MATEMÁTICAS FINANCIERAS

TEMA:

INTERÉS COMPUESTO

1. Conceptos Básicos
2. Monto o Valor Futuro a Interés Compuesto
3. Valor Actual a Interés Compuesto
4. Cálculo del Tiempo y la Tasa de Interés a partir de la Fórmula $S=P(1+i)^n$
5. Equivalencia entre Tasa de Interés Simple y Tasa de Interés Compuesto
6. Equivalencia entre Tasas de Interés Compuesto
7. Tasa de Interés Nominal y Tasa de Interés Efectiva
8. Elección entre varias Opciones de Pago o Alternativas de Inversión a Interés Compuesto
9. Descuento de Pagarés a Interés Compuesto
10. Ecuaciones de Valores Equivalentes a Interés Compuesto
11. Tiempo Equivalente
12. Pagos Parciales. Regla Comercial y Regla de los Saldos
13. Resumen de Fórmulas Relativas al Interés Compuesto
14. Tabla para el Cálculo del Tiempo Exacto entre Dos Fechas

AUTOR:

TULIO A. MATEO DUVAL

Santo Domingo, D. N.
Rep. Dom.

MATEMÁTICAS FINANCIERAS

■ INTERÉS COMPUESTO

1. CONCEPTOS BÁSICOS

En las transacciones financieras efectuadas a interés simple el capital permanece constante durante todo el lapso convenido, en cambio en las realizadas a *interés compuesto* el capital cambia al final de cada periodo, ya que a intervalos establecidos, el interés generado es agregado al capital, formando cada vez un nuevo capital. En este caso, se dice que el interés es *capitalizable* o *convertible* en capital y, en consecuencia, también gana interés. Si los intereses producidos en cada periodo se calculan sobre capitales cada vez mayores, dado que incluyen los intereses de periodos anteriores, se le denomina *interés compuesto* al que se paga sobre capitales que se incrementan de ese modo.

En el interés compuesto, se conoce como *tasa nominal* (j) a la tasa de interés cargada a una transacción, la cual es habitualmente considerada anual, aunque los intereses no siempre sean sumados anualmente al capital. Es común que el interés también se capitalice en forma semestral, trimestral, bimestral, mensual, semanal o diariamente. El *periodo de capitalización* o *periodo de conversión* es el intervalo de tiempo existente entre dos capitalizaciones sucesivas, y el número de veces por año en las que los intereses se capitalizan se conoce como *frecuencia de capitalización* o *frecuencia de conversión* (m). A continuación se muestran los valores de las frecuencias de capitalización o de conversión (m) más usuales [1].

CAPITALIZACIÓN DE INTERESES	FRECUENCIA DE CAPITALIZACIÓN (m)
Anual	1
Semestral	2
Cuatrimestral	3
Trimestral	4
Bimestral	6
Mensual	12
Quincenal	24
Semanal	52
Diaria	360 ó 365

Al trabajar a interés compuesto se hace referencia a una tasa de interés, y con ésta ordinariamente quedan definidas la *tasa nominal* "j " (tasa anual), el *periodo de capitalización* y la *frecuencia de capitalización* "m". A seguidas se presentan varias formas de expresar la misma tasa de interés:

16% anual capitalizable trimestralmente
16% anual convertible trimestralmente
16% compuesto capitalizable trimestral
16% compuesto convertible trimestral
16% compuesto trimestral
16% nominal trimestral [2]

Si la tasa de interés se indicara sin hacer referencia a la forma de capitalización, se asume que la misma se efectúe anualmente.

Es necesario que al realizar un cálculo a interés compuesto la tasa de interés de exprese en la misma unidad de tiempo que el periodo de capitalización. Es decir, debe obtenerse la denominada *tasa de interés por periodo de*

[1] Los periodos de capitalización pueden ser tan pequeños como se desee, pudiéndose llegar hasta una capitalización continua.

