

Apostila de Mecânica Geral II

Abel Dionizio Azeredo

Departamento Acadêmico de Física (DAFIS)

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) – Câmpus Ponta Grossa

Av Monteiro Lobato, s/n - Km 04 CEP 84016-210 Ponta Grossa – PR

Resumo

Apostila elaborada para ser utilizada na disciplina de Mecânica Geral II como apoio para as atividades realizadas em sala de aula e como referência de estudos. Este material foi compilado tendo por base uma miscelânea de outros materiais (veja as referências) e dimensionado para a carga horária da disciplina de forma a contemplar toda a sua ementa.

Conteúdo

1	As Leis de Newton do Movimento	4
2	Movimento em Uma Dimensão: Força Constante	5
2.1	Introdução	5
2.2	Trajectoria Retilínea	5
2.3	Lançamento Oblíquo e Queda Livre	6
2.4	Velocidade Relativa	7
2.5	Trajectoria Curvilínea	8
2.5.1	Componentes Normal e Tangencial	8
2.5.2	Componentes Cilíndricos	9
2.5.3	Componentes Esféricos	10
2.6	Exercícios Propostos	12
3	Forças Dependentes da Velocidade	15
3.1	Introdução	15
3.2	Força como Função da Velocidade	15
3.3	Velocidade Terminal	17
3.4	Exercícios Propostos	18
4	Movimento em Uma Dimensão e Forças Conservativas	22
4.1	Forças dependentes de posição: energia potencial	22
4.2	Forças não-conservativas	26
4.3	Força como Função do tempo	26
4.3.1	Movimento de um corpo com massa variável – movimento de um foguete	27
4.3.2	Fluidos em Escoamento Estacionário	29
4.4	Exercícios Propostos	31
5	Impulso e Colisões	36
5.1	Força aplicada dependente do tempo	36
5.2	Dinâmica de um Sistema de Muitas Partículas	36
5.3	Movimento de Dois Corpos que Interação – Massa Reduzida	37
5.4	Colisões	38
5.4.1	Colisão Frontal	38

5.4.2	Colisão Oblíqua e Espalhamento	39
5.5	Impulso em Colisões	40
5.6	Exercícios Propostos	42
6	Movimento Harmônico – Vibrações	46
6.1	Força Restaurada Linear – Movimento Harmônico	46
6.2	Considerações de Energia no Movimento Harmônico	48
6.3	Movimento Harmônico Amortecido	48
6.3.1	Caso Super-amortecido	49
6.3.2	Caso de Amortecido Crítico	49
6.3.3	Caso Sub-amortecido	49
6.4	Considerações de Energia no Movimento Harmônico Amortecido	50
6.5	Movimento Harmônico Forçado – Ressonância	50
6.6	Análogos Elétrico-Mecânico	51
6.7	Exercícios Propostos	52
7	Oscilações Acopladas	56
7.1	Osciladores Acoplados – Modos Normais	56
7.2	Osciladores Acoplados: Pêndulos Acoplados	57
7.3	Exercícios Propostos	60
8	Movimento sob a Ação de uma Força Central – Mecânica Espacial	62
8.1	Solução da Equação de Movimento para uma Força Central	63
8.1.1	Quando a Força Central é a Força da Gravitação Universal	63
8.2	Movimento Orbital	64
8.3	As Leis de Kepler	65
8.4	Exercícios Propostos	66
9	Energia Potencial em 3-D: O Potencial Gravitacional	68
9.1	Conservação da Energia em 3-D	68
9.2	Forças Centrais	68
9.3	Energia Potencial Gravitacional de uma Esfera	68
9.4	Lei de Gauss	68
9.5	Forças Conservativas em 3-D	68
9.6	Exercícios Propostos	68
10	Mecânica dos Corpos Rígidos – Movimento no Plano	68
10.1	Centro de Massa de um Corpo Rígido	69
10.2	Equilíbrio Estático de um Corpo Rígido	69
10.3	Rotação de um Corpo Rígido em Torno de um Eixo Fixo – Momento de Inércia	69
10.3.1	Cálculo do Momento de Inércia	69
10.4	O Pêndulo Físico	69
10.5	Momentum Angular	69
10.6	Movimento Laminar de um Corpo Rígido	69
10.6.1	Corpo Rolando em um Plano Inclinado	69
10.7	Movimento de um Corpo Rígido Sob a Ação de uma Força Impulsiva	69
10.8	Colisão de Corpos Rígidos	69
10.9	Exercícios Propostos	69
11	Momento Angular e Colisões de Corpos Rígidos	69
11.1	Momentum Linear	69
11.2	Momentum Angular	69
11.3	Forças Conservativas e Campos de Forças	69
11.4	O Oscilador Harmônico em duas e três dimensões	69
11.5	Movimentos de Partículas Carregadas em Campos Elétricos e Magnéticos	69

11.6 Movimento Vinculado de uma Partícula	69
11.7 Movimento de um Corpo Rígido Sob a Ação de uma Força Impulsiva	69
11.8 Colisão de Corpos Rígidos	69
11.9 Exercícios Propostos	69
12 A Formulação Lagrangiana da Mecânica	70
12.1 A Equação de Euler-Lagrange	70
12.2 O princípio da ação estacionária	70
12.3 Princípio da mínima ação	70
12.4 Uma breve história do princípio de mínima ação	70
12.5 Exercícios Propostos	70
13 A Formulação Hamiltoniana da Mecânica	70
13.1 Simetrias e Leis de Conservação	70
13.1.1 Coordenadas Cíclicas	71
13.2 Teorema de Noether	71
13.3 A Conservação da Energia	73
13.4 As Equações de Hamilton	73
13.5 Espaço de Fase	74
13.6 Teorema de Liouville	75
13.7 Vínculos e Forças de Vínculo	75
13.8 Exercícios Propostos	77
A Formulários para as Provas da Disciplina	80
A.1 Segunda Lei de Newton em Uma Dimensão (Primeira Prova)	81
A.2 Formulação da Mecânica Newtoniana em Três Dimensões e Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana (Segunda Prova)	86

Mecânica Geral II

Parte I

Segunda Lei de Newton: Movimento Unidimensional

1 As Leis de Newton do Movimento

I - Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme se nenhuma força o obrigar a mudar tal estado.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (1)$$

A primeira lei descreve uma propriedade comum a toda matéria: a inércia.

Esta lei nos leva à definição de um tipo particular de sistema de referência chamado sistema de referência Newtoniano ou inercial. Tal sistema é aquele no qual a primeira lei de Newton é válida. Sistemas de referência acelerados ou em rotação não são inerciais.

Na prática, em casos onde a precisão desejada não seja muito alta, um sistema fixo à Terra é aproximadamente inercial.

II - A mudança do estado de movimento de um corpo é diretamente proporcional à força aplicada e ocorre na direção da força.

$$\sum \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2)$$

É mais difícil colocar em movimento um corpo que possua uma inércia maior. A medida quantitativa de inércia é chamada *massa*.

A *massa* é a constante de proporcionalidade entre a força aplicada (causa do movimento) e a aceleração adquirida pelo corpo (efeito observado), na segunda lei de Newton.

A questão é: como medir o conteúdo de inércia (massa) de um corpo, mesmo que em relação a um outro corpo, tomado como referência (padrão)?

Podemos imaginar um experimento puramente mecânico, realizado em referenciais inerciais e aonde apenas a interação entre dois corpos A e B estaria presente. Se dois corpos interagissem, por exemplo através de uma mola, observaríamos, por meio de medidas cuidadosas, que as acelerações dos dois corpos teriam sentidos opostos e que a razão entre seus módulos seria constante.

Podemos expressar o resultado deste experimento por

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\frac{d\vec{v}_B}{dt} \mu_{BA} \quad (3)$$

A constante $\mu_{BA} = 1/\mu_{AB}$ é, de fato, a medida da inércia de B em relação à A . Podemos expressar μ_{BA} como a razão

$$\mu_{BA} = \frac{m_B}{m_A} \quad (4)$$

e usar a inércia de um corpo padrão como unidade. A razão m_B/m_A não deve depender do corpo escolhido como padrão. Isto é verdade porque, considerando um terceiro corpo C , podemos escrever $\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}} = \mu_{BA}$. Chamamos a quantidade m de massa.

Newton ainda preocupou-se em distinguir a massa inercial (definida como descrito acima, baseada nas propriedades de inércia) da massa gravitacional (definida por meio da Lei da Gravitação Universal). Todas as experiências realizadas até hoje indicam que a massa inercial é idêntica à massa gravitacional. Por isso, não precisaremos distinguir os dois tipos de massa¹.

O fato fundamental expresso nas equações (3) e (4) e interpretado de acordo com a definição de força (segunda Lei de Newton) nos leva à terceira Lei de Newton.

III - A cada ação corresponde sempre uma reação igual e em sentido oposto.

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba} \quad (5)$$

Esta Lei, embora seja uma "lei de ação instantânea à distância", não conhece exceções.

O conceito de força é a essência da mecânica Newtoniana e, dadas as condições iniciais, determina com a exatidão da Física Clássica o comportamento futuro do sistema mecânico em questão.

Complementam as três Leis de Newton, a Lei da Gravitação Universal

$$\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2} \hat{u}_r \quad (6)$$

onde G é a Constante da Gravitação Universal e vale

$$G = 6,674287 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}.$$

¹ No Sistema Internacional de Unidades a unidade de força, definida pela Equação (2) é chamada Newton. Então a força de 1 Newton ocasiona uma aceleração de 1 m/s^2 em um objeto de 1 kg de massa. No Sistema Inglês a unidade de força é a libra. Para relacionar as duas unidades de medida usamos a relação dada pela força peso ($W = mg$), onde g é a aceleração da gravidade sendo $9,81 \text{ m/s}^2$ no Sistema Internacional de Unidades e $32,2 \text{ pés/s}^2$ no Sistema Inglês.

Isaac Newton nasceu em 4 de janeiro de 1643 em Woolsthorpe Manor, embora seu nascimento tivesse sido registrado como no dia de Natal, 25 de dezembro de 1642, pois àquela época a Grã-Bretanha usava o calendário juliano.



Foi um cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo.

Sua obra, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, é considerada uma das mais influentes na história da ciência. Publicada em 1687, esta obra descreve a lei da gravitação universal e as três leis de Newton, que fundamentaram a mecânica clássica.

Além de seu trabalho em cálculo infinitesimal, onde rivalizou com Gottfried Wilhelm Leibniz, como matemático Newton contribuiu para o estudo das séries de potências, generalizou o teorema binomial para expoentes não inteiros, e desenvolveu o método de Newton para a aproximação das raízes de uma função, além de muitas outras contribuições importantes.

Newton realizou descobertas fundamentais em óptica, mas o ponto culminante da revolução científica por ele promovida foi a descoberta da lei da gravitação universal.

Newton também dedicou muito de seu tempo ao estudo da alquimia e da cronologia bíblica, mas a maior parte de seu trabalho nessas áreas permaneceu não publicada até muito tempo depois de sua morte.

Ele faleceu na noite de 20 de março de 1727 (calendário juliano). Foi enterrado junto a outros célebres homens da Inglaterra na Abadia de Westminster.

2 Movimento em Uma Dimensão: Força Constante

2.1 Introdução

A equação geral do movimento poderá ser escrita, em uma dimensão, como

$$F(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}$$

A situação mais simples é aquela em que a força é constante. Neste caso

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = \text{constante} = a_c \quad (7)$$

onde a solução é obtida por integração direta em relação ao tempo.

2.2 Trajetória Retilínea

Integrando (7) em relação ao tempo, obtemos:

$$v = v_0 + a_c t \quad (8)$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2 \quad (9)$$

onde x_0 e v_0 são constantes de movimento e a_c é a aceleração constante. Quando não for o caso de um

movimento com aceleração constante, deve-se integrar as próprias definições:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} .$$

Eliminando-se o tempo, nas duas definições acima, obtemos

$$a \, dx = v \, dv$$

que, integrada, considerando-se a aceleração constante, nos fornece:

$$v^2 = v_0^2 + 2 a_c (x - x_0) \quad (10)$$

As equações (8), (9) e (10) são conhecidas como as equações do M.R.U.V.

Quando a velocidade é constante

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{constante} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{dv_c}{dt} = 0 ,$$

que, integrando-se em relação ao tempo, nos fornecem:

$$v = v_0 \quad (11)$$

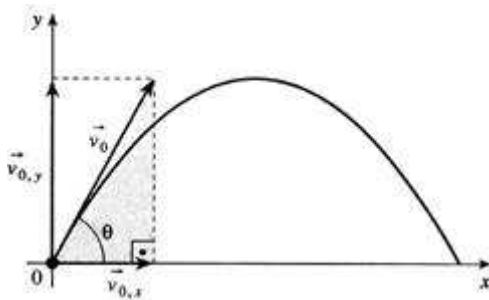
$$x = x_0 + vt \quad (12)$$

onde as equações (11) e (12) podem ser obtidas das equações (8), (9) e (10), fazendo-se $a = a_c = 0$.

As equações (11) e (12) são conhecidas como as equações do M.R.U.

2.3 Lançamento Oblíquo e Queda Livre

As equações (8) à (12) encontram aplicação imediata na solução de problemas de lançamento de projéteis e queda livre. Neste caso temos que decompor os movimentos em horizontal (x , com velocidade constante no caso ideal – sem resistência do ar) e vertical (y , com a aceleração constante e igual a aceleração da gravidade $-9,81 \text{ m/s}^2$ no S.I. ou $32,2 \text{ pés/s}^2$ no Sistema Inglês de Unidades), onde em x o movimento é do tipo M.R.U. e em y do tipo M.R.U.V. e tratá-los como movimentos independentes.



Assim, o movimento na horizontal é regido por:

Eq. (11): $v_x = v_{0,x} = v_0 \cos \theta$

Eq. (12): $x = x_0 + v_{0,x} t \rightarrow x = x_0 + v_0 \cos \theta t$

e, na vertical, o movimento é regido por:

$$v_{0,y} = v_0 \sin \theta \quad \text{e} \quad a_c = -g = -9,81 \text{ m/s}^2$$

Eq. (8): $v_y = v_{0,y} - g t \rightarrow v_y = v_0 \sin \theta - g t$

Eq. (9): $y = y_0 + v_{0,y} t - \frac{1}{2} g t^2$

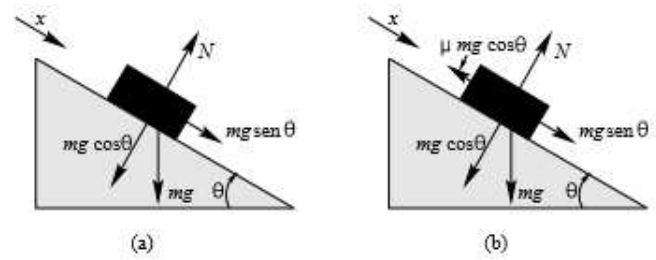
$$\rightarrow y = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

Eq. (10): $v_y^2 = v_{0,y}^2 - 2g(y - y_0)$

$$\rightarrow v_y^2 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2g(y - y_0)$$

Combinando estas 5 equações, podemos resolver qualquer problema de lançamento de projéteis e/ou queda livre.

Exemplo 2.1. Considere uma partícula que escorrega para baixo num plano inclinado de um ângulo θ em relação à horizontal, como ilustra a figura abaixo. Oriente a direção x numa direção paralela ao plano inclinado e com sentido positivo para baixo, como indicado, e obtenha uma expressão para a aceleração da partícula.



$$\sum F_x = m a_x$$

$$a = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{W_x - f_k}{m} = \frac{mg \sin \theta - \mu N}{m}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg \cos \theta$$

Assim:

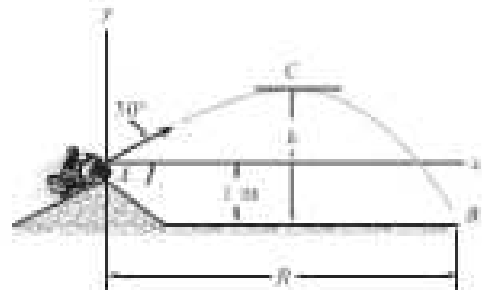
$$a = g (\sin \theta - \mu \cos \theta)$$

A velocidade da partícula crescerá se a expressão entre parênteses for positiva, isto é, se $\theta > \arctg \mu$. Se $\theta = \arctg \mu$, então $a = 0$, e a partícula deslizará para baixo com velocidade constante. Se $\theta < \arctg \mu$, então $a < 0$, e a partícula irá parar.

No caso de movimento para cima:

$$a = g (\sin \theta + \mu \cos \theta)$$

Exemplo 2.2. As pistas de corrida de motocicleta são projetadas de maneira que os pilotos saltem da rampa de 30° , a uma altura de 1 m. Durante uma corrida, observou-se que o piloto permaneceu no ar por 1,5 s. Determine a velocidade na qual ele abandonou a rampa, a distância horizontal que ele se deslocou antes de atingir o solo, a altura máxima que ele alcança e a velocidade que ele terá ao voltar a tocar o solo. Despreze o tamanho da motocicleta, do piloto e a resistência do ar.



Velocidade em A:

$$y_B = y_A + (v_A)_y t_{AB} + \frac{1}{2} a t_{AB}^2$$

$$(-1\text{m}) = 0 + v_A \sin 30^\circ (1,5\text{s}) + \frac{1}{2} (-9,81 \text{ m/s}^2) (1,5\text{s})^2$$

$$v_A = 13,38 \text{ m/s} \cong 13,4 \text{ m/s}$$

Alcance Horizontal:

$$\begin{aligned} R &= x_B - x_A = (v_A)_x t_{AB} = v_A \cos 30^\circ t_{AB} \\ &= 13,38 \cos 30^\circ (1,5s) = 17,4m \end{aligned}$$

Altura Máxima Atingida:

$$\begin{aligned} (v_C)_y^2 &= (v_A)_y^2 + 2 a_c [y_C - y_A] \\ 0^2 &= (13,38 \sin 30^\circ \text{m/s})^2 \\ &\quad + 2 (-9,81 \text{m/s}^2) [(h_{\text{máx}} - 1 \text{m}) - 0] \\ h_{\text{máx}} &= 3,28 \text{m} \quad (\text{medido a partir do chão}) \end{aligned}$$

Componentes da Velocidade em B:

$$\begin{aligned} (v_B)_x &= (v_A)_x = v_A \cos 30^\circ \\ &= 13,38 \cos 30^\circ = 11,6 \text{m/s} \\ (v_B)_y &= \pm \sqrt{(v_A)_y^2 + 2 a_c [y_B - y_A]} \\ &= -8,02 \text{m/s} \\ v_B &= \sqrt{(v_B)_x^2 + (v_B)_y^2} = 14,1 \text{m/s} \end{aligned}$$

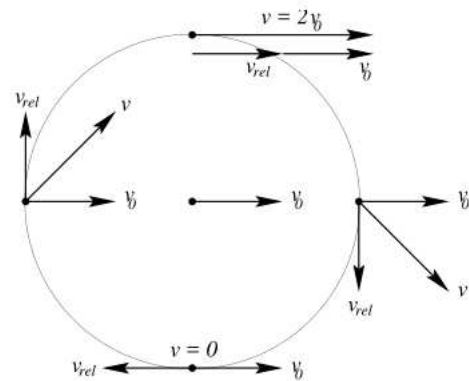
Note que o módulo da velocidade relativa de duas partículas não é o mesmo que a variação temporal da distância entre elas².

Exemplo 2.3. Uma partícula move-se ao longo do eixo x com velocidade v , sendo seu vetor posição dado por $\vec{r}_1 = \hat{i}(a + vt)$ onde a é uma constante. Uma segunda partícula move-se ao longo do eixo y com mesma velocidade, e seu vetor posição é $\vec{r}_2 = \hat{j}(b + vt)$. Obtenha a velocidade da segunda partícula em relação à primeira e a variação temporal da distância entre elas.

$$\begin{aligned} \vec{v}_{12} &= \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = v(\hat{j} - \hat{i}) \quad \therefore \quad v_{12} = v\sqrt{2} \\ \frac{d}{dt}|\vec{r}_{12}| &= \frac{d}{dt}|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \frac{d}{dt}|(b\hat{j} - a\hat{i}) + v(\hat{j} - \hat{i})t| \end{aligned}$$

Ou seja, neste caso, a velocidade relativa da segunda partícula em relação à primeira e a variação temporal da distância entre elas são iguais.

Exemplo 2.4. Um aro de raio b rola no chão com uma velocidade $\vec{v}_0$ para a frente. Encontre a velocidade em relação ao chão de um ponto P qualquer da periferia do aro.



O vetor posição de um ponto P da periferia de um aro de raio b em movimento circular no sentido horário em torno da origem, o centro da roda, é

$$\vec{r}_{0P} = b \cos \theta \hat{i} - b \sin \theta \hat{j},$$

onde $\theta = \omega t$.

A derivada em relação ao tempo então nos dá a velocidade de P relativamente ao centro do aro

$$\vec{r}_{\text{rel}} = -b\omega \sin \theta \hat{i} - b\omega \cos \theta \hat{j}.$$

Mas a velocidade angular é $\omega = v_0/b$ e, desde que a velocidade do centro do aro em relação ao solo é $v_0\hat{i}$, então a velocidade de P em relação ao solo é

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_0\hat{i} - b\omega \sin \theta \hat{i} - b\omega \cos \theta \hat{j} \\ &= v_0(1 - \sin \theta)\hat{i} - v_0 \cos \theta \hat{j} \end{aligned}$$

$$\vec{v}|_{\theta=90^\circ} = 0$$

2.4 Velocidade Relativa

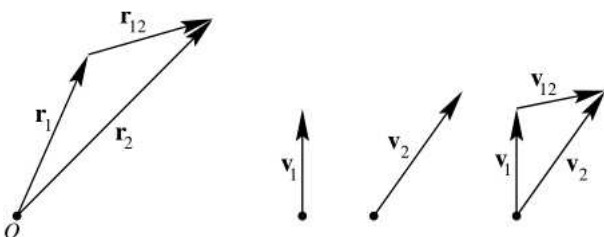
Consideremos duas partículas cujos vetores posições são $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, respectivamente, como mostrado na figura abaixo. O deslocamento da segunda partícula com relação à primeira é a diferença $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ que chamaremos $\vec{r}_{12}$. A velocidade da segunda partícula relativamente à primeira é, portanto

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

que chamamos de velocidade relativa. Transpondo $\vec{v}_1$, temos

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{12}$$

para a velocidade da partícula 2 em relação a O em termos da velocidade da partícula 1 e da velocidade relativa.



²A variação temporal da distância entre duas partículas é $\frac{d}{dt}|\vec{r}_{12}| = \frac{d}{dt}|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ que é diferente, em geral, de $|\vec{v}_{12}|$.

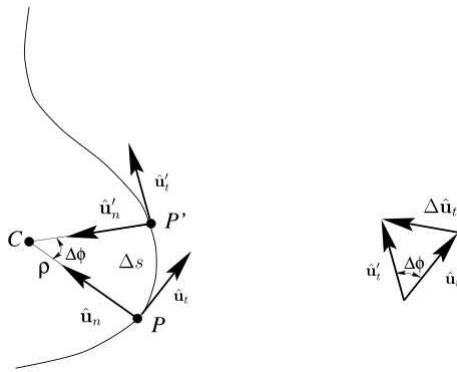
2.5 Trajetória Curvilínea

Quando a trajetória da partícula não é retilínea, talvez o sistema de coordenadas cartesiano ortogonal não seja o mais indicado para descrever o movimento da partícula.

2.5.1 Componentes Normal e Tangencial

O vetor velocidade de uma partícula em movimento pode ser escrito como o produto do módulo dessa velocidade v por um vetor unitário que dá a direção do movimento da partícula. Logo, para um movimento curvilíneo, a direção da velocidade é tangente à trajetória, assim

$$\vec{v} = v \hat{u}_t \quad (13)$$



A proporção que a partícula se move o módulo da velocidade pode mudar, assim como a direção de $\hat{u}_t$. Usando a regra para diferenciação do produto de um escalar por um vetor para obter a aceleração, o resultado é

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \hat{u}_t)}{dt} = \dot{v} \hat{u}_t + v \frac{d\hat{u}_t}{dt}$$

O vetor unitário $\hat{u}_t$, sendo de módulo constante, tem uma derivada $d\hat{u}_t/dt$ que necessariamente deve expressar a mudança na direção de $\hat{u}_t$ com o tempo. A partícula está inicialmente em um ponto P qualquer de sua trajetória. Em um intervalo de tempo Δt a partícula move-se para outro ponto P' distante Δs medido ao longo da trajetória. Vamos chamar os vetores unitários tangentes em P e P' de $\hat{u}_t$ e $\hat{u}'_t$, respectivamente. As direções destes dois vetores diferem de um certo ângulo $\Delta\phi$ como mostrado na figura acima.

É fácil ver que para pequenos valores de $\Delta\phi$, a diferença $\Delta\hat{u}_t$ se aproxima de $\Delta\phi$ em grandeza. Também, a direção de $\Delta\hat{u}_t$ torna-se perpendicular à direção $\hat{u}_t$ no limite quando $\Delta\phi$ e Δs se aproximam de zero. Segue-se que a derivada $d\hat{u}_t/d\phi$ tem módulo unitário e é perpendicular a $\hat{u}_t$. Assim $d\hat{u}_t/d\phi = \hat{u}_n$.

Para encontrar $d\hat{u}_t/dt$, usamos a regra da cadeia

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\hat{u}_t}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \hat{u}_n \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \hat{u}_n, \quad \text{onde } \rho = ds/d\phi \text{ é o raio de curvatura da trajetória da partícula no ponto } P. \text{ Se conhecermos a equação da trajetória } y = y(x), \text{ então}$$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|} \Bigg|_{y=x} \quad (14)$$

é o raio de curvatura da curva $y = y(x)$ no ponto $y = x$.

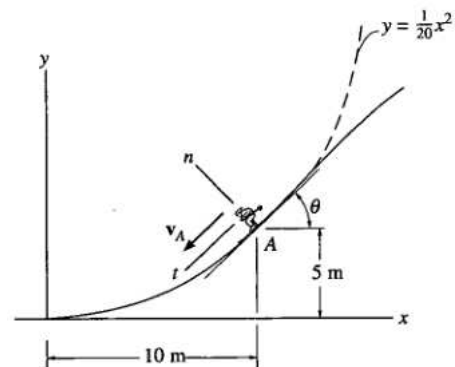
Então a aceleração de uma partícula em movimento numa trajetória curvilínea tem uma aceleração

$$\vec{a} = \dot{v} \hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_n \quad (15)$$

ou seja, a partícula tem uma componente de aceleração que mede a taxa de variação da velocidade, na direção da velocidade (direção tangencial e mesmo sentido da velocidade) e outra componente centrípeta (voltada para o lado côncavo da trajetória curva, direção normal - para o centro da melhor circunferência que poderia ser traçada aproveitando-se a maior porção possível da trajetória como seu arco).

No caso de um movimento tridimensional devemos especificar uma terceira direção (direção binormal) $\hat{u}_b$, perpendicular ao plano formado pelas direções normal ($\hat{u}_n$) e tangencial ($\hat{u}_t$), cujo sentido é estabelecido como $\hat{u}_b = \hat{u}_t \times \hat{u}_n$.

Exemplo 2.5. Quando o esquador mostrado na figura abaixo alcança o ponto A de sua trajetória parabólica $y = \frac{1}{20}x^2$, ele tem uma velocidade de módulo 6 m/s que está aumentando à taxa de 2 m/s². Determine a direção de sua velocidade e a aceleração $\vec{a}$ (módulo, direção e sentido) no instante considerado. Despreze o tamanho do esquador.



A velocidade é sempre tangente à trajetória, assim

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=10\text{m}} = \left. \frac{1}{10}x \right|_{x=10\text{m}} = 1$$

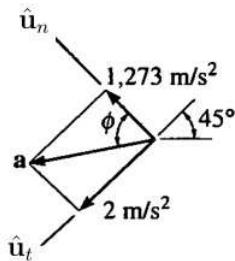
e, como a derivada é a inclinação da reta tangente ao ponto (interpretação geométrica da derivada), $\theta = \arctg(1) = 45^\circ$ é a direção da velocidade no ponto A. Para dar a resposta de acordo com a convenção usualmente adotada (onde o ângulo é medido em relação ao eixo x , no sentido anti-horários), devemos somar 180° . Assim $\theta = 225^\circ$ é a direção da velocidade no ponto A.

O raio de curvatura da trajetória no ponto A é [eq. (14)]

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{1}{10}x \right)^2 \right]^{3/2}}{|1/10|} \bigg|_{x=10\text{m}} = 28,28\text{m}$$

Assim, a aceleração do esquiador é [eq. (15)]

$$\vec{a} = \{2\text{m/s}^2\} \hat{u}_t + \frac{(6\text{m/s}^2)^2}{28,28\text{m}} \hat{u}_n = \{2\hat{u}_t + 1,273\hat{u}_n\}\text{m/s}^2$$



Como mostrado na figura:

$$a = \sqrt{(2)^2 + (1,273)^2} = 2,37\text{m/s}^2$$

$$\theta = \phi + 90^\circ + 45^\circ = \arctg \frac{2}{1,273} + 135^\circ = 192,5^\circ$$

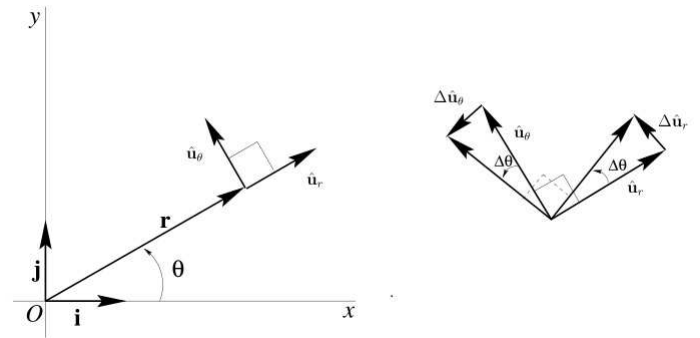
2.5.2 Componentes Cilíndricos

Muitas vezes é conveniente usar coordenadas polares (r, θ) para expressar a posição de uma partícula que se move em um plano. O sistema polar é a base do sistema de coordenadas cilíndrico (em 3 dimensões). Vetorialmente, a posição da partícula pode ser escrita como o produto da distância radial r por um vetor unitário radial $\hat{u}_r$, ou seja

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \quad (16)$$

Quando a partícula se move, ambos r e $\hat{u}_r$ variam, pois ambos são funções do tempo. Dessa maneira,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt}$$



Para calcular $\frac{d\hat{u}_r}{dt}$, usamos o diagrama vetorial da figura acima e, similarmente ao procedimento adotado na subseção anterior, verificamos que quando a direção de $\vec{r}$ varia de uma quantidade $\Delta\theta$, a mudança $\Delta\hat{u}_r$ do vetor unitário $\hat{u}_r$ terá módulo $\Delta\theta$ e direção perpendicular à $\hat{u}_r$, isto é, $\hat{u}_\theta$. Então, $\Delta\hat{u}_r = \Delta\theta\hat{u}_\theta$, onde, $\hat{u}_\theta$ é a direção transversal (perpendicular à direção radial $\hat{u}_r$). Assim, dividindo-se por Δt e tomando o limite para $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta \quad (17)$$

Da mesma forma, para obter as componentes polares da aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\frac{d\hat{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

Já sabemos que $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{u}_\theta$. Para calcular $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$, usamos o diagrama vetorial da figura acima e, como anteriormente, observamos que quando a direção $\hat{u}_\theta$ varia de uma quantidade $\Delta\theta$, a mudança $\Delta\hat{u}_\theta$ do vetor unitário $\hat{u}_\theta$ terá módulo $\Delta\theta$ e direção perpendicular à $\hat{u}_\theta$, isto é, a direção radial mas com sentido negativo, ou seja, $-\hat{u}_r$. Então, $\Delta\hat{u}_\theta = -\Delta\theta\hat{u}_r$. Assim, dividindo-se por Δt e tomando o limite para $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u}_\theta \quad (18)$$

Em 3-dimensões precisamos utilizar o sistema de coordenadas cilíndrico, onde uma altura (o azimute z) é acrescentado. Então, de (16), (17) e (18), temos que

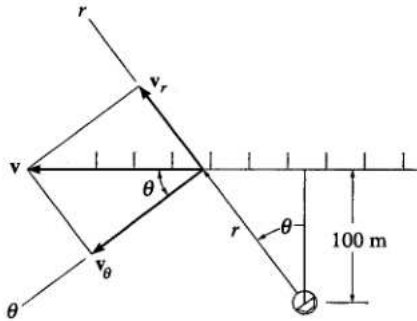
$$\vec{r} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z \quad (19)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{z}\hat{u}_z \quad (20)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u}_\theta + \ddot{z}\hat{u}_z \quad (21)$$

já que $\hat{u}_z$ não muda de direção a medida que a partícula se desloca.

Exemplo 2.6. Um holofote joga luz sobre um muro que está a uma distância de 100 m, enquanto gira a uma taxa constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s. Determine os módulos da velocidade e da aceleração com que a mancha de luz desloca-se pela face do muro quando $\theta = 45^\circ$.



Da figura $r = 100/\cos\theta = 100\sec\theta$. Assim:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 100 (\sec\theta \operatorname{tg}\theta) \dot{\theta} \\ \ddot{r} &= 100 \sec\theta \operatorname{tg}^2\theta (\dot{\theta})^2 + 100 \sec^3\theta (\ddot{\theta})^2 \\ &\quad + 100 (\sec\theta \operatorname{tg}\theta) \ddot{\theta}\end{aligned}$$

Com $\theta = 45^\circ$, $\dot{\theta} = 4$ rad/s e $\ddot{\theta} = 0$, temos $r = 141,4$ m, $\dot{r} = 565,7$ m/s e $\ddot{r} = 6.788,2$ m/s². Assim

$$\begin{aligned}\vec{v} &= 565,7(\hat{u}_r + \hat{u}_\theta) \text{ m/s} \Rightarrow v = 800 \text{ m/s} \\ \vec{a} &= 4.525,5(\hat{u}_r + \hat{u}_\theta) \text{ m/s}^2 \Rightarrow a = 6.400 \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Da figura abaixo, vemos que a tríade de vetores unitários $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_z$, que formam a base do sistema cilíndrico, pode ser obtida a partir do sistema cartesiano ortogonal, pela aplicação de uma rotação por um ângulo θ em torno do eixo z , assim

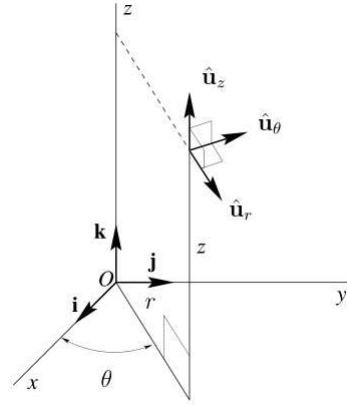
$$\begin{pmatrix} \hat{u}_r \\ \hat{u}_\theta \\ \hat{u}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(z)} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

onde $R(z)$ é a matriz de rotação por um ângulo θ em torno do eixo z ³.

³A mudança de sistema de coordenadas de um vetor $\vec{A}$ que seria representado num sistema de coordenadas que tem por base a tríade $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ como $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ relativamente a um novo sistema de coordenadas que tem por base a tríade $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ e que, neste novo sistema de coordenadas que tem orientação diferente daquela de $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ seria representado por $\vec{A} = A_{x'}\hat{i}' + A_{y'}\hat{j}' + A_{z'}\hat{k}'$ pode ser obtida notando-se que $A_{x'}$ é a projeção de $\vec{A}$ no vetor unitário $\hat{i}'$, isto é $A_{x'} = \vec{A} \cdot \hat{i}'$, e assim com as demais componentes. Na forma matricial

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i} \cdot \hat{i}' & \hat{j} \cdot \hat{i}' & \hat{k} \cdot \hat{i}' \\ \hat{i} \cdot \hat{j}' & \hat{j} \cdot \hat{j}' & \hat{k} \cdot \hat{j}' \\ \hat{i} \cdot \hat{k}' & \hat{j} \cdot \hat{k}' & \hat{k} \cdot \hat{k}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

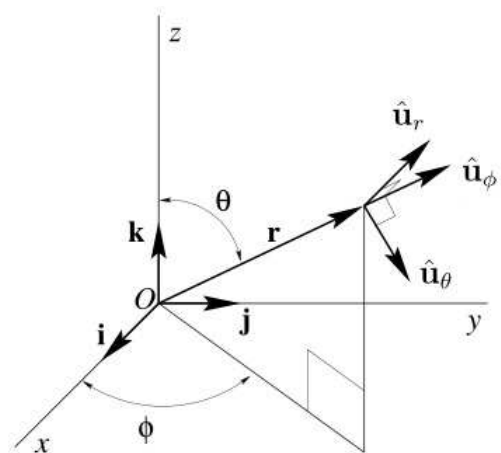
onde a matriz 3×3 é a matriz de transformação.



2.5.3 Componentes Esféricas

No sistema referencial esférico, $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta$ e $\hat{u}_\phi$ são as direções equivalentes a altitude, latitude e longitude do sistema geodésico, respectivamente, com a diferença de que no sistema esférico, a altitude é medida desde o centro da esfera, a latitude do polo Norte em direção ao polo Sul ($0 \leq \phi < 180^\circ$) e a longitude do plano de referência no sentido Leste ($0 \leq \theta < 360^\circ$).

Da figura abaixo, vemos que a tríade de vetores unitários $\hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{u}_\phi$, que formam a base do sistema esférico, pode ser obtida a partir do sistema cartesiano ortogonal, pela aplicação de duas rotações, uma por um ângulo ϕ em torno do eixo z , seguida de outra rotação por um ângulo θ em torno do eixo y , assim



$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \hat{\mathbf{u}}_\phi \\ \hat{\mathbf{u}}_r \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R(z)} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R(y)} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}$$

Ou seja, a relação entre as tríades é⁴

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_r &= \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{i}} + \sin\theta \sin\phi \hat{\mathbf{j}} + \cos\theta \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{u}}_\theta &= \cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{i}} + \cos\theta \sin\phi \hat{\mathbf{j}} - \sin\theta \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{u}}_\phi &= -\sin\phi \hat{\mathbf{i}} + \cos\phi \hat{\mathbf{j}} \end{aligned} \quad (22)$$

Diferenciando a primeira das equações (22) em relação ao tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} &= (\dot{\theta} \cos\theta \cos\phi - \dot{\phi} \sin\theta \sin\phi) \hat{\mathbf{i}} + (\dot{\theta} \cos\theta \sin\phi + \dot{\phi} \sin\theta \cos\phi) \hat{\mathbf{j}} - \dot{\theta} \sin\theta \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

Comparando com as expressões para $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ e $\hat{\mathbf{u}}_\phi$, das expressões (22), obtemos

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} = \dot{\phi} \sin\theta \hat{\mathbf{u}}_\phi + \dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta$$

Procedendo de forma semelhante,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_r + \dot{\phi} \cos\theta \hat{\mathbf{u}}_\phi \\ \frac{d\hat{\mathbf{u}}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi} \sin\theta \hat{\mathbf{u}}_r - \dot{\theta} \cos\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned}$$

Agora temos as expressões necessárias para encontrar a velocidade e a aceleração em coordenadas esféricas. Assim

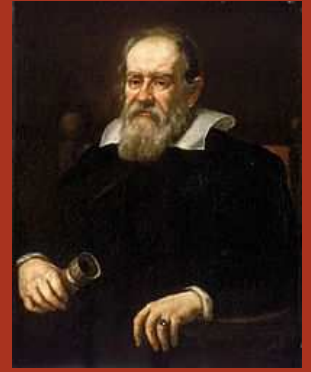
$$\vec{\mathbf{r}} = r \hat{\mathbf{u}}_r \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}} &= \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{r} \hat{\mathbf{u}}_r + r \frac{d\hat{\mathbf{u}}_r}{dt} \\ &= \dot{r} \hat{\mathbf{u}}_r + r \dot{\phi} \sin\theta \hat{\mathbf{u}}_\phi + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{a}} &= \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \left(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \sin^2\theta - r \dot{\theta}^2 \right) \hat{\mathbf{u}}_r \\ &+ \left(r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta \right) \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ &+ \left(r \ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin\theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos\theta \right) \hat{\mathbf{u}}_\phi \end{aligned} \quad (25)$$

⁴Note que quando $\theta = \phi = 0$, $\hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{u}}_\theta = \hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\mathbf{u}}_\phi = \hat{\mathbf{j}}$.

Galileu Galilei, nasceu em Pisa (hoje Itália), aos 15 de fevereiro de 1564 e faleceu em Florença, aos 8 de janeiro de 1642. Foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano.



Galileu Galilei foi personalidade fundamental na revolução científica. Desenvolveu os primeiros estudos sistemáticos do movimento uniformemente acelerado e do movimento do pêndulo. Descobriu a lei da decomposição do movimento dos corpos e enunciou o princípio da inércia e o conceito de referencial inercial, ideias precursoras da mecânica newtoniana.

Em *Discursos sobre as duas novas ciências* (1638) Galileu descreve um experimento com plano inclinado em favor de suas teses sobre a queda dos corpos, o experimento é descrito por uma esfera de bronze que desce sobre uma canaleta em uma viga de madeira inclinada, enquanto uma quantidade de água cai de um recipiente, para marcar o tempo.

Foi ele quem introduziu o *Método Científico*, fundamental para a revolução científica que se seguiu a partir de então, desde a Renascença.

Com a descoberta da decomposição dos movimentos, pode rebater a idéia aristotélica de que a Terra permanecia imóvel no centro do Universo.

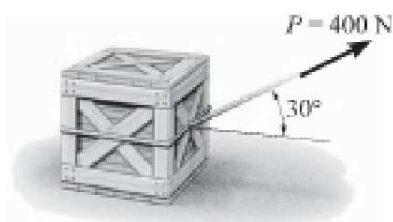
Em 1609, em uma de suas frequentes viagens a Veneza com seu amigo Paulo Sarpi ouviu rumores sobre a “trompa holandesa”, um telescópio que foi oferecido por alto preço ao duque de Veneza. Ao saber que o instrumento era composto de duas lentes em um tubo, Galileu logo construiu um capaz de aumentar três vezes o tamanho aparente de um objeto, depois outro de dez vezes e, por fim, um capaz de aumentar 30 vezes.

Ao fazer uso científico do telescópio, fazendo observações astronômicas com ele, descobriu os satélites de Júpiter, o que levou-o a defender o sistema heliocêntrico de Copérnico e isto veio a lhe trazer problemas com a Inquisição.

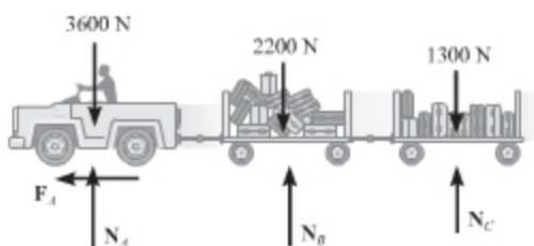
É em homenagem ao *princípio da decomposição dos movimentos* de Galileu que intitulamos esta seção de “Movimento em Uma Dimensão”, embora apresentemos sistemas de coordenadas tridimensionais, pois o movimento dos corpos pode ser decomposto e tratado independentemente em cada uma das suas dimensões.

2.6 Exercícios Propostos

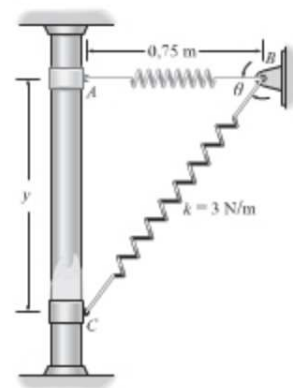
2.1. A caixa de 50 kg mostrada na figura repousa sobre uma superfície horizontal na qual o coeficiente de atrito cinético é $\mu_k = 0,3$. Se a caixa está sujeita a uma força de tração de 400N, como mostrado, determine a velocidade da caixa após 3 s do início do movimento (partindo do repouso)⁵.



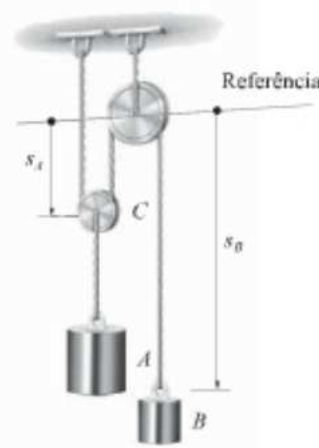
2.2. O trator de bagagem *A* mostrado na figura tem um peso de 3600 N e reboca a carreta *B* de 2200 N e a carreta *C* de 1300 N. Por um curto período de tempo, a força de atrito motora desenvolvida nas rodas do trator é $F_A = (160t)$ N, onde t é dado em segundos. Se o trator parte do repouso, determine sua velocidade após 2 segundos. Qual é a força horizontal atuando sobre o engate entre o trator e a carreta *B*, neste instante? Despreze a dimensão do trator e das carretas⁶.



2.3. Um anel liso *C* de 2 kg, mostrado na figura, está ligado a uma mola tendo uma rigidez $k = 3 \text{ N/m}$ e um comprimento não deformado de 0,75 m. Se o anel é solto do repouso em *A*, determine sua aceleração e a força normal da barra sobre o anel no instante em que $y = 1 \text{ m}$ ⁷.



2.4. O bloco *A* de 100 kg mostrado na figura é solto do repouso. Se as massas das polias e da corda são desprezadas, determine a velocidade do bloco *B* de 20 kg em 2 s. após o início do movimento⁸.



2.5. Encontre a velocidade v e a posição x em função do tempo t de uma partícula de massa m que parte do repouso em $t = 0$ sujeita às seguintes forças

- $F = F_0$
- $F = F_0 + bt$
- $F = F_0 \cos \omega t$
- $F = kt^2$

2.6. Encontre a velocidade v em função da posição x de uma partícula de massa m que parte do repouso em $x = 0$ sujeita às seguintes forças⁹

- $F = F_0 + kx$
- $F = F_0 e^{-kx}$
- $F = F_0 + kv$

⁵ $v = 15,6 \text{ m/s}$.

