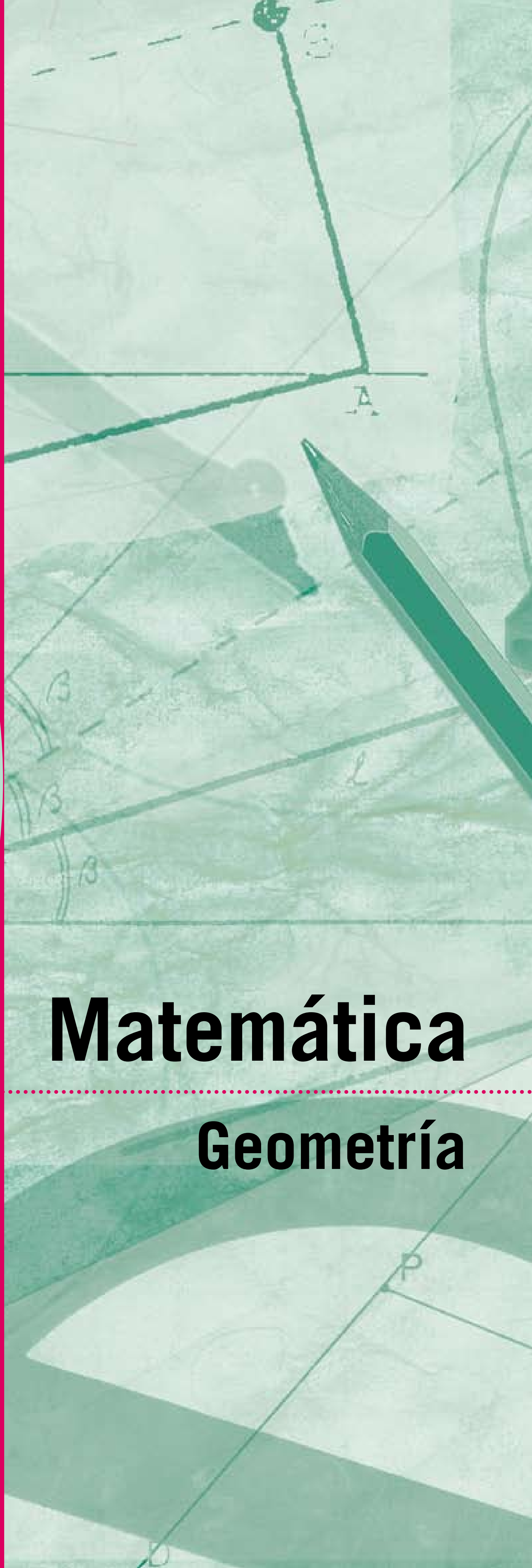
Aportes para la enseñanza. **Nivel Medio**

2007

Matemática

Geometría



G. C. B. A.
Ministerio de Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Matemática

Geometría

G.C.B.A.

G.C.B.A.

Aportes para la enseñanza. Nivel Medio

2007

Matemática

Geometría

G. C. B. A.
Ministerio de Educación
Subsecretaría de Educación
Dirección General de Planeamiento
Dirección de Currícula

Ministerio de Educación
Matemática geometría / coordinado por Graciela Cappelletti. - 1a ed. - Buenos Aires : Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2008.
96 p. ; 30x21 cm. (Aportes para la enseñanza. nivel medio)

ISBN 978-987-549-351-3

1. Material Auxiliar para la Enseñanza. I. Cappelletti, Graciela, coord. II. Título
CDD 371.33

ISBN 978-987-549-351-3

Esmeralda 55, 8º piso
C1035ABA - Buenos Aires
Teléfono/fax: 4343-4412
Correo electrónico: dircur@buenosaires.edu.ar

Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires

Jefe de Gobierno
Jorge Telerman

Ministra de Educación
Ana María Clement

Subsecretario de Educación
Luis Liberman

Directora General de Educación
Adelina de León

Directora de Área de Educación Media y Técnica
Marta García Peyret

G.C.B.A.

Aportes para la enseñanza. Nivel Medio

Elaboración del material
Equipo Central
Graciela Cappelletti
Marta García Costoya

Especialistas
María Haydée Barrero
Susana Beltrán
Fernando Bifano
Cristina Carpintero
Gema Fioriti
Diana Giuliani
Carmen Sessa
Silvia Veiga

G.C.B.A.

Edición a cargo de la Dirección de Currícula

Coordinación editorial: Virginia Piera
Supervisión de edición: María Laura Cianciolo
Diseño de la serie: Adriana Llano y Alejandra Mosconi
Realización gráfica: Alejandra Mosconi
Corrección: Paula Galdeano

Apoyo administrativo y logístico: Olga Loste, Jorge Louit

Matemática
Geometría

G.C.B.A.

Presentación

El Ministerio de Educación del Gobierno de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires desarrolla un conjunto de acciones dirigidas a promover una distribución equitativa del conocimiento, mejorar la oferta de enseñanza, y propiciar aprendizajes que les permitan a los estudiantes ejercer sus derechos ciudadanos, continuar con estudios superiores y acceder a un trabajo remunerado.

En este marco, la Dirección General de Planeamiento a través de la Dirección de Currícula promueve el fortalecimiento de las escuelas medias y el mejoramiento de la experiencia educativa que ofrecen los establecimientos de ese nivel. Los programas de las asignaturas revisten especial importancia para el logro de los objetivos antes mencionados ya que, por su carácter de instrumento normativo, constituyen una herramienta para la tarea docente al establecer lineamientos de trabajo común y organizar la propuesta formativa alrededor de propósitos explícitos.

En este marco se elaboraron programas de 1º y 2º año del nivel medio,* sin modificación en su conjunto desde el año 1956. Esto contribuye a configurar un contexto propicio para la profundización de la reflexión y el fortalecimiento de la mirada pedagógica sobre los procesos de enseñanza en la escuela media.

Estos programas se realizaron considerando distintas instancias: una primera formulación por parte de equipos de especialistas de la Dirección de Currícula y, luego, reuniones sistemáticas de consulta con docentes del Sistema Educativo. Este trabajo, realizado durante los años 2001 y 2002, tuvo como resultado las versiones definitivas. Durante los años 2003 y 2004 se llevó a cabo un trabajo con profesores para el seguimiento de los programas y su implementación en las escuelas.

Los materiales curriculares que integran la serie "Aportes para la Enseñanza. Nivel Medio", que a continuación se presentan, tienen su origen en los programas mencionados, en las consultas que se realizaron para su elaboración y en las acciones de seguimiento llevadas a cabo en ese sentido entre la Dirección de Currícula y los profesores del nivel.

Esta serie está concebida como una colección de recursos para la enseñanza, pretende atender al enfoque de los programas, favorecer las prácticas reflexivas de los profesores y colaborar con la lógica de organización de recursos por parte de la escuela, el departamento, la asignatura.

Cada título que integra la serie posee una identidad temática. Es decir, los recursos que agrupa cada material remiten a algún contenido especificado en los programas. Tal es el caso, por ejemplo, de "Las relaciones coloniales en América" en Historia, o "Números racionales" en Matemática. La elección del tema se ha realizado considerando uno o más de los siguientes crite-

* Programas de 1º año, Resolución Nº 354/2003; y 2º año, Resolución Nº 1.636/2004, en vigencia. Corresponden a los planes de estudios aprobados por el Decreto PEN N° 6.680/56, la Resolución N° 1.813/88 del Ministerio de Educación y Justicia, y la Resolución N° 1.182/90 de la Secretaría de Educación de la M.C.B.A.

rios: se aborda aquello sobre lo que hay mayor dificultad para enseñar y/o mayores obstáculos para que los alumnos aprendan, aquello sobre lo que no hay suficientes recursos, o aquello sobre lo que lo existente no está tratado según el adecuado enfoque. Cada material tiene la impronta de la asignatura, y, según el caso, incluye diversos recursos: selecciones de textos para los alumnos, artículos periodísticos, mapas, imágenes (pinturas, grabados, fotografías, láminas), selecciones de videos, selecciones musicales, gráficos, propuestas de actividades.

En esta oportunidad, se presentan los siguientes títulos que continúan la serie comenzada durante el año 2006.

Biología. Procesos relacionados con la vida y su origen: la célula y las estructuras asociadas a sus funciones. Aborda contenidos del programa de 2º año: el origen de la vida, la nutrición en el nivel celular, la célula como sistema abierto y la diversidad biológica: nutrición y multicelularidad. La propuesta permite trabajar los contenidos antes mencionados partiendo de distintos recursos: textos científicos, láminas, video y actividades exploratorias y experimentales.

Geografía. Relaciones entre Estados: el caso de las plantas de celulosa en Fray Bentos. Atiende al programa de 2º año. Propone el trabajo a partir del caso de las pasteras que posibilita la articulación de contenidos de diversos bloques: "Los Estados y los territorios" (los conflictos entre los Estados, las relaciones y articulaciones entre los niveles nacional, provincial y municipal a partir de las decisiones y las acciones tomadas por sus gobiernos), del bloque: "Los cambios en la producción industrial y las transformaciones territoriales" (la industria, la organización de la producción y los territorios; los factores de localización industrial, los espacios industriales, los cambios en la división territorial del trabajo, etcétera). Para el desarrollo del tema se presentan artículos periodísticos, mapas, imágenes, cuadros estadísticos y un video.

Historia. Los mundos del medioevo. Esta propuesta tiende a incrementar y diversificar los materiales disponibles para el desarrollo del programa de 1º año, en particular para el tratamiento del tercer bloque de contenidos: "Los mundos durante el medioevo". Se trata de un conjunto de recursos –documentos escritos, imágenes, interpretaciones de historiadores y mapas– que el docente podrá seleccionar y decidir el tipo de actividad por desarrollar a partir de las posibilidades que los mismos brinden.

Plástica. El color, la textura y la forma en la indumentaria del habitante de la Ciudad. Presenta propuestas para el trabajo en el aula tomando como eje la indumentaria de los habitantes. El material se estructura a partir de un video, que el docente puede utilizar para promover el análisis y la reflexión de los alumnos sobre el tema. Está acompañado por propuestas pedagógicas.

Títulos anteriores:

Biología. Los intercambios de materia y de energía en los seres vivos
Geografía. Problemáticas ambientales a diferentes escalas
Historia. Las relaciones coloniales en América
Matemática. Números racionales
Música. Taller de audición, creación e interpretación
Teatro. El espacio teatral

INTRODUCCIÓN

Este material se presenta como un aporte a la compleja tarea que enfrentan los profesores de Matemática a diario, al pensar y gestar una clase. Retoma el espíritu de los Programas de primero y segundo año vigentes y del documento *Números racionales.* Aportes para la enseñanza. Nivel Medio. G.C.B.A., Ministerio de Educación. D.G.PI., D. C., 2006). Del mismo modo que lo fue aquel documento, éste es el producto del trabajo conjunto de especialistas de la Dirección de Currícula y profesores de Escuelas Medias de la Ciudad de Buenos Aires.

Recuperamos las ideas centrales de los programas acerca de los objetivos de la enseñanza de Matemática en la escuela media: se trata fundamentalmente de involucrar a los alumnos en una verdadera actividad de producción. Esto hace necesario crear un ambiente en la clase que aliente a los alumnos a ensayar, producir diferentes resoluciones y aportar ideas para enfrentar los problemas propuestos. Ensayos, resoluciones e ideas que son la materia prima a partir de la cual el docente organiza las interacciones en la clase con el objeto de discutir sobre la validez, precisión, claridad, generalidad, alcance, etc., de lo que se produjo.[1]

En este documento se ha elegido abordar la enseñanza de la geometría, con referencia a temas de todas las unidades de los programas de primero y segundo año.[2] El trabajo en geometría adquiere características propias que lo diferencian del álgebra y la aritmética, y plantea a los docentes cuestiones específicas por tener en cuenta para involucrar a los alumnos en el aprendizaje.

Comencemos señalando la compleja relación entre los objetos del espacio físico –a partir de los datos que provienen de la percepción y la medición– y los objetos geométricos (figuras, cuerpos, etc.) que son objetos teóricos que obedecen a reglas de la matemática (en sus definiciones, sus reglas de "funcionamiento" y los modos de validación de sus propiedades).

En el Documento Nº 5 citado anteriormente, se sostiene la importancia de un trabajo con las figuras en el segundo ciclo, que avance más allá del uso de la percepción y la manipulación de los objetos. Las actividades propuestas en ese documento, centradas en la construcción de figuras, promueven la anticipación de los alumnos, y permiten el establecimiento de relaciones entre distintos elementos de las figuras.

Para los primeros años de la escolaridad media se propone una profundización de este trabajo tanto en el establecimiento de relaciones más complejas (entre ellas, algunos teoremas clásicos de la geometría plana) como en la entrada a la argumentación deductiva como forma de trabajo en geometría.

---

1 Para profundizar sobre esta temática se recomienda la lectura del Documento Nº 2, *La formación de los alumnos como estudiantes. Estudiar Matemática,* G.C.B.A., Dirección General de Planeamiento, 2000. http://www.buenosaires.gov.ar/educacion/

2 Recomendamos la lectura de *Matemática. La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo*, Documento Nº 5, G.C.B.A., Secretaría de Educación, D.G.PI., Dirección de Currícula, 1998, para conocer los lineamientos en el tratamiento de la Geometría en el segundo ciclo para las escuelas de la Ciudad.

Se trata de un proceso que requiere que las situaciones que se presenten a los alumnos cumplan ciertas características: permitir que los saberes geométricos aparezcan como instrumentos en la resolución de problemas que no puedan ser resueltos desde la percepción o desde la medición. La validación de la respuesta dada a un problema –es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o la falsedad de su respuesta– no se podrá establecer empíricamente sino que deberá apoyarse en las propiedades de los objetos geométricos.

Es necesaria, entonces, una reflexión sobre el papel del registro figurativo en el trabajo geométrico: las representaciones gráficas, o sea los dibujos sobre el papel, constituyen una "parada intermedia" entre los objetos teóricos y los objetos reales. El dibujo de un cuadrado sobre una hoja puede ser considerado tanto la representación gráfica del objeto geométrico "cuadrado" como la representación de un objeto cuadrado del espacio físico. La representación gráfica de una figura puede constituirse en una herramienta poderosa para la resolución de un problema. En particular, juega un papel importante en el proceso de elaboración de una demostración. Al decir esto les asignamos a los dibujos el papel de representación de los objetos geométricos, y reservamos para la enseñanza lograr que los alumnos comprendan la diferencia entre el objeto y su representación.

La construcción de los objetos teóricos de la geometría se constituye apoyándose en la percepción, pero al mismo tiempo oponiéndose a los datos de la evidencia. Este juego de acuerdos y desacuerdos parece ser propicio para su aprovechamiento didáctico.

Entrar en el juego de la demostración supone, entonces, poder validar las afirmaciones o conjeturas sin recurrir a la constatación empírica. Validar una afirmación es parte del proceso de construcción de conocimiento en la medida en que las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras producen nuevo conocimiento sobre ellos.

Es necesario tener presente que no se piensa en exigir de entrada demostraciones tal como se entienden en matemática. Hay que pensar en un proceso largo que tendrá idas y vueltas, y que debe ser provocado y "empujado hacia delante" desde las actividades que se proponen para realizar en el aula y desde la gestión de la clase por el docente.

¿Cuánta precisión requerimos para aceptar como válida una demostración? Si bien parece legítimo tender a que los alumnos vayan mejorando la calidad de sus argumentaciones, al principio es necesario poder aceptar justificaciones incompletas, argumentaciones imprecisas, escrituras "poco formales".

En un principio, exigir la demostración de propiedades evidentes o muy conocidas por los alumnos puede ser contraproducente, pues no se entiende la necesidad de validarlas. Se trata de que los alumnos puedan producir razonamientos deductivos a partir de propiedades conocidas, usándolas como si fueran "axiomas" sin llegar a identificar en la clase un sistema axiomático mínimo. Una vez que los alumnos hayan entrado en este "juego" deductivo, podrán comprender mejor la necesidad de validar las propiedades, aun en el caso de que estas les sean familiares o evidentes.

Aprender geometría es también construir un sentido para las afirmaciones que se formulan, sentido que se va precisando a partir de las discusiones e interacciones en el aula. Sería importante que los estudiantes llegaran a requerir, o al menos apreciar, una mayor formalización al servicio de una mayor claridad tanto en las definiciones de los objetos como en la formulación de los algoritmos de construcción y en la redacción de una argumentación.

Para organizar la progresión en el trabajo geométrico a lo largo de los dos primeros años resulta útil pensarlo como una trama donde se articulan diferentes planos:

- los conceptos, propiedades, relaciones, teoremas, etcétera;
- los diferentes tipos de tareas, tales como construir, establecer una conjetura, realizar clasificaciones, redactar una demostración, estudiar una demostración hecha por otro, etcétera;
- técnicas específicas (modos de hacer), como la técnica para partir un segmento en partes iguales, la técnica de comparar áreas "cortando y pegando", las técnicas que resultan de utilizar las relaciones trigonométricas, etcétera.

Cada uno de estos tres componentes puede mirarse atravesando los diferentes temas por enseñar, y con niveles crecientes de complejidad. De esta mirada transversal queremos dar cuenta en este documento.

En el **capítulo 1** se presenta una progresión de trabajo en torno a los conceptos fundamentales de círculo y de circunferencia.

En el **capítulo 2** se propone un conjunto de actividades referidas a un tipo de tarea: las construcciones de figuras. En particular se presenta un trabajo para la elaboración de los criterios de igualdad de triángulos.

En el **capítulo 3** la técnica de comparación de áreas es el eje en torno al cual se articulan diferentes actividades. En particular se aborda la demostración del teorema de Pitágoras y del teorema de Thales.

Finalmente, en el **capítulo 4** se presenta un ejemplo de una actividad pensada para trabajar colectivamente en la elaboración de nuevas –y no conocidas– clasificaciones de cuadriláteros, y la formulación y validación de teoremas para esas clases.

Capítulo 1
Los conceptos de círculo y circunferencia

Las nociones de círculo y de circunferencia son centrales para la elaboración de propiedades de la geometría plana, y en particular para la realización y validación de construcciones de figuras, temas de los cuales se ocupan los programas de primero y de segundo año.

En este capítulo se abordan algunas problemáticas que involucran los conceptos de circunferencia y círculo, incluidos en diferentes unidades de estos programas.

Organizamos la presentación en tres apartados:

El primer apartado propone problemas que permiten poner en juego la idea de la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo[3] y el tratamiento de sus elementos: centro y radio, diámetros y cuerdas. Sugerimos trabajar estos problemas antes de abordar el estudio de construcciones de triángulos que presentamos en el primer apartado del **capítulo 2**.

Se incluye también una reflexión sobre diferentes instrumentos, caseros y comprados, para construir circunferencias, y en especial del objeto compás. Para explicar su funcionamiento se necesitan los criterios de igualdad de triángulos.

El segundo apartado aborda contenidos del programa de Geometría de segundo año: posiciones relativas de una recta y una circunferencia, y de dos circunferencias. Se incluyen también situaciones para tratar temas necesarios para el estudio de los anteriores, como el trazado de una circunferencia por 1, 2, 3 ó 4 puntos dados. Todo lo anterior aporta a una caracterización de la recta tangente a una circunferencia y a su construcción por un punto dado.

En el tercer apartado se desarrolla una secuencia para el estudio de los ángulos inscriptos. Algunas de las actividades que se proponen han sido tomadas del programa de segundo año, las hemos retrabajado y hemos completado sus análisis; se las incluye en este documento para que el lector tenga una visión más general y global del tratamiento del tema. Para completar el estudio de los ángulos inscriptos se proponen actividades de **reinversión** de los conocimientos construidos.

[3] Esta concepción de círculo y circunferencia está presente en el Diseño Curricular para la Escuela Primaria, Segundo Ciclo, G.C.B.A., Secretaría de Educación, D.G.PI., Dirección de Currícula, 2004. Se recomienda la lectura del *Documento de trabajo Nº 5*, *op.cit.*, para profundizar sobre esta temática en particular y en general, sobre la entrada al trabajo geométrico en la escuela.

1. Familiarización con las nociones de circunferencia y círculo

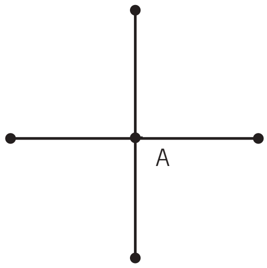
Instrumentos para trazar circunferencias y trasladar distancias

Problema 1

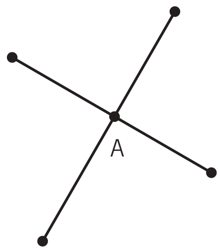
Marcar un punto A. Marcar todos los puntos que están a 3 cm de A. Marcar todos los puntos que están a menos de 3 cm de A.

Comentarios

Con este problema se apunta a la recuperación de las nociones de circunferencia y círculo, en términos de distancia a un centro dado. Es posible que los alumnos consideren sólo 4 puntos que están exactamente a 3 cm del punto A, y podrían ubicarlos usando la regla de esta manera:



Para poner en cuestión esta solución el docente podrá preguntar si no es posible pensar otra ubicación "torcida". Por ejemplo:



Una vez aceptada esta como otra respuesta, se podrá preguntar por todas las inclinaciones posibles para las cruces. De esta forma, se puede comenzar a discutir acerca de la solución que se obtiene, al unir uno a uno los puntos cuando esa suerte de "cruz" va girando.

El dibujo de la circunferencia surge entonces como solución al problema; se podrá re-construir con los alumnos su definición como el conjunto de puntos que están a igual distancia de otro fijo llamado centro. La pregunta sobre la ubicación de los puntos que están a menos de 3 cm de A permitirá recordar la definición de círculo y la relación entre ambos conceptos.

En el aula, probablemente convivan diferentes formas de dibujar la circunferencia. La discusión sobre ellas cobra importancia en la medida en que permite una profundización de las nociones de círculo y circunferencia.

Discusión sobre los instrumentos para trazar circunferencias

Para dibujar circunferencias se puede recurrir a distintos tipos de herramientas: tapas, monedas, bocas de vasos o cualquier objeto redondo; cordones o piolines, reglas, el compás y eventualmente el transportador. Cada uno de ellos pone en juego diferentes relaciones inherentes a la circunferencia.

Por ejemplo, una tapa o la boca de un vaso permiten la construcción efectiva de una circunferencia, sin embargo no es posible identificar dónde se halla su centro, ni por tanto determinar con precisión su radio. Además, si queremos construir una circunferencia de un radio determinado, debiéramos contar con un vaso o una tapa que cumpla con las características necesarias.

La construcción de una circunferencia con un cordón o piolín permite identificar claramente su centro y la dimensión del radio, que coincide con la longitud del cordón. Esta es una técnica que se puede utilizar en espacios grandes, mucho más grandes que la hoja del cuaderno o el pizarrón, donde el compás que se usa en la escuela puede ser un instrumento poco adecuado. Los obreros de la construcción llaman "compás" a un instrumento casero constituido por un clavo que se fija al suelo y un piolín atado a este, con una cuña en el extremo que permite el trazado de una circunferencia en el piso. El uso de la regla, para ir midiendo distancias a un punto O de la misma longitud, permite también localizar puntos de la circunferencia, que luego hay que unir de manera aproximada.

Finalmente, tenemos el compás, instrumento privilegiado para las construcciones en la clase de geometría, que sin embargo, los alumnos no usan ni espontáneamente ni con frecuencia. En principio, ellos pueden aceptar que, al maniobrar un compás, sin modificar su abertura, logran conservar la distancia entre las dos patas, aunque no es evidente que esa distancia es exactamente la longitud del radio de la circunferencia que se dibuja. Cuando el radio se prevé con anterioridad, se trata de modificar la abertura para hacer coincidir esa distancia entre las patas del compás con el radio.

Será conveniente volver a una reflexión sobre este instrumento con posterioridad a la construcción de los criterios de igualdad de triángulos: las dos patas del compás pueden considerarse como los lados de un triángulo. Para cada abertura dada, el triángulo queda totalmente determinado y con ello el tercer lado, que "no se ve" y cuyos extremos son las dos puntas. De este modo también se justifica su utilización para trasladar longitudes. Se entiende así la importancia de mover el compás "con cuidado", dada la necesidad de no modificar la abertura (el ángulo) para conservar la longitud del segmento.

Incluimos estas reflexiones sobre los instrumentos a propósito de este problema, aunque puede incorporarse en otro momento del trabajo con circunferencias.

Problema 2

Se tiene una circunferencia de centro O; dos puntos A y B en la circunferencia que están alineados con el centro O; y otros dos puntos M y N de la circunferencia que no están alineados con O.

a) ¿Qué relación hay entre la longitud de AB y la de MN?, ¿se puede lograr que sean iguales?
b) ¿Qué relación hay entre el radio de la circunferencia y la longitud de AB y la de MN?, ¿se puede lograr que alguna de de ellas sea igual al radio?

Comentarios

La idea de este problema es provocar una discusión con los alumnos para llegar a establecer que, entre todos los segmentos que se pueden construir uniendo dos puntos de la circunferencia, la longitud mayor se obtiene cuando ese segmento pasa por el centro. Para poder justificar estos hechos es necesario apoyarse en la propiedad triangular, que podría ser identificada por los alumnos en su enunciado: "La manera más corta de ir de un punto a otro es ir en línea recta".

Este problema es una situación propicia para nombrar a los diámetros, los radios y las cuerdas de una circunferencia, e identificar que, para una circunferencia determinada, todos sus diámetros y radios miden lo mismo, mientras que se pueden construir cuerdas tan chicas como se quiera, siempre menores que un diámetro.

Problema 3

Se presenta a los alumnos una hoja con dos puntos marcados a 6 cm de distancia:

P x x **Q**

El esquema representa dos ovejas atadas a sogas que están estaqueadas al suelo. En este esquema, cada centímetro representa 2 metros. La soga de la oveja atada a P es de 6 m y la de la oveja atada a Q es de 8 m.

a) Marcar en el esquema la zona donde podría pastar la oveja de la estaca P.
b) Marcar la zona donde pueden comer las dos.
c) ¿De qué longitud debería ser la soga de la estaca Q para que las ovejas no se encuentren (dejando fija la longitud de la soga de la estaca P)?

Comentarios

Entre las soluciones a este problema se puede suponer que habrá alumnos que tracen una circunferencia de centro P y radio 3 cm, y otra de centro Q y radio 4 cm, de esta manera identificarán la zona en la que se mueve cada oveja, y responderán así a las preguntas **a)** y **b)** del problema.

La pregunta **c)** intenta poner en cuestión las condiciones de posibilidad o no de intersección de dos circunferencias, tema que será abordado también en otros apartados de este trabajo. Se espera que en esta instancia los alumnos lleguen a concluir que la separación mínima entre ambas estacas, para que las ovejas no tengan zonas comunes para pastar, coincide con la suma de los radios de las circunferencias, es decir que las dos sogas deben sumar menos que la distancia entre las estacas.

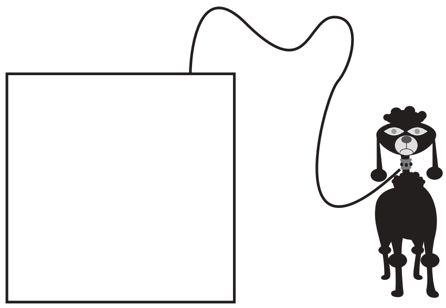
Es posible que aparezcan en el aula cuestiones que se desprenden del contexto como el largo de cada oveja, u otras no tan pertinentes como el hambre que puedan tener; es una oportunidad para discutir con los alumnos la idea de que en el trabajo matemático estamos haciendo un modelo de la realidad, que toma en cuenta algunas variables de la situación y produce una respuesta en relación con esas variables que se consideraron.

