resta del día del mes establecido por el documento la diferencia obtenida en el segundo paso y así obtener la fecha de vencimiento.

Problema: El día 13 de marzo se firmó un pagaré a 120 días. Calcular la fecha de vencimiento.

Julio

$\downarrow$

Primero: Marzo → **122** $\therefore$ Julio : Mes de Vencimiento.

Segundo: 122 – 120 = 2

Tercero: 13 – 2 = 11

Conclusión: Fecha de Vencimiento: 11 de Julio del mismo año.

1.5 Tasas de Interés:

Tasa Nominal (Simple): Es la tasa que se da por año, la cual se emplea en el calculo de interés simple y se representa con la letra r.

Tasa Compuesta (Efectiva): Es la tasa que se aplica a cada periodo de capitalización, la cual se emplea para el calculo de interés compuesto y se representa con la letra i.

Relación de Tasa Nominal y Compuesta: Una tasa de interés nominal r compuesta n veces por año, es equivalente a un rendimiento anual efectivo de $i = [(1+r/n)^n - 1] \times 100$ → (1), donde:

i = tasa compuesta o efectiva; r = tasa nominal y n = número de periodos por año; también se puede calcular :

$r = n\,[\,(1+i)^{1/n} - 1] \times 100$ → (2).

Problema: Enrique Martínez quiere depositar $2800 en una cuenta de ahorros y ha reducido sus opciones a las tres instituciones siguientes, ¿Cuál es la mejor?:

INSTITUCION	TASA DE INTERES SOBRE DEPOSITOS DE $1000 A $5000
VITAL	**Tasa anual de 5.08%, compuesta**
BANORO	**5.16% Rendimiento anual efectivo**
BANAMEX	**4.93%, Compuesta diariamente.**

Solución:

Bital: $i = \left[\left(1 + \frac{0.0508}{12} \right)^{12} - 1 \right] \times 100 = 5.20$ % Anual Efectivo.

$r = 5.08$ % Anual.

$n = 12$.

Banoro: $i = 5.16$ % Anual Efectivo.

Banamex: $i = \left[\left(1 + \frac{0.0493}{365} \right)^{365} - 1 \right] \times 100 = 5.05$ % Anual Efectivo.

$r = 4.93$ % Anual.

$n = 365$.

Conclusión: El mejor rendimiento lo ofrece Bital.

Tasa Continua (Exponencial): Se define una tasa de interés continua como aquella cuyo periodo de capitalización es lo más pequeño posible, esto quiere decir que el numero de periodos de capitalización durante el tiempo de la operación financiera crece indefinidamente **(**Exponencial**)**; la tasa efectiva y nominal se pueden calcular con las expresiones: **$i = [\,e^{r} - 1\,] \times 100$ → (**3**)** y **$r = [\ln (1 + i)] \times 100$ → (**4**)** ; de acuerdo a su relación.

Problema:

Esteban invierte su capital al 15.6% anual compuesto continuamente, ¿Cuál es la tasa efectiva anual esperada?

Solución:

r = 15.6% Anual ;

$i = [e^{0.156} - 1] \times 100 = 16.88\%$ anual, capitalizada Continuamente.

Problema:

¿Cuál es la tasa nominal anual necesaria para producir las siguientes tasas efectivas anuales, si se esta utilizando capitalización continua:

a) 22 %?.

b) 13.75 %?.

Solución:

$$r = [\ln (1 + i)] \times 100 = [\ln (1 + 0.22)] \times 100 = 19.89\ \%\ \text{Anual}$$

a) i = 22% Anual $\therefore$ r = 19.89 % Anual.

$r = [\ln (1 + i)] \times 100 = [\ln (1 + 0.1375)] \times 100 = 12.88\ \%$ Anual

b) $i = 13.75\%$ Anual $\therefore$ $r = 12.88\ \%$ Anual

1.6 .- Clases de Interés:

Interés Simple: Es la cantidad generada o devengada sobre un monto de capital inicial invertido o prestado, los intereses generados no se incorporan al capital de tal manera que éste permanece constante durante el o los periodos de aplicación del mismo, es decir: $I = Pnr \rightarrow$ **(**5**)**, donde: I = Interés simple; p = Capital; n = Plazo; r = Tasa de Interés nominal; el plazo y la tasa de interés, deben expresarse en la misma base de tiempo **(**La base: la unidad de medida, el año**)**.

Problema:

Calcular el interés de un capital de \$ 10, 000 con una tasa de interés del 25% anual simple en un periodo de 15 meses.

Solución:

P = \$ 10, 000

r = 25% Anual = 0.25 Anual.

n = 15 meses = 15/12 = 1.25 Años.

I = Pnr = $ 10, 000 (1.25)(0.25)

I = $ 3125.00

Problema:

Determinar el interés sobre un préstamo de $ 3, 500 realizado el 4 de abril y con vencimiento el 19 de mayo, si la tasa de interés es de 18% simple anual:

Solución:

P = $ 3, 500

r = 18% Anual = 0.18 Anual.

n = 45 Días = 45/360 Años.

Primero: 19-4 = 15 Mayo.

Segundo: Abril → 30.

Tercero: 30+15 = 45 días.

I = Pnr = [$ 3, 500] [45/360] [0.18]

I = $78.75 (Comercial).

Monto Simple: El monto o valor futuro se obtiene al sumar los intereses al capital, es decir: F = P+I → **(**6**)**; Sustituyendo **(**5**)** en **(**6**)** , obtenemos que: $F = P + Pnr = P(1 + nr) \rightarrow$ **(7)** ; donde: F = Monto Simple; P = Capital; n = Plazo; r = Tasa Nominal; (1+nr) = Factor de crecimiento, siendo P y F factores de pago único.

Problema: Calcular el monto de un capital de \$ 150, 000, con una tasa de interés de 25% simple anual en un tiempo de 9 meses.

Solución:

P = \$ 150, 000

r = 25% Anual

n = 9 meses = 9/12 años

$F = P(1+nr) = 150,000\,[1+(9/12)(0.25)]$

F = \$ 178, 125.00

Problema: Una empresa firma un pagaré para liquidarlo en un tiempo de 18 meses por la cantidad de \$500, 000, con una tasa de interés de 36% anual simple, ¿Cuál será el capital inicial que recibió al firmar el pagaré?

Solución:

F = \$500, 000

n = 18 meses = 18/12 Años.

$r = 36\%$ Anual = 0.36 Anual.

$$F = P(1+nr) \quad \therefore \quad P = \frac{F}{1 + nr}$$

$$P = \frac{500,000}{1 + (18/12)(0.36)} \qquad P = \$\ 324,675.32$$

Problema : ¿Cuál será la tasa de interés que resulta de recibir un préstamo por la cantidad de \$ 370, 000 pagando un monto de \$410, 000 en un plazo de 9 meses?

Solución:

P = \$ 370, 000

F = \$410, 000

n = 9 Meses = 9/12 Años

$$F = P\,(1+nr)$$

$$\frac{F}{P} = 1 + nr$$

$$\frac{F}{P} - 1 = nr$$

$$r = \frac{(F/P) - 1}{n} = \frac{(410,000 / 370,000) - 1}{9/12} = 0.1441$$

r = 0.1441 x 100 = 14.41% Anual.

Problema : Calcular el tiempo en que un capital de \$ 80, 000 se convierte en un monto de \$ 160, 000, aplicando una tasa de interés de 25% Anual simple.

Solución:

P = \$ 80, 000

F = \$ 160, 000

r = 25% Anual = 0.25 Anual

$F = P(1+nr)$

$$\frac{F}{P} = 1 + nr$$

$$\frac{F}{P} - 1 = nr$$

$$n = \frac{(160,000/80,000) - 1}{0.25} = 4$$

n = 4 Años.

Problema:

Un comerciante adquiere un lote de mercancías con valor de $3, 500 que acuerda liquidar haciendo un pago inmediato por $1, 500 y un pago final 4 meses después, acepta pagar 60% de interés simple sobre el saldo. ¿Cuándo deberá dentro de 4 meses?

Solución:

P = $ 3, 500 - $ 1, 500 = $ 2000 (Saldo)

r = 60% Anual = 0.60 Anual.

n = 4 meses = 4/12 Años.

$F = P[1 + nr]$

$F = \$ 2,000 [1+(4/12)(0.60)]$

F = $2, 400.00

Interés Compuesto: Para la aplicación de interés compuesto el periodo de aplicación de interés se subdivide en periodos de composición, la cantidad generada o devengada durante cada uno de estos se agregará al capital existente al inicial del mismo y se convertirá en el capital inicial del periodo de composición siguiente. En esta forma los intereses devengados en cada periodo de composición pasan a formar parte del capital por lo tanto de generarán intereses sobre intereses en el periodo de la inversión.

Monto Compuesto: El valor futuro de obtiene por la capitalización de intereses el cual es el proceso por el que el interés generado, pasa a formar parte del capital, incrementando con ello el capital inicial. El concepto de capitalización, por lo tanto, lleva implícito el manejo de interés compuesto, es decir, $F = P\ (1+i)^n \rightarrow$ (8) ó en forma estándar : $F = P\ (F/P\ i\%\ n) \rightarrow$ (9) ;donde: F = Valor Futuro (Monto); P = Valor Presente (Capital); i% = Tasa de Interés (Compuesta); n = Plazo; $(1+i)^n$ ó (F/P i% n): son factores de crecimiento.

Valor Presente (Capital): Es la cantidad que se debe invertir ahora para producir el valor futuro, el cual se puede calcular a partir de la formula (8); es decir: $P = F/\ (1+i)^n \rightarrow$ (10) ó en forma estándar: $P = F\ (P/F,\ i\%,\ n) \rightarrow$ (11) ;donde: P = Valor Presente ; F = Valor Futuro; i% = Tasa de Interés (Compuesta); n = Plazo; $(1+i)^{-n}$ ó (P/F, i%, n): son factores de crecimiento, el plazo y la tasa de interés, deben expresarse en la misma base de tiempo. (La base: la unidad de medida es el periodo de capitalización).

Monto Continuo: Cuando se utiliza interés continuo, el valor futuro y valor presente se obtienen con las expresiones: $F = Pe^{r\,n}$ → (12) y $P = Fe^{-r\,n}$ → (13); donde: F = Valor Futuro Continuo; r = Tasa de Interés Nominal y n = Plazo.

Problema : Calcular el valor futuro a interés compuesto de 8 años de un capital de $6000 a la tasa de 10% Anual capitalizado semestralmente.

Solución:

P = $6, 000	F = P(F/p, i %, n)
i = 10% Anual cap/sem ∴	= 6000 (F/p, 5%, 16)
i_s = 10%/2 = 5% Semestral.	F= 6000 (2.1829) = $ 13097.40
N = 8 años∴n = 8 x2=16 sem.	F = $13, 097.40

Problema : Encontrar la tasa de interés con capitalización trimestral, si va capital de duplica en dos años.

Solución:

Capital = P	$F = P\,(1+i)^n$
	$2P = P\,(1+i)^8$
Monto = 2P	$\underline{2P} = (1+i)^8$

n=2 años ∴n=2x4=8 trim.

P

$2 = (1+i)^8$

$\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{(1+i)^8}$

$i = 0.0905 \therefore I_t = 9.05\%$ Trim.

$i = 9.05 \% \times 4 = 36.20\%$ Anual.

$i = 36.20 \%$ Anual Cap/Trim.

Problema: Si se invierten $3, 500 ahora esperando obtener $5, 000 en una fecha posterior, ¿Cuándo deberá recibirse el dinero al fin de ganar al menos el 8% Anual de interés?

Solución:

P = $3, 500

F = $ 5, 000

i = 8% Anual= 0.08 Anual

$F = P(1+i)^n$

$5000 = 3500\ (1+0.08)^n$

$5000/3500 = (1.08)^n$

$1.428571 = (1.08)^n$

$\log 1.428571 = \log (1.08)^n$

$\log A^n = n \log A$

$\log 1.428571 = n \log (1.08)$

$n = 4.63$ Años.

Problema: Un inversionista tiene 3 posibilidades de invertir su dinero, ¿Cuál de las tres opciones siguientes debe elegir?

a) 28.5% Anual capitalizada mensualmente.

b) 32% Simple Anual.

c) 30% Anual capitalizada semestralmente.

Solución:

a) Capital = P

i = 28.5% Anual Cap/Sem.

i_m=28.5%/12=2.375% Mensual.

n = 1 Año = 12 meses.

$F = P\ (1+i)^n = P(1+0.02375)^{12}$

F=1.325339P

b) Capital = P

r = 32 % Anual

n = 1 Año

$F = P(1+nr) = P\ [1+(1)(0.32)]$

F = 1.32 P

c) Capital = P

i = 30% Anual Cap/Sem.

i_s = 30/2 = 15% Sem.

n = 1 Año = 2 Semestres

$F = P\ (1+i)^n = P(1+0.15)^2$

F=1.3225P

Conclusión: La mejor opción de inversión es a la tasa del 28.5% anual cap/mes.

Problema: ¿Es más productivo invertir al 42% simple Anual que al 40% Anual capitalizado semestralmente? Falso o Verdadero.

Solución:

Simple Anual

Capital = P

r = 42% Anual= 0.42

n = 1 Año.

$F = P(1+nr)^n = P\ [1+(1)(0.42)]^2$

F = 1.42P

Capitalizado

Capital = P

i = 40% Anual Cap/Sem

$\therefore\ i_s$= 20% Sem = 0.20

n = 1 Año = 2 Semestres

$F = P\ (1+i)^n = P(1+0.20)^2$

F=1.44P

Conclusión: Falso.

Problema: ¿Cuánto dinero hoy equivaldrá $5, 000 en 6 años, a una tasa de interés del 7% Anual?

Solución:

F = $5, 000	P = F (P/F, i%, n)
n = 6 Años.	P = 5000 (P/F, 7%, 6)
i = 7% Anual	P = 5000(0.6663)
	P = $ 3331.50

Problema: ¿Cuanto debe depositarse en un banco si se desea tener un monto de $ 10, 000 dentro de 3 años a una tasa de 20% Anual capitalizada semestralmente?

Solución:

F = $10, 000	P = F (P/F, i%, n)
n = 3 Años.	P = 10, 000 (P/F, 10%, 6)
i = 20% Anual Cap/ Sem	P = 10, 000 (0.5645)

$\therefore$ i_s= 10% Sem.

P = \$5, 645.00

Problema: Una persona deposita hoy una suma de dinero en una institución financiera que paga un interés del 27% anual capitalizado continuamente. Si el saldo a favor del inversionista es de \$ 855, 000 dentro de 3 años. Hallar el valor del depósito.

Solución:

F = \$ 855, 000

r = 27% Anual Cap/ Sem

n = 3 Años.

$P = F e^{-r\,n} = 855,000\ e^{-(0.27)(3)}$

P = \$380, 353.65

Problema: ¿Al cabo de cuanto tiempo una inversión de \$420, 000 se convierte en \$1' 465, 944.00, si el rendimiento del dinero es del 25% Nominal capitalizable continuamente?

Solución:

P = \$420, 000

F = 1' 465, 944

r = 25% Anual Cap/Cont.

$F = P e^{r\,n}$

$1'465,944 = 420,000\ e^{0.25\,n}$

$1'465,944 / 420,000 = e^{0.25\,n}$

$3.4903429 = e^{0.25\,n}$

$\ln 3.4903429 = \ln e^{0.25\,n}$

$\ln 3.4903429 = 0.25\,n \ln e$

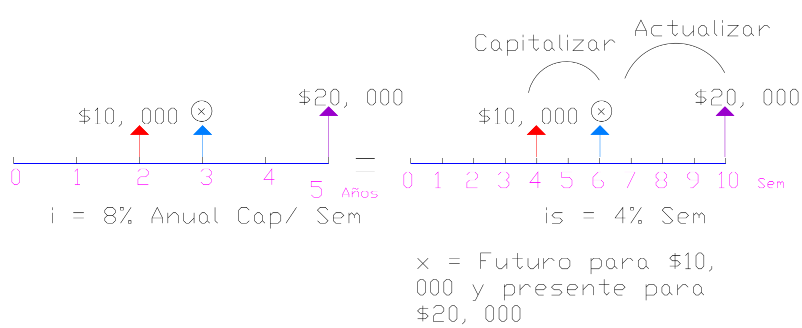
Si ln e = 1.0 n = 1.25/ 0.25

ln 3.4903429 = 0.25 n n=5Años.

1.7 .- Ecuaciones de Valores Equivalentes: Un problema básico en las operaciones financieras es el de las inversiones equivalentes, es decir que, en valor y tiempo, produzcan el mismo resultado económico, esto se expresa en ecuaciones de valores equivalentes.

Un mismo valor situado en fechas diferentes es, desde el punto de vista financiero, un valor diferente. Usted no debe olvidar que solo se pueden sumar, restar o igualar dineros ubicados en una misma fecha. Estas ecuaciones son las que se forman igualando, en una fecha focal o de comparación las sumas e los valores en fecha escogida de dos conjuntos diferentes de obligaciones.

Problema: Una persona debe $10, 000 pagaderos dentro de 2 años y $20, 000 a 5 años de plazo. Pacta con su acreedor efectuar un pago único al final de 3 años a la tasa del 8% anual, capitalizado semestralmente, calcular el valor del pago único.



Solución:

$P = \$10,000$

$n = 2$ Sem.

$F = \$20,000$

$n = 4$ Sem.

$i_s = 4\%$ Sem

$x = 10,000(F/P, 4\%, 2) + 20,000(P/F, 4\%, 4)$

$x = 10,000(1.0816) + 20,000(0.8548).$

x = \$27912.00

1.8 .- Tasas Equivalentes: Se dice que dos tasas son equivalentes, si producen el mismo rendimiento efectivo al final del periodo, con diferentes periodos de capitalización, es decir: $F_1 = F_2$.

Problema: ¿Qué tasa anual capitalizada mensualmente es equivalente al 25% Anual Capitalizada trimestralmente?

Solución:

Capital = P

n = 1 Año.

i = ? Cap/ Mes

i_m =i%/12; n = 12 meses

i = 25% Anual Cap/ trim

i_t = 6.25% Trim; n=4 trim.

n = 1 Años

$F_1 = P\ (1+ i/12)^{12}$

$F_2 = P(1+ 25\%/4)^4 = P(1.0625)^4$

$F_1 = F_2$; $P(1+i/12)^{12} = P(1.0625)^4$

$\therefore$ i = 24.5% Anual Cap/Sem

Problema: ¿Qué tasa capitalizada mensualmente es equivalente al 50% Anual con capitalización semestral?