⁶ $v = 0,442 \text{ m/s}$ e $T = 157,8 \text{ N}$.

⁷ $\vec{a}_c = -9,21\hat{j} \text{ m/s}^2$ e $\vec{N}_c = -0,9\hat{i} \text{ N}$.

⁸ $v = 13,1 \text{ m/s}$ (para cima).

⁹Resposta das alternativas selecionadas: a) $v = \sqrt{(2F_0x + kx^2)/m}$; c) $x = m \left[kv - F_0 \ln \left(\frac{F_0 - kv}{F_0} \right) \right] / k^2$.

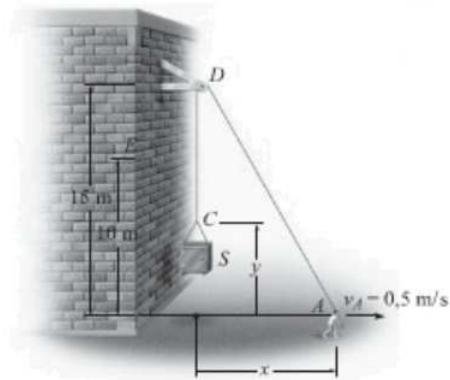
2.7. Uma partícula de massa m está inicialmente em repouso. Subitamente, no instante $t = 0$, aplica-se uma força constante F_0 . Depois de um intervalo de tempo t_0 a força subitamente dobra de valor e permanece constante a partir daí. Encontre a velocidade da partícula e o deslocamento total no instante $t = 2t_0$ ¹⁰.

2.8. Uma partícula de massa m está inicialmente em repouso. Uma força constante F_0 atua na partícula até o instante $t = t_0$. A força então aumenta de valor linearmente com o tempo tal que depois de um intervalo adicional t_0 a força vale $2F_0$. Mostre que a distância total percorrida pela partícula no intervalo total de tempo $2t_0$ é¹¹

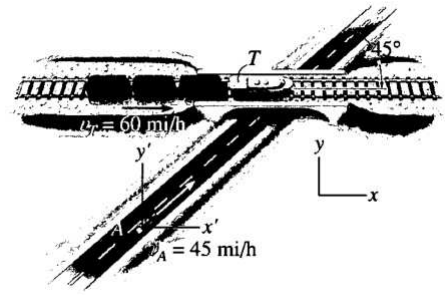
$$\frac{13}{6} \frac{F_0 t_0^2}{m}.$$

2.9. Um bloco é lançado para cima em um plano inclinado com velocidade inicial v_0 . Se a inclinação do plano é θ e o coeficiente de atrito cinético entre o plano e o bloco é μ , encontre o tempo total necessário para o bloco retornar ao ponto de lançamento.

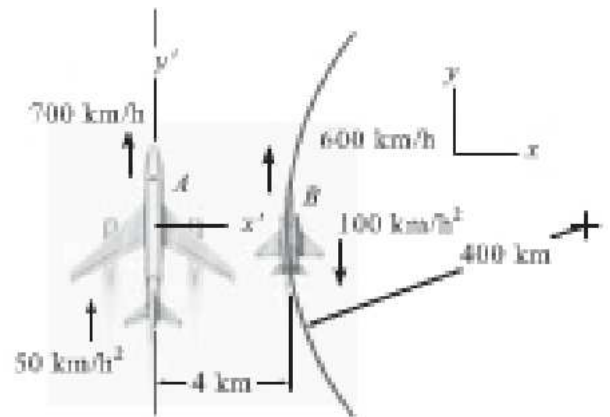
2.10. Um homem em A está içando um cofre S , como mostrado na figura abaixo, ao caminhar para a direita com uma velocidade constante $v_A = 0,5 \text{ m/s}$. Determine a velocidade e aceleração do cofre quando ele alcança a altura de 10 m. A corda tem 30 m de comprimento e passa sobre uma pequena polia em D ¹².



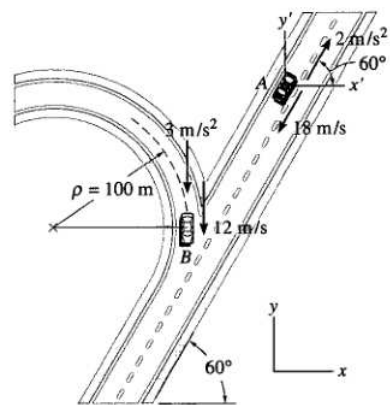
2.11. Um trem, viajando a uma velocidade de 60 mi/h, cruza uma rodovia, como mostrado na figura. Se o automóvel A trafega a 45 mi/h, determine o vetor velocidade (módulo, direção e sentido) do trem em relação ao automóvel¹³



2.12. O avião A mostrado na figura está voando numa trajetória retilínea, enquanto o avião B está voando numa trajetória circular de raio de curvatura $\rho_B = 400 \text{ km}$. Determine a velocidade e a aceleração de B medidas pelo piloto do avião A ¹⁴.



2.13. Num dado instante, os carros A e B mostrados na figura deslocam-se com velocidades de 18 m/s e 12 m/s, respectivamente. Nesse mesmo instante, A está desacelerando a uma taxa de 2 m/s^2 e B está acelerando a uma taxa de 3 m/s^2 . Determine a velocidade e a aceleração de B em relação a A ¹⁵.



$$^{10} v(2t_0) = \frac{3F_0 t_0}{m}; \quad x(2t_0) = \frac{5}{2} \frac{F_0 t_0^2}{m}.$$

¹¹Esboce o gráfico de F_0 contra t para visualizar o comportamento da força.

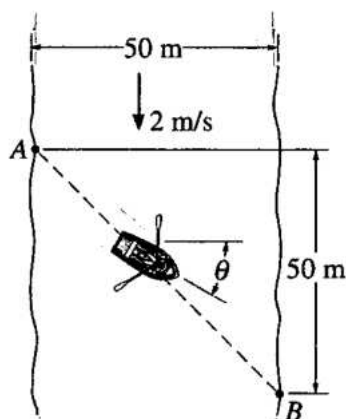
$$^{12} v_s = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{x}{\sqrt{(15)^2 + x^2}} \right] \frac{dx}{dt} = 0,4 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad a_s = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{(15)^2 (dx/dt)^2}{[(15)^2 + x^2]^{3/2}} = 3,6 \text{ mm/s}^2.$$

¹³ $\vec{v}_{T/A} = \{28, 2\hat{i} - 31, 8\hat{j}\} \text{ mi/h}$. $\therefore v_{T/A} = 42,5 \text{ mi/h}$, numa direção de $311,5^\circ$ com a horizontal.

¹⁴ $\vec{v}_{B/A} = -100\hat{i} \text{ km/h}$ e $\vec{a}_{B/A} = \{900\hat{i} - 150\hat{j}\} \text{ km/h}^2$.

¹⁵ $\vec{v}_{B/A} = \{9\hat{i} + 3,588\hat{j}\} \text{ m/s}$ e $\vec{a}_{B/A} = \{-2,44\hat{i} - 4,732\hat{j}\} \text{ m/s}^2$.

- 2.14.** Um remador pode conduzir seu bote a 5 m/s em água parada. Se ele deseja cruzar o rio de 50 m de largura para atingir o ponto B , 50 m rio abaixo, onde a velocidade de escoamento das águas do rio é de 2 m/s. Determine a velocidade do bote e o tempo necessário para que ele faça a travessia.

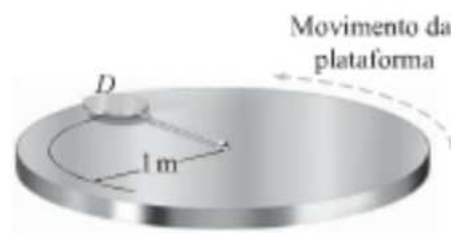


- 2.15.** Determine o ângulo de inclinação θ para a pista de corrida de maneira que as rodas dos carros de corrida mostrados na figura não precisem depender do atrito para evitar que qualquer carro escorregue para cima ou para baixo na pista. Suponha que os carros tenham dimensão desprezível, massa m , e se desloquem em torno da curva de raio ρ com uma velocidade constante v ¹⁶.

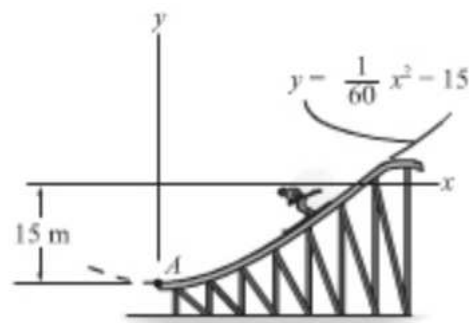


- 2.16.** O disco D de 3 kg está ligado à extremidade de uma corda, como mostrado na figura. A outra extremidade da corda está ligada a uma junta universal localizada no centro de uma plataforma. Se a plataforma gira rapidamente, e o disco está colocado sobre ela e é solto do repouso, como mostrado, determine o tempo que o disco leva para alcançar uma velocidade grande o suficiente para romper a corda. A tração máxima que a corda pode suportar é

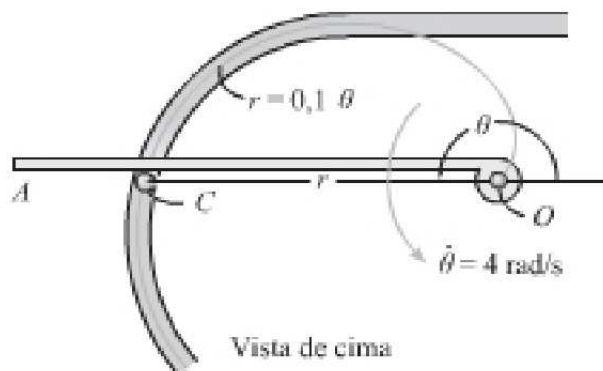
100 N, e o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a plataforma é $\mu_k = 0,1$ ¹⁷.



- 2.17.** Projetar uma rampa de esqui exige conhecer as forças que serão exercidas sobre o esquiador e sua trajetória aproximada. No caso mostrado na figura a rampa pode ser descrita pela parábola $y = \frac{1}{60}x^2 - 15$. Determine a força normal exercida sobre um esquiador de 600 N no instante em que ele chega ao fim da rampa, no ponto A , onde sua velocidade é de 9 m/s. Além disso, qual é a aceleração do esquiador neste ponto¹⁸?



- 2.18.** Uma lata C , tendo massa de 0,5 kg, desloca-se ao longo de uma ranhura entalhada na horizontal, como mostrado na figura. A ranhura está na forma de uma espiral que é definida pela equação $r = (0,1 \theta)$ m, onde θ é dado em radianos. Se o braço OA gira com uma taxa constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s no plano horizontal, determine a força que ela exerce sobre a lata no instante $\theta = \pi$ rad.



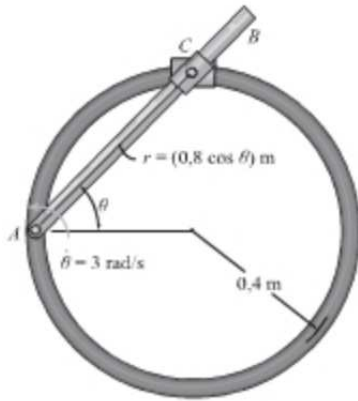
¹⁶ $\theta = \arctan\left(\frac{v^2}{\rho g}\right)$.

¹⁷ $t = 5,89$ s.

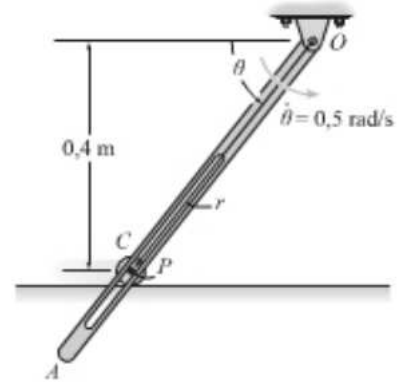
¹⁸ $N_A = 765$ N e $a_A = a_n = 2,7$ m/s².

Despreze o atrito e a dimensão da lata¹⁹.

- 2.19.** O anel duplo liso de 0,5 kg mostrado na figura pode deslizar livremente no braço AB e na barra-guia circular. Se o braço gira com uma velocidade angular constante de $\dot{\theta} = 3$ rad/s, determine a força que o braço exerce sobre o anel no instante $\theta = 45^\circ$. O movimento ocorre no plano horizontal²⁰.



- 2.20.** O cilindro liso C de 2 kg mostrado na figura tem um pino P através do seu centro que passa pela fenda no braço OA . Se o braço é forçado a girar no plano vertical a uma taxa constante $\dot{\theta} = 0,5$ rad/s, determine a força que o braço exerce sobre o pino no instante em que $\theta = 60^\circ$ ²¹.



3 Forças Dependentes da Velocidade

3.1 Introdução

O movimento de uma partícula é regido pela Segunda Lei de Newton

$$F = ma \quad ,$$

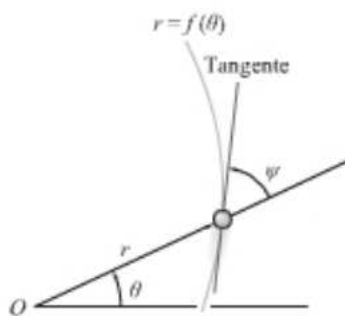
onde a é a aceleração que, em 1-D, é

$$a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Assim

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x, \dot{x}, t)$$

¹⁹ $F_C = 0,8$ N.



Em problemas como este, o sistema polar (ou cilíndrico em 3-D) é o mais adequado para a resolução do problema. Entretanto, as forças em questão estão direcionadas nas direções

²⁰ $F = 0$.

²¹ $F_p = 0,356$ N.

é a forma geral para a equação de movimento em uma dimensão, que é uma equação diferencial de segunda ordem em x .

3.2 Força como Função da Velocidade

Se a força for função da velocidade, a Segunda Lei de Newton pode ser escrita como:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v)$$

tangencial (ou normal, perpendicular a direção tangencial). Para relacionar ambas as direções, observamos que quando a partícula é deslocada em uma distância ds ao longo da trajetória, a componente do deslocamento na direção radial é dr e a componente do deslocamento na direção transversal é $r d\theta$. Visto que estas componentes são mutuamente perpendiculares, o ângulo ψ pode ser determinado a partir de $\psi = r d\theta/dr$, ou

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} \quad .$$

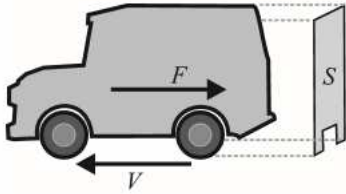
Se ψ é calculado como uma quantidade positiva, ele é medido a partir da linha radial até a tangente, em sentido anti-horário (ou na direção positiva de θ).

Neste caso, temos que separar as variáveis para poder integrar. Assim:

$$\Delta t = t - t_0 = \int_{t_0}^t dt' = m \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')} \quad (26)$$

Exemplos de forças que são funções da velocidade, são as forças dissipativas de arrasto. Vamos examinar dois casos: o caso linear e o caso da dependência da força com o quadrado da velocidade.

A figura abaixo mostra um objeto (uma van) movendo-se com velocidade V num meio fluido (a atmosfera) e, portanto, sujeita a uma força de resistência do ar (arrasto) F .



A força de arrasto tem intensidade dada por

$$F = \frac{1}{2} C_A \rho S v^2 \quad (27)$$

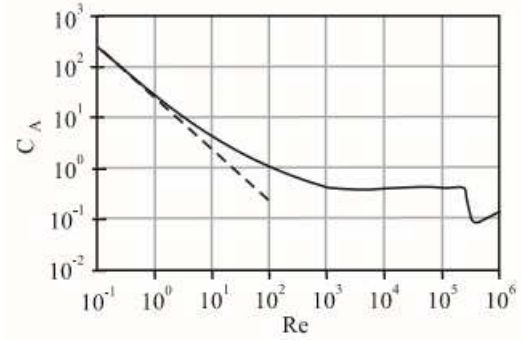
onde S é a área da seção reta, C_A um coeficiente (adimensional) de arrasto e ρ a densidade do meio fluido (ar).

Se usarmos a definição de *momentum linear* ($p = mv$), então podemos escrever a força, aproximadamente como $\frac{\Delta p}{\Delta t}$, onde a quantidade $\Delta p = \rho S v^2 \Delta t$ é o *momentum* de um cilindro de fluido (ar) de seção reta S e de comprimento $v \Delta t$, movendo-se com velocidade v . Assim, a presença do fator extra $\frac{1}{2} C_A < 1$, sugere que apenas uma fração desse *momentum* é transferido do fluido (ar) para o objeto que se move através dele.

Pode-se mostrar que, para um escoamento incompressível, o coeficiente de arrasto é uma função de um parâmetro adimensional chamado número de Reynolds, Re , tal que $C_A = C_A(Re)$.

O número de Reynolds é definido por $Re = \frac{\rho L v}{\eta}$ onde L é um comprimento característico, digamos, $S^{1/2}$, e η é o coeficiente de viscosidade do fluido.

A figura abaixo mostra um gráfico típico de medidas do coeficiente de arrasto em função do número de Reynolds, onde a linha cheia é o resultado de medidas realizadas em túneis de vento. A linha tracejada corresponde à fórmula de Stokes (força de arrasto proporcional à velocidade).



Pode-se observar que na região onde Re é pequeno (velocidades baixas num gás denso ou líquido), $C_A(Re) \propto Re^{-1}$, a força de arrasto é proporcional à velocidade.

Assim, temos dois regimes de forças para um objeto que se move num meio fluido, $F = -\beta v = -m\Gamma v$ e $F = -m\gamma v^2$, onde o sinal negativo é utilizado para indicar que a força tem sentido oposto ao da velocidade.

Assim, substituindo na Eq. (26), temos:

a) Caso em que $F = -\beta v = -m\Gamma v$

$$\Gamma(t-t_0) = -\ln \frac{v(t)}{v(t_0)} \Rightarrow \boxed{v(t) = v(t_0)e^{-\Gamma(t-t_0)}}$$

b) Caso em que $F = -m\gamma v^2$

$$\gamma(t-t_0) = \frac{1}{v(t)} - \frac{1}{v(t_0)} \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{v(t_0)}{1 + \gamma v(t_0)(t-t_0)}}$$

Exemplo 3.1. Quais são as dimensões dos parâmetros β , Γ e γ nas expressões das forças de arrasto proporcionais a velocidade de uma partícula que se desloca num meio fluido?

$\Rightarrow$ De $F = -\beta v = -m\Gamma v$:

$$[\beta] = \frac{[F]}{[v]} = \left(\frac{N}{m/s} \right) = \left(\frac{kg \cdot m/s^2}{m/s} \right) = \frac{kg}{s}$$

$$\therefore [\beta] = (MT^{-1})$$

$$[\Gamma] = \frac{[F]}{[m \cdot v]} = \left(\frac{N}{kg \cdot m/s} \right) = \left(\frac{kg \cdot m/s^2}{kg \cdot m/s} \right) = \frac{1}{s}$$

$$\therefore [\Gamma] = (T^{-1})$$

$\Rightarrow$ De $F = -m\gamma v^2$:

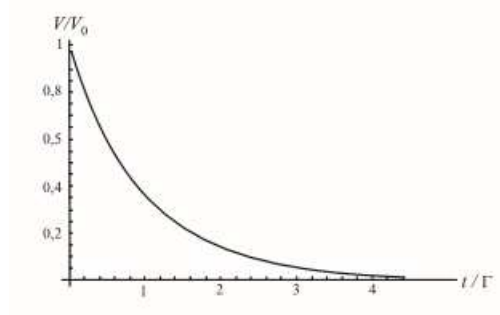
$$[\gamma] = \frac{[F]}{[mv^2]} = \left(\frac{N}{kg \cdot (m/s)^2} \right) = \left(\frac{kg \cdot m/s^2}{kg \cdot (m/s)^2} \right) = \frac{1}{m} \therefore [\gamma] = (L^{-1})$$

Exemplo 3.2. Analise o comportamento da velocidade de uma partícula movendo-se num meio fluido sob a influência de uma força de arrasto linearmente

dependente da velocidade, isto é, $F = -\beta v = -m\Gamma v$ e obtenha sua posição em função do tempo.

Já obtivemos, por meio da equação (26), que: $v(t) = v(t_0)e^{-\Gamma(t-t_0)}$

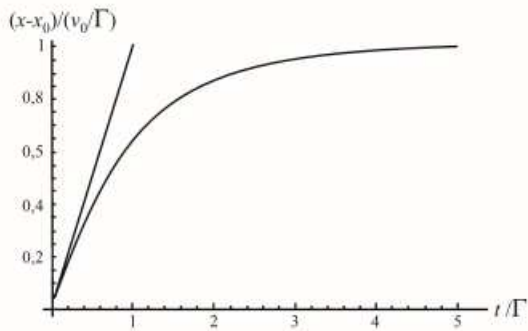
Assim vemos que a velocidade (medida em unidades de v_0) diminui exponencialmente com o tempo (medido em unidades de Γ).



Como $v = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, integrando esta expressão obtemos:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt' = x(t_0) + \frac{v(t_0)}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma(t-t_0)})$$

que tem o seguinte comportamento, onde a linha reta é uma extrapolação linear da velocidade inicial:



A figura acima é um gráfico do deslocamento da partícula $\Delta x = x - x_0$ (em unidades de v_0/Γ) em função do tempo (em unidades de $1/\Gamma$). A partícula nunca ultrapassará a distância limite $v(t_0)/\Gamma$.

Expandindo a exponencial $e^{-\Gamma(t-t_0)}$ em série de Taylor $f(t) = f(t_0) + (t-t_0) f'(t_0) + \frac{1}{2!} f''(t_0) + \dots$, obtemos:

$$e^{-\Gamma(t-t_0)} = 1 - \Gamma(t-t_0) + \frac{1}{2} \Gamma^2(t-t_0)^2 + \dots$$

Para intervalos de tempo muito curtos, isto é, para $\Gamma(t-t_0) \ll 1$, só é preciso utilizar os dois primeiros termos da expansão. Assim, substituindo na solução de $x(t)$, encontramos:

$$x(t) = x(t_0) + v(t_0)(t-t_0)$$

que é a aproximação linear indicada na figura acima (M.R.U. para tempos característicos $1/\Gamma < 1$).

Exemplo 3.3. Obtenha a posição de uma partícula movendo-se num meio fluido sob a influência de uma força de arrasto com dependência quadrática em relação à velocidade, isto é, $F = -m\gamma v^2$.

Já obtivemos, por meio da equação (26), que:

$$v(t) = \frac{v(t_0)}{1 + \gamma v(t_0) (t - t_0)}$$

Como $v = v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, integrando esta expressão obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t v(t') dt' \\ &= x(t_0) + \frac{1}{\gamma} \ln (1 + \gamma v(t_0) (t - t_0)) \end{aligned}$$

3.3 Velocidade Terminal

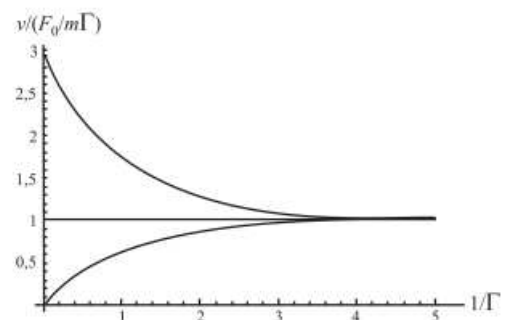
Considerando uma partícula em movimento num fluido sob a ação também de uma força constante F_0 , de forma que a força total sobre a partícula é $F(v) = F_0 - m \Gamma v$. Assim, substituindo em (26), obtemos:

$$v(t) = v(t_0) e^{-\Gamma(t-t_0)} + \frac{F_0}{m\Gamma} (1 - e^{-\Gamma(t-t_0)}) \quad (28)$$

Quando $(t-t_0) \gg 1/\Gamma$, qualquer que seja a velocidade inicial $v(t_0)$, a velocidade da partícula tende ao valor $v_T = F_0/m \Gamma$, chamada de velocidade terminal.

Uma vez atingido o regime estacionário, a força exercida para manter a partícula em movimento é $F_0 = m \Gamma v_T$, ou seja, proporcional a sua velocidade.

A partícula atinge a velocidade terminal num tempo da ordem de $1/\Gamma$. A fase transiente é tão rápida que, antes de Newton, acreditava-se que para um corpo manter-se em movimento era preciso mantê-lo submetido à ação de uma força proporcional à sua velocidade.



A figura acima mostra um gráfico da velocidade em unidades de $F_0/m \Gamma$. Na curva superior $v_0 = 3(F_0/m \Gamma)$ e na curva inferior $v_0 = 0$. O tempo está em unidades de $1/\Gamma$. Para qualquer valor de v_0 , a partícula atinge a velocidade terminal.

Exemplo 3.4. Analise o movimento vertical de uma partícula num meio resistivo (uma partícula de massa m sob ação de seu peso deslocando-se através da atmosfera).

Se a resistência viscosa for proporcional à primeira potência de v (caso linear), podemos expressar esta força como $F = -m \Gamma v$, independentemente do sinal de v , uma vez que a força de resistência é sempre oposta ao sentido do movimento. A constante de proporcionalidade $m \Gamma$ leva em conta o tamanho e a forma do objeto e a viscosidade do fluido.

Fazendo $F_0 = -mg$, o peso da partícula (considerando o sentido positivo para cima), temos, da eq. (28):

$$v(t) = v(t_0) e^{-\Gamma(t-t_0)} - \frac{g}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma(t-t_0)})$$

Depois de um tempo suficientemente grande $[(t - t_0) \gg 1/\Gamma]$, o termo exponencial será desprezível e a velocidade se aproximará do valor limite $-g/\Gamma$ (ou $-g\tau$, sendo τ o *tempo característico*).

Vamos designar a velocidade terminal g/Γ por v_T e o chamado *tempo característico* $1/\Gamma$ por τ . Assim, podemos reescrever a equação precedente como:

$$v = -v_T + (v_T + v_0) e^{-t/\tau}$$

onde $v = v(t)$ e $v_0 = v(t_0)$, onde fizemos $(t - t_0) = (t - 0) = t$.

Então, um objeto que cai a partir do repouso ($v_0 = 0$) atingirá a velocidade de $(1 - e^{-1}) = 63,21\%$ da velocidade terminal em um intervalo de tempo τ , $(1 - e^{-2}) = 86,47\%$ da velocidade terminal em um intervalo de tempo 2τ , e assim por diante. Depois de um intervalo de 10τ , a velocidade será praticamente igual a velocidade terminal, a saber 99,99% de v_T .

Se a resistência viscosa for proporcional a v^2 (caso quadrático) então, para uma partícula que se move num meio fluido sob a ação de seu peso

$$F = -mg \pm m\gamma v^2$$

onde o sinal negativo corresponde ao movimento de subida, já que a força de arrasto é sempre contrária ao sentido da velocidade.

Substituindo a expressão desta força em (26), obtemos:

$$t - t_0 = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv'}{-g - \gamma v'^2} = -\tau \arctg \frac{v}{v_T} \quad (\text{subida})$$

$$t - t_0 = \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv'}{-g + \gamma v'^2} = -\tau \operatorname{arctgh} \frac{v}{v_T} \quad (\text{descida})$$

onde $\tau = 1/\sqrt{\gamma g}$ é o *tempo característico* e $v_T = \sqrt{g/\gamma}$ é a velocidade terminal.

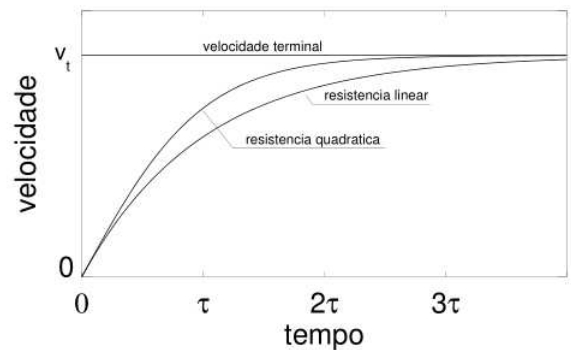
Explicitando v , temos que a velocidade da partícula v é $v_T \operatorname{tg}((t_0 - t)/\tau)$ na subida e $-v_T \operatorname{tgh}((t - t_0)/\tau)$ na descida.

Se abandonarmos a partícula do repouso em $t = 0$, então

$$v = -v_T \operatorname{tgh} \frac{t}{\tau} = v_T \left(\frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}} \right)$$

Novamente, após um intervalo de tempo de alguns tempos característicos, praticamente obtemos a velocidade terminal. Por exemplo: para $t = 5\tau$, $v = 0,99991v_T$ (ou 99,99% da velocidade terminal).

A figura abaixo mostra o comportamento da velocidade em função do tempo de queda de um corpo sujeito a resistência do ar linear e quadrática.



Em ambos os casos o tempo característico é v_T/g .

Por exemplo, se a velocidade terminal de um paraquedista é de 1,2 m/s, o tempo característico será de 0,12 s e ele atinge 99,99% desta velocidade em 1,2 s.

Uma bola de futebol atinge 99,99% de sua v_T em 5τ , entretanto sua v_T é maior que a de um paraquedista.

3.4 Exercícios Propostos

3.1. Um bloco desliza numa superfície horizontal lubrificada com óleo pesado tal que o bloco sofre uma resistência viscosa que varia com a velocidade de acordo com a função $F(v) = -m\gamma v^n$. Se a velocidade inicial é v_0 em $t = 0$, encontre v e o deslocamento x em função do tempo t . Encontre também v em função de

x .²² Em particular, mostre que para $n = 1/2$, o bloco não percorrerá mais do que

$$\frac{2v_0^{3/2}}{3\gamma}.$$

3.2. Encontre a relação entre a distância de queda e a velocidade de um corpo abandonado do repouso em queda livre e sujeito a resistência do ar proporcional: a) à velocidade; e b) ao quadrado da velocidade.²³

3.3. Um projétil é lançado verticalmente para cima com velocidade v_0 . Supondo que a resistência do ar seja proporcional ao quadrado da velocidade, mostre que a velocidade do projétil ao retornar ao ponto de lançamento é

$$\frac{v_0 v_T}{\sqrt{v_0^2 + v_T^2}},$$

na qual a velocidade terminal v_T é $v_T = \sqrt{g/\gamma}$.²⁴

3.4. A velocidade de uma partícula de massa m varia com o deslocamento x de acordo com a equação

$$v = \frac{b}{x}.$$

Encontre a força que atua na partícula em função de x .²⁵

3.5. A força que atua em uma partícula de massa m é dada por

$$F = kvx,$$

em que k é uma constante. A partícula passa pela origem com velocidade v_0 em $t = 0$. Encontre x em função do tempo t .²⁶

3.6. Uma partícula de massa m está sujeita a uma força $F(t) = me^{-bt}$. A posição inicial e a velocidade inicial são iguais a zero. Encontre $x(t)$.²⁷

3.7. Considere uma partícula de massa m cujo movimento parte do repouso num campo gravitacional constante. Se a força de arrasto for proporcional ao quadrado da velocidade (isto é, $F = m\gamma v^2$)²⁸,

a) Calcule a velocidade e a posição da partícula num instante t . Tome $v(0) = 0$. Qual a velocidade terminal da partícula?

b) Mostre que a distância s que a partícula cai ao acelerar de v_0 a v_1 é dada por

$$s(v_0 \rightarrow v_1) = \frac{1}{2\gamma} \ln \left[\frac{g - \gamma v_0^2}{g - \gamma v_1^2} \right].$$

3.8. Uma partícula é lançada verticalmente para cima num campo gravitacional constante com velocidade inicial v_0 . Considere a força de resistência do ar como sendo proporcional à velocidade da partícula. Tomando a direção y positiva para cima, a força resistiva será então $-\Gamma mv$ (ou $-\beta v$) quando a partícula estiver se movendo para cima e $+\Gamma mv$ (ou $+\beta v$) quando a partícula estiver se movendo para baixo, calcule a velocidade da partícula quando a partícula atinge o ponto de lançamento no seu retorno.²⁹

3.9. Um bloco de metal de massa m desliza sobre uma superfície horizontal que foi lubrificada com um óleo pesado fazendo com que o bloco sofra uma força resistiva que varia com a potência $3/2$ da velocidade:

$$F_r = -m\gamma v^{3/2}.$$

²² $v = (A + Bt)^\alpha$ onde $A = v_0^{1-n}$, $B = \gamma(n-1)$ e $\alpha = (1-n)^{-1}$; $x = C(v_0^\beta - v^\beta)$ onde $C = 1/(2-n)\gamma$ com $n \neq 1, 2$ e $\beta = 2-n$.

²³ a) $x = -\frac{1}{\Gamma} \left| v + \frac{g}{\Gamma} \ln \left(1 + \frac{\Gamma v}{g} \right) \right|$; b) $x = -\frac{1}{2\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma v^2}{g} \right)$

²⁴ Tomando a direção y positiva para cima, a força resistiva será então $-\gamma mv^2$ quando a partícula estiver se movendo para cima, e $+\gamma mv^2$ quando a partícula estiver se movendo para baixo. Primeiramente mostre que, no movimento para cima, a velocidade da partícula varia com a altura de acordo com a expressão $v^2 = -v_t^2 (v_t^2 + v_0^2) e^{-2\gamma y}$, onde y é o deslocamento medido a partir do ponto de lançamento. Depois mostre que, no movimento para baixo, a velocidade da partícula varia com a altura de acordo com a expressão. $v^2 = v_t^2 (1 - e^{2\gamma y})$, onde agora y é o deslocamento medido a partir do ponto mais alto da trajetória. Usando os resultados anteriores, mostre o que se pede.

²⁵ $F(x) = -mb^2 x^{-3}$.

²⁶ $x = a \operatorname{tg}(bt)$ onde $a = \sqrt{2mv_0/k}$ e $b = \sqrt{k v_0/2m}$.

²⁷ $x(t) = -b^{-2} (bt - 1 + e^{-bt})$.

²⁸ a) $v(t) = v_T \operatorname{tgh}(\sqrt{\gamma g} t)$, onde $v_T = \sqrt{\frac{g}{\gamma}}$ e $x(t) = x_0 + \frac{1}{\gamma} \ln \cosh(\sqrt{\gamma g} t)$.

²⁹ Dica: siga os mesmos procedimentos do exercício 3.3.

³⁰ a) $v(t) = \left(\frac{\gamma t}{2} + v_0^{-1/2} \right)^{-2}$; b) $x(t) = \frac{2v_0^{1/2}}{\gamma} + \frac{2}{\gamma} \left(\frac{\gamma t}{2} + v_0^{-1/2} \right)^{-1}$; c) $v(x) = \frac{\gamma x}{2v_0^{1/2}}$; e d) Podemos tomar

$t \rightarrow \infty$ no resultado do item b).

As condições iniciais são: $x(t = 0) = 0$ e $v(t = 0) = v_0$ ³⁰.

a) Resolva a equação de movimento do bloco para encontrar $v(t)$.

b) Integre a equação do movimento do bloco para encontrar $x(t)$.

c) Usando a regra da cadeia

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

obtenha $v(x)$ para esse bloco.

d) Mostre que, quando $t \rightarrow \infty$, o deslocamento do bloco tende assintoticamente a $2v_0^{1/2}/\gamma$.

3.10. Um barco, com velocidade inicial v_0 , perde velocidade devido a uma força de arrasto em virtude do contato de seu casco com a água

$$F = -b e^{\alpha v}.$$

a) Encontre sua posição em função do tempo.

b) Quanto tempo ele leva para parar e que distância ele percorre?³¹

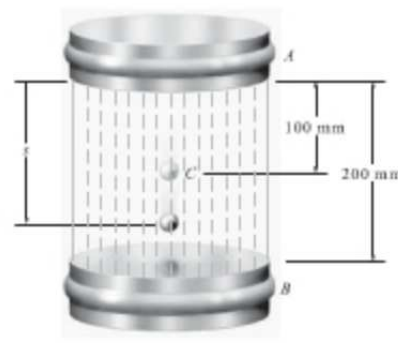
3.11. Sabendo-se que a força que atua em uma partícula é o produto de uma função da posição e uma função da velocidade $F(x, v) = f(x) g(v)$, mostre que a equação diferencial do movimento pode ser resolvida por integração. A equação de movimento pode ser resolvida por simples integração se a força for o produto de uma função da posição por uma função do tempo? E se for o produto de uma função do tempo por uma função da velocidade?

3.12. Uma bola de boliche é lançada de um bote, submergindo com uma velocidade que logo abaixo da superfície é de 25 pés/s. Se a bola experimenta uma desaceleração $a = 10 - 0,9v^2$ enquanto submerge na água, determine a velocidade que ela terá quando atingir o fundo do lago, 30 pés abaixo da superfície³².

3.13. Uma gota de chuva de raio igual a 1,5 mm cai de uma nuvem localizada a uma altura $h = 1200$ m acima da superfície da Terra. (a) Qual a velocidade terminal da gota? (b) Se não houvesse a força de arraste, qual teria sido a velocidade com que a gota chegaria ao solo?³³

3.14. Um pequeno projétil é disparado verticalmente para baixo em um meio fluido numa velocidade de 60 m/s. Devido à resistência do arrasto do fluido, o projétil experimenta uma desaceleração de $a = (-0,4v^3)\text{m/s}^2$, onde v é dada em m/s. Determine a velocidade do projétil e a sua posição 4 s após ele ser disparado.³⁴

3.15. Uma partícula metálica é sujeita à influência de um campo magnético na medida em que ela se move para baixo através de um fluido que se estende da placa A para a placa B , conforme ilustra a figura. Se a partícula é solta a partir do repouso no ponto C , $s = 100$ mm, e a aceleração é $a = (4s)\text{m/s}^2$, onde s é dado em metros, determine a velocidade da partícula quando ela alcançar a placa B , $s = 200$ mm, e o tempo que ela leva para se mover de C para B ³⁵.



3.16. Uma partícula move-se ao longo de uma trajetória horizontal com uma velocidade de $v = (3t^2 - 6t)$ m/s, onde t é o tempo em

$$^{31}x(t) = v_0 t - \frac{m}{\alpha^2 b} e^{-\alpha v_0} \left(1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0 t} \right) \ln \left(1 + \frac{\alpha b}{m} e^{\alpha v_0 t} \right) + \frac{t}{\alpha}; \quad \text{b) } t_s = \frac{m}{\alpha b} (1 - e^{\alpha v_0}) \quad \text{e}$$

$$x_s = \frac{m}{\alpha^2 b} (1 - e^{-\alpha v_0} - \alpha v_0 e^{-\alpha v_0}).$$

³²Observe que a desaceleração provocada pelo arrasto com a água diminui a velocidade de queda da bola até que esta força de arrasto se iguale ao próprio peso da bola, quando esta passa a se deslocar com a velocidade terminal (constante). Verifique se a bola atinge ao menos 95% de sua velocidade terminal antes de chegar ao fundo do lago. Estatisticamente 95% dos valores de uma medida estão a menos de 2 desvios-padrão para uma distribuição normal. Assim, com um nível de confiança de 95%, pode-se afirmar que se a bola atingir 95% de sua velocidade terminal antes de chegar ao fundo do lago, será com esta velocidade que ela chegará ao fundo.

³³Suponha que a gota apresenta à atmosfera uma área de seção reta circular com um raio de 1,5 mm, que a densidade da água que compõe a gota seja de 1000 kg/m^3 , que a densidade do ar (atmosfera) seja constante e igual a $1,2 \text{ kg/m}^3$ e que o coeficiente adimensional de arrasto entre a água (da gota) e o ar (atmosfera) seja igual a 0,6.

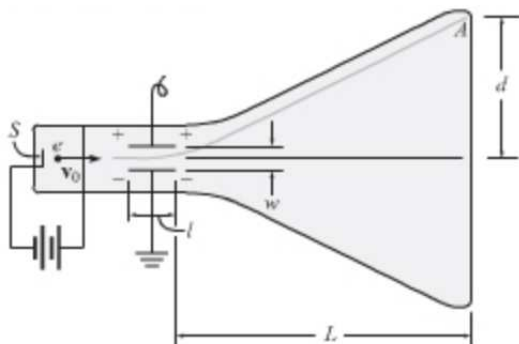
³⁴ $v = 0,559 \text{ m/s}$ para baixo e $s = 4,43 \text{ m}$.

³⁵ $v = 0,346 \text{ m/s}$ para baixo e $t = 0,658 \text{ s}$.

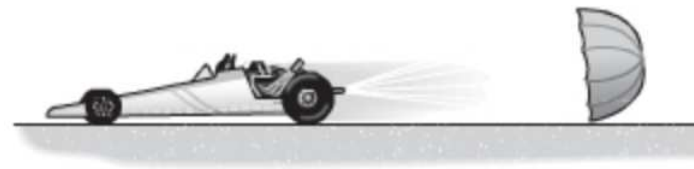
segundos. Se ela está localizada inicialmente na origem O , determine a distância percorrida em 3,5 s, a velocidade média e a velocidade média de percurso, isto é, a velocidade média considerando-se todo o trajeto percorrido pela partícula e não apenas as posições inicial e final da partícula, durante esse intervalo de tempo³⁶.

3.17. Um projétil de 10 kg é disparado para cima verticalmente a partir do solo com uma velocidade inicial de 50 m/s. Determine a altura máxima que ele atingirá se a) a resistência atmosférica for desprezada; e b) a resistência atmosférica for medida como $F_D = (0,01v^2)$ N, onde v é o módulo da velocidade do projétil a qualquer instante, medida em m/s³⁷.

3.18. Em um tubo de raios catódicos, elétrons tendo uma massa m são emitidos de um filamento aquecido S e começam a se mover horizontalmente com uma velocidade v_0 . Quando passam entre as placas da grade, em uma distância l eles ficam sujeitos a uma força vertical que tem uma intensidade eV/w , onde e é a carga do elétron, V é a voltagem aplicada atuando através das placas e w é a distância entre as placas. Após passarem as placas, os elétrons então se movem em linha reta e atingem a tela em A . Determine a deflexão d dos elétrons em termos das dimensões da placa de voltagem e do tubo. Despreze a gravidade que causa uma ligeira deflexão adicional na vertical quando o elétron se move de A até a tela, e a ligeira deflexão que ocorre em seu movimento entre as placas³⁸.



3.19. Um carro de corridas do tipo *dragster* de 600 kg está se movendo com velocidade de 125 m/s quando o motor é desligado e o paraquedas de freio é aberto. Se a resistência do ar imposta sobre o *dragster* devido ao paraquedas é $F_D = (6000 + 0,9v^2)$ N, onde v é dado em m/s, determine o tempo necessário para o *dragster* chegar ao repouso.



3.20 A força de flutuação de um balão de 500 kg é $F = 6$ kN, e a resistência do ar é $F_D = (100v)$ N, onde v é dado em m/s. Determine a velocidade terminal ou máxima do balão se ele parte do repouso³⁹.



³⁶ $s = 14,1$ m, $\bar{v} = 1,75$ m/s e $\bar{v}_{perc.} = 4,04$ m/s.

³⁷ a) $h = 127$ m e b) $h = 114$ m.

³⁸ $d = \frac{eVLl}{v_0^2 w m}$

³⁹ $a = (2,19 - 0,2v)$ m/s², $v = 10,95(1 - e^{-t/5})$ e $v_{máx} = 10,95$ m/s

4 Movimento em Uma Dimensão e Forças Conservativas

4.1 Forças dependentes de posição: energia potencial

Quando a força depende somente da posição x , a Segunda Lei de Newton toma a forma

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \quad . \quad (29)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por v e usando o fato de que $v dv = \frac{1}{2} d(v^2)$, obtemos

$$m v \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F(x) v = F(x) \frac{dx}{dt} \quad ,$$

de onde obtemos, definindo $T = \frac{1}{2} m v^2$ como a energia cinética da partícula material com velocidade v ,

$$d \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = dT = F(x) dx$$

Integrando esta expressão, de (x_0, v_0) a (x, v) , obtemos:

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x(t_0)}^x F(x') dx' \quad (30)$$

que é um princípio fundamental da mecânica, conhecido como teorema *trabalho-energia*.

Definindo a *energia potencial* $V(x)$, como o trabalho realizado pela força que desloca a partícula de uma posição x até algum ponto de referência x_s , isto é,

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x') dx' \quad (31)$$

Podemos escrever a integral de (30) em termos de $V(x)$ como

$$\int_{x_s}^x F(x') dx' = -V(x) + V(x(t_0)) \quad (32)$$

Assim, combinando as equações (30) e (32), obtemos:

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = \frac{1}{2} m v^2(t_0) + V(x(t_0)) \quad (33)$$

que é o *princípio da conservação da energia mecânica*, válido (em 1-D) quando a força é uma função da posição.

$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = T + V = \text{constante} \quad (34)$$

Da definição (31), tomando a posição de referência x_s como sendo aquela em que $V(x_s) \equiv 0$, podemos escrever a força em termos da energia potencial como

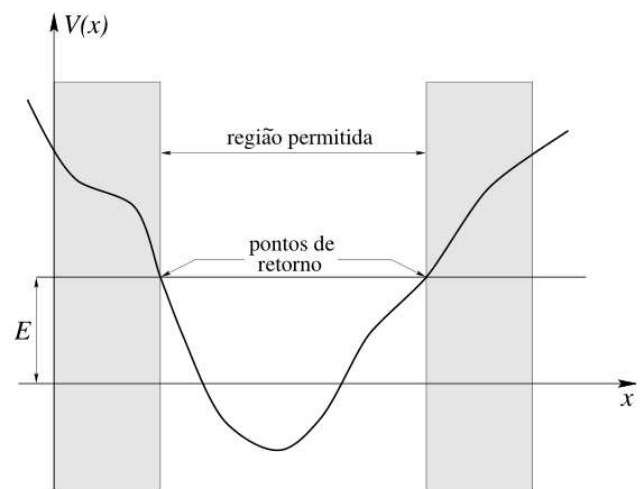
$$F(x) = - \frac{dV(x)}{dx} \quad (35)$$

Vemos assim, de (35), que a posição de referência x_s é, na verdade, uma posição arbitrária, pois escolher $x_s = x$ ou $x_s = x + h$ não altera o valor da força, já que a derivada de uma constante é zero e, assim, os resultados físicos da escolha de x_s não são alterados.