[2] En esta modalidad se usa la palabra *nominal* en vez de *anual o compuesto*, indicando con esto que esa es la *tasa nominal*, es decir, la tasa anual. Lo de *trimestral* se refiere a la forma de capitalización de los intereses.

capitalización (i). Si " j " representa la tasa de interés anual (tasa nominal) y "m" la frecuencia de capitalización, entonces la *tasa de interés por periodo de capitalización* " i " se calcula mediante la fórmula:

$$i = \frac{j}{m} \qquad [1]$$

De la cual resulta que:

$$j = i * m \qquad [2]$$

Otra variable importante es la cantidad de capitalizaciones que envuelve una transacción a interés compuesto. Se le denomina *número total de periodos de capitalización* (n) a la cantidad de veces que el interés se convierte en capital durante el plazo convenido. Si se simboliza con " t " el intervalo de tiempo (expresado en años) por el cual se planea la transacción y con "m" la frecuencia de capitalización, entonces el número total de periodos de capitalización "n" se obtiene mediante la fórmula:

$$n = t_{(años)} * m \qquad [3]$$

De la cual resulta que:

$$t_{(años)} = \frac{n}{m} \qquad [4]$$

▸ Ejemplo 1

Para una inversión a un plazo de 3½ años a efectuarse al 15% anual capitalizable trimestralmente, determine: a) periodo de capitalización; b) frecuencia de capitalización; c) tasa nominal; d) tasa de interés por periodo de capitalización; y e) número total de periodos de capitalización.

SOLUCIÓN:

a) Trimestre b) m = 4 c) j = 15% d) $i = \frac{j}{m} = 15/4 = 3.75\%$

e) $n = 3.5 * 4 = 14 \ trimestres$

▸ Ejemplo 2

Hallar el interés compuesto generado por un capital[3] de $1,000.00 al 6% compuesto capitalizable anualmente al cabo de 3 años.

SOLUCIÓN:

P = $1,000.00 j = 6% m = 1 $i = \frac{j}{m} = 6/1 = 6\%$ t = 3 años

$n = 3 * 1 = 3 \ años$

PERIODO DE CAPITALIZACIÓN	CAPITAL AL INICIO DEL PERIODO ($)	INTERÉS GANADO EN EL PERIODO ($)	MONTO COMPUESTO AL FINAL DEL PERIODO ($)
1	1,000.00	60.00	1,060.00
2	1,060.00	63.60	1,123.60
3	1,123.60	67.42	1,191.02

Interés compuesto = 1,191.02 – 1000.00 = $191.02

[3] Se entenderá como CAPITAL la cantidad de dinero originalmente prestada o invertida y se representará con una "P".

▸ Ejemplo 3

Resolver el **Ejemplo 2** considerando una tasa del 6% compuesto capitalizable semestralmente.

SOLUCIÓN:

P = $1,000.00 j = 6% m = 2 $i = \frac{j}{m} = 6/2 = 3\%$ t = 3 años

$n = 3 * 2 = 6 \ semestres$

PERIODO DE CAPITALIZACIÓN	CAPITAL AL INICIO DEL PERIODO ($)	INTERÉS GANADO EN EL PERIODO ($)	MONTO COMPUESTO AL FINAL DEL PERIODO ($)
1	1,000.00	30.00	1,030.00
2	1,030.00	30.90	1,060.90
3	1,060.90	31.83	1,092.73
4	1,092.73	32.78	1,125.51
5	1,125.51	33.76	1,159.27
6	1,159.27	34.78	1,194.05

Interés compuesto = 1,194.05 – 1000.00 = $194.05

2. MONTO O VALOR FUTURO A INTERÉS COMPUESTO

El *monto* (S) *a interés compuesto* es igual al capital inicial (P) más los intereses (I) resultantes de las sucesivas capitalizaciones contempladas en la transacción de que se trate, o sea:

$$S = P + I$$ **FÓRMULA MONTO COMPUESTO** [5]

Para deducir otra fórmula que permita obtener directamente el monto compuesto, se ejecuta el mismo proceso seguido en el cuadro anterior, pero trabajando con un capital inicial "P" invertido a la tasa de interés "i" por periodo de capitalización y por "n" periodos de capitalización. Se puede verificar que el monto compuesto al término del primer periodo es P(1+i); el monto compuesto al final del segundo periodo es $P(1+i)^2$; el monto compuesto al final del tercer periodo es $P(1+i)^3$, y así sucesivamente. Esta sucesión de montos forma una progresión geométrica cuyo *n*-ésimo término corresponde al *monto compuesto* (S) al final de "n" periodos de capitalización, el cual se obtiene mediante la fórmula:

$$S = P(1+i)^n$$ **FÓRMULA MONTO COMPUESTO** [6]

donde "S" es el *monto compuesto* o *valor futuro* de un capital inicial "P", "i" es la tasa de interés por periodo de capitalización y "n " es el número total de periodos de capitalización.

