

TD

Rédaction / raisonnements

EXERCICE 1 ■ □ □

Trouver des propositions P et Q telles que

- ① $P \implies Q$ est vrai et $Q \implies P$ est vrai.
- ② $P \implies Q$ est faux et $Q \implies P$ est vrai.
- ③ $P \implies Q$ est faux et $Q \implies P$ est faux.

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Soit A, B et C trois propositions.

Démontrer que les propositions $A \wedge (B \vee C)$ et $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ sont équivalentes.

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Décrire les parties de $\mathbb{R}$ dans lesquelles évoluent x pour que les assertions suivantes soient vraies :

- ① $(x > 0 \text{ et } x < 1) \text{ ou } x = 0$.
- ② $x > 3 \text{ et } x < 5 \text{ et } x \neq 4$.
- ③ $(x \leq 0 \text{ et } x > 1) \text{ ou } x = 4$.
- ④ $x \geq 0 \implies x \geq 2$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ □ □

Donner une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- ① Il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < M$.
- ② Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| < M$.

quelle est la différence entre les deux assertions.

► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ □ □

Nier les énoncés suivants.

- ① $\forall x \in A, \exists y \in B, (x \in C \text{ et } (x, y) \in D) \text{ ou } x \notin C$.
- ② $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, ((x, y) \in A \implies x \in B)$.
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in A) \implies x \in B$.

Expliquer la différence entre les deux dernières phrases.

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

- ① $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
- ② $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$.
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.
- ④ $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ □ □

Pour chaque couple de propositions, expliciter en français la différence entre les deux.

- ① Dans cette question, on précisera quel énoncé est vrai et lequel est faux.
 - 1.a $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$.
 - 1.b $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq N$.
- ② Dans cette question, on dira quelles sont les f qui vérifient le premier énoncé, et quelles sont celles qui vérifient le second. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
 - 2.a $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
 - 2.b $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Exprimer avec des quantificateurs les propositions suivantes :

- ① $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. ④ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule.
 ② $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive.
 ③ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. ⑤ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle.

► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■ ■ □

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- ① la fonction f s'annule. ⑤ la fonction f présente un minimum.
 ② la fonction f est la fonction nulle.
 ③ f n'est pas une fonction constante. ⑥ f prend des valeurs arbitrairement grandes.
 ④ f ne prend jamais deux fois la même valeur. ⑦ f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

► Indication ► Correction

EXERCICE 10 ■ ■ □

Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie.

$$\forall y \in [0, 1], x \geq y \implies x \geq 2y.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 11 ■ ■ □

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$

► Indication ► Correction

EXERCICE 12 ■ ■ □

Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + 1$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 13 ■ ■ □

On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1, a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{n+1}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 14 ■ ■ □ **Analyse-Synthèse et récurrence**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Montrer qu'il existe un unique couple (a, b) de réels tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (an + b)2^n$.

► Indication ► Correction

EXERCICE 15 ■ ■ □

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}.$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 16 ■ ■ □

On cherche toutes les isométries de $\mathbb{R}$, c'est à dire, toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| = |x - y|$.

① **Analyse.** Soit f une isométrie. On note δ la fonction $x \mapsto f(x) - f(0)$ sur $\mathbb{R}$.

1.a) Montrer, en étudiant la quantité $(f(x) - f(y))^2$, que pour tous $x, y \in \mathbb{R}, \delta(x)\delta(y) = xy$.

1.b) En déduire la forme de f .

② **Synthèse.** Conclure.

► Indication ► Correction

EXERCICE 17 ■ ■ ■

Déterminer par analyse-synthèse toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 18 ■ ■ ■

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,
 $f(m+n) = f(m)f(n)$. ► Indication ► Correction

EXERCICE 19 ■ ■ □

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) - f(y) .$$

► Indication

► Correction

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

Il faut essayer avec des propositions aléatoires pour se donner de l'intuition.

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Faire les tableaux de vérité.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

On teste pour certaines valeurs de x pour se donner de l'intuition sur les ensembles solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Essayez avec des exemples de fonctions.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

Reprendre la négation des quantificateurs dans le cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Reprendre la négation des quantificateurs dans le cours.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 10

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 11

On prend son courage à deux main et on montre par récurrence. On rappelle que pour montrer une inégalité, on peut soustraire les des termes.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 12

Pour l'hérédité, on peut penser à réécrire l'égalité de définition par récurrence en commençant par u_{n+1} pour pouvoir l'utiliser, et utiliser une récurrence double (ou forte). Attention alors à l'initialisation !

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 13

On rajoute un peu de difficulté. Même méthode que l'exercice précédent, mais ... Comment peut on montrer une inégalité ?

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 14 **Analyse-Synthèse et récurrence** _____

Analyse pour l'existence et Synthèse pour l'unicité. Avec une récurrence double.