A soma $T + V = \text{constante}$ na eq. (34) é a energia mecânica total E .

O movimento da partícula pode ser obtido explicitando v na equação de conservação de energia [eq. (34)]. Assim:

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad (36)$$



Assim vemos que a velocidade só será real para valores de x tais que $V(x)$ seja menor ou igual à energia total E . Fisicamente, isso significa que a partícula está confinada às regiões para as quais $V(x) \leq E$.

Além disso, a velocidade se anula nos pontos onde $V(x) = E$. Isto é, a partícula deve parar e

inverter seu movimento nestes pontos. Eles são chamados pontos de retorno do movimento.

Exemplo 4.1. Resolva o problema de uma partícula de massa m sujeita a uma força restauradora linear (como o caso do oscilador harmônico simples, por exemplo)

Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força restauradora linear

$$F(x) = -k x \quad (37)$$

onde k é uma constante. Tomando $x_s = 0$, a energia potencial é

$$V(x) = - \int_0^x (-k x') dx' = \frac{1}{2} k x^2$$

que, substituindo na equação (36), permite encontrar a velocidade em função da posição

$$v(x) = \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - \frac{1}{2} k x^2 \right]}$$

Conhecendo $v(x)$, podemos determinar x usando $dt = \frac{dx}{v(x)}$, que integrada é

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = \int_{x(t_0)}^x \frac{dx'}{v(x')}$$

Assim, com $t = 0$, temos

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \left(E - \frac{1}{2} k x' \right)^{-1/2} dx' = t$$

Fazendo as substituições

$$\sin \theta = x \sqrt{\frac{k}{2E}} \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Obtemos

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \left(E - \frac{1}{2} k x' \right)^{-1/2} dx' = \frac{1}{\omega} (\theta - \theta_0)$$

Ou seja

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (38)$$

Voltando às variáveis do problema:

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \theta = A \sin (\omega t + \theta_0) \quad (39)$$

Vemos que a coordenada x oscila harmonicamente no tempo, com uma amplitude A e frequência $\omega/2\pi$. Aqui, as condições iniciais são determinadas pelas constantes A e θ_0 , que estão relacionados a E e x_0 por

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{e} \quad x_0 = A \sin \theta_0$$

Exemplo 4.2. Considere um corpo de massa m caindo de uma altura muito grande sobre a superfície da Terra. Descreva o seu movimento, considerando a variação da aceleração da gravidade com a altura e desprezando a resistência do ar.

Chamando de x a distância a partir do centro da Terra, então a única força que atua sobre o corpo é a força gravitacional

$$F(x) = - \frac{GMm}{x^2} \quad (40)$$

onde m é a massa do corpo em queda, M a massa da Terra e G a constante gravitacional. Tomando $x_s = \infty$, a energia potencial é

$$V(x) = GMm \int_{\infty}^x \frac{dx'}{x'^2} = - \frac{GmM}{x}$$

Da equação (36): $v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{GmM}{x} \right)}$

onde o sinal positivo refere-se ao movimento para cima e o sinal negativo ao movimento para baixo (descida).

Temos 3 possibilidades:

- a) $E < 0$. Neste caso, se a partícula estiver inicialmente movendo-se para cima, ela irá parar quando chegar a uma altura x_R dada por

$$x_R = \frac{GmM}{(-E)}$$

- b) $E > 0$. Neste caso a velocidade nunca se anula. Não há ponto de retorno para energias positivas. Se a partícula estiver subindo, à proporção que x cresce, sua velocidade diminui até atingir o valor limite

$$v_L = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

- c) $E = 0$. Neste caso a velocidade vai a zero quando a distância for infinita, ou seja, o ponto de retorno para energia zero está no infinito. A uma distância x a sua velocidade será

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{x}}$$

que é a velocidade de escape. Isto significa que um corpo a uma distância x do centro da Terra e movendo-se para cima com esta velocidade, terá a menor energia cinética que permite que ele continue se movendo para cima indefinidamente (desprezada a resistência do ar). Para x igual ao raio da Terra:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r_T}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,67428 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \times 5,972 \times 10^{24} \text{kg}}{6,371 \times 10^6 \text{m}}} = 11.185,961132 \text{ m/s} \approx 11,2 \text{ km/s}$$

Conhecendo $v(x)$, podemos determinar x usando $dt = \frac{dx}{v(x)}$, que integrada é

$$\int_{t_0}^t dt' = t - t_0 = \int_{x(t_0)}^x \frac{dx'}{v(x')}$$

Assim, com $t = 0$, temos

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \pm \left(E + \frac{GmM}{x'} \right)^{-1/2} dx' = t$$

Vamos determinar $x(t)$, resolvendo a equação precedente para o caso em que E é negativo. Fazendo a substituição:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{-Ex'}{GmM}}$$

Então,

$$dx' = \frac{GmM}{-E} 2 \cos \theta \sin \theta d\theta$$

Assim,

$$\frac{GmM}{(-E)^{3/2}} \int_{\theta_0}^{\theta} 2 \cos^2 \theta' d\theta - 1$$

Tomando a posição inicial da partícula como sendo igual à posição do ponto de retorno, x_R , então $\theta_0 = 0$. Usando também a relação trigonométrica

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

Obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta} \cos^2 \theta' d\theta' &= \frac{1}{2} \int_0^{\theta} (1 + \cos 2\theta') d\theta' \\ &= \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \end{aligned}$$

Com este resultado, a solução do problema é

$$\begin{aligned} x &= x_R \cos^2 \theta \\ \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta &= \sqrt{\frac{2GM}{x_R^3}} t \end{aligned}$$

Este par de equações não pode ser resolvido explicitamente para $x(t)$. Devemos resolvê-las numericamente: para uma sequência escolhida de valores de θ , encontramos os valores correspondentes de x e t . A parte do movimento para a qual x for menor que o raio da Terra deverá ser desconsiderada (a equação (40) supõe a massa da Terra toda concentrada em $x = 0$).

Para t pequeno (pequeno quando comparado com o tempo característico do problema $\sqrt{x_R^3/2GM}$), podemos usar as aproximações

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &\approx 1 - \theta^2 \\ \sin 2\theta &\approx 2\theta \end{aligned}$$

$$\text{Assim } x = x_R (1 - \theta^2) \quad \text{e} \quad \theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2GM}{x_R^3}} t$$

Definindo $\tilde{g} = GM/x_R^2$, a aceleração da gravidade nas vizinhanças de $x = x_R$, temos

$$x = x_R - \frac{1}{2} \tilde{g} t^2$$

o valor esperado, já que para pequenos valores de t , a distância percorrida não é muito grande e a força fica aproximadamente constante e logo o movimento é uniformemente acelerado.

Poderíamos abordar este problema, obtendo os mesmos resultados obtidos anteriormente, resolvendo diretamente a Segunda Lei de Newton (equação de movimento) sem a utilização do método da energia potencial. Vejamos:

Desprezando a resistência do ar, a equação diferencial para o movimento vertical é

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}$$

onde usamos r (a distância radial a partir do centro da Terra) em vez de x .

Escrevendo $\ddot{r} = \dot{r} \frac{dr}{dr}$ podemos integrar em relação à r e obter

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E$$

onde E é a constante de integração. Esta é, de fato, a equação da conservação da energia: a soma da energia cinética e potencial permanece constante durante o movimento de um corpo em queda.

No caso de um projétil, lançado verticalmente para cima a partir da superfície da Terra, com velocidade v_0 , a constante E é:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_T}$$

onde r_T é o raio da Terra. Assim:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_T}$$

Ou:

$$v^2 = v_0^2 + 2GM \left(\frac{1}{r_T + x} - \frac{1}{r_T} \right)$$

onde $r = r_T + x$. Mas $g = \frac{GM}{r_T^2}$ é a aceleração da gravidade na superfície da Terra. Assim:

$$v^2 = v_0^2 - 2gx \left(1 + \frac{x}{r_T} \right)^{-1}$$

que se reduz a forma familiar (Torricelli) $v^2 = v_0^2 - 2gx$ para um campo gravitacional uniforme, isto é, quando x é muito menor do que r_T tal que o termo $\frac{x}{r_T}$ possa ser desprezado quando comparado com a unidade.

O ponto de retorno do movimento do projétil, isto é, a altura máxima atingida será obtida colocando-se $v = 0$ e explicitando x . O resultado será:

$$x_{\text{máx}} = h = \frac{v_0^2}{2g} \left(1 - \frac{v_0^2}{2g r_T} \right)^{-1}$$

Onde novamente obtém-se a forma usual, $h = \frac{v_0^2}{2g}$, se desprezarmos o segundo termo.

A velocidade de escape pode ser obtida fazendo-se, na expressão precedente, $x_{\text{máx}} = h \rightarrow \infty$. Isto ocorre quando o termo entre parênteses é igual a zero. O resultado é:

$$v_e = \sqrt{2g r_T} \approx 11 \text{ km/s}$$

Na atmosfera terrestre, a velocidade média das moléculas de ar (O_2 e N_2) é de aproximadamente 0,5 km/s, que é consideravelmente menor que a velocidade de escape, então a Terra retém sua atmosfera. (De acordo com a teoria cinética dos gases, a velocidade média das moléculas de um gás é igual a $\sqrt{3kT/m}$, onde k é a constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-16}$ erg/K) e T é a temperatura absoluta). A Lua, por outro lado, não tem atmosfera porque a velocidade de escape na sua superfície, devido à pequena massa, é consideravelmente menor do que na

superfície da Terra; qualquer molécula de oxigênio ou nitrogênio eventualmente escaparia. A atmosfera da Terra, entretanto, não contém uma quantidade significativa de hidrogênio, embora ele seja o elemento mais abundante no universo como um todo. A atmosfera de hidrogênio teria escapado da superfície da Terra a muito tempo porque sua velocidade molecular é suficientemente grande (devido à pequena massa da molécula de hidrogênio) tal que um número significativo de moléculas teria, em cada instante, velocidade maior do que a velocidade de escape.

Exemplo 4.3. Uma partícula, movendo-se em uma dimensão, está sob a influência da força $F = -kx + kx^3/\alpha^2$, onde k e α são constantes positivas.

- Determine o potencial $V(x)$, com $V(0) = 0$.
- Encontre os pontos de equilíbrio do potencial e classifique-os em pontos de equilíbrio estáveis e instáveis.
- Esboce o potencial $V(x)$.

d) Enumere e descreva todos os possíveis pontos de equilíbrio e movimentos, as energias ou intervalos de energia nos quais estes tipos de movimento ocorrem. Dê atenção especial para o movimento no caso $E = \frac{k}{4}\alpha^2$.

No movimento unidimensional, uma força que depende somente da posição é conservativa.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad V(x) &= - \int_0^x F(x') dx' = k \int_0^x x' dx' - \frac{k}{\alpha^2} \int_0^x x'^3 dx' \\ &= \frac{1}{2}kx^2 - \frac{k}{4\alpha^2} x^4 \end{aligned}$$

b) Para encontrar os pontos de equilíbrio, usamos as regras do cálculo de máximos e mínimos, isto é, fazemos $dV/dx = 0$ para obter os pontos e, após, verificamos o sinal de $d^2V/dx^2|_{x=x_0}$. Assim:

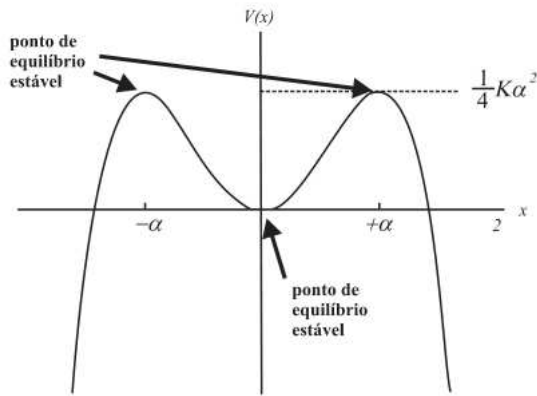
$$kx_0 - \frac{kx_0^3}{\alpha^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad kx \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} \right) = 0$$

Ou seja, os pontos de equilíbrio são: $x = 0$ e $x = \pm\alpha$. Assim:

$$\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} &= k \left(1 - \frac{3x^2}{\alpha^2} \right) \Big|_{x=0} = k > 0 \\ \frac{d^2V}{dx^2} &= k \left(1 - \frac{3x^2}{\alpha^2} \right) \Big|_{x=\pm\alpha} = -2k < 0 \end{aligned}$$

Isto é, $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável e $x = \pm\alpha$ são pontos de equilíbrio instável.

c) O potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{k}{4\alpha^2}x^4$ apresenta o seguinte comportamento:



d) A figura indica os pontos de equilíbrio.

- Se a energia total $E > (1/4)k\alpha^2$: movimento ilimitado para a esquerda ou para a direita.
- Se $E = (1/4)k\alpha^2$: (i) em repouso em $x = \pm\alpha$; (ii) indo para $+\infty(-\infty)$ se $x > \alpha(< -\alpha)$; (iii) indo para a esquerda ou para a direita entre $-\alpha$ e α , chegando próximo, mas nunca alcançando os pontos de equilíbrio $\pm\alpha$.
- Se $0 < E < (1/4)k\alpha^2$: (i) movimento periódico em torno de $x = 0$; (ii) vem do infinito, vira em $x > \alpha$ ou $x < -\alpha$ e retorna para o infinito.
- Se $E = 0$: (i) repouso em $x = 0$; (ii) vem do infinito, vira em $x > \alpha$ ou $x < -\alpha$ e retorna ao infinito.
- Se $E < 0$: (i) vem do infinito, vira em $x > \alpha$ ou $x < -\alpha$ e retorna para o infinito.

4.2 Forças não-conservativas

Voltemos à Segunda Lei de Newton [eq. (29)] quando a força F é função apenas da posição. Multiplicando ambos os lados da equação por v e usando o fato de que $v dv = \frac{1}{2}d(v^2)$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = F(x) v$$

Usando a relação entre a força $F(x)$ e a energia potencial [eq. (35)], temos:

$$F(x)v = - \frac{dV(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = - \frac{dV(x)}{dt}$$

Isto nos diz que, para uma força conservativa, a quantidade $P = Fv$ é uma derivada temporal total. Isto é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = - \frac{dV(x)}{dt}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x) \right) = 0$$

que é a expressão da conservação da energia.

A quantidade $P = \text{força} \times \text{velocidade}$ é a potência fornecida (ou dissipada) pela força aplicada à partícula. Suponhamos que a força aplicada seja igual a $F(x) + F'$, onde F' depende de t ou de v ou de ambos. Neste caso,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = F(x) v + F' v$$

Realizando o mesmo procedimento anteriormente efetuado, encontramos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + V(x) \right) = F' v$$

As forças do tipo de F' não são conservativas. Elas não podem ser derivadas de uma energia potencial. Ou, em outras palavras, a potência $F' v$ não pode ser escrita como uma derivada temporal total. Quando a potência $F' v$ for negativa, como no caso de forças de atrito, dizemos que F' é uma força dissipativa (porque a energia total da partícula vai diminuindo com o tempo). As forças de arrasto, espécie de força de atrito, são dissipativas.

4.3 Força como Função do tempo

Da Segunda Lei de Newton:

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

Integrando com relação ao tempo:

$$mv(t) = mv(t_0) + \int_{t_0}^t F(t')dt' \quad (41)$$

Definindo $m v(t) = p(t)$, como sendo o momento linear (*momentum linear* ou quantidade de movimento), na verdade uma quantidade vetorial, o princípio do Impulso-variação do *momentum linear* [eq. (41)] pode ser escrito como

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \int_{t_0}^t \vec{F}(t')dt' \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{I} \quad (42)$$

onde $I = \int_{t_0}^t F(t')dt'$ é o impulso da força $F(t)$.

4.3.1 Movimento de um corpo com massa variável – movimento de um foguete

No caso de um corpo cuja massa varia com o tempo, o conceito de impulso é bastante útil. Assim,

$$\sum \vec{F}(t) = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\int_{t_0}^t \sum \vec{F}(t') dt' = \int_{\vec{p}(t_0)}^{\vec{p}} d\vec{p}' ,$$

onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é o momentum linear (ou quantidade de movimento) da partícula de massa $m = m(t)$. Por simplicidade, vamos denotar $\vec{p}(t_0)$ por $\vec{p}_0$. Aqui, os símbolos $\sum$ e $\int$ podem ser perfeitamente intercambiados, pois não há prioridade entre eles, assim:

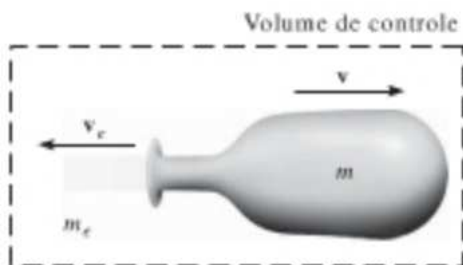
$$\boxed{\vec{p}_0 + \sum \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt' = \vec{p}} \quad (43)$$

A integral da eq. (46) é a definição de impulso resultante da aplicação de uma força (em geral, variável – função do tempo), no intervalo de tempo dt .

Assim, a eq. (46) nos diz que só é possível haver mudança no momentum linear de uma partícula⁴⁰ se, sobre ela, forem aplicados impulsos externos. Ou seja

$$\vec{p}_0 + \sum \vec{I}_{\text{ext}} = \vec{p} \quad \text{ou} \quad \sum \vec{I}_{\text{ext}} = \Delta\vec{p} .$$

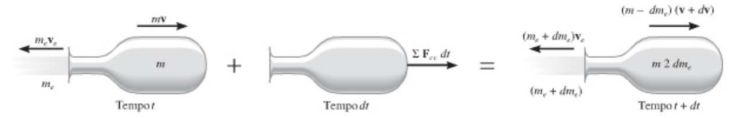
Considere o caso geral do movimento de um corpo com massa variável. Vamos considerar primeiramente o caso de **um sistema que perde massa** enquanto se desloca.



Durante o tempo dt o dispositivo, que tinha massa m e deslocava-se para a frente com velocidade $\vec{v}$, ejeta uma certa quantidade de massa dm com velocidade $\vec{v}_e$ no sentido contrário ao seu movimento e, com isso, passa a se deslocar com velocidade $\vec{v} + d\vec{v}$.

Os impulsos são criados pelas forças $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$, tais como o arrasto e o peso. Esta força resultante não

inclui a força que gera o movimento do dispositivo para frente, já que esta força (empuxo) é interna ao sistema (delimitado pelo volume de controle).



Aplicando o princípio do impulso – variação do momentum linear (eq. 46), obtemos:

$$mv - m_e v_e + \sum F_{\text{ext}} dt = (m - dm)(v + dv) - (m_e + dm)v_e$$

$$\sum F_{\text{ext}} = m \frac{dv}{dt} - (v + v_e) \frac{dm}{dt} \quad (44)$$

onde adotamos o sentido de v como positivo, desprezamos termos de segunda ordem (produtos de diferenciais) e consideramos a velocidade de ejeção v_e constante.

Na eq. (44), $(v + v_e) = v_{D/e}$ é a velocidade relativa do dispositivo em relação ao combustível por ele ejetado e dm/dt é a taxa com que o dispositivo consome (devido ao sinal negativo que o precede) seu combustível enquanto ganha velocidade.

Não precisamos de muita argumentação para inferir que o movimento de um foguete é o exemplo natural deste tipo de movimento que ganha propulsão consumindo sua massa (combustível).

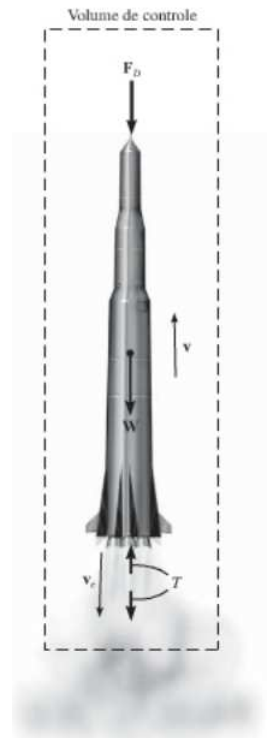
Neste caso, da eq. (44):

$$-F_D - W = m \frac{dv}{dt} - v_{D/e} \frac{dm}{dt} ,$$

onde o último termo representa o empuxo que a exaustão da queima do combustível exerce sobre o foguete.

Assim, a segunda lei de Newton (equação do foguete) aplicada a um sistema que perde massa é:

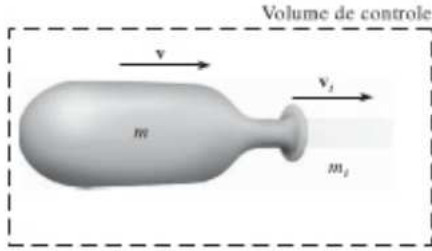
$$T - F_D - W = ma$$



⁴⁰Essa expressão é válida também para um sistema de partículas e para um corpo extenso (rígido).

Para um **sistema que ganha massa** enquanto se desloca, repetindo o procedimento acima, pela aplicação da eq. 46, obtemos:

$$\sum F_{\text{ext}} = m \frac{dv}{dt} + (v - v_i) \frac{dm}{dt} \quad (45)$$



onde consideramos as velocidades v e v_i , do dispositivo que ganha massa enquanto se desloca e da massa por ele ingerida, com o mesmo sinal (mesmo sentido). Aqui $v_{D/i} = v - v_i$ é a velocidade relativa entre o dispositivo e a massa externa ingerida por ele. dm/dt é a taxa com que o dispositivo ganha massa.

Exemplo 4.4. A massa inicial combinada de um foguete e seu combustível é m_0 . Uma massa total m_c de combustível é consumida a uma taxa $dm/dt = c$ e expelida a uma velocidade constante u em relação ao foguete. Determine a velocidade máxima do foguete, ou seja, no instante em que o combustível acaba. Despreze a variação do peso do foguete com a altitude e a resistência ao arrasto do ar. O foguete é lançado verticalmente, partindo do repouso.

A única força externa atuando sobre o foguete é o seu peso. Assim, aplicando a eq. 44:

$$\sum F_{\text{ext}} = m \frac{dv}{dt} - v_{D/c} \frac{dm}{dt} \Rightarrow -W = m \frac{dv}{dt} - uc$$

Em qualquer instante t durante o voo, a massa do foguete pode ser expressa como $m = m_0 - (dm/dt) t = m_0 - ct$. Como $W = mg$, a equação precedente se escreve

$$-(m_0 - ct)g = (m_0 - ct) \frac{dv}{dt} - uc$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{uc}{m_0 - ct} - g \right) dt$$

$$v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - ct} \right) - gt$$

O tempo t necessário para que todo o combustível seja consumido é ($m \rightarrow m_f = m_0 - ct = (m_f + m_c) - ct$)

$$m_c = \left(\frac{dm}{dt} \right) t = ct \Rightarrow t = \frac{m_c}{c}$$

onde m_f é a massa final (apenas da carcaça) do foguete. Assim:

$$v_{\text{máx}} = u \ln \left(\frac{m_0}{m_0 - m_c} \right) - \frac{gm_c}{c}$$

$$= \ln \left(\frac{m_f + m_c}{m_f} \right)^u - \frac{g}{c} m_c$$

Exemplo 4.5. Uma corrente de comprimento l tem massa m . Determine a intensidade da força F necessária para:

- eleva a corrente a uma velocidade constante v_c , partindo do repouso quando $y = 0$; e
- abaixar a corrente a uma velocidade constante v_c , partindo do repouso quando $y = l$.

Enquanto a corrente é elevada, a porção suspensa da corrente pode ser vista como um dispositivo que está ganhando massa. Todos os elos suspensos da corrente são submetidos a um novo impulso para baixo, para cada novo elo que for sendo elevado do solo (devido ao seu peso).

Assim, as forças agindo sobre o dispositivo que está ganhando massa (os elos suspensos da corrente) são:



$$\sum F_{\text{ext}} = F - W = F - mg \frac{y}{l}$$

Para aplicar a eq. 45, é necessário ainda descobrir a taxa com que a massa está sendo adicionada ao sistema. Visto que $v_c = v_{D/i}$ é constante, $dv_c/dt = 0$ e $dy/dt = v_c$. Integrando e usando a condição inicial de que $y = 0$, quando $t = 0$, teremos $y = v_c t$. Assim, a massa dos elos suspensos da corrente é, em qualquer instante, $m(y/l) = m(v_c t/l)$, e, portanto, a taxa com que a massa é adicionada à corrente suspensa é:

$$\frac{dm}{dt} = m \left(\frac{v_c}{l} \right)$$

Assim, substituindo na eq. 45, temos:

$$\sum F_{\text{ext}} = m \frac{dv}{dt} + v_{D/i} \frac{dm}{dt}$$

$$F - mg \left(\frac{y}{l} \right) = 0 + v_c \left(\frac{v_c}{l} \right)$$

Portando: $F = \frac{m}{l} (gy + v_c^2).$

Quando a corrente está sendo abaixada, os elos expelidos (aqueles depositados no chão, aos quais se dá velocidade zero) não transmitem impulso aos elos que permanecem suspensos.

No tempo t , a porção da corrente ainda fora do solo (suspensa) é proporcional ao seu comprimento. Assim

$$\sum F_{\text{ext}} = ma_y = 0$$

$$F - mg \left(\frac{y}{l} \right) = 0$$

Portanto:

$$F = mg \left(\frac{y}{l} \right)$$

4.3.2 Fluidos em Escoamento Estacionário

Vamos aplicar agora o princípio do impulso – variação do momentum linear ao escoamento estacionário da massa de partículas de um fluido entrando e saindo de um espaço que o confina (volume) numa dada região.

$$\sum \vec{F}(t) = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\int_{t_0}^t \sum \vec{F}(t') dt' = \int_{\vec{p}(t_0)}^{\vec{p}} d\vec{p}' ,$$

onde $\vec{p} = m \vec{v}$ é o momentum linear (ou quantidade de movimento).

Por simplicidade, vamos denotar $\vec{p}(t_0)$ por $\vec{p}_0$. Aqui, os símbolos $\sum$ e $\int$ podem ser perfeitamente intercambiados, pois não há prioridade entre eles, assim:

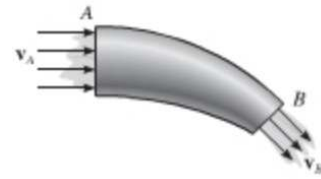
$$\boxed{\vec{p}_0 + \sum \int_{t_0}^t \vec{F}(t') dt' = \vec{p}} \quad (46)$$

A integral da eq. (46) é a definição de impulso resultante da aplicação de uma força (em geral, variável – função do tempo), no intervalo de tempo dt .

Assim, a eq. (46) nos diz que só é possível haver mudança no momentum linear de uma partícula⁴¹ se, sobre ela, forem aplicados impulsos externos. Ou seja

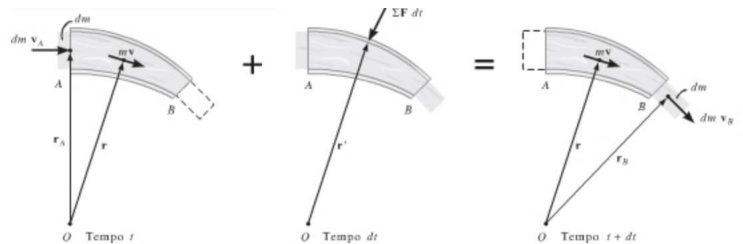
$$\vec{p}_0 + \sum \vec{I}_{\text{ext}} = \vec{p} \quad \text{ou} \quad \sum \vec{I}_{\text{ext}} = \Delta \vec{p} .$$

Considere o escoamento estacionário de um fluido, que passa por dentro de um cano, onde recebe um impulso produzido pela força resultante externa da superfície (parede) que força-o a modificar seu momentum linear (ou quantidade de movimento).



Uma quantidade elementar de massa dm do fluido entra no dispositivo pela extremidade A com velocidade $\vec{v}_A$, no tempo t . Como o escoamento é estacionário, no tempo $t + dt$, a mesma quantidade dm de fluido deixará a extremidade B com velocidade $\vec{v}_B$.

A variação na direção do escoamento do fluido dentro da região delimitada pelo volume de controle é causada pelo impulso produzido pela força resultante externa exercida pela parede do cano.



Aplicando o princípio do impulso – variação do momentum linear (eq. 46), obtemos:

$$dm\vec{v}_A + m\vec{v} + \sum \vec{F}dt = dm\vec{v}_B + m\vec{v}$$

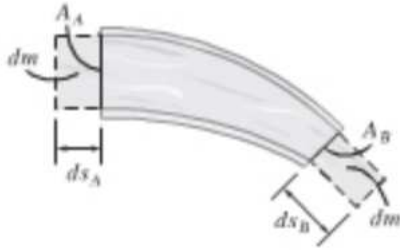
$$\sum \vec{F} = \frac{dm}{dt} (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \quad (47)$$

Tomando o rotacional (pela esquerda) da eq. (47) por $\vec{r}$ (o vetor posição que liga ao ponto O, obtemos

⁴¹Essa expressão é válida também para um sistema de partículas, para um corpo extenso (rígido) e, até mesmo, para o escoamento de um fluido.

$$\begin{aligned}
\vec{r}_A \times dm \vec{v}_A + \vec{r} \times m \vec{v} &+ \vec{r}' \times \sum \vec{F} dt \\
&= \vec{r}_B \times dm \vec{v}_B + \vec{r} \times m \vec{v} \\
\sum \vec{M}_0 &= \frac{dm}{dt} (\vec{r}_B \times \vec{v}_B - \vec{r}_A \times \vec{v}_A) \quad (48)
\end{aligned}$$

O termo dm/dt é chamado de *fluxo de massa* e mede a quantidade de fluido que entra ou sai da região de confinamento por unidade de tempo.

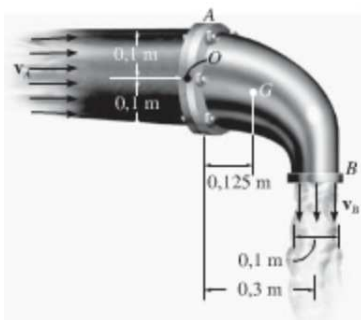


Se o fluido (incompressível), de densidade ρ , atravessa a área de seção reta A , então a *continuidade da massa* exige que $dm = \rho dV = \rho_A(ds_A A_A) = \rho_B(ds_B A_B)$. Portanto, durante o tempo dt , temos que $dm/dt = \rho_A v_A A_A = \rho_B v_B A_B$. Assim:

$$\frac{dm}{dt} = \rho v A = \rho R \quad (49)$$

onde $R = v A$, chamado de *vazão* ou *descarga*, mede o volume do escoamento do fluido por unidade de tempo.

Exemplo 4.6. Determine as componentes da reação que a junta fixa do cano em A exerce sobre o cotovelo mostrado na figura, se a água que flui pelo cano está submetida a uma pressão estática de 100kPa em A . A descarga em B é $R_B = 0,2\text{m}^3/\text{s}$. A densidade da água é $\rho_{H_2O} = 1000\text{kg}/\text{m}^3$, e o cotovelo cheio de água tem massa de 20kg e centro de massa em G .



Visto que a densidade da água é constante, $R_B = R_A = R$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{dm}{dt} &= \rho_{H_2O} R = (1000\text{kg}/\text{m}^3)(0,2\text{m}^3/\text{s}) = 200\text{kg}/\text{s} \\
v_B &= \frac{R}{A_B} = \frac{0,2\text{m}^3/\text{s}}{\pi(0,05\text{m})^2} = 25,46\text{m}/\text{s} \\
v_A &= \frac{R}{A_A} = \frac{0,2\text{m}^3/\text{s}}{\pi(0,1\text{m})^2} = 6,37\text{m}/\text{s}
\end{aligned}$$

Devido à pressão estática da água agindo na superfície de entrada, em A , uma força

$$F_A = p_A A_A = (100 \times 10^3 \text{N}/\text{m}^2) \pi (0,1\text{m})^2 = 3.141,6\text{N}$$

age na superfície A . Assim, as forças de reação da parede do cano sobre o fluido que escoam em seu interior são:

$$\begin{aligned}
\sum F_x &= \frac{dm}{dt} (v_{B,x} - v_{A,x}) \\
-F_x + 3.141,6\text{N} &= 200\text{kg}/\text{s} (0 - 6,37\text{m}/\text{s})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum F_y &= \frac{dm}{dt} (v_{B,y} - v_{A,y}) \\
-F_y - (20\text{kg})(9,81\text{m}/\text{s}^2) &= 200\text{kg}/\text{s} (-25,46\text{m}/\text{s} - 0)
\end{aligned}$$

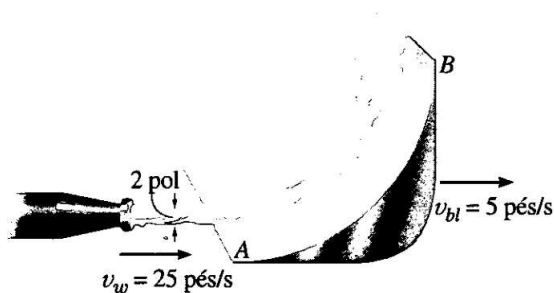
Portanto, as forças de reação da parede do cano sobre o fluido que escoam em seu interior são $F_x = 4,41\text{kN}$ e $F_y = 4,90\text{kN}$.

As reações de Momento (torque) são:

$$\begin{aligned}
\sum M_0 &= \frac{dm}{dt} (d_{0B} v_B - v_{0A} v_A) \\
M_0 &= (20 \times 9,81)\text{N} \times 0,125\text{m} \\
&= 200\text{kg}/\text{s} [(0,3\text{m})(25,46\text{m}/\text{s}) - 0] \\
M_0 &= 1,55\text{kN} \cdot \text{m}
\end{aligned}$$

Portanto, as reações de Momento (torque) são no sentido anti-horário para compensar as tendências de giro (no sentido horário) provocadas pelo peso do cano e da água em seu interior e pelas forças de reação das paredes sobre a água.

Exemplo 4.7. Um jato de água com 2pol de diâmetro e velocidade de 25pés/s incide numa lâmina em movimento que está se afastando do jato com velocidade de 5pés/s. Determine as componentes horizontal e vertical da força que a lâmina exerce sobre a água. Que potência a água gera sobre a lâmina? A água tem peso específico $\gamma_{H_2O} = 62,4\text{lb}/\text{pé}^3$.



Num referencial inercial fixo, a velocidade com que a água chega à lâmina é

$$\vec{v}_A = \{25 \hat{i}\} \text{pés/s}$$

A *velocidade relativa* do escoamento da água em relação à lâmina é $\vec{v}_{\text{H}_2\text{O}/\text{bloco}} = \vec{v}_{\text{H}_2\text{O}} - \vec{v}_{\text{bloco}} = 25 \hat{i} - 5 \hat{i} = \{20 \hat{i}\} \text{pés/s}$. No ponto B, a velocidade do escoamento é (vista de um referencial externo, fixo):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{\text{bloco}} + \vec{v}_{\text{H}_2\text{O}/\text{bloco}} = \{5 \hat{i} + 20 \hat{j}\} \text{pés/s}$$

pois a ação da lâmina é no sentido de mudar a direção de escoamento do jato d'água.

Assim, o fluxo d'água sobre a lâmina que sofre uma variação em seu momentum linear é⁴²

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= \rho_{\text{H}_2\text{O}} (\vec{v}_{\text{H}_2\text{O}/\text{bloco}}) A_A \\ &= \frac{62,4}{32,2} (20) \left[\pi \left(\frac{1}{12} \right)^2 \right] \\ &= 0,846 \text{ slugs/s} \end{aligned}$$

As forças de reação da lâmina sobre o fluxo d'água são:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \frac{dm}{dt} (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \\ F_x \hat{i} + F_y \hat{j} &= 0,846 (5\hat{i} + 20\hat{j} - 25\hat{i}) \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} F_x &= -16,9 \text{ lb} \\ F_y &= 16,9 \text{ lb} \end{aligned}$$

A potência desenvolvida pela água sobre a lâmina é⁴³:

$$\begin{aligned} P &= \vec{F} \cdot \vec{v} = F_x v_{\text{bloco}} \\ &= 16,9 \text{ lb} \times 5 \text{ pés/s} \times \left(\frac{1 \text{ hp}}{550 \text{ pés} \cdot \text{lb/s}} \right) = 0,154 \text{ hp} \end{aligned}$$

4.4 Exercícios Propostos

4.1. A força que atua numa partícula varia com a posição de acordo com a lei de potência

$$F(x) = -k x^n$$

a) Encontre a função energia potencial.

b) Se $v = v_0$ em $t = 0$ e $x = 0$, encontre v em função de x .

c) Determine os pontos de retorno do movimento.

4.2. A força exercida sobre uma partícula de massa $m = 0,5 \text{ kg}$ que se move ao longo do eixo x ($x > 0$) é dada por

$$F(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}$$

onde F é expressa em Newtons e x em metros⁴⁴.

a) Qual é o valor de x_0 correspondente ao ponto de equilíbrio?

b) Supondo que a partícula seja abandonada na posição $x = 0,75 \text{ m}$, qual é o valor da velocidade v da partícula ao passar pelo ponto de equilíbrio?

c) Qual é o valor máximo x_2 da coordenada x que ela atingirá?

⁴²Onde, em unidades do sistema inglês de unidades, a massa é medida em *slugs*. Assim como usualmente utilizamos unidades de massa para nos referirmos a força, nos E.U.A. e no U.K. utiliza-se hordienamente unidades de força para referir-se à massa, por isso a unidade *slug* é praticamente desconhecida para um cidadão comum (assim como aqui o é a unidade *Newton*). Lá, pede-se 2 libras de pão; aqui dizemos que pesamos 72 kg.

⁴³O *horsepower* (hp), termo inglês que literalmente significa força de cavalo, é uma unidade de origem inglesa, aproximadamente equivalente ao cavalo-vapor (cv), porém não são iguais: $1 \text{ hp} = 1,0138697 \text{ cv} = 745,6999 \text{ W}$. Uma vez que usava-se o trabalho de cavalos para continuar movendo os moinhos, na ausência de ventos, James Watt usou-os como referência para definir a força das máquinas a vapor. Verificou que um cavalo podia levantar 33000 lb de água a uma altura de um pé em um minuto.

⁴⁴Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5476>.

4.3. Observa-se que uma certa mola não obedece à Lei de Hooke. A força (em Newtons) que ela exerce quando esticada de uma distância x (em metros) possui uma intensidade igual a $52,8x + 38,4x^2$ na direção contrária ao alongamento⁴⁵.

a) Calcule o trabalho necessário para alongar a mola de $x = 0,50$ m até 1,00 m.

b) Com uma das extremidades da mola fixa, uma partícula de massa igual é presa à outra extremidade da mola quando esta é esticada de uma distância $x = 1,00$ m. Se a partícula for solta do repouso neste instante, qual será a sua velocidade no instante em que a mola tiver retornado à configuração na qual seu alongamento é de 0,5 m?

4.4. Calcule o trabalho realizado pelas forças normais e magnéticas.

O que se pode afirmar sobre tais forças⁴⁶?

4.5. Obtenha a expressão da energia mecânica para os seguintes casos simples⁴⁷:

a) Uma partícula sob ação de seu peso.

b) Uma partícula sob ação de uma força restauradora elástica.

c) Uma partícula sob a ação da força de atração gravitacional.

4.6. Analise os conceitos de Universo aberto, fechado e plano, à luz do sinal da energia de uma galáxia situada no mesmo⁴⁸.

4.7. Determine os pontos de retorno, em função da energia, de uma partícula sujeita a uma força elástica da forma

$$F(x) = -kx \quad .$$

Discuta o movimento a partir do gráfico da energia potencial⁴⁹.

4.8. Um asteroide de massa M encontra-se a uma grande distância da Terra e se aproxima dotado de uma velocidade V_0 , de tal forma que seu parâmetro de impacto seja b ⁵⁰.

a) Determine o momento angular do asteroide.

b) Determine a distância de máxima aproximação em função da energia do asteroide.

c) Discuta o risco de colisão, levando em conta o raio da Terra.

OBS.: Embora não termos ainda abordado os temas momento angular e colisões, lembre-se destes conceitos da Física 1. Aqui, pretende-se discutir o problema, evidenciando-se o conceito de energia.

⁴⁵Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5505>.

⁴⁶Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5470>.

⁴⁷Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5517>.

⁴⁸Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5533>.

⁴⁹Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5535>.

⁵⁰Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5537>.

⁵¹Há 6 situações dinâmicas distintas de interesse:

a) Ponto 1: se $E_m = 4J$ (linha roxa), em x_1 tem-se $U(x) = 4J \therefore K = 0 \Rightarrow v = 0$. No entanto o corpo não permanece parado pois $dU/dx|_{x=x_1} < 0 \Rightarrow F > 0$, evoluindo no sentido $+x$. Observe que $x < x_1$ é uma região proibida pois $U(x < x_1) > E_m$. Portanto $x = x_1$ é um **ponto de retorno**.

b) Ponto 2: se $E_m = 4J$ (linha roxa), em x_5 tem-se $U(x_5) = 4J \therefore K = 0 \Rightarrow v = 0$. Diferentemente do caso anterior, o estado de movimento do corpo é mantido pois $dU/dx|_{x=x_5} = 0 \therefore F = 0 \Rightarrow a = 0$.

c) Ponto 3: se $E_m = 1J$ (linha verde), tem-se comportamento análogo ao analisado no item (a); Ponto 1.

d) Ponto 4: se $E_m = 1J$ (linha verde), em x_2 tem-se que $dU/dx|_{x=x_2} = 0 \therefore F = 0$. Mas $U(x_2) < E_m \Rightarrow K \neq 0 \Rightarrow v \neq 0$. O corpo não permanece parado em $x = x_2$, ao contrário, oscila entre os pontos 3 e 5.

e) Ponto 5: se $E_m = 1J$ (linha verde), o comportamento é semelhante ao descrito em (a); Ponto 1, mas com a força $F < 0$, pois $dU/dx > 0$.

f) Ponto 6: se $E_m = 3J$ (linha rosa), em x_3 tem-se $U(x_3) = 3J \therefore K = 0 \Rightarrow v = 0$. Mas como $dU/dx|_{x=x_3} = 0$ então $F = 0$ e o corpo permanece em $x = x_3$.

Observe que os Pontos 2, 4 e 6 possuem uma característica em comum. Nestes 3 distintos pontos, a força que atua no corpo é nula. Tratam-se de pontos de equilíbrio do sistema, no entanto equilíbrios distintos.

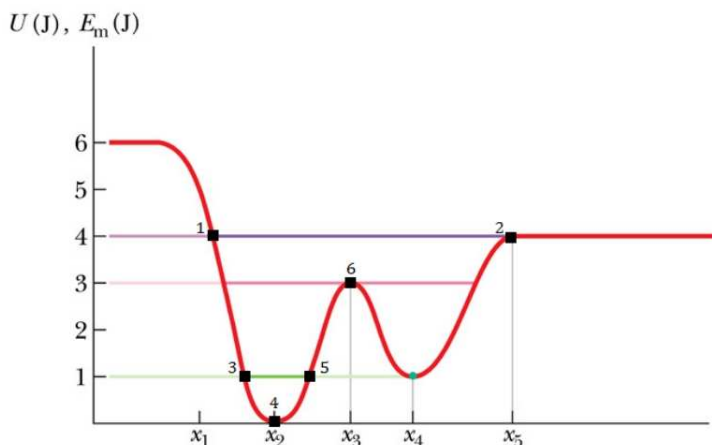
No Ponto 2, caso o corpo seja deslocado para a direita, permanecerá submetido à $F = 0$, um ponto de equilíbrio neutro.

Já, nos Pontos 3 e 5, ao ter sua posição perturbada, o corpo sofre a ação de uma força que tende a reconduzir o corpo à posição de equilíbrio. Esta força sempre contrária ao deslocamento do corpo produz movimentos limitados do tipo oscilatórios (verifica-se, localmente, que o potencial nesta região é semelhante ao proporcionado por uma mola).

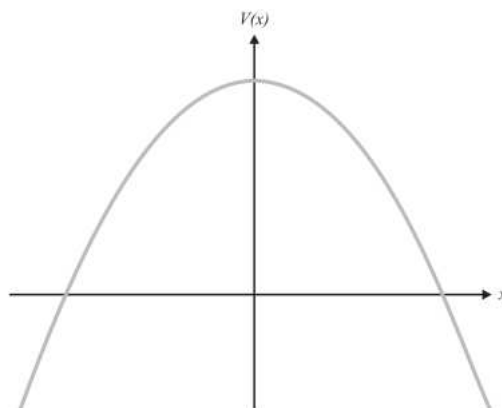
No Ponto 4, ao ter sua posição perturbada, o corpo sofre a ação de uma força que tende a reconduzir o corpo de volta a sua posição original. Denominam-se os pontos deste gênero de pontos de equilíbrio estável.

No Ponto 6, caso o corpo seja deslocado da posição $x = x_3$, uma força na direção do seu deslocamento surgirá. O corpo não retornará mais a este ponto. Pontos com este comportamento dispersivo são denominados de ponto de equilíbrio instável.

4.9. Analise as situações dinâmicas de interesse para o potencial representado na figura⁵¹



de um ponto de equilíbrio instável⁵³.



4.10. Uma massa m está sujeita a uma força restauradora $-kx$ e a uma força dissipativa $(\pm)\mu mg$, onde μ é o coeficiente de atrito (estático e cinético). Mostre que as oscilações são isócronas (período independente da amplitude) com a amplitude de oscilação decrescendo de $2\mu g/\omega_0^2$ durante cada meio ciclo até que a massa pare⁵².