A la diferencia entre el monto compuesto (S) y el capital inicial (P) se le llama *interés compuesto* (I), el cual puede obtenerse despejando a "**I**" de la fórmula [5]:

$$I = S - P$$ **FÓRMULA INTERÉS COMPUESTO** [7]

Sustituyendo en la fórmula anterior la expresión obtenida para el monto compuesto, obtenemos otra fórmula para calcular directamente el *interés compuesto*:

$$I = P(1+i)^n - P$$

Factorizando se tiene:

$$I = P[(1+i)^n - 1]$$ **FÓRMULA INTERÉS COMPUESTO** [8]

Por otra parte, el *capital inicial* "P" (inversión o deuda) se puede obtener despejando a "P" de la fórmula [5]:

$$P = S - I$$ [9]

También el *capital inicial* "P" (inversión o deuda) se deduce al despejar a "P" de la fórmula [8], resultando:

$$P = \frac{I}{[(1+i)^n - 1]}$$ [10]

▸ **Ejemplo 4**

¿Cuánto se acumulará al cabo de 2 años si se depositan $200,000.00 en una cuenta de ahorros que abona el 12.6% anual convertible mensualmente?

SOLUCIÓN:

P = $200,000.00 j = 12.6% m = 12 i = 12.6/12 = 1.05%

t = 2 años n = 2 ∗ 12 = 24 meses S = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [6], se obtiene:

$$\boldsymbol{S} = 200{,}000\,(1+0.0105)^{24} = \$256{,}981.36$$

▸ **Ejemplo 5**

Obtenga el valor futuro de un capital de $50,000.00 invertido al 8% anual capitalizable cuatrimestralmente al cabo de 3 años y 5 meses.

SOLUCIÓN:

P = $50,000.00 j = 8% m = 3 i = 0.08/3 [4] t = 3 años 5 meses

$n = \frac{3*12+5}{12}*3 = \frac{41}{12}*3 = 10.25\ cuatrimestres$ S = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [6], se obtiene:

$$\boldsymbol{S} = 50{,}000\,(1+0.08/3\,)^{10.25} = \$65{,}482.01$$ [5]

▸ **Ejemplo 6**

Hallar el monto compuesto de $426,500.00 al cabo de 6 años y 7 meses, si los dos primeros años generan intereses al 6% compuesto convertible quincenal y el tiempo restante al 2¾% semestral.

SOLUCIÓN:

<u>1ER. TRAMO</u>

P = $426,500.00 j = 6% m = 24 i = 6/24 = 0.25% quincenal t = 2 años

n = 2 ∗ 24 = 48 quincenas S_1 = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [6], se obtiene:

$$\boldsymbol{S}_1 = 426{,}500\,(1+0.0025)^{48} = \$480{,}805.40$$

<u>2DO. TRAMO</u>

P = S_1 = $480,805.40 i = 2.75% semestral m = 2 t = 4 años 7 meses

$n = \frac{4*12+7}{12}*2 = \frac{55}{12}*2 = \frac{55}{6}\ semestres$ S = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [6], se obtiene el valor del monto compuesto pedido:

$$\boldsymbol{S} = 480{,}805.40\,(1+0.0275)^{55/6} = \$616{,}551.63$$

---

[4] Esta vez "j" entre "m" se deja expresado, ya que, de dicho cociente, resulta un número con infinitas cifras decimales que no se debe redondear.

[5] Aunque la fórmula del monto compuesto se obtuvo considerando un número entero de periodos de capitalización, dicha fórmula también puede usarse cuando se tienen fracciones de periodo. Al trabajar de esta forma (que es la que aquí se empleará), se dice que se calcula con el *método teórico o exacto*. Otra manera de hacerlo es con la llamada *regla comercial*, que consiste en obtener el monto compuesto para los periodos enteros de capitalización y luego el monto simple para la fracción de periodo, utilizando como capital el monto compuesto previamente obtenido.

