

TD

Trigonométrie

EXERCICE 1 ☐☐☐

Calculer $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$ pour $x \in \left\{ -\frac{15\pi}{6}, \frac{37\pi}{3}, \frac{13\pi}{2} \right\}$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ☒☐☐

Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer les valeurs suivantes en fonctions de $\cos x$ et $\sin x$.

- | | |
|---|--|
| ① $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ | ③ $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| ② $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ | ④ $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ |

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ☒☐☐

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- ① Exprimer $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
- ② Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ☒☐☐

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- | | |
|---|--|
| ① $\cos x = -\frac{1}{2}$, | ⑤ $\cos x = \cos 2x$, |
| ② $\tan 3x = -1$, | ⑥ $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, |
| ③ $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, | ⑦ $\cos\left(\frac{2x}{3}\right) \times \cos(x) = 0$, |
| ④ $\tan x = \frac{1}{\tan x}$, | ⑧ $\sin(2x) = -\cos(x)$. |

► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ☒☐☐

Factoriser les expressions P suivantes, et résoudre l'équation $P = 0$.

- | | |
|-----------------------------|--|
| ① $P_1 = \sin t + \sin(2t)$ | ③ $P_3 = \sin t + \frac{\sin(2t)}{2}$ |
| ② $P_2 = \sin t + \cos(2t)$ | ④ $P_4 = \sin t - \frac{\sin(2t)}{2} \cos t$ |

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ☒☒☐

Calculer les intégrales suivantes :

- ① $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du$
- ② $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \sin(2x) dx$
- ③ $\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx$, où n et p sont des entiers naturels.
On fera attention au cas particulier $n = p$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ☒☐☐

- ① Résoudre l'équation d'inconnue réelle x , $\cos(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.
- ② De même avec $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2x)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ☒☒☐

À quelle condition sur le réel x est-ce que $\tan(3x) - 3\tan(x)$ est défini?
Résoudre alors $\tan(3x) = 3\tan(x)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ☒☒☐

- ① Résoudre l'inégalité $\sin(x)(2\cos(x) - 1) \geq 0$. On peut commencer par un tableau de signes sur $[0, 2\pi[$.

② En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inégalité $\sin(x) \geq \sin(2x)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Simplifier, pour $b, t \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$,

$$x(t) = a \cos t - a \sin^2(t) \cos(t) - \frac{b^2}{a} \cos^3(t).$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □

Résoudre les inéquations ou équations suivantes, puis donner toutes les solutions dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

① $\sin x > \sin(2x)$.

③ $1 + 2 \cos \theta \leq 0$.

② $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \leq \cos(2x)$.

④ $\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \leq \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □ CCP MP

Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ (A) ■

Résoudre l'équation suivante. On donnera toutes les solutions S , puis on les tracera sur le cercle trigonométrique, et on donnera les solutions S_0 qui sont dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ rangées dans l'ordre croissant et dessinées sur le cercle trigonométrique.

$$\sin x + \sin(3x) + \sin(5x) = \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) \quad (\text{E})$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ □ □

Soit $x \in [-\pi, 0]$ tel que $\tan x = 1 - \sqrt{2}$. Calculer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan 2x$. En déduire la valeur exacte de x .

► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ ■

Pour quelles valeurs de $x \in [0, 2\pi]$ a-t-on l'égalité suivante ?

$$2 \sin x = -\sqrt{1 + \sin 2x} + \sqrt{1 - \sin 2x}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ (A) ■

Résoudre l'équation d'inconnue x réelle :

$$(\sqrt{3} + 1) \cos(x) + (\sqrt{3} - 1) \sin x + \sqrt{3} - 1 = 0 \quad (\text{E})$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ ■ Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Cet exercice présente deux méthodes de calcul de la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Les deux questions sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Pour tout l'exercice, on pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

PREMIÈRE MÉTHODE

- ① Exprimer, pour un réel x quelconque, $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- ② En déduire que α est solution de l'équation $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.
- ③ En trouvant deux racines évidentes à cette équation (l'un des deux n'est pas un nombre entier), factorisez-là.
- ④ Déterminer la valeur exacte de α .

