

Formulaire PanaMaths

→ Trigonométrie circulaire

Ensembles de définition

Fonction	Ensemble de définition
$\sin$	$\mathbb{R}$
$\cos$	$\mathbb{R}$
$\tan = \frac{\sin}{\cos}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\cotan = \frac{\cos}{\sin}$	$\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Valeurs prises pour des angles simples

Angle (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Angle (degrés)	0	30	45	60	90	180	270
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0	ND
cotan	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	ND	0

Dans le tableau ci-dessus, « ND » signifie « Non Définie ».

Périodicité

Le **sinus** et le **cosinus** sont 2π - périodiques.
La **tangente** et la **cotangente** sont π - périodiques.

Relations entre les fonctions trigonométriques

Relation fondamentale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Relations entre le sinus et le cosinus

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x)\end{aligned}$$

Relations entre la tangente et la cotangente

La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\tan(x) \cotan(x) = 1$$

Les relations suivantes sont valables

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} :$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan(x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cotan(x)$$

Les relations suivantes sont valables

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} :$$

$$\cotan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$$

$$\cotan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\tan(x)$$

Relation entre le cosinus et la tangente

La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(x)}$$

Relation entre le sinus et la cotangente

La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{1 + \cotan^2(x)}$$

Symétries

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(-x) &= -\sin(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \sin(\pi + x) &= -\sin(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \cos(\pi + x) &= -\cos(x)\end{aligned}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\begin{aligned}\tan(-x) &= -\tan(x) \\ \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\ \tan(\pi + x) &= \tan(x)\end{aligned}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}\cotan(-x) &= -\cotan(x) \\ \cotan(\pi - x) &= -\cotan(x) \\ \cotan(\pi + x) &= \cotan(x)\end{aligned}$$

Argument somme ou différence de deux angles

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x - y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x + y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \cos(x - y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)^2$ et tels que :

1. $x + y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

2. $x - y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\})^2$ et tels que :

1. $x + y \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\cotan(x + y) = \frac{\cotan(x)\cotan(y) - 1}{\cotan(x) + \cotan(y)}$$

$$2. \quad x - y \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cotan(x - y) = -\frac{\cotan(x)\cotan(y) + 1}{\cotan(x) - \cotan(y)}$$

Cas particulier : angle double :

1. Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) \end{aligned}$$

2. La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

3. La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$:

$$\cotan(2x) = \frac{\cotan^2(x) - 1}{2\cotan(x)}$$

Formule de MOIVRE et généralisation

$$\cos(nx) + i\sin(nx) = (\cos(x) + i\sin(x))^n$$

De la formule de MOIVRE on tire, pour tout entier n non nul donné (les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= \cos^n(x) - C_n^2 \cos^{n-2}(x)\sin^2(x) + C_n^4 \cos^{n-4}(x)\sin^4(x) - \dots \\ \sin(nx) &= C_n^1 \cos^{n-1}(x)\sin(x) - C_n^3 \cos^{n-3}(x)\sin^3(x) + \dots \end{aligned}$$

Transformation des sommes

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\sin(x) + \sin(y) &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin(x) - \sin(y) &= 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \cos(x) + \cos(y) &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \sin(x) + \cos(y) &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right) \\ \sin(x) - \cos(y) &= -2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)^2$:

$$\begin{aligned}\tan(x) + \tan(y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)} \\ \tan(x) - \tan(y) &= \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}\end{aligned}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\})^2$:

$$\begin{aligned}\cotan(x) + \cotan(y) &= \frac{\sin(x+y)}{\sin(x)\sin(y)} \\ \cotan(x) - \cotan(y) &= -\frac{\sin(x-y)}{\sin(x)\sin(y)}\end{aligned}$$

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \times \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}\tan(x) + \cotan(y) &= \frac{\cos(x-y)}{\cos(x)\sin(y)} \\ \tan(x) - \cotan(y) &= -\frac{\cos(x+y)}{\cos(x)\sin(y)}\end{aligned}$$

Transformation des produits

Les relations suivantes sont valables $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\sin(x)\sin(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ \sin(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))\end{aligned}$$

La relation suivante est valable $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)^2$:

$$\tan(x)\tan(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$$

La relation suivante est valable $\forall (x, y) \in (\mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\})^2$:

$$\cotan(x)\cotan(y) = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{\cos(x-y) - \cos(x+y)}$$

Expressions en fonction de l'angle moitié

Avec la simplification d'écriture : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a :

Les relations suivantes sont valables $\forall x \in \mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin(x) &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \left(\{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}\right)$:

$$\tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

La relation suivante est valable $\forall x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\cotan(x) = \frac{1-t^2}{2t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t \right)$$