► **Ejemplo 7**

Calcule el interés compuesto que generará una deuda por $320,000.00 contraída al 18.4% anual capitalizable trimestralmente pagadera en un plazo de 1½ años.

SOLUCIÓN:

P = $320,000.00 j = 18.4% m = 4 i = 18.4/4 = 4.6% trimestral t = 1½ años

n = 1.5 ∗ 4 = 6 trimestres I = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [8], se obtiene:

$$\boldsymbol{I} = 320{,}000[(1+0.046)^{6} - 1] = \$99{,}121.64$$

► **Ejemplo 8**

El 10/08/2009 se efectuó una inversión en un certificado financiero que abonaba el 36% anual capitalizable diariamente. Determine el capital invertido si al día 19/10/2009 se habían generado intereses ascendentes a $9,711.07. Use año comercial.

SOLUCIÓN:

I = $9,711.07.00 j = 36% m = 360 i = 36/360 = 0.1% diario

t = n = 292 – 222 = 70 días [6] (tiempo exacto entre las dos fechas) P = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [10], se obtiene:

$$\boldsymbol{P} = \frac{9{,}711.07}{[\,(1+0.001)^{70} - 1\,]} = \$134{,}000.00$$

3. VALOR ACTUAL A INTERÉS COMPUESTO

El *valor actual* o *valor presente* a interés compuesto es el valor en una fecha determinada de una suma de dinero que se recibirá o pagará en una fecha posterior. También por *valor actual* se entiende el capital que, invertido ahora a una tasa de interés dada, alcanza un monto determinado al cabo de cierto tiempo.

Para obtener el valor actual de un monto compuesto conocido “S”, se despeja a “P” de la fórmula [6], resultando:

$$\boldsymbol{P} = \frac{\boldsymbol{S}}{(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}} = \boldsymbol{S}\,(1+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{n}} \qquad \textbf{FÓRMULA VALOR ACTUAL} \qquad [11]$$

► **Ejemplo 9**

Determine el valor actual de $180,000.00 que vencen dentro de 2½ años, si la tasa de interés es del 22% anual convertible trimestralmente.

SOLUCIÓN:

S = $180,000.00 j = 22% m = 4 i = 22/4 = 5.5% trimestral t = 2½ años

n = 2.5 ∗ 4 = 10 trimestres P = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [11], se obtiene:

$$P = 180{,}000\,(1+0.055)^{-10} = \$105{,}377.50$$

[6] Aquí se da la igualdad “ n = t (días) ” debido a que el tiempo viene dado en días y la frecuencia de capitalización “m” es igual a 360.

▸ Ejemplo 10

¿Qué depósito debe ser efectuado en una cuenta de ahorros que abona una tasa del 13.5% anual capitalizable bimestralmente, si se desea tener disponibles $310,500.00 al cabo de 17 meses?

SOLUCIÓN:

S = $310,500.00 j = 13.5% m = 6 i = 13.5/6 = 2.25% bimestral t = 17 meses

$n = \frac{17}{12} * 6 = \frac{17}{2} = 8.5 \; bimestres$ P = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [11], se obtiene:

$$\boldsymbol{P} = 310{,}500(1+0.0225)^{-8.5} = \$256{,}994.25$$

▸ Ejemplo 11

¿Cuánto debe invertirse ahora al 1.8% mensual para tener $408,340.11 en 2 años y 3 meses? ¿Cuánto se gana por concepto de intereses?

SOLUCIÓN:

S = $408,340.11 i = 1.8% mensual m = 12 t = 2 años y 3 meses

$n = \frac{2*12+3}{12} * 12 = 27 \; meses$ P = ? I = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [11], se obtiene el valor de la inversión:

$$P = 408{,}340.11(1+0.018)^{-27} = \$252{,}250.50$$

Sustituyendo los valores de "S" y "P" en la fórmula [7], se obtiene el interés generado:

$$\boldsymbol{I} = 408{,}340.11 - 252{,}250.50 = \$156{,}089.61$$

4. CÁLCULO DEL TIEMPO Y LA TASA DE INTERÉS A PARTIR DE LA FÓRMULA $S = P(1+i)^n$

El tiempo requerido para que un capital "P", colocado a una tasa de interés anual "j " capitalizable "m" veces por año, es decir, a una tasa de interés por periodo "i", alcance un monto "S", se obtiene al despejar a "n" de la fórmula [6], resultando:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{log}\,(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{P})}{\boldsymbol{log}\,(1+\boldsymbol{i})} \qquad [12]$$