Solución:

Capital = P

n = 1 Año

i = ? Cap/Sem

i_m = i%/12

n=12 meses

i = 50% Anual Cap/Sem

i_s = 25% Semestral.

n= 2 semestres.

$F_1 = P(1+i\%/12)^{12}$

$F_2 = P(1+50\%/2)^2 = P(1.25)^2$

$F_1 = F_2$

$P(1+i\%/12)^{12} = P\ (1.25)^2$

i = 45.47% Anual Cap/Sem

1.9 .- Tasas Especiales:

Tasa Inflacionaria: La inflación es un proceso sostenido de elevación del nivel general de precios en una economía, tiene como consecuencia la disminución del valor del dinero. En México la inflación se mide a partir de los incrementos en el Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), publicado quincenalmente por el banco de México, y se expresa en forma porcentual.

La inflación puede ser medida desde diferentes puntos de vista, dependiendo de las necesidades del analista, de tal manera que se han desarrollado varios conceptos para el manejo de la inflación:

1) Inflación Acumulada.
2) Inflación Remanente.
3) Inflación Anual (Según Banxico).
4) Inflación Promedio.

✯ **Inflación Acumulada:** La inflación acumulada representa la inflación de dos o más periodos consecutivos, es decir: $i_{fACUM} = [(1+i_{f1})(1+ i_{f2}) \ldots (1+ i_{fn}) - 1] \times 100 \rightarrow (14)$;donde:

$i_{f\ ACUM}$: Inflación Acumulada, i_{fi} : Inflación de cada periodo i (i=1, 2, 3, ... n).

Problema: Determinar la inflación de un año, si las inflaciones trimestrales del mismo fueron ls siguientes: 15%, 12%, 10% y 8%.

Solución:

i_{f1}= 15 % =0.15 i_{f3}= 10 % =0.10

i_{f2}= 12 % =0.12 i_{f4}= 8 % =0.08

$i_{f\ ACUM}$ = [(1+0.15)(1+0.12)(1+0.10)(1+0.08) –1] x100

$i_{f\ ACUM}$ = 53.01% Anual.

✯ **Inflación Remanente:** Es la máxima inflación que puede ocurrir para que no sea traspasado un límite predeterminado, considerando los niveles de inflación que se han registrado, es decir:

$$i_{f\ REM} = \left[\left(\frac{1+i_{f1}}{1+i_{f0}}\right) - 1\right] \times 100 \rightarrow (15)\text{; donde:}$$

$i_{f\ REM}$ = Tasa de inflación remanente; $i_{f\ i}$ = Inflación que se tiene como limite u objetivo; $i_{f\ 0}$ = Inflación ya registrada.

Problema: Se estima una inflación anual del 72%, si al momento se ha incurrido en una inflación semestral de 40%. ¿Cuál es la inflación remanente para el segundo semestre?

Solución:

$i_{f\,0} = 40\% = 0.40$

$i_{f\,1} = 72\% = 0.72$

$$i_{f\,REM} = \left[\frac{(1+0.72)}{(1+0.40)} - 1\right] \times 100 = 22.85\%$$

$i_{f\,REM} = 22.85\%$ para el próximo semestre.

✯ **Inflación Anual (Banxico):** Es la tasa a acumularse en el año si tomamos como base la inflación registrada en un periodo (Es necesario suponer que el mismo nivel de inflación se registra en todos los periodos subsecuentes), su utilización es útil, por lo tanto, para la realización de pronósticos, es decir:

$i_{f\,ANUAL} = [(1+i_f)^n - 1] \times 100 \rightarrow (16)$; donde:

$i_{f\,ANUAL}$: Tasa de Inflación Anual; i_f: inflación registrada en el periodo en cuestión; n: N° de periodos iguales contenidos en un año.

Problema: Si la inflación en un mes fue de 5%, para saber la inflación anual se supondrá que cada mes durante los siguientes 11 meses se registrará una inflación del 5%.

Solución:

$i_f = 5\%$ Mensual.

n = 12 meses.

$i_{f\,ANUAL} = [(1+0.05)^{12} - 1] \times 100 = 79.59\%$

$i_{f\ ANUAL}$= 79.59%.

✯ **Inflación Promedio:** La inflación promedio se obtiene a partir de una inflación acumulada y representa la inflación igual para cada uno de los periodos contenidos en el periodo analizado, es decir:

$i_{f\ PROM}= [(1+i_{f\ ACUM})^{1/n} - 1] \times 100$ →(17); Donde:

$i_{f\ PROM}$ = Tasa de inflación promedio por periodo; $i_{f\ ACUM}$ = Inflación acumulada; n = N° de periodos contenidos en el periodo analizado.

Problema: Determine la inflación promedio anual si en un periodo de 5 años, la inflación acumulada fue de 400%.

Solución:

$i_{f\ ACUM}$ = 400% = 4

n = 15 Años.

$i_{f\ PROM}= [(1+4)^{1/5} - 1] \times 100 = 37.97\%$

$i_{f\ PROM}$=37.97 %

Tasa de Devaluación: Es la medida de la perdida del valor dee la unidad monetaria nacional frente a otra moneda extranjera. En nuestro caso, la moneda extranjera frente a la cual tiene mayor aplicación éste concepto es el dólar de los E. E. U. U. Esta tasa se determina tomando los cambios de dolar por pesos mexicanos en dos fechas diferentes, es decir: id = [(TC_n/ TC_n) – 1] x 100 → (18); donde id= tasa de devaluación; TC_n = Tipo de Cambio en el tiempo n y TC_D= Tipo de cambio en el tiempo D.

Problema: Si el 1° de enero de un año un dólar varía $9.45 y el 31 se diciembre del mismo año el cambio estaba en $10. ¿Cuál es la tasa de devaluación de ese año?

Solución:

Tc_n = $10

Tc_D = $9.45

id = [(10/ 9.45) – 1] x 100 = 5.82%

id = 5.82% Anual.

Tasa Real: El concepto de tasa real ha cobrado cada vez mayor importancia en razón de que el entorno en el que se ha venido desarrollando el sistema financiero mexicano ha marcado la necesidad de deslindar de los rendimientos la perdida del poder adquisitivo. En este contexto, han aparecido una serie de instrumentos de la inversión cotizadas en tasa real, en los que el rendimiento pactado al inversionista se mide en forma de "inflación más tanto". El caso más destacado son los ajusta bonos.

La tasa de interés nominal son las que se utilizan generalmente para cotizar los diferentes instrumentos en mercado de dinero. Una tasa de interés nominal mide la variación de un monto de dinero durante un periodo determinado de tiempo, pero sin hacer referencia al cambio real en el poder adquisitivo de ese monto de dinero, por lo tanto, incrementos en esta tasa de interés incluyen tanto incrementos en precios como incrementos reales de la misma. Es decir:

$$i_R = \left[\frac{(1+r)}{1+i_f} - 1\right] \times 100 \rightarrow (19);\ \text{donde:}$$

I_R = Tasa de interés real; r = tasa de Interés nominal; i_f = tasa de inflación.

Problema: Determine la tasa real de una inversión con rendimiento de 76% Anual, existiendo una inflación del 60%.

Solución:

r = 76% anual = 0.76

i_f = 60% = 0.60

$$i_R = \left[\frac{(1+0.76)}{1+0.60} - 1\right] \times 100$$

i_R = 10% Anual.

Problema: Determine la tasa nominal de un préstamo si se pactó una tasa real del 20% anual y la inflación que se espera es de 40% Anual.

Solución:

$i_R = 20\% = 0.20$

$i_f = 40\% = 0.40$

$$i_R = \left[\frac{1+r}{1+i_f} - 1\right] \times 100$$

$$0.20 = \left[\frac{1+r}{1+0.40} - 1\right]$$

$(1.20)(1.40)= 1+r$

$r = 68\%$ Anual.

Tasa Real de Crédito: Es aquella que tiene relación con la tasa de devaluación y la tasa comercial de crédito en dólares. Es decir:

$i_{RC} = [i_d + i_c + (i_d)(i_c)] \times 100 \rightarrow$ (20); donde:

i_{RC} = Tasa Real de Crédito; i_d = Tasa de devaluación; i_c = Tasa comercial de crédito en dólares.

Problema: Hoy obtenemos un crédito por valor de 5000 dólares a un año. El cambio de hoy es de $9.40 y se prevé que dentro de un año el cambio será de $10.25. si la tasa de interés e del 12% anual, determinar el verdadero costo de crédito.

Solución:

$I_d = [(T_{cn}/T_{co})-1]x100$

$I_d = [(10.25/9.4)-1]x100$

$I_C = 12\%$ Anual $= 0.12$

$I_{RC} = [0.0904+0.12+(0.0904)(0.12)]x100$

$I_{RC} = 22.08\%$ Anual.

Tasa de Oportunidad: Por lo general, no todas las personas tienen las mismas oportunidades en la vida y en un caso específico es el que hace referencia a las inversiones que pueden hacer las personas o entidades. En este sentido, cada persona puede tener diferentes oportunidades de realizar sus inversiones. Por ejemplo, una determinada persona puede tener un acceso a las siguientes tasas en el mercado: 25% Anual, 28% Anual, 33% Anual y hasta un 35% Anual, sin incurrir en mayores riesgos o gastos adicionales. Dentro de esta gama de oportunidades que tiene la persona, a la mayor tasa se le conoce generalmente ″Tasa de Oportunidad”, que en nuestro caso es del 35% Anual; a la menor, en este caso el 25%, se le conoce con el nombre de “Tasa mínima atractiva del rendimiento (TMAR)”. Como puede deducirse, la tasa de oportunidad es una tasa netamente personal o individual, depende exclusivamente de la persona o entidad inversionista y no del flujo de caja de la inversión como si sucede con la llamada “Tasa Interna de Rendimiento (TIR)”. Cuando se van a evaluar alternativas de inversión, la tasa de descuento que se utiliza es precisamente la tasa de oportunidad del inversionista, porque esto quiere decir que es la tasa de interés que deja de recibir por hacer la inversión en estudio.

El sentido financiero de descontar el flujo de caja de un proyecto con la tasa de oportunidad es el cobrarle al proyecto o inversión la tasa que el inversionista se priva de devengar en otras actividades por hacer la inversión en el proyecto que esta evaluando.

1.10 .- Interpolación: Algunas veces es necesario localizar el valor de un factor para una tasa de interés i ó un plazo n que no aparecen en las tablas de factores de interés. Cuando esto ocurre, es necesario interpolar entre los valores tabulados o ambos lados del valor deseado que no figura. El primer paso en la interpolación lineal es ordenar los valores conocidos y los desconocidos como se muestra en la tabla y después se establece la ecuación proporcional y se resuelve para **c.**

Tabla:

	Valor tabulado	→	Valor N° 1	
b a	Valor deseado (i ó n)	→	Valor no listado (x)	c
	Valor tabulado	→	Valor N° 2	d

Donde a, b, c y d representan diferencias no negativas que figuran en las tablas de valores de interés, es decir: C = ad/b → (21); entonces el valor no listado x se obtiene con las expresiones:

x = Valor N° 1 + C → (22) (Cuando el valor N° 2 > Valor N° 1)

x = Valor N° 1 - C → (23) (Cuando el valor N° 2 < Valor N° 1)

Problema: Calcula el valor presente necesario para obtener un monto de \$6000 en un plazo de 9 años a una tasa de interés de 7.7% Anual.

Solución: i = 7.7% Anual

F = \$6000 n = 9 años.

P = F[(P/F,I%,n) = 6000[(P/F,7.7%,9) = 6000(0.54138)

$\therefore$ P = \$3248.28

		i%		P/F		
b		7%	→	0.5439		x = Valor N°1 - c
	a	7.7%	→	x	c	x=0.5439-.00252=0.54138
		8%	→	0.5403	d	$\therefore$ (P/F,7.7%,9)=0.54138

a = 7.7 – 7 = 0.7 c = ad/b = [(0.7)(0.0036)]/1.0

b = 8 – 7= 1.0 c = 0.00252

d = 0.5439-0.5403=0.0036 Valor N° 2 < Valor N° 1

Como evitarlo:

F = \$6000 i = 7.7% Anual = 0.077

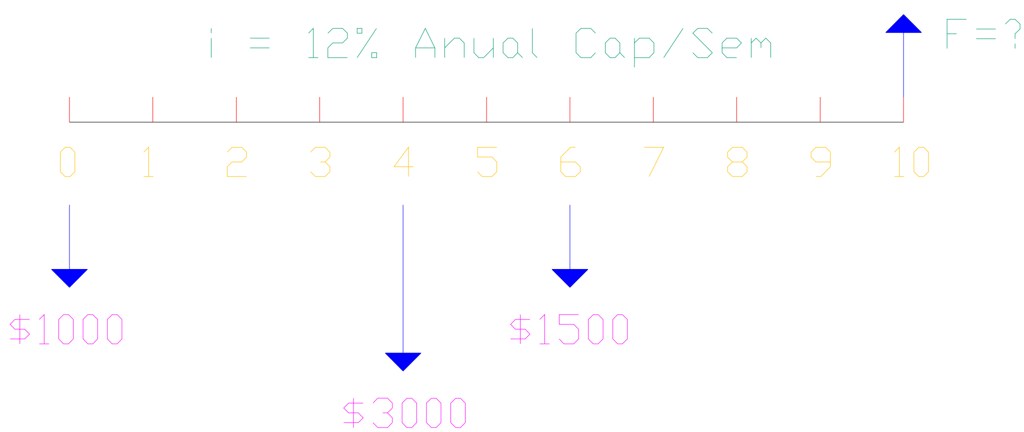
n = 9 años

$P = F[1+i)^{-n} = 6000((1+0.077)^{-9} = 6000(1.077)^{-9}$

P = $3077.58

Problema: Si una persona deposita $1000 hoy, $3000 dentro de 4 años y $1500 dentro de 6 años a una tasa de interés de 12% anual capitalizada semestralmente. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta 10 años después?

Solución:



Utilizando tasa efectiva (evitar capitalización)

r = 12% Anual = 0.12

n = 1 año = 2 semestres.

$i = \{[(1 + r\%)/n]^n - 1\} \times 100 = [(1+0.12/2)^2 - 1] \times 100$

i = 12.36% anual efectiva.

$F = 1000\,(F/P, 12.36\%, 10) + 3000\,(F/P, 12.36\%, 6) + 1500\,(F/P, 12.36\%, 4).$

Interpolando:

i %	**F/P (10)**	**i %**	**F/P (6)**	**i %**	**F/P (4)**
12%	3.1058	12%	1.9738	12%	1.5735
12.36	x	12.36	x	12.36	x
13%	3.3946	13%	2.0820	13%	1.6305

(F/P, 12.36, 10)= 3.209768

(F/P, 12.36, 6)= 2.012752

(F/P, 12.36, 4)= 1.59402

$F = 1000(3.209768)+3000(2.012752)+1500(1.59402)$

$\therefore$ F = \$ 11, 639.054

Utilizando tasa convertible (evitar interpolación)

i = 12% Anual Cap/Sem.

i_s = 6% Semestral.

n_1 = 10 Años = 20 Semestres.

N_2 = 6 Años = 12 Semestres.

N_3 = 4 Años = 8 Semestres.

$F = 1000(F/P,6\%,20)+3000(F/P,6\%,12)+1500(F/P,6\%,8).$

$F = 1000(3.2071) + 3000(2.0122) + 1500(1.5938)$

$\therefore$ F = $11, 634.40

Unidad II : Anualidades.

2.1 .- Introducción :

Cuando en un país, se disfruta de cierta estabilidad económica, se presentan con mayor frecuencia las operaciones mercantiles a través de pasos periódicos, que pueden ser con interés simple o con interés compuesto y en cuyo caso recibirán el nombre de anualidades.

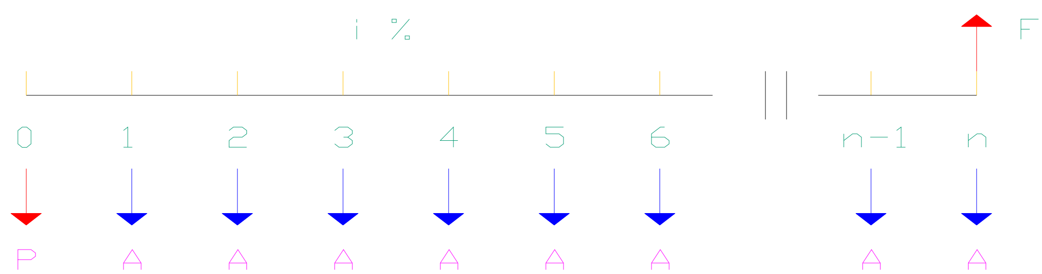
2.2 .- Definición:

Desde el punto de vista financiero, se denomina anualidad a una serie de cantidades que vencen progresivamente a intervalos iguales en tiempos iguales, como lo son: rentas, abonos, sueldos, importes a invertir, etc. Por costumbre se denomina anualidad de pago o de inversión, aun cuando no se efectúa cada año, puesto que debe ser semestral, trimestral, bimestral, mensual, quincenal, semanal, es decir, cada periodo establecido.

2.3 .- Tipos de Anualidades:

2.3.1 .- Anualidades Vencidas:

También se le conoce como anualidad ordinaria y, como su primer nombre lo indica, se trata de casos en los que los pagos se efectúan a su vencimiento, es decir, al final de cada periodo.



✯ **(**Capital p**) valor presente (P) :** El valor presente P de la serie uniforme A, se puede determinar considerando cada valor A como un valor futuro en la formula de valor presente pago único y luego sumando los valores del valor presente. Es decir:

$$P = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \frac{A}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{A}{(1+i)^n}.$$

en síntesis:

$$P = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \rightarrow \textbf{(1)} \qquad \textbf{ó} \qquad P = A\,(P/A * i\% * n) \rightarrow \textbf{(2)}$$

El plazo n y la tasa de interés i%, deben expresarse en la misma base de tiempo.