Para continuar el trabajo, el docente podrá proponer otras situaciones cambiando las variables del problema: la longitud de cada una de las sogas y/o la separación entre estacas, a fin de discutir con los alumnos las distintas soluciones que vayan surgiendo en cada uno de los casos:

- circunferencias secantes,
- circunferencias tangentes,
- circunferencias que no se tocan.

Problema 4

El esquema representa un cantero cuadrado de 4 m de lado (escala 1 cm = 1 m). El cantero tiene una reja en su perímetro. Un perro está atado a la reja con una soga de 8 m y no puede entrar al cantero.



a) Marcar en el esquema la zona que puede pisar el perro si la soga está fija en un punto situado a 3 m del vértice.

b) Marcar la zona si la soga se fija en el punto medio del lado del cantero.

Comentarios

Este problema retoma lo trabajado en los problemas anteriores y permite resignificar los conceptos de centro y radio de una circunferencia. Los alumnos para marcar la zona necesitan ubicar en cada paso un nuevo centro, y determinar un nuevo radio de circunferencia. La figura que se obtiene es una espiral diferente en cada consigna; se podrán variar los datos para lograr otro tipo de figuras. Puede ser que el docente tenga que poner a discusión el enunciado del problema, de modo que los alumnos interpreten que el radio de circunferencia va variando.

Propuestas complementarias

A continuación se plantean problemas descontextualizados; se trata de que los alumnos encuentren puntos que equidistan de otros dos puntos dados. Si bien ya se ha discutido sobre circunferencias secantes y tangentes en el **problema 3**, este trabajo descontextualizado permitiría abrir un camino para construir el concepto de mediatriz de un segmento. La propiedad acerca de la perpendicularidad entre un segmento y su mediatriz se podrá validar cuando se disponga de los criterios de igualdad de triángulos, tarea que se propone en el **Capítulo 2**.

G.C.B.A.

Problema 5

(Entregar a los alumnos una hoja con dos puntos marcados a menos de 8 cm.)

x **A** x **B**

a) Dibujar un punto P que esté a 4 cm de distancia del punto A y a 4 cm del punto B. ¿Cuántos puntos cumplen esta condición?
b) ¿Qué distancia de separación debe haber entre A y B para que haya un único punto que se encuentre a 4 cm de cada uno de ellos? ¿Y para que no haya ninguno?

Comentarios

Dependiendo de la profundidad con que se hayan trabajado los problemas anteriores, podría ser que todavía algún alumno, para responder a la consigna **a)**, piense en encontrar el punto P sobre el segmento AB, y en ese caso no llegaría a ninguna solución.

A x..x **B**

Habrá que orientar la discusión en torno al resto de los puntos del plano. Es ahí donde una vez más toma sentido la construcción de la circunferencia porque permite encontrar los dos únicos puntos que cumplen en simultáneo con ambas condiciones pedidas. El dibujo de los arquitos al que los alumnos pueden estar acostumbrados se puede analizar ahora como partes de una circunferencia que no se dibuja toda porque hay una anticipación de la zona donde se va a cortar con otra.

La pregunta **b)** pone en cuestión nuevamente el tema de los posibles puntos de contacto que puede haber entre dos circunferencias no concéntricas. Trabajar en el contexto matemático puede favorecer la reflexión sobre las ideas que se ponen en juego en este problema, y se presta para clarificar y distinguir las nociones de circunferencias tangentes y secantes.

Problema 6

Se sabe que los puntos A y B están a 5 cm de distancia. **Decidir antes de construir**, cuántos puntos cumplen las condiciones solicitadas a continuación. Luego, si es necesario, comprobar realizando la construcción.

a) ¿Cuántos puntos que estén simultáneamente a 7 cm de A y de B es posible encontrar?
b) ¿Cuántos puntos que estén simultáneamente a 3 cm de A y de B es posible encontrar?
c) ¿Cuántos puntos que estén simultáneamente a 2,5 cm de A y de B es posible encontrar?
d) ¿Cuántos puntos que estén simultáneamente a 2 cm de A y de B es posible encontrar?

Comentarios

Nuevamente aquí se ponen en juego las nociones de circunferencias tangentes y secantes, y también circunferencias que no se cortan entre sí. La novedad en este problema se vincula al hecho de que se les proponga a los alumnos anticipar el resultado y que recurran a la construcción como herramienta de verificación o validación de lo conjeturado.

Las construcciones son una herramienta para probar la validez de las anticipaciones hechas por los alumnos. Constituyen una validación empírica del problema y van más allá de una figura de análisis. Los alumnos podrán elaborar otro tipo de pruebas cuando trabajen con problemas que requieran argumentos de orden más deductivo.

Las marcas que quedarán dibujadas sobre un mismo esquema, cuando respondan a los distintos ítems, permitirán a los alumnos "encontrarse" con el hecho de que todos los puntos quedaron alineados. Es una situación propicia para encarar el estudio de la noción de mediatriz. La discusión y justificación de que la mediatriz de un segmento (considerada como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del mismo) es la recta perpendicular a ese segmento que pasa por su punto medio necesita, como ya dijimos, de los criterios de igualdad de triángulos, que serán abordados en el primer apartado del **Capítulo 2**.

Otra cuestión interesante que podría discutirse a propósito de este problema es qué pasaría si se permite que las distancias a A y a B sean distintas. Esta nueva situación podría servir como punto de partida para la discusión acerca de la posibilidad o no de construir un triángulo cuyos lados midan, por ejemplo, 9, 5 y 4 cm ó 10, 3 y 6 cm. Se pone en juego la desigualdad triangular, propiedad que es necesario identificar y formular, aunque a esta altura de la escolaridad no se disponga de recursos para validarla.[4] Esta propiedad se pondrá en juego también en el primer apartado del **Capítulo 2**, cuando se trabajen las construcciones de triángulos a partir de conocer la medida de los lados.

2. Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Rectas tangentes, secantes y exteriores. Caracterización de la recta tangente. Construcción de la recta tangente a una circunferencia por un punto dado

El concepto de recta tangente es central en matemática. Para segundo año de la escuela media, se propone su tratamiento en relación con la circunferencia, pues en este caso se puede dar una definición precisa sin apelar al cálculo infinitesimal: una recta es tangente a una circunferencia si se corta con ella en un único punto. Con el estudio de las parábolas y la función cuadrática, en años siguientes, esta primera definición de recta tangente deberá ser revisada para establecer sus límites y dar lugar a otra que recupere la idea de "punto doble de contacto".

Presentamos una primera actividad preparatoria de los temas que se tratarán en este bloque. Para poder abordarla es necesario que los alumnos hayan trabajado antes con la noción de mediatriz y realizado su construcción.

4 La relación entre lado e hipotenusa de un triángulo rectángulo que resulta del Teorema de Pitágoras permite construir una validación de la desigualdad triangular para el caso de triángulos acutángulos.

Problema 7

a) Trazar una circunferencia que pase por dos puntos dados. ¿Cuántas se pueden trazar?
b) Trazar una circunferencia que pase por tres puntos dados. ¿Cuántas se pueden trazar?
c) Trazar una circunferencia que pase por cuatro puntos dados. ¿Cuántas se pueden trazar?

Comentarios

Esta actividad requiere que los alumnos hayan trabajado con el concepto de mediatriz de un segmento; en la consigna **a)** es probable que a partir de una primera exploración, los alumnos dibujen el segmento entre los puntos dados, marquen el punto medio y lo consideren el centro de una de las circunferencias pedidas. Si esta fuera la única solución que aparece en la clase, será una buena oportunidad para recuperar la definición de circunferencia y la propiedad que debe cumplir el centro. Los alumnos deberían poder concluir que hay infinitas circunferencias y que los centros se encuentran sobre la mediatriz del segmento determinado por los dos puntos.

En la consigna **b)**,[5] para encontrar el centro de la circunferencia, los alumnos deberán buscar un punto equidistante de los tres dados. Esta búsqueda puede apoyarse en el trabajo realizado a partir de la consigna a: el trazado de dos mediatrices permite determinar el lugar donde debe estar ubicado el centro. La justificación de esa construcción incluye discutir la unicidad de la solución. En torno a esta situación se podrá también plantear la discusión acerca de la existencia de solución en relación con la ubicación relativa de los tres puntos dados. Por un lado, el sentido común podría permitir anticipar que si estos puntos están alineados, no es posible encontrar una circunferencia que pase por los tres. Lo interesante aquí es reflexionar sobre la construcción realizada antes: dados los puntos A, B y C, el centro de la circunferencia se ubicaba en la intersección de las mediatrices de los segmentos AB y BC; pero estas mediatrices no van a cortarse si los segmentos AB y BC son paralelos; como los segmentos tiene un punto en común, esta condición se traduce en que los puntos A, B y C están alineados.

La consigna **c)** también genera un trabajo exploratorio; los alumnos pueden considerar tres de los cuatro puntos y determinar la única circunferencia que pasa por ellos según lo estudiado en la consigna **b)**. Si el cuarto punto no pertenece a esta circunferencia, entonces el problema no tiene solución. Sería interesante que, al trabajar con el **problema 19** del tercer apartado, se pueda identificar una condición necesaria que deben cumplir cuatro puntos A, B, C y D para pertenecer a una circunferencia: la suma de los ángulos ABC y CDA debe ser igual a dos rectos.[6]

5 El ejemplo 24 del programa de segundo año plantea una situación similar en contexto.
6 Esta condición en realidad es también suficiente pero no se incluye su discusión en el **problema 19**.

Problema 8

a) Dibujar si es posible
- una recta y una circunferencia que se corten en dos puntos,
- una recta y una circunferencia que se corten en un punto,
- una recta y una circunferencia que no se corten,
- una recta y una circunferencia que se corten en tres puntos.

b) Dibujar si es posible
- dos circunferencias que no se corten,
- dos circunferencias que se corten en un punto,
- dos circunferencias que se corten en dos puntos,
- dos circunferencias que se corten en tres puntos.

Comentarios

Este problema propone un trabajo exploratorio acerca de la intersección de rectas y circunferencias, y de circunferencias entre sí. Como ya dijimos, se trata de una actividad netamente exploratoria. La consigna **a)** permitirá caracterizar rectas secantes, tangentes y exteriores a una circunferencia. La justificación del trazado de una recta que corte a una circunferencia en un solo punto se reserva para realizar después del **problema 9**.

En cuanto a la consigna **b)**, a partir de la realización de los tres primeros dibujos que se piden, el docente podrá proponer a los alumnos analizar la relación entre los radios y la distancia entre los centros, y de este modo se podrá caracterizar circunferencias exteriores, secantes y tangentes. El cuarto dibujo que se pide puede considerarse como una construcción imposible;[7] el trabajo realizado en el **problema 7** permite argumentar acerca de esta imposibilidad.

Problema 9[8]

Se tiene una circunferencia de centro O. Marcar si es posible marcar dos puntos A y B sobre la circunferencia de manera que el ángulo BAO sea recto.

Comentarios

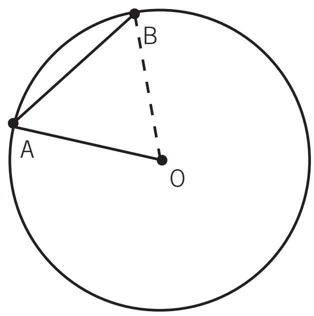
Para abordar este problema, los alumnos pueden intentar dibujar un ángulo recto en las condiciones pedidas; en ese caso se enfrentarían con la imposibilidad práctica de esta construcción. Si esto sucede, el docente debe reformular la tarea y pedir entonces una justificación de por qué esta es

7 En el **Capítulo 2** de este documento se presentan otras construcciones imposibles.

8 En las tres actividades que siguen se presenta una posible trayectoria para el estudio de las rectas tangentes a una circunferencia. Recuperan esencialmente las ideas del ejemplo 18 del programa de segundo año.

una construcción imposible. Pedir la justificación de esta afirmación es colocar a los alumnos en un plano diferente del dibujo y la visualización. De este modo, se tiende a lograr que los estudiantes se involucren en la elaboración de argumentos. Este es un objetivo de la enseñanza: requiere una intencionalidad del docente, que irá instalando la argumentación como una actividad usual del aula.

Una justificación puede apoyarse en el hecho de que si A y B son dos puntos de la circunferencia, el triángulo BOA siempre será isósceles, con ángulo B = ángulo A, y por lo tanto estos nunca podrán ser rectos.



Problema 10

Discutir la validez de la siguiente afirmación:
"Si una recta pasa por un punto P de una circunferencia y es perpendicular al radio que pasa por P, entonces esta recta es tangente a la circunferencia."

Comentarios

El trabajo realizado en el **problema 9** permite construir una argumentación para validar la conjetura que se propone.

Otra manera de justificar la veracidad de esta afirmación consiste en analizar que para cualquier punto Q de la recta, que no sea P, se obtiene un triángulo rectángulo QPO, del cual QO es su hipotenusa. Por la relación pitagórica, la longitud de ese segmento será mayor que la medida del radio, y por lo tanto el punto Q necesariamente será exterior a la circunferencia.

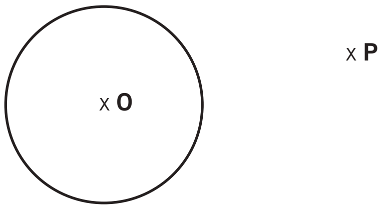
Sería importante lograr que los dos tipos de argumentos fueran discutidos, distinguiéndolos de otros que pueden apoyarse en la percepción o en algún dibujo.

Una vez instalada en la clase esta afirmación como verdadera se puede plantear el trazado efectivo de una recta tangente a una circunferencia por un punto de ella. En particular, sería interesante volver sobre el **problema 8** para validar ahora la construcción de una recta y una circunferencia que se corta en un punto.

G.C.B.A.

Problema 11

Se da una circunferencia de centro O y radio r y un punto P exterior a ella. Hay que trazar una recta tangente a la circunferencia (no se sabe por qué punto de ella), de manera que la recta pase por P. ¿ Se puede hacer siempre? ¿Puede haber más de una recta que cumpla con estas condiciones?



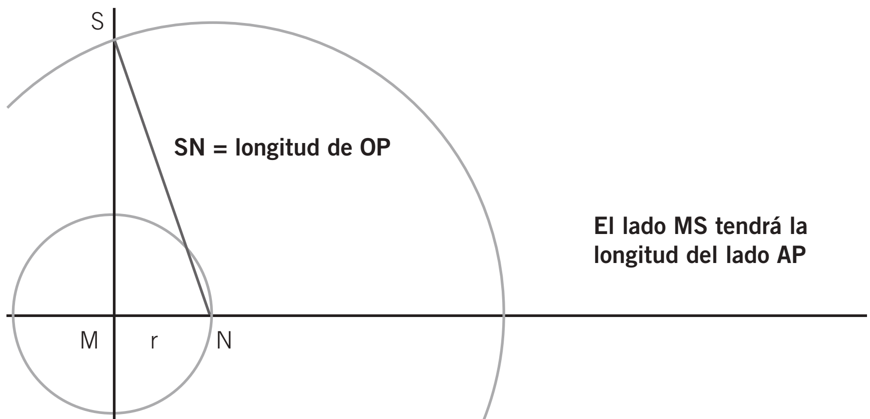
Comentarios

Para resolver esta actividad, el docente podría sugerir a los alumnos que comiencen realizando un dibujo aproximado de la recta, esquema que permitiría considerar tanto los datos como las condiciones que tiene que cumplir esa recta. Si se llama A al punto de contacto de la recta tangente con la circunferencia, el docente podría ahora preguntar qué se sabe sobre el triángulo PAO. Se puede sugerir a los alumnos ubicar el punto A en cualquier lugar y dibujar un triángulo, a modo de figura de análisis.

De este triángulo se conoce:

- que es rectángulo en A, porque la tangente es perpendicular al radio,
- la medida de un cateto, que es la longitud del radio OA,
- la medida de la hipotenusa que es la distancia OP.

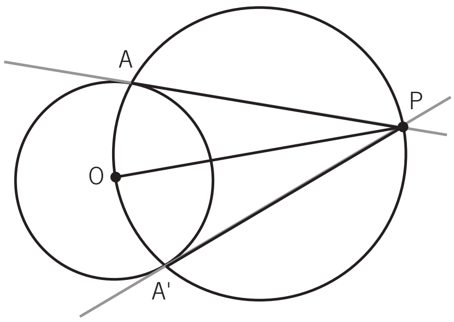
Las construcciones geométricas realizadas en primer año son herramientas para construir ahora el triángulo PAO a partir de los datos. El docente puede proponer realizar esa construcción fuera de la circunferencia y de allí tomar la longitud del segmento AP.



Una vez realizada esta construcción, con la medida MS como radio pueden marcarse con el compás, centrado en P, los puntos A y A' de intersección con la circunferencia. Esta construcción permite validar que por P pasan siempre dos rectas tangentes a la circunferencia.

En este problema aparece el recurso de la figura de análisis, herramienta muy útil en el trabajo en geometría. Realizar un esquema de la situación permite vincular tanto los datos entre sí como las relaciones que se buscan, y en ese sentido ayuda a organizar la construcción. En otros casos, estos esquemas permiten organizar una demostración o también formular una nueva conjetura. Que los alumnos lleguen a apropiarse de este recurso es algo que debe gestar la enseñanza, a partir de problemas donde aparezca su necesidad o al menos su eficacia.

La propiedad de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia, que será comentada en el **problema 13**, permite elaborar otro algoritmo de construcción para la tangente por un punto exterior; sería interesante volver sobre este problema después del trabajo con esa propiedad. En efecto, el punto A por el cual la recta cortará a la circunferencia permite determinar un ángulo recto OAP. Después del **problema 13**, los alumnos saben que todos los ángulos inscriptos en una semicircunferencia son rectos y pueden buscar el punto A en la circunferencia que tiene como diámetro el segmento OP. En definitiva, el punto A buscado debe estar en la intersección de esta circunferencia con la dada.



Problema 12

Un móvil parte de un punto de una circunferencia de 15 m de radio. Siguiendo la dirección que marca la tangente en dicho punto, se desplaza durante dos horas, a una velocidad de 20 m/h. ¿A qué distancia del centro de circunferencia se encontrará al cabo de ese tiempo?

Comentarios

Este último problema integra el concepto de recta tangente estudiado previamente con la noción de velocidad y la relación métrica dada por el Teorema de Pitágoras.

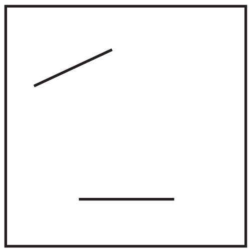
3. Ángulos inscriptos

Ángulos inscriptos en una semicircunferencia y en un arco de circunferencia. Relación con el ángulo central correspondiente

La relación entre un ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente es propicia para la exploración y la formulación de conjeturas. Los **problemas 13, 14** y **15** recuperan esencialmente el ejemplo 19 del programa de segundo año. A partir del **problema 16** se presentan actividades de reinversión de los conocimientos recién construidos

Problema 13

Se presenta una hoja con dos segmentos dibujados y se pide, para cada segmento, dibujar un rectángulo que tenga el segmento dado por diagonal. En caso de que fuera posible dibujar más de uno, dibujar tres distintos, decidir cuántos es posible dibujar en total y cómo se podrían dibujar todos.



Comentarios

Esta actividad comienza con una fase exploratoria; es posible que para algunos alumnos el primer segmento se visualice como la diagonal de un único rectángulo, aquel de lados horizontal y vertical respectivamente. Esta idea resulta insuficiente para construir rectángulos con el segundo segmento. Se espera que algunos alumnos aprovechen los lados de la escuadra para el trazado de ángulos rectos que pasen por los extremos del segmento dado y otros actualicen la propiedad que verifican las diagonales de un rectángulo: son iguales y se cortan en su punto medio. Gracias a esta propiedad es posible construir nuevos rectángulos dibujando la segunda diagonal con distintas inclinaciones.

De este trabajo exploratorio se espera arribar colectivamente a la siguiente conjetura (que surge de una “visión” de los rectángulos dibujados): “los vértices de todos los rectángulos dibujados caen sobre una circunferencia”. El docente puede escribirla y redefinir la tarea pidiendo una justificación de esta afirmación. Los alumnos están en condiciones de darla apoyándose en el hecho de que todas las diagonales de los distintos rectángulos son iguales (e iguales al dato inicial) y se cortan en su punto medio. El punto en que se cortan todas las diagonales resultará el centro de la circunferencia y los vértices dibujados están todos a una distancia del centro igual a la mitad de la diagonal.

Problema 14[9]

Dados dos puntos A y B en un plano, hallar los puntos P de ese plano de modo que el ángulo APB sea recto.

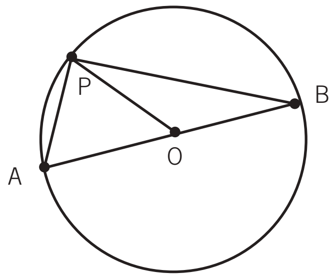
Comentarios

La clave para la resolución del problema consiste en encontrar otra caracterización –el lugar geométrico– de todos los puntos P que verifican una cierta condición. En una primera instancia, una fase

9 Este problema complementa el estudio realizado en el **problema 13**. Es posible pensar el tratamiento de estos dos problemas en el orden inverso al que los presentamos.

exploratoria puede favorecer como conjetura que el conjunto buscado es la circunferencia de centro en O, punto medio de AB, y de radio AB/ 2 (exceptuando los puntos A y B).

Queda ahora la tarea de validar esta conjetura. En el **problema 13** se llegó a justificar que todo vértice cae efectivamente en esta circunferencia, faltaría probar que todo punto de la circunferencia es el vértice de un ángulo recto. Para validar esta última afirmación se puede proponer a los alumnos la consideración de los triángulos AOP y BOP, ambos isósceles:

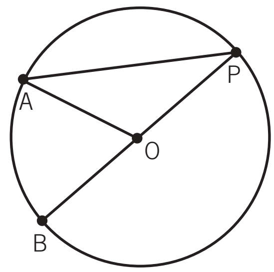


y el triángulo APB. Un juego argumentativo entre las propiedades de los ángulos de un triángulo isósceles y el hecho de que los ángulos interiores de todo triángulo sumen dos rectos les permitirá arribar a la conclusión de que APB es recto.

En este trabajo se aborda la problemática de condición necesaria y suficiente, problemática delicada desde el punto vista de la enseñanza pero al mismo tiempo inherente a muchas situaciones del trabajo geométrico. No se piensa que todos los alumnos puedan comprender en profundidad la necesidad de este tipo de razonamiento a partir del trabajo con un único problema. Para colaborar con su comprensión será necesario retomar esta cuestión en diferentes momentos.

Problema 15

En una circunferencia se marca un punto P y se dibuja un ángulo con vértice en P, de manera que uno de los lados del ángulo corte a la circunferencia en un punto A y el otro de los lados pase por el centro O de la circunferencia y la corte en un punto B, tal como muestra el dibujo.



a) Si se sabe que el ángulo AOB mide 78º 36', ¿se puede saber cuánto mide el ángulo APB?
b) Determinar, si es posible, un ángulo AOB y un punto P´ en la situación descripta en la consigna **a)** de manera que el ángulo AP´B sea mayor que la mitad del ángulo AOB.

Comentarios

Esta actividad tiene como objetivo que los alumnos lleguen a elaborar la relación entre un ángulo inscripto y el central correspondiente. Para resolver la consigna **a)** es probable que algunos alumnos realicen un dibujo aproximado del ángulo AOB y lleguen a un valor aproximado del ángulo APB midiendo sobre el papel. Es esperable que de este modo se obtengan en el aula distintos resultados, hecho que resulta propicio para que el docente plantee una discusión acerca de la aproximación que necesariamente está implicada en el dibujo y en la medición. Quedaría abierta la posibilidad de apelar a otros recursos para llegar a la respuesta exacta.

Eventualmente, con algunas propuestas del docente –dibujar el segmento AB–, los alumnos podrían resolver el problema estudiando nuevamente los triángulos isósceles que quedan determinados. La argumentación resulta ser una herramienta para arribar a un resultado numérico. Es posible que los estudiantes lleguen al resultado 39º 18' paso a paso, sin identificar que se trata de la mitad del ángulo dato. Enfrentar la tarea de la consigna **b)** va a permitir la formulación general de la relación y su validación.

La búsqueda del punto y el ángulo solicitados en la consigna **b)** resultará infructuosa pues se trata de una construcción imposible. Se espera que de su exploración surja la propiedad que sí se verifica: *"el ángulo central es siempre el doble del ángulo inscripto"*.

La justificación de esta afirmación se podrá apoyar en los hechos siguientes:

APB = OAP por ángulos iguales de un triángulo isósceles,
AOB = 180º - AOP,
AOP = 180º - 2APB.

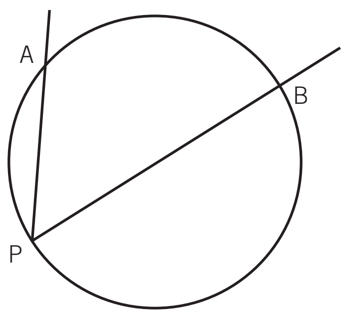
Estas condiciones permiten concluir que
$\text{APB} = \frac{1}{2}\,\text{AOB}$.

Para completar el estudio de los ángulos inscriptos, falta todavía el planteo más general para un ángulo inscripto cualquiera, sin que necesariamente uno de sus lados pase por el centro de la circunferencia. La validación de la propiedad en el caso general podría quedar a cargo del docente.

Los **problemas 13, 14** y **15** permitieron la identificación de conocimientos geométricos relativos a ángulos inscriptos. Esta identificación se pudo elaborar a partir de actividades de construcción, de validación y discusiones en la clase. En las actividades siguientes estos conocimientos se pondrán en juego para resolver una variedad de problemas geométricos. Para algunas de ellas no se presenta un análisis detallado sino un comentario que orienta sobre el posible trabajo por realizar en el aula.

Problema 16

Se tiene una circunferencia. Se marcan en ella los puntos A y B que determinan un arco, se señala un punto P y se dibuja el ángulo inscripto APB, como se indica en el dibujo:



a) Encuentren un punto M en la circunferencia, que pertenezca al arco AB que contiene a P, de manera tal que el ángulo AMB sea igual al ángulo APB.

b) Encuentren un punto M en la circunferencia, que pertenezca al arco AB que contiene a P, de manera tal que el ángulo AMB sea mayor que el ángulo APB.
c) Encuentren un punto M en la circunferencia, que pertenezca al arco AB que contiene a P, de manera tal que el ángulo AMB sea menor que el ángulo APB.

Comentarios

Para resolver este problema es probable que los alumnos ubiquen M en distintos lugares. Es esperable que algunos midan el ángulo APB obteniendo un valor. Al seleccionar un punto M y trazar el ángulo inscripto AMB, la medida será muy similar a la del ángulo APB. Es una oportunidad para discutir nuevamente acerca de la aproximación que necesariamente se obtiene al dibujar y medir.

Para las consignas **b)** y **c)** es posible que los alumnos construyan diferentes ángulos AMB con el transportador; podría ser útil promover la sospecha de que siempre miden "casi" lo mismo, y que parece ser imposible encontrar un punto M para el cual el ángulo APB sea diferente que el ángulo AMB.

