

TD

Systèmes linéaires

EXERCICE 1 ■ □ □

Résoudre les systèmes linéaires

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_1) : \begin{cases} 5x + 3y &= -2 \\ 2x + y &= 3. \end{cases} & \quad (\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x - 3y + 2z + t &= -2 \\ 2x + 4y + z + 2t &= 4 \\ 7x + 9y + 5z + 7t &= 10 \\ -4x - 18y + z - 4t &= -16. \end{cases} \\
 (\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 1x + 2y + 3z + 4t = 2 \\ 5x + 6y + 7z + 8t = 5 \\ 4x + 4y + 4z + 4t = 3 \end{cases} & \quad (\mathcal{S}_4) : \begin{cases} x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 2 ■ □ □

Résoudre, pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \lambda x + y + z + t &= 1 \\ x + \lambda y + z + t &= \lambda \\ x + y + \lambda z + t &= \lambda + 1 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 3 ■ □ □

Résoudre pour $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 4 ■ ■ □

Discuter, en fonction de la valeur des paramètres λ et μ , des solutions réelles du système

linéaire suivant.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda x - \mu y = 0 \\ \mu x + \lambda y = \mu \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 5 ■ ■ □

Résoudre le système, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \lambda x + \mu y + z = 1 \\ x + \lambda \mu y + z = \mu \\ x + \mu y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 6 ■ □ □

Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 7 ■ ■ □

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3 \end{cases}$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 8 ■ ■ □

Trouver trois réels α, β, γ tels que pour tout polynôme de degré inférieur à 3 on ait :

$$\int_2^4 P(x) dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$$

► Indication ► Correction

EXERCICE 9 ■■■

Soit un système S_n aux variables $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 + \dots + x_n & = & a_0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n & = & a_1 \\ \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \dots + \lambda_n^2 x_n & = & a_2 \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-2} x_1 + \lambda_2^{n-2} x_2 + \dots + \lambda_n^{n-2} x_n & = & a_{n-2} \\ \lambda_1^{n-1} x_1 + \lambda_2^{n-1} x_2 + \dots + \lambda_n^{n-1} x_n & = & a_{n-1} \end{array} \right.$$

pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Montrer que ce système admet une solution unique si et seulement si les coefficients λ_i y figurant sont deux à deux distincts. [► Indication](#) [► Correction](#)

Indications

INDICATION POUR L'EXERCICE 1

Un pivot de Gauss !

[↩ retour à l'EXERCICE 1](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 2

Attention, λ n'est pas une variable ! Il doit apparaitre dans les solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 2](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 3

Attention, λ n'est pas une variable ! Il doit apparaitre dans les solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 3](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 4

Attention, λ et μ ne sont pas une variable ! Il doit apparaitre dans les solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 4](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 5

Attention, λ et μ ne sont pas une variable ! Il doit apparaitre dans les solutions.

[↩ retour à l'EXERCICE 5](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 6

Il faut réduire le système ligne par ligne.

[↩ retour à l'EXERCICE 6](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 7

Comment passe t on d'un produit à une somme ?

[↩ retour à l'EXERCICE 7](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 8

Fixez P un polynôme, en donnant des noms à ses coefficients, puis calculer l'intégrale. Il ne reste plus qu'à identifier les coefficients et résoudre le système correspondant !

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

INDICATION POUR L'EXERCICE 9

Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)

Corrections

Correction de l'EXERCICE 1

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_1) : \begin{cases} x &= 11 \\ y &= -19 \end{cases} \\
 (\mathcal{S}_2) : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 (\mathcal{S}_3) : \left\{ \left(\frac{2}{5} - \frac{11z}{10} - t, \frac{8+3z}{10}, z, t \right) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}
 \end{aligned}$$

↩ retour à l'EXERCICE 1

Correction de l'EXERCICE 2

Si $\lambda = 1$, le système n'admet pas de solution. Sinon, les solutions sont

$$x(1, 1, 1, -2 - \lambda) + \left(0, 1, \frac{\lambda}{\lambda - 1}, -\frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)$$

avec $x \in \mathbb{R}$.

↩ retour à l'EXERCICE 2

Correction de l'EXERCICE 3

Si $\lambda = 1$, le système se réduit à l'équation $x + y + z = 1$; si $\lambda = -2$, il est incompatible à cause de la dernière équation; sinon, il y a un unique triplet solution.

↩ retour à l'EXERCICE 3

Correction de l'EXERCICE 4

↩ retour à l'EXERCICE 4

Correction de l'EXERCICE 5

- Si $\lambda = -2$, la dernière équation devient $\lambda = \mu$ et la précédente $-3x + 3z = 0$. Les solutions sont donc

$$\left\{ \left(z, -\frac{1+z}{2}, z \right), \text{ avec } z \in \mathbb{R} \right\}$$

- Si $\lambda = 1$, on a $\lambda = \mu$ et $x + y + z = 1$.
- Sinon, le système a une unique solution.

↩ retour à l'EXERCICE 5

Correction de l'EXERCICE 6

L'unique solution est $(1, 0, 0, \dots, 0)$.