✯ **(**Monto**) Valor Futuro (P) :** Una anualidad esta formada por una serie de pagos A que a su vez son montos de la parte vencida, por lo que el monto o valor futuro de una anualidad es la suma de los montos compuestos de estos pagos A. Es decir, como los pagos se hacen en forma vencida, cada pago efectuado capitaliza interés, excepto el último **(**Puesto que con el termina la deuda**)**, es decir:

$F = A(1+i)^{n} + A(1+i)^{n-1} + \dots + A$, entonces :

$F = A\left[\frac{(1+i)^{n} - 1}{i}\right] \rightarrow$ **(**3**)** **ó** $F = A(F/A, i\%, n) \rightarrow$ **(**4**)**

✯ **Recuperación de Capital (A/P) :** La recuperación de capital se obtiene empleando las formulas:

$A = P\left[\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n} - 1}\right] \rightarrow$ **(**5**)** **ó** $A = P(A/P, i\%, n) \rightarrow$ **(**6**)**

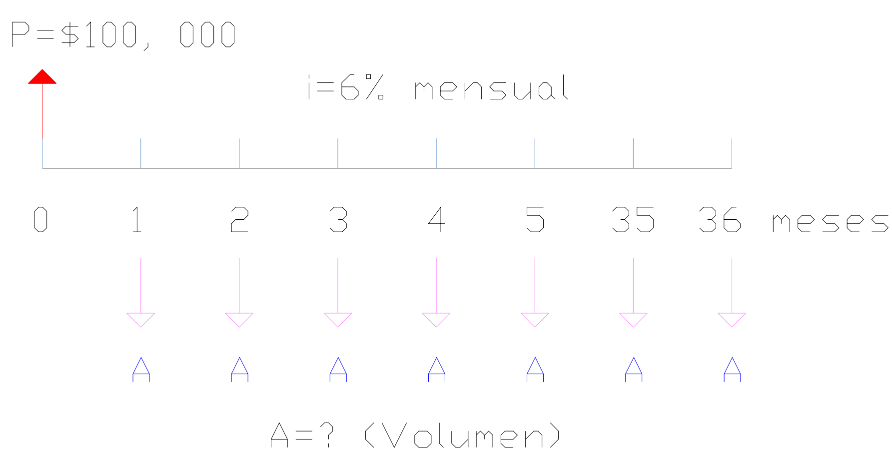
Donde: A es el pago de serie uniforme o anualidad.

✯ **Fondo de Amortización (A/F) :** Para obtener el fondo de amortización, se emplean las formulas:

$A = F\left[\frac{i}{(1+i)^{n} - 1}\right] \rightarrow$ **(**7**)** **ó** $A = F(A/F, i\%, n) \rightarrow$ **(**8**)**

*** Problema**: En la compra de una máquina con valor de $10, 000 nos da la facilidad de adquirirla mediante 36 pagos iguales si pacta la operación con una tasa de interés del 6% mensual. ¿Cuál será el importe de los pagos?

Solución:



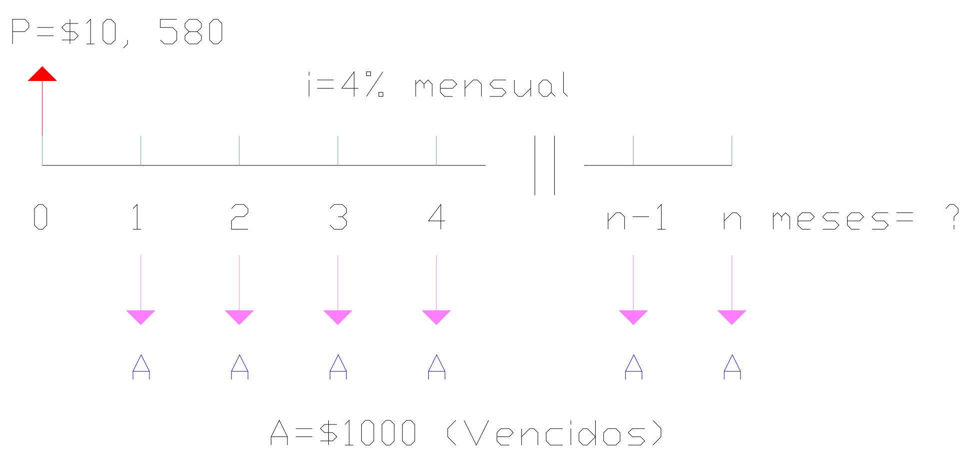
Empleando: $A = P\ (A/P, i\%, n) = 100,000\ (A/P, 6\%, 36)$

$A = \$100,000(0.06839) = \$6839$

Conclusión: Se requieren 36 pagos iguales de $6839 mensuales, para cubrir la deuda de $100, 000 a una tasa de interés del 6% mensual.

* **Problema**: Calcular el tiempo en que un capital de $10, 580 se pague en pagos iguales de $1000 con una tasa de interés mensual de 4%.

Solución:



$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$\frac{P}{A} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n} - \frac{1}{i(1+i)^n}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$\frac{P}{A}i = 1 - \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$\frac{P}{A}i - 1 = -\frac{1}{(1+i)^n}$$

$$\frac{Pi}{A} - 1 = -(1+i)^{-n}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 + \frac{Pi}{A}$$

$$\text{Log}\,(1+i)^{-n} = \log\left(1 + \frac{Pi}{A}\right)$$

$$-n \log (1+i) = \log \left(1- \frac{Pi}{A} \right)$$

$$n = \frac{- \log \left(1- \frac{Pi}{A} \right)}{\text{Log } (1+i)}$$

Sustituyendo:

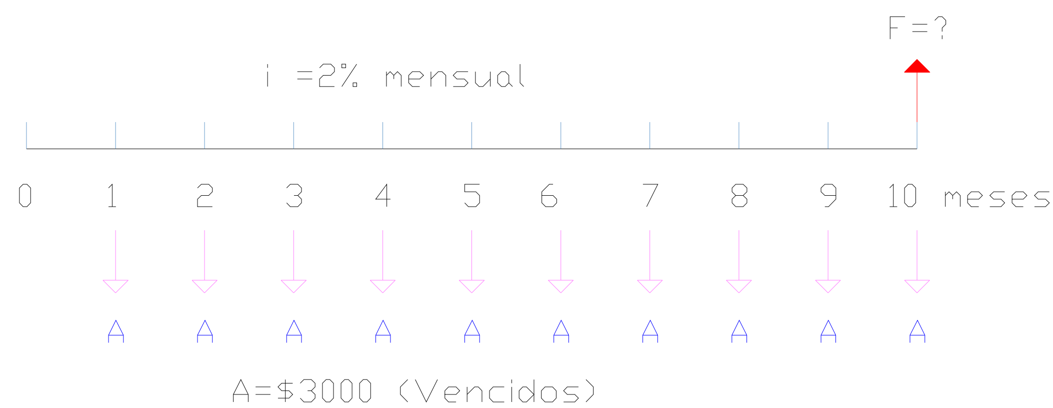
$$n = \frac{- \log \left[1- \frac{10580(0.04)}{1000}\right]}{\text{Log } (1+0.04)}$$

n = 12 meses

Conclusión: Se requieren de 12 meses para saldar la deuda de $10,580 con pagos mensuales de $1 000.

*** Problema**: Si se depositan $3 000 mensuales durante 10 meses, ¿Cuál será el monto de esta operación si la tasa de interés mensual es 2%?

Solución:



Empleando F=A(F/A, i%, n) = 3000(F/A, 2%, 10)=3000(10.9497)

Conclusión: 10 Pagos mensuales de $3000 a un interés del 2% mensual acumulando un monto de $32849.1

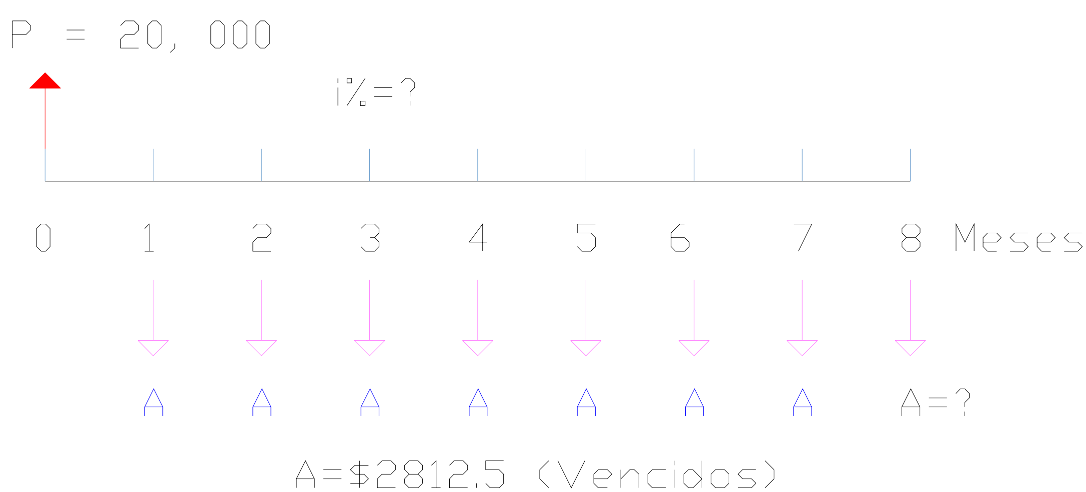
*** Problema**: Una aspiradora se vende al contado en $25, 000 a plazos, se recarga el valor en un 10% y se ofrece con el siguiente plan: $5000 de enganche y el saldo en 8 abonos mensuales. Hallar el valor de los abonos y la tasa de interés cargada .

Solución:

Valor de los abonos

A = [25000(1.10)-5000]/8

A = 2812.50/mes



Empleando: P = A(P/A, i%, n)

20, 000= 2812.50(P/A, i%, 8)

(P/A, i%, 8) = 20, 000/2812.50

(P/A, i%, 8)= 7.1111

INTERPOLANDO:

7.0197 —— 3%

7.1111 —— i%

7.3255 —— 2%

c = (ad)/b = [(0.0914)(1)

c = 0.2988%

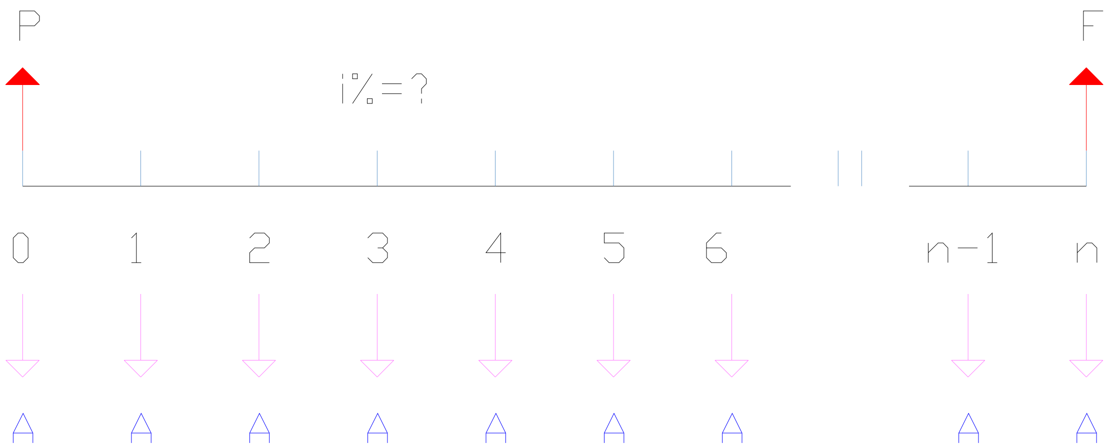
i = valor N°1 – c

i = 3% – 0.2988%

i =2.7% Mensual.

Conclusión: El valor de los pagos serán de $2812.50 cada mes, durante 8 meses, necesarios para saldar la deuda de $20, 000 a una tasa de interés de aproximadamente 2.7% mensual o de 32.4% anual capitalizada mensualmente.

2.3.2 .- Anualidades Anticipadas: Son aquellas en las que los pagos se realizan al principio de cada periodo, ejemplo: la renta de un departamento, etc.



✯ Calculo de Factores de Pago Único y Serie Uniforme.

★ Capital o Valor Presente (P):

$$P = A\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right] \rightarrow \textbf{(9)}$$

★ Monto o Valor Futuro (F):

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n+1}}{i} - 1\right] \rightarrow \textbf{(10)}$$

★ Anualidad o Serie Uniforme :

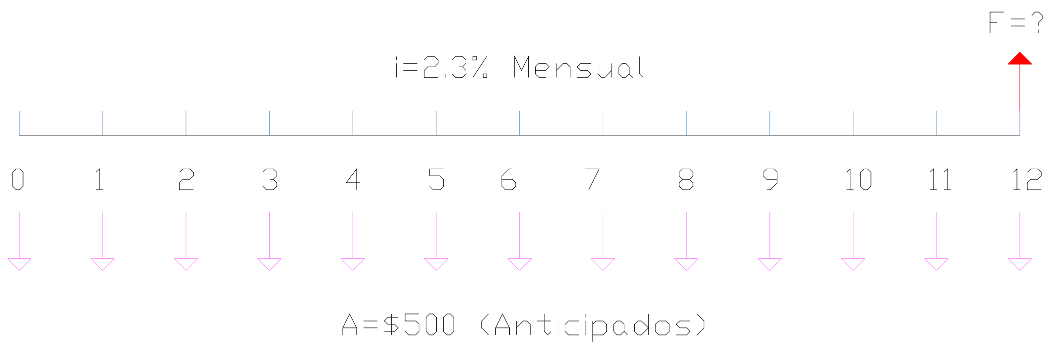
$$A = \frac{P}{\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]} \rightarrow \textbf{(11)}$$

ó

$$A = \frac{F}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}}{i} - 1\right]} \rightarrow \textbf{(12)}$$

*** Problema**: Un obrero deposita en una cuenta de ahorros $500 al principio de cada mes. Si la cuenta paga 2.3% mensual de interés, ¿Cuánto habrá ahorrado durante el primer año?

Solución:



Empleando:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^{n+1}}{i} - 1\right]$$

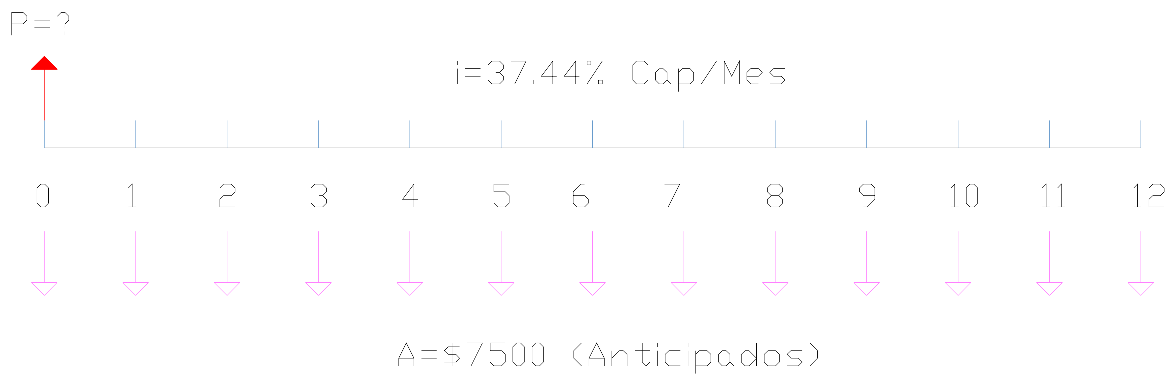
$$F = 500\left[\frac{(1.023)^{12+1}}{0.023} - 1\right]$$

F = $6977.18

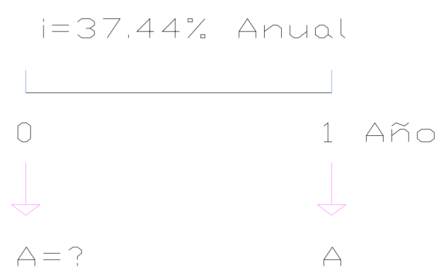
Conclusión: Haciendo depósitos de $500 mensuales, habrá acumulado en un año un monto de $6977.18, a la tasa de interés de 2.3%.

*** Problema**: Un comerciante renta un local para su negocio y acuerda pagar $7500 de renta; por anticipado. Como desearía librarse del compromiso mensual de la renta, decide proponer una renta anual equivalente y también anticipada. Si se calculan los intereses a razón de 37.44% anual capitalizable mensualmente, ¿De cuánto deberá ser la renta anual?

Solución:



=



Empleando: $P = A \left[1 + \frac{1 - (1+i)^{-n+1}}{i} \right]$

$$P = \$7500 \left[1 + \frac{1 - (1.0312)^{-12+1}}{0.0312} \right]$$

i = 37.44% Anual Cap/Mes

i_m = 3.12% Mensual = 0.0312

P = $74435.71

Conclusión: Una renta mensual anticipada de $7500 es equivalente a una renta anual anticipada de $76, 435.71

* **Problema**: En una tienda se vende una bicicleta por $800 al contado o mediante cinco abonos mensuales anticipados. Si el interés es de 32.24% Anual capitalizado mensualmente, calcúlese el valor del pago.

Solución:

Empleando:

$$A = \frac{P}{\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{i}\right]}$$

$$A = \frac{\$\,800}{\left[1 + \frac{1-(1.0268)^{-5+1}}{0.0268}\right]}$$

i = 32.24% Anual Cap/Mes

i_m = 2.68% Mensual = 0.0268

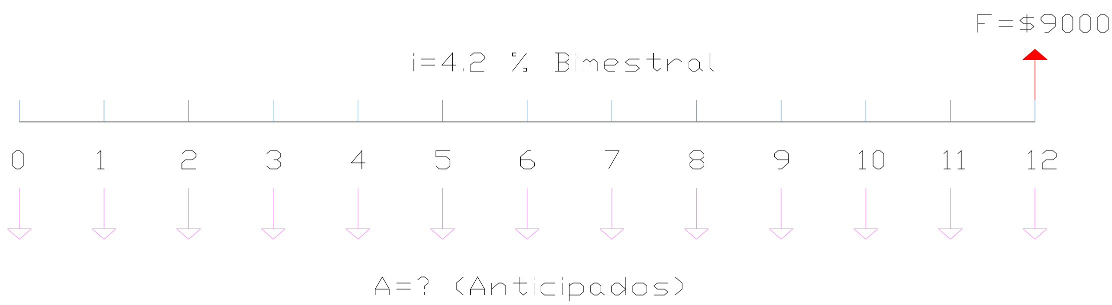
A=$168.57

Conclusión: Para cubrir la deuda de $800, deberá realizar 5 abonos anticipados de $168.57 con una tasa de interés de 32.24% anual capitalizada mensualmente.

* **Problema**: La señora González debe pagar $9000 dentro de dos años, y para reunir esta cantidad decide hacer 12 depósitos bimestrales en una cuenta de inversión que rinde 4.2% de interés

bimestral. ¿De cuánto deben ser sus depósitos si hoy realiza el primero?