Como "n" representa el número total de periodos de capitalización, entonces el tiempo expresado en años [7] se calcula mediante la fórmula [4]:

$$\boldsymbol{t}_{(años)} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}$$

Igualmente la tasa de interés por periodo "i" a la que habría que prestar o invertir un capital "P" para que en "n" periodos de capitalización alcance el monto "S", se obtiene al despejar a "i" de la fórmula [6], resultando:

$$\boldsymbol{i} = \sqrt[n]{(\boldsymbol{S}/\boldsymbol{P})} - 1 \qquad [13]$$

[7] Después que se tiene el tiempo expresado en años puede hacerse la conversión a cualquier otra unidad (meses, quincenas, semanas, etc.).

Luego de calculado el valor de "i", si fuera preciso obtener la tasa anual de interés compuesto " j ", se procedería según la fórmula [2] a multiplicar el valor obtenido de "i" por la frecuencia de capitalización "m", u obtenerla directamente de la multiplicación de "m" por la expresión anterior, resultando:

$$j = m\left[\sqrt[n]{(S/P)} - 1\right] \qquad [14]$$

▸ Ejemplo 12

¿Qué tiempo (años) es necesario para que una inversión de $41,400.00 efectuada al 12% anual capitalizable bimestralmente genere intereses ascendentes a $8,076.83?

SOLUCIÓN:

P = $41,400.00 I = $8,076.83 S = P + I = $49,476.83

j = 12% m = 6 i = 12/6 = 2% bimestral n = ? t = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [12], se obtiene:

$$n = \frac{log\ (49{,}476.83/41{,}400)}{log\ (1+0.02)} = 9\ bimestres$$

El cálculo del tiempo (años) se realiza empleando la fórmula [4]:

$$t_{(años)} = \frac{9}{6} = 1.5\ años = 1½\ años$$

▸ Ejemplo 13

¿En qué tiempo (meses) fue saldada una deuda por $115,000.00, si la misma fue contraída al 1.5% mensual capitalizable cuatrimestralmente y se liquidó pagando la suma de $147,315.27?

SOLUCIÓN:

P= $115,000.00 S = $147,315.27

j = 1.5 ∗ 12 = 18% [8] m = 3 i = 18/3 = 6% cuatrimestral n = ? t = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [12], se obtiene:

$$n = \frac{log\ (147{,}315.27/115{,}000)}{log\ (1+0.06)} = 4.25\ cuatrimestres$$

Como los cuatrimestres son periodos de 4 meses, luego el tiempo pedido (meses) será:

$$t_{(meses)} = 4.25 * 4 = 17\ meses$$

▸ Ejemplo 14

Encuentre la fecha de cancelación de un crédito por $79,300.00, concertado el 14 de mayo, con intereses al 37.8% anual capitalizable diariamente, si el mismo fue saldado mediante el pago de $89,659.90. Use año comercial.

SOLUCIÓN:

P = $79,300.00 S = $89,659.90

j = 37.8% m = 360 i = 37.8/360 = 0.105% diario n = ? fecha = ?

[8] Una tasa del 1.5% mensual equivale a una tasa nominal o tasa anual del 18%.

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [12], se obtiene:

$$n = t = \frac{log\ (89{,}659.90/79{,}300)}{log\ (1 + 0.00105)} = 117\ días$$ [9]

Como el número de orden para la fecha 14 de mayo es –» 134 (ver TABLA)

$$\begin{array}{r} 134 \\ +\,117 \\ \hline 251 \end{array}$$

251 –» Este es el número de orden de la fecha buscada. En la TABLA se ubica ese número, obteniéndose la fecha: 8 de septiembre.

▸ **Ejemplo 15**

¿En cuánto tiempo (a/m/d) un capital se aumenta en un 50%, si el dinero se invierte al 15% anual capitalizable quincenalmente?