4.11. Encontre a solução geral da equação do movimento de um corpo sob a ação de uma força linear repulsiva $F = kx$. Mostre que esse tipo de movimento pode ser esperado na vizinhança

4.12. A energia potencial para a força entre dois átomos numa molécula diatômica tem a forma aproximada:

$$V(x) = -\frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

onde x é a distância entre os átomos e a e b são constantes positivas⁵⁴.

a) Encontre a força⁵⁵.

b) Supondo que um dos átomos seja muito pesado e permaneça em repouso enquanto o outro se move ao longo de uma linha reta, descreva os possíveis movimentos⁵⁶.

⁵²Considere a situação em que a massa está numa posição de amplitude máxima A . Meio período depois ela estará novamente numa posição de amplitude máxima $A' < A$. Como a força é constante no intervalo considerado, a energia dissipada é igual a $\mu mg(A + A')$. Sendo assim, mostre que $A - A'$ independe do valor inicial de A , ou seja, independe da amplitude.

⁵³ $x(t) = Ae^{\eta t} + Be^{-\eta t}$. O potencial correspondente a esta força é $V(x) = \frac{1}{2} k x^2$. O ponto $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável, como indica a figura e pode ser facilmente demonstrado (cálculo de máximos e mínimos).

⁵⁴Veja uma resolução deste problema, com pequenas mudanças na notação, em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5539>.

⁵⁵ $F(x) = -\frac{6a}{x^7} + \frac{12b}{x^{13}}$.

⁵⁶

Este potencial é conhecido como potencial de Lennard-Jones e tem o comportamento ilustrado na figura ao lado.

A posição $x = x_e$ é a posição de equilíbrio. $V(x_e)$ corresponde ao mínimo da energia potencial.

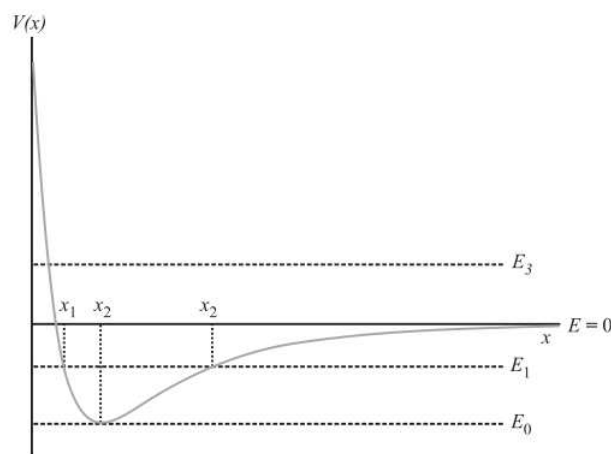
Somente para energias $E \geq V(x_e)$ existe movimento.

Quando a energia tem o valor E_0 , a partícula fica parada na posição de equilíbrio.

Quando $E_0 < E_1 < 0$, a partícula executa um movimento periódico entre dois pontos de retorno x_1 e x_2 .

Se E_1 é só ligeiramente maior que E_0 , então teremos pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio, o que corresponde às vibrações da molécula.

Quando $E \geq 0$, o movimento é ilimitado: os átomos se afastam indefinidamente. Dizemos que a molécula se dissocia.



⁵⁷ $x_e = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$ é a distância de equilíbrio e $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{m^3 b^4}{4a^7}\right)^{1/6}$ é o período de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio.

c) Ache a distância de equilíbrio e o período de pequenas oscilações em torno da posição de equilíbrio. A massa do átomo mais leve é m ⁵⁷.

4.13. Uma partícula de massa m tem uma velocidade $v = \alpha/x$, onde x é seu deslocamento. Encontre a força $F(x)$ responsável⁵⁸.

4.14. Uma corrente de comprimento l está estirada sobre uma mesa horizontal sem atrito, com um comprimento y_0 pendurado através de um buraco na mesa. A corrente é então liberada⁵⁹.

a) Encontre, em função do tempo, o comprimento da parte pendurada da corrente.

(b) Ache a velocidade da corrente quando ela perde contato com a mesa.

4.15. Encontre a equação do movimento de um foguete disparado verticalmente para cima considerando g constante. Encontre a razão entre a massa de combustível e a da carcaça para que o foguete alcance uma velocidade final igual a velocidade de escape da Terra (v_e), considerando-se que a velocidade de exaustão do gás é $K \cdot v_e$ ($K = \text{constante}$) e a taxa de exaustão é $\dot{m}$. Determine o valor numérico da relação combustível-carcaça para o caso em que $K = 1/4$, e $\dot{m}$ é igual a 1% da massa inicial de combustível por segundo.

4.16. Monte a equação diferencial do movimento de uma gota de chuva que cai em meio à neblina; recolhendo mais água enquanto cai. Considere que a gota permanece esférica e que a taxa de recolhimento de água é proporcional à área da seção transversal da gota multiplicada pela velocidade da mesma. Mostre que, se a gota parte do repouso com tamanho inicial infinitesimal então a aceleração é constante e igual a $g/7$ ⁶⁰.

4.17. Uma corrente de massa uniformemente distribuída e de comprimento a repousa inicialmente sobre uma mesa. Uma parte b de seu comprimento pende de uma das bordas da mesa enquanto a outra parte, de comprimento $a - b$ repousa sobre a tábua da mesa. Se a corrente é abandonada, mostre que a velocidade

da mesma, quando o último elo abandona a mesa, é $\sqrt{\frac{2g(a^3 - b^3)}{3a^2}}$.

4.18. Um foguete, ao viajar na atmosfera, experimenta uma força de resistência linear do ar $-K\vec{v}$. Encontre a equação diferencial do movimento quando todas as outras forças externas são desprezíveis. Integre a equação e mostre que se o foguete parte do repouso, a velocidade final é dada por $v = V\alpha \left[1 - (m/m_0)^{1/\alpha}\right]$, onde V é a velocidade relativa de exaustão dos gases, $\alpha = |\dot{m}/K| = \text{constante}$, m_0 é a massa inicial do foguete mais o seu combustível e m é a massa final do foguete, sendo $\dot{m}$ a taxa com que o foguete consome o seu combustível⁶¹.

4.19. O segundo estágio o combustível ser consumido.

B do foguete de dois estágios tem uma massa, quando vazio, de 5.000 toneladas e é lançado a partir do primeiro estágio A com uma velocidade inicial de 600 km/h. O combustível do segundo estágio tem uma massa de 0,7 Mg e é consumido a uma taxa de 4 kg/s. Se ele é ejetado do foguete a uma taxa de 3 km/s, medida em relação a B , determine a aceleração de B no instante em que o motor é acionado e imediatamente antes de todo



Despreze os efeitos da variação da gravidade com a altitude e da resistência do ar⁶².

4.20. Um avião a jato de 12.000 toneladas tem uma velocidade constante de 950 km/h ao voar ao longo de uma linha reta horizontal. O ar penetra nas cavidades de entrada de ar S a uma taxa de 50 m³/s. Se o motor queima o

⁵⁸ $F(x) = -m \frac{\alpha^2}{x^3}$.

⁵⁹a) $y(t) = \frac{y_0}{2} (e^{+\alpha t} + e^{-\alpha t}) = y_0 \cosh(\alpha t)$; e b) $\dot{y}(t) = \frac{\alpha y_0}{2} (e^{+\alpha t} - e^{-\alpha t}) = y_0 \sinh(\alpha t) = \sqrt{g l \left[1 - \left(\frac{y_0}{l}\right)^2\right]}$.

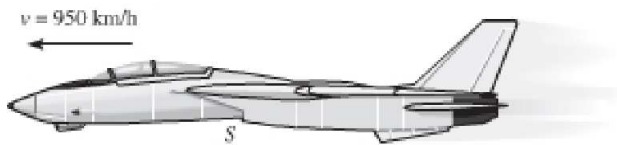
⁶⁰ $\ddot{z} = g - \frac{3}{z} \dot{z}^2$.

⁶¹Dica: A equação de movimento do foguete é $m \dot{v} + V \dot{m} + K v = 0$.

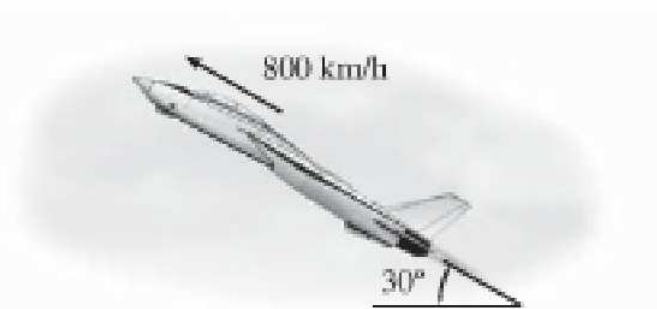
⁶² $a_1 = 2,11 \text{ m/s}^2$ e $a_2 = 2,40 \text{ m/s}^2$.

combustível a uma taxa de 0,4 kg/s e o gás (ar e combustível) é exaurido em relação ao avião, a uma velocidade de 450 m/s, determine a força de arrasto resultante exercida sobre o avião pela resistência do ar. Suponha que o ar tem uma densidade constante de 1,22 kg/m³⁶³.

Dica: visto que a massa entra e sai do avião, as eqs. (44) e (45) devem ser combinadas para resultar em: $\sum F_s = m \frac{dv}{dt} - v_{D/e} \frac{dm_e}{dt} + v_{D/i} \frac{dm_i}{dt}$, onde m_i é a massa que ingressa no sistema (avião) e m_e é a massa por ele ejetada.

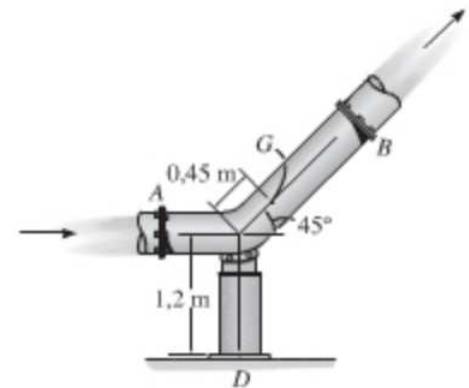


- 4.21. O jato mostrado na figura viaja a uma velocidade de 800 km/h, a 30° em relação à horizontal. Se o combustível está sendo gasto a 1,5 kg/s, e o motor admite o ar a 200 kg/s, enquanto o gás exaurido (ar e combustível) tem uma velocidade relativa de 9840 m/s, determine a aceleração do avião nesse instante. A resistência ao arrasto do ar é $F_D = (0,315v^2)$ N, onde a velocidade é medida em m/s. O jato tem massa de 7.500 kg (Veja a dica do problema anterior.).

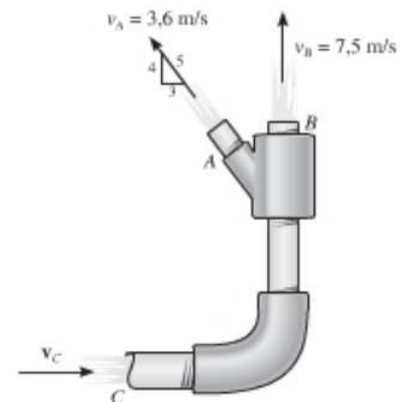


- 4.22. A curva da figura abaixo está conectada ao cano nos flanges em A e B. Se o diâmetro do cano é 0,3 m e ele transmite uma descarga de 1,35 m³/s, determine as componentes horizontal e vertical da reação da força e da reação do momento exercidas sobre a base fixa D do apoio. O peso total da curva e da água dentro dela é 2.500 N, com centro de massa no

ponto G. A pressão da água nos flanges A e B é 120 kN/m² e 96 kN/m², respectivamente. Suponha que nenhuma força é transferida aos flanges em A e B. O peso específico da água é $\gamma_{H_2O} = 10 \text{ kN/m}^3$.



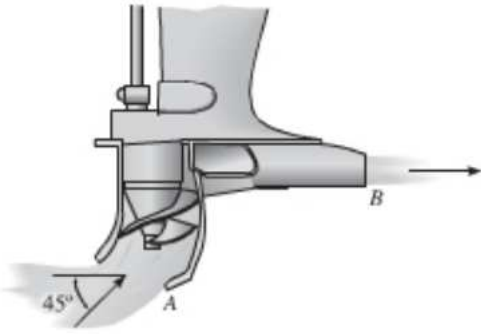
- 4.23. A pressão da água em C é 300 kN/m². Se a água flui para fora do cano em A e B, com velocidades $v_A = 3,6 \text{ m/s}$ e $v_B = 7,5 \text{ m/s}$, determine as componentes da força horizontal e vertical exercidas sobre a junta, necessárias para manter toda a estrutura em equilíbrio. Despreze o peso do cano e da água dentro dele. O cano tem um diâmetro de 18 mm em C, e em A e B o diâmetro é de 12 mm⁶⁴. $\gamma_{H_2O} = 10 \text{ kN/m}^3$.



- 4.24. Uma lancha é propelida pelo motor a jato mostrado na figura. A água do mar é puxada pela bomba, a uma vazão de 0,54 m³/s, através de uma entrada A, de diâmetro 150 mm, conforme indica a figura abaixo. Uma hélice acelera a vazão de água e a força para fora horizontalmente, através de uma saída de 100 mm de diâmetro, B. Determine as componentes horizontal e vertical do empuxo exercidas sobre a lancha. O peso específico da água é $\gamma_{H_2O} = 10 \text{ kN/m}^3$.

⁶³ $F_D = 11,5 \text{ kN}$.

⁶⁴ $F_x = 83,21 \text{ N}$ e $F_y = 7,68 \text{ N}$.



4.25. O cotovelo de um cano subterrâneo de 125 mm de diâmetro é submetido a uma pressão estática de 80 k N/m^2 , conforme indica a figura. A velocidade da água que passa por dentro dele é $v = 2,4 \text{ m/s}$. Supondo que as conexões do cano em A e B não oferecem nenhuma força de resistência vertical sobre o cotovelo, determine

a força vertical $\vec{F}$, que o solo deve então exercer sobre o cotovelo para mantê-lo em equilíbrio⁶⁵. Despreze o peso do cotovelo e da água dentro dele. O peso específico da água é $\gamma_{H_2O} = 10 \text{ k N/m}^3$.



5 Impulso e Colisões

5.1 Força aplicada dependente do tempo

Da Segunda Lei de Newton:

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

Integrando com relação ao tempo:

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t') dt' \quad (50)$$

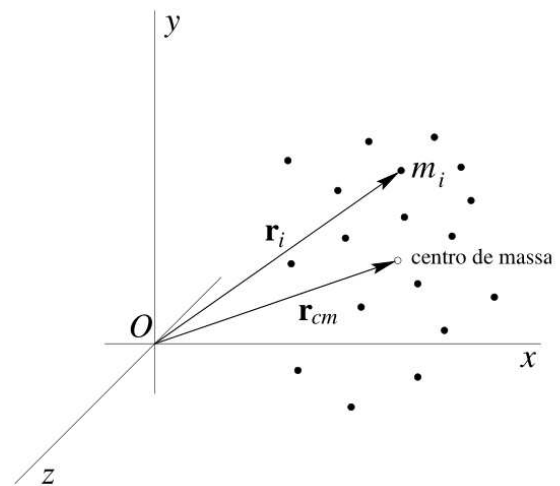
Como $v(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, integrando novamente a equação precedente em relação ao tempo, obtemos:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t \left[v(t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^{t'} F(t'') dt'' \right] dt' \quad (51)$$

Assim, conhecendo-se $F(t)$, a velocidade e a posição da partícula podem ser obtidas pela aplicação das equações (50) e (51).

5.2 Dinâmica de um Sistema de Muitas Partículas

Ao estudarmos um sistema ou conjunto de muitas partículas livres, é importante focar nas características gerais do movimento de tal sistema.



Consideremos um sistema constituído de n partículas de massas $m_1, m_2, \dots, m_n$, cujos vetores posição são, respectivamente $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Definimos o centro de massa do sistema como o ponto cujo vetor posição r_{cm} é dado por:

$$r_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \quad (52)$$

onde $m = \sum_{i=1}^n m_i$ é a massa total do sistema. A expressão (52) pode ser decomposta para cada uma das 3 componentes cartesianas de $\vec{r}_{cm} \Rightarrow x_{cm}, y_{cm}$ e z_{cm} .

Diferenciando a eq. (52) em relação ao tempo, obtemos:

⁶⁵ $F = 1490,3 \text{ N}$.

$$m\vec{V}_{\text{cm}} = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{P}_{\text{cm}} \quad (53)$$

que nos diz que o momentum linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade de seu centro de massa.

A equação de movimento da i -ésima partícula é, então:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1; j \neq i}^n \vec{f}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{p}}_i$$

onde $\vec{F}_i$ é a força externa total agindo em i e $\vec{f}_{ij}$ é a soma das forças de interação (internas) em i devido a presença das demais partículas que compõe o sistema.

Somando para todas as partículas, temos:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1; j \neq i}^n \vec{f}_{ij} = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i$$

Para cada força $\vec{f}_{ij}$, existirá sempre uma força $\vec{f}_{ji}$ igual e em sentido contrário (Terceira Lei de Newton), de forma que o segundo termo da equação precedente será sempre nulo. Assim⁶⁶:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}}_{\text{cm}} = m\vec{a}_{\text{cm}} \quad (54)$$

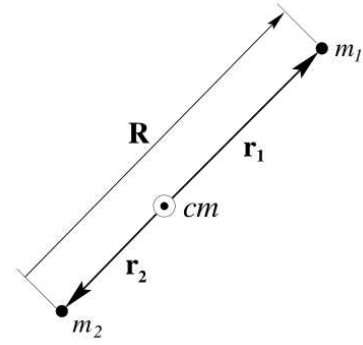
Em especial, quando nenhuma força externa age no sistema ($\sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{a}_{\text{cm}} = 0$ e $\vec{V}_{\text{cm}} = \text{constante}$), o momentum linear do sistema permanece constante.

$$\sum \vec{p}_i = \vec{P}_{\text{cm}} = m\vec{V}_{\text{cm}} = \text{constante}$$

Esta é uma consequência direta da Terceira Lei de Newton no caso de um sistema isolado e é válida, inclusive, quando as forças entre as partículas não obedecem diretamente à lei de ação e reação, como no caso da força magnética entre duas partículas móveis carregadas.

5.3 Movimento de Dois Corpos que Interagem – Massa Reduzida

Consideremos o movimento de um sistema constituído de dois corpos (tomados como partículas) que interagem através de uma força central.



Vamos tomar um sistema isolado e portanto com centro de massa com velocidade constante. Por simplicidade tomaremos o centro de massa como origem. Temos então, de (52):

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \quad (55)$$

onde $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ representam a posição das partículas de massa m_1 e m_2 , respectivamente, em relação ao centro de massa.

Se $\vec{R}$ é o vetor posição da partícula 1 relativo à partícula 2, então

$$\vec{R} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1 \left(1 - \frac{\vec{r}_2}{\vec{r}_1}\right) = \vec{r}_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

A equação de movimento da partícula 1 relativo ao centro de massa é

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 = f(R) \frac{\vec{R}}{R}$$

onde $f(R)$ é o módulo da força mútua entre as duas partículas. Usando a eq. (55), podemos escrever:

$$\boxed{\mu \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = f(R) \frac{\vec{R}}{R}} \quad \text{onde} \quad \boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad (56)$$

A quantidade μ é conhecida por *massa reduzida*. A nova equação do movimento (eq. 56) nos dá o movimento da partícula 1 em relação à partícula 2 (tomada como fixa). Esta equação é a equação para o movimento de uma partícula de massa μ movendo-se em um campo central de força dada por $f(R)$. Deste modo, o fato de m_2 estar em movimento relativo ao centro de massa está automaticamente computado quando se substitui m_1 por μ . Se os corpos têm massas iguais, então $\mu = m/2$. Por outro lado, se m_2 é muito maior que m_1 , então μ é praticamente igual a m_1 .

⁶⁶Em particular, considere um conjunto de partículas movendo-se em um campo gravitacional uniforme. Neste caso, $\vec{F}_i = m_i \vec{g}$, de forma que $\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{g} = m \vec{g}$ e, por conseguinte: $\vec{a}_{\text{cm}} = \vec{g}$.

5.4 Colisões

Sempre que dois corpos colidem, a força que cada um exerce no outro durante o contato é uma força interna, caso os dois sejam considerados um sistema. O momentum linear total fica portanto inalterado. Podemos então escrever

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

ou, equivalentemente,

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

onde os subscritos 1 e 2 referem-se às duas partículas e as linhas caracterizam os momenta e velocidades das partículas após a colisão. As equações acima são completamente gerais.

Considerando o balanço energético, podemos escrever

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + Q$$

onde Q é introduzida para indicar a energia total perdida (ou ganha), que ocorre como resultado da colisão.

No caso de uma colisão perfeitamente elástica, não existe mudança na energia cinética total de modo que $Q = 0$. Se existir uma perda de energia, então Q é positivo. Esta colisão é denominada endoérgica. Pode também ocorrer que haja aumento da energia cinética total. Isto pode ocorrer, por exemplo, se houver alguma explosão no ponto de contato dos dois corpos. Neste caso, Q é negativo e a colisão é denominada exoérgica.

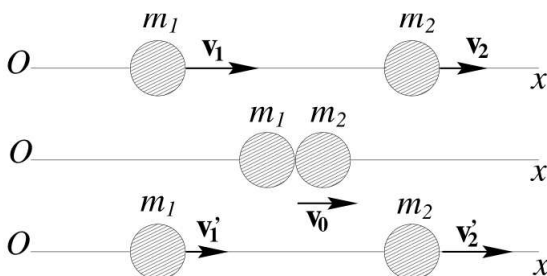
Podemos, ainda, escrever a relação do balanço energético como:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} + Q$$

onde $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 (\vec{v} \cdot \vec{v})}{m} = \frac{p^2}{2m}$ é a energia cinética.

5.4.1 Colisão Frontal

Consideremos o caso especial de uma colisão frontal de dois corpos ou partículas.



Neste caso,

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

onde o sinal de v indica o sentido do movimento.

É conveniente introduzir o parâmetro ϵ , conhecido por coeficiente de restituição, definido como a razão entre a velocidade de separação V' e a velocidade de aproximação V (ou, equivalentemente, como a razão entre os impulsos de restituição e de deformação ou compressão).

$$\epsilon = \frac{|\vec{v}_2' - \vec{v}_1'|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} = \frac{V'}{V} \quad (57)$$

É fácil verificar que em uma colisão perfeitamente elástica $\epsilon = 1$ ($Q = 0$). Em uma colisão perfeitamente inelástica, os dois corpos permanecem unidos após a colisão de modo que $\epsilon = 0$. Nas situações reais, o valor de ϵ situa-se entre 0 e 1.

Com o valor de ϵ definido pela equação (57), podemos obter as velocidades finais das partículas em função de suas velocidades iniciais e de suas massas. O resultado é:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - \epsilon m_2) v_1 + (m_2 + \epsilon m_2) v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{(m_1 + \epsilon m_1) v_1 + (m_2 - \epsilon m_1) v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (58)$$

- No caso inelástico ($\epsilon = 0$), verifica-se que $\vec{v}_1' = \vec{v}_2'$, isto é, não há recuo relativo.

- No caso especial em que os dois corpos possuem massas iguais, $m_1 = m_2$ e a colisão é perfeitamente elástica, $\epsilon = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{v}_1' &= \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2' &= \vec{v}_1 \end{aligned}$$

os dois corpos trocam suas velocidades como resultado da colisão.

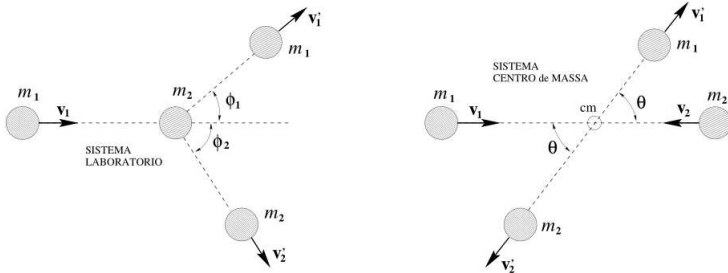
No caso geral de colisões frontais não elásticas, é fácil verificar que a perda de energia Q é relacionada com o coeficiente de restituição na forma

$$Q = \frac{1}{2} \mu v^2 (1 - \epsilon^2) \quad (59)$$

onde μ é a massa reduzida e v a velocidade relativa dos dois corpos antes da colisão.

5.4.2 Colisão Oblíqua e Espalhamento

Vamos voltar nossa atenção para um caso de uma colisão mais geral do que aquela em que o movimento está confinado a uma linha reta. Aqui a notação vetorial tem que ser mantida. Vamos escolher a partícula de massa m_1 como a partícula incidente (projétil) e a partícula de massa m_2 como a partícula alvo. Assim $\vec{v}_2 = 0$. Vamos considerar que as massas não se modifiquem como resultado da colisão (diferentemente do que ocorre na física atômica e nuclear). Comparando as coordenadas do Laboratório e do Centro de Massa:



- No sistema do laboratório: ϕ_1 é o ângulo de deflexão da partícula incidente, depois que ela atingiu o alvo e ϕ_2 é o ângulo que a partícula alvo faz com a direção original do movimento da partícula incidente.

- No sistema do centro de massa: uma vez que o centro de massa deve permanecer sobre a linha que une as duas partículas, ambas as partículas aproximam-se do centro de massa, colidem e afastam-se do mesmo, em sentidos opostos. O ângulo θ é o ângulo de deflexão da partícula incidente em relação à direção original de movimento.

Da definição de centro de massa, vemos que o momentum linear do conjunto no referencial do centro de massa é nulo tanto antes quanto depois da colisão. Desta forma

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= 0 \\ \vec{p}_1' + \vec{p}_2' &= 0\end{aligned}$$

As barras são usadas para indicar que a quantidade em questão se referem ao sistema do centro de massa

O balanço energético corresponde a

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\bar{p}_1'^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}_2'^2}{2m_2} + Q$$

Que, com $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2' = -\vec{p}_1'$, se escreve

$$\frac{\bar{p}_1^2}{2\mu} = \frac{\bar{p}_1'^2}{2\mu} + Q$$

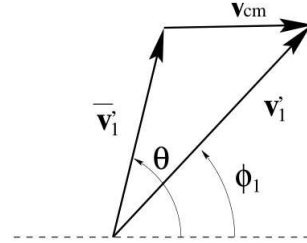
A velocidade do centro de massa⁶⁷ é:

$$\vec{V}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \quad (60)$$

Então, temos

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \vec{V}_{\text{cm}} = \frac{m_2 \vec{v}_1'}{m_1 + m_2}$$

A figura mostra a relação entre $\vec{V}_{\text{cm}}$, $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_1$.



Da figura, vemos que

$$\begin{aligned}v_1' \sin \phi_1 &= \bar{v}_1' \sin \theta \\ v_1' \cos \phi_1 &= \bar{v}_1' \cos \theta + v_{\text{cm}}\end{aligned}$$

Dividindo uma pela outra, encontramos uma equação que conecta os ângulos de espalhamento nos dois sistemas

$$\text{tg} \phi_1 = \frac{\sin \theta}{\gamma + \cos \theta}$$

onde

$$\gamma = \frac{v_{\text{cm}}}{\bar{v}_1'} = \frac{m_1 v_1}{\bar{v}_1' (m_1 + m_2)} \quad (61)$$

No caso geral de colisões não elásticas, podemos escrever γ como

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \left[1 - \frac{Q}{T} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \right]^{-1/2} \quad (62)$$

onde T é a energia cinética da partícula incidente, medida no referencial do laboratório.

No caso particular de uma colisão elástica ($Q = 0$) $\Rightarrow \gamma = m_1/m_2$. Neste caso:

- Se $m_2 \gg m_1$, então γ é pequeno e $\text{tg} \phi_1 \approx \text{tg} \theta$, ou $\phi_1 \approx \theta$. Isto significa que o ângulo de espalhamento visto no referencial do laboratório ou no referencial do centro de massa são praticamente iguais.

- Se $m_1 = m_2$, então $\gamma = 1$ ($Q = 0$) e a relação de espalhamento se reduz a

$$\text{tg} \phi_1 = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \text{tg} \frac{\theta}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \frac{\theta}{2}$$

que significa que o ângulo de deflexão medido no referencial do laboratório é exatamente a metade

⁶⁷Obviamente que no sistema do laboratório.

daquele medido no referencial do centro de massa. Além disto, uma vez que o ângulo de deflexão da partícula alvo é $\pi - \theta$ no referencial do centro de massa, temos que o mesmo ângulo medido no referencial do laboratório é $(\pi - \theta)/2$. Deste modo as duas partículas deixam o ponto de impacto em direções perpendiculares quando observadas no sistema do laboratório (“Lei da Sinuca!”).

5.5 Impulso em Colisões

Forças de duração temporal extremamente curta, tais como as exercidas por corpos que colidem, são denominadas forças impulsivas. Se analisarmos apenas um dos corpos que colidem, sua equação de movimento será

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \quad \text{ou} \quad \Delta(m\vec{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \hat{p}$$

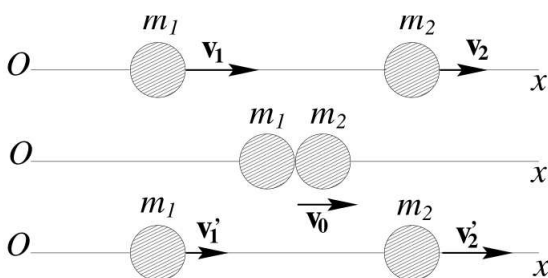
onde denotamos por $\hat{p}$ a integral temporal da força, que é denominada de impulso. Um impulso ideal seria aquele produzido por uma força que tende para infinito com duração que tende para zero de modo que a integral $\int \vec{F} dt$ seja finita. Tal impulso ideal produziria uma mudança instantânea do momentum e da velocidade do corpo sem produzir qualquer deslocamento.

Aplicamos o conceito de impulso ao caso de uma colisão frontal de dois corpos esféricos. Iremos dividir o impulso em duas partes denominadas impulsos de compressão $\hat{p}_c$ e impulso de restituição $\hat{p}_r$. Vamos considerar apenas as componentes ao longo da direção que une os centros das esferas.

Podemos escrever, para $\hat{p}_c$

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_0 - m_1 \vec{v}_1 &= \hat{p}_c \\ m_2 \vec{v}_0 - m_2 \vec{v}_2 &= -\hat{p}_c \end{aligned}$$

onde v_0 é a velocidade comum das duas esferas no instante em que a velocidade relativa é zero.



Similarmente, para o impulso de restituição temos

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1' - m_1 \vec{v}_0 &= \hat{p}_r \\ m_2 \vec{v}_2' - m_2 \vec{v}_0 &= -\hat{p}_r \end{aligned}$$

Eliminando v_0 das equações precedentes, ficamos com

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) &= \hat{p}_c (m_1 + m_2) \\ m_1 m_2 (\vec{v}_1' - \vec{v}_2') &= \hat{p}_r (m_1 + m_2) \end{aligned}$$

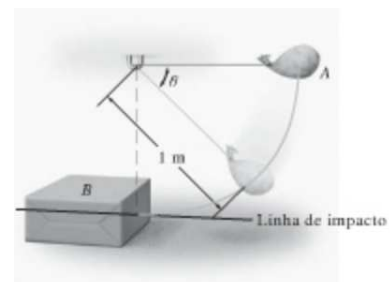
Dividindo a segunda equação pela primeira temos

$$\frac{\vec{v}_2' - \vec{v}_1'}{\vec{v}_1 - \vec{v}_2} = \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_c}$$

mas o termo à esquerda é justamente a definição do coeficiente de restituição de modo que

$$\epsilon = \frac{\hat{p}_r}{\hat{p}_c} \quad (63)$$

Exemplo 5.1. O saco A , que tem peso de 6 kg, é liberado do repouso na posição $\theta = 0^\circ$, como mostra a figura. Depois de cair até $\theta = 90^\circ$, ele atinge uma caixa B , de 18 kg. Se o coeficiente de restituição entre o saco e a caixa é $\epsilon = 0,5$, determine as velocidades do saco e da caixa logo após o impacto. Qual é a perda de energia durante a colisão?



Colocando a referência de energia potencial em $\theta = 0^\circ$, podemos usar o princípio da conservação da energia mecânica total para calcular a velocidade do saco imediatamente antes do impacto.

$$\begin{aligned} T_0 + V_0 &= T_1 + V_1 \\ 0 + 0 &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + m_A g (y - y_0) \\ 0 &= \frac{1}{2} (6 \text{ kg}) v_A^2 + (6 \text{ kg}) (9,81 \text{ m/s}^2) (0 - 1 \text{ m}) \\ v_A &= 4,43 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Será com esta velocidade que os dois objetos colidirão. Fazendo uso das eqs. (58), com a substituições dos índices $1 \rightarrow A$ e $2 \rightarrow B$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\vec{v}'_A &= \frac{(m_A - \epsilon m_B) v_A + (m_B + \epsilon m_B) v_B}{m_A + m_B} \\
&= -0,554 m/s \\
\vec{v}'_B &= \frac{(m_A + \epsilon m_A) v_A + (m_B - \epsilon m_A) v_B}{m_A + m_B} \\
&= 1,66 m/s
\end{aligned}$$

onde $v_B = 0$.

A perda de energia durante a colisão pode ser calculada utilizando-se a eq. (59), assim:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{2} \mu v^2 (1 - \epsilon^2) \\
&= \frac{1}{2} (4,5 kg) (4,43 m/s)^2 (1 - (0,5)^2) = 33,12 J
\end{aligned}$$

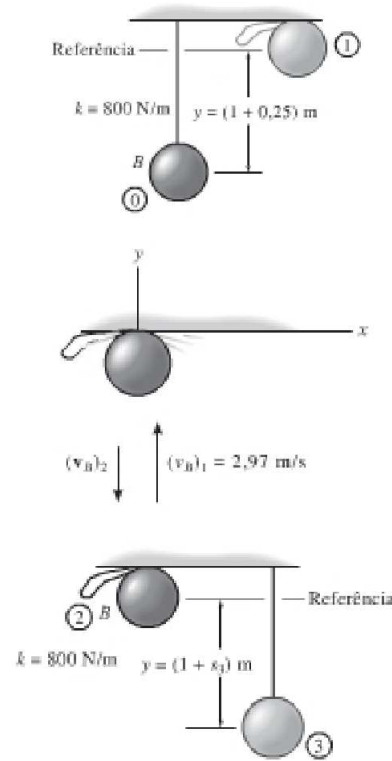
onde $\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} = 4,5 kg$ e $v = v_A = 4,43 m/s$ é a velocidade relativa dos dois corpos antes da colisão.

Este mesmo resultado poderia ser obtido aplicando-se o princípio do trabalho – variação da energia cinética,

$$U(x_1 \rightarrow x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = T_2 - T_1$$

onde um trabalho negativo implica em perda de energia na colisão.

Exemplo 5.2. A bola B , mostrada na figura, tem massa de $1,5 kg$ e está suspensa do teto por uma corda elástica de $1 m$ de comprimento. Se a corda for deformada $0,25 m$ para baixo e a bola for liberada do repouso, determine o quanto a corda se estende após a bola ricochetear do teto. A rigidez da corda é $k = 800 N/m$, e o coeficiente de restituição entre a bola e o teto é $\epsilon = 0,8$.



Com a referência de energia potencial, conforme indica a figura, podemos utilizar o princípio da conservação da energia mecânica total para determinar a velocidade da bola imediatamente antes do impacto.

$$\begin{aligned}
T_0 + V_0 &= T_1 + V_1 \\
\frac{1}{2} m v_0^2 + m g (y - y_0) &= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + 0 \\
0 + (1,5 kg) (9,81 m/s^2) (0 - 1,25 m) &+ \frac{1}{2} (800 N/m) (0,25 m)^2 = \frac{1}{2} (1,5 kg) v_1^2 \\
\Rightarrow v_1 &= 2,968 m/s
\end{aligned}$$

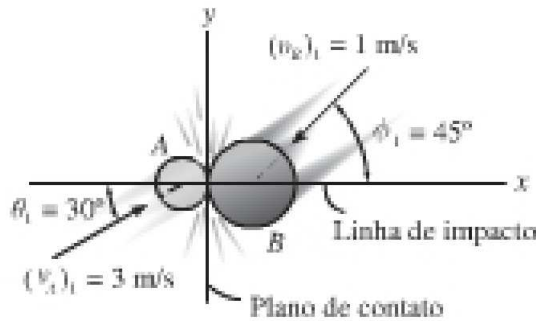
Como o teto de $m_2 \rightarrow \infty$ permanece em repouso, tanto antes quanto após o impacto, $v_2 = v'_2 = 0$, as eqs. (58) não são adequadas para se determinar a velocidade da bola após o impacto. Entretanto, temos a definição da eq. (57), assim:

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{V'}{V} = \frac{|\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|} \Rightarrow 0,8 = \frac{|0 - \vec{v}'_1|}{|0 - 2,968|} \\
\Rightarrow \vec{v}'_1 &= 2,374 m/s
\end{aligned}$$

para baixo. Para determinar que a corda se estica por mais 237 mm após se distender completamente, aplicamos novamente o princípio da conservação da energia mecânica total após o impacto.

Exemplo 5.3. Dois discos lisos A e B , tendo massas de $1 kg$ e $2 kg$, respectivamente, colidem com as

velocidades mostradas na figura. Se o coeficiente de restituição para os discos é $\epsilon = 0,75$, determine as componentes x e y da velocidade final de cada disco, logo após a colisão.



A linha de impacto da colisão ocorre, como mostra a figura, na direção x . Assim, o coeficiente de restituição é a razão entre as componentes das velocidades relativas após e antes da colisão nesta direção, ou seja

$$\epsilon = \frac{|v'_{B,x} - v'_{A,x}|}{|v_{B,x} - v_{A,x}|} = \frac{|v'_{B,x} - v'_{A,x}|}{|(-1 \cos 45^\circ) - 3 \cos 30^\circ|}$$

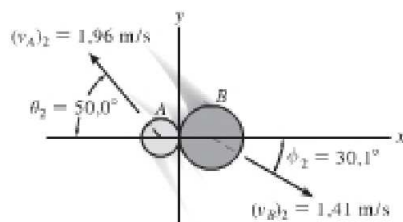
$$\therefore |v'_{B,x} - v'_{A,x}| = \frac{3}{8} (\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) = 2,479 \text{ m/s}$$

Para os propósitos deste problema, é suficiente aplicarmos simplesmente o princípio da conservação da quantidade de movimento.

Para a componente x :

$$m_A v_{A,x} + m_B v_{B,x} = m_A v'_{A,x} + m_B v'_{B,x}$$

$$v'_{A,x} + 2v'_{B,x} = 1,184 \text{ m/s}$$



Como nenhum impulso externo atua na direção y , nesta direção o momento linear de cada um dos discos se conserva e isto implica que as suas velocidades, nesta direção, mentém-se inalteradas. Assim:

$$v_{A,y} = v'_{A,y} = 1,5 \text{ m/s}$$

$$v_{B,y} = v'_{B,y} = -0,707 \text{ m/s}$$

$$v'_{A,x} = -1,26 \text{ m/s}$$

$$v'_{B,x} = 1,22 \text{ m/s}$$

Entretanto, para utilizar as equações aqui desenvolvidas, basta apenas aplicar as eqs. (58) para as componentes x de cada uma das velocidades, pois a colisão ocorre nesta direção (colisão frontal). Assim:

$$v'_{1,x} = \frac{(m_1 - \epsilon m_2) v_{1,x} + (m_2 + \epsilon m_2) v_{2,x}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(1 - \frac{3}{4} \times 2) \times 3 \frac{\sqrt{3}}{2} + (2 + \frac{3}{4} \times 2) \times (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{3}$$

$$= -\left(\frac{3\sqrt{3} + 7\sqrt{2}}{12}\right) = -1,25797 \text{ m/s}$$

$$v'_{2,x} = \frac{(m_1 + \epsilon m_1) v_{1,x} + (m_2 - \epsilon m_1) v_{2,x}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(1 + \frac{3}{4} \times 1) \times 3 \frac{\sqrt{3}}{2} + (2 - \frac{3}{4} \times 1) \times (-\frac{\sqrt{2}}{2})}{3}$$

$$= \left(\frac{21\sqrt{3} - 5\sqrt{2}}{24}\right) = 1,22091 \text{ m/s}$$

5.6 Exercícios Propostos

5.1. Um revólver de massa m dispara uma bala de massa γm onde γ é uma pequena fração. Se v_0 é a velocidade da bala quando ela abandona o cano do revólver, qual é a velocidade de recuo do revólver?

5.2. Um bloco de madeira de massa m repousa sobre uma superfície horizontal. Uma bala de massa γm é disparada horizontalmente com velocidade v_0 contra o bloco, alojando-se no mesmo. Que fração da energia cinética inicial da bala é perdida no bloco, imediatamente após o impacto? Se μ é o coeficiente de atrito entre o bloco e o chão, que distância ele percorrerá até parar?⁶⁸

5.3. Determine o centro de massa de uma distribuição linear de massa ao longo de um segmento linear de comprimento L . A distribuição de massa não é uniforme e é dada pela expressão:

$$\lambda(x) = ax^2$$

onde a coordenada x é relativa à posição de um ponto a partir de uma de suas extremidades. Determine o parâmetro a em função da massa do objeto.⁶⁹

⁶⁸Fração perdida = $(1 + \gamma)^{-1}$, $s = \frac{v_0^2 \gamma^2}{2\mu g(1 + \gamma)2}$.

⁶⁹Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5555>.

- 5.4. Para duas partículas interagindo entre si de forma que a energia de interação entre elas é dada como o quadrado da diferença das suas coordenadas de acordo com a expressão:

$$U(x_1, x_2) = \frac{k}{2} (x_1 - x_2)^2$$

- 1) Escreva as equações de movimento;
- 2) Determine a solução envolvendo as coordenadas relativa e do centro de massa;
- 3) Escreva a solução geral.⁷⁰

- 5.5. A partir das equações de movimento do centro de massa, demonstre que, quando o sistema de partículas se encontra sob ação de uma força gravitacional constante (e externa ao sistema), a trajetória do centro de massa é uma parábola.⁷¹

- 5.6. Uma força resultante $\sum F_x(t) = A + Bt^2$ no sentido do eixo $+0x$ é aplicada sobre uma garota que está sobre uma prancha de skate. A força começa a atuar no instante $t_1 = 0$ e continua até t_2 .

- a) Qual é o impulso J_x da força?
- b) A garota inicialmente está em repouso, qual é a sua velocidade no instante t_2 ?⁷²

- 5.7. Uma granada é lançada com velocidade inicial v_0 segundo um ângulo de 45° . Na parte mais alta da trajetória ela explode, dividindo-se em dois fragmentos de mesma massa, um dos quais move-se verticalmente para baixo com velocidade inicial $\sqrt{2}v_0$. Qual a direção e a velocidade do outro fragmento após a explosão?⁷³

- 5.8. Uma bola cai de uma altura h chocando-se com um solo horizontal. Se o coeficiente de restituição é ϵ , mostre que a distância vertical total percorrida pela bola até que os repiques cessem é

$$\frac{h(1 + \epsilon^2)}{1 - \epsilon^2}$$

e encontre o tempo total gasto até que a bola pare.

- 5.9. Mostre que a energia cinética de um sistema de duas partículas é

$$\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

onde $m = m_1 + m_2$, v é a velocidade relativa e μ é a massa reduzida.

- 5.10. Se dois corpos colidem frontalmente, mostre que a perda de energia cinética é igual a

$$\frac{1}{2}\mu v^2(1 - \epsilon^2)$$

onde μ é a massa reduzida, v é a velocidade relativa antes do impacto e ϵ é o coeficiente de restituição.

- 5.11. Uma partícula móvel de massa m_1 colide elasticamente com um alvo de massa m_2 inicialmente em repouso. Se a colisão for frontal, mostre que a partícula incidente perde uma fração equivalente a $4\mu/m$ de sua energia cinética inicial, onde μ é a massa reduzida e $m = m_1 + m_2$.

- 5.12. Um próton de massa m_p com velocidade inicial $\vec{v}$ colide com um átomo de hélio de massa $4m_p$, inicialmente em repouso. Se o próton deixa o ponto de impacto segundo um ângulo de 45° em relação à direção original de seu movimento, encontre as velocidades finais de cada uma das partículas e o ângulo de espalhamento do próton no referencial do centro de massa. Considere:

- a) a colisão perfeitamente elástica; e
- b) uma colisão inelástica em que $Q = 1/4$ da energia cinética inicial do próton.⁷⁴

- 5.13. Uma partícula de massa m com *momentum* inicial p_1 , colide com uma partícula de igual massa em repouso. Se o módulo dos *momenta* finais das duas partículas são p'_1 e p'_2 respectivamente, mostre que a perda de energia na colisão é dada por

$$Q = \frac{p'_1 p'_2}{m} \cos \psi$$

onde ψ é o ângulo entre as trajetórias das duas partículas após a colisão.

⁷⁰Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5559>.

⁷¹Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5566>.

⁷²Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5570>.

⁷³Veja a solução de um problema parecido em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5578>.

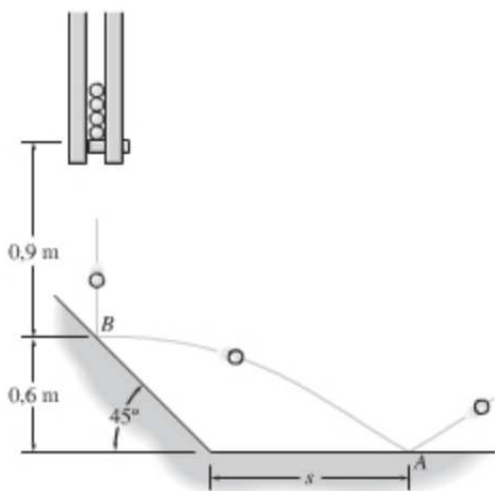
⁷⁴a) Próton: $v'_x \approx v'_y \approx 0,66v$. Átomo de Hélio: $v'_x \approx 0,09v$; $v'_y \approx 0,16v$. $\theta \approx 55^\circ$.