Solución:



Empleando:

$$A = \frac{F}{\left[\frac{(1+i)^{n+1}}{i} - 1\right]}.$$

$$A = \frac{\$9000}{\left[\frac{(1.092)^{12+1}}{0.042} - 1\right]}.$$

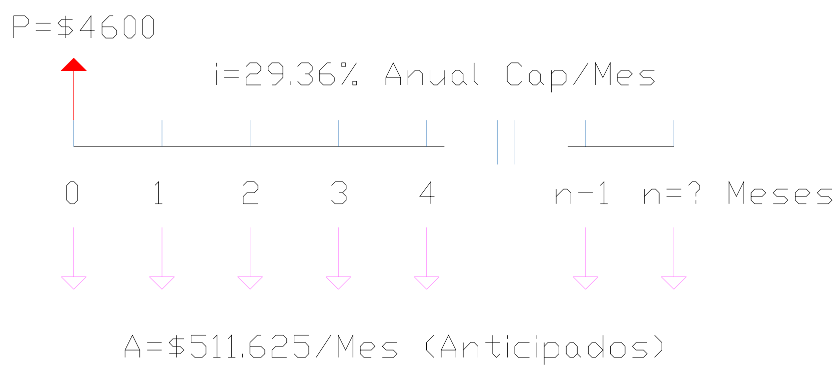
A=$568.26

Conclusión: Para cubrir la deuda de $9000 que vence dentro de 2 años, la señora González deberá depositar $568.26 mensuales a partir de hoy a una tasa de interés bimestral de 4.2%.

* **Problema:** En un almacén se vende un mueble de comedor por $4, 600 al contado, o mediante pagos mensuales anticipados de $511.625.

Si el interés es de 29.36% Anual Cap/Mes. ¿Cuántos pagos es necesario hacer?

Solución:



i = 29.36% Anual Cap/Mes.

i_m = 2.45% Mensual= 0.0245.

Empleando : $P = A\left[1 + \frac{1-(1+i)^{-n+1}}{I}\right]$

$\left(\frac{P}{A} - 1\right) i = \left[1-(1+i)^{-n+1}\right]$

$(1+i)^{-n+1} = 1 - \left(\frac{P}{A} - 1\right)i$

$-n+1 = \log\left[1-\left(\underline{P} - 1\right)i\right]$

$$\frac{A}{\text{Log } i+1}$$

$$n = 1 - \frac{\log\left[1-\left(\frac{P}{A} - 1\right)i\right]}{\text{Log } i+1}$$

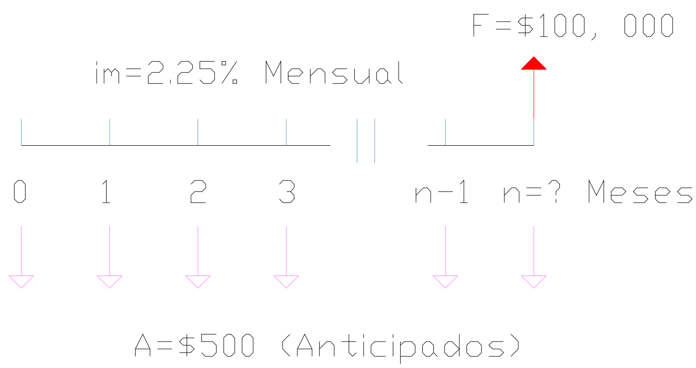
$$n = 1 - \frac{\log\left[1-(4600/511.625 - 1)0.0245\right]}{\log(1.0245)}$$

$n = 10$

Conclusión: Deberá realizar 10 pagos mensuales a partir de hoy de $511.625 para cubrir la deuda de $4500.

*** Problema:** El señor González piensa jubilarse al reunir $100, 000 mediante depósitos mensuales de $500 de las ganancias que obtiene de su negocio. Si invierte sus depósitos a una tasa de interés de 2.25% mensual e inicia a partir del día de hoy, ¿En cuánto tiempo reunirá la cantidad que desea?

Solución:



Empleando: $F = A\left[\dfrac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1\right]$

$$\left(\frac{F}{A} + 1\right)i = (1+i)^{n+1} - 1$$

$$\left(\frac{F}{A} + 1\right)i + 1 = (1+i)^{n+1}$$

$$n+1 = \frac{\log\left[\left(\frac{F}{A} + 1\right) i + 1\right]}{\log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left[\left(\frac{F}{A} + 1\right) i + 1\right]}{\log(1+i)} - 1$$

$$n = \frac{\log\left[\left(\frac{1000}{500} + 1\right) 0.0225 + 1\right]}{\log(1.0225)} - 1$$

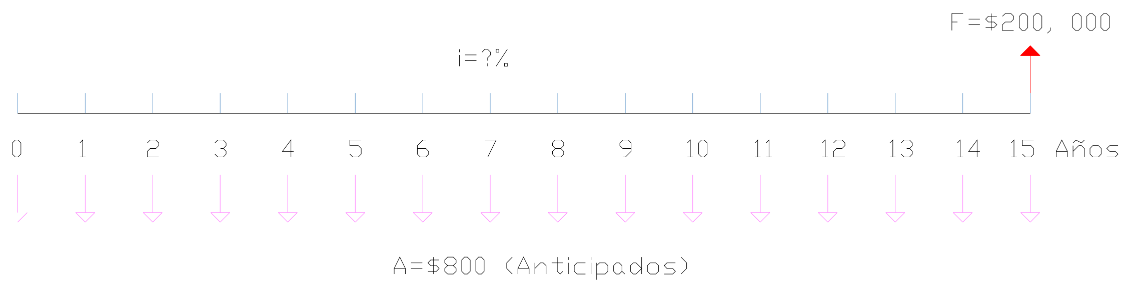
n = 75.80 Meses.

n = 75 meses y 24 días.

Conclusión: En un plazo aproximadamente de 75 meses y 24 días, alcanzara reunir la cantidad de $100, 000, si deposita a partir de hoy $500 mensuales a una tasa de interés del 2.25% mensual.

* **Problema :** ¿A que tasa de interés anual 15 depósitos anuales anticipados de $800 acumulan un monto de $200, 000?

Solución:



Empleando:

$$F = A \left[\frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i} - 1 \right]$$

$$\frac{F}{A} + 1 = \frac{(1+i)^{n+1} - 1}{i}$$

$$\frac{200,\ 000}{800} + 1 = \frac{(1+i)^{15+1} - 1}{i}$$

$$251 = \frac{(1+i)^{15+1} - 1}{I}$$

Por Tanteos:

Si i=30%=0.30

$\underline{(1.30^{16} - 1} = 218.47$

$$\frac{(1.30^{16}-1}{0.30}$$

Si i=31%=0.31

$$\frac{(1.31^{16}-1}{0.31} = 239.42$$

Si i=32%=0.32

$$\frac{(1.32^{16}-1}{0.32} = 262.36$$

Interpolando:

239.42 —— 31%

251.00 —— i%

262.36 —— 32%

c = (ad)/b = [(11.58)(1)]/22.94

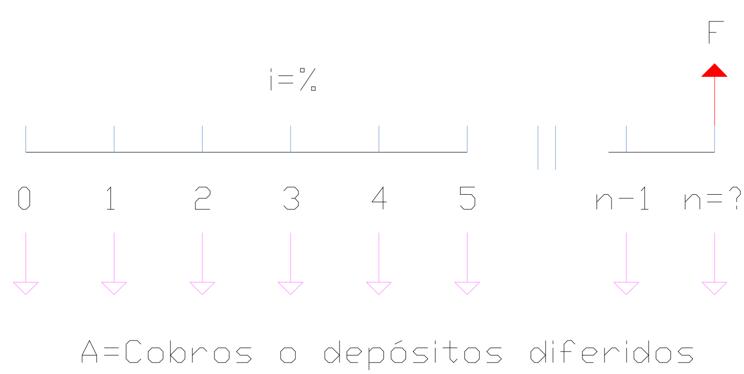
c = 0.504795%

i=31.5% Anual.

2.3.3 .- Anualidades Diferidas: Son aquellas en las que el inicio de los cobros o depósitos se posponen para un periodo posterior al de la formalización de la operación. Para su análisis se emplean las mismas formulas empleadas en factores de pago único y anualidades vencidas.

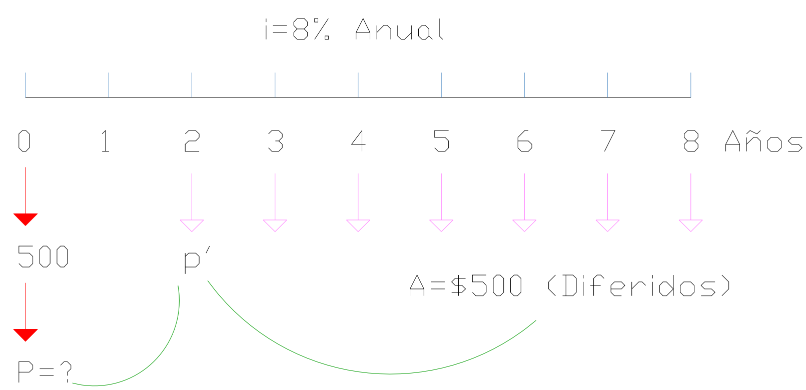
→ **Recomendaciones para la solución de problemas:**

1) Dibujar un diagrama de flujo de caja de ingresos y egresos del problema.
2) Ubicar el valor presente **(**P**)** y el valor futuro **(**F**)** en el diagrama de flujo de caja.
3) Determinar n, renumerando el diagrama de flujo de caja.
4) Dibujar el diagrama de flujo de caja representando el flujo de caja equivalente deseado.
5) Establecer y resolver las ecuaciones.



*** Problema:** Una persona compra una propiedad en $5000 de enganche y pagos anuales diferidos de $500 durante 6 años, empezando dentro de 3 años. ¿Cuál es el valor presente de la inversión si la tasa de interés es 8% Anual?

Solución:



P=5000+500(P/A,8%,6)(P/F, 8%, 2)

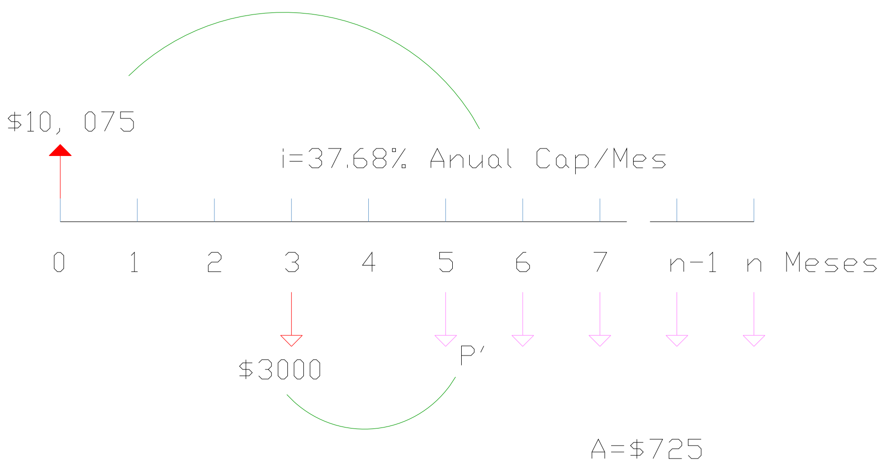
P= 5000+500(4.6229)(0.8573)

P = $6981.60

Conclusión: El valor actual de la propiedad es de $6981.60

*** Problema:** La señora López contrae hoy una deuda de $10, 075, que debe pagar mediante un abono de $3000 dentro de tres meses y, después, tantos pagos mensuales de $725 como sean necesarios hasta saldar el total de la deuda, y comenzando dentro de 6 meses, si el interés al que se contrató el préstamo es de 37.68% anual capitalizado mensualmente. ¿Cuántos pagos mensuales debe hacer?

Solución:



i =37.68% Anual Cap/Mes

i_m = 3.14% Mensual=0.0314

$P' = 10075(1.0314)^5 - 3000(1.0314)^2 = \$8567.92$

Empleando:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

Desarrollando:

$$\frac{P}{A} = \frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n} - \frac{1}{i(1+i)^n}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^n}$$

$$\frac{Pi}{A} = 1 - \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$\frac{1}{(1+i)^n} = 1 - \frac{Pi}{A}$$

$$(1+i)^{-n} = 1 - \frac{Pi}{A}$$

$$-n \log (1+i) = \log \left(1 - \frac{Pi}{A}\right)$$

$$n = -\frac{\operatorname{Log} \left(1 - \frac{Pi}{A}\right)}{\operatorname{Log} (1+i)}$$

Sustituyendo:

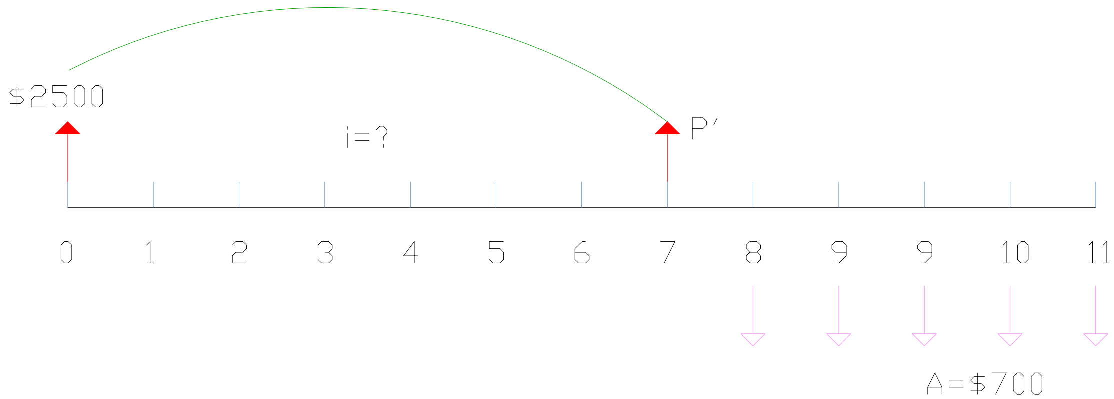
$$n = -\frac{\operatorname{Log} [1 - (8567.92)(0.0314)/725]}{\operatorname{Log} (1+0.0314)}$$

n=15

Conclusión: Se requieren 15 pagos mensuales de $725 a partir del mes seis, para pagar el saldo de la deuda.

*** Problema:** Si para pagar una deuda de $2500 se hacen 5 pagos mensuales de $700 comenzando 8 meses después de formalizar la operación. ¿Cuál fue la tasa de interés que se cobró?

Solución:



$$P' = 2500(1+i)^7 = P$$

Empleando:

$$P = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$2500(1+i)^7 = 700\left[\frac{(1+i)^5 - 1}{i(1+i)^5}\right]$$

$$\frac{2500}{700} = \frac{(1+i)^5 - 1}{i(1+i)^5(1+i)^7}$$

$$3.5714 = \frac{(1+i)^5 - 1}{i(1+i)^{12}}$$

Por tanteos:

Si i=4% = 0.04

$$\frac{(1.04)^5 - 1}{0.04(1.04)^{12}} = 3.3830$$

Si i=3% = 0.03

$$\frac{(1.03)^5 - 1}{0.03(1.03)^{12}} = 3.7237$$

Interpolando:

3.3830 ——————— 4%

3.5714 ——————— i%

3.7237 ——————— 3%

C = ad/b = (0.1884)(1)/0.3407 = 0.5530%

i= 4%-0.5530 = 3.447%

i_m = 3.447% Mensual.

Conclusión: La tasa cobrada en la operación es de $41.364% Anual Capitalizada mensualmente.

2.4 .- Amortización:

® **Introducción**: En el área financiera, amortizar significa saldar gradualmente una deuda por medio de una serie de pagos que, generalmente, son iguales y que se realizan también a intervalos de tiempo iguales. Aunque esta igualdad de pagos y de periocidad es lo más común, también se llevan a cabo operaciones con algunas variantes y, por ello, se analizan aquí algunas de estas situaciones.

⇨**Tablas de Amortización:** Los pagos que se hacen para amortizar una deuda se aplican a cubrir los intereses y a reducir el importe de la deuda. Para visualizar este proceso conviene elaborar una tabla de amortización que muestre lo que sucede con los pagos, los intereses, la deuda, la amortización y el saldo.

n	Pago	i% de interés sobre saldo	Amortización	Saldo

Donde : n : Numero de Periodos, Pago: Es una cantidad constante que se calcula con la formula **(**5**)** es decir:

$$A = P \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$$

i% : Tasa de interés que corresponde al periodo de capitalización y la cual se aplica al saldo de la deuda.

Amortización: es el abono a la deuda, siendo la diferencia entre el pago y los intereses.

Saldo: Es el capital insoluto **(**Capital Vivo**)**.

⇨**Derechos del Deudor y del Acreedor:** Resulta fácil ver que, por ejemplo, en una operación de compra-venta a crédito, después de que el deudor ha realizado algunos pagos, ha adquirido parcialmente el bien, mientras que el acreedor, al haber recibido esos pagos, ya no es propietario de todos los derechos sobre el bien sino solo de una parte **(**El saldo a su favor**).** En general, en cualquier operación de amortización de una deuda y en cualquier momento:

Derechos		Derechos		Valor
del	+	del	=	de la
Deudor		Acreedor		Operación
(Amortización)		(Saldo Insoluto)		(Deuda)

⇨**Calculo de la amortización y saldo insoluto:** La amortización se obtiene como la diferencia entre el abono y el interés, es decir:

$$AM_n=A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] - P\,[(1+i)^n-1] \rightarrow \textbf{(}13\textbf{)}$$

donde A= Pago y P= Capital; mientras que el saldo insoluto se obtiene como la diferencia de la deuda menos el abono, es decir:

$$SI_n = P\,[(1+i)^n-1] - A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \rightarrow \mathbf{(14)}$$

*** Problema:** Una persona contrae una deuda por $500, 000 para ser cancelada mediante pagos semestrales durante 2 ½ años a una tasa de interés del 28% Anual capitalizado semestralmente.

a) Calcular el valor del pago semestral.

b) Elaborar una tabla de amortización.