SOLUCIÓN:

P = \$100.00 (VALOR ASUMIDO. PODEMOS ASUMIR CUALQUIER VALOR PARA "P")

S = 100 (1+ 0.50) = \$150.00

j = 15% m = 24 i = 15/24 = 0.625% quincenal n = ? t = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [12], se obtiene:

$$n = \frac{log\ (150/100)}{log\ (1 + 0.00625)} = 65.07693933\ quincenas$$

Para el cálculo del tiempo (años) se utiliza la fórmula [4]:

$$t_{(años)} = \frac{65.07693933}{24} = 2.711539139\ \textbf{años}$$

$$\begin{array}{rl} -2.000000000 & \textbf{años completos} \\ \hline 0.711539139 & \textbf{años} \\ \times\ 12 & \\ \hline 8.538469664 & \textbf{meses} \\ -8.000000000 & \textbf{meses completos} \\ \hline 0.538469664 & \textbf{meses} \\ \times\ 30 & \\ \hline 16.15408992 & \textbf{días} \end{array}$$

RESP.: 2 ***años*** 8 ***meses*** 16 ***días***

---

[9] Aquí se da la igualdad " n = t (días) " debido a que el tiempo viene dado en días y la frecuencia de capitalización "m" es igual a 360.

▸ Ejemplo 16

¿Qué tasa compuesta capitalizable mensualmente le fue cargada a una deuda de $88,500.00, si al cabo de un año y medio fue cancelada pagando la suma de $138,029.80?

SOLUCIÓN:

P = $88,500.00 S = $138,029.80 t = 1.5 años

j = ? m = 12 n = 1.5 ∗ 12 = 18 meses

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [14], se obtiene:

$$\boldsymbol{j} = 12\left[\sqrt[18]{\left(\frac{138,029.80}{88,500}\right)} - 1\right] = 0.30 = 30\%$$

▸ Ejemplo 17

¿Cuál sería la tasa de rendimiento anual convertible trimestralmente que obtendría un inversionista si deposita $370,900.00 con la garantía de que en 15 meses alcanzaría la suma de $442,645.00?

SOLUCIÓN:

P = $370,900.00 S = $442,645.00 t = 15 meses

j = ? m = 4 $n = \frac{15}{12} * 4 = 5\ trimestres$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [14], se obtiene:

$$\boldsymbol{j} = 4\left[\sqrt[5]{\left(\frac{442,645}{370,900}\right)} - 1\right] = 0.144 = 14.4\%$$

▸ Ejemplo 18

¿A qué tasa compuesta convertible semanalmente se aumenta en un 40% una inversión realizada a 2 años de plazo?

SOLUCIÓN:

P = $100.00 (VALOR ASUMIDO. PODEMOS ASUMIR CUALQUIER VALOR PARA “P”)

S = 100 (1 + 0.40) = $140.00 t = 2 años

j = ? m = 52 n = 2 ∗ 52 = 104 semanas

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [14], se obtiene:

$$\boldsymbol{j} = 52\left[\sqrt[104]{\left(\frac{140}{100}\right)} - 1\right] = 0.1685 = 16.85\%$$

5. EQUIVALENCIA ENTRE TASA DE INTERÉS SIMPLE Y TASA DE INTERÉS COMPUESTO

Se dice que una tasa de interés simple y una tasa de interés compuesto son *equivalentes* si al invertir dos capitales iguales, uno de ellos a la tasa de interés simple y el otro a la tasa de interés compuesto, alcanzan igual monto al cabo del mismo periodo de tiempo.