↩ retour à l'EXERCICE 14

INDICATION POUR L'EXERCICE 15 _____

Et oui... Encore une récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

↩ retour à l'EXERCICE 15

INDICATION POUR L'EXERCICE 16 _____

- ① Pour trouver f , il faut remplacer une des deux variable par un nombre simple, dans l'égalité obtenue.
- ② On remplace, et on vérifie la conformité.

↩ retour à l'EXERCICE 16

INDICATION POUR L'EXERCICE 17 _____

Elles sont dérivables, donc dérivez !

↩ retour à l'EXERCICE 17

INDICATION POUR L'EXERCICE 18 _____

Pour l'analyse, prenez des valeurs simples et remplacez, plusieurs fois s'il le faut.

↩ retour à l'EXERCICE 18

INDICATION POUR L'EXERCICE 19 _____

↩ retour à l'EXERCICE 19

Corrigé

Correction de l'EXERCICE 1

- ① $P : "x = 2"$ et $Q : "x - 2 = 0"$.
- ② $P : "|x| = 2"$ et $Q : "x = 2"$.
- ③ $P : "x = 1"$ et $Q : "x = 2"$.

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

Il suffit de faire les tableaux.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

- | | |
|------------------------|--------------------------------------|
| ① $[0; 1[$ | ③ $\{4\}$ |
| ② $]3; 4[\cup]4; 5[$ | ④ $] - \infty; 0[\cup]2; +\infty[$ |

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

Il y a beaucoup de solutions.

- ① La fonction cos ou n'importe quelle fonction bornée.
- ② N'importe quelle fonction.

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

$\exists x \in A, \forall y \in B, (x \notin C \text{ ou } (x, y) \notin D) \text{ et } x \in C.$
 $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x, y) \in A \text{ et } x \notin B.$
 $\exists x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, (x, y) \in A) \text{ et } x \notin B.$

Les deux propositions n'ont rien à voir. Dans un cas, on assure l'existence de y , tel que (x, y) ne soit pas dans A ou x soit dans B , alors que dans l'autre cas, l'existence d'un tel y implique que $x \in B$.

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

- ① $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0.$
- ② $\exists M > 0, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) \leq M.$
- ③ $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \text{ et } x > 0.$
- ④ $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon).$

↩ retour à l'EXERCICE 6

Correction de l'EXERCICE 7

- ① Dans le premier énoncé, on demande que pour chaque n dans $\mathbb{N}$, il existe un N dépendant de n tel que $n \leq N$. L'énoncé est donc vrai sans problème : soit n dans $\mathbb{N}$. Posons $N = n$. Alors $n \leq N$.
 En revanche, dans le second, on demande qu'il existe N indépendant de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$, c'est à dire, on veut trouver un entier qui soit plus grand que tous les autres. C'est impossible, l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.
- ② Dans le premier énoncé, on dit simplement que tout élément de $\mathbb{R}$ admet une image par f : le y du premier énoncé dépend de x .
 En revanche, dans le second énoncé, on demande que le y soit indépendant du x choisi : en d'autres termes, on dit que la fonction est constante.

↩ retour à l'EXERCICE 7

Correction de l'EXERCICE 8

- | | |
|--|--|
| ① $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. | ③ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. |
| $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n .$ | $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M .$ |
| ② $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive. | ④ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule. |
| $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0 .$ | $\exists n \in \mathbb{N}, u_n = 0 .$ |

⑤ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0.$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

① $\exists x \in I, f(x) = 0$

② $\forall x \in I, f(x) = 0$

③ $\exists x, y \in I, f(x) \neq f(y)$

④ $\forall x, y \in I, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$ ou encore $\forall x, y \in I, f(x) = f(y) \implies x = y$

⑤ $\exists a \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(a)$

⑥ $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in I, f(x) > M$

⑦ $\forall x, y \in I, f(x) = 0$ et $f(y) = 0 \implies x = y$.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Correction de l'EXERCICE 10

On sépare en 4 cas :

① $x \geq 2$. Alors, pour tout $y \in [0, 1]$, les propositions $x \geq y$ et $x \geq 2y$ sont vraies. D'après la table de vérité de l'implication, l'assertion est vraie.

② $x < 0$. Alors, pour tout $y \in [0, 1]$, les propositions $x \geq y$ et $x \geq 2y$ sont fausses. D'après la table de vérité de l'implication, l'assertion est vraie.

③ $x \in]0, 2[$. On peut alors trouver un réel $y \in [0, 1]$ tel que $2y > x$ et $x \geq y$. En effet, $x/2 \in]0, 1[$ et il suffit de choisir $x/2 < y < \min(1, x)$. Dans ce cas, $x \geq y$ est vraie et $x \geq 2y$ est fausse. L'assertion est fausse.

④ Si $x = 0$, alors les assertions $x \geq y$ et $x \geq 2y$ sont ou bien simultanément fausses (lorsque $y \in]0, 1[$), ou bien simultanément vraies. L'assertion est donc vraie.

[↩ retour à l'EXERCICE 10](#)

Correction de l'EXERCICE 11

Posons $P(k) : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}$. Montrons par récurrence finie que $P(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Initialisation. L'assertion $P(1)$ est vraie car $1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$.