5.14. Mostre que o coeficiente de restituição pode ser determinado pela relação entre as alturas atingidas pelo objeto, antes do choque com a superfície terrestre, ou seja, quando o objeto é solto (H) e a altura atingida depois do choque (h)⁷⁵.

5.15. Um pêndulo balístico é um dispositivo para medir as velocidades de projéteis e era muito utilizado quando não existiam aparelhos eletrônicos para esse fim. Ele consiste em um grande bloco de madeira, de massa M , suspenso por dois longos pares de fios. Um projétil de massa m é lançado sobre o bloco, onde fica cravado. O conjunto bloco + projétil, imediatamente após o choque, oscila e seu centro de massa sobe verticalmente uma distância h antes do pêndulo parar. Suponha $M = 5,4$ kg e $m = 9,5$ g. Qual a velocidade inicial do projétil se o bloco se elevar à altura $h = 6,3$ cm?⁷⁶

5.16. Um vagão de carga de 35 toneladas choca-se com outro vagão que está parado. Eles engatam e 27% da energia cinética inicial é dissipada como calor, som, vibrações etc. Determine o peso do segundo vagão⁷⁷.

5.17. Para testar as propriedades de fabricação de bolas de aço de 1 kg, cada bola é liberada do repouso como mostrado na figura e atinge a superfície lisa inclinada de 45° . Se o coeficiente de restituição é $\epsilon = 0,8$, determine a distância s até onde a bola atinge o plano horizontal em A. Com qual velocidade a bola atinge o ponto A?

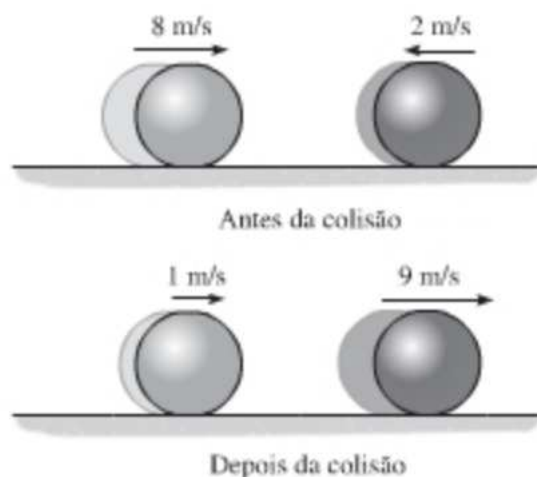


5.18. Uma linha de n esferas similares, cada uma com massa m , estão colocadas próximas uma

a outra, como mostrado na figura abaixo. Se a esfera 1 tem uma velocidade v_1 , determine a velocidade da n -ésima esfera logo após ter sido atingida pela $(n - 1)$ -ésima esfera adjacente. O coeficiente de restituição entre as esferas é ϵ .



5.19. Determine o coeficiente de restituição ϵ entre a bola A e a bola B de mesma massa. As velocidades de A e B antes e após a colisão são mostradas na figura abaixo.



5.20. Os blocos A e B tem 5 kg e 10 kg, respectivamente. Depois de atingir o bloco B, A desliza 50 mm para a esquerda e B desliza 75 mm para a direita. Se o coeficiente de atrito cinético entre os blocos e a superfície é $\mu_k = 0,2$, determine o coeficiente de restituição entre os blocos. O bloco B está originalmente em repouso.



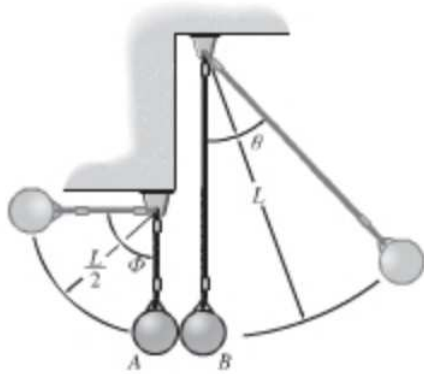
5.21. Duas bolas idênticas A e B de massa m estão suspensas por cordas de comprimento $L/2$ e L , respectivamente. A bola A é liberada do repouso quando $\phi = 90^\circ$ e oscila até $\phi = 0^\circ$, onde atinge B. Determine o módulo da velocidade de cada uma das bolas logo após o

⁷⁵Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5588>.

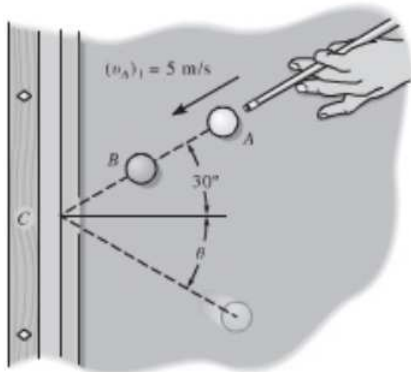
⁷⁶Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5590>.

⁷⁷Veja a solução em: <http://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=5596>.

impacto e o ângulo máximo θ através do qual B oscilará. O coeficiente de restituição entre as bolas é ϵ ⁷⁸.



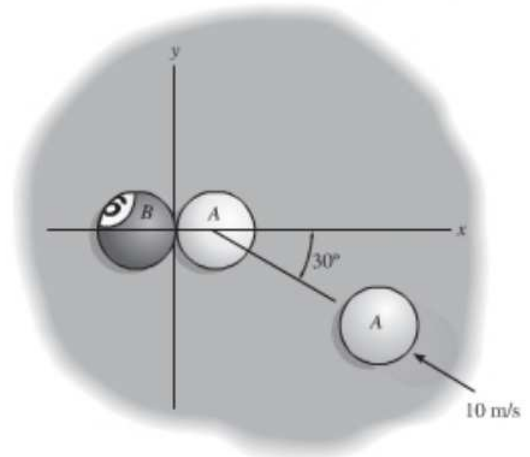
- 5.22.** À bola branca A é dada uma velocidade inicial de 5 m/s. Se ela colide diretamente com a bola B ($\epsilon = 0,8$), determine a velocidade de B e o ângulo θ , logo após ela ricocheteiar na borda em C ($\epsilon' = 0,6$). Cada bola tem uma massa de 0,4 kg. Despreze a dimensão de cada bola⁷⁹.



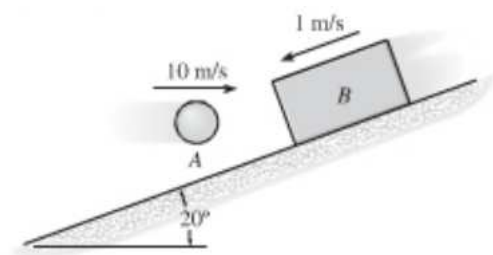
- 5.23.** Dois carros A e B têm massa de 2 toneladas cada e colidem no pavimento escorregadio de um cruzamento. A direção do movimento de cada carro após a colisão é medida pelos rastros deixados, como mostrado na figura abaixo. Se o motorista do carro A afirma que vinha a 54 km/h imediatamente antes da colisão e que, após a mesma, acionou os freios de modo que o carro derrapou 3 m antes de parar, determine a velocidade aproximada do carro B imediatamente antes da colisão. Suponha que o coeficiente de atrito cinético entre as rodas do carro e o pavimento é $\mu_k = 0,15$ ⁸⁰.



- 5.24.** A bola de bilhar A move-se com uma velocidade de 10 m/s imediatamente antes de atingir a bola B , que está em repouso. Se as massas de A e de B são de 200 g cada e o coeficiente de restituição entre elas é $\epsilon = 0,8$, determine a velocidade de ambas logo após o impacto. Qual é o ângulo relativo entre às direções de afastamento das bolas A e B ? Qual seria este mesmo ângulo no caso de uma colisão elástica?⁸¹



- 5.25.** Uma bola de 2 kg é lançada de modo a se mover horizontalmente a 10 m/s quando atinge o bloco de 6 kg, que está descendo o plano inclinado liso a 1 m/s. Se o coeficiente de restituição entre a bola e o bloco é $\epsilon = 0,6$, e o impacto ocorre em 0,006 segundos, determine a força impulsiva média entre a bola e o bloco.



$$^{78}(v_A) = \left(\frac{1-\epsilon}{2}\right) \sqrt{gL}, (v_B) = \left(\frac{1+\epsilon}{2}\right) \sqrt{gL} \text{ e } \theta = \arccos \left[1 - \frac{(1+\epsilon)^2}{8} \right]$$

$$^{79}v_B = 3,24 \text{ m/s} \text{ e } \theta = 43,9^\circ.$$

⁸⁰Nota: a linha de impacto não foi definida, no entanto essa informação não é necessária para a solução.

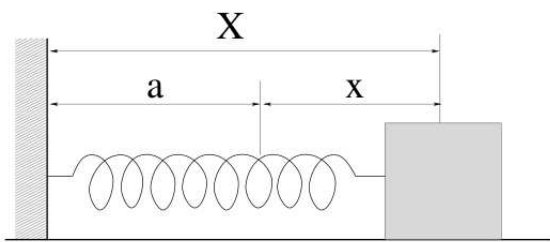
⁸¹ $v'_A = 5,07 \text{ m/s}$, a $99,8^\circ$ em relação à horizontal e $v'_B = 7,79 \text{ m/s}$, a 180° em relação à horizontal. $\theta = 80,2^\circ$ é o ângulo relativo entre às direções de afastamento das bolas A e B . Este ângulo seria de 90° no caso de uma colisão elástica ($\epsilon = 1$).

6 Movimento Harmônico – Vibrações

6.1 Força Restaurada Linear – Movimento Harmônico

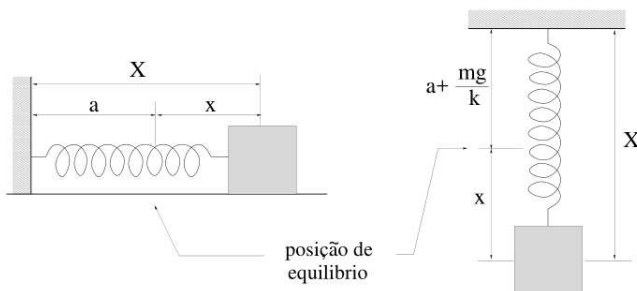
O módulo de uma força restauradora linear é proporcional ao deslocamento da partícula em relação à sua posição de equilíbrio e seu sentido se opõe ao deslocamento.

$$F = -k(X - a) = -kx \quad (64)$$



onde X é o comprimento total da mola (ou outro material com propriedades elásticas) e a o seu comprimento original (sem deformação). À variável $x = X - a$, é o deslocamento da mola em relação à sua posição de equilíbrio. A constante k é denominada constante elástica e sua dimensão é N/m.

Consideremos uma partícula de massa m presa à extremidade livre de uma mola:



$$F = -k(X - a) = -kx \quad \text{ou}$$

$$F = -k(X - a) + mg = -kx$$

onde o sentido positivo é para baixo.

$$\text{Aqui } x = X - a - \frac{mg}{k}.$$

Em ambos os casos: $F = -kx$

A equação de movimento, em ambos os casos é:

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (65)$$

que é uma equação diferencial linear de segunda ordem, homogênea e com coeficientes constantes.

Para resolvê-la, vamos fazer $x = Ae^{qt}$ (solução tentativa). Assim:

$$m \frac{d^2}{dt^2} (Ae^{qt}) + k (Ae^{qt}) = 0$$

$$mq^2 + k = 0$$

Isto é

$$q = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i \omega_0$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

A equação (65) é uma equação diferencial linear, cuja forma geral é

$$C_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + C_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + C_1 \frac{dx}{dt} + C_0 x = b(t)$$

Para equações deste tipo aplica-se o princípio da superposição, isto é, se temos duas ou mais soluções para uma dada equação diferencial linear, então a solução mais geral que podemos obter é uma combinação linear das soluções encontradas que também será uma solução. Assim:

$$x = A_+ e^{i\omega_0 t} + A_- e^{-i\omega_0 t} \quad (66)$$

Usando a fórmula de Euler⁸², podemos escrever a eq. (66) como:

$$x = a \sin \omega_0 t + b \cos \omega_0 t \quad (67)$$

onde recombina as constantes A_+ e A_- em a e b .

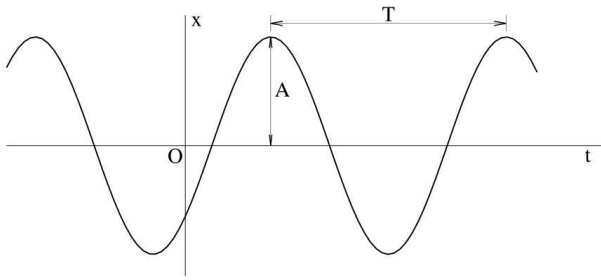
Ou, ainda⁸³

$$x = A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \quad (68)$$

As eqs. (66), (67) e (68) são formas alternativas da solução. As constantes de integração nas soluções acima são determinadas a partir das condições iniciais. O movimento é uma oscilação senoidal do deslocamento x . Por esta razão a eq. (65) é frequente chamada de equação diferencial do oscilador harmônico ou oscilador linear.

⁸² $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$

⁸³Da trigonometria: $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$, onde $a = -A \sin \theta_0$ e $b = A \cos \theta_0$.



O coeficiente ω_0 é chamado frequência angular. O valor máximo de x é chamado amplitude da oscilação ($x_{\text{máx}} = A = \sqrt{a^2 + b^2}$). O período T da oscilação é o tempo requerido para um ciclo completo, isto é, o período de tempo para o qual o produto $\omega_0 t$ aumenta de exatamente 2π , então

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (69)$$

A frequência linear de oscilação ν_0 é o número de ciclos por unidade de tempo, portanto

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi\nu_0 \\ \nu_0 &= \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \quad (70)$$

Exemplo 6.1. Resolver a equação do movimento de uma partícula sob a ação da força dissipativa $F(v) = -m\Gamma v$.

Já resolvemos este problema por integração direta. O método aqui apresentado torna ainda mais simples a solução. A equação diferencial que temos de resolver é

$$\ddot{x} + \Gamma \dot{x} = 0$$

Esta é uma equação diferencial linear e homogênea. Substituindo a solução do tipo e^{pt} obtemos a seguinte equação para p

$$p^2 + p\Gamma = 0$$

Assim, os valores de p que satisfazem a equação precedente são $p = 0$ e $p = -\Gamma$. Note que aqui os valores de p são reais e por isso não precisamos introduzir variáveis complexas. As funções de base são $x_1 = 1$ e $x_2 = e^{-\Gamma t}$ e, assim, a solução geral é

$$x(t) = A + B e^{-\Gamma t}$$

Devemos usar as condições iniciais do problema para determinar o valor das constantes A e B , assim:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= A + B e^{-\Gamma t_0} \\ v(t_0) &= -\Gamma B e^{-\Gamma t_0} \end{aligned}$$

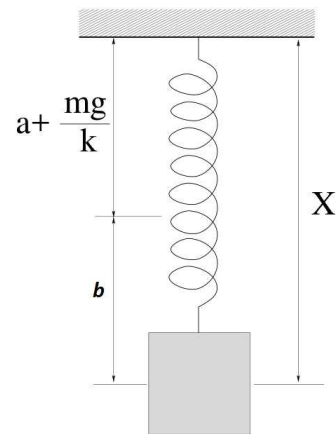
Resolvendo estas equações para A e B e substituindo os resultados na equação para $x(t)$, obtemos:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{v(t_0)}{\Gamma} (1 - e^{-\Gamma(t-t_0)})$$

o mesmo resultado obtido anteriormente.

Exemplo 6.2. Uma mola leve se distende de b quando equilibra um bloco de massa m . Encontre o movimento resultante em função de t sabendo-se que no instante $t = 0$ o bloco foi abandonado em repouso a uma distância l abaixo de sua posição de equilíbrio.

Primeiro, a fim de obtermos a constante da mola, notamos que na condição de equilíbrio estático



$$F = -k b = -m g \Rightarrow k = \frac{mg}{b}$$

Portanto a frequência angular de oscilação é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{b}}$$

Para obtermos as constantes da equação de movimento, vamos fazer:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A \cos(\omega_0 t + \theta_0)|_{t=0} = l \\ \dot{x}(t=0) &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)|_{t=0} = 0 \end{aligned}$$

Assim:

$$A = l \quad \text{e} \quad \theta_0 = 0$$

Logo:

$$x(t) = l \cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}} t\right)$$

é a expressão procurada.

6.2 Considerações de Energia no Movimento Harmônico

Considere uma partícula movendo-se sob a ação de uma força restauradora linear $F = -kx$. Vamos calcular o trabalho W realizado por uma força externa F_a para levar a partícula da posição de equilíbrio ($x = 0$) a uma posição genérica x . Temos

$$F_a = -F = kx \quad \text{e}$$

$$W = \int F_a dx = \int_0^x (kx) dx = \frac{k}{2} x^2$$

O trabalho W fica armazenado na mola na forma de energia potencial

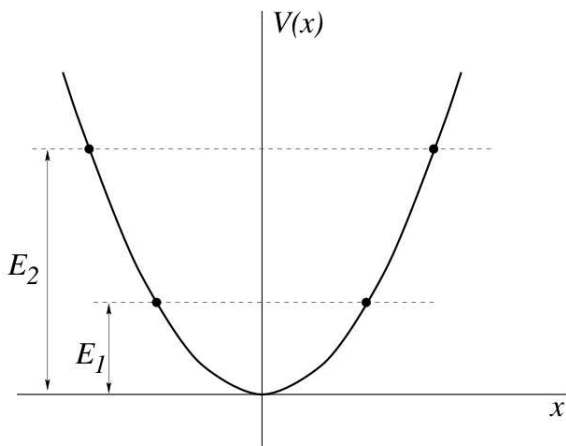
$$V(x) = W = \frac{k}{2} x^2$$

A energia total será então dada pela soma das energias cinética e potencial.

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Para que $\dot{x}$ seja real, vemos que x deve se situar entre $\sqrt{\frac{2E}{k}}$ e $-\sqrt{\frac{2E}{k}}$.

Assim: $A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$ é a amplitude da oscilação.



Da equação da energia vemos que o valor máximo de x , que chamaremos $v_{\text{máx}}$, ocorre em $x = 0$, e então teremos

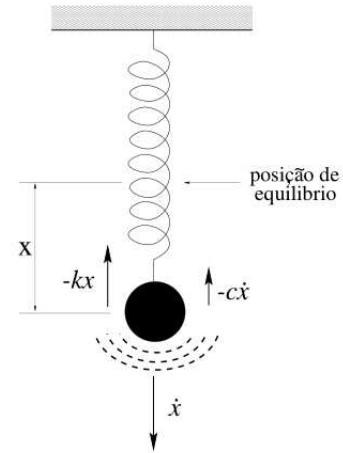
$$E = \frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

e

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = \omega_0 A$$

6.3 Movimento Harmônico Amortecido

Vamos agora supor que exista uma força viscosa de amortecimento variando linearmente com a velocidade, ou seja, tal como aquela produzida pela resistência do ar.



Sendo x o deslocamento em relação à posição de equilíbrio, então a força restauradora exercida pela mola será $-kx$, e a força retardadora $-c\dot{x}$, onde c é uma constante de proporcionalidade. A equação diferencial do movimento $F = m\ddot{x}$ será portanto $-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$ ou, rearranjando os termos

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (71)$$

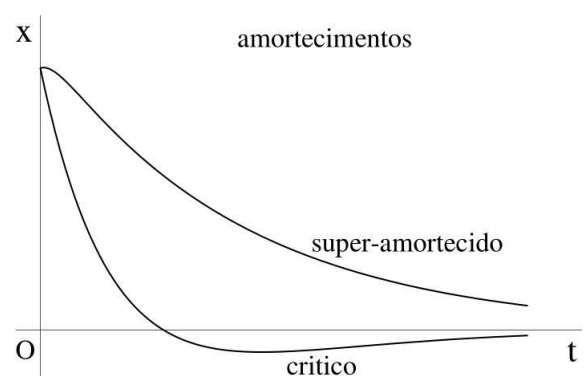
é a equação diferencial que devemos resolver.

Novamente tentaremos uma solução do tipo exponencial $A e^{qt}$, que deverá satisfazer a equação

$$m \frac{d^2}{dt^2} (A e^{qt}) + c \frac{d}{dt} (A e^{qt}) + k (A e^{qt}) = 0$$

para qualquer t . Isto ocorrerá se q satisfizer a equação auxiliar $m q^2 + c q + k = 0$. As raízes são dadas pela fórmula de báscara

$$q = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (72)$$



Existem três casos fisicamente distintos

- a) $c^2 > 4mk$ super – amortecimento
- b) $c^2 = 4mk$ amortecimento crítico
- c) $c^2 < 4mk$ sub – amortecido

6.3.1 Caso Super-amortecido

No primeiro caso, vamos chamar $-\gamma_1$ e $-\gamma_2$ os dois valores reais de q dados pela eq. (72). A solução geral poderá ser escrita como

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma_1 t} + A_2 e^{-\gamma_2 t} \quad (73)$$

Assim vemos que o movimento é não oscilatório: o deslocamento x vai a zero de uma maneira exponencial a medida que o tempo passa.

6.3.2 Caso de Amortecido Crítico

No caso de amortecimento crítico as duas raízes são iguais. Assim existe apenas uma função $e^{-\gamma t}$ e uma única constante A , onde $\gamma = c/2m$. Para obtermos a solução geral, neste caso, voltaremos à eq. (71) que, para raízes iguais, pode ser fatorada. Assim:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{c^2}{4m^2}x = 0 \\ \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x &= 0 \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)(\gamma x + \dot{x}) = 0 \end{aligned}$$

Mudando a variável $u \rightarrow (\gamma x + \dot{x})$ e integrando, obtemos $u = A_1 e^{-\gamma t}$. Assim:

$$\begin{aligned} u &= (\gamma x + \dot{x}) = A_1 e^{-\gamma t} \\ \Rightarrow A_1 &= (\gamma x + \dot{x}) e^{\gamma t} = \frac{d}{dt}(x e^{\gamma t}) \end{aligned}$$

Uma segunda integração em relação a t nos dá $A_1 t = x e^{\gamma t} - A_2$, ou

$$x = e^{-\gamma t} (A_1 t + A_2) \quad (74)$$

que representa um movimento não oscilatório, onde o deslocamento x vai a zero assintoticamente com o tempo.

6.3.3 Caso Sub-amortecido

Se a constante de amortecimento c for suficientemente pequena tal que $c^2 < 4mk$, teremos caso conhecido como sub-amortecimento. Neste caso q será complexo. As duas raízes da equação auxiliar serão números conjugados complexos e o movimento será dado pela solução geral.

$$x(t) = A_+ e^{(-\gamma+i\omega_1)t} + A_- e^{(-\gamma-i\omega_1)t} \quad (75)$$

$$\text{onde } \gamma = \frac{c}{2m}, \text{ e } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}.$$

Da mesma forma que anteriormente, podemos escrever a solução como:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (a \sin \omega_1 t + b \cos \omega_1 t) \quad (76)$$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta_0) \quad (77)$$

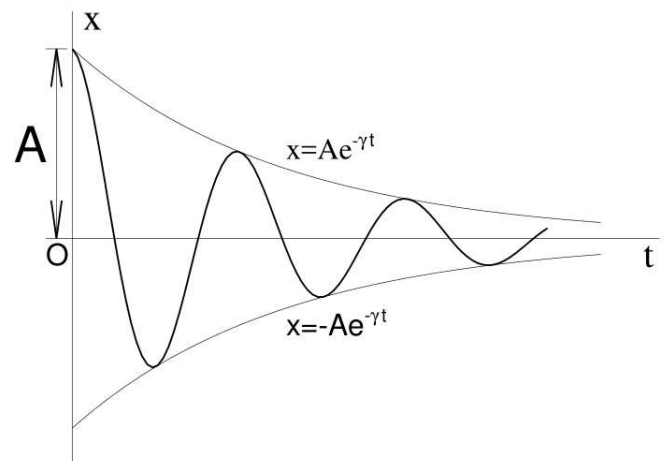
onde $a = i(A_+ - A_-)$, $b = (A_+ + A_-)$, $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta_0 = -\arctg\left(\frac{a}{b}\right)$.

A forma real da solução mostra que o movimento é oscilatório, e que a amplitude $A e^{-\gamma t}$ cai exponencialmente com o tempo. Além disso, notamos que a frequência angular de oscilação ω_1 é menor que a do oscilador não amortecido ω_0 . A frequência ω_1 é chamada frequência natural.

No caso de amortecimento fraco, ou seja se γ for muito pequeno comparado a ω_0 , podemos usar a relação aproximada

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0}$$

que é obtida expandindo-se em série $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ pelo uso do teorema binomial e retendo somente os dois primeiros termos⁸⁴.



⁸⁴As duas curvas $x = A e^{-\gamma t}$ e $x = -A e^{-\gamma t}$ formam um envelope da curva do movimento, uma vez que o cosseno toma valores entre +1 e -1 nos pontos onde a curva toca o envelope. Os pontos de contato estão separados por um intervalo de tempo de meio período, ou π/ω_1 .

6.4 Considerações de Energia no Movimento Harmônico Amortecido

A energia do oscilador harmônico amortecido é, em qualquer instante, igual a soma da energia cinética e da energia potencial, mas diferentemente do que ocorre com o oscilador não amortecido, aqui E não é constante. Vamos diferenciar a equação da energia em relação ao tempo a fim de obtermos a taxa temporal de variação de E . Temos então

$$\frac{dE}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}$$

Mas, da equação diferencial do movimento, eq. (71), $m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$. Consequentemente

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \quad (78)$$

que é uma quantidade sempre negativa e representa a razão na qual a energia está sendo dissipada na forma de calor, som, vibração, etc., pelo atrito.

Exemplo 6.3. Uma partícula de massa m está presa a uma mola de constante elástica k . O amortecimento é tal que $\gamma = \omega_0/4$. Encontre a frequência natural de oscilação e a razão entre as amplitudes de duas oscilações sucessivas.

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{16}} \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{15}{16}} \end{aligned}$$

é a frequência natural de oscilação.

A razão entre as amplitudes de duas oscilações sucessivas é

$$\frac{A e^{-\gamma T_1}}{A} = e^{-\gamma T_1}$$

onde

$$T_1 = \frac{1}{\nu_1} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_0} \sqrt{\frac{16}{15}} = \frac{2\pi}{4\gamma} \sqrt{\frac{16}{15}}$$

Portanto

$$e^{-\gamma T_1} = e^{-\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{16}{15}}} = e^{-1,56} = 0,21$$

é a razão entre as amplitudes de duas oscilações sucessivas.

6.5 Movimento Harmônico Forçado – Ressonância

Vamos agora estudar o movimento do oscilador harmônico amortecido forçado por uma força externa harmônica, isto é, uma força que varia senoidalmente com o tempo. Vamos supor que esta força tenha frequência angular ω e amplitude F_0 e portanto podemos escrever

$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (79)$$

É conveniente, entretanto, usar a forma exponencial

$$F_{\text{ext}} = F_0 e^{i(\omega t + \theta)} \quad (80)$$

ao invés da trigonométrica, embora ambas possam ser usadas.

A equação diferencial do movimento será portanto

$$\begin{aligned} -kx - c\dot{x} + F_{\text{ext}} &= m\ddot{x} & \text{ou} \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= F_0 e^{i(\omega t + \theta)} \end{aligned} \quad (81)$$

A solução desta equação diferencial linear é dada pela soma de duas partes, a primeira parte sendo a solução da equação diferencial homogênea $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ (já resolvida) e a segunda parte sendo qualquer solução particular. Como vimos, a solução da equação homogênea representa uma oscilação que eventualmente vai a zero – é chamado o termo transiente. Estamos interessados numa solução que dependa da natureza da força aplicada. Uma vez que esta força varia senoidalmente com o tempo e tem amplitude constante, é razoável esperar uma solução para a qual o deslocamento x também tenha uma dependência temporal senoidal. Portanto, para o regime estacionário, tentaremos uma solução na forma

$$x(t) = A e^{i(\omega t + \theta')}$$

Assim

$$\begin{aligned} m \frac{d^2}{dt^2} (A e^{i(\omega t + \theta')}) + c \frac{d}{dt} (A e^{i(\omega t + \theta')}) + k A e^{i(\omega t + \theta')} \\ = F_0 e^{i(\omega t + \theta)} \end{aligned}$$

Depois de efetuar as operações indicadas e cancelar os fatores comuns teremos:

$$\begin{aligned} -m\omega^2 A + i\omega c A + k A &= F_0 e^{i(\theta - \theta')} \\ &= F_0 [\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')] \end{aligned}$$

Identificando as partes real e imaginária, teremos

$$A(k - m\omega^2) = F_0 \cos\phi \quad (82)$$

$$c\omega A = F_0 \sin\phi \quad (83)$$

onde chamamos de ϕ a diferença de fase ou ângulo de fase ($\theta - \theta'$).

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos

$$\tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

Elevando-se ao quadrado ambos os lados das eqs. (82) e (83), obtemos

$$A^2(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2 A^2 = F_0^2$$

Explicitando a amplitude das oscilações no regime estacionário A , teremos

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \quad (84)$$

e, como $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e $\gamma = c/2m$, podemos escrever

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

A figura mostra que A assume um valor máximo numa certa frequência ω_r , chamada de frequência de ressonância.

A fim de obtermos a frequência de ressonância, usamos o método dos máximos e mínimos do Cálculo, isto é, calculamos $dA/d\omega$ e igualamos o resultado a zero. Explicitando ω , encontramos

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (85)$$

No caso de amortecimento fraco, isto é, quando a constante de amortecimento c for muito pequena, $c \ll 2\sqrt{mk}$, ou, equivalentemente, se $\gamma \ll \omega_0$, então a frequência de ressonância ω_r será aproximadamente igual à frequência do oscilador harmônico simples (sem amortecimento) ω_0 .

A amplitude no regime estacionário e na frequência de ressonância, é

$$A_{\text{máx}} = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{F_0}{c\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \quad (86)$$

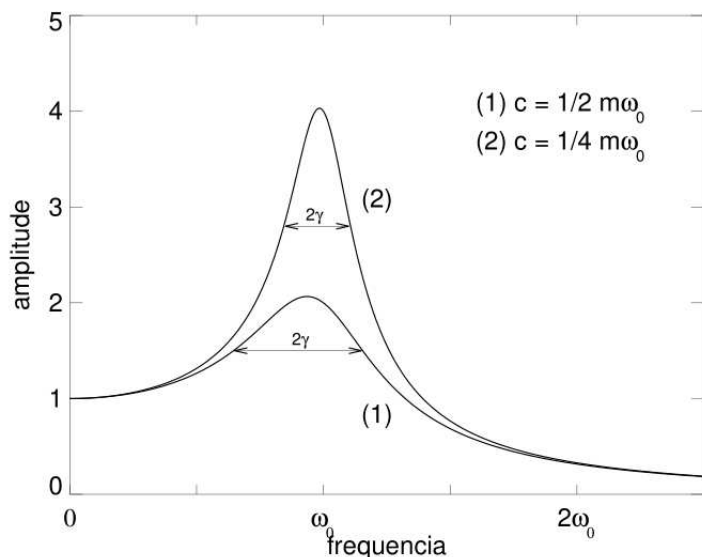
que, para amortecimento fraco ($\gamma \ll \omega_0$), reduz-se à $F_0/c\omega_0$.

6.6 Análogos Elétrico-Mecânico

Matematicamente, existe uma analogia perfeita entre um sistema oscilatório mecânico e um circuito elétrico LRC. Isto ocorre porque a equação diferencial que descreve ambos os fenômenos físicos é, matematicamente, a mesma. Assim, para resolver um problema oscilatório mecânico, basta “construir” um circuito elétrico equivalente, com as seguintes substituições (equivalências):

	MECÂNICO		ELÉTRICO
x	deslocamento	q	carga
$\dot{x}$	velocidade	$\dot{q} = i$	corrente
m	massa	L	indutância
k	constante elástica	C^{-1}	recíproco da capacitância
c	constante de amortecimento	R	resistência
F	força	V	diferença de potencial

Exemplo 6.4. O fator de qualidade Q de um sistema ressonante é definido como $\omega_r/2\gamma$ e está diretamente relacionado com a largura do pico de ressonância. Determine a frequência de ressonância e o fator de qualidade para o oscilador amortecido do problema anterior (uma partícula de massa m presa a uma mola de constante elástica k , tal que o amortecimento é $\gamma = \omega_0/4$). Se a frequência da força aplicada ao oscilador é $\omega_0/2$, encontre o ângulo de fase.



$$\begin{aligned}\omega_r &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\frac{\omega_0^2}{16}} \\ &= \omega_0 \sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{7}{8}}\end{aligned}$$

é a frequência angular de ressonância.

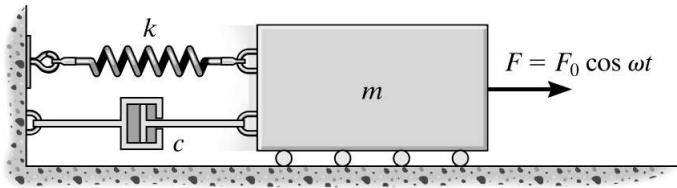
O fator de qualidade é

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma} = \frac{\omega_0 \sqrt{7/8}}{2(\omega_0/4)} = 2\sqrt{\frac{7}{8}} = 1,87$$

O ângulo de fase é:

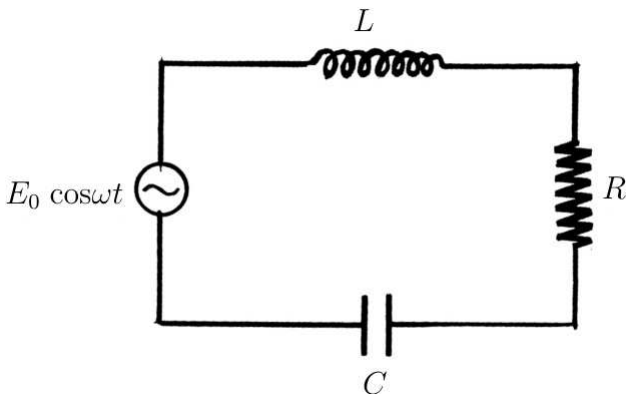
$$\begin{aligned}\phi &= \arctg \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \arctg \frac{2(\omega_0/4)(\omega_0/2)}{\omega_0^2 - (\omega_0/2)^2} \\ &= \arctg \left(\frac{1}{3} \right) = 18,5^\circ\end{aligned}$$

Exemplo 6.5. Desenhe o circuito elétrico que é equivalente ao sistema mecânico mostrado. Determine a equação diferencial que descreve a carga q no circuito.



A equação diferencial que descreve o sistema mecânico é

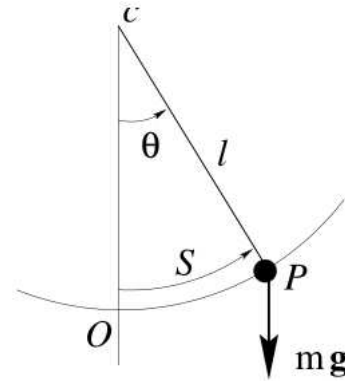
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$



Ao passo que a equação diferencial que descreve o sistema elétrico é

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E_0 \cos \omega t$$

Exemplo 6.6. O pêndulo simples é também um exemplo de um sistema que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. Entretanto, neste caso, a força restauradora é a componente do peso na direção do deslocamento S que, na configuração mostrada, é igual a $-mg \sin \theta$. Resolva o problema do pêndulo simples na aproximação em que $\sin \theta \approx \theta$.



Se l for o comprimento do fio, então $\theta = S/l$ e a equação diferencial do movimento é

$$m\ddot{S} + mg \sin \left(\frac{S}{l} \right) = 0$$

ou, em termos de θ , na aproximação em que $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

A solução, como já vimos, é

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, θ_0 é a amplitude de oscilação e ϕ_0 um fator de fase. Dentro dos limites de validade dessa aproximação o movimento é harmônico simples e o período de oscilação é dado por:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Observação.: Para obter uma solução mais precisa do Pêndulo Simples e do Oscilador não Linear, isto é, uma solução sem a necessidade de aproximar $\sin \theta \approx \theta$, precisaríamos desenvolver a função $\sin \theta$ como uma série de potências, onde apenas o primeiro termo da série é θ . A solução exata é obtida por meio de integrais elípticas.

6.7 Exercícios Propostos

6.1. Uma massa na extremidade de uma mola é liberada do repouso na posição x_0 . A experiência é repetida, mas agora com o sistema

imerso num fluido que faz com que o movimento seja criticamente amortecido. Mostre que a máxima velocidade da massa no primeiro caso é e , multiplicado pela velocidade máxima no segundo caso⁸⁵.

6.2. Se a amplitude de um oscilador amortecido decresce a $1/e$ de seu valor inicial após n períodos, mostre que a frequência do oscilador deve ser aproximadamente $\left[1 - (8\pi^2 n^2)^{-1}\right]$ vezes a do oscilador não amortecido correspondente⁸⁶.

6.3. Considere um oscilador harmônico não amortecido descrito pela equação do movimento

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

A força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, de frequência angular ω , começa a atuar no instante t .

a) Encontre a solução geral da equação do movimento para tempos $t \geq 0$ ⁸⁷.

b) Para as condições iniciais $x(t=0) = 0$ e $\dot{x}(t=0) = 0$, mostre que o deslocamento do sistema para tempos $t \geq 0$ é dado por

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural do oscilador.

c) Tome o limite $\omega \rightarrow \omega_0$ do item (b) para mostrar que quando o oscilador é forçado na sua frequência natural, o deslocamento como função do tempo é dado por

$$x(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t)$$

Comente sobre o significado físico deste resultado⁸⁸.

6.4. O grau de amortecimento de um sistema oscilante costuma ser medido em termos do chamado fator de qualidade Q do sistema oscilante:

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma}$$

onde ω_r é dado pela eq. (85).

a) Demonstre que a amplitude máxima no regime estacionário e na frequência de ressonância é dado pela eq. (86), isto é:

$$A_{\text{máx}} = \frac{F_0}{c\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

b) Escreva a amplitude da eq. (84) em termos de Q . Considere o caso de amortecimento fraco e faça um gráfico da amplitude para diversos valores de Q e comente seus resultados⁸⁹.

c) Ainda, considerando amortecimento fraco, mostre que, se a frequência da força aplicada

⁸⁵Dica: No caso não amortecido, o valor máximo da velocidade é ωx_0 . No caso do amortecimento crítico, a velocidade em qualquer tempo t é $v(t) = -x_0\gamma^2 t e^{-\gamma t}$. Portanto, a velocidade máxima neste caso é $x_0\gamma e^{-1}$ e a razão procurada é $\frac{\omega x_0}{x_0\gamma e^{-1}} = e$, onde, no amortecimento crítico, $\omega = \gamma$.

⁸⁶Dica: Há oscilação somente no caso sub-amortecido, assim, do enunciado $Ae^{-\gamma(t+n\tau)} = \frac{1}{e} Ae^{-\gamma t}$, onde $\tau = 2\pi/\omega_1$ é o período do oscilador. Obtenha a razão ω_1/ω_0 e expanda o segundo termo em série de potências (já que $1/4n^2\pi^2 \ll 1$), mantendo apenas o primeiro termo.

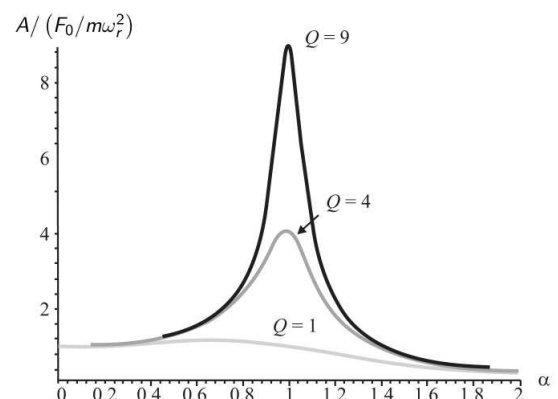
⁸⁷ $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta_0) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$.

⁸⁸Vemos que quando forçamos o oscilador harmônico não amortecido na sua frequência de ressonância, a resposta diverge linearmente com o tempo.

⁸⁹Introduzindo a variável adimensional $\alpha = \omega/\omega_r$, reescrevemos a amplitude como:

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_r^2 \sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \frac{4\gamma^2}{\omega_r^2} \alpha^2}} = \frac{F_0/m\omega_r^2}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + \frac{\alpha^2}{Q^2}}}$$

Na figura ao lado é mostrados um gráfico de $A/(F_0/m\omega_r^2)$ em função de α . À medida que o fator Q cresce (isto é, o amortecimento diminui), a forma da curva de ressonância toma a forma de um pico cada vez mais estreito em torno de $\alpha = 1$ ($\omega = \omega_r$). Num sistema sem nenhum amortecimento, a amplitude seria infinita na frequência de ressonância.



for próxima da ressonância, o Q do sistema é aproximadamente⁹⁰

$$Q \cong 2\pi \times \left(\frac{\text{Energia total}}{\text{Energia perdida durante um período}} \right)$$

6.5. Considere um oscilador harmônico amortecido com $m = 10$ kg, $k = 250$ N/m e $c = m\gamma = 60$ kg/s. Este oscilador está sob a ação de uma força externa dada por $F_0 \cos \omega t$, onde $F_0 = 48$ N.

- Que valor de ω resulta em oscilações de estado estacionário com amplitude máxima?
- Qual é o valor da amplitude máxima?
- Quando ω tem o valor encontrado em a), qual é o ângulo de fase ϕ ?⁹¹

6.6. Considere um oscilador harmônico amortecido cuja equação de movimento é

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

- Mostre que se o amortecimento for crítico ($c/2m = \omega_0$), para o qual as condições iniciais são $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = 0$, a taxa com que o oscilador perde energia é

$$\frac{dE}{dt} = -(2m)^{-4} c^5 x_0^2 t^2 e^{-ct/m}$$

- Para este oscilador (amortecimento crítico), calcule a energia total perdida após ter decorrido uma quantidade de tempo infinita.

$$\text{Energia perdida} = \int_0^\infty \frac{dE}{dt} dt$$

e verifique que ela é igual à energia total inicial do oscilador.

6.7. Considere um oscilador amortecido com $m = 1$ kg, $k = 50$ N/m e $c = m\gamma = 10$ kg/s. Se as condições iniciais são $x(t=0) = 0,1$ m e $\dot{x}(t=0) = 0$, encontre o movimento subsequente do sistema⁹².

6.8. Resolva o Problema do Pêndulo Simples considerando a expansão da função $\sin \theta$ até o segundo termo, isto é, utilize os dois primeiros termos do desenvolvimento em série da função seno $\left(\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right)$, para mostrar que a equação diferencial do movimento do pêndulo simples

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad \longrightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta - \frac{g}{6l} \theta^3 = 0$$

admite a solução $\theta = A \cos \omega t + B \cos 3\omega t$, desde que desprezemos termos em potências de ordem mais altas em B e múltiplos mais elevados em ωt . Neste caso $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{1 - \frac{A^2}{8}}$ pode ser tomado como a amplitude de oscilação θ_0 do pêndulo, já que $B = -\frac{A^3}{3(64 + 27A^2)} \approx$

$-\frac{A^3}{192}$, portanto muito menor que A , principalmente se A for pequeno. Assim, mostre que o período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ do pêndulo simples deve ser corrigido para $\left(\frac{2\pi}{\sqrt{1 - A^2/8}} \right) \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{A^2}{16} + \dots \right)$.

6.9. Mostre que a cicloide é uma curva de vínculo para a qual uma partícula oscilará sob a ação da gravidade isocronicamente, isto é, com um período que é independente da amplitude⁹³.

6.10. Uma partícula executando movimento harmônico simples de amplitude A passa pela posição de equilíbrio com velocidade v_0 . Qual é o período de oscilação?

6.11. Uma partícula executando movimento harmônico simples tem velocidade v_1 quando o deslocamento é x_1 e a velocidade v_2 quando o deslocamento for x_2 . Encontre o período e a amplitude do movimento.

⁹⁰Desde que o amortecimento seja fraco e a frequência da força aplicada esteja próxima da ressonância, temos que $\omega_r \approx \omega \approx \omega_0$ e $Q = \omega_0/2\gamma$. Calcule a energia total do oscilador, lembrando que a potência dissipada é dada pela eq.

(78) e, portanto, a energia dissipada num ciclo é $E_d = \int_0^{2\pi/\omega_0} (\text{Potência dissipada}) dt$.

⁹¹a) $\omega_r = 2,65\text{s}^{-1}$; b) $A_{\text{máx}} = 0,2$ m; e c) $\phi = 41,4^\circ$.

⁹² $x(t) = \sqrt{2} (0,1\text{m}) e^{-5,0\text{s}^{-1}t} \cos[(5,0\text{s}^{-1}t) - \frac{\pi}{4}]$

⁹³Dica: As equações paramétricas da cicloide são:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \int C \cos^2 \theta d\theta = \frac{C}{4} (2\theta + \sin 2\theta) \\ y(\theta) &= \int C \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{C}{4} \cos 2\theta \end{aligned}$$

6.12. Duas partículas de massas m_1 e m_2 executam movimento harmônico simples de amplitudes A_1 e A_2 , respectivamente. Qual é a razão entre seus períodos: T_1/T_2 , se a energia total da partícula 1 for duas vezes a da partícula 2?⁹⁴

6.13. Um único objeto de massa m está dependurado em duas molas de constantes k_1 e k_2 mantidas em posição vertical. Mostre que a frequência angular de oscilação é

$$\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

se as molas forem ligadas em paralelo e

$$\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$$

se as molas forem ligadas em série.

6.14. Uma caixa de massa M contendo um bloco de massa m está dependurada em uma mola de constante elástica k . Encontre a força de reação entre o bloco e o fundo da caixa em função do tempo sabendo-se que o sistema foi deslocado para baixo de uma distância d , contada a partir da posição de equilíbrio, e em seguida abandonado. Para que valor de d o bloco perderá o contato com o fundo da caixa na parte mais alta das oscilações verticais? Despreze a resistência do ar.