El docente podrá promover la búsqueda de argumentos que sostengan la igualdad de todos los ángulos obtenidos: si se consideran dos ángulos AMB y ANB,

- por un lado, hay que identificar que ambos comparten un mismo ángulo central que pasa por A y B, y tiene su vértice sobre el centro de la circunferencia;
- por otro lado, hay que recuperar lo elaborado en el **problema 15** para concluir que ambos ángulos miden la mitad que AOB.

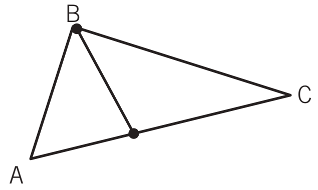
Nuevamente, a partir de una construcción imposible se logra enunciar una propiedad de los ángulos inscriptos y validarla.

Problema 17[10]

Construir un triángulo rectángulo dadas la hipotenusa y la altura correspondiente a la hipotenusa.

Comentarios

El dibujo que se adjunta es una figura de análisis que puede servir para orientar la tarea.



[10] Extraídos del programa de Matemática. Segundo año. GCBA., Secretaría de Educación, D.G.P.L., Dirección de Currícula, 2003.

Para trazar el triángulo, los alumnos deben ubicar el punto B, de manera que ABC sea un ángulo recto y que la distancia de B al lado AC sea igual a la altura dada.

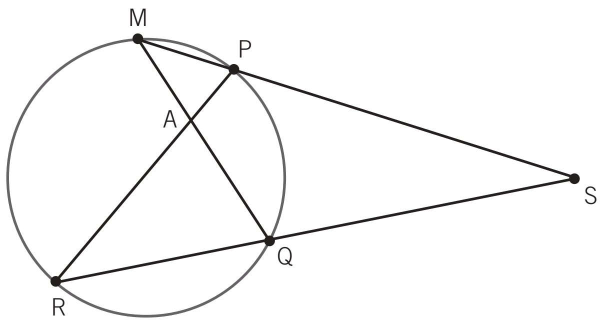
El problema es una aplicación de la propiedad recién estudiada según la cual si un ángulo está inscripto en una semicircunferencia, es recto. El punto buscado resulta ser entonces la intersección entre la circunferencia con centro en el punto medio de la hipotenusa y radio igual a la mitad de la misma, y la recta paralela a la hipotenusa que está a una distancia de la misma igual a la altura.

Si los alumnos intentaran dibujar el triángulo "al tanteo", la exploración que realicen puede servir de base para construir una argumentación.

Será interesante estudiar las condiciones para que el problema tenga solución y discutir la cantidad de soluciones posibles. Esta discusión se puede apoyar en una descripción de la construcción más que en la construcción efectiva. Como caso particular se puede preguntar acerca de las condiciones que deben cumplir los datos para llegar a obtener un triángulo isósceles.

Problema 18

Por un punto S exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, como se muestra en el siguiente dibujo:



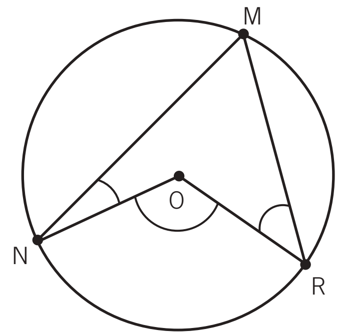
¿Es verdad que los ángulos del triángulo MPA son respectivamente iguales a los ángulos del triángulo RAQ? ¿Cómo se explica esto? ¿Se puede decir lo mismo de los ángulos de los triángulos MQS y RPS?

Comentarios

Este problema se propone como una aplicación de la propiedad estudiada en el problema 16. Se podrá retomar cuando se trabaje el concepto de semejanza de figuras, intercalándolo en una secuencia de semejanza para estudiar la proporcionalidad entre pares de lados.

Problema 19

En la siguiente figura, O es centro de la circunferencia. Calcular la medida del ángulo MRO sin utilizar el transportador, sabiendo que el ángulo MNO mide 20° y que el ángulo NOR mide 120°.



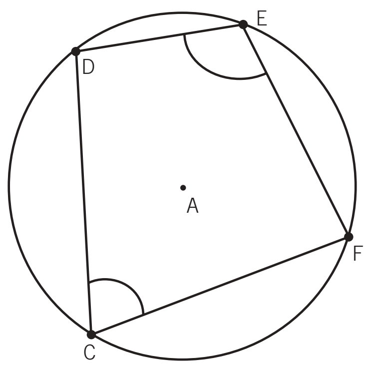
Comentarios

La idea es que los alumnos entren en un juego deductivo, a partir del valor de algunos ángulos. Quizás sea necesaria una intervención docente para el trazado del segmento MO, que permitirá considerar los dos triángulos isósceles MON y MOR.

A partir de esto se puede poner en juego la relación entre un ángulo inscripto y el central correspondiente, o considerar los tres ángulos con vértice en O que completara un giro.

Problema 20

Si A es centro de la circunferencia y DCF mide 62°, determinar la medida del ángulo DEF.



Comentarios

Este problema, al igual que el anterior, requiere poner en juego la relación entre el ángulo central y el ángulo inscripto correspondiente. Pone de manifiesto que el ángulo central puede resultar mayor que 180°, dependiendo del valor del ángulo inscripto que le corresponde y le da sentido a los ángulos cóncavos.

Como continuación de la tarea se podría proponer a los alumnos analizar la validez de la siguiente afirmación: *En todo cuadrilátero inscripto en una circunferencia, la suma de los ángulos opuestos es dos rectos*, que requiere la utilización de las propiedades de la circunferencia para validar propiedades de los cuadriláteros y viceversa.

Otra pregunta que se puede plantear es: *Si imaginamos que el punto F se va desplazando sobre la circunferencia, ¿dónde se puede ubicar para que los ángulos DCF y DEF sean iguales?*

Capítulo 2
Un tipo de tarea: las construcciones

En este capítulo se proponen distintas actividades en torno a un tipo de tarea: las construcciones geométricas, a través de las cuales se abordan diferentes temáticas de la geometría de los dos primeros años de la escuela media. Las actividades de construcción –con una gestión de la clase que favorezca la reflexión– pueden resultar muy fértiles para promover la exploración y la elaboración de propiedades, así como para poner en juego propiedades ya conocidas.

Las primeras actividades de construcción de triángulos que se proponen en el primer apartado son exploratorias, e incluyen el estudio de las condiciones sobre los datos para asegurar la existencia de soluciones y la unicidad de las mismas. Se propone una actividad de reproducción de un triángulo, a partir de la cual se espera elaborar los criterios de igualdad de triángulos. Es decir que los criterios serán el producto de una actividad de los alumnos antes de convertirse en un conocimiento-herramienta eficaz para la elaboración de argumentaciones.

En el segundo apartado se proponen actividades en las que se solicita una validación de las construcciones por realizar. A diferencia del apartado anterior, en este se restringen los instrumentos de construcción a la regla no graduada y el compás. De este modo se pretende provocar en los alumnos la necesidad de argumentar –a partir de propiedades ya conocidas– para asegurar la validez de las construcciones realizadas. Los criterios de igualdad de triángulos, entre otras propiedades, serán aquí apoyos para las validaciones. La fundamentación de construcciones clásicas con regla no graduada y compás, como la de mediatriz y bisectriz, son algunas de las actividades propuestas.

En el tercer apartado se propone una colección de construcciones imposibles. En este caso, la imposibilidad de realizar el dibujo exige buscar argumentos que justifiquen la imposibilidad de realizar el dibujo.

1. Construcciones de triángulos y elaboración de criterios de igualdad

Las actividades propuestas en este apartado consisten en la construcción de triángulos a partir de diferentes datos. Estas construcciones ponen en juego relaciones entre lados, entre ángulos, y entre lados y ángulos de los triángulos. A partir de los distintos juegos de datos, los alumnos deberán decidir si es posible construir o no un triángulo, analizar si la construcción es única o si puede haber más de un triángulo que verifique esas condiciones.[11]

[11] En el ejemplo 27 del Anexo del Programa de Matemática. Primer año. G.C.B.A., Ministerio de Educación, D.G.P.L., Dirección de Currícula, 2002) se presentan sintéticamente actividades de construcción de triángulos.

En el contexto de las actividades de construcción se discutirá por qué el compás aparece como un instrumento adecuado para trasladar segmentos o ángulos. Los alumnos de primer año suelen tener poca familiaridad con este uso del instrumento compás, así como con la noción de circunferencia como lugar geométrico de los puntos que equidistan de uno fijo. Sería conveniente entonces abordar con anterioridad las actividades propuestas en el primer apartado del **capítulo 1**.

Un objetivo de estas actividades de construcción es la elaboración de criterios que permitan decidir bajo qué circunstancias se puede afirmar que dos triángulos son iguales. El conocimiento de los criterios de igualdad de triángulos será fundamental para avanzar en el plano de las argumentaciones y validaciones de conjeturas. Para llegar a la formulación de tales criterios se propone el **problema 8** de reproducción de un triángulo, a partir de datos que los alumnos deben pedir a otro grupo de alumnos (o al docente).

Las últimas actividades que se proponen en este apartado están referidas, por un lado, a la consideración de la altura del triángulo como uno de los datos posibles para la construcción, y, por otro, a construcciones de triángulos rectángulos e isósceles.

Construcciones de triángulos a partir de lados

Problema 1

Dados los segmentos *a* y *b:*

a

b

construir, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual a *a* y otro lado igual a *b*. ¿Se pueden construir dos distintos? ¿Por qué?

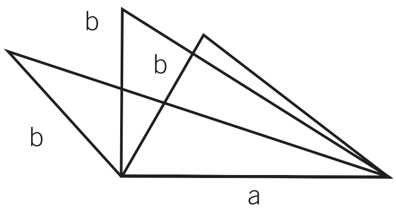
Comentarios

Los alumnos suelen sentirse desconcertados ante esta actividad y piden más datos para determinar el triángulo. Muchas veces es necesario que el docente habilite explícitamente la posibilidad de que ellos elijan a su gusto los datos que faltan y de ese modo es posible que lleguen a construir más de un triángulo que cumple las condiciones planteadas. Los triángulos que más frecuentemente aparecen en el aula son acutángulos, rectángulos e isósceles –que resultan de repetir alguna de las longitudes dadas para dos de los lados o de "inventar" un ángulo recto–. Para que los alumnos también construyan triángulos obtusángulos puede ser necesaria una intervención docente que lo solicite explícitamente.

Con la variedad de respuestas producidas por los alumnos es posible identificar el ángulo entre los dos segmentos dados como una variable de la actividad que puede ser elegida arbitrariamente.

Llegado este punto se podrá preguntar cuántos triángulos diferentes es posible armar. Muchos chicos responden 180 o 179, como consecuencia de una identificación implícita "un grado-un ángulo". Este tipo de respuestas, lejos de representar un problema para el desarrollo de la actividad, abre el espacio a discusiones fructíferas en torno a las ideas de infinito, de medida y de ángulos.

Es probable que los alumnos no recurran al compás para realizar la construcción. Para hacerlo "entrar en escena", el docente podría presentar una figura como la siguiente, señalando que al dibujar el segmento *a* quedan determinados dos de los vértices del triángulo, mientras que el tercer vértice quedará determinado según la posición elegida para el segmento *b*:



A partir de este dibujo se les pueden hacer preguntas a los alumnos, tales como: *¿Dónde se puede ubicar el tercer vértice? ¿Qué figura describen las distintas posiciones del vértice "libre" del segmento b?*

Aquí podría resultar fructífera una discusión en torno a si es posible "tomar" la longitud de los lados "sin medir". Si previamente se ha trabajado con la propuesta del **capítulo 1** sobre los diferentes instrumentos que están disponibles para hacer construcciones de circunferencias, como el compás y el cordón –entre otros– y las posibilidades que brinda cada uno de ellos, es de esperar que los alumnos puedan discutir y argumentar acerca de por qué el compás es un instrumento eficaz para determinar todos los puntos posibles donde puede estar ubicado el tercer vértice del triángulo.

Otra discusión se puede generar en torno a la necesidad de que los tres vértices no queden alineados.

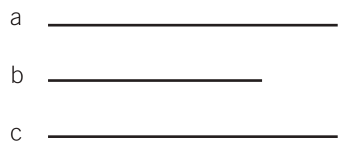
Será necesario proponer a los alumnos una reflexión en torno a qué sucedería si se comienza la construcción a partir del segmento *b* y se traza una circunferencia con centro en uno de sus extremos y radio igual a la medida del segmento *a*. Los alumnos podrían pensar que de esta manera se obtendrán nuevos triángulos, diferentes de los anteriores, aun aquellos que observen una cierta simetría.

Hará falta una intervención del docente para que se instale como norma de la clase de geometría que cuando dos figuras pueden superponerse, se consideran iguales; es decir, que la posición de la figura en la hoja de papel no es una propiedad de la figura. Para el caso de dos triángulos, la superposición puede identificarse con la igualdad de los tres lados y de los respectivos ángulos comprendidos. La formulación de los criterios de igualdad a partir del **problema 8** servirá para retomar esta caracterización.

Como cierre de esta actividad se debería discutir qué sucede cuando se cambian las longitudes de los segmentos. La idea es llegar a determinar que la construcción realizada y las infinitas soluciones encontradas seguirán obteniéndose cualesquiera sean las longitudes de los dos lados-datos.

Problema 2

Dados los segmentos *a*, *b* y *c* construir, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual a *a*, otro lado igual a *b* y el otro lado igual a *c*. ¿Es posible construir dos distintos? ¿Por qué?



Comentarios

Por lo trabajado en la actividad anterior (y las del **capítulo 1**), es de esperar que el compás sea considerado como una herramienta útil para trasladar segmentos.

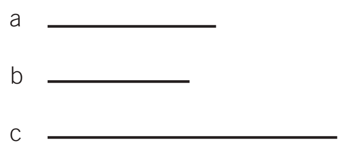
La situación permite a los alumnos la toma de algunas decisiones: el lado por donde empezar la construcción, cuál de los dos extremos del segmento elegir para trazar las circunferencias con las medidas de los otros dos lados, cuál de los dos puntos de intersección de las circunferencias elegir para formar el triángulo. Todas estas decisiones, si bien pueden generar incertidumbre en los alumnos, son fecundas porque promueven la confrontación de posturas que se deben sostener con distintos tipos de argumentos. La discusión sobre la simetría y la superposición de figuras a propósito de la actividad anterior hará posible concluir que se trata siempre del mismo triángulo, pero que ocupa distintas posiciones en la hoja.

El trabajo realizado en estas actividades permite dotar de sentido a una "manera de hacer" que tienen los alumnos, según la cual los triángulos surgen a partir de "marquitas" que quedan en la hoja luego de transportar con el compás la longitud de un lado. Esas "marquitas" se pueden ver ahora como una sección de una circunferencia que el compás permitiría trazar completamente.

Después del **problema 2** podría quedar instalada la idea de que, conociendo los tres lados, siempre se puede construir un triángulo. La siguiente actividad pone de relieve que debe existir alguna relación entre las longitudes de los lados –la desigualdad triangular– para que se pueda realizar la construcción.

Problema 3

Dados los segmentos *a*, *b* y *c* construir, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual a *a*, otro lado igual a *b* y el otro lado igual a *c*. ¿Se pueden construir dos triángulos distintos? ¿Por qué?



Comentarios

El objetivo de esta actividad es generar una discusión en torno a las razones que hacen que no se pueda lograr la construcción pedida. Es posible que los alumnos argumenten que "los lados no cierran", "los lados no alcanzan", "los lados no se juntan". Se trata de avanzar en la precisión de la respuesta hasta llegar a alguna formulación de la desigualdad triangular.

Enfrentar la tarea de una construcción imposible es, en este caso, un punto de partida para precisar las condiciones que deben cumplir los lados de un triángulo.

El hecho de que el enunciado de una actividad pida realizar algo que no resulta posible hace entrar a los alumnos en una suerte de contradicción: *si la actividad (el docente) lo pide, debe ser posible realizarlo.*

En ese sentido, además de apuntar a precisar las condiciones de la desigualdad triangular, la actividad permitiría al docente establecer –tal vez implícitamente– una nueva "regla de juego": *la solución a un problema puede ser responder que éste no tiene solución*. Esta norma que se establece en la clase propicia la autonomía de los alumnos: los impulsa a moverse de la posición de "*no me sale*", a la de estudiar si el problema tiene o no solución.

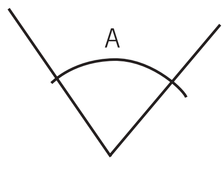
Concluida esta etapa de tres actividades, sería conveniente hacer una síntesis con los alumnos de lo trabajado hasta aquí.

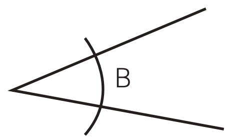
Construcciones de triángulos a partir de ángulos

Los **problemas 4** y **5** buscan movilizar las concepciones de los alumnos en relación con la idea de ángulos interiores de los triángulos y establecer condiciones sobre dichos ángulos para que las construcciones se puedan realizar.

Problema 4

Dados los ángulos A y B





Construir, si es posible, un triángulo que tenga un ángulo igual a A y otro ángulo igual a B.
¿Es posible construir dos distintos? ¿Por qué?
¿Será cierto que dados dos ángulos, siempre es posible construir un triángulo?

Comentarios

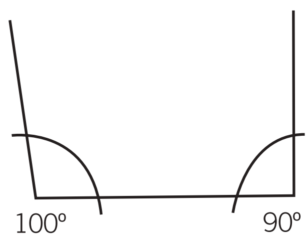
Los ángulos aparecen en escena por primera vez como datos y puede ser necesario revisar con los alumnos que la medida del ángulo no depende de la longitud de los lados, sino de la "abertura" que hay entre ellos.

Como la actividad no presenta las medidas de los ángulos, hay que buscar la forma de "trasladarlos" o "copiarlos". Los alumnos podrán hacerlo con compás o con transportador. Tanto el procedimiento para transportar ángulos con compás como su fundamentación serán tratados en el segundo apartado de este capítulo. El docente podrá decidir el momento más apropiado para desarrollar esta actividad.

Para realizar la tarea, es posible que los alumnos intenten ubicar los dos ángulos-datos en los dos extremos de un lado, dibujado "horizontalmente". Pero hay una decisión que se debe tomar: ¿qué longitud se le debe dar al lado sobre el cual se construyen los dos ángulos? Puede ser que algunos alumnos lo dibujen de un tamaño "estándar", sin darse cuenta de que están determinando una longitud para el lado. Puede ser que otros alumnos demanden ese segmento faltante. Puede ser necesario que el docente explicite que la elección depende de ellos porque no es un dato del enunciado. Esto abrirá el espacio para una discusión posterior sobre las distintas soluciones obtenidas y el porqué de la multiplicidad de respuestas.

Esta actividad no apunta necesariamente a que se trabajen las nociones de semejanza ni de proporcionalidad. En principio, será suficiente señalar que todos los diferentes triángulos construidos poseen longitudes diferentes para los lados, pero tienen en común la abertura de dos de sus ángulos.

Con relación a la pregunta: *¿será cierto que, dados dos ángulos, siempre es posible construir un triángulo?*, esperamos que los alumnos puedan llegar a establecer la condición de que, si esos dos ángulos suman menos que 180º, la construcción será siempre posible. En tanto que si la suma de los dos ángulos es mayor o igual que 180º, la construcción será imposible. Pueden apoyarse en construcciones como la siguiente:



Suponemos que la mayoría de las justificaciones que den los alumnos se apoyarán en dibujos, pero no descartamos que algún alumno recuerde la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. De todas formas, esta cuestión se ahondará en las dos actividades que se proponen a continuación.

Problema 5

a) **Construir, si es posible, un triángulo cuyos ángulos midan 30º, 45º y 75º. ¿Es posible construir dos distintos? ¿Por qué?**
b) **Construir, si es posible, un triángulo cuyos ángulos midan 30º, 45º y 105º. ¿Pueden construir dos distintos? ¿Por qué?**

Comentarios

Lo fecundo de la actividad gira en torno de la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. En ese sentido, el objetivo no se ve modificado si los alumnos utilizan el trasportador para dibujar los ángulos.

En relación con la consigna **a)**, es posible que algunos alumnos hagan la construcción ubicando los ángulos de 30º y 45º, y encuentren que el tercer ángulo no puede medir 75º. También puede suceder que alguno, partiendo de los ángulos de 30º y de 45º, logre "cerrar" el triángulo, sin controlar que el tercer ángulo no mide 75º.

Otra posibilidad es que algunos alumnos recuperen la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo –propiedad que suele ser trabajada en la escuela primaria–, y argumenten la imposibilidad de la construcción mediante dicha propiedad.

En relación con la consigna **b)**, suponemos que los alumnos van a realizar la construcción, algunos de ellos sin control en cuanto a la suma de los ángulos interiores, y otros anticipando que, como la suma es 180º, no habrá problemas.

De manera similar a lo expuesto para el **problema 4**, puede ser necesario confrontar las diferentes construcciones para discutir cuántas soluciones hay. Nuevamente, no estamos pensando en introducir la noción de semejanza; en cambio, sí se espera que el trabajo permita identificar la posibilidad de construir infinitos triángulos, conociendo la medida de sus tres ángulos –siempre que la suma sea 180º–.

Por otro lado, será interesante destacar que mientras tres ángulos (que respeten la condición para la suma de ángulos interiores) determinan infinitos triángulos, tres lados (que respeten la propiedad triangular) determinan un único triángulo.

En este momento se puede retomar el **problema 4,** para llegar a concluir que si se conocen las medidas de dos de los ángulos de un triángulo, se conoce la medida del tercero.

Para sintetizar el trabajo realizado en los cinco problemas se puede plantear a los alumnos una actividad de formulación y discusión de diferentes afirmaciones. Por ejemplo, *Si tenés datos sobre dos lados, siempre se pueden construir infinitos triángulos. Si tenés datos sobre dos ángulos, no siempre*.

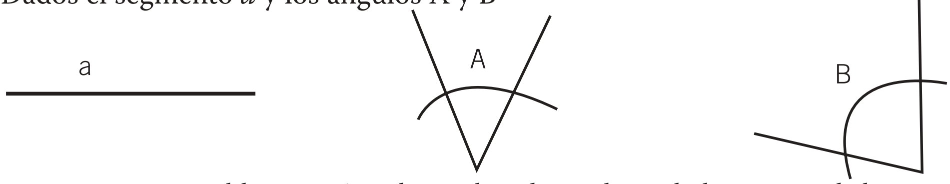
Luego de una instancia de discusión, y sobre la base de las conclusiones a las que se arribe, pueden proponerse los siguientes dos problemas.

Construcciones de triángulos a partir de lados y ángulos

Las dos actividades que se dan a continuación proponen “combinar” lados y ángulos como datos, para establecer condiciones sobre la posibilidad de construir uno, ninguno o varios triángulos.

Problema 6

Dados el segmento *a* y los ángulos A y B



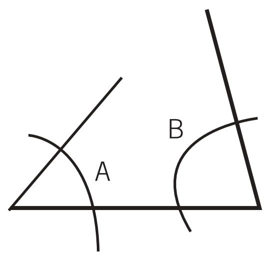
construir, si es posible, un triángulo en el cual uno de sus lados sea igual al segmento *a* y los ángulos adyacentes (o sea los que están apoyados en el segmento) sean iguales a los ángulos A y B.
¿Es posible construir dos triángulos distintos?

Comentarios

Es muy probable que los alumnos realicen una construcción como la que describimos a continuación:

Ubiquen en primer término el lado:

Luego, intenten dibujar los dos ángulos adyacentes:

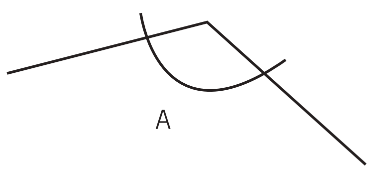


Y por último prolonguen las semirrectas que conforman los ángulos hasta cerrar el triángulo. Cabe destacar que si se invierte la ubicación de los ángulos A y B, los triángulos obtenidos serán iguales. En este punto es conveniente retomar lo analizado en el **problema 1**, en relación con la simetría que hay entre ambos triángulos.

Finalmente, se podrá discutir la unicidad de la construcción para estos valores de los datos y la posibilidad de encontrar una solución al problema si se cambian los datos. Es posible que algún alumno retome las condiciones sobre las medidas de los dos ángulos para garantizar la construcción –**problemas 4** y **5**–. Se espera concluir que, para poder construir un triángulo, la longitud del lado puede ser cualquiera, pero los dos ángulos juntos no deben superar 180º. Y que en todos estos casos se obtiene un único triángulo.

Problema 7

Dados los segmentos *a* y *b*, y el ángulo A:



construir, si es posible, un triángulo que tenga un lado igual al segmento *a*, otro lado igual segmento *b* y el ángulo que se forma entre estos dos lados sea igual al ángulo A. ¿Es posible construir dos triángulos distintos?

Comentarios

En esta actividad puede resultar difícil comparar los triángulos de dos dibujos en los cuales las posiciones de los segmentos aparecen invertidas. En este caso, habría que retomar una vez más las ideas discutidas en el **problema 1**, para comparar las construcciones de los alumnos y poner en discusión si los triángulos son iguales o no lo son. Se espera concluir que son iguales por rotaciones o simetrías. Como en las actividades anteriores, las construcciones realizadas son el punto de partida para discutir las condiciones de existencia y la unicidad de las soluciones.

Finalizadas estas siete actividades de construcción, es un buen momento para elaborar en la clase algunas conclusiones, recuperando en conjunto lo trabajado hasta aquí. El docente podría proponer un formato tabla para organizar los resultados obtenidos. A continuación, ilustramos una posible síntesis:

Dada una colección de datos para construir un triángulo, pueden aparecer las siguientes situaciones:		
Datos a partir de los cuales no se pueden construir triángulos	**Datos a partir de los cuales se puede construir un único triángulo**	**Datos a partir de los cuales se pueden construir varios triángulos distintos**
3 lados "que no cierran"	3 lados "que cierran"	2 lados
2 ángulos que suman más que 180º	Un lado y dos ángulos adyacentes que sumen menos que 180º	2 ángulos que sumen menos que 180º
3 ángulos que no suman 180º	Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos	3 ángulos que sumen 180º

Este cuadro podrá ser un instrumento eficaz para la elaboración posterior de los criterios de igualdad de triángulos.

Elaboración de criterios de igualdad de triángulos

Problema 8

Reproducir un triángulo, a partir de datos que se piden a otro grupo de alumnos (o al docente).

Comentarios

Pedir datos sobre una figura coloca a los alumnos en una posición que trasciende la interpretación perceptiva –porque no ven la figura por reproducir– y los obliga a poner en juego los conocimientos elaborados en las construcciones anteriores –porque son ellos mismos los que tienen que elegir los datos que necesitan para poder reproducirla–.

Una posible organización de la clase para desarrollar esta actividad es la siguiente: se divide la clase en una cantidad par de grupos, la mitad de ellos serán grupos A y la otra mitad grupos B; cada grupo A trabaja apareado con un grupo B formando un solo equipo. El profesor entrega un triángulo, el mismo, a todos los grupos A y otro a todos los grupos B. Cada grupo A debe reproducir el triángulo del grupo B con el cual está apareado. Para ello, debe pedir por escrito al grupo B la menor cantidad de datos que crea indispensable para realizar la construcción. El grupo B deberá contestar sobre tales datos y el grupo A intentará realizar una construcción a partir de estas respuestas. Al mismo tiempo, el grupo B pedirá datos y realizará un dibujo de acuerdo con lo informado por A. Si algún grupo no logra realizar la construcción, puede realizar un segundo pedido de datos.