Hérédité. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Supposons $P(k-1)$ et montrons $P(k)$. Écrivons :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1}$$

En utilisant $P(k-1)$, et puisque $1 + \frac{1}{n} \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{k-1}{n} + \frac{(k-1)^2}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{k}{n} + \frac{k-1}{n^2} + \frac{(k-1)^2}{n^3} \end{aligned}$$

Pour prouver $P(k)$, il s'agit alors de prouver que :

$$\frac{k-1}{n^2} + \frac{(k-1)^2}{n^3} \leq \frac{k^2}{n^2}$$

ce qui, en multipliant par n^3 , revient à :

$$n(k-1) + n(k-1)^2 + (k-1)^2 \leq nk^2$$

et, en simplifiant, équivaut à $(k-1)^2 \leq kn$. Cette dernière inégalité étant vraie car $0 \leq k-1 \leq k$ et $0 \leq k-1 \leq n$, cela prouve $P(k)$ et achève la récurrence.

[↩ retour à l'EXERCICE 11](#)

Correction de l'EXERCICE 12

Initialisation immédiate pour les deux premiers termes. Hérédité sans difficulté avec l'indication.

[↩ retour à l'EXERCICE 12](#)

Correction de l'EXERCICE 13

Initialisation pour les deux premiers termes immédiate. L'hérédité pour l'inégalité de gauche est immédiate. Pour l'inégalité de droite, on doit montrer que

$$\frac{n^3 + (n-1)^2}{n} \leq (n+1)^2, \text{ ce qui peut se faire en soustrayant les des termes.}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 13](#)

Correction de l'EXERCICE 14 Analyse-Synthèse et récurrence

L'analyse nous donne que $b = u_0$ et $u_1 = 2(a + b)$ donc $a = \frac{u_1 - 2u_0}{2}$.

Cela prouve qu'en cas d'existence. On montre l'unicité avec la synthèse... et une récurrence double (ou forte) !

[↩ retour à l'EXERCICE 14](#)

Correction de l'EXERCICE 15

Pas de difficulté, si on a pas trop peur de faire des calculs avec 4 suites.

[↩ retour à l'EXERCICE 15](#)

Correction de l'EXERCICE 16

① On montre que $f(1) \neq f(0)$, et on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{f(1) - f(0)} + f(0)$.

② En remplaçant, on obtient $f(1) - f(0) = \pm 1$, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \pm x + f(0)$.

[↩ retour à l'EXERCICE 16](#)

Correction de l'EXERCICE 17

Pour l'analyse, en dérivant par rapport à x , on remarque que f' est constante. Donc f est affine. En remplaçant pour faire la synthèse, on montre que l'ordonnée à l'origine est nulle, donc que f est linéaire.

[↩ retour à l'EXERCICE 17](#)

Correction de l'EXERCICE 18

Pour l'analyse, on prend $m = n = 0$, et on obtient que $f(0) = 0$ ou 1.

Le cas $f(0) = 0$, nous donne la fonction constante égale à 0.

Dans le cas où $f(0) = 1$, on prouve par récurrence rapide que $f(n) = f(1)^n$. On pose alors la fonction f , telle que $f(n) = a^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{R}$ fixé. Cette fonction convient à la synthèse.

[↩ retour à l'EXERCICE 18](#)

Correction de l'EXERCICE 19

① On peut voir que $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ fonctionne. En effet $f(x + y) = 0$ et $f(x) - f(y) = 0 - 0 = 0$. Mais pour le moment on n'arrive pas trop à en trouver d'autres.

② Je cherche $f(0)$. Avec $x = 0$ et $y = 0$ on a

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) - f(0) = 0$$

Donc $f(0) = 0$

③ Si je fixe $y = 0$ j'obtiens

$$f(x) = f(x + 0) = f(x) - f(0) = f(x)$$

soit $f(x) = f(x)$ c'est à dire rien d'intéressant. Par contre si je fixe $x = 0$ j'obtiens

$$f(y) = f(0 + y) = f(0) - f(y) = -f(y)$$

et donc $f(y) = -f(y)$ pour y . Mais alors pour tout y , $f(y) = 0$. On en déduit que $f(y) = 0$ est la seule solution possible. Pour la synthèse on a déjà vu que $f(y) = 0$ fonctionne.

Autre méthode de preuve (être malin): On remarque que si on échange x et y le terme de gauche ne change pas. On a alors ces deux équation pour tout x et y

$$\begin{cases} f(y + x) = f(x) - f(y) \\ f(y + x) = f(y) - f(x) \end{cases} \quad (\text{en inversant } x, y)$$

Si on somme les deux lignes on obtient

$$f(y + x) + f(y + x) = f(x) - f(y) + f(y) - f(x) = 0$$

et donc $2f(x + y) = 0$ pour tout x et pour tout y . La fonction $f(t) = 0$ pour tout t est donc la seule solution.

[↩ retour à l'EXERCICE 19](#)