6.15. A velocidade terminal de uma bola em queda livre é v_t . Quando a bola está dependurada em uma mola leve a mola se distende de x_0 . a) Mostre que a frequência natural de oscilação é dada por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{x_0} - \frac{g^2}{4v_t^2}}$$

Demonstre que, se o período de oscilação da partícula for independente da amplitude, a partícula descreverá uma trajetória dada por estas equações.

Seja θ o ângulo entre a horizontal e a tangente à curva de vínculo – conforme mostrado na figura. A componente da força gravitacional (peso) na direção do movimento é $-mg\text{sen}\theta$. A equação diferencial do movimento ao longo da trajetória de vínculo (considerado sem atrito) é então $m\ddot{S} = -mg\text{sen}\theta$. Contudo, se esta equação representar movimento harmônico simples ao longo da curva, devemos ter $m\ddot{S} = -kS$. Desse modo, uma curva de vínculo que satisfizer a equação $S = C\text{sen}\theta$, com $C = mg/k$, produzirá movimento harmônico simples.

Use a regra da cadeia $\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dS} \frac{dS}{d\theta}$ e $\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dS} \frac{dS}{d\theta}$ para encontrar as equações paramétricas $x(\theta)$ e $y(\theta)$ da trajetória da partícula.

supondo que a resistência do ar seja proporcional à velocidade.

b) Mostre que a energia do sistema cai a $1/e$ do seu valor inicial em $t = v_t/g$.

6.16. Mostre que a frequência da força externa, para a qual a amplitude do oscilador harmônico forçado é a metade da amplitude de ressonância, é aproximadamente

$$\omega_0 \pm \gamma\sqrt{3}$$

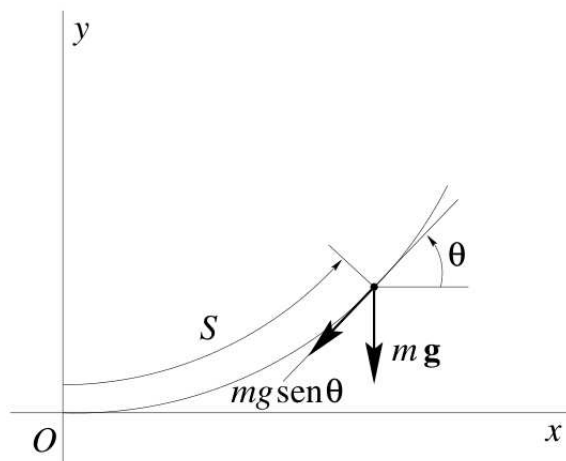
6.17. Encontre a frequência para a qual a velocidade do oscilador harmônico forçado é máxima⁹⁵.

6.18. Mostre que o fator de qualidade Q , definido como $\omega_r/2\gamma$, de um oscilador harmônico forçado é igual ao fator pelo qual deve ser multiplicado a resposta à frequência para se obter a resposta à frequência de ressonância.

6.19. Resolva a equação diferencial do movimento do oscilador harmônico sujeito a uma força amortecida da forma

$$F_{\text{ext}} = F_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t)$$

6.20. Uma plataforma, apoiada em 4 molas de constante elástica 800 N/m, sustenta um equipamento de precisão. Se o chão é submetido a um deslocamento vertical $\delta = 10\text{sen}(8t)$ mm, onde t é medido em segundos, determine a amplitude de vibração. Qual é a frequência de vibração do chão necessária para causar ressonância? O instrumento e a plataforma tem uma massa total de 20 kg⁹⁶.


$$^{94}(A_1/A_2)\sqrt{m_1/2m_2}.$$

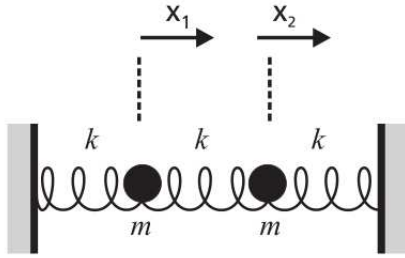
⁹⁵Sugestão: Maximize a quantidade $v_{\text{máx}} = \omega A(\omega)$.

96.4	10.5	10.35	1.1
------	------	-------	-----

7 Oscilações Acopladas

7.1 Osciladores Acoplados – Modos Normais

Consideremos duas massas iguais, m , ligadas por molas de mesma constante elástica k , como mostrado na figura abaixo.



Queremos as posições das massas como função do tempo. As partículas só podem se mover em uma dimensão (x). Sejam $x_1(t)$ e $x_2(t)$ as posições das massas (da esquerda e da direita, respectivamente), como visto na figura, onde indicamos as posições de equilíbrio por linhas tracejadas. As equações do movimento são:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (87)$$

ou

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\omega^2 x_1 - \omega^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\omega^2 x_2 - \omega^2 x_1 &= 0 \end{aligned} \quad (88)$$

onde $\omega^2 = k/m$. As equações (87) ou (88) são equações diferenciais lineares de segunda ordem *acopladas*, porque as variáveis x_1 e x_2 aparecem em ambas. Como o sistema tem dois graus de liberdade (é descrito pelas duas variáveis x_1 e x_2), a solução geral destas equações deverá conter quatro constantes arbitrárias, que serão ajustadas pelas quatro condições iniciais (velocidade e posição iniciais para cada uma das partículas).

Somando, membro a membro, as equações, obtemos

$$(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + \omega^2(x_1 + x_2) = 0 \quad (89)$$

Esta equação, cuja solução já conhecemos, envolve as variáveis x_1 e x_2 somente através da soma $x_1 + x_2$. A solução é

$$x_1 + x_2 = B_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad (90)$$

Podemos também tomar a diferença das equações (87) ou (88). O resultado é

$$(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + 3\omega^2(x_1 - x_2) = 0 \quad (91)$$

Agora temos as variáveis x_1 e x_2 aparecendo somente através da diferença $x_1 - x_2$. A solução é

$$x_1 - x_2 = B_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \quad (92)$$

Tomando a soma e a diferença das Equações (90) e (92), achamos que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são dados por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \\ x_2(t) &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (93)$$

onde $A_1 = B_1/2$ e $A_2 = B_2/2$.

As combinações $x_1 + x_2$ e $x_1 - x_2$ são chamadas *coordenadas normais do sistema*. Elas oscilam com uma frequência pura, cada uma, os chamados *modos normais do sistema*. As soluções (93) são a solução geral das equações (88). Como esperado, dependem das quatro constantes arbitrárias A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , que devem ser determinadas pelas condições iniciais.

Podemos também resolver as equações (88), fazendo

$$x_1 = C_1 e^{pt} \quad \text{e} \quad x_2 = C_2 e^{pt} \quad , \quad (94)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Reescrevendo as eqs. (94) como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} e^{pt}$$

Substituindo esta solução tentativa, na eq. (88), obtemos

$$\begin{aligned} (p^2 + 2\omega^2) C_1 - \omega^2 C_2 &= 0 \\ (p^2 + 2\omega^2) C_2 - \omega^2 C_1 &= 0 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente, numa forma matricial,

$$\begin{pmatrix} p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & p^2 + 2\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (95)$$

Esta equação, homogênea para C_1 e C_2 terá solução não-trivial⁹⁷ somente se a matriz não tiver

⁹⁷isto é, solução onde C_1 e C_2 não sejam iguais a zero.

inversa. Por outro lado, uma matriz não terá inversa quando seu determinante for igual a zero. Como queremos justamente a solução não-trivial para C_1 e C_2 , vamos fazer o determinante da matriz na (95) igual a zero:

$$\begin{vmatrix} p^2 + 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & p^2 + 2\omega^2 \end{vmatrix} = (p^2 + 2\omega^2)^2 - \omega^4 = 0 \quad (96)$$

As raízes desta equação são $p = \pm i\omega$ e $p = \pm i\sqrt{3}\omega$. Se $p = \pm i\omega$, pondo este resultado de volta na (95), encontramos $C_1 = C_2$ (as duas equações produzem o mesmo resultado). E, se $p = \pm i\sqrt{3}\omega$, então temos da eq. (95) que $C_1 = -C_2$ (de novo, as equações são redundantes). As quatro funções de base são⁹⁸

A solução geral é, de acordo com o princípio da superposição,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+i\omega t} + B_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + B_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{+i\sqrt{3}\omega t} + B_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega t}$$

onde B_1, B_2, B_3 e B_4 são constantes complexas que temos de escolher, de modo que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sejam reais.

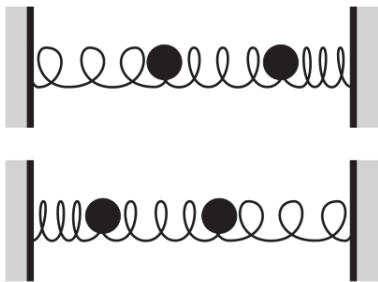
Fazendo $B_2^* = B_1 = A_1 e^{i\phi_1}$ e $B_4^* = B_3 = A_2 e^{i\phi_2}$, obtemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2)$$

que nada mais são que as soluções (93). Esta solução não corresponde, em geral, a um movimento harmônico simples para x_1 e x_2 . Podemos escolher condições iniciais tais que $A_2 = 0$. Basta fazer $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ e $\dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_2(t_0)$, ou seja, dar um mesmo deslocamento inicial e mesma velocidade inicial para cada partícula.

Neste caso,

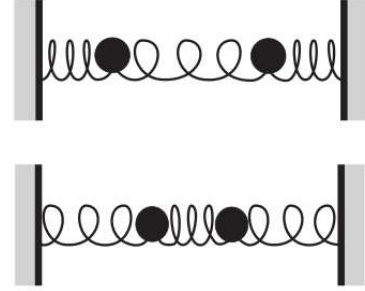
$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) = x_2(t) \quad (97)$$



e as partículas oscilam com a mesma frequência e estão sempre em fase. Este modo normal, conforme mostra a figura, é chamado *modo simétrico*.

Escolhendo as condições iniciais $x_1(t_0) = -x_2(t_0)$ e $\dot{x}_1(t_0) = -\dot{x}_2(t_0)$, então, $A_1 = 0$, e

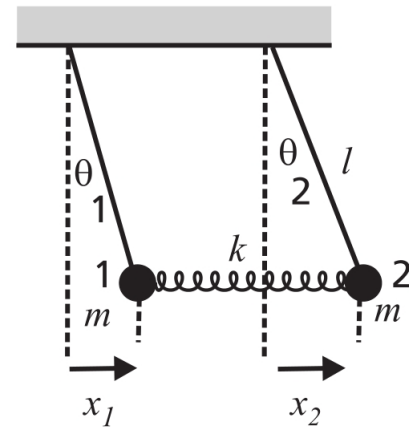
$$x_1(t) = A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) = -x_2(t) \quad (98)$$



As partículas oscilam com a mesma frequência e estão sempre em oposição de fase. Este modo normal é chamado *modo anti-simétrico*. Nele os deslocamentos das partículas são sempre iguais e contrários.

7.2 Osciladores Acoplados: Pêndulos Acoplados

Consideremos dois pêndulos idênticos acoplados por uma mola de constante k



Seja m a massa de cada pêndulo. Chamando de l o comprimento comum, a frequência de suas oscilações livres será

$$\omega = \sqrt{g/l} \quad (99)$$

⁹⁸O número de funções de base é igual a duas vezes o número de graus de liberdade.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+i\omega t}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{+i\sqrt{3}\omega t}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{3}\omega t}$$

Para pequenos deslocamentos x_1 e x_2 , podemos aproximar os arcos descritos com os deslocamentos, ou seja, $x_1 \approx l\theta_1$ e $x_2 \approx l\theta_2$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos de desvio. Nesta aproximação, a componente tangencial da força gravitacional sobre cada partícula será:

$$\begin{aligned} -mg\theta_1 &\approx -mgx_1/l = -m\omega^2 x_1 ; \text{ para a partícula 1} \\ -mg\theta_2 &\approx -mgx_2/l = -m\omega^2 x_2 ; \text{ para a partícula 2} \end{aligned}$$

Além da força gravitacional, cada partícula sofre a ação da mola. Para deslocamentos positivos arbitrários, a força sobre a partícula 1 é $-k(x_1 - x_2)$ e a força sobre a partícula 2 será igual e contrária, ou seja, $-k(x_2 - x_1)$. Assim, as equações do movimento para pequenas oscilações das duas partículas são

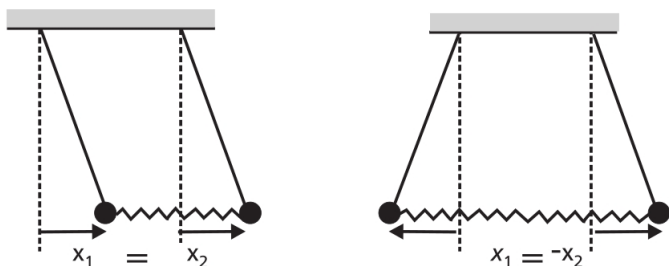
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -m\omega^2 x_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -m\omega^2 x_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

ou, dividindo por m ,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + \omega_0^2(x_1 - x_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 + \omega_0^2(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (100)$$

onde $\omega = \sqrt{g/l}$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Note que o movimento de um pêndulo é, na verdade, bidimensional, mas, para oscilações de pequenas amplitudes, pode ser tratado como um movimento unidimensional.

Das eqs. (100), vemos que o sistema de dois pêndulos acoplados é equivalente a um sistema de duas massas iguais e três molas, semelhante ao que já estudamos, porém com a mola do meio tendo uma constante de mola diferente das outras duas. (Se nas eqs. (100) fizermos $\omega_0 = \omega$, encontraremos exatamente as eqs. (87) ou (88)). Portanto, já sabemos quais são os modos normais dos dois pêndulos acoplados: o modo simétrico é mostrado na figura à esquerda e o modo anti-simétrico, na figura à direita.



Para determinar as frequências de cada modo, basta notar que, no modo normal simétrico, a mola não sofre deformação e, portanto, os pêndulos oscilam com a frequência livre ω . No modo anti-simétrico, $x_1 = -x_2$, e substituindo esta condição, por exemplo, na equação para o pêndulo 1 (a primeira equação na (100)), ficamos com

$$\ddot{x}_1 + (\omega^2 + 2\omega_0^2) x_1 = 0 \quad (101)$$

Logo, a frequência do modo anti-simétrico é $\omega_2 = \omega^2 + 2\omega_0^2$.

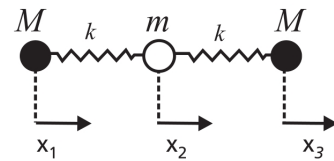
Estes resultados sobre modos normais podem ser generalizados para pequenas oscilações em torno do equilíbrio estável de um sistema com um número qualquer de partículas acopladas. Um sistema unidimensional com N partículas tem N graus de liberdade e, portanto, N modos normais de vibração. Cada modo normal corresponde a uma frequência de oscilação comum a todas as partículas.

Quando o sistema unidimensional com N partículas está isolado, o centro de massa do sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Isto significa que, em uma dimensão, uma das frequências dos modos normais é zero, correspondendo a um movimento de corpo rígido do sistema.

Se o problema de N partículas estiver sendo tratado em três dimensões, o número de graus de liberdade de corpo rígido crescerá, em geral, para seis. O sistema poderá transladar-se uniformemente ao longo dos três eixos de coordenadas ou realizar rotações uniformes em torno dos eixos.

Portanto, em um sistema geral de N partículas em três dimensões, existirão seis frequências nulas e somente $3N - 6$ frequências normais de vibração.

Exemplo 7.1. A figura abaixo mostra um sistema constituído por duas partículas idênticas de massa M ligadas a uma partícula central de massa m por molas idênticas de constante elástica k .



Sejam x_1 , x_2 e x_3 os deslocamentos longitudinais das três partículas, a partir das respectivas posições de equilíbrio. As equações do movimento para x_1 , x_2 e x_3 são

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_3) - k(x_2 - x_1) \\ M\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

Introduzindo as frequências $\omega = \sqrt{k/M}$ e $\bar{\omega} = \sqrt{k/m}$, as equações acima podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 - \bar{\omega}^2 x_2 &= 0 \\ \ddot{x}_2 + 2\bar{\omega}^2 x_2 - \bar{\omega}^2 (x_1 + x_3) &= 0 \\ \ddot{x}_3 + \omega^2 x_3 - \bar{\omega}^2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Usando o método matricial, podemos resolver simultaneamente as 3 equações diferenciais lineares acima. Usando a solução tentativa

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} e^{pt}$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} p^2 + \omega^2 & -\omega^2 & 0 \\ -\bar{\omega}^2 & p^2 + 2\bar{\omega}^2 & -\bar{\omega}^2 \\ 0 & -\omega^2 & p^2 + \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0$$

Como antes, esta equação tem solução não-trivial se o determinante da matriz for igual a zero, o que nos dá

$$\begin{vmatrix} p^2 + \omega^2 & -\omega^2 & 0 \\ -\bar{\omega}^2 & p^2 + 2\bar{\omega}^2 & -\bar{\omega}^2 \\ 0 & -\omega^2 & p^2 + \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$p^2 (p^2 + \omega^2) (p^2 + 2\bar{\omega}^2 + \omega^2) = 0$$

As soluções são:

$$p = 0, \quad p = \pm i\omega_1, \quad p = \pm i\omega_2$$

A solução $p = 0$ corresponde à frequência zero associada ao movimento do centro de massa. As outras duas correspondem às frequências dos modos normais de vibração do sistema $\omega_1 = \omega$ e $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\bar{\omega}^2}$. O resto da análise para encontrar $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ é um pouco complicado. Entretanto, existe uma maneira mais simples de resolver este problema.

Já que a frequência zero, encontrada anteriormente, não tem nenhuma consequência na determinação das frequências dos modos normais de vibração do sistema, é possível reformular o problema, de forma que a raiz zero seja excluída desde o início. Isto pode ser feito muito simplesmente, impondo a condição de que o centro de massa permaneça estacionário na origem. A coordenada do centro de massa do sistema é

$$X = \frac{M(x_1 + x_3) + mx_2}{2m + M}$$

e, portanto, o centro de massa permanecerá estacionário na origem, se

$$M(x_1 + x_3) + mx_2 = 0$$

Esta condição pode ser usada para eliminar uma das coordenadas e reduzir o problema a um com dois

graus de liberdade. Para isso, vamos definir as novas coordenadas

$$\xi = x_1 + x_3, \quad \eta = x_1 - x_3$$

Subtraindo a terceira da primeira das equações de movimento, ficamos com

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3 + \omega^2(x_1 - x_3) = 0$$

e, somando, obtemos

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_3 + \omega^2(x_1 + x_3) - 2\omega^2 x_2 = 0$$

que, substituindo $x_2 = M(x_1 + x_3)/m$, nos fornece

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_3 + \omega^2(x_1 + x_3) - 2\omega^2 \frac{M}{m}(x_1 + x_3) = 0$$

Isto nos dá as equações para ξ e η :

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} + \omega_1^2 \eta &= 0 \\ \ddot{\xi} + \omega_2^2 \xi &= 0 \end{aligned}$$

onde as frequências dos modos normais são $\omega_1 = \omega$ e $\omega_2 = \sqrt{\omega^2 + 2\omega^2 \frac{M}{m}} = \sqrt{\omega^2 + 2\bar{\omega}^2}$, iguais aos valores já obtidos.

Note que o modo de frequência ω_1 é o modo simétrico: a partícula do meio fica parada enquanto as outras duas oscilam em oposição de fase. No modo de frequência ω_2 , a partícula do meio oscila em relação ao centro de massa das outras duas.

Christiaan Huygens nasceu em Haia - Holanda, em 14 de abril de 1629 e faleceu também em Haia, em 8 de julho de 1695.



Em física, Huygens é bastante lembrado por seus estudos sobre luz e cores, percepção do som, estudo da força centrífuga, o entendimento das leis de conservação em dinâmica equivalentes ao moderno conceito de conservação de energia, o estudo da dupla refração no cristal da Islândia, e a teoria ondulatória da luz baseada na concepção de que a luz seria um pulso não periódico propagado pelo "éter".

Através da teoria ondulatória da luz, explicou satisfatoriamente fenômenos como a propagação retilínea da luz, a refração e a reflexão. Também procurou explicar o então recém descoberto fenômeno da dupla refração. O seu mais conhecido trabalho neste assunto foi intitulado "Tratado sobre a luz".

Ele inventou o relógio de pêndulo em 1657 e introduziu placas cicloidalas para confinar a suspensão do pêndulo, de modo que este seguisse uma trajetória isócrona, independente da amplitude. Huygens estava tentando resolver o grande problema da época, que era construir um relógio suficientemente preciso para, instalado em um navio, poder determinar a longitude, essencial para as grandes navegações.

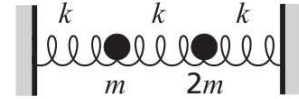
Numa carta a seu pai, Huygens relatou uma coisa muito curiosa, que observou quando dois relógios de pêndulo eram suspensos um ao lado do outro. Seu estudo sobre dois relógios operando simultaneamente tinha uma razão prática: era preciso levar dois relógios no navio, porque se um deles parasse, o outro continuaria dando as horas. Ele notou que, depois de algum tempo, os pêndulos passavam a oscilar com a mesma frequência e em oposição de fase, ou seja, quando um estava se deslocando para a direita, o outro se deslocava para a esquerda, e vice-versa. Se ele alterasse o movimento de um dos pêndulos, bastava esperar, pois eles voltariam a oscilar exatamente com a mesma frequência e 180° fora de fase, e assim permaneceriam oscilando indefinidamente.

De alguma maneira, os dois pêndulos estavam acoplados e o modo simétrico estava sendo suprimido, deixando os pêndulos oscilando no modo anti-simétrico. Podemos pensar esquematicamente o sistema dos dois pendulos mais suas caixas, colocadas juntas, lado a lado, como o sistema do exemplo 7.1, onde m representaria a massa das caixas e M a massa de cada pêndulo.

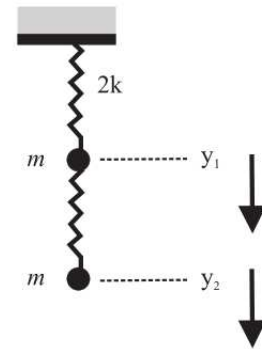
O movimento geral do sistema é uma superposição dos dois modos normais. No modo anti-simétrico, as caixas não se movem. No modo simétrico, as caixas se movem e, como estão em contato com a parede, existe uma força de atrito entre a parede e a caixa, o que vai dissipando a energia do modo simétrico, até que ele pare de existir, restando somente o modo anti-simétrico.

7.3 Exercícios Propostos

- 7.1. Duas massas, m e $2m$, estão ligadas por molas idênticas, como indicado na figura abaixo. Encontre os modos normais⁹⁹.



- 7.2. Considere duas massas idênticas, $m_1 = m_2 = m$, suspensas num campo gravitacional uniforme (vertical) g por duas molas com constantes de mola $2k$ e k , como indicado na figura, onde y_1 e y_2 descrevem os deslocamentos das massas de suas posições de equilíbrio. Suponha que somente o movimento vertical é permitido.



- Escreva as equações (acopladas) do movimento das massas 1 e 2¹⁰⁰.
- Encontre as frequências dos modos normais de oscilação do sistema¹⁰¹.
- Encontre os modos normais (não normalizados)¹⁰².
- Se as condições iniciais são $y_1(0) = \dot{y}_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $\dot{y}_2(0) = v_0$, ache o movimento subsequente das duas massas, isto é, $y_1(t)$ e $y_2(t)$ ¹⁰³.

- 7.3. Considere o pêndulo duplo na figura abaixo.

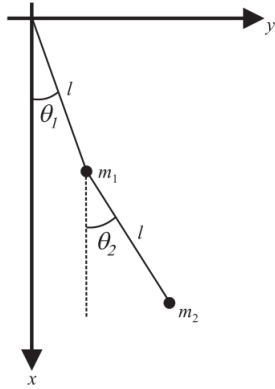
⁹⁹Os modos normais são: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \pm 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_{\pm} t + \phi_{\pm})$, onde $\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}} \sqrt{\frac{k}{m}}$. Note que as coordenadas normais (aquelas que desacoplam as equações de movimento) associadas a esses modos normais são dadas pelas combinações lineares, nada óbvias, $x_1 - (\sqrt{3} - 1)x_2$ e $x_1 + (\sqrt{3} + 1)x_2$.

¹⁰⁰ $\ddot{y}_1 + 3\omega^2 y_1 - \omega^2 y_2 = 0$ e $\ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 - \omega^2 y_1 = 0$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$.

¹⁰¹ $\omega_{\pm} = \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$, onde $\omega = \sqrt{k/m}$.

¹⁰²Os modos normais (não normalizados) são: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \mp \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_{\pm} t + \phi_{\pm})$.

¹⁰³ $y_{1,2}(t) = \frac{v_0}{2\sqrt{2}\omega} \left(-A_- \frac{\sin(\sqrt{2+\sqrt{2}}\omega t)}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} + A_+ \frac{\sin(\sqrt{2-\sqrt{2}}\omega t)}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \right)$, onde $A_{\pm} = 1$ para $y_1(t)$ e $A_{\pm} = 1 \pm \sqrt{2}$ para $y_2(t)$.

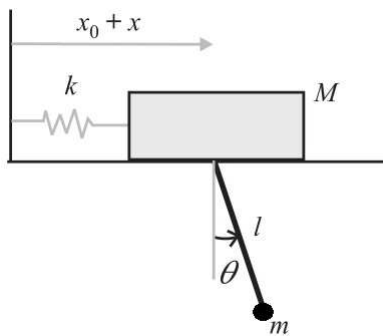


No caso de pequenas oscilações,

(a) escreva as equações do movimento do sistema¹⁰⁴.

(b) encontre as frequências dos modos normais¹⁰⁵.

7.4. Um bloco de massa M é colocado sobre uma mesa horizontal sem atrito e preso a uma parede com a ajuda de uma mola sem massa e constante de mola k , como mostrado na figura.



A mola está em seu estado de equilíbrio quando o bloco está a uma distância x_0 da parede. Um pêndulo de massa m e comprimento l está preso ao carrinho (imagine uma calha ao longo da mesa por onde passa o fio do pêndulo).

Supondo pequenas amplitudes de oscilação do pêndulo, encontre as frequências dos modos normais (autofrequências)¹⁰⁶.

7.5. Dois íons numa armadilha linear de íons, estão confinados a uma linha ao longo do eixo z , como contas num fio. Por sua vez, ao longo do eixo z , eles sofrem a ação de um potencial elétrico confinante: $\Phi(z) = \frac{1}{2}a z^2$, onde a é uma constante positiva. A energia potencial de cada íon neste potencial é $V(z) = e \Phi = \frac{1}{2}e a z^2$, e dá origem a uma força $\vec{F} = -\frac{dV}{dz} \hat{z} = -e a z \hat{z}$ sobre um íon na posição z .

Os íons também interagem através da força de Coulomb entre eles. As forças de repulsão entre os íons são

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(z_1 - z_2)^2} \hat{z}$$

$$\vec{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(z_2 - z_1)^2} \hat{z}.$$

Considere dois íons na armadilha. Quando os íons estão em suas posições de equilíbrio, um íon, que vamos chamar 1, está em $z = z_0/2$, e o outro, que chamaremos 2, está em $z = -z_0/2$. Considere também pequenas oscilações em torno das posições de equilíbrio.

Seja $z_1 = z_0/2 + \eta_1$ e $z_2 = -z_0/2 + \eta_2$, de modo que η_1 e η_2 descrevam os pequenos deslocamentos dos íons de suas posições de equilíbrio.

a) Encontre z_0 ¹⁰⁷.

b) Linearize as equações do movimento dos íons em torno da configuração de equilíbrio, a fim de encontrar as equações diferenciais lineares para η_1 e η_2 , que descrevem pequenas oscilações em torno das posições de equilíbrio. Será útil introduzir a frequência $\omega_0 = \sqrt{e a/m}$. Interprete ω_0 ¹⁰⁸.

c) Encontre as coordenadas normais do sistema e as correspondentes frequências normais de oscilação¹⁰⁹.

¹⁰⁴
$$(m_1 + m_2)l\ddot{\theta}_1 + m_2l\ddot{\theta}_2 + (m_1 + m_2)g\theta_1 = 0 \quad \text{e} \quad l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0.$$

¹⁰⁵
$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{m_1 + m_2 \pm \sqrt{m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1}} \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

¹⁰⁶As coordenadas do pêndulo e do bloco são $x_M = x, y_M = 0$ e $x_m = x + l\sin\theta, y_m = -l\cos\theta$. As equações de movimento linearizadas são $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + kx = 0$ e $l\ddot{\theta} + \ddot{x} + g\theta = 0$. Introduzindo a notação $M_T = M+m$. $\Omega_1 = \sqrt{k/M_T}$ e $\Omega_2 = \sqrt{g/l}$,

obtemos os seguintes valores para as frequências dos modos normais: $\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{M_T}{2M}} \sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2 \pm \sqrt{(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)^2 - \frac{4M}{M_T} \Omega_1^2 \Omega_2^2}}$.

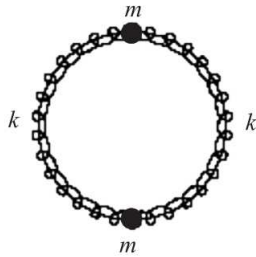
¹⁰⁷
$$z_0 = \left(\frac{e}{2\pi\epsilon_0 a} \right)^{1/3}, \text{ onde } e \text{ é a carga elementar e } \epsilon_0 \text{ a permissividade elétrica do vácuo.}$$

¹⁰⁸Expandindo as forças em torno das posições de equilíbrio η_1 e η_2 , temos que $z_1 - z_2 = z_0 + \eta_1 - \eta_2$, assim: $\ddot{\eta}_1 + 2\omega_0^2\eta_1 - \omega_0^2\eta_2 = 0$ e $\ddot{\eta}_2 + 2\omega_0^2\eta_2 - \omega_0^2\eta_1 = 0$, onde ω_0 é a frequência angular com que cada íon oscila.

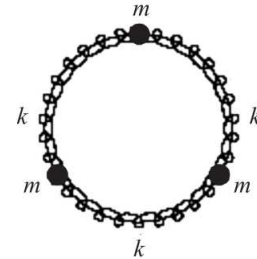
¹⁰⁹As equações de movimento são desacopladas, se introduzirmos $\xi_1 = \eta_1 + \eta_2$ e $\xi_2 = \eta_1 - \eta_2$. Estas são as coordenadas normais do sistema. Assim temos que as frequências normais são $\omega_1 = \omega_0$ e $\omega_2 = \sqrt{3}\omega_0$.

d) Suponha que os dois íons estejam nas suas posições de equilíbrio e, então, o íon 1 receba um impulso súbito que dê a ele uma velocidade v_0 . Encontre o movimento subsequente dos dois íons¹¹⁰.

7.6. Duas massas idênticas m movem-se num anel horizontal. Duas molas idênticas, de constante de mola k , conectam as massas e estão enroladas em torno do anel, como mostrado na Figura. Não há atrito. Encontre os modos normais¹¹¹.



7.7. Três massas idênticas m movem-se num anel horizontal. Três molas idênticas, de constante de mola k , conectam as massas e estão enroladas em torno do anel, como mostrado na Figura. Não há atrito. Encontre os modos normais¹¹².



8 Movimento sob a Ação de uma Força Central – Mecânica Espacial

Se uma partícula está se movendo sob a influência de uma força tendo uma linha de ação que é sempre direcionada para um ponto fixo, o movimento é chamado de *movimento de força central*. Este tipo de movimento, comumente causado por forças gravitacionais e eletrostáticas, já foi abordado anteriormente e, como observado, pode ser descrito como

$$\vec{F} = f(R) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = f(R) \hat{r}$$

No caso da interação gravitacional, o módulo da força $f(R)$ é $\frac{-GMm}{r^2}$, onde m é a massa da partícula teste e M é a massa da “partícula” fonte do campo gravitacional, G a constante da Gravitação Universal e r a distância radial que liga os centros de massa das duas partículas (de massas m e M).

Assim, em módulo,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{-GMm}{r^2} \rightarrow \boxed{\ddot{r} + GMr^{-2} = 0} \quad (102)$$

que, em uma dimensão poderia ser escrita como: $\ddot{x} + GMx^{-2} = 0$. Ou seja, uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea e de coeficientes constantes, entretanto não linear.

EDO's não lineares, são geralmente de resolução analítica difícil ou mesmo impossível. Neste caso, podemos tentar utilizar um sistema de coordenadas que facilite a resolução, mesmo que, precisemos resolver simultaneamente um sistema de equações diferenciais acopladas ao invés de uma equação diferencial não linear.

No caso do movimento sob a ação de uma força central (neste caso), a trajetória da partícula teste que se move sob a ação do campo gravitacional criado pela “partícula” fonte do campo gravitacional

$${}^{110}x_1(t) = \frac{v_0}{2} \left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} + \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} \right] = \frac{v_0}{2\omega_0} \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(\sqrt{3}\omega_0 t)}{\sqrt{3}} \right] \text{ e } x_2(t) = \frac{v_0}{2\omega_0} \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{\sin(\sqrt{3}\omega_0 t)}{\sqrt{3}} \right]$$

¹¹¹Os modos normais são: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (At + B)$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(2\omega t + \phi)$. O primeiro modo normal tem frequência zero. Ele corresponde às massas deslizando em torno do círculo, igualmente espaçadas e com velocidade constante. O segundo modo tem ambas as massas movendo-se para a esquerda; depois, ambas para a direita, para frente e para trás.

¹¹²Temos um modo normal com frequência nula e outros dois, com frequências $\pm\sqrt{3}\omega$.

não é retilínea. Assim devemos procurar um sistema de coordenadas adequado ao movimento curvilíneo no plano.

8.1 Solução da Equação de Movimento para uma Força Central

Em coordenadas polares (cilíndricas no plano), a força só teria componente radial, no sentido negativo da direção radial. Assim

$$-F = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (103)$$

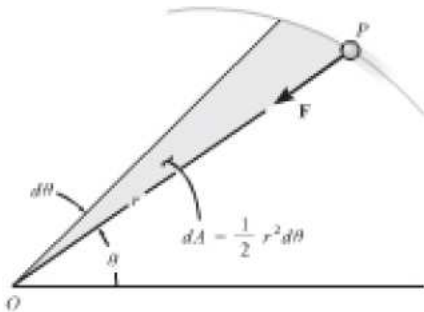
$$0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \Rightarrow \frac{1}{r} \left[\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] = 0$$

de maneira que, integrando a segunda das equações acima, resulta em

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h \quad (104)$$

onde h é a constante de integração.

Na figura abaixo, observamos que a área sombreada descrita pelo raio r , na medida em que r se move através de um ângulo $d\theta$ é $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$.



Assim, a velocidade areolar

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2} \quad (105)$$

para uma partícula submetida ao movimento sob a ação de uma força central é constante. Em outras palavras, a partícula varrerá segmentos iguais de área por unidade de tempo, enquanto descreve sua trajetória.

Para obter a trajetória do movimento, $r = r(\theta)$, devemos eliminar a variável independente t nas equações (102). Assim

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

onde $\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}$, da eq. (104).

Fazendo a mudança de variável $\xi = 1/r$, obtemos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -h^2 \xi^2 \frac{d^2 \xi}{d\theta^2}$$

e, da eq. (104)

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = h^2 \xi^4$$

Assim, substituindo na primeira das eqs. (103), ficamos com

$$-F = m \left[-h^2 \xi^2 \frac{d^2 \xi}{d\theta^2} - h^2 \xi^3 \right]$$

ou

$$\frac{d^2 \xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{F}{mh^2 \xi^2} \quad (106)$$

A eq. diferencial (106) define a trajetória sob a qual a partícula se move quando submetida à força central $\vec{F}$.

8.1.1 Quando a Força Central é a Força da Gravitação Universal

Vamos considerar a Força Gravitacional, dada pela Lei de Newton da Gravitação Universal,

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = GMm\xi^2 \quad (107)$$

onde G é a constante da Gravitação Universal e vale¹¹³ $6,67428(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$, em unidades do Sistema Internacional de Unidades.

Assim, a eq. (106) fica

$$\ddot{\xi} + \xi = \frac{GM}{h^2} \quad (108)$$

que é uma equação diferencial linear em ξ , de segunda ordem, com coeficientes constantes e não homogênea, diferentemente da equação (102), não linear em r .

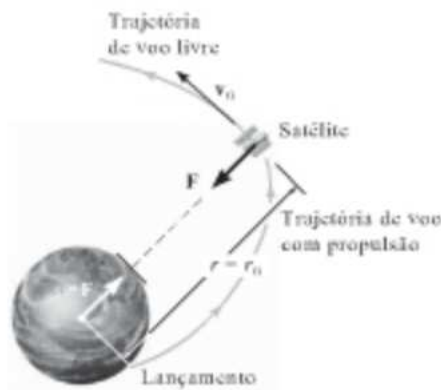
A solução é soma das soluções homogênea e particular, dada por

$$\xi = \frac{1}{r} = C \cos(\theta - \phi) + \frac{GM}{h^2} \quad (109)$$

¹¹³Trata-se de uma das constantes físicas cujo valor é menos preciso. A primeira medição do seu valor foi efetuada por Henry Cavendish, na sua obra *Philosophical Translations*, de 1798, utilizando uma balança de torção. Observe que Charles-Augustin Coulomb anunciou a lei da interação eletrostática em 1785 como o resultado de várias medições realizadas graças à balança de Coulomb (uma balança de torção). Desde Newton até esta data, a Lei da Gravitação Universal de Newton era apenas uma relação de proporcionalidade. A força gravitacional é relativamente fraca. Como exemplo, duas massas de 3000 kg colocadas com seus centros de gravidade a uma distância de 3 metros uma da outra atraem-se com uma força de aproximadamente 67 μ N. Essa força é aproximadamente igual ao peso de um grão de areia.

8.2 Movimento Orbital

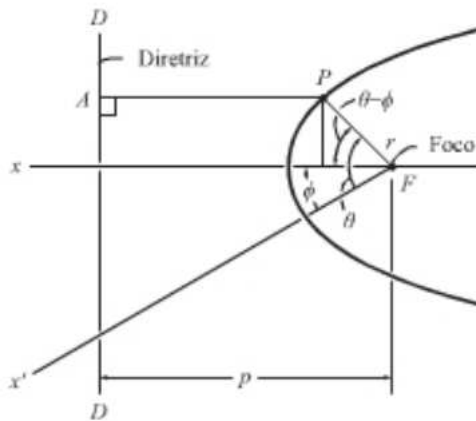
A eq. (109) representa a trajetória de voo livre, por exemplo, de um satélite em órbita da Terra, como ilustrado na figura abaixo



A eq. (109) é a equação de uma seção cônica expressa em termos de coordenadas polares.

Como mostrado na figura abaixo, uma seção cônica é definida como o lugar geométrico do ponto P , tal que a razão de sua distância até o foco F pela distância perpendicular a uma linha fixa DD , chamada diretriz, é constante. Esta razão constante e é chamada de excentricidade. Por definição

$$e = \frac{PF}{PA} \quad (110)$$



Da figura

$$PF = r = e(PA) = e[p - r \cos(\theta - \phi)]$$

ou

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{ep}$$

Comparando com a eq. (109), vemos que a distância fixa do foco até a diretriz é

$$p = \frac{1}{C} \quad (111)$$

E a excentricidade da seção cônica para a trajetória é

$$e = \frac{Ch^2}{GM} \quad (112)$$

Se o ângulo polar θ for medido a partir do eixo x (um eixo de simetria – perpendicular à diretriz), o ângulo ϕ será zero.

As constantes h e C podem ser obtidas a partir da posição e velocidade da partícula em algum ponto de sua trajetória. Por exemplo, para o lançamento de um satélite, por razões de economia de combustível ele sempre será colocado em órbita no periéu¹¹⁴ (menor distância da órbita até a Terra). Para esta posição, no início do seu voo livre (ou fim da trajetória de voo com propulsão), vamos denotar r_0 , onde o satélite teria uma velocidade v_0 .

A velocidade v_0 não tem componente radial, portanto, da eq. (17), $v_0 = r_0 d\theta/dt$ na direção transversal (perpendicular à direção radial, no sentido da velocidade da partícula). Assim, utilizando a eq. (104):

$$h = r_0 v_0 \quad (113)$$

Para determinar a constante C , fazemos $\theta = \phi = 0$ na eq. (109), com $r = r_0$ e h dada pela eq. (113), assim

$$C = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{GM}{r_0 v_0^2} \right) \quad (114)$$

Assim, a equação da trajetória de voo livre, torna-se

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{GM}{r_0 v_0^2} \right) \cos \theta + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \quad (115)$$

O tipo de trajetória é determinado a partir do valor da excentricidade da seção cônica [eq. (112)]. Assim, se:

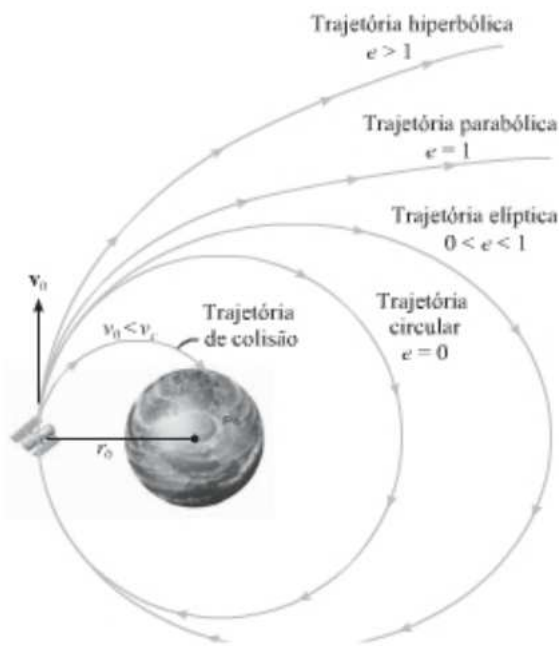
excentricidade	órbita (trajetória de voo livre)
0	círculo
1	parábola
< 1	elipse
> 1	hipérbole

Uma partícula descrevendo uma trajetória parabólica está no limite de nunca retornar ao ponto de partida inicial. A velocidade inicial v_0 necessária para colocar um objeto em órbita numa trajetória parabólica pode ser obtida das eqs. (112), (113) e (114), com $e = 1$, ou seja

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

¹¹⁴Seria periélio ou periastro, se estivéssemos nos referindo ao Sol ou a algum outro astro celeste. Em oposição, a maior distância até a órbita é o apogeu, afélio ou apoastro, respectivamente.

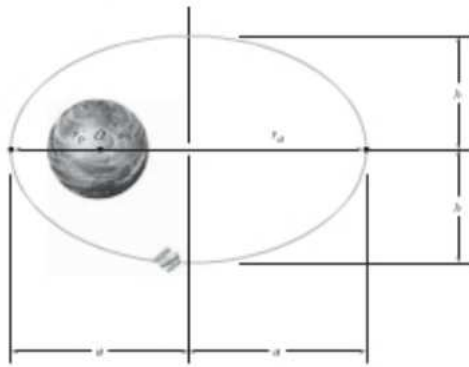
que é a velocidade de escape (veja o item c do Exemplo 4.2).



Procedendo de forma completamente análoga, vemos que $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ é a velocidade necessária para colocar um objeto em órbita numa trajetória circular.

Para qualquer valor de e entre 0 e 1, a trajetória será elíptica. De (115), com $\theta = 0^\circ$ temos que $r_p = r_0$ é a distância até o peri(geu/élio/astro) e, com $\theta = 180^\circ$ temos que $r_a = r_0 \left(\frac{2GM}{r_0 v_0^2} - 1 \right)^{-1}$ é a distância até o apo(geu/élio/astro).

Usando a geometria da elipse, temos que $a = (r_p + r_a)/2$ é o semi eixo maior da elipse e $b = \sqrt{r_p r_a}$ o seu semi eixo menor.



A área da elipse é $A = \pi ab = \frac{\pi}{2}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a}$. Integrando a eq. (105), obtemos $A = hT/2$, onde T é o período de tempo necessário para fazer uma revolução orbital. Assim, combinando estes dois resultados, obtemos

$$T = \frac{\pi}{h}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \quad (116)$$

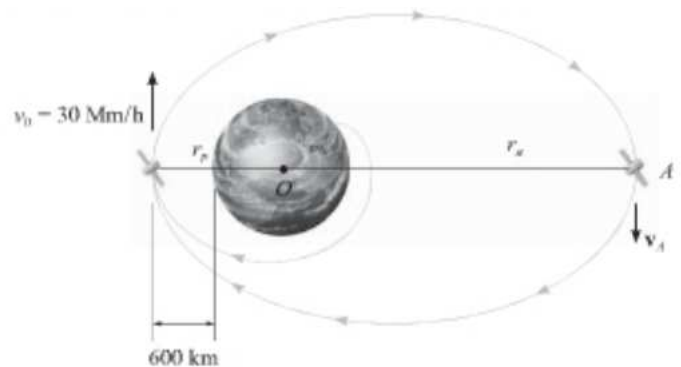
8.3 As Leis de Kepler

Johannes Kepler, no início do século XVII, antes mesmo do trabalho de Newton, após 20 anos de observações astronômicas, enunciou suas 3 leis empíricas para o movimento planetário, que podem ser resumidas como:

- I. Todo planeta se move em sua órbita de tal maneira que a linha que o une ao centro do Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais, qualquer que seja o comprimento da linha.
- II. A órbita de todos os planetas é uma elipse com o Sol posicionado em um dos focos dessa elipse.
- III. O quadrado do período de qualquer planeta é diretamente proporcional ao cubo do semi eixo maior da sua órbita.

A primeira e a segunda lei são dadas pelas eqs. (105) e (115), respectivamente. A terceira lei pode ser mostrada a partir da eq. (116), utilizando-se da eq. (115), com as propriedades geométricas da elipse (a demonstração é pedida no Exercício 8.8).