En este momento se puede invitar a ambos grupos a verificar por superposición si se logró o no la construcción, y a determinar cuáles fueron las colecciones de datos que permitieron reconstruir el triángulo y cuáles no fueron de ayuda.

Una vez que los alumnos discutieron dentro de cada grupo sobre cuáles fueron las colecciones de datos que permitieron la construcción de un triángulo idéntico al del otro grupo y cuáles las que no fueron de utilidad, deberán formularlo públicamente.

Es de esperar que, por el tipo de actividades trabajadas anteriormente, las colecciones de datos contengan exclusivamente lados y ángulos. Si los alumnos hubieran pedido solamente lados, por ejemplo, el docente podrá intervenir para que surja más variedad de datos en los pedidos relanzando la actividad bajo nuevas condiciones, como:

- la limitación de la cantidad de lados o ángulos que se pueden pedir,
- dando el valor de un ángulo y la posibilidad de que los alumnos pidan otros dos datos.

A partir de todo este proceso se podrá gestar una discusión colectiva cuyo fin será la formulación de condiciones que permitan re-construir un triángulo idéntico a otro dado:

Para construir un triángulo igual a otro existente, basta conocer:

- *tres lados, o*
- *dos lados y el ángulo comprendido, o*
- *un lado y los dos ángulos adyacentes.*

En distintos momentos de la discusión puede resultar útil acudir al cuadro confeccionado anteriormente.

La fuerza de un criterio de igualdad de figuras reside en que no es necesario conocer la igualdad de todos los elementos de dos figuras –en el caso de triángulos, los tres lados, los tres ángulos, las tres alturas, las tres medianas, las tres mediatrices, las tres bisectrices, etc.– para poder asegurar la igualdad de los dos triángulos, sino que es suficiente conocer la igualdad de algunos de los elementos para garantizar que los demás también serán iguales. Y justamente porque permiten deducir la igualdad de todos (los elementos a partir de solamente algunos es que los criterios de igualdad son herramientas fundamentales a la hora de producir argumentos para validar propiedades de las figuras.

Teniendo en cuenta estas ideas, el docente puede reformular las condiciones anteriores en función de la comparación de dos triángulos:

Para que dos triángulos sean iguales, es suficiente con que tengan

- *los tres lados iguales, o*
- *dos de los lados iguales y el ángulo comprendido entre ellos también igual, o*
- *dos ángulos iguales y el lado adyacente a ambos también igual.*

Más adelante se podrá ampliar la formulación de los criterios incluyendo otros elementos de los triángulos. Por ejemplo:

Para que dos triángulos sean iguales es suficiente que sean iguales un lado, la altura correspondiente a ese lado y un ángulo adyacente al lado dado.

En síntesis, el objetivo de las actividades de construcción y reproducción a partir del pedido de datos ha sido la producción de criterios de igualdad de triángulos, de forma que éstos cobren sentido y no entren al aula por mera enunciación del docente.

La argumentación basada en las propiedades de las figuras es una forma de trabajo privilegiada en geometría que pretendemos instalar en el aula a partir de primer año. Los criterios de igualdad de triángulos se integrarán al conjunto de propiedades que sirvan como base a las argumentaciones.

Actividades de construcción de triángulos a partir de otros juegos de datos

Los **problemas 9** y **10** incorporan la altura como dato.[12] En el **problema 11** se solicita la construcción de un triángulo isósceles y en el **problema 12**, de un triángulo rectángulo.

Problema 9

Dados los segmentos *a* y *b*

construir, si es posible, un triángulo con un lado igual al segmento *a* y la altura correspondiente a dicho lado igual al segmento *b*. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir?

Comentarios

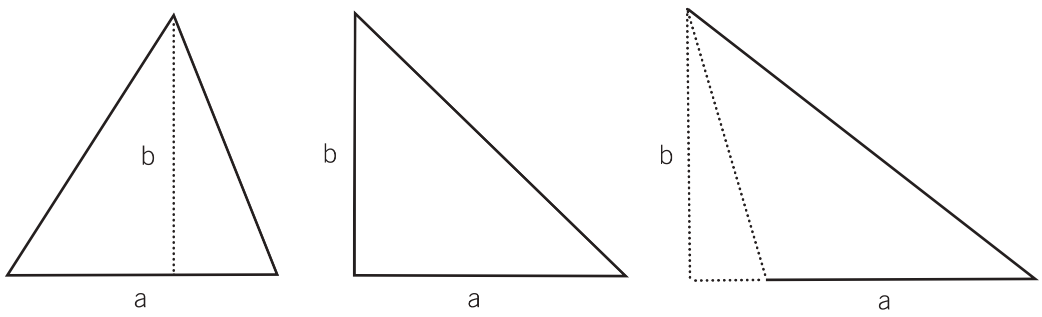
En esta actividad aparece la altura como elemento del triángulo. Es necesario que los alumnos tengan disponible ese concepto. En el primer apartado del **capítulo 3** de este documento se proponen actividades que pueden ser trabajadas para recuperar el concepto de altura de un triángulo.

[12] Estas dos actividades corresponden al Anexo del Programa de Matemática. Primer Año, Ejemplo 27, inciso h, G.C.B.A., Ministerio de Educación, D.G.P.L., Dirección de Currícula, 2002.

Suponemos que, aún recuperado este concepto, algunos alumnos pueden objetar que falta "el dato de dónde va la altura". El docente podría proponerles que intenten realizar la construcción con los datos que tienen, y que si piensan que son insuficientes, expliquen por qué y agreguen los datos que les parezcan necesarios.

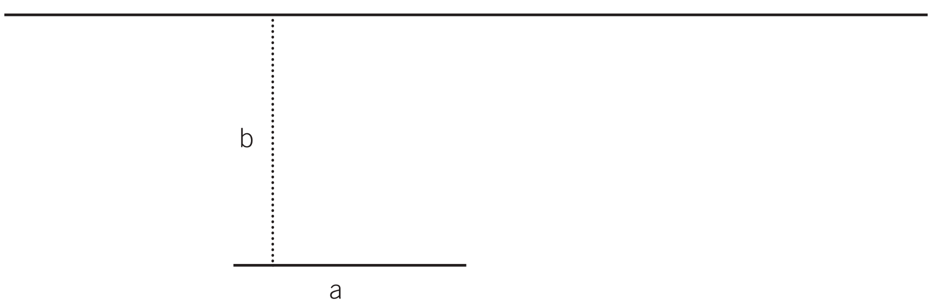
Es probable que algunos alumnos ubiquen la altura ***b*** en algún lugar del lado ***a*** y dibujen un triángulo, sin cuestionarse la posibilidad de haberla ubicado en otro lugar, proponiendo entonces una respuesta única. Sin embargo, en el conjunto de la clase se habrán obtenido triángulos diferentes. La variedad de triángulos construidos servirá como punto de apoyo para discutir la no unicidad de la construcción.

También pensamos que es probable que aparezcan solamente triángulos acutángulos. En este caso, el docente podrá preguntar explícitamente si es posible construir con estos datos algún triángulo rectángulo y alguno obtusángulo.[13] La idea es que en el pizarrón aparezcan dibujos de diferentes tipos:



Una vez discutida la cuestión de la no unicidad, resta la pregunta sobre cuántos triángulos diferentes se pueden construir. Se espera que los alumnos acepten que el pie de la altura puede estar en cualquier punto de la recta que contiene al lado *a*.

Será de mucha utilidad para la actividad siguiente que los alumnos hayan comprendido que, al tener un lado y la altura que le corresponde, queda determinada una recta –paralela al lado-dato– a la cual debe pertenecer el vértice opuesto a dicho lado, y que así se respeta la longitud de la altura. Es conveniente que esta recta aparezca a raíz de la discusión sobre la cantidad de soluciones.

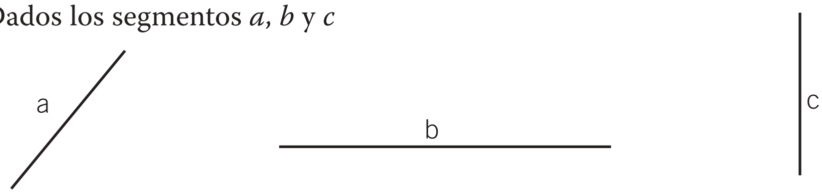


En la siguiente actividad se agrega un segundo lado, pero en condiciones tales que la construcción es imposible.

[13] El trazado de las alturas en un triángulo obtusángulo es una tarea que suele presentar dificultades para muchos alumnos. En el apartado 1 del **capítulo 3** de este documento se presenta una actividad en relación con esto y la determinación del área del triángulo.

Problema 10

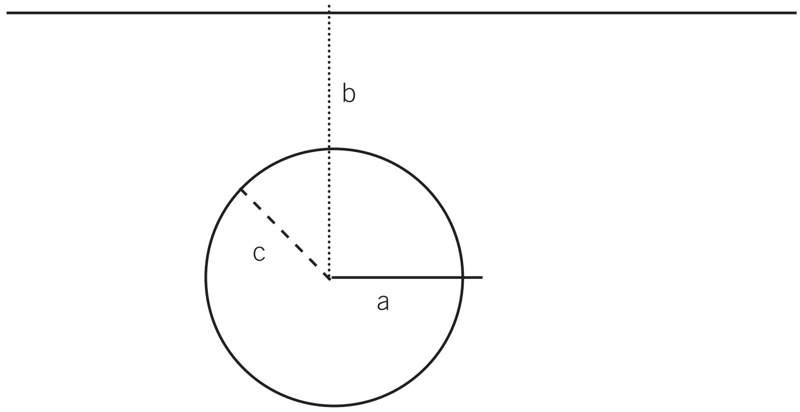
Dados los segmentos *a*, *b* y *c*



construyan, si es posible, un triángulo con un lado igual al segmento *a*, la altura correspondiente a este lado igual a *b* y otro lado igual a *c*.
¿Pueden construir dos triángulos distintos?

Comentarios

El siguiente es un dibujo posible que toma en cuenta los datos y pone en juego lo trabajado antes.



A partir del análisis de esta figura podrá determinarse que no existe un triángulo que cumpla lo pedido: la recta y la circunferencia con radio de igual longitud que el lado *c* no se cortan.

Podría suceder que algunos alumnos no trazaran la recta paralela al lado *a* que determina la altura, insistiendo en ubicarla en un punto determinado del lado dado. En este caso, el docente puede apelar a las conclusiones de la actividad anterior para volver sobre esta idea.

Aunque no tracen explícitamente la recta paralela, podría suceder que algunos alumnos utilizaran una “idea similar”, dibujando primero el lado *a*, luego el lado *c* (formando un ángulo arbitrario cualquiera con *a*), y utilizaran la escuadra, desplazándola de tal manera que su cateto menor se encontrase siempre sobre el lado *a*. Luego podrían ir variando el ángulo que forman *a* y *c*, para diferentes posiciones de la escuadra. En todos los casos, verificarán que la altura no se corta con el lado *c* y que entonces no se puede construir el triángulo.

También podría suceder que los alumnos, teniendo en cuenta el trabajo desarrollado a propósito de la actividad anterior, no fijaran la posición de la altura, pero sí la posición del segmento *c*, utilizando implícitamente un dato que no figura en el problema: la amplitud del ángulo determinado por los segmentos *a* y *c*. En este caso, arribarán a la conclusión de la no existencia del triángulo, pero sin desplegar un análisis exhaustivo de posibilidades. La puesta en común puede ser un momento adecuado para identificar los supuestos de este procedimiento y someterlos a discusión. Más que discutir si la respuesta es correcta o no, aquí se trata de analizar la pertinencia de los medios que les han permitido a los alumnos arribar a la conclusión.

La influencia de los datos sobre la posibilidad de construcción y la cantidad de soluciones puede analizarse a partir de una nueva tarea que proponga el docente después de la puesta en común.

La consigna puede ser dada eligiendo un segmento *c* de mayor longitud que *b*: *¿Cuántos triángulos se pueden construir si mantenemos las longitudes de a y b, pero cambiamos c por el siguiente segmento?*

c

O se puede proponer de manera general: *Estudiar para qué longitudes de c (sin cambiar la de a ni la de b) es posible construir un triángulo.* Y luego preguntar por la cantidad de soluciones para cada una de las longitudes de *c*.

Se espera que los alumnos puedan establecer las siguientes condiciones sobre el lado *c*:

- Si *c* es menor que la altura *b*, no se puede construir ningún triángulo.
- Si *c* es mayor que la altura *b*, se pueden construir dos triángulos.
- Si *c* es igual a la altura *b*, hay un único triángulo posible, que es rectángulo.

Problema 11

a) Construir, si es posible, un triángulo isósceles donde un lado mida 6 cm y otro, 9 cm. ¿Cuántos se pueden construir?
b) Construir, si es posible, un triángulo isósceles donde un lado mida 4 cm y otro, 9 cm. ¿Cuántos se pueden construir?
c) Dar la medida de dos lados, de forma que no se pueda construir un triángulo isósceles con ellos.

Comentarios

Para resolver la consigna **a)**, los alumnos deberán tomar la decisión de elegir cuál de las dos medidas “repetir” para el tercer lado del triángulo que se quiere construir. El espacio de discusión entre ellos será propicio para que concluyan que se pueden construir dos distintos, según la medida del lado que se considera dos veces. El docente puede señalar que, en cada uno de los dos casos, la construcción es única porque se conocen los tres lados.

Lo interesante la consigna **b)** es que *a priori* pareciera tratarse de la misma actividad de antes. Sin embargo, las nuevas medidas de los lados permitirán construir un solo triángulo. La propiedad triangular –analizada en el **problema 3** de este capítulo– será el conocimiento pertinente para poder anticipar que no es posible construir un segundo triángulo.

La consigna **c)** tiene por objeto que los alumnos puedan identificar que cualquiera sea la medida de dos lados, siempre se puede construir un triángulo isósceles con ellos. Es decir que el problema planteado no tiene solución.

Problema 12

Construir, si es posible, un triángulo rectángulo donde un lado mida 4 cm y otro, 9 cm. ¿Cuántos se pueden construir?

Comentarios

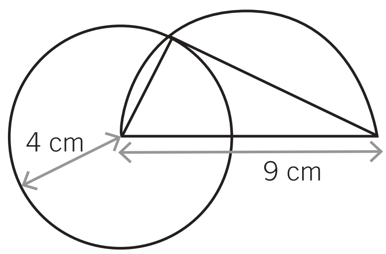
Aunque aparentemente se tienen dos datos, como en la actividad anterior, en realidad hay un tercer dato que es el ángulo recto. Como el enunciado no lo especifica, los alumnos tendrán que decidir si los datos corresponden a la hipotenusa y un cateto, o a los dos catetos. Aquí se dan tres posibilidades de elección:

- que un cateto mida 9 cm y el otro, 4 cm,
- que la hipotenusa mida 9 cm y uno de los catetos mida 4 cm,
- que un cateto mida 9 cm y la hipotenusa mida 4 cm.

En los dos primeros casos hay una única construcción posible; en el tercero, a partir de la imposibilidad de construcción, se pondrá de manifiesto que la longitud de la hipotenusa siempre debe ser mayor que la de cada uno de los catetos.

La información del ángulo recto es fundamental para realizar la construcción. En todos los casos se puede comenzar trazando dos rectas perpendiculares y trasladando las medidas de los lados –con el compás o usando la regla a modo de compás–: para el primero, los dos catetos; y para los otros dos, primero el cateto y luego la hipotenusa. En el tercer caso no habrá punto de intersección.

Si los alumnos ya conocen la propiedad de que el ángulo inscripto en una semicircunferencia es recto (desarrollada en el tercer apartado del **capítulo 1**), otro posible procedimiento es trazar una semicircunferencia de diámetro 9 cm, donde se encontrará el vértice del ángulo recto, y, con centro en uno de los extremos del diámetro, trazar una circunferencia de radio igual a 4 cm para garantizar la medida del cateto.



2. Construcciones con regla no graduada y compás

Las primeras actividades de este bloque tienen por objeto reflexionar sobre la validez de los procedimientos clásicos para la construcción de un ángulo igual a otro dado, el trazado de la mediatriz de un segmento y la bisectriz de un ángulo, con regla no graduada y compás. Los argumentos para justificarlos se apoyarán en los criterios de igualdad de triángulos construidos en el apartado anterior.

G.C.B.A.

Se incluyen también como actividades la construcción del hexágono regular y de ángulos de determinadas medidas.

Problema 13

a) Explicar por qué es válido el procedimiento utilizado para construir con regla no graduada y compás un ángulo igual a otro cualquiera dado.
b) Argumentar las razones por las cuales es válido el procedimiento por seguir para trazar con regla no graduada y compás la bisectriz de un ángulo dado.

Comentarios

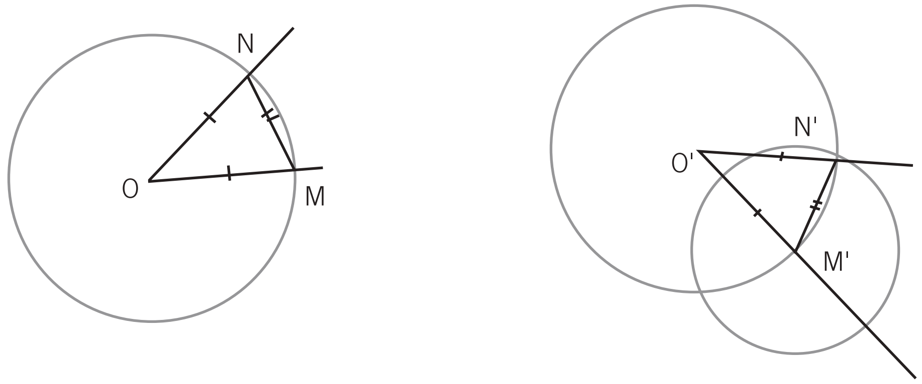
El objetivo de esta actividad es que los alumnos validen los procedimientos clásicos para trasladar un ángulo y para construir la bisectriz de un ángulo, apoyándose en los criterios de igualdad de triángulos trabajados en el primer apartado de este capítulo.

En ambos casos será necesario apelar al criterio que establece que si dos triángulos tienen los tres lados respectivamente iguales, son iguales.

En caso de que los alumnos no conozcan estos procedimientos, será necesario modificar la presentación de la actividad y comenzar mostrando esas construcciones para luego solicitar una explicación de por qué funcionan.

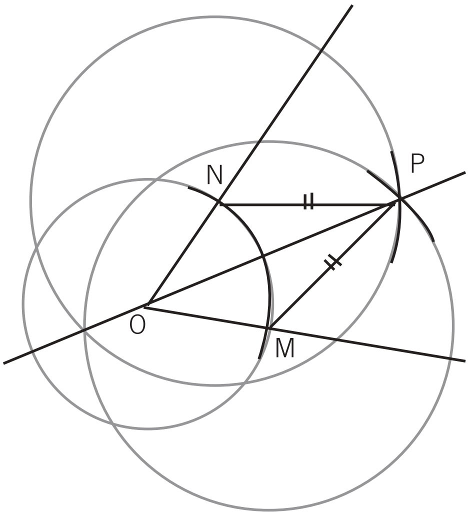
En estas construcciones se suelen dibujar “arquitos” que muchas veces ocultan que se trata de una circunferencia de la cual se ha dibujado solamente el sector donde se espera encontrar una cierta solución. Es una cuestión para discutir en la clase.

Para la construcción de un ángulo igual a otro dado, puede ser necesario que el docente complete un triángulo, tanto en el ángulo dato –dibujando el segmento MN–, como en el construido, dibujando M´N´. Un dibujo posible sería:



Utilizando uno de los criterios de igualdad de triángulos, los alumnos deberían poder concluir que los triángulos MON y M’O’N’ son iguales, y de este modo validar la eficacia del procedimiento de construcción.

Análogamente, el procedimiento usual para trazar la bisectriz de un ángulo con vértice en O debería ser completado por el docente para que aparezcan en escena dos triángulos. Se presenta un dibujo posible en el cual se han marcado los lados MP y NP.



Los alumnos deberían estar en condiciones de justificar –apoyándose en un criterio de igualdad de triángulos– que los triángulos PON y POM son iguales, y en consecuencia PO divide a MON en dos ángulos iguales.

Problema 14

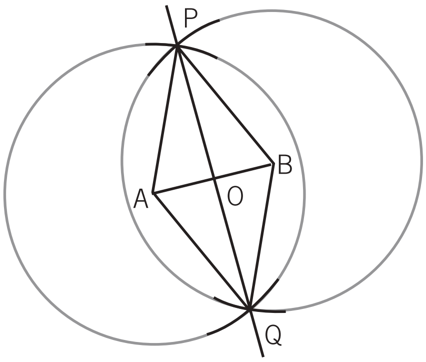
Construir con regla no graduada y compás una recta perpendicular a un segmento dado.

Comentarios

Una vez más se intenta reflexionar sobre técnicas y procedimientos que los alumnos conocen pero que muy probablemente no sepan por qué son válidos.

Es probable que varios alumnos recuerden el procedimiento de trazado de la mediatriz de un segmento AB y lo realicen ahora, convencidos de que obtendrán una perpendicular. La pregunta por realizar en ese caso es: ¿cómo podemos estar seguros de que, al hacer esos arquitos y unir los dos puntos, se obtiene una recta perpendicular al segmento inicial?

Presentamos un dibujo que se ha completado con el trazado de los segmentos PA, PB, QA y QB, necesarios para producir una argumentación:



Para elaborar la argumentación puede ser necesario que el docente proponga comparar primero los triángulos APQ y BPQ y luego los triángulos AOP y BOP.

En cada etapa es necesario apelar a un criterio de igualdad de triángulos diferente. Como los triángulos AOP y BOP resultan iguales, entonces los dos ángulos con vértice en O son iguales. Como juntos suman 180°, cada uno debe ser recto.

Como consecuencia de esta actividad, y apelando nuevamente a la igualdad de los triángulos AOP y BOP, se puede establecer que O es punto medio del segmento AB. Vale decir que la recta obtenida no solamente resulta perpendicular sino que a la vez divide al segmento AB en partes iguales.

Para muchos alumnos puede resultar sorprendente que este hecho tenga realmente una explicación, ya que en general el procedimiento de trazado de la mediatriz es aprendido sin ninguna fundamentación.

Como continuación de esta actividad, puede plantearse el problema de trazar una recta perpendicular a otra dada, por un punto dado exterior o perteneciente a la recta.

Problema 15

Construir, con regla y compás, ángulos de: 15º, 30º, 45º, 60º y 90º.

Comentarios

Se trata fundamentalmente de “partir” ángulos, trazando bisectrices, a partir del ángulo recto –obtenido a través del trazado de una perpendicular– y del ángulo de 60º –obtenido como uno de los ángulos de un triángulo equilátero cualquiera–.

Como parte de esta actividad se puede proponer a los alumnos que fundamenten el procedimiento de construcción de un triángulo equilátero, probablemente conocido por ellos.

Problema 16

Justificar el procedimiento para la construcción de un hexágono regular.

Comentarios

Es probable que los alumnos conozcan que trasportando sobre una circunferencia la longitud del radio en forma consecutiva se obtiene como resultado un hexágono regular de lado igual a la longitud del radio.

Sin embargo, cuando aplican este procedimiento muchas veces no logran lo pedido por una cuestión de precisión. Este hecho puede dar pie a la propuesta de buscar argumentos que validen que siempre la construcción realizada "cierra". Y es efectivamente un hexágono regular. En este sentido, esta actividad no es específicamente de construcción, sino que se ocupa de la validación de procedimiento conocido.

Los alumnos podrán hallar varias maneras de justificar la validez del procedimiento, dependiendo de las propiedades que tomen en cuenta. Una posible argumentación estará basada en la consideración de los triángulos que quedan determinados por los distintos radios, que son todos equiláteros y también iguales, cuestión que puede probarse por comparación de triángulos. Como estos 6 ángulos interiores son todos de 60^o, al hacer el último "arquito" necesariamente se debe haber completado toda la vuelta en la circunferencia.

3. Construcciones "imposibles"

Las actividades de este apartado proponen una colección de construcciones que "aparentemente" se pueden realizar, pero que en realidad no son posibles. La intención es que los alumnos, luego de enfrentarse empíricamente con la imposibilidad de la construcción solicitada, traten de buscar argumentos para validar que efectivamente no hay un objeto que cumpla con todo lo pedido.

Este tipo de actividades no suelen ser habituales en la clase de matemática; requieren aceptar la "no solución" como respuesta a una actividad. Como ya dijimos, es común que los alumnos piensen que lo que no se puede realizar tiene que ver con algún error cometido por ellos en el desarrollo de la tarea, pues si el profesor lo pide, tiene que poder efectuarse. Justamente, para distinguir entre "no hay solución" y "no me salió" son necesarios argumentos que se apoyen en propiedades.

Las actividades aquí propuestas involucran diferentes conceptos y nociones, y no están pensadas para ser utilizadas en un orden consecutivo: si los alumnos saben de antemano que es un problema de los que "no hay solución", entonces el "no me salió" ya no es una opción. En el análisis de los **problemas 3** y **9** de este capítulo y del **problema 9** del **capítulo 1**, todas construcciones imposibles, hemos comenzado a desplegar estas reflexiones.

Problema 17

Construir un triángulo rectángulo cuyos lados midan 4, 5 y 8 cm.

Comentarios

Es posible que los alumnos construyan un triángulo con las medidas dadas para los lados, sin reparar en el hecho de que debe ser rectángulo. Otra posibilidad es que los alumnos partan de la condición de rectángulo y, al construirlo, constaten que no cumple con las medidas pedidas. En ambos casos se pone de manifiesto una contradicción: con las medidas dadas se puede construir un triángulo, pero en un caso no cumple con los datos del enunciado, y en el otro resulta obtusángulo.

Es importante que el docente indague por qué sucede esto con el fin de que los alumnos concluyan que debe existir algún tipo de relación "especial" entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, que va más allá de la desigualdad triangular.

Es posible que los alumnos, basados en un proceso exploratorio, lleguen a inferir que haciendo ciertos ajustes en las medidas de los lados podrían lograr armar un triángulo rectángulo. Aunque luego de varios intentos será evidente que se trata de un proceso cuyas limitaciones no permiten determinar con precisión la relación entre los lados para que el triángulo dé rectángulo.

Esta actividad se puede insertar en una secuencia para trabajar el teorema de Pitágoras, pues pone de manifiesto la necesidad de una relación entre los lados de un triángulo rectángulo. Parte de esta discusión, que retoma las ideas trabajadas con los criterios de igualdad de triángulos –que siempre consideran tres datos–, es que aquí se tienen en realidad cuatro datos: los tres lados y el ángulo recto, y que para que la construcción sea posible, éstos deben ser compatibles.

Problema 18

Construir un triángulo de forma tal que las bisectrices de dos de sus ángulos se corten en un ángulo de 90º.

Comentarios

Esta actividad busca que los alumnos analicen que las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo nunca se cortan formando ángulos rectos.