DEUXIÈME MÉTHODE

- ① Démontrer la formule $\cos(x) + \cos(3x) = \frac{\sin(4x)}{2 \sin(x)}$ (quand cela a un sens).
- ② En déduire la valeur de $\alpha + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.
- ③ Calculer $\alpha \times \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ (on doit obtenir une valeur rationnelle simple).
- ④ En déduire une équation du second degré vérifiée par α , et sa valeur exacte (on rappelle que deux nombres dont la somme vaut S et le produit P sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$).

► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■■■ Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$

Pour tous réels a et h , et pour tout entier n , on pose

$$C_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kh) \quad \text{et} \quad S_n(a, h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kh).$$

On note par ailleurs pour la suite de l'exercice $\theta = \frac{\pi}{17}$.

① Calculer ces deux sommes dans le cas où $\sin \frac{h}{2} = 0$.

② Dans le cas contraire, prouver que

$$C_n(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos \left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}} \quad \text{et} \quad S_n(a, h) = \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin \left(a + (n-1)\frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}}$$

(le plus rapide est de passer par les nombres complexes, mais on peut aussi s'en sortir par récurrence).

③ On pose $x_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$ et $x_2 = \cos \theta + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)$. Montrer que $x_1 > 0$.

④ Calculer la somme $x_1 + x_2$ (assez facile).

⑤ Calculer le produit $x_1 x_2$ (beaucoup plus pénible, n'hésitez pas à faire des calculs violents).

⑥ En déduire les valeurs exactes de x_1 et de x_2 .

⑦ On pose maintenant $y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$; $y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$; $y_3 = \cos \theta + \cos(13\theta)$ et $y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$. Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.

⑧ En déduire les valeurs exactes de y_1, y_2, y_3 et y_4 .

⑨ Calculer le produit $\cos \theta \cos(13\theta)$ et en déduire une méthode pour obtenir une valeur exacte de $\cos \theta$ (pour les plus masochistes courageux, finir les calculs et donner cette valeur).

► Indication

► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Reprenez les exemples similaires du cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Utiliser le cercle trigonométrique ou les résultats du cours

$$\begin{aligned}\cos a = \cos b &\iff (a \equiv b[2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv -b[2\pi]) \\ \sin a = \sin b &\iff (a \equiv b[2\pi] \quad \text{ou} \quad a \equiv \pi - b[2\pi])\end{aligned}$$

et si $a \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $b \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, alors

$$\tan a = \tan b \iff a \equiv b[\pi].$$

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Linéarisez !

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Dans la deuxième, on pourra par exemple transformer le sinus en cosinus.

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

C'est un calcul... Au boulot !

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

Un produit est positif, si et seulement si, les deux facteurs sont positifs ou négatifs. Puis résoudre les deux inéquations séparément dans chaque cas.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12 **CCP MP**

Linéarisez !

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13 _____

Regroupez les termes 2 par 2. Il y a une manière plus maline de le faire.

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 _____

On a pas peur, et on fait ce qui est demandé en utilisant des équations connues.

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 15 _____

On peut obtenir une nouvelle équation en multipliant par le conjugué. Ensuite, il suffit de résoudre le système formé par ces deux équations.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 16 _____

Essayons de faire apparaître des formules d'additions bien senties.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 17 **Calcul de** $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ _____

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 18 **Même chose avec** $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$ _____

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1

$$x = -\frac{15\pi}{6} \Rightarrow \sin(x) = -1, \quad \cos(x) = 0, \quad \tan(x) \text{ indéfini},$$

$$x = \frac{37\pi}{3} \Rightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos(x) = \frac{1}{2}, \quad \tan(x) = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{13\pi}{2} \Rightarrow \sin(x) = 1, \quad \cos(x) = 0, \quad \tan(x) \text{ indéfini}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

$$\textcircled{1} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

$$\textcircled{2} \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + 1}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}.$$

$$\begin{aligned} & \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right) + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad = \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos x$$

$$= \frac{1}{2}((1 - \sqrt{2}) \sin x + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cos x).$$

$$\textcircled{4} \quad \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan x + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan x \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\tan x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan x}$$

$$= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\cos x - \sqrt{3} \sin x}$$