Solución:

a) Empleando: $A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$

$$A = 500,000\left[\frac{0.14(1.14)^5}{(1.14)^5-1}\right]$$

A=$145, 641.77 Cap/Semestre

i=28% Anual Cap/Sem

i_s=14% Semestral= 0.14

n=2 ½ Años = 5 semestres.

b) Elaborando tabla de amortización:

n	Pago Semestral	14% de Interés sobre saldo	Amortización	Saldo

0	-	-	-	$500, 000
1	145, 641.77	70, 000.00	75, 641.77	424, 358.23
2	145, 641.77	59, 410.15	86, 231.62	338, 126.61
3	145, 641.77	47, 337.73	98, 304.04	239, 822.57
4	145, 641.77	33, 575.15	112, 066.62	127, 755.95
5	145, 641.77	17, 885.82	127, 755.95	-
	$728, 208.85	$228, 608.85	$500, 000.00	

* **Problema:** Con el objeto de desarrollar un área industrial, se conceden prestamos de fomento por: $500, 000 con el siguiente plan de amortización: plazo 5 años; cuotas semestrales con una tasa de 4% semestral, en los dos primeros años, se amortiza el 20% de la deuda y, en los tres últimos años el 80%.

a) Obtenga el valor de los pagos semestrales.

b) Elaborar una tabla de amortización.

Solución:

a) Valor de los pagos:

Primeros 2 años se amortiza 20%($500, 000)=$100, 000

Últimos 3 años se amortiza 80%($500, 000)=$400, 000

Empleando: $A = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$

i_s =4% Semestral = 0.40

n =2 años =4 Semestres.

$A = 100,000\left[\frac{0.04(1.04)^4}{(1.04)^4 - 1}\right]$ = $27, 549 c/Sem en los dos primeros años

i_s =4% Semestral = 0.40

n =3 años =6 Semestres.

$A = 400,000\left[\frac{0.04(1.04)^6}{(1.04)^6 - 1}\right]$ = $76, 304.76 c/Sem en los últimos 3 años.

b) Elaborar tabla de amortización:

n	Pago Semestral	4% de Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
0	-	-	-	$500, 000
1	27, 549.00	20, 000.00	7, 549.00	492, 451.00
2	27, 549.00	19, 698.04	7, 850.96	484, 460.04
3	27, 549.00	19, 384.00	8, 165.00	476, 460.04
4	27, 549.00	19, 051.80	8, 497.20	467, 797.84
5	76, 304.76	18, 711.914	57, 592.45	410, 205.39
6	76, 304.76	16, 408.216	59, 896.144	350, 309.25

7	76, 304.76	14, 012.37	62, 292.00	288, 017.26
8	76, 304.76	11, 520.69	64, 783.67	223, 233.59
9	76, 304.76	8, 929.34	67, 375.016	155, 858.57
10	162, 092.91	6, 234.34	155, 858.57	-
	$653, 812.71	$153, 950.71	$500, 000.00	

* **Problema:** Un señor tiene una deuda de $3500 contraída en septiembre, con intereses del 27% Anual capitalizado mensualmente y que acordó pagar en 12 abonos mensuales vencidos e iguales. ¿Cuántos pagos ha realizado si ha adquirido derechos sobre la deuda por $1345.767?

Solución:

P =$3500; n =12 meses

i =27% Anual Cap/Mes

i_m =2.25% Mensual =0.0225

$$A= P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] = 3500\left[\frac{0.0225(1.0225)^{12}}{(1.0225)^{12}-1}\right]$$

A =$336 Pago Mensual.

AM_n =$1345.767

Empleando: $AM_n=A\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] - P\,[(1+i)^n-1]$

$$1345.767=336\left[\frac{0.0225(1.0225)^n}{0.0225}\right] - 3500[(1.0225)^n-1]$$

$$1345.767= 14933.333[(1.0225)^n] - 3500[(1.0225)^n]$$

n =5 Pagos.

Conclusión: El señor ha realizado 5 pagos mensuales de $336, con ello ha alcanzado una amortización de $1345.767

*** Problema:** Una persona tiene una deuda de $1000 que convino en pagar con pagos bimestrales vencidos e iguales durante un año con intereses al 28% anual capitalizado cada dos meses. ¿Cuántos pagos completos le faltan por hacer si el saldo de su deuda es de $567.992?

Solución:

P =$1000; n =6 bimestres

i =28% Anual Cap/2 Mes

i_6 =4.67% Bimestral =0.0467

$$A= P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$A=1000\left[\frac{0.0467(1.0467)^6}{(1.0467)^6-1}\right]$$

$A = \$194.94$ c/Bimestre

$SI_n = \$567.992$

Empleando:

$$SI_n = P\,[(1+i)^n - 1] - A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \rightarrow \mathbf{(14)}$$

$$567.992 = 1000\,[(1.0467)^n - 194.94\left[\frac{(1.0467)^n - 1}{1.0467}\right]$$

$$567.992 = 1000(1.0467)^n - 4174.3\,[(1.0467)^n - 1]$$

$n = 2.79$ Pagos.

Conclusión: Al señor le faltan por hacer 4 pagos completos de $194.94 Bimestrales.

* **Problema:** Salvador Contreras contrae una deuda por $8000 a pagar en 14 meses con 3.5% mensual la amortización con pagos mensuales vencidos.

a) Hallar el valor de los pagos
b) Elabore una tabla de amortización que muestre los tres primeros renglones y los dos últimos del cuadro.

Solución:

$i_m = 3.5\%$ Mensual $= 0.035$

$P = \$8000$

$n = 14$ Meses.

a) Valor de los pagos

Empleando: $A = P\,\dfrac{[i(1+i)^n]}{(1+i)^n-1}$ $\qquad$ $A = 8000\,\dfrac{[0.035(1.035)^{14}]}{(1.035)^{14}-1}$

A =$732.56 c/Mes.

b) Elaborar tabla de amortización.

Primeros tres renglones:

n	Pago Mensual	3.5 % de Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
0	-	-	-	$8000.00
1	732.56	280.00	452.56	7547.44
2	732.56	264.16	468.40	7079.04

Últimos renglones del cuadro.

12				1391.737
13	732.56	48.71	683.84	707.910
14	732.18	24.78	707.91	-

Empleando:

$SI_n = P\,[(1+i)^n-1] - A\,\dfrac{[(1+i)^n-1]}{i} \rightarrow$ **(14)**

Sustituyendo:

$SI_{12} = 8000\,(1.035)^{12} - 732.56\,\dfrac{[(1.035)^{12}-1]}{0.035}$

$SI_{12} = \$1391.737$

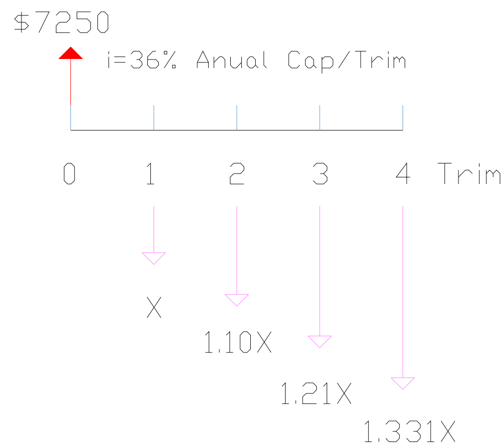
* **Problema:** Una deuda de $7250 se debe pagar en un año, mediante pagos trimestrales de tal manera que se incrementen un 10%. Si el interés pactado para la operación es de 36% anual capitalizado trimestralmente.

a) Hallar el valor de los pagos.

b) Elabore tabla de amortización.

Solución:

a) Valor de los Pagos.



n =1 año = 4 Trimestres.

i =36% Anual Cap/Trim

i_t =9% Trim =0.09

Empleando: P = F(P/F, i%, n)

7250 = X (P/F, 9%, 1) + 1.10X(P/F, 9%, 2) + 1.21X(P/F,9%,3) + 1.331X (P/F, 9%, 4)

7250=X (0.9174)+1.1X(0.8417)+1.21X(0.7722)+1.331X(0.7084)

X =$1948.70 Primer Pago.

1.10X =$2143.58 Segundo Pago.

1.21X =$2357.94 Tercer Pago.

1.331X =$2593.73 Cuarto Pago.

b) Tabla de Amortización.

n	Pago Trimestral	9 % de Interés sobre saldo	Amortización	Saldo
0	-	-	-	$7250.0000
1	1948.70	652.500	1296.2000	5953.8000
2	2143.58	535.842	1607.7380	4346.0620
3	2357.94	391.145	1966.7944	2379.2676
4	2593.40	214.134	2379.2676	-
	$9043.62	$1793.621	$7250.00	

2.5 .- Fondo de Amortización: Anualidad establecida para liquidar una deuda en fecha futura, es muy usual este procedimiento por la empresa ya que le permite reponer equipos al finalizar su periodo de depreciación.

★ **Tabla de capitalización.** Esta tabla nos muestra como va aumentando un capital, periodo a periodo. Para visualizar este proceso conviene elaborar una tabla de capitalización que muestre lo que sucede con los depósitos, los intereses, incremento al fondo y el saldo.

n	Pago	i% de interés sobre saldo	Incremento al Fondo	Saldo

Donde n: número de periodos; depósito: es una cantidad constante que se calcula con la formula **(**7**)**; es decir: $A = F[i/(1+i)^n - 1]$; i%: tasa de interés que corresponde al periodo de capitalización, la cual se aplica al saldo; incremento al fondo: es la cantidad que se obtiene al sumar el depósito y los intereses devengados al periodo correspondiente al periodo y saldo, el cual muestra el capital reunido hasta el periodo indicado.

*** Problema:** Elaborar una tasa de capitalización para capitalizar $300, 000.00 en 1 ½ años, haciendo depósitos trimestrales iguales, si la tasa de interés es de 32% Anual capitalizado trimestralmente.

Solución:

Valor del depósito: empleando $A = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$

F= $300, 000.00

n= 1 ½ Años= 6 trimestres

i%= 32% Anual Cap/Trim

i_t= 8% Trim= 0.08

$$A = 300,000 \left[\frac{0.08}{(1.08)^6 - 1} \right]$$

A= $40, 894.62 (Depósito trimestral).

Tabla de Capitalización.

n	Depósito Trimestral	8 % de Interés sobre saldo	Incremento al Fondo	Saldo
1	$40, 894.62	-	$40, 894.62	$40, 894.62
2	$40, 894.62	3271.57	44, 166.19	85, 060.81
3	$40, 894.62	6804.86	47, 699.485	132, 760.29
4	$40, 894.62	10, 620.824	51, 515.444	184, 275.73
5	$40, 894.62	14, 742.059	55, 636.680	239, 912.40
6	$40, 894.62	19, 192.993	60, 087.613	300, 000.00
	$245, 367.72	$54, 632.28		

*** Problema:** Una empresa debe pagar dentro de 6 meses la cantidad de $40, 000.00 para asegurar el pago, el contralor propone, dado que hay liquidez en la empresa, acumular un fondo mediante depósitos mensuales a una cuenta que paga el 30% anual capitalizado mensualmente.

a) ¿De cuánto deben ser los depósitos?

b) Elabore una tabla de capitalización.

Solución:

a) Valor de los depósitos.

F= $400, 000.00

n= 6 meses.

i%= 30% Anual Cap/Mes

i_m= 2.5% Mensual= 0.025

$$A = F \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

$$A = 40,000 \left[\frac{0.025}{(1.025)^6 - 1} \right]$$

A= $6262.00 (Depósito Mensual)

n	Depósito Mensual	2.5 % de Interés sobre saldo	Incremento al Fondo	Saldo
1	$6262.000	-	$6262.000	$6262.000
2	$6262.000	156.550	6418.550	12, 680.550
3	$6262.000	317.014	6579.014	19, 259.564
4	$6262.000	481.489	6743.489	26, 003.053
5	$6262.000	650.076	6912.076	32, 915.129
6	$6261.993	822.878	7084.871	40, 000.00

Unidad III : Gradientes Uniformes.

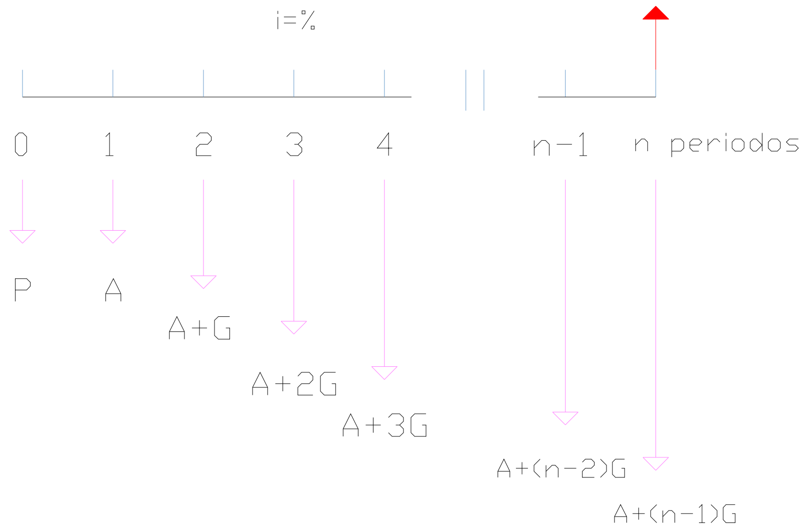
3.1 .- Introducción : Las circunstancias que rodean una operación financiera (La disponibilidad de efectivo para realizar los pagos, la exigencia del acreedor de captar lo antes posible el capital, la comunidad para que el deudor amortice una deuda, entre otros) hacen que los flujos de caja de tales operaciones financieras no siempre sean valores iguales a intervalos iguales de tiempo, sino que, por el contrario, se presentan con frecuencia, la serie de pagos periódicos o no, pero van aumentando o disminuyendo a través del tiempo. En estos momentos, se logran resolver una serie de problemas propios de las matemáticas financieras, cuyo comportamiento no se ajusta a ninguno de los modelos clásicos existentes, ya sea en los formularios o en las máquinas y programas financieros.

Encontraremos series de pagos variables en casos como los costos de: combustible, canasta familiar, materiales de construcción, la educación, de transporte, amortización de crédito, entre otros, cuya importancia en la vida real exige que quien haya cursado matemáticas financieras puede darle una solución adecuada a esta clase de problemas.

3.2 .- Gradiente Aritmético : Se llama así, a una serie de pagos periódicos en la cual ada pago es igual al del periodo inmediatamente anterior incrementando de la misma cantidad d dinero. Entonces el valor del gradiente **G** se obtiene con la ecuación:

G= Ganancia/n-1 → **(**1**)**; donde: Ganancia= Valor Futuro-Cantidad Base y n= N° de periodos.

Diagrama de Flujo de Caja. (Gradiente Creciente**).**



Como podemos observar en el diagrama de flujo de caja, el gradiente inicia después de la cantidad base.

En el caso de gradiente creciente G es positivo y decreciente G es negativo.

✸ Calculo de Factores de Pago único y Serie Uniforme.

✳ Capital o Valor Presente:

$$P = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right] \rightarrow \textbf{(2)} \quad ó \quad P=G(P/G, i\%, n) \rightarrow \textbf{(3)}$$

✳ Monto o Valor Futuro:

$$F = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i} - n\right] \rightarrow \textbf{(4)}$$

✴ **Anualidad o Serie Uniforme:**

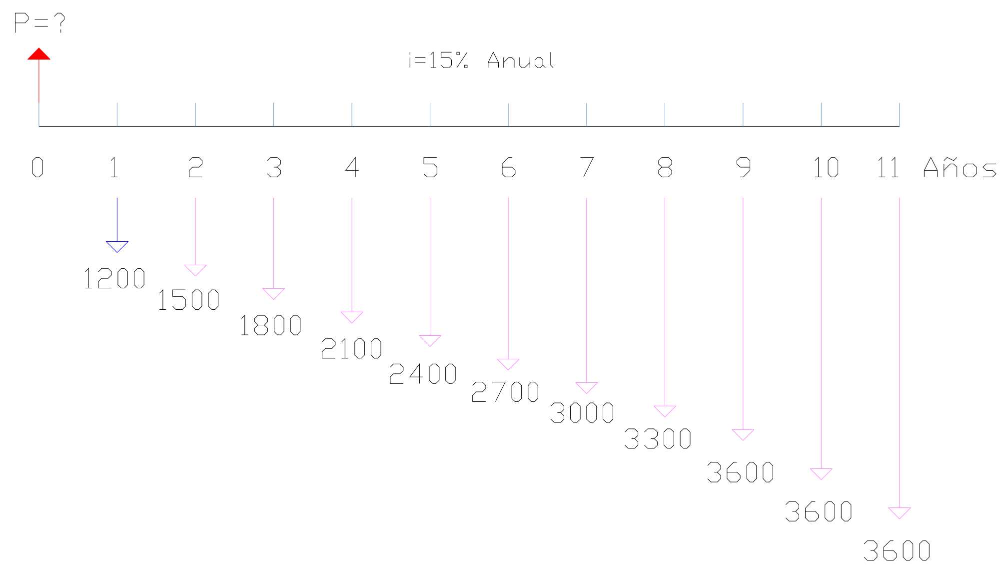
$$A = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \rightarrow \textbf{(5)} \quad ó \quad A=G(A/G, i\%, n) \rightarrow \textbf{(6)}$$

donde G es el gradiente:

$$G = \frac{[A+(n-1)G]-A}{n-1}$$

*** Problema:** Encuentre el valor presente de una serie de ingresos en la cual el flujo de caja en el año 1 es $1200 y crece $300 por año hasta el año 11, sabiendo que la tasa de interés para esta operación es del 15% Anual.

Solución:



A= \$1200 (Cantidad Base).

G= \$300 (Gradiente)

Empleando: P = A(P/A, i%, n) + G(A/G, i%, n)

P = 1200(P/A, 15%,11) + 300(A/G, 15%, 11)

P = 1200(5.2337) + 300(19.129)

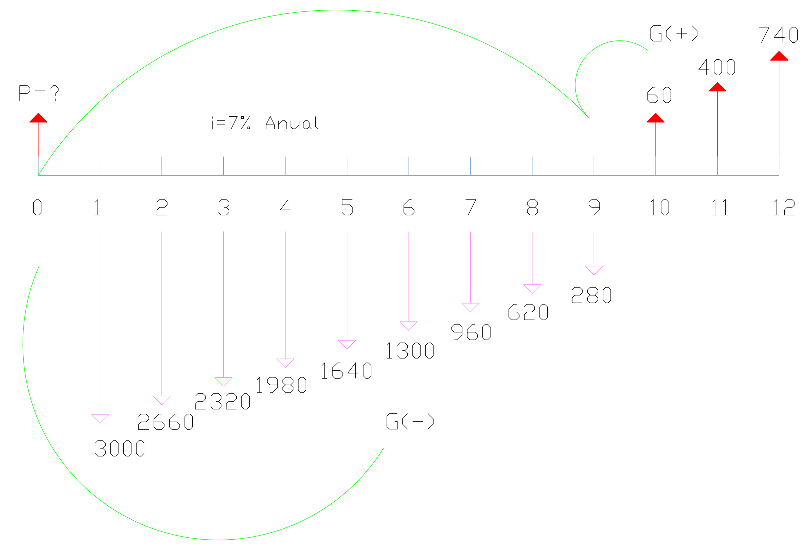
P = \$12, 017.34

* **Problema:** Hallar el valor presente de una serie de 12 pagos anuales que decrecen linealmente en \$340; si el primer pago es de \$300, los pagos son vencidos y la tasa de interés es del 7% Anual.