Una posible estrategia que pueden emplear los alumnos es elegir medidas para el triángulo, con la intuición de que de este modo pueden cumplir con lo pedido, y posteriormente trazar las bisectrices para luego analizar, midiendo sobre el dibujo, si la condición se cumplió o no. Es probable que en un primer momento conjeturen que deben ajustar las longitudes de los lados –haciendo más grande la longitud del lado adyacente a ambos ángulos– para que el ángulo que se forma sea mayor, hasta lograr que sea un recto. Tras un tiempo de exploración seguramente concluirán que algo "no funciona".

Puede ser interesante que el docente proponga a los alumnos la búsqueda de argumentos que puedan justificar la no construcción del triángulo, independientemente de los datos que hayan elegido. Algunos alumnos se pueden apoyar en diferentes dibujos que "muestran" que no se puede realizar la construcción.

Para que los alumnos logren elaborar otro tipo de justificaciones, usando por ejemplo comparaciones de triángulos, el docente puede proponer que analicen los valores de los ángulos a partir de una figura de análisis.

Se espera que los alumnos puedan apoyarse en la propiedad de la suma de los ángulos de un triangulo para producir argumentaciones del estilo de: *Si el triángulo cumpliera lo pedido, la mitad del ángulo A sumado a la mitad del ángulo B resultaría igual a un ángulo recto. Y entonces A + B = 180°. Pero eso no es posible para dos ángulos de un triangulo.*

Problema 19

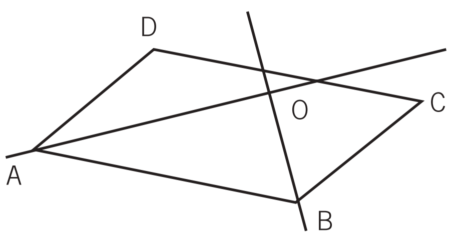
Construir un paralelogramo de forma tal que las bisectrices de dos ángulos adyacentes se corten en un ángulo de 100º.

Comentarios

Esta actividad tiene por objeto analizar la propiedad que cumplen las bisectrices de los ángulos adyacentes de un paralelogramo de cortarse formando un ángulo recto. Podrá proponerse después de haber trabajado que los ángulos adyacentes de un paralelogramo suman 180° y que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.

Aquí, como en la actividad anterior de las bisectrices de los ángulos del triángulo, los alumnos podrían intentar realizar la construcción efectiva con ciertas medidas para los lados del paralelogramo que ellos consideren de antemano que podrían responder a lo pedido. Si eligen dibujar un rectángulo, podrán concluir fácilmente que el ángulo entre las bisectrices es recto.

La verificación empírica de la imposibilidad de la construcción, a esta altura del trabajo geométrico, podría conducirlos a la búsqueda de argumentos donde se pongan en juego propiedades para explicar por qué no es posible realizar la construcción pedida.



Se espera que los alumnos puedan llegar a producir argumentaciones tales como:

Los ángulos DAB y ABC suman 180° siempre.

Sus "mitades" OAB y ABO suman 90°. Pero entonces AOB es recto siempre.

Otra posible estrategia de validación es suponer que las bisectrices forman un ángulo de 100° y llegar a algún tipo de contradicción.

Para esta u otras de las actividades propuestas en este bloque, la gestión de la actividad podría incluir solicitar a los alumnos que redacten –solos o en parejas– una explicación de su repuesta. El pasaje de lo oral a lo escrito en las argumentaciones conlleva la exigencia de una mayor precisión al mismo tiempo que representa un nivel mayor de dificultad para los estudiantes. Se trata entonces de un proceso en el cual la claridad y la pertinencia de las explicaciones se irán ajustando a medida que este tipo de actividades se vaya haciendo más frecuente en el aula.

Algunas de las argumentaciones producidas pueden ser propuestas a la totalidad de la clase para su análisis, colocando de este modo a los estudiantes en la posición de comprender una explicación producida por otro, posición cognitivamente diferente de aquella de la producción de una argumentación. De este modo, la exigencia de una mayor precisión o la necesidad de transformar posibles ambigüedades de un texto será producto de una discusión colectiva y no quedará en manos exclusivas del docente, colaborando así a la autonomía de los estudiantes en relación con su producción en matemática.

En relación con la actividad de “leer y comprender la argumentación dada por otro”, se podría llegar a incluir alguna demostración de un texto, introduciendo a los alumnos en un tipo de actividad típicamente matemática como es la comprensión de un argumento ya producido en relación con la validación de una propiedad.

Capítulo 3
Una técnica: la comparación de áreas

La propuesta de este capítulo es trabajar la noción de área como magnitud, comparando, sumando y restando áreas en forma independiente de las fórmulas, sin necesidad de poner unidades de medida ni de convertir las superficies en números o cantidades. En este sentido, se trata de un trabajo propio de la geometría.

Si bien la comparación de áreas no figura explícitamente en los programas de primero y segundo año –aparece sólo en relación con el teorema de Thales (ver ejemplos 26 y 27 del programa de segundo año)–, puede resultar sumamente fértil para tratar algunas cuestiones centrales de estos programas, como son el trabajo deductivo y el establecimiento de relaciones entre lo algebraico y lo geométrico, además de ser un entorno en el cual la noción de alturas de triángulos y cuadriláteros se hace necesaria.

Muchos textos y docentes apelan a la técnica de comparación de áreas como recurso para dar interpretaciones de la propiedad distributiva (del producto con respecto a la suma o la resta), del cuadrado de un binomio y del teorema de Pitágoras en términos de áreas equivalentes. Esta relación que se establece entre la multiplicación de dos números con el área de un rectángulo también resulta útil para dar una interpretación al producto de fracciones (ver, por ejemplo, el **capítulo 4** del texto *Matemática. Los números racionales.* Aportes para la enseñanza. Nivel Medio, G.C.B.A., Ministerio de Educación, D.G.P.L., dirección de Currícula, 2006) A partir del trabajo con esta técnica es posible dar un nuevo sentido a fórmulas ya conocidas para el cálculo de áreas de figuras. Trabajaremos en este capítulo cómo se pueden reencontrar las fórmulas para calcular el área de triángulos, rombos y paralelogramos, considerando conocida la fórmula para calcular el área del rectángulo. Y, en particular, abordaremos la cuestión de por qué en algunas fórmulas no siempre "aparecen" los lados, sino otros elementos como diagonales y alturas. Uno de los ingredientes principales será una propiedad sencilla: *la diagonal divide a un rectángulo en dos triángulos iguales.*

A modo de aplicación del tipo de trabajo que se está desplegando se presenta como actividad para los alumnos una prueba del teorema de Pitágoras que no suele estar presente en los libros de texto.

Otra cuestión que será analizada en este capítulo es la relación entre la variación del área y la variación de la longitud de los lados u otros elementos de las figuras. El estudio de esta relación pondrá la comparación de áreas al servicio de la comparación de segmentos. La demostración del teorema de Thales que se presenta en los programas –y que aquí reproducimos– es un ejemplo de este trabajo.

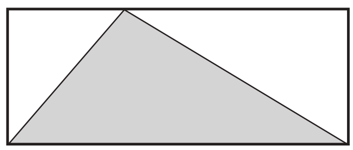
1. Comparación de las áreas del triángulo y el rectángulo. La noción de altura de un triángulo

En este apartado se sentarán las bases de la técnica de comparación de áreas. En los **problemas 1** y **3** se pone en relación la fórmula para calcular el área del triángulo con la del rectángulo. En particular, en el **problema 3** será necesario identificar las tres alturas de un triángulo para encontrar tres rectángulos de área doble que la del triángulo.

A partir de estas tres actividades será posible abordar la validación de la siguiente afirmación: triángulos de igual base e igual altura tienen igual área.

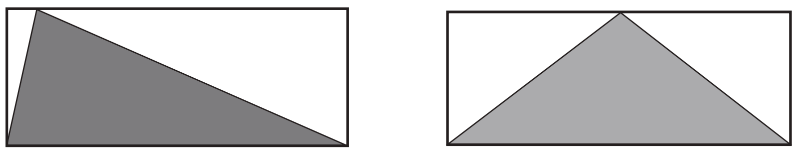
Problema 1

a) Sin medir, comparar el área gris con el área blanca del rectángulo.

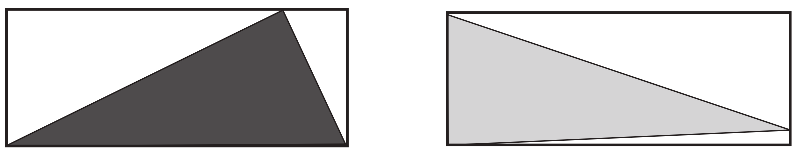


b) Se presentan pares de rectángulos iguales con una región sombreada en cada uno. En cada caso hay que comparar las áreas de los dos triángulos sombreados.

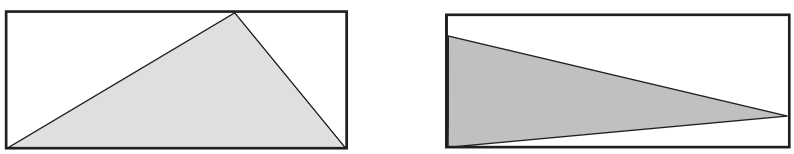
i)



ii)



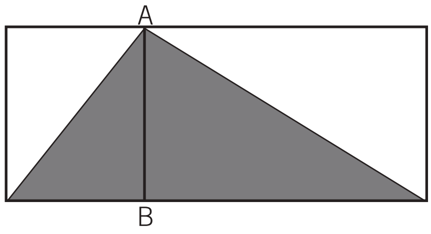
iii)



Comentarios

Para resolver la actividad es necesario poner en juego que el área del triángulo es la mitad de la del rectángulo. Esto puede verse como una consecuencia del hecho de que una diagonal de un rectángulo lo divide en dos triángulos iguales, la propiedad es un conocimiento que los alumnos suelen tener disponible.

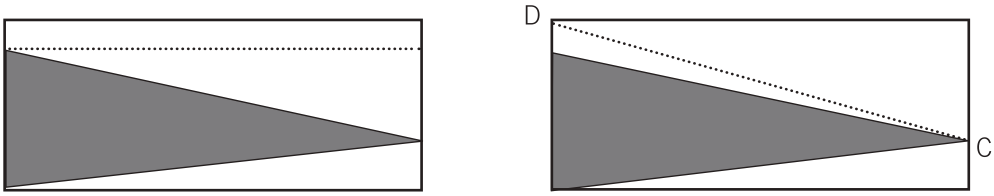
Por ejemplo, para la consigna **a)** se puede dividir al rectángulo con un segmento AB paralelo a los lados por uno de los vértices del triángulo, de modo que el rectángulo original queda dividido en dos rectángulos, y el área del triángulo sombreado se puede pensar como la suma de las “mitades” de cada uno de esos rectángulos, para concluir que el área sombreada es igual al área blanca:



Como el segmento AB no aparece en el enunciado de la actividad, puede ser necesaria una intervención docente que proponga su consideración.

Para resolver la consigna **b)**, los alumnos tendrán que reinterpretar el resultado de a) en términos de que el área del triángulo sombreado es la mitad del área del rectángulo. Para los cuatro triángulos que aparecen en i) y ii), esta apreciación será suficiente para concluir que todos los triángulos tienen la misma área.

Para iii) habrá que observar que el triángulo de la derecha es “más chico” porque es la “mitad” de un rectángulo más chico, o también porque si trazamos el segmento CD queda determinado un triángulo que lo contiene y cuya área es la mitad de la del rectángulo:



Hasta aquí hemos analizado un trabajo posible, que no requiere el conocimiento de las fórmulas para el cálculo de áreas. Sin embargo, al ser estas fórmulas muy conocidas por los chicos, es posible que algunos alumnos comparen las longitudes de las bases y las alturas de los dos triángulos. En el caso i) es fácil ver que son las mismas. En el caso ii) encontrarían que la altura y la base están “cambiadas” y, apoyándose en la fórmula, pueden llegar a afirmar que “el área da igual porque el orden de los factores no altera el producto”. Para iii), el apoyo en las fórmulas puede resultar más complicado que la comparación de las áreas.

Es probable que algunos alumnos midan sobre el dibujo, y den valores numéricos a base y altura. Será necesario reflexionar con ellos que –en los casos i) y ii)– se trata de segmentos de igual longitud, independientemente del número que hayan obtenido al medir.

Usar la fórmula y comparar mitades de rectángulos son dos maneras distintas de responder a la pregunta de la actividad. Poner en relación ambas estrategias en el espacio colectivo de la clase permitiría al docente analizar con los alumnos que la fórmula para calcular el área del triángulo refleja justamente que es la mitad del área de un rectángulo de igual base e igual altura:

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \cdot \text{Área del rectángulo} = \frac{1}{2} \cdot (b\ .\ h) = \frac{b\ .\ h}{2}$$

Algunos alumnos pueden sorprenderse, pues aún sabiendo calcular el área de un triángulo mediante la fórmula $\frac{b\ .\ h}{2}$, nunca antes habían relacionado que “dividir b · h por 2” fuera lo mismo que “la mitad de b · h”.

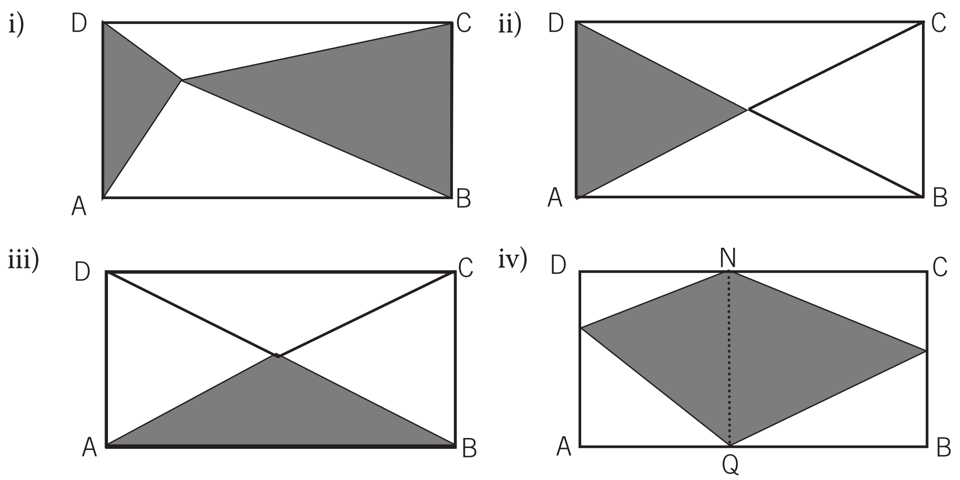
Es decir, a partir de esta actividad se podrá concluir que el área de un triángulo es la mitad de la de un rectángulo de igual base y altura que el triángulo –al menos para triángulos que están “metidos” en el rectángulo, como los que aparecieron aquí–. En el **problema 3** se trabajará que para cualquier triángulo es posible encontrar un rectángulo de igual base e igual altura, y por lo tanto de área doble. Sería interesante reflexionar en la clase acerca de cómo la fórmula involucra medidas y números, mientras que el otro tipo de análisis no necesita unidades de medida ni convertir la superficie en número o en cantidad.

A partir de aquí se puede invitar a los alumnos a que jueguen a no usar la fórmula y establecer un ida y vuelta entre “lo que dice la fórmula” y “lo que dicen las figuras”.

Problema 2

En esta actividad se avanza sobre la apropiación de la técnica de comparar áreas. Las figuras de referencia siguen siendo el rectángulo y el triángulo, pero el área de las figuras sombreadas no siempre es la mitad del área del rectángulo. En cada caso, habrá que decidir qué líneas auxiliares conviene trazar para poder comparar las áreas.

a) Se presentan cuatro rectángulos ABCD. Comparar en cada caso el área del rectángulo con el área de la figura sombreada.



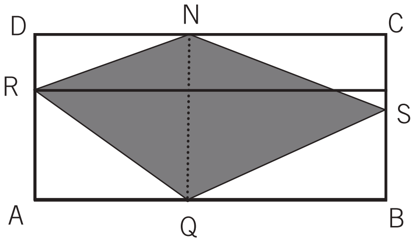
b) Determinar de cuatro maneras distintas una región que tenga como área la cuarta parte del rectángulo.

Comentarios

En i) los alumnos podrían dividir el primer rectángulo en dos rectángulos trazando un segmento vertical o uno horizontal, para luego apoyarse en las estrategias desplegadas en el **problema 1**. También podrían trazar un segmento vertical y otro horizontal por el vértice que comparten los dos triángulos sombreados, para lograr cuatro rectángulos y usar el razonamiento anterior en cada uno de ellos.

Estrategias análogas pueden usarse para las figuras ii) y iii), pero en estos casos para concluir que las áreas de los dos triángulos representan un cuarto del área del rectángulo. En particular, el docente podrá resaltar el hecho de que los dos triángulos son distintos, pero que sin embargo tienen la misma área. En este caso, porque la base del triángulo en iii) es el doble de la altura del triángulo en ii), y su altura es la mitad. Esta cuestión será retomada en el quinto apartado, que tiene como objetivo analizar cómo varía el área de una figura cuando sus lados y/o alturas se duplican, triplican, etc.

La figura sombreada en iv) puede resultar más compleja para algunos alumnos, si intentan considerar triángulos con base horizontal: ni la recta horizontal que pasa por R, ni la que pasa por S permiten dividir el área sombreada en dos triángulos.



Una intervención docente posible es proponer un trabajo con los dos triángulos NRQ y NSQ, ambos con base "vertical".

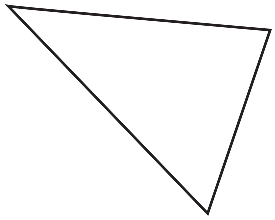
En el **problema 1** se concluyó que el área de un triángulo es igual a la mitad del área de un rectángulo de igual base y altura, pero se trabajó con triángulos ya dados dentro de rectángulos. Nos ocuparemos ahora de cualquier triángulo. De alguna manera, la tarea por realizar es la inversa a la del **problema 1**: ahora el dato es el triángulo y hay que encontrar rectángulos que tengan el doble de área que él.

En particular, la actividad demandará el trazado de las tres alturas de un triángulo. Primero se trabaja con un triángulo acutángulo, que permite partir del **problema 1** para argumentar, y en un segundo momento se propone un triángulo obtusángulo.

La consigna inicial para los alumnos podría ser la siguiente:

Problema 3

a) **Dibujar un rectángulo que tenga el doble del área del triángulo siguiente:**



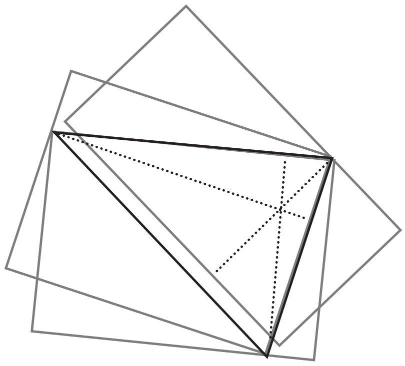
b) **Dibujar otro rectángulo que también tenga el doble del área del mismo triángulo.**

Comentarios

Se trata de dibujar rectángulos que compartan un lado con el triángulo, de manera análoga al **problema 1**. Esto no se indica en el enunciado y posiblemente necesite de una explicitación del docente y una "negociación" con los alumnos que permita precisar lo que se busca. Incluir estas aclaraciones en el enunciado escrito podría empañar la comprensión de la consigna más que contribuir a ella.

G.C.B.A.

La intención es llegar a construir tres rectángulos distintos –cuyas áreas sean iguales al doble del área del triángulo–, cada uno de los cuales comparta un lado con un lado diferente del triángulo:



Después de las actividades anteriores, los alumnos seguramente estén en condiciones de dibujar alguno de los tres rectángulos solicitados. Para favorecer una variedad de respuestas se dibujó al triángulo de modo que ninguno de sus lados sea horizontal ni vertical. Finalmente, cada alumno habrá dibujado dos rectángulos distintos y se espera que en el espacio colectivo aparezcan los tres rectángulos. Si no fuera el caso, el docente siempre puede introducir "el tercer" rectángulo.

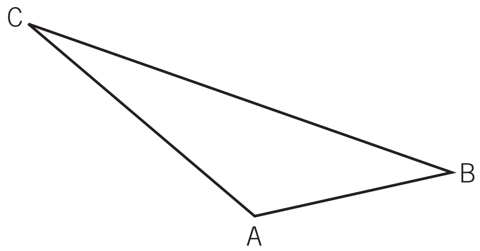
Se obtienen así tres rectángulos distintos, con lados distintos, pero de igual área (por eso es importante elegir un triángulo escaleno). Algunos alumnos pueden recurrir a la medición y constatar que ni las bases ni las alturas de los tres rectángulos miden igual pero que las tres cuentas de "base por altura" dan valores muy próximos. Considerando los errores de medición llegarían –por medio de la cuenta– a concluir que las tres áreas son iguales. Es una oportunidad para reflexionar en el aula que ese resultado se podría haber anticipado, ya que cada rectángulo tiene el doble del área del triángulo.

Otra reflexión interesante para llevar a cabo con los alumnos está relacionada con la noción de "base de un triángulo": como la posición de la figura en la hoja no es una propiedad de la misma, cualquier lado de un triángulo puede ser considerado como base.

Recién después de haber trabajado sobre las consignas **a)** y **b)** del **problema 3**, y discutido en la clase sobre ambas, se propone encarar el estudio de otros triángulos.

Problema 4

Dibujar tres rectángulos que compartan un lado con el siguiente triángulo y tengan el doble de su área:

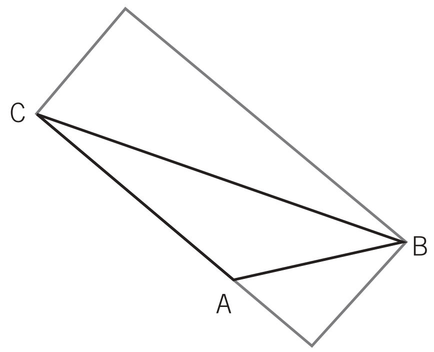


Comentarios

En el enunciado se han incluido más precisiones a la consigna, teniendo en cuenta el trabajo realizado en el **problema 3**. De todas formas, quizás sea necesario aclarar que cada rectángulo debe compartir un lado diferente con el triángulo.

La construcción del rectángulo que comparte el lado BC con el triángulo no debería traer mayores dificultades a los alumnos. Pero los otros dos rectángulos no serán una tarea sencilla porque el triángulo ahora no queda "dentro" de los rectángulos.

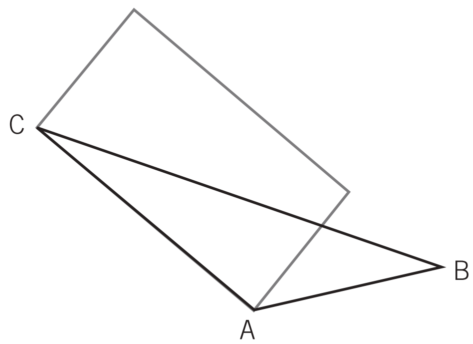
Por ejemplo, al considerar como lado compartido el AC, podría ser que algunos alumnos declararan la imposibilidad de lograr un rectángulo como el que se pide, considerando de manera implícita que éste debe contener totalmente al triángulo, tal como ocurrió hasta ahora. Otros alumnos, intentando controlar esto último, podrían dibujar un rectángulo como el de la figura, sin tener en cuenta que ahora el área es mayor que el doble del triángulo:



En estos casos puede ser necesario que el docente informe que el rectángulo buscado no tiene por qué contener al triángulo, o aclarar que el lado compartido del rectángulo debe tener la misma longitud que el del triángulo.

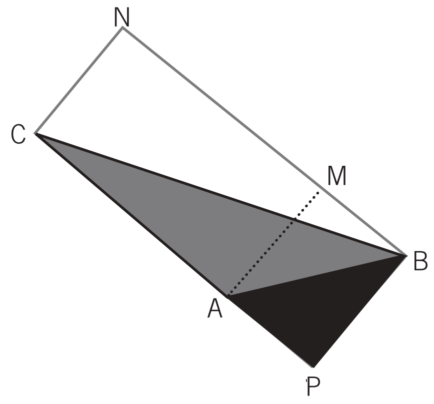
Otra dificultad podría estar asociada al trazado de la altura correspondiente al lado AC. En ese caso será necesario dedicarle un espacio en la clase a la noción de altura de un triángulo, y a su trazado para triángulos obtusángulos. Debería quedar claro que efectivamente un triángulo tiene tres alturas, una correspondiente a cada lado.

Una vez que hayan logrado trazar la altura correspondiente al lado AC es probable que respondan a lo pedido con el siguiente dibujo:



Queda por discutir por qué este rectángulo tiene el doble del área que el triángulo. Algunos chicos se apoyarán en la fórmula, que consideran legítimamente válida para cualquier triángulo. El docente, aceptando esto, puede igualmente abrir el juego a proponer una validación "sin fórmula".

Según el éxito que tengan los alumnos en esta tarea, el docente podrá optar por presentar él mismo una validación, que a esta altura los alumnos ya estarán en condiciones de entender. El "error" que pudieran haber cometido al encontrar un rectángulo que contiene totalmente al triángulo es un buen punto de partida:



Para empezar, está claro que el rectángulo PBNC tiene más del doble del área del triángulo ABC, porque es el doble de un triángulo más grande, el PBC. Hay entonces tres triángulos involucrados, de forma que:

Área de PBC = área de ABC + área de PBA

Entonces, dos veces el triángulo ABC junto con dos veces el triángulo PBA equivalen a dos veces el triángulo PBC:

2 x área de PBC = 2 x área de ABC + 2 x área de PBA

Si consideramos los dos triángulos rectángulos PBC y PBA, podemos utilizar los resultados del **problema 1** y obtener que:

Área del rectángulo PBNC = 2 x área de ABC + área del rectángulo PBMA

Pero si al rectángulo PBNC le sacamos el rectángulo PBMA, la figura que queda es el rectángulo AMNC, y entonces, usando la igualdad anterior, resulta que el rectángulo AMNC tiene el doble del área del triángulo ABC.

De manera análoga se puede argumentar para la construcción del rectángulo con un lado igual a AB.

El trabajo realizado en los **problemas 3** y **4** en torno a los rectángulos “asociados” a un triángulo se puede ampliar proponiendo las siguientes preguntas adicionales:

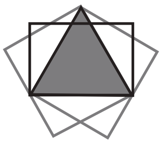
a) ¿Cómo tiene que ser un triángulo para que los tres rectángulos sean distintos?
b) ¿Para cuáles triángulos los tres rectángulos son iguales?
c) ¿En qué casos hay dos rectángulos iguales y uno distinto?

Resultará rico discutir qué pasa con las alturas de los triángulos en cada uno de los casos a), b) y c).[14]

Para que los tres rectángulos sean distintos es necesario que el triángulo sea por lo menos escaleno, porque si dos lados son iguales, los rectángulos que comparten esos lados con el triángulo

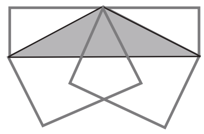
14 Un trabajo en un entorno informático, con un programa de geometría dinámica, puede ayudar en la exploración de las condiciones.

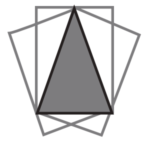
también serán iguales, y también lo serán las alturas correspondientes. Sin embargo, hay triángulos escalenos que “producen” solamente dos rectángulos distintos.

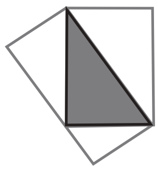


En particular, en un triángulo equilátero los tres rectángulos coincidirán, y las tres alturas del triángulo serán iguales en longitud.