Exemplo 8.1. Um satélite é lançado a 600 km da superfície da Terra, com uma velocidade inicial de 30 Mm/h paralela à tangente à superfície da Terra, como indica a figura abaixo. Sabendo que o raio da Terra é $r_T = 6.378$ km e que a sua massa é $M_T = 5,976 \times 10^{24}$ Kg, determine a excentricidade da trajetória orbital e a velocidade do satélite no apogeu.



Da eq. (112), com h e C dados por (113) e (114), temos:

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 = 0,215$$

onde $r_0 = r_p = r_T + 600$ km e $M = M_T$, ou seja, $e < 1$, o que significa que a órbita será elíptica.

Como h é constante em qualquer ponto da trajetória orbital, temos de (113) e de (115) com $\theta = 180^\circ$

$$r_p v_0 = r_a v_a \Rightarrow v_a = v_0 \left(\frac{2GM}{r_p v_0^2} - 1 \right) = 19,4 \text{ Mm/h}$$

Johannes Kepler nasceu em Weil der Stadt - atual Alemanha, em 27 de dezembro de 1571 e faleceu em Ratisbona, também na hoje Alemanha, em 15 de novembro de 1630.

Foi astrônomo e matemático, considerado figura-chave da revolução científica do século XVII. É mais conhecido por ter formulado as três leis fundamentais da mecânica celeste, conhecidas como Leis de Kepler, codificadas por astrônomos posteriores com base em suas obras *Astronomia Nova*, *Harmonices Mundi*, e *Epítome da Astronomia de Copérnico*.

Kepler foi um assistente do astrônomo Tycho Brahe, o matemático imperial do imperador Rodolfo II e de seus dois sucessores, Matias I e Fernando II. Também foi professor de matemática em Linz, Áustria, e conselheiro do general Wallenstein. Adicionalmente, fez um trabalho fundamental no campo da óptica, inventou uma versão melhorada do telescópio refrator (o telescópio de Kepler) e ajudou a legitimar as descobertas telescópicas de seu contemporâneo Galileu Galilei.

Tycho Ottesen Brahe, foi um astrônomo dinamarquês. Teve um observatório chamado Uraniborg na ilha de Ven, no Öresund, entre a Dinamarca e a Suécia. Tycho esteve ao serviço de Frederico II da Dinamarca e mais tarde do imperador Rodolfo II da Alemanha, tendo sido um dos representantes mais prestigiosos da ciência nova - a ciência renascentista.

Tycho foi um astrônomo observacional da era que precedeu a invenção do telescópio, e as suas observações da posição das estrelas e dos planetas alcançaram uma precisão sem paralelo para a época. Após a sua morte, os seus registos dos movimentos de Marte permitiram a Johannes Kepler descobrir as leis dos movimentos dos planetas, que deram suporte à teoria heliocêntrica de Copérnico.



Kepler viveu numa época em que não havia nenhuma distinção clara entre astronomia e astrologia, mas havia uma forte divisão entre a astronomia (um ramo da matemática dentro das artes liberais) e a física (um ramo da filosofia natural).

Kepler também incorporou raciocínios e argumentos religiosos em seu trabalho, motivado pela convicção religiosa de que Deus havia criado o mundo de acordo com um plano inteligível, acessível através da luz natural da razão. Kepler descreveu sua nova astronomia como "física celeste", como "uma excursão à *Metafísica* de Aristóteles" e como "um suplemento de *Sobre o Céu* de Aristóteles", transformando a antiga tradição da cosmologia física ao tratar a astronomia como parte de uma física matemática universal.

Kepler foi apresentado à astronomia quando criança, e desenvolveu um amor por ela que manteve por toda sua vida. Aos seis anos de idade, observou o Grande Cometa de 1577, deixou escrito que "foi levado por sua mãe para um local elevado para vê-lo." Aos nove anos, observou um outro evento astronômico, um eclipse lunar em 1580, registrando que se lembrava de ter sido "chamado para fora" para observá-lo e que a lua "parecia bastante vermelha".

8.4 Exercícios Propostos

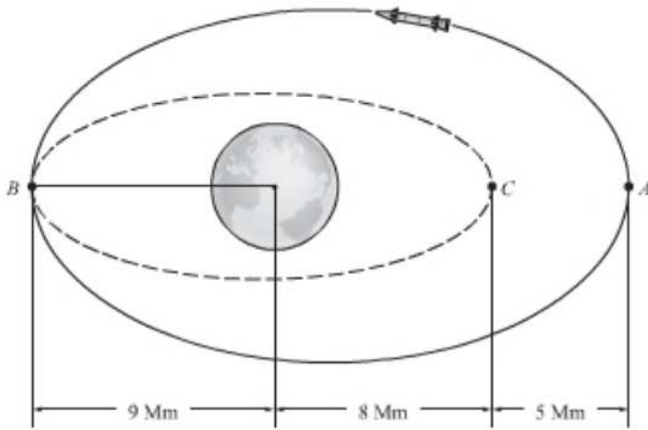
Nos exercícios a seguir, utilize $r_T = 6.378 \text{ km}$ para o raio da Terra, $M_T = 5,976 \times 10^{24} \text{ Kg}$ para a massa da Terra, $M_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$ para a massa do Sol e $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ para a constante gravitacional.

8.1. Um foguete está em órbita circular em torno da terra a uma altitude $h = 4 \text{ Mm}$. Determine o incremento mínimo no módulo de sua velocidade a fim de escapar do campo gravitacional da Terra¹¹⁵.

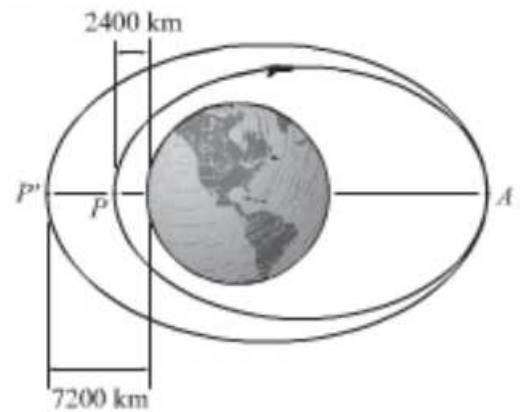
8.2. O foguete mostrado na figura abaixo está em uma órbita elíptica de voo livre em torno da Terra de tal maneira que $e = 0.76$. Determine sua velocidade quando ele está no ponto A e a variação súbita na velocidade que o foguete tem que imprimir no ponto B para passar a descrever a órbita indicada pela linha tracejada¹¹⁶.

¹¹⁵Dica: o foguete deve deixar a órbita circular ($e = 0$) e alcançar uma órbita parabólica ($e = 1$).

¹¹⁶ $v_A = 6,11 \text{ km/s}$ e $\Delta v_B = -2,37 \text{ km/s}$.

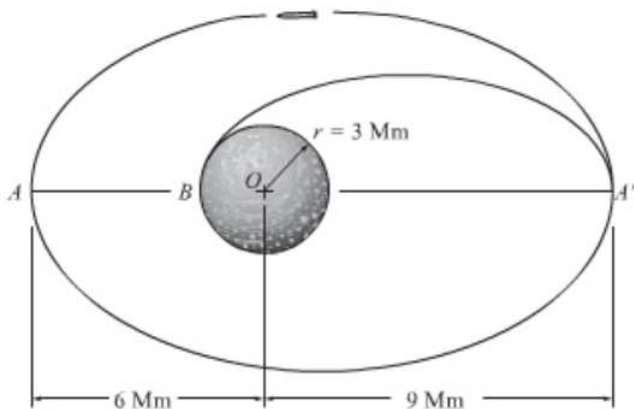


o incremento necessário na velocidade de maneira que ele entre na segunda órbita elíptica.



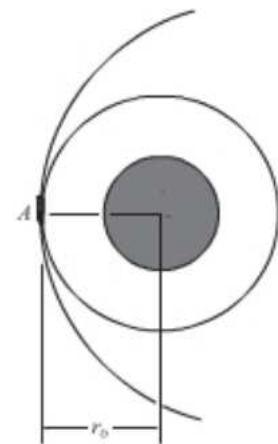
8.3. A Terra tem uma órbita com uma excentricidade $e = 0,0821$ em torno do Sol. Sabendo que a distância mínima da Terra ao Sol é de 151,3 milhões de km, calcule sua velocidade neste ponto e, também, determine a equação, em coordenadas polares, que descreve a órbita da Terra em torno do Sol¹¹⁷.

8.4. Um foguete deve pousar na superfície de um planeta sem atmosfera, no ponto B . Determine a velocidade que ele deve ter em A' de forma a atingir o objetivo e o tempo necessário para ir de A' para B ao longo de uma trajetória elíptica, se a massa do planeta é de 70% da massa da Terra¹¹⁸.



8.5. O ônibus espacial é lançado com uma velocidade de 28000 km/h paralela à tangente da superfície da Terra no ponto P e, então, se move ao longo da órbita elíptica. Quando ele chega ao ponto A , seus motores são ligados e sua velocidade é subitamente aumentada. Determine

8.6. A sonda Viking aproxima-se do planeta Marte em uma trajetória parabólica, como mostrado na figura. Quando ela alcança o ponto A , sua velocidade é de 10 Mm/h. Determine r_0 e a velocidade necessária em A de maneira que ele possa manter uma órbita circular, como mostrado. A massa de Marte é 0,1074 vezes a massa da Terra¹¹⁹.



8.7. Um satélite geoestacionário é aquele que permanece em órbita sempre sobre a mesma região da superfície terrestre. Supondo que a órbita seja circular, calcule a altitude, em relação à superfície terrestre, que um satélite com tais características deve ter¹²⁰.

8.8. Prove a terceira lei do movimento orbital de Kepler¹²¹.

¹¹⁷ $v_P = 30,8 \text{ km/s}$ e $r = \frac{10^{12}}{0,502\cos\theta + 6,11}$.

¹¹⁸ $v_{A'} = 3,94 \text{ km/s}$ e $t = 46,1 \text{ min}$.

¹¹⁹ $r_0 = 11,1 \text{ Mm}$, $v_A = 1964,19 \text{ m/s}$ e $\Delta v_A = 814 \text{ m/s}$.

¹²⁰ Observe que a velocidade angular do satélite em relação ao centro da Terra é a mesma que a velocidade de rotação da própria Terra e que a relação entre velocidade angular e linear é $v = \omega r$.

¹²¹ Dica: use as eqs. (116) e (115), com as propriedades geométricas da elipse $a = (r_p + r_a)/2$ e $b = \sqrt{r_p r_a}$.

Mecânica Geral II

Parte II

Formulação da Mecânica Newtoniana em Três Dimensões

Esta apostila ainda está sendo escrita. Quando esta parte estiver pronta, o Professor avisará em sala de aula e vc. poderá fazer o download do arquivo mais atualizado em:

<https://sites.google.com/site/aazeredo/artigos/material-didatico-1>

Obs.: O arquivo é muito grande para ser inserido no moodle (que limita à 2Mb o tamanho do arquivo).

9 Energia Potencial em 3-D: O Potencial Gravitacional

9.1 Conservação da Energia em 3-D

9.2 Forças Centrais

9.3 Energia Potencial Gravitacional de uma Esfera

9.4 Lei de Gauss

9.5 Forças Conservativas em 3-D

9.6 Exercícios Propostos

10 Mecânica dos Corpos Rígidos – Movimento no Plano

- 10.1 Centro de Massa de um Corpo Rígido
- 10.2 Equilíbrio Estático de um Corpo Rígido
- 10.3 Rotação de um Corpo Rígido em Torno de um Eixo Fixo – Momento de Inércia
 - 10.3.1 Cálculo do Momento de Inércia
- 10.4 O Pêndulo Físico
- 10.5 Momentum Angular
- 10.6 Movimento Laminar de um Corpo Rígido
 - 10.6.1 Corpo Rolando em um Plano Inclinado
- 10.7 Movimento de um Corpo Rígido Sob a Ação de uma Força Impulsiva
- 10.8 Colisão de Corpos Rígidos

10.9 Exercícios Propostos

11 Momento Angular e Colisões de Corpos Rígidos

- 11.1 Momentum Linear
- 11.2 Momentum Angular
- 11.3 Forças Conservativas e Campos de Forças
- 11.4 O Oscilador Harmônico em duas e três dimensões
- 11.5 Movimentos de Partículas Carregadas em Campos Elétricos e Magnéticos
- 11.6 Movimento Vinculado de uma Partícula

Mecânica Geral II

Parte III

Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana

12 A Formulação Lagrangiana da Mecânica

12.1 A Equação de Euler-Lagrange

12.2 O princípio da ação estacionária

12.3 Princípio da mínima ação

12.4 Uma breve história do princípio de mínima ação

12.5 Exercícios Propostos

13 A Formulação Hamiltoniana da Mecânica

13.1 Simetrias e Leis de Conservação

Em geral, leis de conservação estão associadas às simetrias do sistema. De fato, se a Lagrangeana é independente de uma coordenada qualquer, podemos

deslocar o sistema na direção desta coordenada que as equações de movimento não vão se alterar. Assim, a conservação do momento linear está associada à simetria de translação; a conservação do momento angular à simetria de rotação; a conservação de ener-

gia à translação temporal.

Dizemos que uma coordenada é cíclica quando ela não aparece explicitamente na Lagrangiana. Neste caso, existe uma constante de movimento associada a ela. Esta constante é chamada de momento conjugado.

Os momentos conjugados às variáveis cíclicas são constantes de movimento.

13.1.1 Coordenadas Cíclicas

Para Lagrangeanas do tipo

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \quad (117)$$

a derivada em relação à velocidade que aparece nas equações de Euler-Lagrange tem um significado simples:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k$$

é o momento da k -ésima partícula na direção x .

É natural então definirmos o momento generalizado

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k}, \quad (118)$$

conjugado à coordenada generalizada x_k .

Suponha que a Lagrangeana de um sistema com n graus de liberdade seja tal que a coordenada x_k não apareça explicitamente em L . Nesse caso temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) \equiv \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0.$$

A variável x_k é dita cíclica e seu momento conjugado p_k é uma constante do movimento.

Exemplo 13.1. Considere uma partícula de massa m movendo-se num potencial unidimensional $V(z)$. A Lagrangiana da partícula é

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z)$$

As variáveis x e y não aparecem explicitamente na Lagrangiana (embora $\dot{x}$ e $\dot{y}$ apareçam) e, portanto, são cíclicas.

Exemplo 13.2. Seja agora a Lagrangiana de uma partícula num potencial central

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r).$$

A coordenada ϕ é uma coordenada cíclica.

Note que momento conjugado não é sempre um momento linear. Se a coordenada for um ângulo, seu momento conjugado será um momento angular.

Para a Lagrangiana do exemplo anterior,

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

é o momento linear da partícula, enquanto

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi}$$

é o momento angular. Como para esta Lagrangiana a coordenada ϕ é cíclica, p_ϕ é uma constante do movimento.

Temos, então, o seguinte resultado:

Os momentos conjugados a variáveis cíclicas são constantes do movimento.

A ausência de uma certa coordenada pode ser interpretada como uma propriedade de simetria da Lagrangiana. Assim, o sistema do primeiro exemplo é invariante por um deslocamento dos eixos coordenados no plano xy , pois, devido ao fato de as coordenadas x e y não aparecerem explicitamente na Lagrangiana significa que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Como a Lagrangiana não envolve as coordenadas x e y , nada acontece se os eixos coordenados forem transladados no plano xy .

Já o sistema do segundo exemplo é invariante por uma rotação dos eixos coordenados em torno do eixo z , uma vez que a Lagrangiana não depende de ϕ , e, portanto, permanece inalterada se os eixos coordenados são girados em torno do eixo z .

Nesses dois exemplos, a existência de uma propriedade de simetria implica na presença de uma grandeza conservada.

13.2 Teorema de Noether

O teorema de Noether pode ser enunciado assim:

Para cada simetria da Lagrangiana existe uma quantidade conservada.

Por “simetria” queremos dizer que, se as coordenadas são modificadas por pequenas quantidades, então a Lagrangiana não muda em primeira ordem nestas quantidades. As simetrias em relação a transformações infinitesimais são chamadas simetrias contínuas porque, colocando transformações arbitrariamente pequenas juntas, podemos obter todo um conjunto de transformações. Elas dependem, então, de um parâmetro que pode ser variado continuamente.

Não vamos demonstrar o teorema de Noether aqui. Vamos apenas apresentar exemplos simples de sua aplicação.

Vejam os que acontecem quando uma Lagrangiana $L(x, \dot{x}, t)$ é invariante em relação à transformação

$$x \rightarrow x + \varepsilon$$

Esta transformação, para ε pequeno, é uma translação infinitesimal ao longo do eixo x . Se a Lagrangiana não muda, devemos ter que $dL/d\varepsilon = 0$, ou seja,

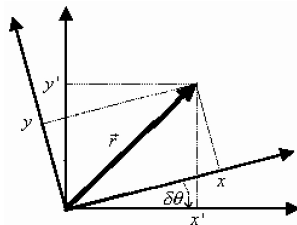
$$0 = \frac{dL}{d\varepsilon} = \frac{L(x + \varepsilon, \dot{x}, t) - L(x, \dot{x}, t)}{\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

Chegamos a um resultado já esperado: se a Lagrangiana não muda por uma translação ao longo de x , então ela não deve depender explicitamente de x , ou seja, a coordenada x é cíclica e, como visto acima, o momento linear é uma constante do movimento. Assim, a invariância da Lagrangiana do sistema por uma translação infinitesimal implica na conservação do momento linear.

Exemplo 13.3. Considere o sistema massa mola no plano x - y com Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Esta Lagrangiana é invariante (em primeira ordem em ε) sob a transformação



$$\begin{aligned} x &\rightarrow x - \varepsilon y \\ y &\rightarrow y + \varepsilon x \end{aligned}$$

Esta transformação corresponde a uma rotação infinitesimal.

De fato, sejam x' e y' as coordenadas depois da rotação infinitesimal $\delta\theta$. Então

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\delta\theta - y \sin\delta\theta \simeq x - y\varepsilon \\ y' &= y \cos\delta\theta + x \sin\delta\theta \simeq y + x\varepsilon \end{aligned}$$

onde, para $\delta\theta$ infinitesimal, $\cos\delta\theta \simeq 1$ e $\sin\delta\theta \simeq \delta\theta$ e fazemos $\varepsilon = \delta\theta$.

Agora

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dL}{d\varepsilon} = -\frac{\partial L}{\partial x}y + \frac{\partial L}{\partial y}x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{x} \\ &= -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)y - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{y} + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right)x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{x} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}x - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}y\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{y}x - m\dot{x}y) \end{aligned}$$

A invariância por uma rotação infinitesimal implica, portanto, que a quantidade entre parênteses, igual à componente z do momento angular do sistema, é uma constante do movimento.

Chegamos a uma outra conclusão importante: se a Lagrangiana do sistema for invariante por uma rotação infinitesimal, o momento angular é conservado.

Podemos também encontrar uma relação com variáveis cíclicas. Para isso, vamos fazer uma mudança para variáveis polares planas

$$\begin{aligned} x &= r \cos\phi \\ y &= r \sin\phi \end{aligned}$$

Em coordenadas polares, a Lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}kr^2$$

Esta é a Lagrangiana correspondente a uma força central e ϕ é uma coordenada cíclica. O momento conjugado conservado é

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}$$

que é o momento angular $m\dot{y}x - m\dot{x}y$ nestas coordenadas.

O teorema de Noether foi o grande feito de Emmy Noether que, em 1918, relacionou simetrias a leis de conservação. Este teorema desempenhou um importante papel no desenvolvimento da Física no século XX.



Amalie Emmy Noether foi uma matemática alemã de nascimento (nascida em Erlangen, Baviera, Alemanha, aos 23 de março de 1882 e falecida em Bryn Mawr, Pensilvânia, Estados Unidos, aos 14 de abril de 1935), conhecida pelas suas contribuições de fundamental importância aos campos da física teórica e álgebra abstrata. Considerada por David Hilbert, Albert Einstein, Hermann Weyl e outros como a mulher mais importante na história da matemática, ela revolucionou as teorias sobre anéis, corpos e álgebra. Em física, o teorema de Noether explica a conexão fundamental entre simetrias e as leis de conservação.

13.3 A Conservação da Energia

Para tratar a conservação da energia vamos considerar a Lagrangiana de um movimento unidimensional em coordenadas cartesianas, $L(x, \dot{x}, t)$. A derivada total da Lagrangiana em relação ao tempo é

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \dot{x} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

Definindo a função

$$H = \dot{x}p_x - L \quad , \quad (119)$$

onde $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ é o momento conjugado à variável x , temos

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{x}p_x - L) = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \quad (120)$$

A função H , chamada Hamiltoniano, é, portanto, uma grandeza conservada quando a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo. Quando, além disso, a energia potencial V não depende da velocidade (condição suficiente) e T é uma função homogênea de segunda ordem na velocidade, H também é a energia total do sistema.

Exemplo 13.4. Seja $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$. Neste caso,

$$\begin{aligned} H &= \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = m\dot{x}^2 - \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V \right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = E \end{aligned}$$

Assim, nas situações em que podemos associar o Hamiltoniano à energia total do sistema, chegamos à importante conclusão:

A conservação da energia está associada à invariância em relação a deslocamentos no tempo.

13.4 As Equações de Hamilton

Diferenciando a equação (119):

$$\begin{aligned} dH &= \dot{x}dp_x + p_x d\dot{x} - dL \\ &= \dot{x}dp_x + p_x d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial x} dx - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \dot{x}dp_x - \dot{p}_x dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt \end{aligned}$$

onde usamos a definição de momento conjugado de eq. (118) para cancelar o segundo com o quarto termos, a relação (120) para substituir o último termo

e a equação de Euler-Lagrange para reescrever o terceiro termo.

Conhecendo o Hamiltoniano do sistema, podemos escrever diretamente as equações do movimento sem necessidade das equações de Euler-Lagrange. Como H é uma função das variáveis x , p_x e t , temos

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial p_x} dp_x + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad .$$

Comparando os resultados anteriores, temos as Equações de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad \text{e} \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad . \quad (121)$$

Estas equações, assim como as equações de Euler-Lagrange, são completamente equivalentes às equações do movimento obtidas com a Segunda Lei de Newton, com a vantagem de serem equações diferenciais de primeira ordem.

Exemplo 13.5. O Hamiltoniano de um oscilador harmônico simples é

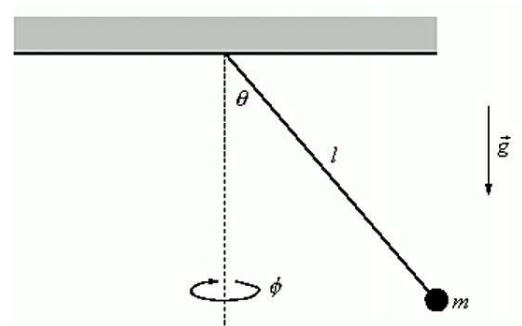
$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

e as equações de Hamilton são

$$\dot{x} = \frac{p_x}{m} \quad \text{e} \quad \dot{p}_x = -kx \quad .$$

O primeiro resultado, neste caso, equivale à definição do momento linear e o segundo é a segunda lei de Newton.

Exemplo 13.6. Usando o método Hamiltoniano, encontre as equações do movimento para o pêndulo esférico de massa m e comprimento l mostrado na figura.



A energia cinética do pêndulo é

$$T = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2$$

Definindo a referência para a energia potencial como sendo o ponto em que o pêndulo está preso no teto, temos

$$V = -mgl \cos \theta$$

Os momentos conjugados são

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad \text{e} \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} .$$

Assim, o Hamiltoniano [definido pela eq. (119)] é

$$\begin{aligned} H &= \dot{\theta} p_\theta + \dot{\phi} p_\phi - L = T + V \\ &= \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta \end{aligned}$$

As equações do movimento são

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} , \\ \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2 \theta} , \\ \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos \theta}{ml^2 \sin^3 \theta} - mgl \sin \theta , \quad \text{e} \\ \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 . \end{aligned}$$

A coordenada ϕ é cíclica e, portanto, o momento angular p_ϕ em torno do eixo de simetria, é constante.

William Rowan Hamilton (nascido em Dublin, Irlanda, em 4 de agosto de 1805 e falecido também em Dublin, aos 2 de setembro de 1865) foi um matemático, físico e astrônomo irlandês.

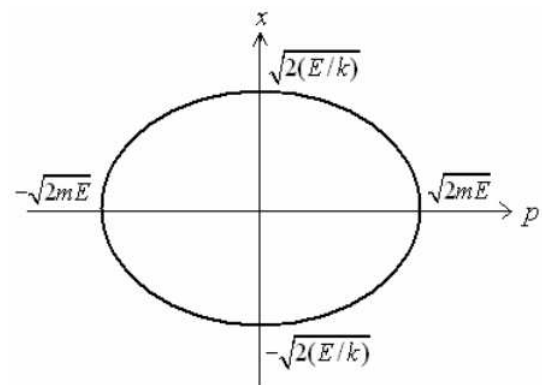


Contribuiu com trabalhos fundamentais ao desenvolvimento da óptica, dinâmica e álgebra. A sua descoberta mais importante em matemática é a dos quaterniões. Em física é muito conhecido pelo seu trabalho em mecânica analítica, que veio a ser de fundamental importância para o posterior desenvolvimento da mecânica quântica e da teoria quântica de campos. Em sua homenagem são designados os hamiltonianos, por ele introduzidos.

Hamilton foi uma criança prodígio. Diz-se que aos treze anos já falava tantas línguas quanto a sua idade. Além da maioria das línguas europeias clássicas e modernas, falava ainda persa, árabe, hindustani, sânscrito e até malaio. A sua mãe morreu quando ele tinha doze anos e o pai dois anos depois e ele foi dado para adoção. Em matemática, por volta dos dez anos lê *Os Elementos* de Euclides em latim. Passado dois anos conhece Zerah Colburn uma criança prodígio da matemática que era exibida como curiosidade em Dublin. Este encontro instiga-o a dedicar-se principalmente à matemática e abandona os estudos de línguas. Lê o *Arithmetica Universalis* de Newton, que foi a sua introdução à análise moderna. Mais tarde começa a ler os *Principia Mathematica* e aos 16 anos dominava já grande parte desta obra, além de outras obras modernas em geometria analítica e cálculo diferencial. Neste período, Hamilton se preparava para entrar no Trinity College de Dublin, onde chegaria a professor.

13.5 Espaço de Fase

Espaço de Fase é o espaço que representa o estado de um sistema descrito pelo Hamiltoniano $H(x, p)$ e é dado, num instante qualquer t , especificando-se os valores $x(t)$ e $p(t)$.



Como exemplo de uma trajetória no espaço de fase, considere o oscilador harmônico simples unidimensional, cujo Hamiltoniano é $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$. Neste caso, não precisamos resolver as equações de Hamilton para encontrar a trajetória. Basta notar que, como a energia total do oscilador é conservada, o ponto (x, p) descreve uma trajetória dada por $\frac{x^2}{2(E/k)} + \frac{p^2}{2mE} = 1$ que é a equação de uma elipse, mostrada na figura acima.

13.6 Teorema de Liouville

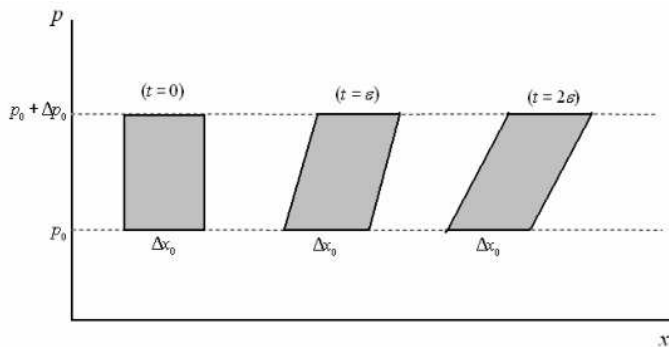
Cada conjunto de condições iniciais corresponde a uma elipse diferente e as elipses para as diversas condições iniciais são concêntricas.

Dadas as condições iniciais, a solução das equações de Hamilton é única. Assim duas trajetórias no espaço de fase de um mesmo sistema nunca podem se cruzar.

⇒ Teorema de Liouville: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H]$, onde ρ é a densidade de pontos representativos das partículas no espaço de fase, que se movem como um fluido incompressível quando o sistema evolui no tempo, isto é, mantém o volume constante e $[\rho, H]$ é o parêntesis de Poisson de ρ e H , definido por

$$[\rho, H] = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Considere um sistema formado por um grupo de partículas idênticas com diferentes posições e momentos iniciais movendo-se, por simplicidade, em uma dimensão ao longo do eixo dos x . Mais especificamente, considere que em $t = 0$ as coordenadas e os momentos de todas as partículas estão nas faixas $x_0 < x < x_0 + \Delta x_0$ e $p_0 < p < p_0 + \Delta p_0$. As partículas se movem livremente sem interagir. O volume no espaço de fase ocupado pelos pontos representativos das partículas em $t = 0$ é $V(0) = \Delta x_0 \Delta p_0$ e está representado na figura abaixo, onde também mostramos $V(t = \varepsilon)$ e $V(t = 2\varepsilon)$.



As condições iniciais das partículas estão todas dentro da área retangular. À proporção que o tempo passa, a figura se deforma, mas sua área se mantém constante. É evidente que $V(0) = V(t = \varepsilon) = V(t = 2\varepsilon)$, logo

$$\frac{dV}{dt} = 0$$

Este resultado, que mostramos para partículas livres, é verdadeiro para qualquer sistema que obedeça as equações de Hamilton (121) e é conhecido como *Teorema de Liouville*. Ele diz que os pontos representativos das partículas no espaço de fase se movem como um fluido incompressível.

Podemos escrever o teorema de Liouville em termos da densidade de pontos representativos, $\rho(x, p, t)$. Referindo-se novamente ao exemplo das partículas livres, o número de pontos dentro do volume V não muda com o tempo e como V é constante, então

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \rho}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

Deste modo, podemos expressar a condição $\frac{d\rho}{dt} = 0$ como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho, H] = 0 \quad (122)$$

onde

$$[\rho, H] = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (123)$$

é o parêntesis de Poisson de ρ e H . A equação (122), válida em geral para sistemas que obedecem às equações de Hamilton, é uma forma de apresentar o teorema de Liouville.

Joseph Liouville (Saint-Omer, Pas-de-Calais, 24 de março de 1809 — Paris, 8 de setembro de 1882) foi um matemático francês. Frequentou a École Polytechnique de Paris, entre 1825 a 1827.



Doutorou-se em matemática em 1836 pela Faculdade de Ciências de Paris. Foi assistente na École Centrale de Paris de 1831 a 1833 e professor de 1833 a 1838, ano em que foi nomeado professor da Escola Politécnica. Em 1850 foi nomeado professor no Collège de France e, em 1857, professor de mecânica clássica na Faculdade de Ciências de Paris. Em 1870 foi eleito presidente da Académie des Sciences, da qual era membro desde 1839 e vice-presidente desde 1869.

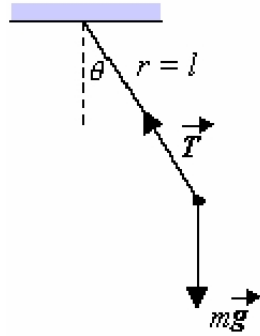
13.7 Vínculos e Forças de Vínculo

Vínculos são limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento. Os vínculos

reduzem o número de graus de liberdade independentes do sistema. No método Lagrangiano, a escolha das coordenadas é feita de modo que as condições de vínculo são automaticamente satisfeitas. Assim, para obtermos as forças de vínculo, precisamos somar à Lagrangiana um termo de deformação na energia potencial e acrescentar às equações de movimento a(s) condição(ções) de vínculo.

Aqui, por simplicidade, estaremos considerando apenas os tipos de vínculo que podem ser expressos por uma relação funcional exclusivamente entre as coordenadas usadas para descrever a configuração do sistema, podendo envolver o tempo de modo explícito. Os casos em que os vínculos são expressos por relações funcionais entre coordenadas e velocidades, embora interessantes, são muito complicados e não serão tratados aqui.

Exemplo 13.7. Usando o método Lagrangiano, encontre a força de vínculo que mantém o pêndulo simples mostrado na figura ao lado oscilando num plano.



Escolhemos, como de costume, as coordenadas polares r e θ para descrever o movimento da massa m . A corda é inextensível e, portanto, temos a restrição, ou vínculo, $r = l$, o que deixa o sistema somente com um grau de liberdade, representado por θ . A força de vínculo é a tensão T no fio. No método Lagrangiano, a condição de vínculo está automaticamente incluída na Lagrangiana e obtemos a equação do movimento sem sequer mencionar as forças. Mas suponha que precisemos conhecer a tensão T no fio para saber se ele vai ou não se romper. Claro que para um pêndulo simples achar T é um problema trivial. Basta usar a segunda lei de Newton para escrever

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{l} = ml\dot{\theta}^2 \quad ,$$

ou

$$T = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \quad .$$

Entretanto, mesmo neste caso simples, o problema não é tão trivial quanto, à primeira vista, possa parecer. O valor de T em um instante qualquer só pode se encontrado depois de resolvida a equação do movimento $\ddot{\theta} = -(g/l)\sin\theta$. Precisamos

conhecer $\theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ para calcular a tensão T no fio pela equação precedente.

Como encontrar as forças de vínculo no método Lagrangiano? Não vamos apresentar aqui o modo sistemático, mas apenas resolver alguns casos simples explorando a idéia física por trás do método geral. Fisicamente, um fio não é inextensível. Ele se deforma, mesmo que imperceptivelmente, e é a reação a essa deformação que dá origem à tensão. Podemos pensar no fio como se fosse uma mola com uma constante elástica muito grande. Assim, vamos violar a condição de vínculo e escrever para a Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr\cos\theta - V_d(r)$$

onde $V_d(r)$ é a energia potencial de deformação do fio, tal que $-T = -dV_d(r)/dr$ (onde T é o módulo da força e o sinal negativo é porque ela aponta na direção oposta a $\hat{r}$).

As equações de Euler-Lagrange nos fornecem

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + T = 0 \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\sin\theta = 0 \quad (\text{A-2})$$

Temos ainda a condição de vínculo

$$r = l \quad (\text{A-3})$$

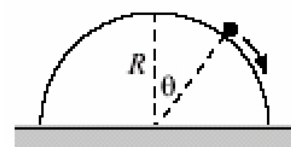
As equações (A-1), (A-2) e (A-3) constituem um sistema de três equações e três incógnitas, r , θ e T . Da equação (A-3), temos que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

Substituindo a condição (A-3) na equação (A-2), obtemos a equação do movimento do pêndulo simples, $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$.

E, na equação (A-1), encontramos a tensão no fio

$$T = ml\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \quad .$$

Exemplo 13.8. Usando o método Lagrangiano e a condição de vínculo $r = R$, determine o ângulo que a partícula de massa m , deslizando sobre um hemisfério liso, irá abandoná-lo.



Enquanto a partícula estiver sobre o hemisfério, teremos $r = R$ que é a condição de vínculo. A força de vínculo é a força normal que tem a direção de r e aponta no sentido positivo de r . A partícula deixará a superfície no momento em que a força normal for igual a zero. A Lagrangiana é

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - mgr\cos\theta - V_d(r)$$

onde tomamos a referência da energia potencial na base do hemisfério. As equações do movimento são

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta - N = 0 \quad (\text{B-1})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} - mgr\sin\theta = 0 \quad (\text{B-2})$$

onde $N = -dV_d/dr$. A essas equações juntamos a condição de vínculo

$$r = R \quad (\text{B-3})$$

Substituindo (B-3), que também nos diz que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, na (B-2), encontramos $\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta$.

Esta solução tem um sinal positivo (ao contrário da solução do problema anterior) e, portanto, não tem soluções periódicas em torno de $\theta = 0$, como era esperado já que $\theta = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. A condição de vínculo e a eq. (B-1) fornece para a normal

$$N = mg\cos\theta - mr\dot{\theta}^2$$

Agora que temos a expressão da força de vínculo, podemos dizer onde a partícula deixará o plano. Como já observamos, isto ocorre quando $N = 0$.

Chamando o ângulo onde a partícula deixará o plano de θ_c , temos

$$R\dot{\theta}_c^2 = g\cos\theta_c \quad (\text{B-4})$$

Por outro lado, a conservação da energia ($T_0 + V_0 = T + V$), onde tomamos a referência da energia potencial na base do hemisfério (mesma referência que anteriormente), nos dá

$$\frac{1}{2}m(R\dot{\theta}_c)^2 = mgR - mgR\cos\theta_c$$

ou

$$R\dot{\theta}_c^2 = 2g - 2g\cos\theta_c \quad (\text{B-5})$$

Substituindo a (B-5) na (B-4), encontramos

$$\cos\theta_c = \frac{2}{3}$$

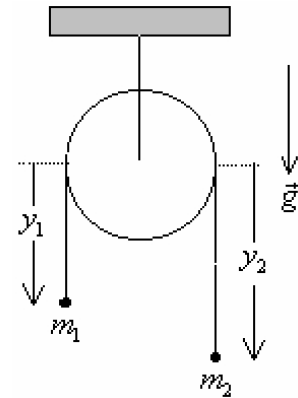
A partícula deixa a superfície em $\theta_c = 48,2^\circ$.

13.8 Exercícios Propostos

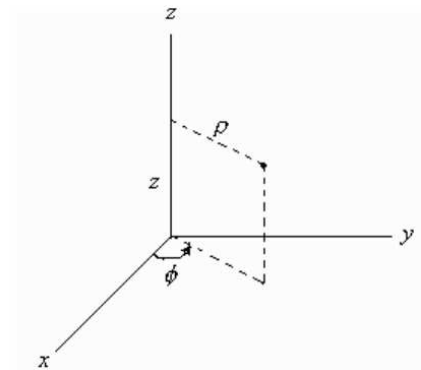
13.1. Considere o problema da máquina de Atwood mostrada na figura ao lado. Este sistema tem um vínculo, representando a condição do fio ser inextensível,

$$y_1 + y_2 - l = 0$$

onde l é uma constante. Encontre a tensão no fio¹²².



13.2. Uma partícula de massa m move-se sob a influência da gravidade ao longo de uma hélice $z = k\phi$, $\rho = \text{constante}$, onde k é uma constante e o eixo z aponta verticalmente para cima. Use, se necessário, o fato de que $x = \rho \sin\phi$, $y = \rho \cos\phi$ e $z = z$, como ilustra a figura abaixo.

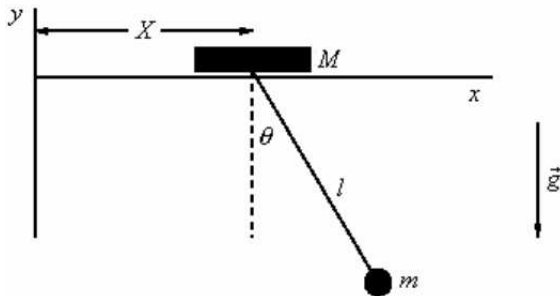


¹²²A Lagrangiana é: $L = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + m_1gy_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + m_2gy_2 - V_d(y_1 - y_2)$. Da condição de vínculo: $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$, com $T = |\partial V_d/\partial y_1| = |\partial V_d/\partial y_2|$, obtém-se que $T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$.

Assim¹²³

- escreva a Lagrangiana do sistema;
- calcule o momento conjugado p_z ;
- calcule o Hamiltoniano em termos das variáveis z e p_z ;
- derive as equações do movimento de Hamilton do sistema; e
- resolva as equações do movimento de Hamilton.

13.3. Um pêndulo plano de comprimento l e massa m está conectado a um bloco de massa M que pode se mover numa mesa horizontal sem atrito.

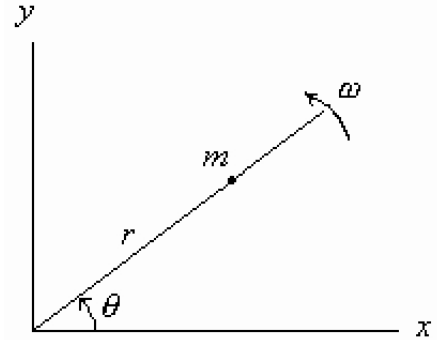


Sendo assim:

- expresse as coordenadas da massa m em termos das coordenadas X e θ ¹²⁴;
- construa a Lagrangiana desse sistema¹²⁵;

- usando as equações de Euler-Lagrange, deduza as equações do movimento para o sistema acoplado pêndulo mais bloco¹²⁶;
- encontre as quantidades conservadas¹²⁷; e
- encontre a frequência ω de pequenas oscilações do pêndulo¹²⁸.

13.4. Uma conta de massa m desliza ao longo de uma haste retilínea que gira com velocidade angular ω constante num plano horizontal.



- Escreva a Lagrangiana da partícula e descreva seu movimento¹²⁹.
- Obtenha o Hamiltoniano¹³⁰.
- Mostre que a energia total não se conserva, mas que o Hamiltoniano é uma constante do movimento¹³¹.

13.5. Uma partícula de massa m tem seu movimento descrito pela Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\omega}{2}L_z$$

$$^{123} \text{a)} L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\rho^2}{k^2} + 1\right)\dot{z}^2 - mgz; \text{ b)} } p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \left(1 + \frac{\rho^2}{k^2}\right)m\dot{z}; \text{ c)} } H = \frac{p_z^2}{2m\left(1 + \frac{\rho^2}{k^2}\right)} + mgz; \text{ d)} } \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m\left(1 + \rho^2/k^2\right)}$$

$$\text{e } \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -mg; \text{ e e) } \ddot{z} = -\frac{g}{(1 + \rho^2/k^2)} \Rightarrow z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}\frac{g}{(1 + \rho^2/k^2)}t^2.$$

$$^{124} x_m = X + l \sin \theta \text{ e } y_m = -l \cos \theta.$$

$$^{125} L = \frac{1}{2}(m + M)\dot{X}^2 + ml \cos \theta \dot{X} \dot{\theta} + \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta.$$

$$^{126} \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{1}{l} \cos \theta \ddot{X} = 0 \text{ e } \ddot{X} = \frac{ml}{m + M} (\sin \theta \dot{\theta}^2 - \cos \theta \ddot{\theta}). \text{ Eliminando } \ddot{X} \text{ nestas duas equações, temos como resultado uma única equação diferencial não linear de segunda ordem em } \theta.$$

¹²⁷ p_x é uma quantidade conservada porque X é uma coordenada cíclica; O Hamiltoniano também é uma quantidade conservada, uma vez que a Lagrangiana não depende explicitamente do tempo. Além disso, o Hamiltoniano é a energia total do sistema.

$$^{128} \omega = \sqrt{\left(\frac{m + M}{M}\right) \frac{g}{l}}. \text{ Quando } M \gg m, \text{ a frequência } \omega \text{ se reduz à frequência do pêndulo não acoplado.}$$

¹²⁹ $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2)$. A equação do movimento $\ddot{r} = \omega^2 r$ é obtida a partir da equação de Euler-Lagrange. Ela indica que a massa m tende a afastar-se do eixo de rotação em consequência da “força centrífuga”.

$$^{130} H = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

¹³¹ A energia total $E = \frac{1}{2} \frac{p_r^2}{m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$ não se conserva. É possível mostrar isso ou calculando explicitamente dE/dt , ou notando que o sistema não é isolado porque é necessário um agente externo para manter a barra girando com velocidade angular constante. O Hamiltoniano neste problema, não é igual à energia total do sistema. H é uma constante do movimento, já que não depende explicitamente do tempo ($\partial H / \partial t = 0$).

onde ω é uma frequência angular constante e L_z é a componente z do momento angular

$$L_z = m(\vec{r} \times \vec{v})_z = m(xy\dot{y} - y\dot{x})$$

a) Qual das coordenadas é cíclica e qual a grandeza associada que é conservada¹³²?

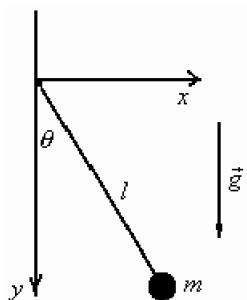
b) Encontre as equações do movimento. Escreva estas equações em termos das variáveis $(x + iy)$ e z e ache a solução¹³³.

c) A energia da partícula é conservada? Escreva a energia em termos dos momentos canônicos, p_x , p_y , p_z e mostre que a partícula tem somente energia cinética¹³⁴.

(d) Que situação física é descrita por esta Lagrangiana¹³⁵?

13.6. Um pêndulo de massa m tem seu comprimento l encurtado a uma taxa constante α , ou seja, $l(t) = l_0 - \alpha t$.

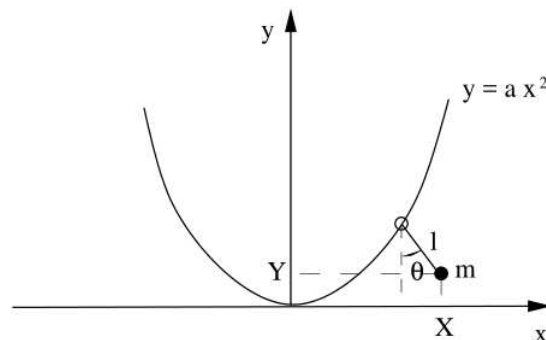
Dica: Escolhendo o sistema de eixos de coordenadas para o pêndulo, como na figura, temos



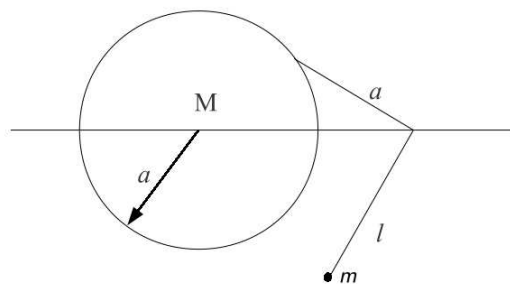
$$\begin{aligned} x &= l(t) \cos\theta \Rightarrow \dot{x} = \alpha \cos\theta - \dot{\theta} l(t) \sin\theta \\ y &= l(t) \sin\theta \Rightarrow \dot{y} = \alpha \sin\theta + \dot{\theta} l(t) \cos\theta \end{aligned}$$

- a) Escreva a Lagrangiana, o Hamiltoniano e a energia total do pêndulo¹³⁶.
- b) Mostre que nem o Hamiltoniano e nem a energia total são constantes do movimento¹³⁷.