↩ retour à l'EXERCICE 6

Correction de l'EXERCICE 7

Comme tous les termes sont strictement positifs, passons au logarithme et on obtient le système linéaire en $X = \ln x, Y = \ln y$ et $Z = \ln z$:

$$\begin{cases} X + Y + Z &= 0 \\ X + 2Y + 4Z &= \ln 2 \\ X + 3Y + 9Z &= \ln 3 \end{cases}$$

Après résolution par la méthode du pivot de Gauss, on obtient

$$(X, Y, Z) = \left(\frac{1}{2} \ln \frac{9}{64}, \frac{1}{2} \ln \frac{256}{27}, \frac{1}{2} \ln \frac{3}{4} \right),$$

et donc $(x, y, z) = \left(\frac{3}{8}, \frac{16}{3\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

↩ retour à l'EXERCICE 7

Correction de l'EXERCICE 8

Notons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polynôme de degré ≤ 3 . 1. Tout d'abord calculons l'intégrale :

$$\int_2^4 P(x) dx = \left[a \frac{x^4}{4} + b \frac{x^3}{3} + c \frac{x^2}{2} + dx \right]_2^4 = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$

D'autre part

$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = \alpha(8a + 4b + 2c + d) + \beta(27a + 9b + 3c + d) + \gamma(64a + 16b + 4c + d).$$

Donc

$$\alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4) = (8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d$$

Pour avoir l'égalité $\int_2^4 P(x)dx = \alpha P(2) + \beta P(3) + \gamma P(4)$ quelque soit les coefficients a, b, c, d il faut et il suffit que

$$(8\alpha + 27\beta + 64\gamma)a + (4\alpha + 9\beta + 16\gamma)b + (2\alpha + 3\beta + 4\gamma)c + (\alpha + \beta + \gamma)d = 60a + \frac{56}{3}b + 6c + 2d$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 6 \\ 4\alpha + 9\beta + 16\gamma = \frac{56}{3} \\ 8\alpha + 27\beta + 64\gamma = 60 \end{cases}$$

De façon surprenante ce système à 3 inconnues et 4 équations a une solution unique :

$$\alpha = \frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{4}{3}, \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

[↩ retour à l'EXERCICE 8](#)

Correction de l'EXERCICE 9

Tout d'abord, si deux coefficients sont égaux, par exemple, sans nuire à la généralité, $\lambda_1 = \lambda_2$. Alors, si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une solution du système. Pour tout élément $x \in \mathbb{R}$, on a $(x_1 + x; x_2 - x; \dots; x_n)$ est une solution.

Il y a donc soit aucune solution, soit plus d'une et donc pas une unique solution.

Montrons alors que réciproquement, si les coefficients sont deux à deux distincts, il y a une unique solution. Nous allons faire la preuve par récurrence.

Commençons par initialiser la propriété pour un système de rang 2. Le système a alors la forme suivante

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = a_1 \end{cases}$$

Nous supposons donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$

La résolution se fait par la méthode de Gauss en multipliant la première équation par $-\lambda_1$ et en l'ajoutant à la seconde. Cela conduit à :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_0 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)x_2 = a_1 - \lambda_1 a_0 \end{cases}$$

Les éléments diagonaux de ce système n'étant pas nuls, il admet une solution unique.

Posons maintenant $n \geq 3$. Inspirons nous de ce qui a été fait précédemment, mais en remontant par le bas. En multipliant l'avant dernière ligne par $-\lambda_1$ et en l'ajoutant à la dernière, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = a_1 \\ \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \dots + \lambda_n^2 x_n = a_2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-2} x_1 + \lambda_2^{n-2} x_2 + \dots + \lambda_n^{n-2} x_n = a_{n-2} \\ \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1)x_n = a_{n-1} \end{cases}$$

On répète le procédé avec l'antépénultième ligne et l'avant dernière

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = a_1 \\ \lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \dots + \lambda_n^2 x_n = a_2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-3} x_1 + \lambda_2^{n-3} x_2 + \dots + \lambda_n^{n-3} x_n = a_{n-2} \\ \lambda_2^{n-3}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + \lambda_n^{n-3}(\lambda_n - \lambda_1)x_n = a_{n-2} \\ \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1)x_n = a_{n-1} \end{cases}$$

En répétant le procédé, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_0 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + (\lambda_n - \lambda_1)x_n = a_1 - a_0\lambda_1 \\ \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1)x_n = a_2 - a_1\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-4}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + \lambda_n^{n-4}(\lambda_n - \lambda_1)x_n = a_{n-3} - a_{n-4}\lambda_1 \\ \lambda_2^{n-3}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + \lambda_n^{n-3}(\lambda_n - \lambda_1)x_n = a_{n-2} - a_{n-3}\lambda_1 \\ \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \dots + \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1)x_n = a_{n-1} - a_{n-2}\lambda_1 \end{cases}$$

En posant $y_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)x_2; \dots; y_n = (\lambda_n - \lambda_1)x_n$ ce système fait apparaître un système d'ordre $n-1$ (les $n-1$ dernières lignes) aux variables $(y_2; \dots; y_n)$ liées de manière

unique aux variables $(x_2; \dots; x_n)$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_2 + \dots + y_n & = & a_1 - a_0 \lambda_1 \\ \lambda_2 y_2 + \dots + \lambda_n y_n & = & a_2 - a_1 \lambda_1 \\ & \vdots & \\ \lambda_2^{n-4} y_2 + \dots + \lambda_n^{n-4} y_n & = & a_{n-3} - a_{n-4} \lambda_1 \\ \lambda_2^{n-3} y_2 + \dots + \lambda_n^{n-3} y_n & = & a_{n-2} - a_{n-3} \lambda_1 \\ \lambda_2^{n-2} y_2 + \dots + \lambda_n^{n-2} y_n & = & a_{n-1} - a_{n-2} \lambda_1 \end{array} \right.$$

En admettant une hypothèse de récurrence selon laquelle un système S_{n-1} de rang $n-1$ pour $n \geq 3$ ayant des coefficients distincts deux à deux admet une unique solution, nous en déduisons que notre système précédent a une solution unique en $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ce qui fait qu'un système S_n de rang n a une solution unique.

[↩ retour à l'EXERCICE 9](#)