Solución:

$\left.\begin{array}{l}\text{A= \$60 (Cantidad Base)} \\ \text{G= \$340 (Gradiente)}\end{array}\right\}$ Diferidos

$\left.\begin{array}{l}\text{A= \$300 (Cantidad Base)} \\ \text{G= \$340 (Gradiente)}\end{array}\right\}$ Vencidos



Empleando:

P= [A(P/A, i% n) - G(P/G, i%,n)] + [A(P/A, i%,n) - G(P/G, i%, n)] (P/G, i%, n).

Sustituyendo:

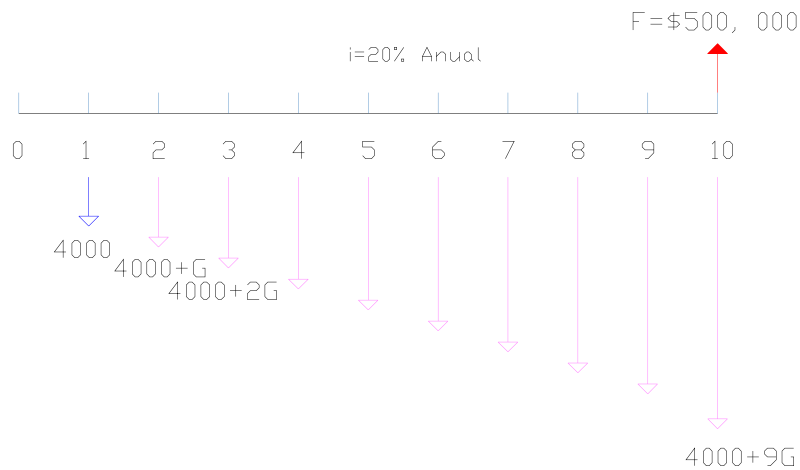
P=[3000 (P/A, 7%,9) – 340 (P/G, 7%, 9)] + [60 (P/A, 7%, 3) + 340 (P/G, 7%, 3)] (P/G, 7%, 9).

P= [3000(6.5152) - 340(23.140)] - [60(2.6243) + 340(2.506)](0.5439)

P= $11, 128.70

* **Problema:** Una compañía desea tener disponibles $500, 000 para invertir dentro de 10 años. La compañía proyecta invertir $4000 en el primer año y después asumir incrementos en un gradiente uniforme. Si la tasa de interés de la compañía es 20% anual. ¿Cuál debe ser el tamaño del gradiente para que la compañía logre su objetivo?

Solución:



A= $4000 (Cantidad Base).

i= 20% Anual = 0.20

G= ? (Gradiente).

n= 10 años.

Empleando:

$$F = A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]$$

Sustituyendo:

$$500,000 = 4000\left[\frac{(1.2)^{10} - 1}{0.20}\right] + \frac{G}{0.20}\left[\frac{(1.2)^{10} - 1}{0.20} - 10\right]$$

G= $4964.69

Unidad IV : Depreciación:

4.1.- Conceptos Básicos:

* **Depreciación:** Es la pérdida de valor de un activo conforme se utiliza para producir ingresos.

* **Depreciación acumulada:** Es la suma de las depreciaciones hasta la fecha.

* **Activos Fijos:** Se utilizan en más de un año e incluyen maquinaria, equipo de oficina, edificios y propiedades similares de los negocios.

* **Recuperación de Costos:** Es el concepto, utilizado en las recientes leyes fiscales, de la declinación en el valor de un activo.

* **Valor en Libros:** Es el valor de un activo en los registros de la compañía, el valor en libros de un activo no implica que el activo se pueda vender por ese importe.

* **Tabla de recuperación en costos:** Muestra la recuperación anual del costo, el valor en libros y la recuperación acumulada por el costo, durante el numero de años predeterminados especificaos en la ley fiscal.

* **Tabla de depreciación:** Muestra la depreciación anual, el valor anual en libros y la depreciación acumulada para cada año.

* **Depreciación Total:** Es el costo original menos el valor de reventa o de mercado.

* **Vida útil:** Es el número de años durante el cual se usa y deprecia un activo.

4.2.- Importancia de la Depreciación:

Desde el momento en que se adquiere un bien (A excepción de los terrenos y algunos metales), éste empieza a perder valor por el transcurso del tiempo o por el uso que se le da; esta pérdida de valor es conocida como depreciación y debe reflejarse contablemente con el fin de:

1) Determinar el costo de bienes o servicios que se generan con dichos activos.
2) Establecer un fondo de reserva que permita reemplazar el bien al final de su vida útil.

Es importante que toda empresa que se dedica a la fabricación de bienes y servicios, considere provisiones por depreciación, porque de no ser así, puede verse en serios problemas financieros y descapitalización al terminar la vida útil de sus activos, además se considera como factor importante al establecer sus costos de operaciones y servicios.

4.3.-Objetivos y Valores de la Depreciación:

*** Objetivos:**

1) Reflejar los resultados de la pérdida de valor del activo.
2) Crear un fondo interno para financiar la adquisición de un nuevo activo al finalizar la vida del antiguo.

*** Valores:**

1) Los cargos periódicos que se realizan son llamados "Cargos por Depreciación".
2) La diferencia entre el valor original y la depreciación acumulada a una fecha determinada se le conoce como "Valor en Libros".
3) El valor en libros de un activo no corresponde necesariamente a su valor de mercado, en tiempos de alta inflación, esto puede llegar a ser varias veces superior, pues aquel refleja únicamente la parte del costo original que esta pendiente de ser cargado a resultados.
4) El valor que tiene el activo al final de su vida útil se le conoce como "Valor de Salvamento" o "Valor de Rescate" y debe ser igual al valor en libros en esa fecha.

4.4.- Métodos de Depreciación:

4.4.1.- Método de Línea Recta (L.R.): Es el método más simple y el más utilizado en muchos países como México, es el único aprobado por las autoridades para cumplir con las disposiciones fiscales al respecto. Este método supone que la depreciación anual es la misma durante toda la vida útil del activo. De acuerdo con ello:

$D_k = (P - V_s)/n \rightarrow$ **(**1**)**; donde : D_k= Depreciación Anual **(**Cargo anual al fondo de reserva**)**, P= Valor del Activo; V_s= Valor de Salvamento, n= Vida útil del activo, k= plazo ($1 \leq k \leq n$), $P - V_s$= Base de depreciación (Constante).

*** Valores:**

*** Depreciación Acumulada:** $A_k = KD_k \rightarrow$ **(**2**)**

*** Valor en Libros:** $VL_k = p - A_k \rightarrow$ **(**3**)**

*** Depreciación con inflación:** Casi siempre que se adquiere un bien material, por ejemplo al comprar un automóvil, se observa que el valor consignado en la factura original es menor que el valor de compraventa y esto se debe a que la inflación produce un efecto mayor que el que produce la depreciación. A continuación se justifica una fórmula para ser empleada en casos como el que se menciona, suponiendo que ambas, inflación y depreciación, permanecen constantes en el periodo de tiempo que se esté considerando. Si esto no se cumple o si la depreciación es considerada o evaluada de otra forma, no con el método de línea recta que ahora nos ocupa, entonces se procederá con los cálculos de manera individual por año, pero sin llegar a una formula general.

El valor de salvamento o de compraventa de un activo considerando inflación, con el método de L. R. Es:

$$V_s = P(1+i_f)^n - D_k\left[\frac{(1+i_f)^n - 1}{i_f}\right] \rightarrow \textbf{(4)}$$

donde i_f= tasa de inflación; D_k= Depreciación Anual.

*** Problema:** Se compra un equipo de computo con valor de $16, 000 y se calcula que su vida útil será de 4 años, antes de que deba ser reemplazado por un equipo más moderno, su valor de salvamento se calcula en $2500, determine por L.R. :

a) La depreciación anual.

b) Elabore una tabla de depreciación.

Solución:

P= $16, 000

V_s= 2500

n= 4 Años.

D_k= ?

a) Empleando: $D_k = (P - V_s)/n$

Sustituyendo:

$D_k = (16000 – 2500)/4$ D_k= $3375.00

b) Tabla de Depreciación:

Año (n)	**Depreciación Anual**	**Depreciación Acumulada**	**Valor en Libros**
0	-	-	$16, 000
1	3375	3375	12, 625
2	3375	6750	9, 250
3	3375	10, 125	5, 875
4	3375	13, 500	2, 500

$Vl_4 = V_5 = \$2500$ Ok

* **Problema:** La compañía constructora del Sureste S.A., compró una maquina para hacer block-ladrillo en $12, 100, estima que tendrá una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de $1320 con una inflación del 11% Anual. Empleando el método de L.R. obtener:

a) La depreciación anual.

b) Elabore una tabla de depreciación.

Solución:

P= \$12, 100 n= 5 Años.

Vs= \$1320 i_f= 11% Anual.

a) Empleando:

$$V_s = P(1+i_f)^n - D_k\left[\frac{(1+i_f)^n - 1}{i_f}\right]$$

Sustituyendo:

$$1320 = 1200(1.11)^5 - D\left[\frac{(1.11)^5 - 1}{0.11}\right]$$

D_k= \$3061.95 (Depósito Anual).

n	Valor c/ Inflación	Depreciación Anual	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0	-	-	-	\$12, 100.0000
1	13, 431.0000	3061.95	3061.95	\$10, 369.0500
2	11, 509.6450	3061.95	6123.90	\$8, 447.6955
3	9, 376.9420	3061.95	9185.85	\$6, 314.9920
4	7, 009.6411	3061.95	12, 247.80	\$3, 947.6911
5	4, 381.9371	3061.95	15, 309.75	\$1, 320.0000

f_c= 1+i%/100 f=1.11

4.4.2.- Método por suma de dígitos al año (S.D.A.): Es un método acelerado de depreciación que asigna un cargo mayor a los primeros años de servicio y lo disminuye con el transcurso del tiempo.

La suma de dígitos **s** del 1 a n de los años de vida útil esperada del activo se determina utilizando la fórmula:

$$S = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \textbf{(5)}$$

★ **Depreciación y Valor en Libros:** La depreciación por el método S.D.A. se obtiene aplicando la fórmula:

$$D_k = \frac{n-k+1}{s}(P-Vs) \rightarrow \textbf{(6)}$$

y el valor en libros de obtiene aplicando la fórmula:

$$Vl_k = p - \left[\frac{k(n - 0.5k + 0.5)}{5}(P-Vs)\right] \rightarrow \textbf{(7)}$$

donde: P= Valor del Activo; Vs= Valor de Salvamento; s= Suma de dígitos; n= Vida útil del activo; k= plazo ($1 \leq k \leq n$) y (P-Vs)= Base de depreciación (Constante).

*** Problema:** Un camión de reparto que cuesta $11, 000 se espera que dure 6 años y tenga un valor de salvamento de $500. aplicando S.D.A. obtener:

a) El valor de la depreciación para cada uno de los 6 años

b) Elabore tabla de depreciación.

Solución:

P= $11, 000

n= 6 Años.

Vs= $500

a) Valor de depreciación por cada año aplicando S.D.A.

Utilizando:

$$D_k = \frac{n-k+1}{s}(P-Vs)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$D_k = \frac{6-k+1}{21}(11,000-500)$$

$$D_k = (7-k)(\$500)$$

Si k=1: $D_1=6(500)=\$3000$

Si k=2: $D_2=5(500)=\$2500$

Si k=3: $D_3=4(500)=\$2000$

Si k=4: $D_4=3(500)=\$1500$

Si k=5: $D_5=2(500)=\$1000$

Si k=6: D_6=1(500)= $500

b) Elaborar tabla de depreciación:

Año (n)	**Depreciación Anual**	**Depreciación Acumulada**	**Valor en Libros**
0	-	-	$11, 000
1	$3000	$3000	9, 000
2	2500	5500	5, 500
3	2000	7500	3, 500
4	1500	9000	2, 000
5	1000	1000	1, 000
6	500	10500	500

* **Problema:** Una sierra eléctrica de control digital costó $33, 000. ¿Cuál será su valor de salvamento si en el primer año se desprecia

\$9500? tiene 5 años de vida útil y se considera inflación de 12.3% anual. Utilice el método de S.D.A.

Solución:

Vs_5=?

P= \$33, 000

D_1= \$9, 500

n= 5 Años.

i_f= 12.3% Anual

f_c= 1+i_f/100

f_c= 1.123

Como la depreciación es diferente cada año y existe inflación, entonces el análisis debe ser de manera individual por año, sin llegar a fórmula general, empleando:

$$D_k = \frac{n-k+1}{s}(P-Vs)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5(6)}{2} = 15; \text{ si } k=1\ D_1 = 9500$$

Sustituyendo: $9500 = \frac{5-1+1}{15}(P-Vs) \therefore (P-Vs) = \$25,500$ (Base de dep cte)

Valor de la sierra al final del 1er año:

$P_1 = Vs_0 * F_c = \$33,000(1.123)$

$P_1 = \$37,059$

$Vs_1 = P_1 - D_1 = \$37,059 - \$9,500$

$Vs_1 = \$27,559$

Para k= 2

$D_2 = \frac{5-2+1}{15}(28, 500)$

D_2= \$7, 600

Valor de la sierra al final del 2do año:

$P_2 = Vs_1 * F_c$ = \$27, 559(1.123)

P_2= \$30, 948.76

$Vs_2 = P_2 - D_2$ = \$30, 948.76 - \$7, 600

Vs_2=\$23, 348.76

Para k= 3

$D_3 = \frac{5-3+1}{15}(28, 500)$

D_3= \$5, 700

Valor de la sierra al final del 3er año:

$P_3 = Vs_2 * F_c$ = \$23, 343.76(1.123)

P_3= \$26, 220.65

$Vs_3 = P_3 - D_3$ = 26, 220.65 - 5700

Vs_3=\$20, 520.65

Para k= 4

$D_4 = \frac{5-4+1}{15}(28, 500)$

D_4= \$3, 800

Valor de la sierra al final del 4to año:

$P_4 = Vs_3 * F_c = 20,520.65(1.123)$

$P_4 = \$23,044.7$

$Vs_4 = P_4 – D_4 = 23,044.7 - 3800$

$Vs_4 = \$19,244.7$

Para k= 5

$D_5 = \frac{5-5+1}{15}(28,500)$

$D_5 = \$1,900$

Valor de la sierra al final del 5to año:

$P_5 = Vs_4 * F_c = 19,244.7(1.123)$

$P_5 = \$21,611.92$

$Vs_5 = P_5 – D_5 = 21,611.92 – 1,900$

$Vs_5 = \$19,711.80$

Conclusión: El valor de salvamento de la sierra de \$33, 000, con una inflación del 12.3% Anual será de \$19, 711.80 de acuerdo al método S.D.A.

4.4.3.- Método por Fondo de Amortización (F.A.): Este método toma en consideración los intereses que gana el fondo de reserva que se va constituyendo, por lo tanto, el incremento anual al fondo estará dado por la suma del cargo anual por la depreciación más los intereses ganados en el periodo de referencia.

★ **Depósito Anual:** La depreciación anual es el equivalente al depósito que es necesario realizar, el cual se obtiene con la fórmula:

$$D= \frac{(P-Vs)i}{(1+i)^{n}-1} \rightarrow \textbf{(8)}$$

donde: P= Valor del activo; Vs= Valor de Salvamento; i= Tasa de interés; n= Número de años de vida útil del activo y (P-Vs)= Base de depreciación (Constante).

★ **Depreciación Acumulada:** Esta depreciación se puede calcular empleando la fórmula:

$$A_k=D\left[\frac{(1+i)^k-1}{i}\right] \rightarrow \textbf{(9)}$$

donde: D= Depósito Anual y k= plazo $(1 \leq k \leq n)$

★ **Valor en Libros:** Es el valor del activo en cualquier periodo k, el cual se calcula, empleando la fórmula:

$Vl_k= P-A_k \rightarrow$ **(10)** ; donde: P= Valor del Activo; A_k= Depreciación Acumulada y k= plazo $(1 \leq k \leq n)$.

★ **Efecto de la Inflación:** Cuando ocurre esto y el bien se deprecia por F.A., entonces el depósito y la depreciación acumulada se calculan empleando las fórmulas:

$$D = \frac{(P-Vs)i_R}{(1 \text{☚ } i_R)^n - 1} \rightarrow \mathbf{(10)} \quad \mathbf{y} \quad A_k = D\left[\frac{(1 \text{☚ } i_R)^k - 1}{i_R}\right] \rightarrow \mathbf{(11)}$$

donde: i_R= Tasa Real; la cual se obtiene aplicando la ecuación $i_R = i_f - d$ $\rightarrow$**(12)**; donde i_f= Tasa de inflación y d= Tasa fija de depreciación.

*** Problema:** Se adquiere mobiliario nuevo para un hotel. Su costo de adquisición es de $40, 000 y se calcula que tenga una vida útil de 5 años, al cabo de los cuales su valor de salvamento será nulo. El interés vigente es de 35% Anual. Aplicando F.A. Determine:

a) El cargo anual por depreciación (Depósito).

b) Elabore una tabla de depreciación.

Solución:

P= \$40, 000 n= 5 años.

Vs= \$0 i= 35% Anual = 0.35

a) Empleando:

$$D= \frac{(P-Vs)i}{(1+i)^n-1} = \frac{(40,\,000 - 0)0.35}{(1.35)^5 - 1}$$

D= \$4, 018.3311 (Depósito Anual)

b) Elaborar tabla de depreciación.

n	Depósito Anual	Intereses Ganados	Depreciación Anual	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0	-	-	-	-	\$40,000.00
1	4,018.3311	-	4,018.3311	4,018.3311	35,981.669
2	4,018.3311	1,406.415	5,424.7470	9, 443.0780	30,556.921
3	4,018.3311	3,305.079	7,323.4080	16,766.486	23,233.513
4	4,018.3311	5,868.270	9,886.6010	26,653.080	13,346.911
5	4,018.3311	9,328.580	13,346.9110	40,000.000	-

$vl_k=P-A_k$

Intereses ganados son sobre la depreciación acumulada; depreciación anual es igual al depósito más los intereses del periodo k.