Y en un triángulo isósceles que no sea equilátero coincidirán dos de los rectángulos y habrá dos alturas iguales.

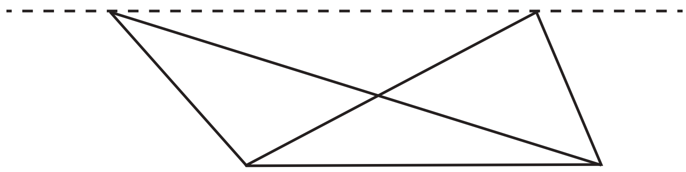




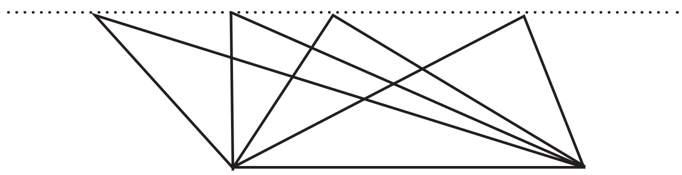


Por otro lado, si el triángulo tiene un ángulo recto, dos de los rectángulos coinciden –a pesar de que puede tratarse de un triángulo escaleno– porque la altura correspondiente a un cateto es el otro cateto.

Como cierre de este apartado se puede proponer a los alumnos comparar las áreas de dos triángulos como los de la figura siguiente, donde se sabe que la recta punteada es paralela al lado común de los dos triángulos:



Como los dos triángulos comparten un lado, sería de esperar que los alumnos pudieran construir un rectángulo de igual base y altura que ambos triángulos. Entonces se puede concluir que los dos triángulos tienen la misma área apelando a que los dos son la mitad de un mismo rectángulo. Luego, el docente podrá escribir esta conclusión en general y acompañarla de una figura con más triángulos:



Si dos triángulos tienen la misma base y la misma altura, entonces tienen la misma área

Algunos alumnos pueden decir que eso ya lo sabían, porque sale de la fórmula. Si bien esto es cierto y el docente puede reafirmarlo, es importante que al mismo tiempo resalte que ahora llegaron por un camino distinto que no necesita la fórmula, y que disponer de caminos alternativos les permite elegir el más conveniente a la hora de resolver un problema.

2. Más actividades para afianzar la técnica de comparación de áreas. El rectángulo de Euclides

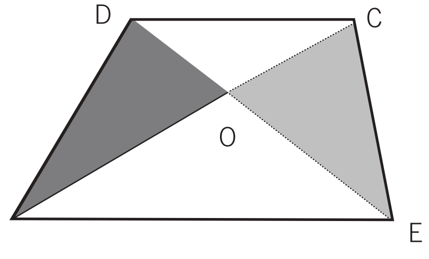
Este apartado presenta actividades que permiten afianzar y profundizar la técnica de comparación de áreas presentada en el primer apartado.

En los **problemas 5** y **6**, para comparar las áreas de dos figuras se hace necesario restar o sumar un área común; el **problema 6**, en particular, será uno de los pilares de la demostración del teorema de Thales que se presenta en el cuarto apartado.

En el **problema 7**, las áreas por comparar varían según dónde se ubique un punto. El **problema 8**, además de proponer nuevas situaciones de comparación de áreas, introduce la propiedad del rectángulo de Euclides, que será de utilidad para hacer otras comparaciones, como en los **problemas 9**, **11** y **13**. Los **problemas 11**, **12** y **13** se presentan para profundizar y perfeccionar las técnicas y los conocimientos producidos. La propuesta es que no se presenten en la clase inmediatamente después de los anteriores; ya que retomarlos en otro momento permitiría un segundo encuentro con esta problemática, ampliando así el sentido que los alumnos hayan podido elaborar.

Problema 5

Sabiendo que AB // CD, comparar las áreas de los triángulos AOD y BOC.



Comentarios

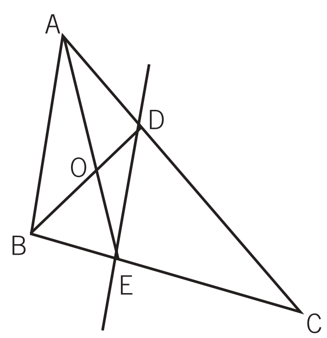
Para poder aprovechar los conocimientos elaborados en el cierre del **problema 3**, es necesario considerar algo más que los dos triángulos por comparar.

Se podrían considerar los triángulos ABC y ABD que tienen igual área –por tener igual base e igual altura–, y quitar a ambos un área común (la del triángulo AOB), para concluir que el triángulo AOD tiene igual área que el BOC.

También se pueden considerar los triángulos DCA y DCB, y quitarles el área del DOC.

Problema 6

ABC es un triángulo, y la recta que pasa por los puntos D y E es paralela al lado AB. Comparar las áreas de los triángulos AEC y BDC.



G.C.B.A.

Comentarios

Esta actividad será uno de los pilares de la demostración del teorema de Thales que desarrollamos en el cuarto apartado de este capítulo. La incluimos aquí porque pone en juego las ideas del **problema 5**.

Una estrategia posible es considerar el área del triángulo en común EDC. Los triángulos AED y BDE tienen la misma base ED, y la altura correspondiente también es igual porque el segmento DE es paralelo a AB. Entonces, tienen la misma área. Si a cada uno de los dos les agregamos el triángulo EDC obtenemos que:

área de AEC = área de BDC

Otra estrategia posible: los triángulos ABD y ABE tienen la misma base AB, y la altura correspondiente también es igual porque el segmento DE es paralelo a AB. Entonces, tienen la misma área. Si al triángulo ABC le quitamos el ABD, queda el triángulo BDC, y si le quitamos el ABE, queda el triángulo AEC. Luego, las áreas de AEC y BDC son iguales.

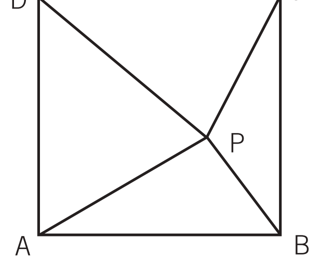
Una tercera estrategia podría ser considerar el cuadrilátero común ODCE y, como los triángulos AOD y BOE resultan ser de igual área según lo establecido en el **problema 5**, se obtiene la igualdad de las áreas de los dos triángulos AEC y BDC.

Los problemas que hemos discutido hasta aquí dan lugar al despliegue de diferentes estrategias de solución. La discusión –gestionada por el docente en la clase– en torno a las distintas producciones puede generar un espacio fértil de trabajo matemático.

La posibilidad de que aparezcan en el aula diferentes estrategias –todas válidas– para resolver un problema enriquece la percepción que cada alumno va construyendo sobre la matemática y fundamentalmente sobre el lugar que ellos mismos se asignan como posibles productores de matemática en la clase.

Problema 7

Consideremos el cuadrado ABCD y un punto P interior al mismo. Al unir P con los vértices A, B, C y D quedan determinados cuatro triángulos. Según dónde se ubique el punto P, se cumplirán o no ciertas condiciones sobre estos triángulos.



Analizar dónde habrá que ubicar el punto P dentro del cuadrado para lograr que:

a) el área del triángulo APB sea mayor que el área del triángulo DPC;
b) la suma de las áreas de ABP y CDP sea mayor que la suma de las áreas de los otros dos triángulos.

Comentarios

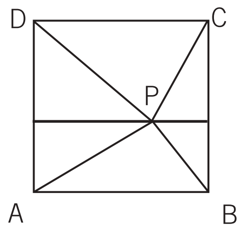
Lo nuevo de esta actividad es que el punto P no está fijo y los alumnos tienen que decidir dónde ubicarlo para que se cumplan ciertas condiciones.

Es probable que los alumnos respondan a la consigna **a)** ubicando el punto P "más arriba". Si se pide una justificación de la repuesta dada, esta podrá apoyarse en el hecho de que ambos triángulos tienen igual base y una altura mayor que otra. Se puede avanzar solicitando todos los posibles lugares dónde ubicar P. Esta pregunta les permitirá identificar la recta correspondiente a la mediatriz del lado AD –que es también mediatriz del lado CB– y concluir que el punto P puede ser cualquiera por encima de esa recta.

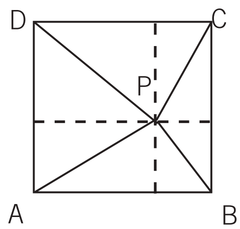
La consigna **b)** tiene una repuesta negativa: nunca se podrá ubicar el punto P de modo de satisfacer la condición pedida. Es probable que los alumnos comiencen ensayando distintas ubicaciones para el punto P, intentando buscar lo que se pide. Se espera que de estos ensayos lleguen a formular lo que enunciábamos antes. Con una posible intervención del docente será necesario entender esta afirmación como una conjetura por justificar.

Hay varias estrategias posibles para hacer esto por medio de la técnica de comparación de áreas:

- una estrategia consiste en partir el cuadrado en dos rectángulos e identificar que cada uno de los triángulos ABP y CDP es la mitad del rectángulo respectivo. Con lo cual se tiene que la suma de sus áreas será la mitad del área del cuadrado. Y esto ocurre con cualquier ubicación del punto P.



- Otra estrategia posible es trazar por P paralelas a los lados del cuadrado de modo que queden cuatro rectángulos. Si los alumnos identifican que cada rectángulo queda partido en dos triángulos iguales, podrán concluir que la suma de las áreas de los triángulos ABP y CDP es siempre igual a la suma de las áreas de los otros dos triángulos, independientemente de dónde se ubique al punto P.



También puede darse una justificación de la respuesta negativa apelando a las fórmulas de área. Si llamamos L al lado del cuadrado, se obtiene con un poco de trabajo algebraico que:

Área de ABP + área de CDP = $\frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}$ área de ABCD.

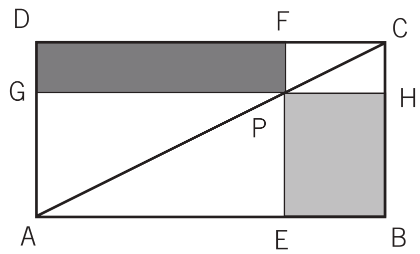
El rectángulo de Euclides

Las tres actividades siguientes ponen en juego una relación entre las áreas de los dos rectángulos que quedan determinados en torno a la diagonal de otro dado.

El **problema 8** permite la identificación y justificación de la propiedad. Los **problemas 9** y **10** requieren poner en juego esta propiedad para responder a lo pedido.

Problema 8

ABCD es un rectángulo, se considera un punto P sobre la diagonal AC. Se traza por P, EF paralela al lado AB y GH paralela a lado BC.



¿Dónde hay que ubicar el punto P para que el área del rectángulo DGPF sea mayor que el área del rectángulo PEBH?

Comentarios

Después de todos los problemas anteriores, es probable que muchos alumnos encaren éste vía la técnica de comparación de áreas. Y que lleguen a establecer como conjetura que las áreas de los rectángulos PEBH y DGPF son siempre iguales, cualquiera sea la ubicación del punto P.

La validación de esta propiedad se apoya en el hecho de que cada diagonal de un rectángulo lo divide en dos triángulos iguales.

Partiendo de las igualdades de triángulos ABC = ADC, AEP = AGP y PHC = PFC resulta:

Área de EBHP = área de ABC – área de AEP – área de PHC
= área de ADC – área de AGP – área de PFC
= área de GPFD.

Según cuál sea la experiencia acumulada en los problemas anteriores, los alumnos pueden necesitar apoyo docente o no para completar este razonamiento.

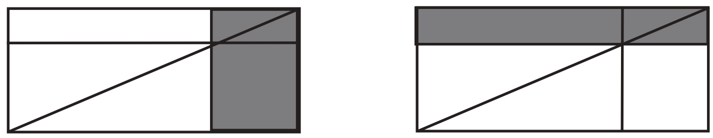
Algún alumno podría todavía encarar el problema midiendo sobre el dibujo dado, y llegaría de este modo a dos valores aproximados para las dos áreas. Es de esperar que los modos de producir de la clase, que se han ido enriqueciendo en toda la secuencia de trabajo, permitan una discusión sobre los límites de la utilización de la “medición sobre el papel” como una técnica para la justificación de la repuesta.

Será diferente la situación si el problema se presentara mucho antes, al comienzo del trabajo en geometría. Analizaremos esta posibilidad en el **capítulo 4**.

Del trabajo con el problema se concluye la siguiente propiedad, que llamaremos propiedad de los complementos:

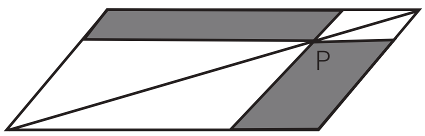
Para cualquier rectángulo y cualquier punto sobre su diagonal quedan determinados dos rectángulos de igual área.

Una consecuencia de esta propiedad, que será útil en el **problema 9**, es que los siguientes dos rectángulos, resultantes de agregar la misma área a los dos complementos, tienen igual área:



La “propiedad de los complementos” también es válida para paralelogramos y se puede justificar con un razonamiento análogo:

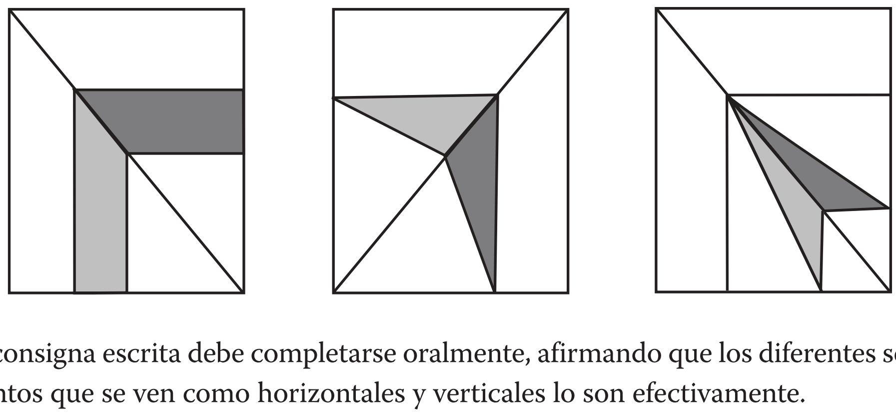
Si P es un punto cualquiera de una diagonal de un paralelogramo, y trazamos por P segmentos paralelos a los lados del paralelogramo, entonces los dos paralelogramos que quedan determinados a los lados de la diagonal –sombreados en la figura– tienen la misma área.



También los **problemas 9** y **10** pueden ser reformulados en términos de paralelogramos, en lugar de rectángulos.

Problema 9

Las figuras siguientes son rectángulos en los cuales se han trazado diversos segmentos. Se pide comparar en cada caso las dos áreas sombreadas.



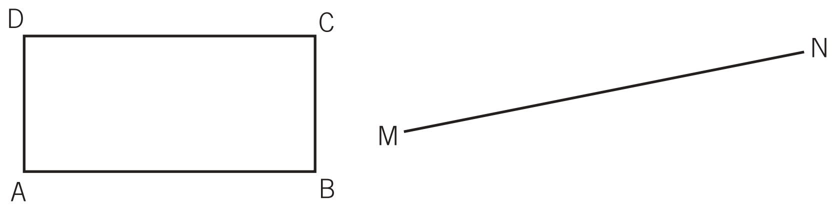
La consigna escrita debe completarse oralmente, afirmando que los diferentes segmentos que se ven como horizontales y verticales lo son efectivamente.

Comentarios

Una de las estrategias posibles es utilizar las propiedades que identificaron en el **problema 8**. También se pueden comparar las áreas directamente, como hasta ahora, encontrando triángulos o rectángulos de áreas iguales.

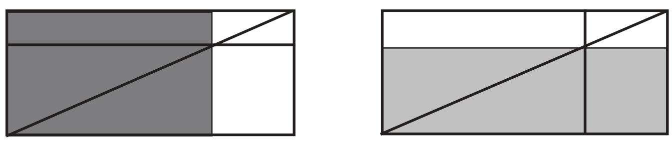
Problema 10

Construir un rectángulo de igual área que el rectángulo ABCD y cuya base sea igual al segmento MN.



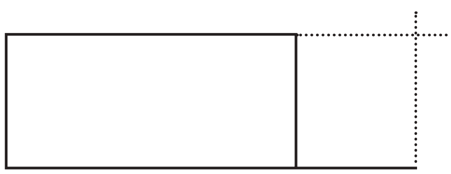
Comentarios

Se trata de que los alumnos realicen la construcción sin recurrir a la medición sobre el papel. El **problema 8** será un punto de apoyo privilegiado para hacer esta construcción. Puede ser necesario que el docente recuerde o la propiedad de los complementos o su consecuencia. Si consideramos esta segunda opción, la referencia para los alumnos estaría dada por la igualdad de las áreas de los dos rectángulos siguientes:

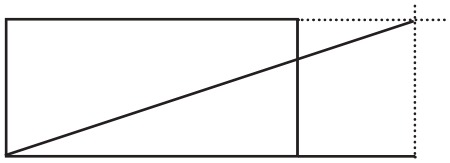


Puede ayudar que el docente repita estos dibujos en el pizarrón y proponga a los alumnos considerar el rectángulo dato como el rectángulo de la izquierda y el rectángulo por construir como el de la derecha. De este último se conoce un lado.

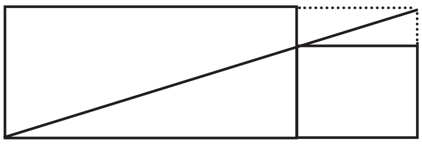
Aquí mostramos una posible construcción:



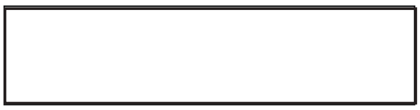
a) Ubicamos el segmento que será nueva base sobre la base del rectángulo dado y trazamos dos semirrectas perpendiculares a los lados del rectángulo hasta completar el rectángulo más grande.



b) Trazamos una diagonal del rectángulo grande.



c) Trazamos una paralela a la base por el punto de intersección de la diagonal con un lado del rectángulo dato. Esto permite encontrar la altura del rectángulo por construir.

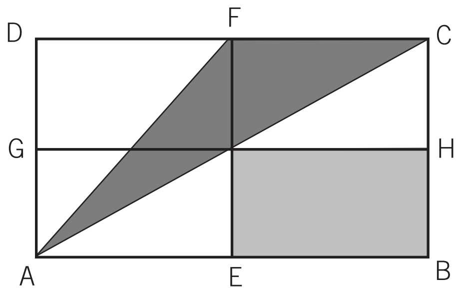


d) El rectángulo que quedó determinado tiene igual área que el rectángulo original y base igual al segmento dado.

Las tres últimas actividades de este bloque permiten retrabajar y perfeccionar la técnica de comparación de áreas como magnitudes. Se propone trabajar con ellas después de las actividades del tercer apartado o más adelante aún.

Problema 11

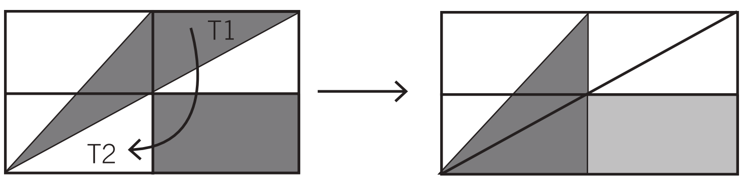
Comparar las dos áreas sombreadas. ABCD es un rectángulo; EF y GH pertenecen a las mediatrices de los lados.



Comentarios

Para resolver esta situación los alumnos podrán usar diferentes estrategias. Algunos alumnos ven el triángulo sombreado partido en tres triángulos y buscan armar el rectángulo sombreado con esos "pedacitos".

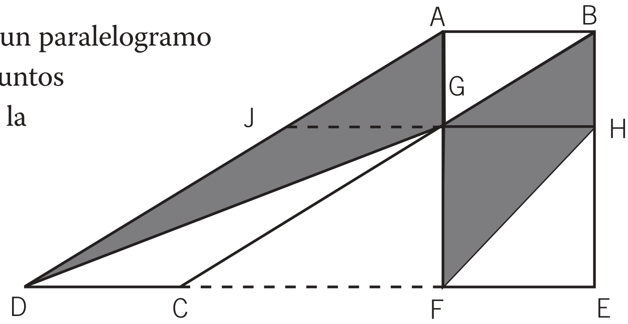
Otra posibilidad consiste en trasladar el triángulo sombreado de la derecha (T1) al hueco de abajo a la izquierda (T2), tal como se muestra en la figura. El triángulo sombreado originalmente se transforma así en un triángulo de igual área, que resulta ser la mitad de un rectángulo, técnica que se usó en el **problema 4**.



Finalmente, algunos alumnos podrán considerar que el triángulo sombreado tiene igual área que el rectángulo de la derecha reflexionando sobre las fórmulas de las figuras: en el triángulo es $\frac{b\ .\ h}{2}$ y en el rectángulo b A $\frac{1}{2}$ h.

Problema 12

En la siguiente figura, ABCD es un paralelogramo y ABEF es un rectángulo. Los puntos D, C, E y F están alineados. G es la intersección de BC con AF. GH es paralela a AB. Comparar el área del triángulo AGD con el área del trapecio GFHB.



Comentarios

En este problema –igual que en el anterior– se trata de comparar áreas de figuras de distinto tipo. Hay muchas maneras de pensar esta comparación.

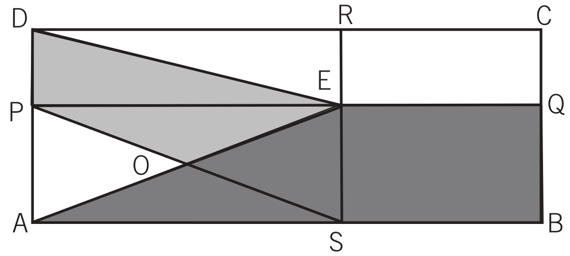
Una posible es la siguiente: el área del rectángulo ABEF y el área del paralelogramo ABCD son iguales porque tienen igual base y altura. Esta estrategia apela a las fórmulas.

Otra posibilidad será que los alumnos utilicen la comparación de áreas; en ese caso podrían prolongar GH hasta cortar a AD en un punto J. Quedan dibujados cuatro triángulos:

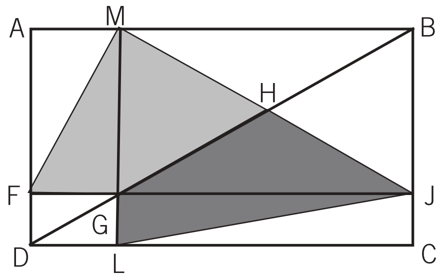
- Los triángulos FHG y DGJ tendrán igual área sin ser iguales "porque tienen igual base y altura".
- Los restantes GJA y GHB son iguales, por lo tanto tienen igual área.

Problema 13

a) En la siguiente figura, ABCD es un rectángulo. E es un punto de la diagonal AC. Por E se traza PQ, paralelo a DC y RS paralelo a AD. PS y AE se cortan en O. Comparar el área del cuadrilátero POED y del cuadrilátero ABQE.



b) En la siguiente figura, ABCD es un rectángulo, G es un punto de la diagonal DB. Por G se ha trazado la perpendicular a DC, que corta a AB en M y a DC en L; y por G se ha trazado la perpendicular a AD, que la corta en F y a BC en J. H es la intersección de GB y MJ. Comparar las áreas de los cuadriláteros GHJL y GHMF.



Comentarios

En ambos casos, para estudiar las áreas por comparar se podrá recurrir a las propiedades siguientes:

- la igualdad de áreas de los complementos del rectángulo de Euclides, formulada en el **problema 8**.
- la igualdad de las áreas de los cuatro triángulos que se obtienen al trazar las diagonales de un rectángulo.

En la figura de la consigna **a)**, el área del cuadrilátero ABQE es el doble del área del cuadrilátero POED. En la consigna **b)**, las dos áreas sombreadas resultan iguales.

El teorema de Pitágoras

Este teorema ha sido demostrado de maneras muy diversas a lo largo de la historia. La técnica de comparación de áreas que se estuvo trabajando en estos dos bloques permite la elaboración de una de ellas. En la siguiente actividad se propone una organización para la prueba en tres etapas, que deja espacio para el trabajo autónomo de los alumnos.

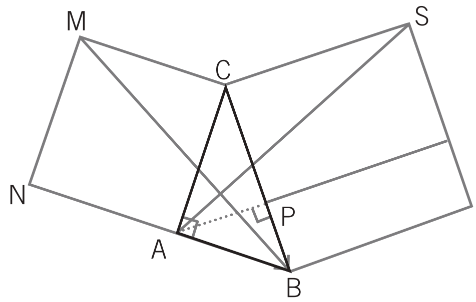
Probablemente los alumnos tengan ya conocimiento del enunciado del teorema, aunque en muchos casos su sentido puede estar ligado a relaciones entre longitudes –el cuadrado es interpretado más como operación aritmética sobre la longitud del lado que como área del cuadrado construido con ese lado–. Para comenzar con esta actividad es necesario formular el teorema en término de áreas:

En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados que se apoyan en los catetos es igual al área del cuadrado que se apoya sobre la hipotenusa.

La validación de este enunciado se organiza presentando a los alumnos un problema como el siguiente:

Problema 14

Se presenta el siguiente dibujo:



a) Probar que los triángulos ASC y BCM son iguales.
b) Probar que el área del cuadrado ACMN es igual al área del rectángulo PQSC.
c) Usando las demostraciones de los dos puntos anteriores, demostrar el Teorema de Pitágoras.

Comentarios

La consigna **a)** pone en juego los criterios de igualdad de triángulos.

Para la consigna **b)** se necesita comparar áreas de triángulos y rectángulos, como se aprendió en este capítulo.

Para la consigna **c)** los alumnos deben considerar el cuadrado sobre el otro cateto y realizar un trabajo análogo a lo hecho en las consignas **a)** y **b)**.

3. Las fórmulas para calcular el área del rombo y el paralelogramo. Variación del área de un triángulo en función de los datos

La finalidad del **problema 15** presentado en este apartado es la reconstrucción de las fórmulas para calcular el área de un paralelogramo y de un rombo, suponiendo conocida la fórmula para el rectángulo.

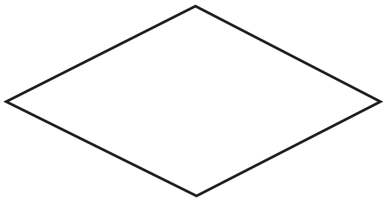
En particular, se propone analizar que para estas dos figuras, la fórmula del área no puede depender solamente de los lados, como sí ocurre en el caso del rectángulo, ya que hay infinitos rombos y paralelogramos con lados de la misma longitud y de áreas distintas.

El **problema 16** tiene como objetivo analizar que dos triángulos de igual altura tienen áreas proporcionales a las bases, y que dos triángulos de igual base tienen áreas proporcionales a las alturas.

Problema 15

a) Dibujar un rectángulo que tenga la misma área que el siguiente paralelogramo:

b) Dibujar un rectángulo con la misma área que el siguiente rombo:

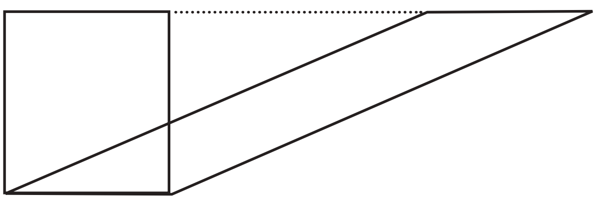


c) Justificar las fórmulas para calcular el área de un paralelogramo y de un rombo.