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Fait en cours.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

$$\textcircled{1} \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{2} \quad x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{3} \quad x = \frac{\pi}{12} - 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5\pi}{12} - 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{4} \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{5} \quad x = \frac{2k\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{6} \quad x = 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{7} \quad \cos\left(\frac{2x}{3}\right) = 0 \text{ ou } \cos x = 0 \iff x = \frac{3\pi}{4} + \frac{3k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{8} \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

$$\textcircled{1} \quad P_1 = \sin t + \sin(2t) = \sin t + 2 \sin t \cos t = \boxed{\sin t(1 + 2 \cos t)}.$$

$$P_1 = 0 \iff \begin{cases} \sin t = 0 & \iff t = k\pi, \\ 1 + 2 \cos t = 0 & \iff \cos t = -\frac{1}{2} \iff t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi. \end{cases}$$

$$\text{Donc l'ensemble des solutions est } \boxed{\pi\mathbb{Z} \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)}.$$

$$\textcircled{2} \quad P_2 = \sin t + (1 - 2 \sin^2 t) = -2 \sin^2 t + \sin t + 1 = \boxed{(1 - \sin t)(2 \sin t + 1)}.$$

$$P_2 = 0 \iff \begin{cases} \sin t = 1 & \iff t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin t = -\frac{1}{2} & \iff t = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } t = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\text{Donc l'ensemble des solutions est } \boxed{\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)}.$$

$$\textcircled{3} \quad P_3 = \sin t + \frac{\sin(2t)}{2} = \sin t + \sin t \cos t = \boxed{\sin t(1 + \cos t)}.$$

$$P_3 = 0 \iff \begin{cases} \sin t = 0 & \iff t = k\pi \\ 1 + \cos t = 0 & \iff \cos t = -1 \iff t = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\pi\mathbb{Z} \cup (\pi + 2\pi\mathbb{Z})}$.

$$\textcircled{4} \quad P_4 = \sin t - \frac{\sin(2t)}{2} \cos t = \sin t - \sin t \cos^2 t = \sin t(1 - \cos^2 t) = \sin t \cdot \sin^2 t = \boxed{\sin^3 t}.$$

$$P_4 = 0 \iff \sin t = 0 \iff t = k\pi.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\pi\mathbb{Z}}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

Correction de l'EXERCICE 6

$$\textcircled{1} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u) du = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin(2x) dx &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \cos 3x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{12} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((n-p)x) - \cos((n+p)x)) dx.$$

Si $n \neq p$, alors $n \pm p \neq 0$ et $\sin(k \cdot 2\pi) = 0$ pour tout entier k , donc

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = 0 \quad (n \neq p)$$

Si $n = p \geq 1$ alors

$$\sin^2(nx) = \frac{1 - \cos(2nx)}{2} \implies \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 dx = \pi$$

Si $n = p = 0$ l'intégrande est 0 et l'intégrale vaut 0.

Conclusion :

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = p \geq 1 \\ 0 & \text{si } n \neq p \text{ ou } n = p = 0. \end{cases}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

Correction de l'EXERCICE 7

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

Correction de l'EXERCICE 8

$$\tan(3x) - \tan(x) \text{ existe} \iff \nexists k \in \mathbb{Z}, 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\iff \nexists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\iff x \in \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \right) =: D$$

Pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} \tan(3x) &= 3 \tan(x) \iff \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} = \frac{3 \sin(x)}{\cos(x)} \\ &\iff \sin(3x) \cos(x) = 3 \sin(x) \cos(3x) \\ &\iff (\sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x)) \cos(x) \\ &\quad = 3 \sin(x) (\cos(2x) \cos(x) - \sin(2x) \sin(x)) \\ &\iff 8 \sin^3(x) \cos(x) = 0 \\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = 0 \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\frac{\pi}{2} \\ &\iff \exists m \in \mathbb{Z}, x = m\pi \end{aligned}$$

la dernière équivalence étant justifiée par le fait que les $\frac{\pi}{2} + k\pi$ sont exclus de D . Ainsi l'ensemble des solutions est $\boxed{\pi\mathbb{Z}}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

- ① Pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $2 \cos(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\sin(x)$		+	0	-	
$2 \cos(x) - 1$	+	0	-	0	+
$\sin(x)(2 \cos(x) - 1)$	+	0	-	0	-

Donc l'ensemble des solutions est

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right]$$

- ② Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) \geq \sin(2x) \Leftrightarrow \sin(x) \geq 2 \sin(x) \cos(x) \Leftrightarrow \sin(x)(2 \cos(x) - 1) \leq 0$$

L'ensemble des solutions est donc au vu du tableau ci-dessus

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right] \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{3} + 2k\pi, (2k+1)\pi \right]$$

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

$$\begin{aligned} \text{On a } x(t) &= a \cos t - a \sin^2(t) \cos(t) - \frac{b^2}{a} \cos^3(t) \\ &= \cos t \left(a - a \sin^2(t) - \frac{b^2}{a} \cos^2(t) \right) \\ &= \cos t \left(a - a + a \cos^2(t) - \frac{b^2}{a} \cos^2(t) \right) \\ &= \left(a - \frac{b^2}{a} \right) \cos^3(t). \end{aligned}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

- ① L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$\sin x > \sin(2x) \Leftrightarrow \sin \theta > 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2 \cos \theta) \sin \theta > 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2 \cos \theta > 0 \quad \text{et} \quad \sin \theta > 0) \quad \text{ou} \quad (1 - 2 \cos \theta < 0 \quad \text{et} \quad \sin \theta < 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \theta < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta > 0 \right) \quad \text{ou} \quad \left(\cos \theta > \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta < 0 \right)$$

En visualisant ces conditions sur le cercle trigonométrique, on trouve l'ensemble solution de l'inéquation (I) vaut $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ avec

$$\mathcal{S}_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \right[\quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi \right[.$$

- ② IL y a plusieurs manières de faire. On peut résoudre directement l'équation, et on obtient grâce au cercle l'ensemble des solutions

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{18} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi \right] \cup \left[\frac{11\pi}{18} + 2k\pi, \frac{23\pi}{18} + 2k\pi \right].$$

- ③ Même méthode. L'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right]$.

- ④ Même méthode. L'ensemble des solutions est $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right]$.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12 CCP MP

Utilisons les formules de linéarisation.

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \end{aligned}$$

Une primitive est donc

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 4x}{4} + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C,$$

où C est une constante. Vérification rapide en dérivant donne bien $\cos^4 x$.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)
Correction de l'EXERCICE 13
[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)
Correction de l'EXERCICE 14
[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)
Correction de l'EXERCICE 15

Remarquons d'abord que lorsque $2 \sin x = 0$ on a aussi $\sin(2x) = 0$ et alors l'égalité est satisfaite.

Supposons donc $\sin x \neq 0$. L'équation est alors équivalent à

$$2 \sin x = \frac{(1 - \sin 2x) - (1 + \sin 2x)}{\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}}$$

puis à

$$1 = \frac{-2 \cos x}{\sqrt{1 - \sin 2x} + \sqrt{1 + \sin 2x}}.$$

d'où les équations
$$\begin{cases} \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} = -2 \cos x \\ \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x} = 2 \sin x \end{cases}$$

système équivalent par somme à
$$\begin{cases} \sqrt{1 - \sin 2x} = \sin x - \cos x \\ \sqrt{1 + \sin 2x} = -\sin x - \cos x \end{cases}$$

Or l'équation $\sqrt{A} = B$ est équivalente à
$$\begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

En fait, les deux équations $A = B^2$ sont satisfaites pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le système est alors équivalent à

$$\begin{cases} \sin x - \cos x \geq 0 \\ -\sin x - \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Les résolutions de ces équations donnent l'ensemble des solutions

$$\{0, 2\pi\} \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right].$$

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)
Correction de l'EXERCICE 16
[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)
Correction de l'EXERCICE 17 Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$
[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)
Correction de l'EXERCICE 18 Même chose avec $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$
[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)