* **Problema:** Considerando que tendrá una vida útil de 13 años y un valor de salvamento de \$16, 000, la empresa "Botanas y Aperitivos S.A.", compro un nuevo equipo para freír sus productos. Aplicando F.A. Obtener:

a) El costo original, si el cargo por depreciación anual (Depósito) es de $750 con un tipo de interés del 12% Anual

b) El valor en libros al término del décimo año de servicio.

Solución:

n= 13 años.

Vs= $16, 000

P= ?

D= $750

i= 12% Anual= 0.12

a) Empleando:

$$D= \frac{(P-Vs)i}{(1+i)^{n}-1}$$

$$750= \frac{(P - \$16,000)0.12}{(1.12)^{13}-1}$$

P= \$37, 021.83

b) Empleando:

$$Vl_k = P - A_k \qquad y \qquad A_k = D\left[\frac{(1+i)^k - 1}{i}\right]$$

Para k= 10

$$A_{10} = 750\left[\frac{(1.12)^{10} - 1}{0.12}\right] = \$13,\ 161.5513$$

para k= 10

Vl_{10}= 37, 021.83 – 13, 161.5513

Vl_{10}= \$23, 860.28

*** Problema:** Un montacargas de control digital, costó $47, 500 y se supone que tendrá una vida útil de 6 años y valor de salvamento de $35, 300, considerando un índice inflacionario constante de 11.4% anual, sabiendo que la tasa fija de depreciación es de 14% Anual, aplicando F.A. obtener:

a) El cargo por depreciación anual (Depósito).

b) La depreciación acumulada hasta el tercer año.

c) Elabore una tabla de depreciación.

Solución:

P= $47, 500.

n= 6 años.

Vs= $35, 300.

i_f= 11.4% Anual.

d= 14% Anual.

$i_R = i_f - d$

i_R= 11.4% - 14%

i_R= -2.6% = -0.026

a) Empleando:

$$D = \frac{(P-Vs)i_R}{(1 + i_R)^n - 1}$$

$$D = \frac{(47,500 - 35,300)(-0.026)}{(1 - 0.026)^6 - 1}$$

D= \$2, 169.5604 (Depósito Anual).

b) Empleando:

$$A_k = D\left[\frac{(1 + i_R)^k - 1}{i_R}\right]$$

para k= 3

$$A_3 = 2,169.56\left[\frac{(1 - 0.026)^3 - 1}{-0.026}\right]$$

A_3= \$6, 340.92

c) Tabla de Depreciación:

n	Depósito Anual	Intereses No Ganados	Depreciación Anual	Depreciación Acumulada	Valor en Libros
0	-	-	-	-	\$47,500.000
1	2,169.5604	-	2,169.5604	2,169.5604	45,330.4396
2	2,169.5604	-56.4086	2,113.1518	4,282.7122	43,217.2878
3	2,169.5604	-111.3505	2,058.2099	6,340.9221	41,159.0779
4	2,169.5604	-164.8640	2,004.6964	8,345.6185	39,154.3815
5	2,169.5604	-216.9861	1,952.5743	10,298.1929	37,201.8072
6	2,169.5604	-267.7530	1,901.8074	12,200.0000	35,300.0000

Unidad V : Análisis de alternativas de inversión:

5.1.- Introducción y Conceptos:

* **Introducción:** Toda la vida nos la pasamos tomando decisiones en cuanto a escoger la alternativa que según nuestro criterio es la mejor de cuantas son posibles para enfrentar un problema o resolver una situación en particular.

* **Conceptos:**

■ **Alternativa:** Es una opción independiente para una solución dada.

■ **Factores que Influyen:**

1) Costo de compra de bienes.
2) La vida anticipada del bien.
3) Costos anuales de mantenimiento.
4) Valor anticipado de reventa del bien.
5) La tasa de interés.
6) Etc.

■ **Criterio de Evaluación:** Para poder comparar diferentes métodos para lograr un objetivo dado, es necesario tener un criterio de evaluación que se pueda utilizar como base para juzgar las alternativas. En matemáticas financieras, el dinero es la base de la comparación. De esta manera, cuando hay varias maneras de lograr un objetivo dado, generalmente se selecciona el método que tiene el menor costo global.

5.2.- Calculo de Valores:

5.2.1.- Valor Presente (VP): El método de valor presente se usa más frecuentemente para determinar el valor actual de futuros ingresos y egresos. Por ejemplo: Quisiéramos saber el valor presente de los ingresos que produzca una propiedad, un edificio en renta o un pozo petrolero, esto nos proporciona una buena estimación del precio en que se pueda comprar o vender la propiedad.

Este método es uno de los criterios que más se utiliza en la selección y evaluación de proyectos de inversión. Consiste en determinar el valor en el tiempo cero de los flujos de efectivo que genera el negocio-proyecto y compararlo con la inversión inicial. Si este valor actual es mayor que el desembolso inicial, entonces es recomendable que el proyecto sea aceptado, es decir, VP>0. para valuar estos flujos se emplea la expresión:

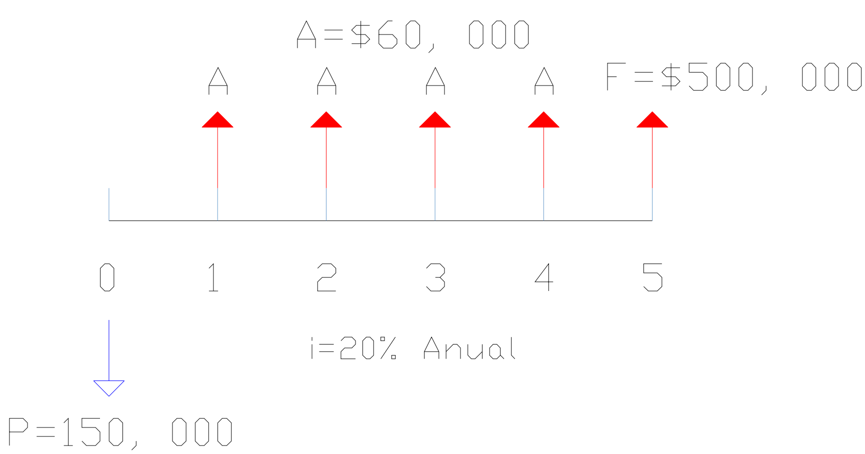
$$VP = -P + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t} + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \rightarrow \textbf{(1)}$$

donde: VP= Valor Presente, P= Inversión Inicial; F_t= Flujo neto en el periodo t; n= número de periodos de vida del negocio-proyecto; i= tasa de retorno mínima atractiva (Trema) o costo de capital.

La ventaja de usas la trema de la empresa en el proyecto, en lugar del costo del capital invertido, es su facilidad de determinación, así como la de incluir factores, tales como el riesgo de la inversión, la liquidez de la empresa y la inflación de la economía. Cualesquiera que sean los flujos de efectivo el VP es único para cada tasa de interés i.

*** Problema:** Una empresa se interesa en comprar una maquinaria. El equipo tiene un valor de $150, 000 puesto en plaza. Se estima que el ingreso neto de operar la maquinaria es de $60, 000 anuales. La vida útil de uso del equipo se considera de 5 años, al cabo de los cuales se venderá a un precio de $30, 000. La trema de la empresa es del 20% Anual. ¿Es recomendable la inversión?

Solución:



Empleando:

$$VP = -P + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t} + A\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

VP= -150, 000 + 30, 000(P/F,20%,5) + 60, 000(P/A,20%,5)

VP= $41, 493

Conclusión: Puesto que VP>0, se recomienda hacer la inversión.

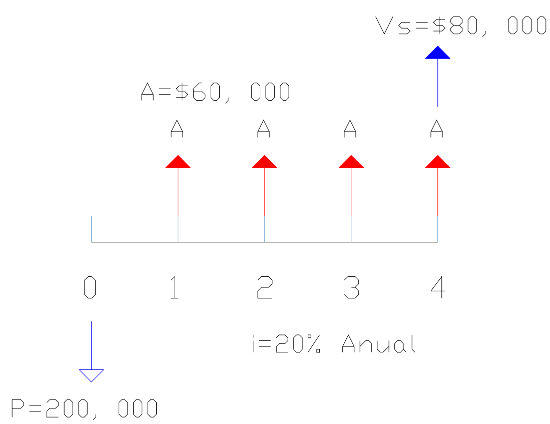
5.2.2.- Valor o Costo Anual (VA): Este método se describe mejor como el método del valor anual uniforme equivalente y consiste en convertir todos los ingresos y gastos que ocurren durante un periodo o una anualidad uniforme equivalente, entonces es recomendable que un proyecto sea aceptado cuando VA>0. Para evaluar los flujos se emplea la expresión:

$$VA= -P + \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] + \left\{\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t}\right]\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]\right\} \text{☛} \; Vs \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \text{☛} \; A \rightarrow \textbf{(2)}$$

donde: VA= Valor Anual Equivalente; P= Inversión Inicial; F_t= Flujo Efectivo para el periodo t; Vs= Valor de Salvamento; A= Anualidad (Costo Uniforme); i= Tasa de recuperación mínima atractiva (Trema); n= Número de años de vida del proyecto.

*** Problema:** una empresa compra un camión en $200, 000 con préstamo bancario al 20% anual pagadero en 4 anualidades iguales. Se estima usar el camión durante 4 años al cabo de los cuales su valor de salvamento será de $80, 000. los ingresos netos esperados son $60, 000 al año. ¿Conviene la inversión?

Solución:



Empleando:

$$VA= -P + \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] + \left\{\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t}\right] \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]\right\} ☚ Vs \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] ☚ A$$

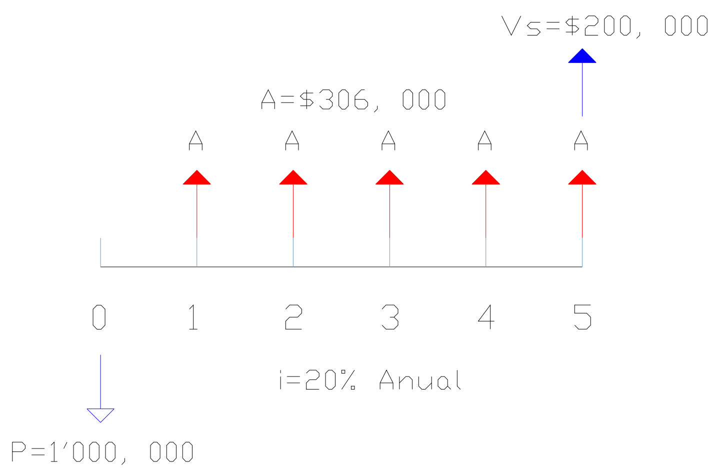
VA= -200, 000[A/P,20%,4]+ 80, 000[A/F,20%,4] + 60, 000

VA= - $2356 < 0

Conclusión: No conviene la inversión.

*** Problema:** una empresa ha solicitado un préstamo por \$1’000,000 para comprar una maquina procesadora. El banco le exige una tasa de interés de 20% Anual y el pago en 5 anualidades iguales. Si las utilidades netas se estiman en \$306, 000 y el valor de salvamento al final del año cinco se estima en \$200, 000. ¿Se debería adquirir la máquina?

Solución:



Empleando:

$$VA = -P + \left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] + \left\{\left[\sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t}\right]\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]\right\} \text{☚}\ Vs\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \text{☚}\ A$$

VA= -1’000,000[A/P,20%,5] + 200,000[A/F,20%,5] + 306,000=0.5

VA= 0.5>0

Conclusión: No conviene comprar la maquinaria aunque VA>0 (Positivo), pues su valor es muy pequeño respecto al monto de la inversión realizada, lo que lo hace insuficiente para reemplazar en el futuro el equipo actual.

5.2.3.- Tasa Interna de Rendimiento (TIR): La tasa interna de rendimiento i_* (TIR), es una medida de rentabilidad ampliamente aceptada y se define como “la tasa de interés que reduce a cero, el valor presente (VP), el valor futuro (VF) o el valor anual uniforme equivalente (VA), de un flujo de caja”. (Serie de Ingresos y egresos).

CALCULO DE LA TASA INTERNA DE RENDIMIENTO **(**TIR**)**

CASO I: Método de Valor Presente (VP): Para éste caso se emplea la ecuación:

$$0= \text{☚} P \text{☚} \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i_*)^t} \text{☚} A \left[\frac{(1+i_*)^n - 1}{i_* (1+i_*)^n}\right] \rightarrow \textbf{(}3\textbf{)}$$

CASO II: Método del Valor Anual Equivalente (VA): En éste paso se emplea la ecuación:

$$0= \text{☚} P \left[\frac{i_* (1+i_*)^*}{(1+i_*)^n - 1}\right] \text{☚} Vs \left[\frac{i_*)^n}{(1+i_*)^n - 1}\right] \text{☚} A \rightarrow \textbf{(}4\textbf{)}$$

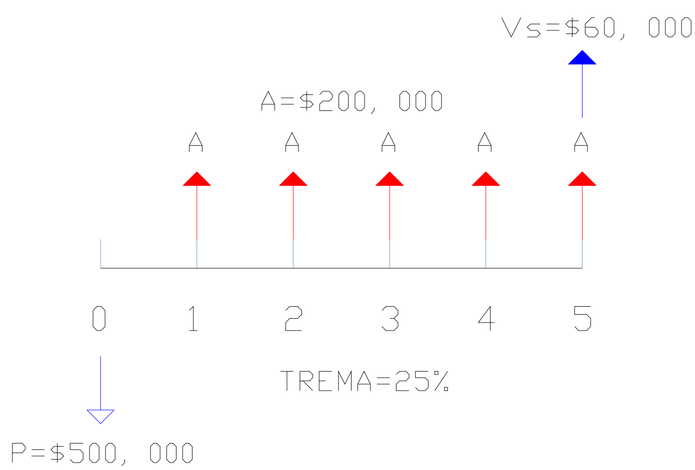
Donde: i_*= Tasa interna de rendimiento (TIR).

Para el calculo de i_* (TIR) es necesario apoyarse en el proceso ensayo-error e interpolación, hasta lograr que las ecuaciones anteriores quede balanceada.

Cuando i_* (TIR) se emplea en el análisis de proyectos de inversión, se compara con la tasa de recuperación mínima atractiva (TREMA). Cuando TIR>TREMA, conviene hacer la inversión (Emprender el proyecto) y viceversa, si TIR<TREMA no conviene el proyecto.

*** Problema:** Una empresa industrial piensa adquirir una unidad económica para producir tornillos para madera. La inversión inicial serpa de $500, 000. se calcula que las ventas netas serán de $200, 000 anuales, al final del año 5 se piensa vender la unidad en $60, 000. La TREMA de la compañía es del 25% Anual. ¿Convendrá esta inversión?

Solución:



$i_* = ?$

Caso I: Empleando:

$$0 = \text{☛}\, P \,\text{☛} \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i_*)^t} \,\text{☛}\, A\left[\frac{(1+i_*)^n - 1}{i_*(1+i_*)^n}\right] \rightarrow \textbf{(3)}$$

$$0 = 500,000 + 60,000(P/F,i_*,5) + 200,000(P/A,i_*,5)$$

Ensayo-Error: Si $i_* = 30\%$

$0 = -500,000 + 60,000(P/F,30\%,5) + 200,000(P/A,30\%,5)$

$0 \neq 3.3$

Si $i_* = 35\%$

$0 = -500,000 + 60,000(P/F,35\%,5) + 200,000(P/A,35\%,5)$

$0 \neq -42.6$

Interpolando:

3.3	→ 30%		TIR= i_* = ?
0	→ i_*		$\therefore i_* = 30.3\%$ Anual.
-42.6	→ 35%		

Conclusión:

Comparando TIR > TREMA, 30.3% > 25%, Esto significa que si es conveniente la inversión.

5.3.- Criterios Generales para Comparar Alternativas de Inversión:

5.3.1.-Método de Valor Presente:

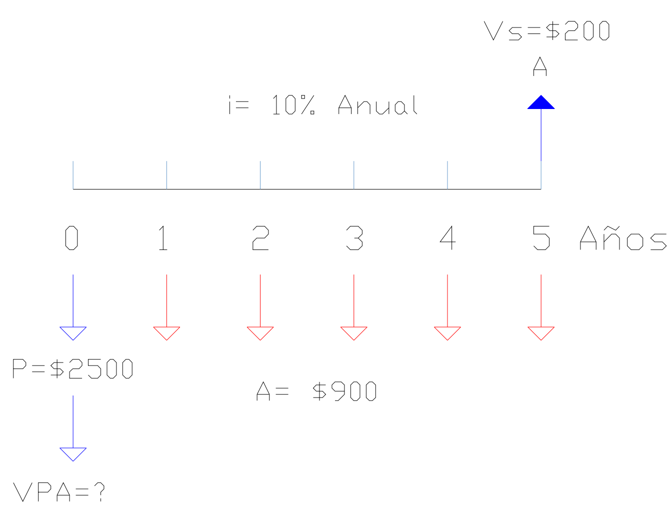
5.3.1.1.- Alternativas con Vidas Útiles Iguales: El valor presente (VP) de evaluación de alternativas con vidas útiles iguales, es un método muy popular, porque los gastos o entradas futuras se transforman en pesos equivalentes de ahora. De esta manera es muy fácil, aun para una persona poco familiarizada con el análisis económico, ver la ventaja económica de una alternativa sobre otra o más alternativas. Esta comparación es directa, si las dos o más alternativas se utilizan en idénticas condiciones, denominándose alternativas de igual servicio y los ingresos anuales tendrán el mismo valor numérico, es decir, que debemos elegir la alternativa con menor valor presente (VP). (Para el análisis aplicar la fórmula 1).

*** Problema:** Haga una comparación de valor presente(VP) de las máquinas de igual servicio para los costos que se muestran a continuación, si la tasa de interés es 10% Anual. ¿Cuál máquina es mejor?