Comentarios

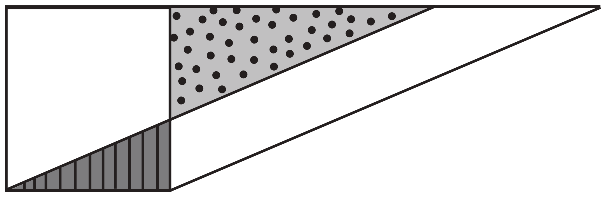
Con esta actividad se intenta recuperar lo aprendido en la escuela primaria. La consigna **a)** apunta a justificar por qué el área de un paralelogramo se calcula con la fórmula base por altura, suponiendo conocida la fórmula para el área de un rectángulo. Se espera que los alumnos encuentren un rectángulo de igual base y altura que el paralelogramo. Si dibujan ambos superpuestos, se espera que puedan comparar las áreas de los dos triángulos que se determinan:

A partir de estas primeras exploraciones con paralelogramos y rectángulos, el docente podría preguntar si todos los paralelogramos con la misma base y la misma altura tendrán la misma área. Es probable que muchos alumnos piensen que se trata del mismo tipo de dibujo y argumenten que siempre los triángulos de los extremos son iguales. El docente entonces puede presentar esta situación:



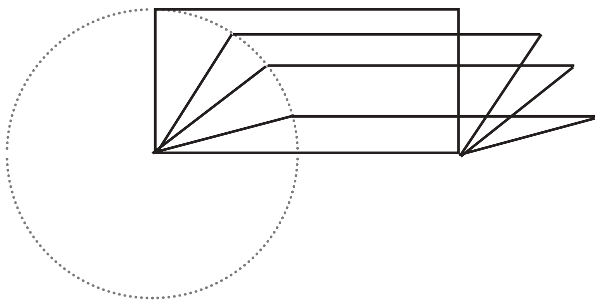
y explicar cómo hacer la comparación en este caso:

- el triángulo rayado es común al rectángulo y al paralelogramo,
- para comparar lo que queda de ambas figuras se les agrega el triángulo punteado,
- se obtienen de esta manera dos triángulos iguales.

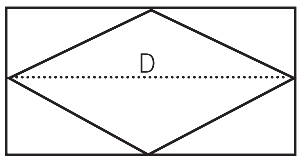


Se llega entonces a la conclusión de que todos los paralelogramos con igual base y altura (entre ellos el rectángulo) tienen la misma área.

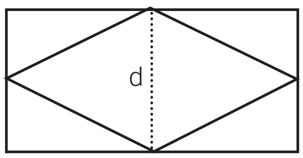
Faltaría estudiar qué relación hay entre las áreas de dos paralelogramos que tienen sus lados respectivamente iguales. Los alumnos podrían construir paralelogramos con las mismas longitudes para los dos lados, pero con alturas diferentes y por lo tanto con distinta área. Se podrá concluir entonces que la fórmula no puede depender únicamente de los lados.



Una estrategia posible para resolver la consigna **b)** es dividir en dos rectángulos iguales al rectángulo de base D igual a la diagonal mayor del rombo y de altura d igual a la diagonal menor del rombo:



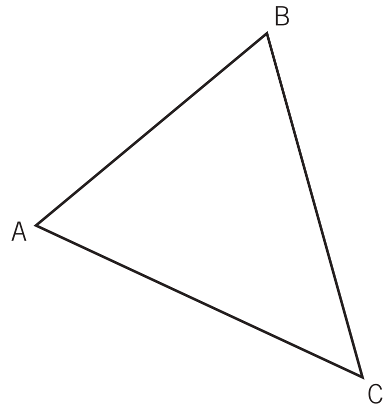
ó



Esta construcción servirá para que los alumnos justifiquen la fórmula del área del rombo como la mitad del área del rectángulo: D x d / 2. Acá se podría repetir el cuestionamiento que se hizo para el paralelogramo acerca del área de rombos de lados iguales, y los alumnos podrán argumentar del mismo modo que con el paralelogramo: la longitud del lado del rombo no determina un único rombo porque puede variar el ángulo que forman los lados y, en consecuencia, las diagonales. Y los distintos rombos que se pueden construir con la misma longitud del lado tendrán todos áreas distintas.

Problema 16

a) Dado el triángulo ABC, encontrar un punto P perteneciente a la recta que contiene al lado AB de manera tal que el área de APC sea la mitad del área del ABC.
b) Dado el triángulo ABC, encontrar un punto Q perteneciente a la recta que contiene al lado AB de manera tal que el área de AQC sea el triple del área del ABC.



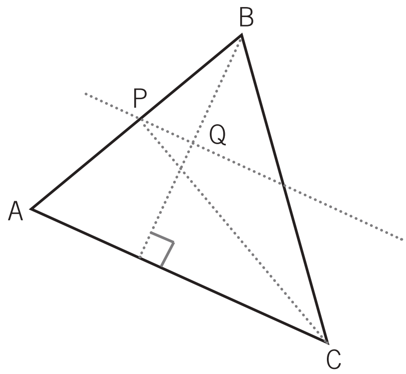
Comentarios

Esta actividad tiene por objetivo estudiar la variación del área de un triángulo en función de la base o de la altura: si la altura es constante, el área es directamente proporcional a la base, y si la base es constante, el área es proporcional a la altura.

En la consigna **a)**, el hecho de ubicar P en el lado AB podría llevar a los alumnos a considerar este lado como "base" y poner en juego la relación entre la variación de la base de un triángulo, la altura y su área.

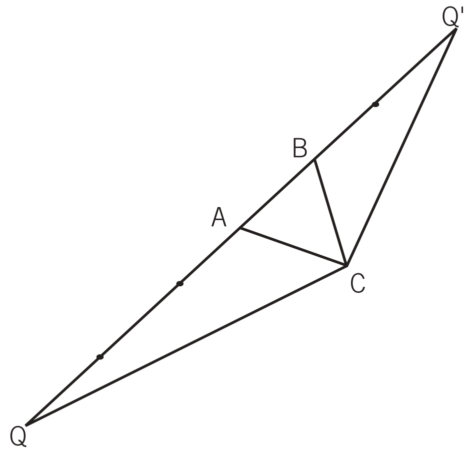
Una estrategia posible sería reducir la base a la mitad dejando la misma altura, apelando a lo que se había concluido en el **problema 4**: triángulos de igual base e igual altura tienen igual área. Si P es el punto medio de AB, los triángulos APC y BPC tienen igual base y altura, sus áreas son iguales y, en consecuencia, ambas son iguales a la mitad del área del triángulo ABC.

Otra estrategia podría ser trazar la altura correspondiente al lado AC y marcar su punto medio Q. Si por Q se traza una paralela a AC, se obtiene un punto P sobre el lado AB que cumple con lo pedido: el triángulo APC tiene área igual a la mitad de ABC porque comparten la base AC y la altura del APC es la mitad del ABC.



Las dos estrategias anteriores podrían ser producidas por los alumnos en la clase y, si eso ocurriera, un nuevo asunto por discutir es si ambos procedimientos llevan al mismo punto P. Es probable que los estudiantes contesten afirmativamente sin tener argumentos para validar esta respuesta. Una intervención docente podría colaborar en la identificación de lo que se está afirmando: *"Si trazamos por el punto medio de la altura correspondiente a un lado una paralela a ese lado, esta recta* *cortará a otro lado en su punto medio*". Desde nuestro punto de vista, valoramos muy positivamente la actividad de formulación de una propiedad nueva, establecida como conjetura a partir de haber puesto en relación distintas producciones en torno a un problema. En este caso, probar que esto es efectivamente así necesita de nuevas propiedades, como el teorema de Thales. Es por esto que el docente la podrá "guardar" hasta que estos conocimientos estén disponibles.

En la consigna **b)** hay dos posibilidades para ubicar el punto Q, ambas exteriores al segmento AB, de forma que la longitud de AQ sea el triple de la longitud de AB. Es muy probable que los alumnos se den cuenta de que el punto Q no puede estar dentro del segmento AB y que hay que ubicarlo sobre la recta que lo contiene, pero "afuera".

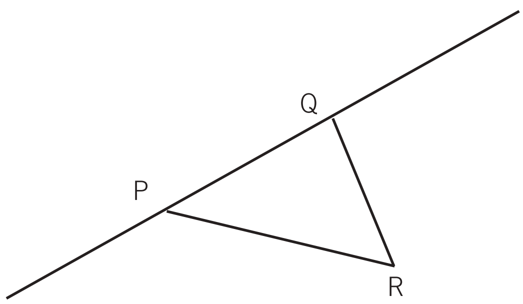


Transportando la longitud de AB tres veces sobre la recta se puede ubicar un posible punto Q. El docente podría preguntar si hay más de una posibilidad. Quizás no presente dificultades reconocer que hay dos posibilidades para ubicar el punto Q, aunque puede ocurrir que algunos alumnos ubiquen erróneamente el punto Q' como consecuencia de transportar la longitud de AB a partir del punto B.

Como están formados por tres triángulos de igual base y altura que el ABC, los triángulos AQC y AQ'C tienen el triple de área que el ABC.

En la consigna **b)** en el Programa de Matemática, de segundo año citado anteriormente, ejemplo 27 se presenta un problema similar, con un enunciado diferente:

PRQ es un triángulo. Hay que determinar un punto O que pertenezca a la recta que contiene al lado PQ de manera que el área del triángulo PRQ sea 1/5 del área del triángulo PRO. Se puede usar solamente regla no graduada y compás. Hay que construir el triángulo PRO y justificar la construcción.

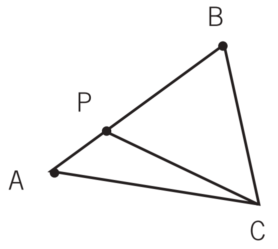


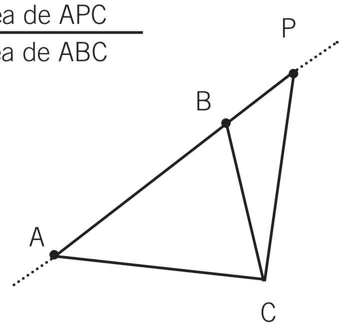
Como conclusión del trabajo en torno al **problema 16** se puede escribir:

Si dos triángulos tienen igual altura, y la base de uno es la mitad de la base del otro, su área también será la mitad. Y si la base es el triple, el área también será el triple.

Con el fin de generalizar esta propiedad, pero sin pretender un análisis riguroso, el docente puede preguntar qué pasaría con otros números, para concluir que si se cambia la longitud de la base de un triángulo manteniendo su altura, el área del triángulo cambia en la misma proporción que la base:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{\text{área de APC}}{\text{área de ABC}}$$



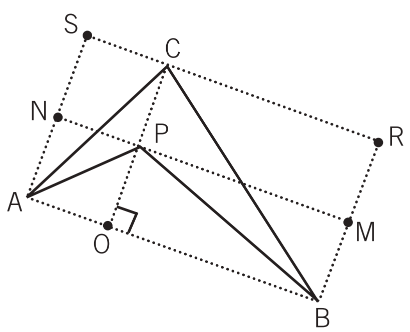


Es decir, *las áreas de dos triángulos con la misma altura son proporcionales a las bases.*

En las consignas **c)** y **d)** que siguen, se propone analizar cómo cambia el área de un triángulo cuando la base queda fija y se modifica la altura. Para ello se presenta el siguiente enunciado:

c) Dado un triángulo ABC, encontrar un triángulo de base AB cuya área sea la mitad del área del ABC.
d) Dado un triángulo ABC, encontrar un triángulo de base AB cuya área sea el quíntuplo de la de ABC.

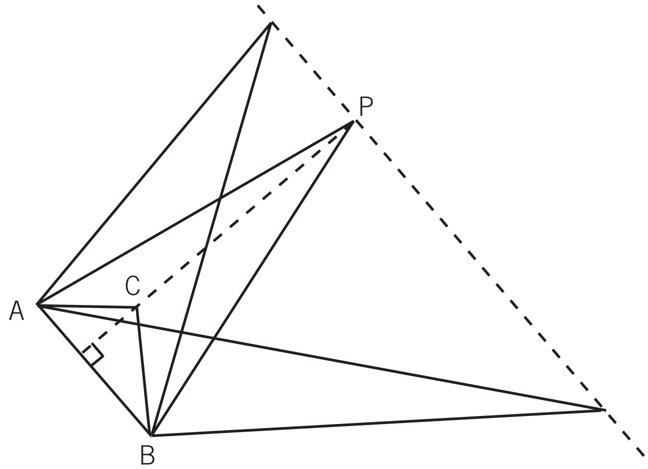
Este nuevo planteo de la situación fomenta como estrategia apoyarse en los rectángulos asociados a los triángulos involucrados, ya que los alumnos podrían considerar al triángulo ABC como la “mitad” de un rectángulo y dibujar una figura como la siguiente, donde P es el punto medio de la altura OC:



Como el área del rectángulo ABMN es la mitad del área del rectángulo ABRS, debe haber la misma relación entre las áreas de los triángulos porque éstos son la mitad de cada uno de los rectángulos. El docente puede preguntar si hay un único triángulo APB y discutir con los alumnos la ubicación del punto P –que puede colocarse en cualquier lugar de la paralela a AB, pues eso no cambia la altura ni el área del triángulo ABP– para concluir que cualquier triángulo de base AB y de altura igual a la mitad de OC tendrá la mitad de área del triángulo ABC.

Otra estrategia que se puede utilizar es la de apoyarse en la fórmula del área y buscar triángulos con altura igual a la mitad del dado.

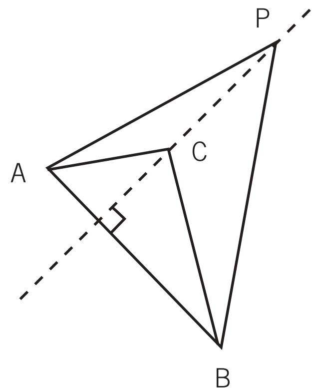
Para la consigna **d)** se pueden hacer razonamientos análogos y llegar a la conclusión de que hay infinitos triángulos de base AB cuyas áreas son el quíntuplo del área del ABC: son todos los triángulos cuyas alturas son el quíntuplo de la altura del triángulo ABC.



Como en la actividad anterior, se puede generalizar esta idea a cualquier número:

Si se cambia la longitud de la altura de un triángulo manteniendo la misma base, el área del triángulo cambia en la misma proporción que la altura.

$$\frac{OP}{OC} = \frac{\text{área de APC}}{\text{área de ABC}}$$



es decir, las áreas de dos triángulos con la misma base son proporcionales a las alturas.

4. El teorema de Thales. La comparación de áreas al servicio de la comparación de segmentos

En este apartado presentamos una demostración del teorema de Thales que se apoya en la igualdad de áreas. Aunque podría parecer extraño que un enunciado sobre longitudes de segmentos se pueda demostrar usando áreas, lo trabajado en el **problema 16** del tercer apartado permite justamente establecer equivalencias entre razones de áreas y razones de longitudes.

Estamos suponiendo que sea el docente quien explique la demostración a los alumnos. Como se enuncia en el programa de segundo año: *"Comprender demostraciones hechas por otros, o propuestas en un texto, es parte de aquello que se espera que aprendan los alumnos"*. En todo el trabajo desplegado en las clases de geometría, los estudiantes habrán tenido experiencia en la producción de argumentaciones para validar las afirmaciones que se formulan en el aula. Comprender demostraciones más acabadas producidas por el docente o leídas en un texto son actividades que complementan a las de elaboración de argumentos y que permitirían a los alumnos avanzar en la comprensión de la demostración deductiva como actividad típicamente matemática. En el **capítulo 2** ya se comentó la fertilidad de este tipo de tareas.

A continuación de la demostración se analizan las tres variantes del teorema mencionadas en el programa de segundo año y se presentan algunas actividades de aplicación. En particular, se puede deducir la versión clásica del teorema a partir de la variante que aquí se demuestra para triángulos.

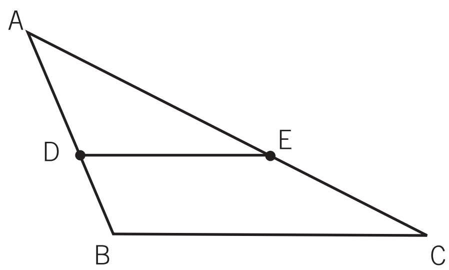
Problema 17: Una demostración del teorema de Thales

Hay muchas maneras distintas de enunciar el teorema de Thales (siglo V a.C.). Es decir, se pueden hacer muchas afirmaciones cercanas pero un poco diferentes. Una versión clásica es:

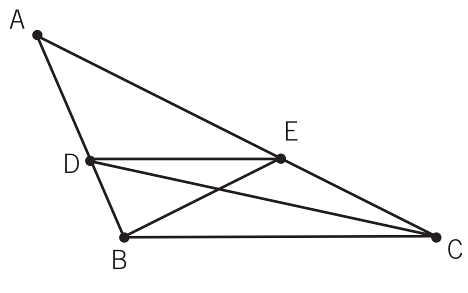
> *Si tres o más paralelas son cortadas por dos transversales, los segmentos determinados sobre una de ellas son proporcionales a los segmentos correspondientes determinados sobre la otra.*

Nosotros vamos a considerar primero la versión propuesta en el programa de segundo año, que sigue esencialmente el tratamiento que hizo Euclides en sus *Elementos*[15] (siglo IV a.C.):

Si en un triángulo trazamos una paralela a uno de los lados, los otros lados quedan partidos en segmentos proporcionales: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$



Probaremos la afirmación considerando triángulos dibujados auxiliarmente para poder apoyarnos en relaciones conocidas.



[15] Euclides (siglo IV a. C.), *Elementos. The thirteen Books of Euclid's Elements with introduction and commentary by Sir Thomas Heath.* Dover, New York, sin fecha.

I) Los triángulos BDE y CDE tienen igual área, porque tienen la misma base DE, y la altura correspondiente también igual.

II) Considerando los triángulos ADE y BDE, y teniendo en cuenta que las áreas de triángulos de alturas iguales son proporcionales a las bases, se puede afirmar que:

$$\frac{\text{área de ADE}}{\text{área de BDE}} = \frac{AD}{DB}$$

Y del mismo modo, considerando los triángulos ADE y CDE se puede afirmar que:

$$\frac{\text{área de ADE}}{\text{área de CDE}} = \frac{AE}{BC}$$

De I) y II) se puede concluir que:

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, que es la relación que se había propuesto.

En forma similar se pueden demostrar otras relaciones de proporcionalidad entre segmentos:

1. Para validar la relación $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ se siguen los mismos pasos, pero ahora apoyándose en que las áreas de los triángulos ADC y ABE son iguales:

   I) Como los triángulos BDE y CDE tienen la misma área; si a cada uno de los dos les agregamos el triángulo ADE, resulta que los triángulos ADC y ABE también tienen la misma área. (Éste es el resultado del **problema 5**.)

   II) Considerando los triángulos ADE y ABE, y teniendo en cuenta que las áreas de triángulos de alturas iguales son proporcionales a las bases, se puede afirmar que:

$$\frac{\text{área de ADE}}{\text{área de ABE}} = \frac{AD}{AB}$$

   Y del mismo modo, considerando los triángulos ADE y ACD se puede afirmar que:

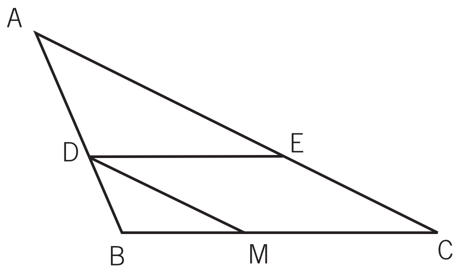
$$\frac{\text{área de ADE}}{\text{área de ADC}} = \frac{AE}{AC}$$

   Y de I) y II) se puede concluir que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$.

2. Si en 1. se consideran los triángulos DBE y ABE en lugar de los triángulos ADE y ABE, y los triángulos ECD y ACD en lugar de los triángulos ADE y ACD, resulta la siguiente relación entre segmentos:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}.$$

3. Los segmentos de “paralelas” también resultan proporcionales a los segmentos de “transversales”. Es decir, $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$. Para demostrarlo se puede trazar una paralela al lado AC que pase por D.

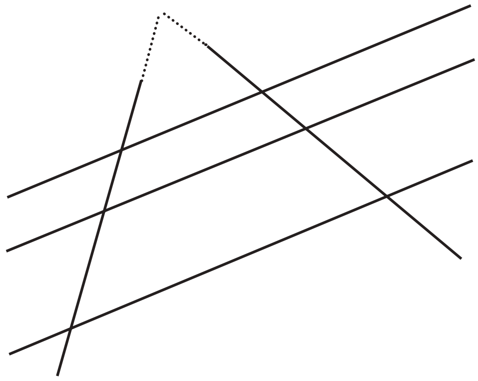


La segunda relación establecida en 1. permite afirmar que:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{MC}{BC}$$

Y como por construcción MCED es un paralelogramo, MC = DE, se tiene la relación buscada.

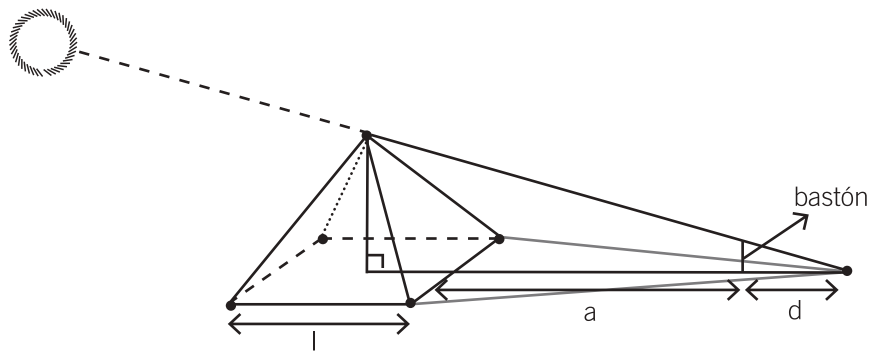
4. Otra manera en que suelen presentarse las relaciones de proporcionalidad de segmentos entre paralelas es considerar tres rectas paralelas que son cortadas por dos o más transversales.



Prolongando las transversales de manera de "armar" triángulos se puede recurrir a las variantes anteriores.

Problema 18[16]

Según se cuenta, el teorema de Thales tuvo su origen cuando Thales de Mileto intentó calcular la altura de la pirámide de Keops. Sabiendo que se trataba de una pirámide de base cuadrada cuyo lado se podía medir sobre el terreno, Thales colocó un bastón a una cierta distancia de la pirámide de forma que la sombra de la pirámide llegara justo hasta el extremo de la sombra del bastón, como muestra la figura:

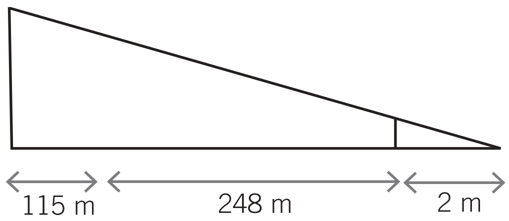


[16] A continuación presentamos algunas actividades que involucran relaciones de proporcionalidad entre segmentos y que se pueden abordar a partir del Teorema de Thales.

No conocemos las medidas que usó el propio Thales, así que vamos a poner algunas “de fantasía” pero que nos permitirán analizar sus ideas.
Llamemos ***l*** *a la longitud del lado de la base cuadrada,* **a** *a la distancia que hay entre el borde de la pirámide y el bastón, y* ***d*** *a la medida de la sombra del bastón (como se muestra en el dibujo). Supongamos que* ***l*** *= 230 m,* **a** *= 248 m,* ***d*** *= 2 m y la medida del bastón es 80 cm. ¿Cómo se puede saber la altura de la pirámide?*

Comentarios

Como el bastón es paralelo a la altura de la pirámide, se podría hacer un modelo plano del problema considerando dos triángulos como se muestra en la siguiente figura:



Es probable que el trabajo de los alumnos requiera la colaboración del docente para llegar a este modelo de la situación. Es esperable que los alumnos puedan, a partir de aquí, usar el teorema de Thales en su variante 3 y lleguen a plantear la relación entre los lados:

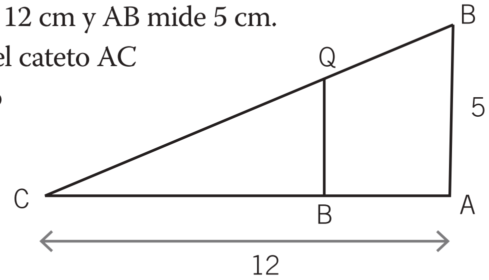
$$\frac{h}{115 + 248 + 2} = \frac{0{,}80}{2} = 0{,}4$$

Ahora se puede calcular la altura, que resulta ser h = 146 m.

Esta situación del cálculo de una altura inaccesible usando la sombra de otra accesible se puede plantear también para objetos físicos reales (el mástil del patio, la altura de una pared, etc.).

Problema 19[17]

En el triángulo rectángulo CAB, CA mide 12 cm y AB mide 5 cm. ¿Dónde hay que ubicar un punto P sobre el cateto AC para que el segmento PQ– paralelo al otro cateto AB– mida 3 cm?



[17] Variante de un problema tomado de *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*, E. Barbin & R. Douady, París, I.R.E.M., Topiques éditions, 1996.

Comentarios

Las medidas permiten dibujar la figura e ir probando dónde se puede ubicar el segmento PQ. Como en la actividad anterior, la variante 3 del teorema de Thales permite establecer una relación entre los datos y la ubicación del punto P. Por ejemplo: $\frac{12}{5} = \frac{CP}{3}$, que permite encontrar CP = 7,2 cm.

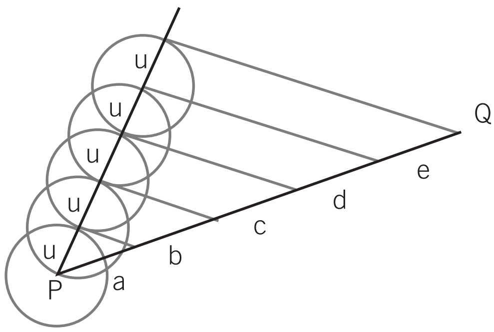
Problema 20

Justificar el procedimiento para dividir un segmento dado en partes iguales.

Comentarios

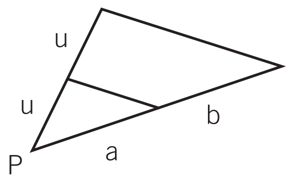
El objetivo de esta actividad es que los alumnos validen el procedimiento clásico para dividir un segmento en partes iguales apoyándose en el teorema de Thales.

Si se tratara de dividir un segmento dado PQ en cinco partes iguales, el procedimiento clásico produciría una figura como la siguiente:



y habría que ver que los segmentos a, b, c, d y e son todos iguales.

Solamente hay que ir eligiendo los triángulos por comparar y recurrir, por ejemplo, a la versión del teorema que presentamos originalmente.



Por ejemplo, eligiendo los triángulos de esta figura, a partir de la relación

$$\frac{a}{b} = \frac{u}{u} = 1$$

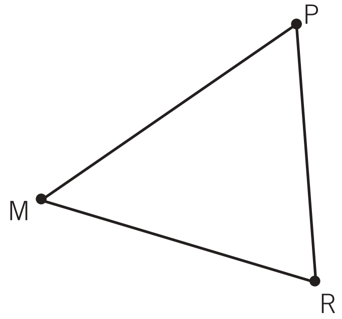
se puede concluir que a = b.