13.7. O ponto de suspensão de um pêndulo plano simples de comprimento l e massa m é restrito a mover-se sobre a parábola $z = ax^2$ no plano vertical, como mostra a figura ao lado. Obtenha a Hamiltoniana.



13.8. O ponto de suspensão de um pêndulo plano simples de comprimento l e massa m é restrito a mover-se sobre um trilho horizontal conforme indica a figura. Esse ponto é ainda conectado por uma barra sem massa de comprimento a a um anel de raio a e massa M que pode girar livremente sobre seu centro fixado no trilho. Obtenha a Hamiltoniana.



13.9. Um cilindro uniforme de densidade ρ e raio a é montado de forma a poder rodar livremente sobre seu eixo vertical, como indica a figura ao lado. No lado externo do cilindro um trilho espiral é fixado. Por esse trilho uma bolinha de massa m desliza sem atrito sob a ação da

¹³²Vemos que z é uma coordenada cíclica cujo momento conjugado conservado é $p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$ que é a componente z do momento linear.

¹³³ $\ddot{x} = \omega\dot{y}$; $\ddot{y} = -\omega\dot{x}$; e $\ddot{z} = 0$. Definindo a variável $\eta = x + iy$, concluímos que η satisfaz a equação $\ddot{\eta} = -i\omega\dot{\eta}$, cuja solução é $\eta = A e^{-i\omega t} + B$.

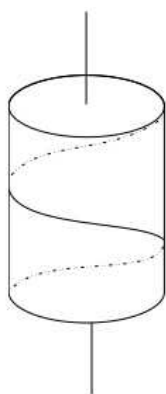
¹³⁴O Hamiltoniano consiste somente de energia cinética. Substituindo os valores dos momentos conjugados, vemos que o Hamiltoniano não depende do tempo. É conservado.

¹³⁵ L tem a forma da energia cinética de uma partícula de carga q na presença de um campo com potencial vetor $A_x = -\frac{m\omega}{2q}y$, $A_y = \frac{m\omega}{2q}x$, $A_z = 0$. Isto corresponde a um campo magnético $\vec{B} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k} = \frac{m\omega}{q}\hat{k}$, onde $\hat{k}$ é o vetor unitário na direção z .

¹³⁶ $L = \frac{1}{2}m\alpha^2 + \frac{1}{2}ml^2(t)\dot{\theta}^2 + mgl(t)\cos\theta$; $H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2(t)} - \frac{1}{2}m\alpha^2 - mgl(t)\cos\theta$ e $E = \frac{1}{2}m\alpha^2 + \frac{1}{2}ml^2(t)\dot{\theta}^2 - mgl(t)\cos\theta$.

¹³⁷O sistema não está isolado (um agente externo está encurtando o fio); logo a energia total E não é uma constante do movimento. H também não é uma quantidade conservada, porque $\frac{\partial H}{\partial t} \neq 0$.

gravidade. Encontre a Hamiltonina do sistema bolinha + cilindro e resolva as equações de movimento.



13.10. Considere o problema gravitacional de dois corpos com massas M e m . Suponha que $M \gg m$, de forma que M possa ser considerado fixo no centro de massa do sistema. Escolha um sistema de coordenadas (r, θ) com centro em M e que gira com frequência angular Ω no plano $r - \theta$ da órbita de m . Mostre que a Lagrangeana nessas coordenadas pode ser escrita como

$$L = \frac{m}{2} \left[\dot{\vec{r}} + \left(\vec{\Omega} \times \vec{r} \right) \right]^2 + \frac{GMm}{r}$$

onde $\vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$. Obtenha a Hamiltoniana.

A Formulários para as Provas da Disciplina

“Imprima as próximas páginas e traga-as para utilizar como formulário nas provas da disciplina de Mecânica Geral II (O Apêndice A.1 é o formulário da primeira prova e o Apêndice A.2 é o formulário da segunda prova). Obs.: Fica sob a responsabilidade do aluno trazer este formulário impresso para sua utilização durante a realização das provas. Nenhum outro formulário será aceito. Entretanto, a utilização do formulário é opcional, ou seja, é perfeitamente possível realizar a prova sem a utilização de um formulário (A alegação de que 'não foi possível realizar a prova devido a falta de um formulário' não será aceita, em nenhuma hipótese). O professor, ao aplicar a prova, fará a vistoria dos formulários trazidos pelos alunos e recolherá qualquer material estranho”.

A.1 Segunda Lei de Newton em Uma Dimensão (Primeira Prova)

Segunda Lei de Newton: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, onde $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ é a aceleração da partícula/corpo material na direção da aplicação da força $\vec{F}$.

Em uma dimensão: $\sum F_x = ma_x$, ou simplesmente, $\sum F = m \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, onde x é a direção unidimensional escolhida.

No caso em que $\vec{a} = 0$ ($\vec{v} = \text{constante}$) temos a lei da inércia $\sum \vec{F} = 0$ (Primeira Lei de Newton).

Completam as Leis de Newton, a Lei da Ação e Reação: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ (Terceira Lei de Newton).

A equação geral do movimento, em uma dimensão, é:

$$F(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}$$

Casos Particulares:

$$\Rightarrow \text{a)} \quad \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \text{constante} = a_c$$

que, integrada, se escreve $v = v_0 + a_c t$, e, mais uma vez integrada, com auxílio da definição $v = \frac{dx}{dt}$, se escreve $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2$.

Eliminando a variável t nas definições $v = \frac{dx}{dt}$ e $a = \frac{dv}{dt}$, temos $v dv = a dx$, que integrada resulta em $v^2 = v_0^2 + 2a_c(x - x_0)$.

O lançamento oblíquo é uma aplicação imediata para este caso. Desconsiderando a resistência do ar, na horizontal o movimento acontece com velocidade constante ($a = 0$): $v_x = v_0 \cos \theta = v_{0,x}$ e $x = x_0 + v_0 \cos \theta t$, onde θ é o ângulo de lançamento, medido a partir da horizontal. Na vertical o movimento acontece com aceleração constante ($a_c = -g = -9,81 \text{ m/s}^2 = -32,2 \text{ pés/s}^2$): $v_y = v_0 \sin \theta - gt$; $y = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} gt^2$ e $v_y^2 = (v_0 \sin \theta)^2 - 2g(y - y_0)$.

A velocidade relativa de uma partícula em relação à outra, pode ser obtida pela diferença das suas velocidades em relação à origem, ou seja

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Se a trajetória for curvilínea, é mais fácil utilizar outros sistemas de coordenadas.

a.1) Componentes Normal e Tangencial

Velocidade: $\vec{v} = v\hat{u}_t$

$$\text{Aceleração: } \vec{a} = \dot{v}\hat{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n$$

onde ρ é o raio de curvatura e os vetores unitários $\hat{u}_t$ e $\hat{u}_n$ indicam as direções tangencial (tangente à trajetória da partícula, no sentido da sua velocidade) e normal (apontando para o centro da curva – lado côncavo), respectivamente. Se a equação da trajetória $y = y(x)$ é conhecida, então

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|} \Big|_{y=x}$$

onde $y' = dy/dx$ e $y'' = d^2y/dx^2$. No caso de movimento em 3-D, uma terceira direção (binormal) deve ser especificada, tal que $\hat{u}_b = \hat{u}_t \times \hat{u}_n$.

a.2) Componentes Cilíndricos

$$\text{Posição: } \vec{r} = r\hat{u}_r$$

$$\text{Velocidade: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{z}\hat{u}_z$$

Aceleração:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{u}_\theta + \ddot{z}\hat{u}_z$$

onde $\hat{u}_r$, $\hat{u}_\theta$ e $\hat{u}_z$ são as direções radial, transversal e azimutal, respectivamente.

a.3) Componentes Esféricos

$$\text{Posição: } \vec{r} = r\hat{u}_r$$

$$\text{Velocidade: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{u}_\phi + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

Aceleração:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = & (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r \\ & + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta)\hat{u}_\theta \\ & + (r\ddot{\phi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos\theta)\hat{u}_\phi \end{aligned}$$

onde $\hat{u}_r$, $\hat{u}_\phi$ e $\hat{u}_\theta$ são as direções equivalentes a altitude, latitude e longitude do sistema geodésico, respectivamente, com a diferença de que aqui (no sistema esférico), a altitude é medida desde o centro da esfera, a latitude do polo Norte em direção ao polo Sul ($0 \leq \phi < 180^\circ$) e a longitude do plano de referência no sentido Leste ($0 \leq \theta < 360^\circ$).

Relação entre a velocidade linear e a velocidade angular: $\vec{r} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, onde os 3 vetores formam um triedro positivo.

$\Rightarrow$ b) Forças dependentes da velocidade:

A segunda Lei de Newton é $m \frac{dv}{dt} = F(v)$. Neste caso, temos que separar as variáveis para poder in-

tegrar. Assim:

$$\Delta t = \int_{t_0}^t dt' = m \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{dv'}{F(v')}$$

Exemplos de forças desta natureza são as forças de arrasto que atuam sobre um objeto que se move num meio fluido e tem a forma $F = \frac{1}{2} C_A \rho S v^\alpha$, onde S é a área da seção reta que o objeto oferece ao fluido, C_A um coeficiente adimensional de arrasto, ρ a densidade do meio fluido e α um expoente que varia entre 1 e 2. Analisamos, basicamente, dois casos: 1) quando o escoamento ocorre a baixas velocidades ($\alpha = 1$); e 2) quando ocorre a altas velocidades ($\alpha = 2$). Nestes casos (redefinindo os coeficientes):

b.1) Caso em que $F = -m\Gamma v$:

$$v(t) = v(t_0)e^{-\Gamma(t-t_0)}$$

b.2) Caso em que $F = -m\gamma v^2$:

$$v(t) = \frac{v(t_0)}{1 + \gamma v(t_0)(t - t_0)}$$

Considerando uma partícula em movimento num fluido sob a ação também de uma força constante F_0 , de forma que a força total sobre a partícula seja $F(v) = F_0 - m\Gamma v$, quando $(t - t_0) \gg 1/\Gamma$, qualquer que seja a velocidade inicial $v(t_0)$ da partícula, a velocidade da partícula tende ao valor $v_T = F_0/m\Gamma$, chamada de velocidade terminal, onde o tempo para a partícula atingir a velocidade terminal é da ordem de $1/\Gamma$.

$\Rightarrow$ **c)** Força aplicada dependente do tempo:

A segunda Lei de Newton é $\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{m}F(t)$.

Integrando com relação ao tempo:

$$m v(t) = m v(t_0) + \int_{t_0}^t F(t') dt'$$

ou, com $p = mv$, o momentum linear ou quantidade de movimento e o impulso de uma força definido como a integral da força aplicada no intervalo de tempo $t - t_0$, temos o princípio do impulso–variação do momentum linear, ou seja:

$$I = \Delta p = m v(t) - m v(t_0)$$

Exemplos de aplicação deste princípio:

c.1) Sistema com massa variável

1) Sistema que perde massa:

$$\sum F_{\text{ext}} = m \frac{dv}{dt} - (v + v_e) \frac{dm}{dt} \quad .$$

onde $(v + v_e) = d_{D/e}$ é a velocidade relativa do dispositivo que se desloca com velocidade v enquanto ejeta combustível com velocidade v_e à taxa $-dm/dt$.

2) Sistema que ganha massa:

$$\sum F_{\text{ext}} = m \frac{dv}{dt} + (v - v_i) \frac{dm}{dt} \quad .$$

onde $(v - v_i) = d_{D/i}$ é a velocidade relativa do dispositivo que se desloca com velocidade v enquanto ingere massa com velocidade v_i à taxa dm/dt .

c.2) Fluidos em Escoamento Estacionário

As reações que o dispositivo por onde o fluido escoar precisa exercer sobre o fluido são:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \frac{dm}{dt} (\vec{v}_B - \vec{v}_A) \\ \sum \vec{M}_0 &= \frac{dm}{dt} (\vec{r}_B \times \vec{v}_B - \vec{r}_A \times \vec{v}_A) \end{aligned}$$

onde A é o lado por onde o fluido entra no dispositivo e B o lado por onde ele sai. $\frac{dm}{dt} = \rho v A = \rho R$ é o fluxo de massa de um fluido de densidade ρ , que escoa com velocidade v medida numa seção reta de área A , isto é, tendo uma vazão $R = \rho A$.

c.3) Colisões

Quando nenhuma força externa atua no sistema, então o momentum linear se conserva, isto é, $\Delta \vec{p} = 0$ ou:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i(t) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i(t_0)$$

A coordenada $\vec{r}$ do centro de massa de um sistema de partículas é $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m}$, onde $m = \sum_{i=1}^n m_i$. Diferenciando esta expressão, encontramos

que $m \vec{v}_{CM} = \vec{P}_{CM}$, que nos diz que o momentum linear de um sistema de partículas é igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade de seu centro de massa. As forças internas ao sistema sempre se cancelarão mutuamente (Terceira Lei de Newton), assim se nenhuma força externa age no sistema: $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{P}_{CM} = m \vec{v}_{CM} = \text{constante}$.

Quando duas partículas interagem através de uma força central, a Segunda Lei de Newton pode ser escrita como

$$\mu \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = f(R) \frac{\vec{R}}{R} \quad ,$$

onde $\vec{R}$ é o vetor posição que liga as duas partículas e $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ é a massa reduzida do sistema.

Em problemas de colisões de partículas, o momentum linear do sistema é conservado, entretanto a energia cinética do sistema decresce por uma quantidade Q . Para uma colisão frontal entre dois corpos

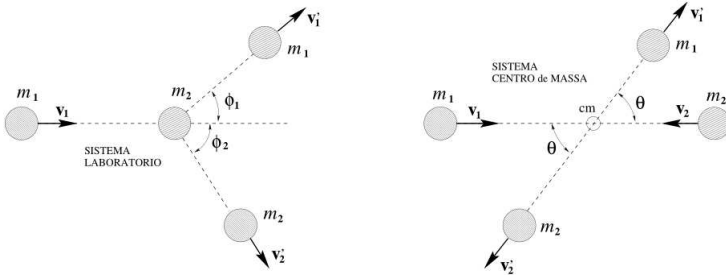
$$Q = \frac{1}{2}\mu v^2(1 - \epsilon^2) \quad ,$$

onde v é a velocidade relativa dos dois corpos antes da colisão e ϵ é o coeficiente de restituição, definido como a razão entre a velocidade de separação $V' = |\vec{v}'_2 - \vec{v}'_1|$ após a colisão e a velocidade de aproximação $V = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$ antes da colisão (ou, equivalentemente, como a razão entre os impulsos de restituição e de deformação ou compressão). Assim, após a colisão temos:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{(m_1 - \epsilon m_2) v_1 + (m_2 + \epsilon m_2) v_2}{m_1 + m_2} \\ v'_2 &= \frac{(m_1 + \epsilon m_1) v_1 + (m_2 - \epsilon m_1) v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Para colisões inelásticas $\epsilon = 0$ e para colisões perfeitamente elásticas $\epsilon = 1$.

Para colisões oblíquas (espalhamento) é mais instrutivo descrevê-las por meio das coordenadas do Laboratório e do Centro de Massa:



Assim, a velocidade do centro de massa (no sistema do laboratório) é: $\vec{V}_{cm} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$ e $\vec{v}_1 - \vec{V}_{cm} = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2}$, onde as barras são usadas para indicar que a quantidade em questão se referem ao sistema do centro de massa.

Uma equação que conecta os ângulos de espalhamento nos dois sistemas é

$$\tan \phi_1 = \frac{\sin \theta}{\gamma + \cos \theta} \quad \text{onde} \quad \gamma = \frac{v_{cm}}{\bar{v}'_1} = \frac{m_1 v_1}{\bar{v}'_1 (m_1 + m_2)}$$

No caso geral de colisões não elásticas, podemos escrever γ como

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \left[1 - \frac{Q}{T} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \right]^{-1/2}$$

onde T é a energia cinética da partícula incidente, medida no referencial do laboratório.

⇒ d) Forças dependentes da posição:

A segunda Lei de Newton é $m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$.

Definindo a Energia Cinética como $T = \frac{1}{2} m v^2$, escrevemos

$$\Delta T = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x(t_0)}^{x(t)} F(x') dx'$$

que é o princípio do trabalho–variação da energia cinética, onde $\int_{x(t_0)}^{x(t)} F(x') dx'$ é o trabalho realizado pela força $F(x)$ para levar a partícula da posição $x(t_0)$ até a posição $x(t)$.

Definindo a energia potencial $V(x)$ como o trabalho realizado pela força $F(x)$ que desloca a partícula de uma posição x até algum ponto de referência x_s , como

$$V(x) = \int_x^{x_s} F(x') dx' \quad ,$$

obtemos o *princípio da conservação da energia*, válido (em 1-D) quando a força é uma função da posição

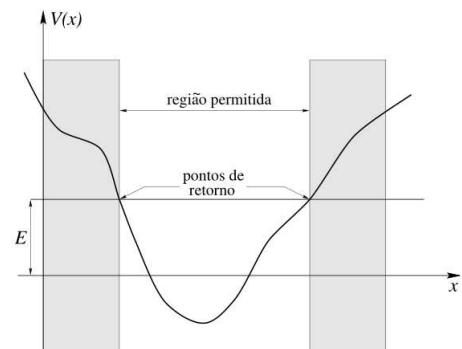
$$\frac{1}{2} m v^2 + V(x) = T + V = \text{constante} \quad .$$

Da definição de energia potencial, tomando a posição de referência x_s como sendo aquela em que $V(x_s) = 0$, podemos escrever

$$F(x) = - \frac{dV(x)}{dx} \quad .$$

Assim, o movimento da partícula é descrito por

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]} \quad .$$



Na presença de forças dissipativas, $\frac{dE}{dt} = F'v \neq 0$, isto é, com F' representando a força dissipativa, a taxa de variação de E é igual a potencia fornecida (ou dissipada) $F'v$ pela força aplicada à partícula. Se apenas forças conservativas atuam, $\frac{dE}{dt} = 0$.

⇒ e) Força Restauradora Linear

Movimento Harmônico – Lei de Hooke:

$$F = -kx ,$$

onde k é a constante elástica (ou rigidez) da mola (ou dispositivo que tem propriedades elásticas). Assim, a energia potencial elástica é, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

Um dispositivo que obedeça a Lei de Hooke, tem a seguinte equação de movimento:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 ,$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural de oscilação do sistema mecânico. Esta equação pode ser obtida também derivando em relação ao tempo a Energia Mecânica total do sistema.

A solução desta equação tem a forma:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi) ,$$

onde as constantes A (amplitude) e ϕ (fase) devem ser determinadas pelas condições iniciais do problema.

O período de oscilação ($2\pi/\omega_0$) e a frequência linear de oscilação ($1/T_0$) são:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{e} \quad \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Das considerações sobre a energia no movimento harmônico, concluímos que $A = \sqrt{2E/k}$ é a amplitude de oscilação e a velocidade máxima é $v_{\text{máx}} = \omega_0 A$.

Se o movimento harmônico é amortecido, isto é, se existe também uma força de amortecimento viscoso $-c\dot{x}$, tal que a equação de movimento do sistema seja

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 ,$$

onde, caso $c = \sqrt{4mk}$ o amortecimento é crítico, caso c seja maior que este valor o sistema é dito superamortecido e, menor, subamortecido. A solução geral da equação acima leva à:

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t} & , & \quad c > \sqrt{4mk} \\ x &= (A + Bt) e^{-\gamma t} & , & \quad c = \sqrt{4mk} \\ x &= D [e^{-\gamma t} \sin(\omega_n t + \phi)] & , & \quad c < \sqrt{4mk} \end{aligned}$$

onde A , B , D e ϕ são constantes a serem determinadas pela aplicação das condições iniciais, $\gamma = c/2m$, $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ e $\gamma_{1,2}$ são as raízes da equação de segundo grau $m\gamma^2 + c\gamma + k = 0$.

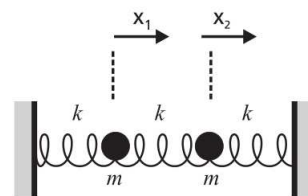
Considerações de energia no movimento harmônico amortecido nos informam que a taxa na qual a energia é dissipada na forma de calor, som, vibração, etc., pelo atrito é $dE/dt = -c\dot{x}^2$.

No caso de uma vibração forçada, isto é, quando o sistema vibratório é submetido a uma força externa oscilante, do tipo $F_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$, as soluções homogêneas acima descritas devem ser acrescidas de uma solução particular, que tem a forma $X \sin(\omega_0 t + \varphi)$, onde chamamos o ângulo de fase $\varphi = \phi - \theta$. No primeiro caso (vibração não viscosa), $X = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2}$ e $\varphi = 0$. Isto conduz ao fenômeno da ressonância (quando $\omega_0 = \omega_n$). No segundo caso (vibração viscosa, isto é, na presença de uma força ressaltiva $-c\dot{x}$, $X = F_0/\sqrt{(k - m\omega_n^2)^2 + c^2\omega_n^2}$ e $\tan \varphi = c\omega_0/(m\omega_n^2 - k)$. Neste caso o efeito da ressonância é substituído por uma forte amplificação da amplitude de oscilação quando $\omega_n \rightarrow \omega_0$ e a razão $c/(2m\omega_n) \rightarrow 0$.

Dado que a equação que rege a soma das quedas de voltagem em torno de um circuito elétrico é matematicamente equivalente a equação de movimento de um sistema mecânico oscilante, é possível fazer a analogia $x \rightarrow q$, $\dot{x} \rightarrow i$, $F(t) \rightarrow E(t)$ ou V (fem ou ddp), $m \rightarrow L$, $c \rightarrow R$ e $k \rightarrow 1/C$ e resolver um circuito LRC equivalente ao sistema mecânico.

$\Rightarrow$ f) Osciladores Acoplados

A Segunda Lei de Newton, para o caso de osciladores acoplados é, na verdade, um sistema de equações acopladas



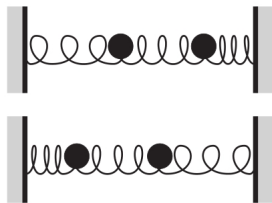
$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

que nos levam a solução (onde $\omega = \sqrt{k/m}$):

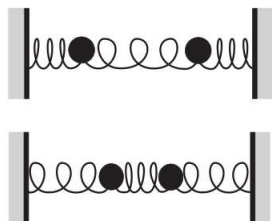
$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \\ x_2(t) &= A_1 \cos(\omega t + \phi_1) - A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

As combinações $x_1 + x_2$ e $x_1 - x_2$ são chamadas coordenadas normais do sistema. Elas oscilam com uma frequência pura, cada uma, os chamados modos normais do sistema. As soluções dependem das quatro constantes arbitrárias A_1 , A_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , devem ser determinadas pelas condições iniciais.

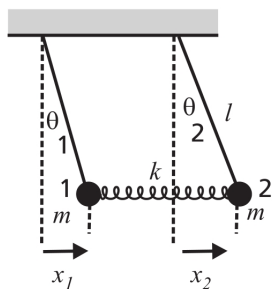
Com $A_2 = 0$ [$x_1(t_0) = x_2(t_0)$ e $\dot{x}_1(t_0) = \dot{x}_2(t_0)$], as partículas oscilam com a mesma frequência e estão sempre em fase [$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) = x_2(t)$]. Este modo normal é chamado modo simétrico.



Com $A_1 = 0$ [$x_1(t_0) = -x_2(t_0)$ e $\dot{x}_1(t_0) = -\dot{x}_2(t_0)$], as partículas oscilam com a mesma frequência e estão sempre em oposição de fase [$x_1(t) = A_2 \cos(\sqrt{3}\omega t + \phi_2) = -x_2(t)$]. Este modo normal é chamado modo anti-simétrico.



No caso de pêndulos acoplados, temos a Segunda Lei de Newton escrita como:



$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + \omega_0^2 (x_1 - x_2) &= 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 + \omega_0^2 (x_2 - x_1) &= 0\end{aligned}$$

onde $\omega = \sqrt{g/l}$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Para determinar as frequências de cada modo, basta notar que, no modo normal simétrico, a mola não sofre deformação e, portanto, os pêndulos oscilam com a frequência livre ω . No modo anti-simétrico, $x_1 = -x_2$, e, assim, ficamos com

$$\ddot{x}_1 + (\omega^2 + 2\omega_0^2) x_1 = 0$$

Logo, a frequência do modo anti-simétrico é $\omega_2 = \omega^2 + 2\omega_0^2$.

⇒ **g) Movimento sob a Ação de uma Força Central e Mecânica Espacial**

Se uma partícula está se movendo sob a influência de uma força tendo uma linha de ação que é sempre direcionada para um ponto fixo, o movimento é chamado de *movimento de força central*. Este tipo de movimento, comumente causado por

forças gravitacionais e eletrostáticas, pode ser descrito como $\vec{F} = f(R) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = f(R) \hat{r}$

No caso da interação gravitacional, o módulo da força $f(R)$ é $\frac{-GMm}{r^2}$, onde m é a massa da partícula teste e M é a massa da “partícula” fonte do campo gravitacional, G a constante da Gravitação Universal e r a distância radial que liga os centros de massa das duas partículas (de massas m e M).

Assim, em módulo,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{-GMm}{r^2} \rightarrow \ddot{r} + GM r^{-2} = 0$$

que, em uma dimensão poderia ser escrita como: $\ddot{x} + GM x^{-2} = 0$. Ou seja, uma equação diferencial de segunda ordem, homogênea e de coeficientes constantes, entretanto não linear.

Equações diferenciais não lineares são, em geral, de solução muito complexa ou mesmo impossível. Para resolver essa equação, fazemos a mudança para as coordenadas polares. Assim:

$$\begin{aligned}-\frac{GMm}{r^2} &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\end{aligned}$$

Assim transformamos uma equação diferencial não linear em um sistema de equações diferenciais acopladas, que devem ser resolvidas simultaneamente. Assim, concluímos que a velocidade areolar é $\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$ (primeira lei de Kepler), ou seja, a área que o raio vetor que o une um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. Também, que a equação da trajetória é:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{GM}{r_0 v_0^2} \right) \cos \theta + \frac{GM}{r_0^2 v_0^2}$$

onde $h = r_0 v_0$, sendo r_0 a altitude da órbita em relação ao centro do objeto que cria o campo gravitacional e v_0 a velocidade (tangencial) do objeto em órbita neste ponto. Se a excentricidade da órbita $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ for menor que 1, a trajetória de voo livre será uma elipse (segunda lei de Kepler). A terceira lei de Kepler que diz que o quadrado do período orbital é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita é obtida combinando estes resultados com a geometria da elipse: $T = \frac{\pi}{h} (r_p + r_a) \sqrt{r_p r_a}$, onde r_p é a distância do centro da fonte até o peri(élio/geu/astro) e r_a até o af(élio/geu/astro).

A.2 Formulação da Mecânica Newtoniana em Três Dimensões e Formulações Lagrangiana e Hamiltoniana (Segunda Prova)

Segunda Lei de Newton: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, onde $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ é o vetor aceleração que atua na direção da aplicação da força $\vec{F}$.

• Movimento Translacional

$$\sum \vec{F} = m(\vec{a})_G$$

onde o índice G representa o centro de gravidade do corpo rígido.

Translação Retilínea (2-D):

$$\sum F_x = m(a_G)_x, \quad \sum F_y = m(a_G)_y$$

Translação Curvilínea (2-D):

$$\sum F_n = m(a_G)_n, \quad \sum F_t = m(a_G)_t$$

• Movimento Rotacional

$$\sum \vec{M}_G = I_G \vec{\alpha}, \quad \sum \vec{M}_0 = I_0 \vec{\alpha}$$

onde escolhemos o eixo z (ou b) como sendo o eixo em torno do qual o corpo gira, assim o movimento translacional de um ponto sobre o corpo rígido acontece no plano (2-D).

Rotação em torno de um eixo fixo (sendo $v = \omega r \equiv \omega r_G$):

$$\sum F_n = m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$$

$$\sum F_t = m(a_G)_t = m\alpha r_G$$

$$\sum M_0 = I_0 \alpha$$

No caso em que $\vec{a} = 0$ ($\vec{v} = \text{constante}$) temos a lei da inércia $\sum \vec{F} = 0$ (Primeira Lei de Newton).

Completam as Leis de Newton, a Lei da Ação e Reação: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ (Terceira Lei de Newton).

A equação geral do movimento, em três dimensões, é:

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = m\ddot{\vec{r}}$$

Momentum Linear: $\vec{p} = m\vec{v}$, assim $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$$\Rightarrow m\vec{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = m\vec{v}(t_2) \quad .$$

Momentum Angular: $\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p}$, onde $\vec{r}$ é a distância da origem “0” até a partícula de momento linear (ou quantidade de movimento) $\vec{p}$.

Momento de uma Força: $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$ (ou torque), onde $\vec{r}$ é a distância da origem “0” até o ponto de aplicação da força $\vec{F}$.

$$\text{Assim } \vec{M}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \dot{\vec{L}}_0, \text{ e}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_0(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_0(t) dt = \vec{L}_0(t_2) \quad .$$

Princípio do Trabalho-Energia:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

onde $T = \frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética da partícula,

sendo $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$, e $U_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ o trabalho necessário para levá-la da posição $\vec{r}_1$ até a posição $\vec{r}_2$.

É possível separar as contribuições na realização do trabalho feitas pelas forças conservativas e pelas forças dissipativas, isto é $U_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2} = (U_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2})_{\text{forças conservativas}} + (U_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2})_{\text{forças dissipativas}}$ e, para as forças conservativas, associar uma função escalar, a qual chamamos de energia potencial $V(\vec{r})$, ou seja, $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV(\vec{r})$, já que, se a força for conservativa, $\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$, onde $\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$.

Isto nos leva ao princípio da conservação da Energia Mecânica total:

$$\Rightarrow T_1 + V(\vec{r}_1) = T_2 + V(\vec{r}_2) + (U_{\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2})_{\text{fcs dissip}} \quad .$$

que, na ausência de forças dissipativas, conduzem à:

$$T_1 + V(\vec{r}_1) = T_2 + V(\vec{r}_2) \quad .$$

Assim, precisamos saber distinguir quando uma força é conservativa ou dissipativa: Diz-se que uma força é conservativa quando o trabalho executado por ela sobre uma partícula para levá-la de uma posição $\vec{r}_1$ até uma posição $\vec{r}_2$ independe do caminho. Neste caso podemos associar uma função potencial à força e, as condições de existência de tal função potencial são:

1) Condição necessária: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$; e

2) Condição suficiente: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

Assim, se a força satisfizer as duas condições acima, ela será conservativa.

Gradiente em Coordenadas Cilíndricas:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{u}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Divergente em Coordenadas Cilíndricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotacional em Coordenadas Cilíndricas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} = & \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z} \right) \hat{u}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{u}_\phi \\ & + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} \right) \hat{k} \end{aligned}$$

Gradiente em Coordenadas Esféricas:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{u}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\mathbf{u}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\mathbf{u}}_\phi$$

Divergente em Coordenadas Esféricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial (\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}\right]$$

Rotacional em Coordenadas Esféricas:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{F}} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (F_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\mathbf{u}}_r \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{u}}_\theta \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{\mathbf{u}}_\phi\end{aligned}$$

Lei da Gravitação Universal de Newton:

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r,$$

disto resulta que a aceleração da gravidade $\vec{\mathbf{g}}$ a uma altura h da superfície terrestre é: $\vec{\mathbf{g}} = -\frac{GM}{(r_T + h)^2}\hat{\mathbf{u}}_r$, onde r_T é o raio da Terra. A energia potencial gravitacional é, portanto, $V(\vec{\mathbf{r}}) = mgr$.

Definindo $\Phi = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM = -GM d\Omega$, como o fluxo do campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ através de uma superfície gaussiana fechada, onde $\Omega = 4\pi$ é o elemento de ângulo sólido, podemos escrever

$$\Phi = \oint_A \vec{\mathbf{g}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = -GM \oint d\Omega = -4\pi GM$$

e, assim, a Lei de Gauss para o caso gravitacional

$$\oint_A \vec{\mathbf{g}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = -4\pi GM_{\text{total}},$$

ou, usando o teorema do divergente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{g}} = -4\pi G\rho,$$

onde M_{total} é a massa total inserida no interior da superfície gaussiana fechada de área A e ρ a sua densidade.

Força Restauradora Linear – Lei de Hooke:

$$\vec{\mathbf{F}} = -k(x, y, z)\vec{\mathbf{r}},$$

onde k é a constante elástica (ou rigidez) da mola (ou dispositivo que tem propriedades elásticas). Se $k(x) = k(y) = k(z)$, então o Oscilador Harmônico é isotrópico. Esta equação pode ser separada. Assim,

um dispositivo 3-dimensional que obedeça a Lei de Hooke, tem as seguintes equações de movimento:

$$\ddot{x} + \omega_x^2 x = 0, \quad \ddot{y} + \omega_y^2 y = 0, \quad \ddot{z} + \omega_z^2 z = 0,$$

onde $\omega_{(x,y,z)} = \sqrt{k(x,y,z)/m}$.

As soluções são: $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, $y = B\cos(\omega t + \beta)$ e $z = C\cos(\omega t + \gamma)$, onde as constantes A , B , C , α , β e γ devem ser determinadas a partir das condições iniciais do problema.

Se as frequências ω_x , ω_y e ω_z forem redutíveis a uma medida comum, isto é, se

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y} = \frac{\omega_z}{n_z},$$

onde n_x , n_y e n_z são inteiros, a trajetória se fechará, isto é, voltará ao ponto inicial, depois de um tempo $2\pi n_x/\omega_x = 2\pi n_y/\omega_y = 2\pi n_z/\omega_z$.

O período de oscilação de um pêndulo simples ($2\pi/\omega$), que é o inverso da sua frequência de oscilação ($1/T$), é (solução exata):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \dots\right),$$

onde l é o comprimento do fio e θ_0 a amplitude inicial de oscilação do pêndulo.

Para um sistema de muitas partículas, as coordenadas do Centro de Massa, são:

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{m}.$$

Disto, resulta, que o momentum linear do sistema de partículas é:

$$\vec{\mathbf{P}} = m\vec{\mathbf{V}}_{\text{CM}},$$

e, consequentemente,

$$\sum_{i=1}^n F_i = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}},$$

onde F_i é a resultante das forças externas que atuam sobre a i -ésima partícula do sistema de partículas (já que as forças internas cancelam-se aos pares – Terceira Lei de Newton).

Se as forças externas forem o peso das próprias partículas que compõe o sistema, então: $\vec{\mathbf{a}}_{\text{CM}} = \vec{\mathbf{g}}$.

Assim como o momento linear, o momento angular total de um sistema de partículas e o torque (ou momento das forças) total são a soma das contribuições individuais sobre cada uma das partículas. Desta forma, as expressões e leis de conservação destas grandezas são as mesmas que as já listadas acima para o caso de uma única partícula em movimento tridimensional.

Entretanto, uma expressão mais conveniente para a energia cinética de um sistema de partículas é:

$$T = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i\bar{v}_i^2 \quad ,$$

onde $\bar{v}_i$ é o módulo da velocidade da i -ésima partícula em relação ao centro de massa do sistema de partículas.

Sempre que dois corpos colidem, há conservação da quantidade de movimento (ou momentum linear), já que as forças que agem durante a colisão são forças internas, e dissipação de uma parcela da energia cinética $T = p^2/2m$ durante a colisão. Assim:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad \text{e}$$

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}'_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}'_2^2}{2m_2} + Q \quad ,$$

onde o índice “linha” refere-se ao valor da grandeza após a colisão e Q é a quantidade de energia dissipada durante a colisão. Se $Q = 0$, a colisão é dita perfeitamente elástica.

Pode-se introduzir um parâmetro ϵ , chamado de coeficiente de restituição, pela razão entre as velocidades relativas de afastamento (após a colisão) e as velocidades relativas de aproximação (antes da colisão). Assim:

$$\epsilon = \frac{|v'_2 - v'_1|}{|v_2 - v_1|} \quad .$$

Para uma colisão perfeitamente elástica, $\epsilon = 1$ e $v'_1 = v_2$ e $v'_2 = v_1$. Para uma colisão perfeitamente inelástica, $\epsilon = 0$ e $v'_1 = v'_2$.

O coeficiente de restituição ϵ pode também ser definido pela razão entre o impulso de restituição e o impulso de compressão.

Para um corpo rígido extenso, podemos substituir as somatórias por integrais e utilizar o mesmo formalismo desenvolvido acima para um sistema de muitas partículas. Assim, para o i -ésimo elemento de massa que gira junto com o corpo rígido com velocidade angular $\vec{\omega}$, podemos associar uma velocidade linear $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Assim, a energia cinética do corpo rígido será

$$T = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad ,$$

onde I é o momento de inércia do corpo rígido, definido por:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV \quad .$$

onde $dm = \rho dV$. Para corpos compostos, o momento de inércia pode ser determinado pela soma algébrica dos momentos de inércia de todas as formas que compõem o corpo composto.

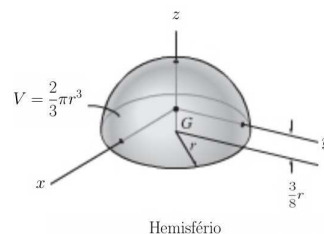
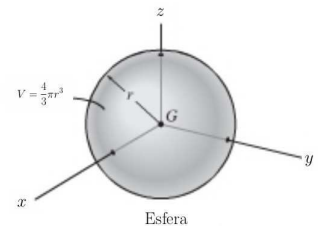
$$\text{Raio de Giração: } k = \sqrt{I/m}$$

$$\text{Teorema dos eixos paralelos: } I = I_G + md^2$$

$$\text{Teorema dos eixos perpendiculares: } I_z = I_x + I_y$$

Momento de Inércia de massa de sólidos homogêneos:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mr^2$$

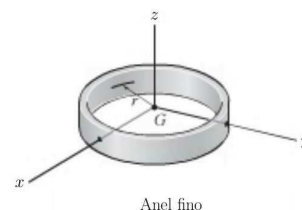
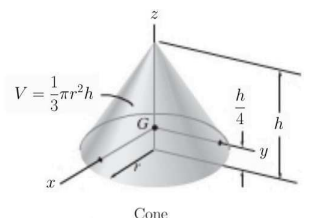


$$I_x = I_y = 0,259mr^2$$

$$I_z = \frac{2}{5}mr^2$$

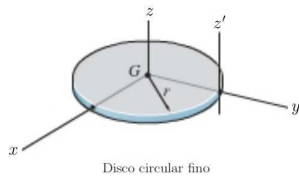
$$I_x = I_y = \frac{3}{80}m(4r^2 + h^2)$$

$$I_z = \frac{3}{10}mr^2$$



$$I_x = I_y = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I_z = mr^2$$



$$I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$$

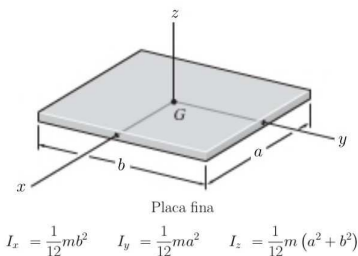
$$I_z = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I'_z = \frac{3}{2}mr^2$$

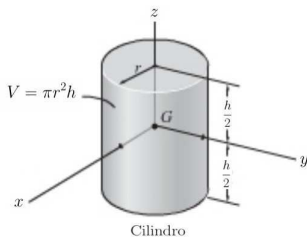
$$I_x = \frac{1}{12}mb^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}ma^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$



$$I_x = \frac{1}{12}mb^2 \quad I_y = \frac{1}{12}ma^2 \quad I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$



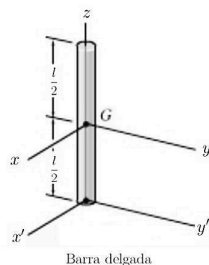
$$I_x = I_y = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2)$$

$$I_z = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I_x = I_y = \frac{1}{12}ml^2$$

$$I'_x = I'_y = \frac{1}{3}ml^2$$

$$I_z = 0$$



⇒ Momento angular de um corpo rígido: $L = I\omega$.

⇒ Torque total de todas as forças externas relativo ao eixo de rotação de um corpo rígido: $N = I\dot{\omega} = I\alpha$.

⇒ A relação $\vec{N} = d\vec{L}/dt$ é também válida para um corpo rígido, quer calculada em relação ao seu centro de massa, quer em relação o outro ponto qualquer.

Formulação Lagrangiana

⇒ Lagrangiana: $L = T - V$.

Em uma dimensão: $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$.

Em três dimensões:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z)$$

⇒ Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{dq} \right) = \frac{dL}{dq} ,$$

onde $q = x, y$ ou z .

⇒ Ação:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt$$

Princípio da Ação Estacionária (ou Princípio de Hamilton ou Princípio da Mínima Ação): Se $\frac{\delta S}{\delta t} = 0$ para um caminho $x(t)$, esta solução satisfará as equações de Euler-Lagrange.

Formulação Hamiltoniana

⇒ Coordenadas Cíclicas: Dizemos que uma coordenada é cíclica quando ela não aparece explicitamente na Lagrangiana. Neste caso, existe uma constante de movimento associada a ela. Esta constante é chamada de momento conjugado. ⇒ Os momentos conjugados à variáveis cíclicas são constantes de movimento.

⇒ Teorema de Noether: *Para cada simetria da Lagrangiana existe uma quantidade conservada.*

⇒ Hamiltoniana:

$$H = \dot{x}p_x - L ,$$

onde $p_x = \frac{dL}{dx}$ é o momento conjugado à variável x e, em muitos casos, pode ser obtido como

$$H = T + V .$$

⇒ Equações de Hamilton:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} , \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} .$$

⇒ Espaço de Fase: É o espaço que representa o estado de um sistema descrito pelo Hamiltoniano $H(x, p)$ e é dado, num instante qualquer t , especificando-se os valores $x(t)$ e $p(t)$.

⇒ Teorema de Liouville: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -[\rho, H]$, onde ρ é a densidade de pontos representativos das partículas no espaço de fase, que se movem como um fluido incompressível quando o sistema evolui no tempo, isto é, mantém o volume constante e $[\rho, H]$ é o parêntesis de Poisson de ρ e H , definido por

$$[\rho, H] = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial x} .$$

⇒ Vínculos e Forças de Vínculo: Vínculos são limitações às possíveis posições e velocidades das partículas de um sistema mecânico, restringindo *a priori* o seu movimento. Os vínculos reduzem o número de graus de liberdade independentes do sistema. No método Lagrangiano, a escolha das coordenadas é feita de modo que as condições de vínculo são automaticamente satisfeitas. Assim, para obtermos as forças de vínculo, precisamos somar à Lagrangiana um termo de deformação na energia potencial e acrescentar às equações de movimento a(s) condição(ões) de vínculo.

Referências

- [1] HIBBELER, R. C. **Dinâmica**: mecânica para engenharia. 12^a ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.
- [2] BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros**, vol 2, 5^a ed., São Paulo, SP: Makron, 2006.
- [3] NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**, vol 1, 4^a ed., São Paulo, E. Blücher, 2002.
- [4] Apostila de "Mecânica Fundamental", desenvolvida pelo Departamento de Física do Instituto de Ciências Exatas da UFMG.
- [5] Apostila intitulada "Introdução a Mecânica Analítica" (notas de aula do Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins da disciplina "PME 2200 - Mecânica Geral B", do Departamento de Engenharia Mecânica da Escola Politécnica da USP).
- [6] Material didático EaD desenvolvido pelo conteudista Joaquim Lopes Neto (Fundação CECIERJ, Consórcio CEDERJ).
- [7] Apostila "Tópicos de Mecânica Clássica", do Prof. Marcus A. M. Aguiar, preparada a partir de notas de aula da disciplina Mecânica Avançada, da curso de pós-graduação do Instituto de Física da Unicamp.
- [8] WATARI, K. **Mecânica Clássica**, vol. 1, 2^a ed. e vol. 2, 1^a ed., São Paulo, Livraria da Física, 2004.
- [9] LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**, 2^a ed., São Paulo, Livraria da Física, 2007.



Se você acredita que possui dificuldades em alguns dos conceitos de **Física II**, assista as vídeo-aulas do Prof. Peter Schulz, do Instituto de Física "Gleb Wataghin", da Universidade Estadual de Campinas que disponibilizou no YouTube todas as 25 aulas de cerca de 35 a 40 minutos de duração cada uma, do Curso de **Física II**, da Unicamp. As vídeo-aulas 17 à 25 estão relacionadas ao tema abordado aqui. Acesse o link no QR-Code¹³⁹:



Se você deseja continuar se aprofundando no tema, faça o download da Apostila "Tópicos de Mecânica Clássica", do Prof. Marcus A. M. Aguiar, que foi preparada a partir de notas de aula da disciplina Mecânica Avançada, da curso de pós-graduação do Instituto de Física da Unicamp. Acesse o link no QR-Code¹⁴⁰:



Se você acredita que possui dificuldades em alguns dos conceitos de **Física I**, assista as vídeo-aulas do Prof. Luiz Marco Brescansin, do Instituto de Física "Gleb Wataghin", da Universidade Estadual de Campinas que disponibilizou no YouTube todas as 26 aulas de cerca de 50 minutos de duração cada uma, do Curso de **Física I**, da Unicamp. Acesse o link no QR-Code¹³⁸:

¹³⁸<https://www.youtube.com/watch?v=bJuoKyIG13A&list=PL7581C21F8ADD6C8E>.

¹³⁹<https://www.youtube.com/watch?v=p3QjNd2eA14&list=PL516F59E9AE8F5BF7>.

¹⁴⁰<http://sites.ifi.unicamp.br/aguiar/files/2014/10/top-mec-clas.pdf>.