	Maquina A	Maquina B
Costo Inicial	$2, 500.00	$3, 500.00
Costo Anual de Operación	$900.00	$700.00
Valor de Salvamento	$200.00	$350.00
Vida útil en Años	5	5

Solución:

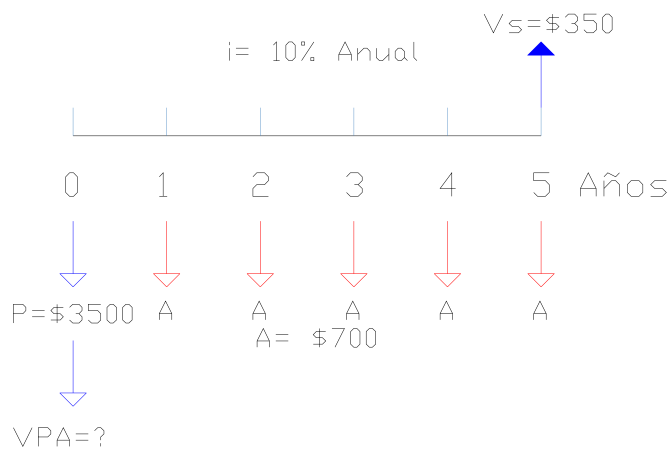
Maquina A:



VP_A= 2500+900(P/A,10%,5) – 200(P/F,10%,5)

VP_A= $5788.00

Máquina B:



VP_B= 3500 + 700(P/A,10%,5) – 350(P/F,10%,5)

VP_B= $5936.00

Conclusión:

Como $VP_A < VP_B$, entonces la mejor opción es adquirir la máquina A.

5.3.1.2.- Alternativas con Diferente Vida Útil: En éste caso las alternativas se deben comparar sobre el mismo número de años, es decir, al flujo de caja para un ciclo de una alternativa debe multiplicarse por el mínimo común múltiplo de años para que el servicio se compare sobre la misma vida útil de cada alternativa.

*** Problema:** El dueño de una automóvil quiere decidir entre comprar 4 llantas radiales o vitalizar las 4 usadas. Las 4 llantas costarán $350 cada una y duraran 42, 000kms; las 4 llantas usadas se pueden vitalizar por $115 cada una y duraran solo 12, 000 kms. Si se registran 6, 000 kms recorridos por año del automóvil. ¿Qué clase de llantas debe elegir?, si la tasa de interés es del 6% anual, además se sabe que las llantas nuevas, aumenta el kilometraje de gasolina en un 10% y se supone que el gasto de gasolina es de $4.60 por galón y el auto consume un galón cada 20 kms, las llantas no tienen valor de salvamento.

Solución:

Alternativa A “Comprar Llantas”

P= 4x$350= $1400

Duración= 42, 000 Kms

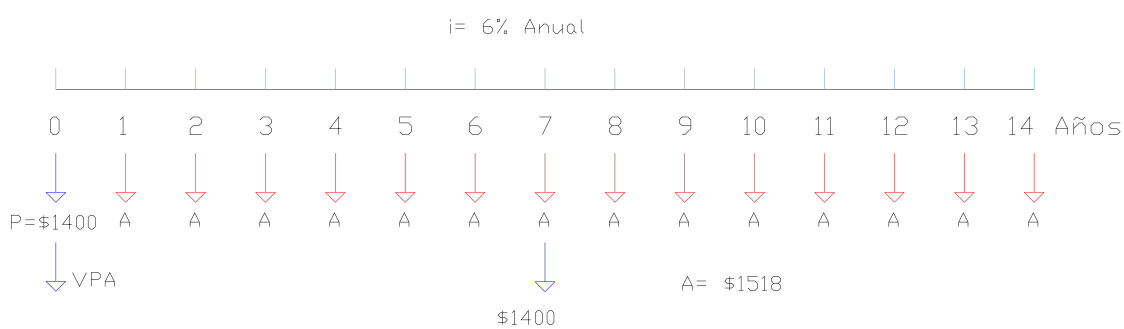
n= 7 Años.

A= [(6000/20)(4.60)] [1+0.10]

A= $1518.00

Alternativa A aplicando

VP= -P ☚ F(P/F,i%,n) ☚ A(P/A,i%,n)



VP_A= 1400 + 1400(P/F,6%,7) + 1518(P/A,6%,14)= $16, 440.95

Alternativa B "Vitalizar Llantas"

P= 4x$115= $460

Duración: 12, 000Kms

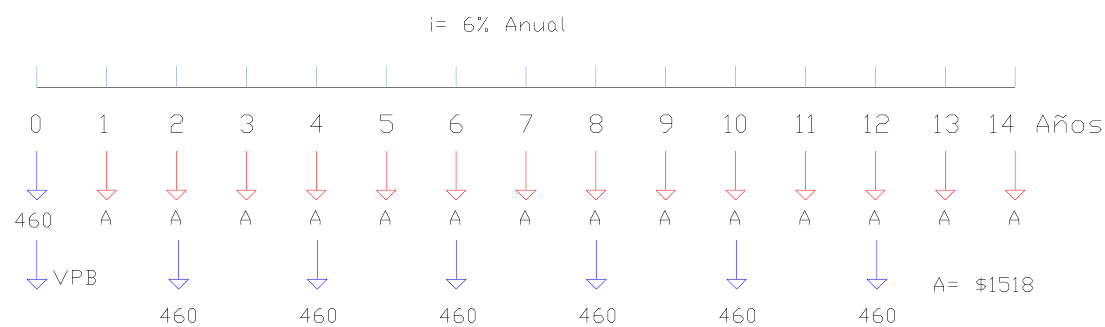
n= 2 Años.

Consumo Anual

A= [(5000/20)(4.60)]= $1380

Vida útil común: 14 Años.

Alternativa B



VP_B= 460 + 1360(P/A,6%,14) + 460(P/F,6%,2) + (P/F,6%,4) + (P/F,6%,8) + (P/F,6%,10) + (P/F,6%,12) + (P/F,6%,14)

VP_B= $15, 159.74

Conclusión:

Como se puede observar $VP_B < VP_A$, la mejor alternativa es vitalizar las llantas.

5.3.2.-Método del Costo Anual: La ventaja principal de éste método (De comparar alternativas) sobre los demás es que no hace necesario hacer las comparaciones sobre el mismo número de años cuando las alternativas tienen diferente vida útil. Si un proyecto se continua por más de un ciclo, el costo anual equivalente para el siguiente ciclo y todos los ciclos subsiguientes sería exactamente el mismo que para el primero, suponiendo que todos los flujos de caja fueron iguales cada ciclo

Éste método, es probablemente la técnica más simple de evaluación de alternativas. La selección se hace en base al costo anual (VA), siendo la alternativa de menos costo la más favorable. Obviamente la información no cuantificable debe ser considerada también para llegar a la solución final, pero en lo general se selecciona la alternativa de menor costo anual equivalente (VA), para su análisis se emplea la fórmula 2.

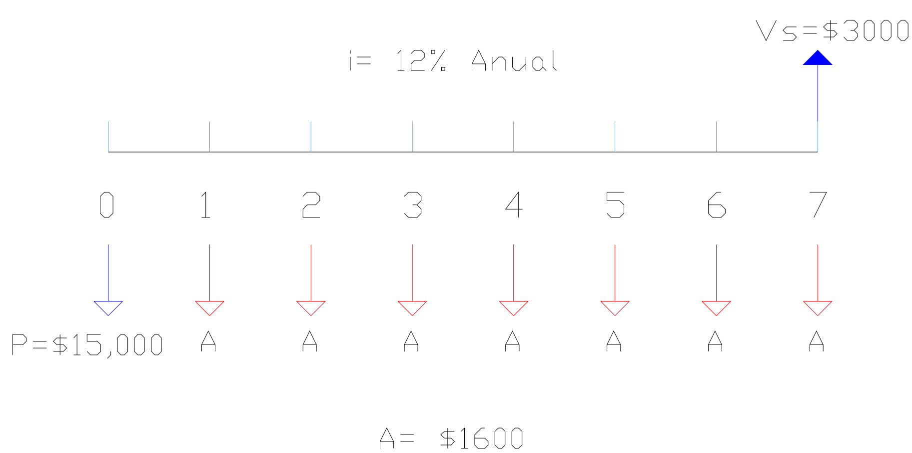
*** Problema:** El gerente de una planta de conservas alimenticias quiere decidir entre dos maquinas de hacer etiquetas cuyos costos respectivos son:

	Maquina A	**Maquina B**
Costo Inicial	\$15, 000.00	\$25, 000.00
Costo Anual de Operación	\$1, 600.00	\$400.00
Valor de Salvamento	\$3, 000.00	\$6, 000.00
Vida útil en Años	7	10

Determine cuál máquina seleccionar, utilizando una tasa de interés de 12% Anual y analice por VA.

Solución:

Máquina A



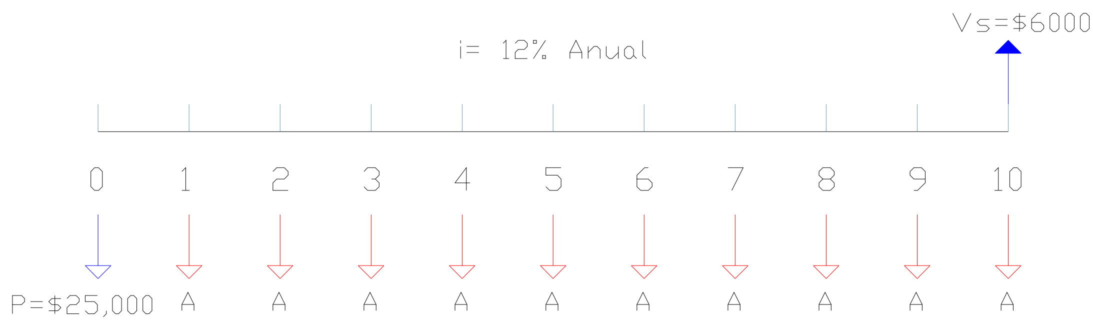
Empleando:

VA= -P(A/P,i%,n) + F(A/F,i%,n) ✒ Vs(A/F,i%,n) ✒ A

VA_A= -15, 000(A/P,12%,7) + 3000(A/F,12%,7) – 1600

VA_A= -\$4, 589.44

Máquina B



VA_B= -25, 000(A/P,12%,10) + 6000(A/F,12%,10) – 400

VA_B= -\$4, 482.62

Conclusión:

Como podemos observar $VA_B < VA_A$ por lo que la mejor alternativa es elegir la máquina B.

5.3.3.-Método de la Tasa Interna de Rendimiento:

5.3.3.1.- Aplicando valor presente (VP)(Análisis de inversión incremental):

Procedimiento de Calculo:

1°) Preparar una tabulación del flujo de caja y un flujo de caja neto. Teniendo en cuenta que el mínimo común múltiplo de los años debe utilizarse cuando las alternativas tienen diferente vida útil.

Flujo de Caja Neto = Flujo de Caja B – Flujo de Caja A, Siendo A<B.

2°) Dibujar un diagrama de flujo de caja Neto.

3°) Calcular la tasa interna de rendimiento i_* (TIR), empleando la fórmula:

0= ☚ P ☚ $\sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i_*)^t}$ ☚ A $\left[\frac{(1+i_*)^n-1}{i_*(1+i_*)^n}\right]$

el análisis es apoyado por ensayo-error e interpolación.

4°) Comparar las tasas TIR y TREMA

* 4.1.- Si TIR>TREMA; se elige la alternativa de mayor costo inicial.

** 4.2.- Si TIR<TREMA; se elige la alternativa de menor costo inicial.

* Se justifica un incremento en la inversión.

** El VP de los ahorros < VP de la inversión.

5.3.3.1.- Aplicando Valor Anual Equivalente (VA):

Procedimiento de Calculo:

1°) Preparar una tabulación de un flujo de caja y un flujo de caja neto.

Teniendo en cuenta que el valor anual (VA) considera las alternativas de vidas útiles iguales.

2°) Dibujar un diagrama de flujo de caja neto.

3°) Calcular la tasa interna de rendimiento i_* (TIR), empleando la fórmula:

0= ☛ P $\left[\frac{i_*\,(1+i_*)^{*}}{(1+i_*)^n - 1}\right]$ ☛ Vs $\left[\frac{i_*)^n}{(1+i_*)^n - 1}\right]$ ☛ A

apoyado por ensayo-error e interpolación.

4°) Comparar las tasas TIR y TREMA

* 4.1.- Si TIR>TREMA; se elige la alternativa de mayor costo inicial.

** 4.2.- Si TIR<TREMA; se elige la alternativa de menor costo inicial.

* Se justifica un incremento en la inversión.

** El VP de los ahorros < VP de la inversión.

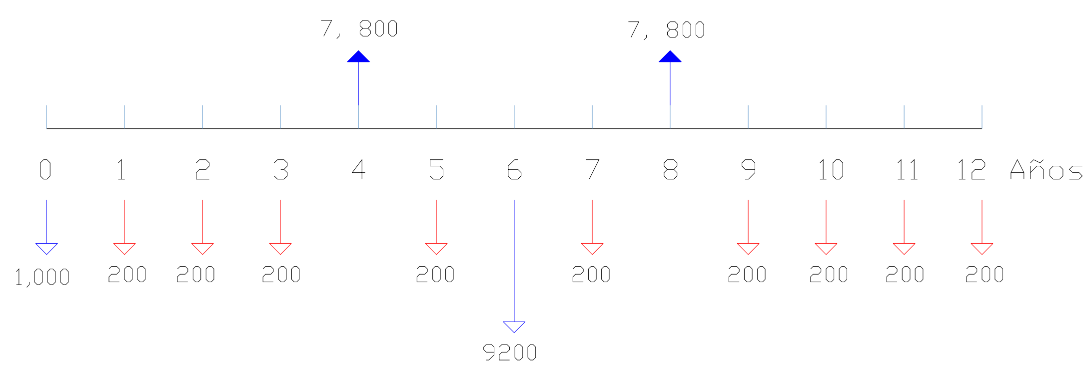
*** Problema:** El administrador de una compañía de cigarrillos quiere efectuar un análisis de tasa interna de rendimiento (TIR) utilizando los costos anuales de dos máquinas empacadoras, sin embargo el administrador no sabe que tasa de rendimiento mínima atractiva (TREMA) utilizar, dado que algunos proyectos los evalúa al 8% y otros al 10%. Determine si esta diferencia en la TREMA cambiará la decisión sobre la compra de la máquina. Utilice la TIR sobre la inversión incremental.

Solución:

1°) Flujo de caja y flujo de caja neto.

Año	Máquina Y	Máquina X	Diferencia
n	A	B	B-A
0	-9000	-10, 000	-1000
1-3	-5300	-5, 500	-200
	-9000		
4	-5300	-5500	7800
	1000		
5	-5300	-5500	-200
		-10, 000	
6	-5300	-5500	-9200
		1000	
7	-5300	-5500	-200
	-9000		
8	-5300	-5500	7800
	1000		
9-11	-5300	-5500	-200
12	-5300	-5500	-200
	1000	1000	
	-87, 600	–84, 000	3, 600

2°) Dibujar diagrama de flujo neto:



3°) Calcular la TIR:

$0 = -1000 - 200(P/A, i_*, 3) + 7800(P/F, i_*, 4) - 200(P/F, i_*, 5) - 9200(P/F, i_*, 6) - 200(P/F, i_*, 7) + 7800(P/F, i_*, 8) - [200(P/A, i_*, 4)(P/F, i_*, 8)]$.

Aplicando: Ensayo – Error:

Para i_*=35%; 0= 90.9761

Para i_*= 40%; 0= -61.5951

Aplicando interpolación:

90.9761 ------ 35%

0 ------ i_*

-61.5951 ------ 40%

Resolviendo: i_*= 38% Anual

4°) Comparar TIR y TREMA:

4.1; Si TIR>TREMA; 38%>10%>8%, por lo tanto se recomienda la alternativa de mayor costo.

Conclusión: De acuerdo al criterio de la TIR, la mejor alternativa es adquirir la máquina X; para elaborar los cigarrillos.

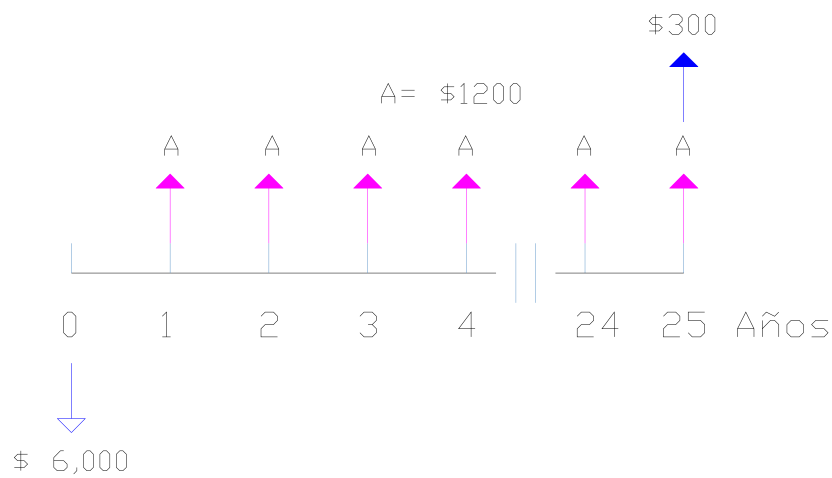
*** Problema:** Una compañía maderera esta considerando la compra de una máquina adicional, la compañía tiene la oportunidad de comprar una máquina ligeramente usada por $15, 000 o una nueva por $21, 000. debido a que la máquina nueva es más sofisticada y tiene partes automáticas, se espera que su costo de operación sea del orden de $7000 anuales, mientras que la máquina usada se espera un costo de $8, 200 al año. Se supone que las maquinas tienen una vida útil de 25 años, con un valor de salvamento del 5% de su valor inicial. Suponga una tarea del 15% anual. ¿Qué máquina deberá elegir? Utilice la TIR obre el valor anual equivalente (VA).

Solución:

1°) Flujo de caja y flujo de caja neto.

Año n	Máquina Y A	Máquina X B	Diferencia B-A
0	-15000	-21, 000	-6000
1-25	-8200	-7, 000	-1200
25	750	1, 050	300 .
	-219, 250	-194, 950	24, 300

2°) Dibujar diagrama de flujo neto:



3°) Calcular la TIR:

0= -600(A/P, i_*, 25) + 300(A/F, i_*, 25) + 1200

Aplicando Ensayo – Error:

Para i_*=19%; 0= 45.757

Para i_*= 20%; 0= -12.684

4°) Comparar TIR y TREMA:

4.1; Si TIR>TREMA; 19.79%>15%, por lo tanto se recomienda la alternativa de mayor costo inicial.

Conclusión: De acuerdo al criterio de la TIR, la mejor alternativa es adquirir la máquina nueva para la maderería.