5. Actividades para después de haber trabajado la propiedad de que todo ángulo inscripto en una semicircunferencia es recto

En el **capítulo 1** de este documento se presentan actividades en torno a la propiedad de que todo ángulo inscripto en una semicircunferencia es recto. Los **problemas 21 y 22** combinan el uso de esta propiedad con la relación entre áreas trabajada en el quinto apartado: dos triángulos de igual base tienen áreas proporcionales a las alturas. Para abordar las actividades es aconsejable que con anterioridad los alumnos hayan hecho construcciones de triángulos rectángulos a partir de diferentes juegos de datos (ver **capítulo 1** y **2**). En particular, aquí será necesario saber construir triángulos rectángulos conociendo la hipotenusa.

Problema 21

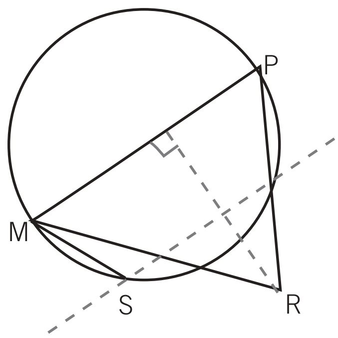
Dado el triángulo MRP, ubicar un punto S de manera que el triángulo MSP sea rectángulo en S y el área de MSP sea la mitad del área del MRP.



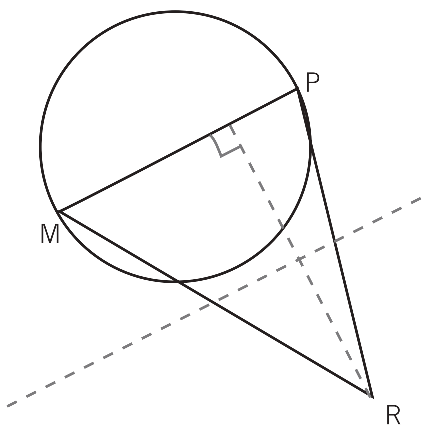
Comentarios

Para resolver este problema es necesario poner en juego la propiedad de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia. Por un lado, para lograr que el ángulo MSP sea recto, el punto S debería estar sobre la circunferencia de diámetro MP cuyo centro es el punto medio del segmento MP. Por otro lado, para que el área del triángulo MSP sea la mitad del área del triángulo MRP, su altura debe ser la mitad, ya que comparten la base MP. De modo que el punto S deberá estar en la paralela a MP que pasa por el punto medio de la altura correspondiente al lado MP.

Se trata de coordinar ambas condiciones y obtener el punto S como intersección de la recta paralela y la semicircunferencia. Para el triángulo que se presenta en el enunciado se obtienen dos puntos de intersección, que determinan dos triángulos iguales:



El docente puede proponer luego otro triángulo MRP de forma que no se obtenga ningún punto en la intersección y discutir con los alumnos cómo debe ser el triángulo MPR para que la construcción sea posible. El siguiente dibujo corresponde a un caso sin solución:



A partir de esta construcción se espera poder arribar a la conclusión de que habrá solución siempre que el lado MP sea mayor que la altura correspondiente a ese lado.

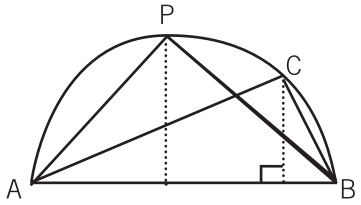
También se pueden proponer variantes de la actividad solicitando un triángulo MSP cuya área sea el doble, el triple, la tercera parte, etc. del triángulo MRP.

Problema 22

En un triángulo rectángulo ABC, AB es la hipotenusa y mide 8 cm. La altura correspondiente a la hipotenusa mide 3 cm. Determinar un punto P de manera que el triángulo ABP sea rectángulo en P y el área de ABP sea el doble del área del ABC.

Comentarios

Se trata de una construcción imposible. Los alumnos nuevamente deberán apoyarse en la propiedad de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia. Para que el ángulo APB sea recto, el punto P debe estar sobre la circunferencia de diámetro AB, cuyo centro es el punto medio de AB. Por otro lado, para duplicar el área del triángulo ABC hay que duplicar la altura, porque los triángulos ABC y ABP comparten la base AB. Como el doble de la altura es mayor que el radio de la circunferencia, la construcción no será posible.



El docente podrá discutir con los alumnos cómo debe ser el triángulo ABC para que la construcción sea posible. En particular se puede preguntar:

Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 8 cm, ¿cuál es el área máxima que puede tener?

Sabemos que un trabajo geométrico resuelto por medio de la técnica de comparación de áreas como el que hemos desarrollado en este capítulo no es muy habitual en las aulas. El conjunto de actividades que hemos propuesto, con sus respectivas reflexiones, intenta mostrar tanto su fertilidad didáctica como su factibilidad. Probablemente requerirá un trabajo sostenido de los docentes para que pueda desarrollarse en las clases. Pensamos que la riqueza de la actividad que podría desplegar un alumno en torno a estos problemas aportaría sustancialmente a su formación matemática.

Capítulo 4
Un problema fértil para *hacer geometría* en el aula

Pensar la actividad matemática en la clase como la construcción de una cultura nos lleva a la necesidad de concebir un amplio espectro de tareas para hacer en el aula, en relación con la resolución de problemas: elaborar definiciones, formular conjeturas, identificar el dominio de validez de una cierta propiedad dentro de una familia de objetos matemáticos, argumentar para dar por válidas las afirmaciones que se hacen, comprender las argumentaciones dadas por otros, etc. En una clase concebida de esta manera, las producciones individuales y las discusiones colectivas forman una trama en la cual cada alumno va elaborando su conocimiento.

Este modo de "hacer matemática en la clase" adquiere características particulares cuando se trata de geometría. En los capítulos anteriores hemos intentado dar cuenta de algunas de ellas.

En este capítulo queremos mostrar un ejemplo del tipo de trabajo que se puede desplegar en una clase que enfrenta la resolución de un problema y continúa trabajando en torno a las relaciones que se construyen. Para ello será necesario suponer un cierto funcionamiento de los alumnos. El análisis que presentaremos se apoya en ese funcionamiento supuesto; a pesar de los límites que esto comporta, consideramos que puede ser un punto de partida para la propia exploración docente.

El problema que servirá de soporte al trabajo de la clase que vamos a analizar aparece en el programa de segundo año como **problema 28**.[18] Se trata de estudiar la relación entre un cuadrilátero y otro que se construye a partir de los puntos medios de sus lados. Para una mejor organización de la clase se propone una presentación de la actividad que realizarán los alumnos en dos etapas separadas.

En la primera etapa se trata de estudiar cómo es el cuadrilátero que se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera. Para poder abordar esta pregunta en buenas condiciones, es necesario que los alumnos hayan estudiado la propiedad de la base media de un triángulo y que dispongan de esta relación como para ponerla en juego en el estudio de la problemática que ahora se les presenta. En el desarrollo de esta primera etapa se pone en juego la complejidad de la relación entre el texto de un problema, lo que implica estudiar una situación general, y el dibujo particular que los alumnos producirían para estudiarlo.

[18] Este problema ha sido trabajado en el aula por una de las profesoras que participa de la escritura de este documento; las respuestas de sus alumnos han iluminado muchos de los aspectos que trataremos en este capítulo.

En la segunda parte se trata de precisar condiciones adicionales sobre los datos del problema, para lograr que el cuadrilátero que se obtiene cumpla determinadas características. Esto lleva a que los alumnos exploren propiedades y definan clases no convencionales de cuadriláteros. Se espera que en el colectivo de la clase se formulen y validen teoremas para esas clases.

El problema de los puntos medios de los lados de un cuadrilátero

Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera; E, F, G y H, los puntos medios de cada uno de sus lados. ¿Qué clase de cuadrilátero es EFGH?[19]

Primer momento de trabajo

Frente a esta consigna, seguramente los alumnos comiencen a hacer dibujos. Según sea el cuadrilátero inicial que dibujen, pueden llegar a dar diferentes respuestas como producto de la observación.

Es probable que muchos alumnos partan de un rectángulo, en cuyo caso obtendrán un rombo. Si, por otro lado, algún alumno comienza dibujando un rombo, obtendría un rectángulo. Los alumnos que dibujen un cuadrilátero un poco más general, probablemente "vean" un paralelogramo.

Segundo momento de trabajo

El docente anota las distintas respuestas en el pizarrón y pide a todos los alumnos que llegaron a la misma respuesta que se reúnan en un grupo para buscar una buena explicación de por qué es así. Anuncia que luego pasará un integrante de cada grupo a presentar sus conclusiones al resto de la clase.

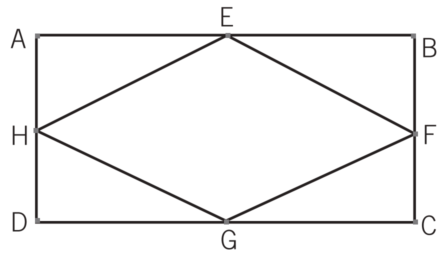
En este segundo momento el trabajo matemático a cargo de cada grupo es esencialmente diferente de lo realizado en el primer momento: antes se trataba de producir una repuesta y ahora se trata de producir una explicación o justificación de esa respuesta.

Tercer momento de trabajo

Cuando todos los grupos tienen una explicación, un integrante de cada uno va pasando al pizarrón para exponer a toda la clase sus argumentos.

Por ejemplo, supongamos que comienza el grupo que afirma que se obtiene un rombo. Probablemente realicen un dibujo como este:

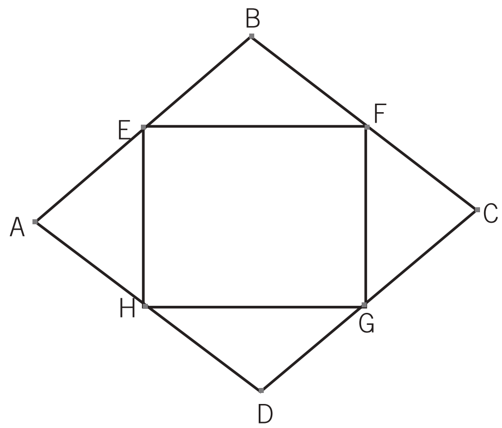
[19] Hay un análisis de este problema, planteado con algunas variantes, en el número 34 de la revista *Petit X*, pág. 31 a 52, 1993-1994. El mismo está realizado por Christine Souvignet. Para el análisis que realizaremos aquí, fueron fundamentales los aportes de muchos docentes que en los cursos de capacitación presentaron sus puntos de vista.



Es probable que el trabajo en los grupos les haya permitido elaborar algún tipo de justificación de este estilo:

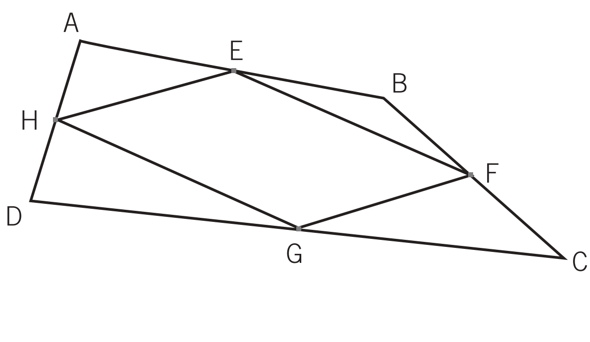
Comparamos los dos triángulos HAE y FBE. Como tienen dos lados y el ángulo comprendido respectivamente igual, son iguales por alguno de los criterios; con esto llegamos a que HE = EF. Haciendo lo mismo con los otros pares de lados, se llega a que los cuatro lados son iguales; luego, tenemos un rombo.

El grupo que obtuvo un rectángulo, probablemente hará en el pizarrón el dibujo de un rombo como cuadrilátero ABCD, aunque no haga explícito que se trata de un cuadrilátero especial.



En este caso, es probable que los alumnos no puedan justificar bien por qué se obtiene un rectángulo: poniendo el cuadrilátero de afuera bien derecho se ve que quedan ángulos rectos. Si abordan la justificación, podrían considerar que los cuatro triángulos que quedan por fuera del cuadrilátero de adentro son isósceles. Como dos ángulos consecutivos de un rombo suman 180º se puede concluir que los ángulos del cuadrilátero EFGH son rectos, o sea que se trata de un rectángulo.

Finalmente, es posible que el grupo que obtuvo un paralelogramo, realice un dibujo como este:



Al unir los puntos medios aparece una figura que parece un paralelogramo. En este caso la argumentación es más compleja, y probablemente los alumnos no puedan dar una justificación de esta "evidencia".

Cuarto momento de trabajo

Una vez que todos los grupos han pasado al pizarrón, el docente organiza un debate sobre las respuestas dadas. Es probable que la diversidad de respuesta que probablemente se produjeron cree un clima de incertidumbre en la clase. Es posible que muchos alumnos comiencen a dudar de sus respuestas, a partir de haber oído la de otro grupo.

El docente propone examinar en detalle alguna de las repuestas y las argumentaciones producidas. Supongamos que se revisa la argumentación del grupo que había partido de un rectángulo, el argumento que utilizaron para justificar que obtenían un rombo seguramente se apoyaba en la igualdad de los ángulos del cuadrilátero de partida.

Al considerar la explicación dada por el grupo como objeto de análisis para toda la clase, es esperable que aparezca la duda sobre ese dato. El docente podría pedir a algún alumno que vuelva a leer el enunciado y explicitar nuevamente que ese enunciado contiene todos los datos que se pueden utilizar.

La idea es que cada grupo pueda reflexionar si está usando datos de más y que vaya modificando sus dibujos y sus argumentos para no apoyarse en esos datos.

El primer objetivo del problema, que no había sido explicitado, se va cumpliendo: los alumnos toman conciencia de que el dibujo hecho por ellos puede traer consigo datos extras que no estaban en el enunciado. Deben aprender a desprenderse de esos datos extras para dar sus respuestas y sus argumentaciones. Una manera de lograrlo es intentando hacer dibujos más generales (o menos particulares). El docente puede dar explícitamente esta consigna si lo considera necesario.

Si toda la clase adopta el dibujo "general", es probable que enuncien que se obtiene siempre un paralelogramo. El problema ha cambiado, se tiene una respuesta y hay que encontrar una justificación.

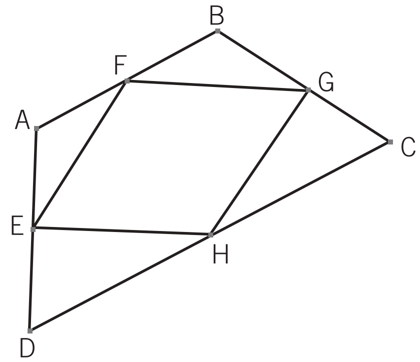
Antes de continuar con el análisis, recordemos que este curso imaginario ha tomado rápidamente conciencia de una dificultad fundamental en geometría: una figura que acompaña a un texto, salvo expresas indicaciones, no puede ser considerada como proveedora de más datos que los que trae el texto.

Sabemos que en los cursos reales esta toma de conciencia será mucho más difícil de lograr y que probablemente la dificultad reaparezca cuando ya creíamos que todos la habían superado. Hay muchas idas y vueltas entre las constataciones sobre el dibujo y la lectura del enunciado. Esas son las marchas y contramarchas usuales en el aprendizaje cuando se trata de enfrentar y franquear dificultades que se han estado fortaleciendo por prácticas de muchos años. Estas prácticas se refieren tanto a la vida corriente del alumno, donde sin duda los datos de la percepción son datos válidos para la toma de decisiones, como a las tareas escolares en el área de geometría. Muchos libros de texto –tanto del ciclo primario como en los primeros años del secundario– presentan actividades de geometría que contienen consignas como esta: *Observá en el dibujo... ¿qué conclusión sacás?*

Un problema como el que estamos analizando permitiría otro tipo de interacción con los dibujos y lograría, fundamentalmente, sacar a la luz la dificultad que conlleva la aprehensión de la figura dibujada.

Si se quisiera trabajar más fuertemente sobre esta problemática, podría darse el enunciado así:

Sea ABCD un cuadrilátero cualquiera; E, F, G y H los puntos medios de cada uno de sus lados, tal como se ve en la siguiente figura.
¿Qué clase de cuadrilátero es EFGH?



El hecho de que el dibujo sea dado por el profesor refuerza todavía más la convicción de los chicos de que los datos que él contiene pueden ser tomados como válidos para resolver el problema. Será en la gestión de clase que esta validez debe ser puesta en duda. Finalmente, es el docente el encargado de clarificar la función de un dibujo que acompaña a un texto: un enunciado como el de más arriba dice algo de todos los cuadriláteros, mientras que una figura muestra siempre un cuadrilátero particular.

El papel de la figura dibujada como parte del enunciado de un problema es complejo ya que en ella pueden "observarse":

- los datos del problema (en nuestro ejemplo, que ABCD es un cuadrilátero y E, F, G y H son los puntos medios de los lados);
- las conclusiones a las que se quiere arribar (en nuestro ejemplo, que EFGH es un paralelogramo);
- otros datos –a menudo usados implícitamente– y otras consecuencias debidas a la particularidad de ese dibujo (en nuestro ejemplo, tanto los datos como las consecuencias que extrajeron algunos grupos, o, en la última versión del problema que presentamos, la igualdad aparente de AD y BC, que da como consecuencia que el cuadrilátero que se obtiene es un rombo).

Otro asunto por discutir a propósito de la información que da una figura es el de las marcas específicas que se hacen sobre ellas (para indicar que un ángulo es recto, o que dos lados son iguales, etc.). Estas marcas informan sobre hechos que sí pueden ser considerados como datos válidos. Estas pequeñas marcas cambian entonces el status de una figura en la resolución del problema.

Desentrañar esta complejidad es un proceso del cual la enseñanza debe sin duda hacerse cargo. Tener claro cuál es rol de la figura no es un conocimiento que nuestros alumnos ya deberían tener, y en ese sentido no se puede imputar su ausencia a un déficit en los aprendizajes anteriores.

Ahora volvamos a nuestro problema y a "nuestra clase supuesta". Apoyándose en el dibujo general, el docente puede preguntar cómo es que se obtuvieron los puntos H, E, F y G: son puntos medios de lados y los alumnos conocen una propiedad si se tratara de lados de un triángulo (recordemos que estamos suponiendo que la propiedad de la base media es conocida por los alumnos y trabajada no muy lejos del momento de enfrentar este problema). Si dibujamos una diagonal del cuadrilátero ABCD, por ejemplo la DB, quedan determinados dos triángulos ABD y BDC, y los cuatro puntos marcados son efectivamente los puntos medios de sus lados. Esta diagonal puede ser dibujada por el docente en el pizarrón para toda la clase.

A partir de aquí las relaciones ocultas en el enunciado del problema comienzan a hacerse visibles. Es este elemento que no aparecía explícitamente en el enunciado, una diagonal, el que permite descubrir estas relaciones. Es posible que sea necesario que el docente la haga aparecer explícitamente para colaborar en la búsqueda de una argumentación de los alumnos.

Gracias entonces a la propiedad de las bases medias de los triángulos, se espera que los alumnos puedan llegar a deducir que EF // HG y que ambos segmentos miden lo mismo (la mitad de BD). Considerar la otra diagonal AC permitirá concluir que EH // FG y que ambas miden lo mismo (la mitad de AC).

Cuanto más familiarizados estén los alumnos con la argumentación y la validación de afirmaciones generales, es probable que se necesite menos intervención docente para completar una argumentación como esta.

Llegamos entonces al momento en que la pregunta contenida en el primer enunciado de la consigna **a)** del problema ha resultado contestada.

¿Podemos afirmar que la percepción del dibujo que acompañe el texto de un problema introduce errores en la búsqueda de una respuesta? Todos los análisis anteriores nos muestran que puede ser así. Sin embargo, también es cierto que el dibujo es el apoyo sobre el cual establecemos una hipótesis de cuál es la respuesta correcta. Y es en parte también un apoyo en la búsqueda de las razones de esa conclusión. De todos modos, es necesario dejar en claro que se trata de mostrar el valor de verdad de una afirmación a partir de las propiedades de los objetos en cuanto objetos geométricos, y no de las propiedades que percibimos en los dibujos particulares que representan esos objetos.

Volviendo al problema, los casos particulares que aparecieron al principio dan pie para continuar con otra pregunta con objetivos diferentes de la primera. Entramos así en una segunda etapa de la situación que da lugar a clasificaciones inusuales de cuadriláteros.

> ¿Cómo debería ser el cuadrilátero ABCD para que el cuadrilátero EFGH obtenido uniendo los puntos medios de sus lados resulte un rectángulo?
> ¿Y un rombo? ¿Y un cuadrado?

Comentarios

Es probable que los alumnos se restrinjan en principio a considerar los casos que ya habían aparecido:

Si ABCD es un rombo, FGHE es un rectángulo.
Si ABCD es un rectángulo, FGHE es un rombo.
Si ABCD es un cuadrado, FGHE es un cuadrado,

Esta respuesta al problema no es incorrecta pero sí incompleta, para cada caso hay otros cuadriláteros que verifican lo pedido.

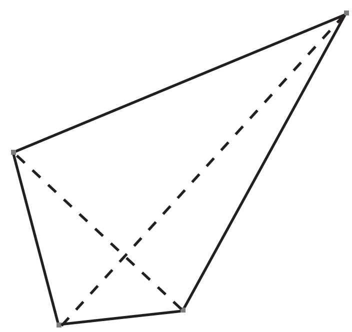
Analicemos en detalle el desarrollo de la clase en relación con la primera pregunta y supongamos que todos los alumnos contestan que para obtener un rectángulo, ABCD debe ser un rombo. El docente podría proponer estudiar un romboide y probablemente sorprenda a los alumnos encontrar que al unir sus puntos medios también se obtiene un rectángulo. A partir de esta constatación el docente podría re-preguntar:

"Pero entonces, ¿cuál es la propiedad que debe cumplir ABCD para que al unir sus puntos medios resulte un rectángulo?

Los alumnos deberán volver a considerar un cuadrilátero cualquiera y estudiar las condiciones que garanticen que se va obtener un rectángulo en su interior: se sabe, a partir del trabajo realizado, que si consideramos dos lados opuestos del EFGH, ambos son iguales y paralelos a una diagonal del ABCD. Para que el cuadrilátero de adentro resulte rectángulo, es necesario que sus lados adyacentes sean perpendiculares, y esto se logra si las diagonales del ABCD lo son.

Se llegaría entonces a la siguiente respuesta: *para obtener un rectángulo se necesita que las diagonales de ABCD se corten perpendicularmente.*

¿Cuáles son estos cuadriláteros? Los alumnos podrían creer que se trata de rombos y romboides, los únicos cuadriláteros con "nombre propio" que verifican esa propiedad. En ese caso, el docente puede informar que existen otros e invitar a sus alumnos a dibujar alguno. Siempre queda el recurso de que sea el docente el que presente un dibujo como el siguiente de un "cuadrilátero cualquiera" con sus diagonales perpendiculares:



Finalmente se habrá identificado en la clase que los cuadriláteros que tienen sus diagonales perpendiculares no son solamente los rombos y los romboides. Y todos ellos cumplen con una misma propiedad.

En nuestra clase supuesta, imaginamos que el docente propone a sus alumnos inventar un nombre para esta familia de cuadriláteros. Habrá que ponerse de acuerdo en el aula acerca de cuál puede ser ese nombre. Para poder seguir con nuestro texto, los llamaremos "rectidiagonales". Sobre esta nueva familia de cuadriláteros, la clase ha producido conocimiento que el docente resume:

- Se sabe que la familia de los "rectidiagonales" contiene a los rombos y los romboides y que contiene también a otros cuadriláteros.
- Se tienen algunos dibujos de miembros de la familia, además de rombos y romboides, y se sabe cómo dibujar otros.
- Se tiene un teorema: "Al unir los puntos medios de los lados de un rectidiagonal se obtiene un rectángulo". Es un teorema a cuyo enunciado se arriba después de haberlo demostrado.

En todo el desarrollo anterior hemos supuesto que los alumnos, para lograr un rectángulo, buscaban la perpendicularidad de los lados adyacentes del EFGH, apoyados en la definición. Otra forma de encarar el problema sería buscar que las diagonales del EFGH sean iguales y se corten en su punto medio, propiedad que caracteriza a los rectángulos. En ese caso aparecen en escena las bases medias del cuadrilátero ABCD (los dos segmentos que unen los puntos medios de lados opuestos).

Encarando el problema desde este ángulo, se llegaría a la siguiente respuesta: *para obtener un rectángulo se necesita que las bases medias de ABCD sean iguales y se corten en partes iguales.*

Del mismo modo que antes habrá que estudiar cuáles son los cuadriláteros que verifican esta condición. Se trata, como antes, de una familia que incluye a los rombos y los romboides.

Es probable que esta segunda forma de encarar el problema a través de las bases medias de un cuadrilátero no surja autónomamente del trabajo de los alumnos: cada docente podrá evaluar la conveniencia de introducir más elementos para que se despliegue en su clase. En nuestra clase supuesta, supondremos que efectivamente este trabajo se ha realizado.

Para cerrar esta actividad, se llega a establecer una definición equivalente para la familia de los "rectidiagonales": son los cuadriláteros cuyas bases medias son iguales y se cortan en su punto medio. A esta definición se llega porque ambas condiciones (tener las diagonales perpendiculares o tener las bases medias iguales y cortándose en partes iguales) corresponden a la familia de los cuadriláteros que cumplen la condición de que, al unir los puntos medios de sus lados, se obtiene un rectángulo.

Un trabajo similar se desplegaría en la clase si se buscan las condiciones que debe cumplir el cuadrilátero ABCD para lograr que el EFGH resulte un rombo. La familia que se obtiene es la de los cuadriláteros que tienen sus diagonales iguales, siendo los rectángulos parte de esta familia.

De la misma manera, si se busca que EFGH sea cuadrado, es necesario pedir que ABCD tenga sus diagonales iguales y perpendiculares. Esta última familia contiene a los cuadrados y otros cuadriláteros.

En todo el **capítulo 4** hemos intentado mostrar cómo un grupo de alumnos con su docente puede "producir matemática" en el aula de geometría, incorporando tareas tales como la definición de una familia de objetos y el enunciado de "teoremas" para esa familia.

Son conocimientos producto de la actividad de la clase y no tienen una visibilidad en la cultura más allá de la situación escolar. El valor formativo de un trabajo como éste no se relaciona tanto en el conjunto de conocimientos que se llegan a establecer como, fundamentalmente, con el proceso de producción que se desencadena.

Sentir que puede inventar una definición y que hay teoremas que son propios de su clase particular, son cuestiones que permitirían a un alumno construir una posición de mayor dominio de la disciplina y de autonomía en el trabajo.

Esperamos que las distintas actividades propuestas a lo largo de los cuatro capítulos de este documento y los comentarios que las acompañan lleguen a constituirse en herramientas del trabajo docente.

La idea de la clase como una comunidad de producción, donde los saberes culturalmente establecidos se reconstruyen a partir de conocimientos más locales y específicos, en una trama donde se articulan el trabajo personal y las discusiones colectivas, ha sido el eje de esta propuesta.

Aportes para la enseñanza. **NIVEL MEDIO**