Si se invierte un capital "P" a una tasa de interés simple anual "i_s" y por un tiempo (en años) "t", el monto "S_s" resultante se obtiene mediante la fórmula:

$$S_s = P(1 + i_s t) \qquad (A)$$

Por otro lado, si se invierte el mismo capital "P" a una tasa anual "j" capitalizable "m" veces por año, es decir, a una tasa de interés por periodo "i" $(i = j/m)$, por un número de periodos "n" $[\, n = t_{(años)} * m \,]$, el monto "$S_c$" alcanzado se obtiene mediante la fórmula:

$$S_c = P(1 + i)^n \qquad (B)$$

Igualando (A) y (B), se tiene:

$$P(1 + i_s t) = P(1 + i)^n \qquad (C)$$

Dividiendo ambos miembros entre "P" y despejando a "i_s", se obtiene la fórmula que permite hallar una tasa de interés simple anual equivalente a una tasa de interés compuesto conocida:

$$i_s = \frac{[(1 + i)^n - 1]}{t} \qquad [15]$$

Igualmente si en la igualdad (C) se dividen ambos miembros entre "P" y se despeja la tasa de interés por periodo "i", se obtiene la fórmula $i = \sqrt[n]{(1 + i_s t)} - 1$

Luego, la tasa de interés compuesto "j" equivalente a una tasa de interés simple conocida se obtiene al multiplicar el valor obtenido de "i" por la frecuencia de capitalización "m":

$$j = m \left[\sqrt[n]{(1 + i_s t)} - 1 \right] \qquad [16]$$

▸ Ejemplo 19

¿Qué tasa de interés simple anual es equivalente al 11.2% anual convertible trimestralmente para un plazo de 5 años?

SOLUCIÓN:

j = 11.2% m = 4 i = 11.2/4 = 2.8% trimestral t = 5 años

n = 5 ∗ 4 = 20 trimestres $i_s = ?$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [15], se obtiene:

$$i_s = \frac{[(1 + 0.028)^{20} - 1]}{5} = 0.14745 = 14.745\%$$

▸ **Ejemplo 20**

¿Qué tasa compuesta capitalizable mensualmente es equivalente al 27% simple anual a dos años y medio de plazo?

SOLUCIÓN:

$i_s = 27\%$ t = 2.5 años j = ? m = 12 n = 2.5 ∗ 12 = 30 meses

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [16], se obtiene:

$$j = 12\left[\sqrt[30]{(1+0.27*2.5)} - 1\right] = 0.2081 = 20.81\%$$

6. EQUIVALENCIA ENTRE TASAS DE INTERÉS COMPUESTO

Se dice que *dos tasas de interés anuales con diferentes periodos de capitalización son equivalentes* si, al invertir dos capitales iguales, se alcanzan montos compuestos iguales al cabo del mismo plazo. Tal situación se puede verificar si se plantea la inversión a tres (3) años de plazo de un mismo capital de $10,000.00 a las tasas anuales de 8% anual capitalizable trimestralmente y 8.08% anual capitalizable semestralmente. Como en ambos casos se obtiene el mismo monto compuesto ($12,682.42), se dice que dichas tasas de interés son equivalentes.

Si se invierte un capital "$\boldsymbol{P}$" a un tiempo de "$\boldsymbol{t}$" años y a una tasa anual "$\boldsymbol{j}_1$" capitalizable "$\boldsymbol{m}_1$" veces por año, el monto compuesto "$\boldsymbol{S}_1$" resultante se obtiene mediante la fórmula [6]:

$$\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{P}(1+\boldsymbol{j}_1/\boldsymbol{m}_1)^{\boldsymbol{t}\boldsymbol{m}_1} \qquad (\boldsymbol{A})$$

De igual forma, si se invierte el mismo capital "$\boldsymbol{P}$" a un tiempo de "$\boldsymbol{t}$" años y a una tasa anual "$\boldsymbol{j}_2$" capitalizable "$\boldsymbol{m}_2$" veces por año, el monto compuesto "$\boldsymbol{S}_2$" resultante se obtiene mediante la fórmula [6]:

$$\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{P}(1+\boldsymbol{j}_2/\boldsymbol{m}_2)^{\boldsymbol{t}\boldsymbol{m}_2} \qquad (\boldsymbol{B})$$

Para tasas equivalentes resultarán iguales $(\boldsymbol{A})$ y $(\boldsymbol{B})$:

$$\boldsymbol{P}(1+\boldsymbol{j}_1/\boldsymbol{m}_1)^{\boldsymbol{t}\boldsymbol{m}_1} = \boldsymbol{P}(1+\boldsymbol{j}_2/\boldsymbol{m}_2)^{\boldsymbol{t}\boldsymbol{m}_2}$$

Dividiendo ambos miembros entre "$\boldsymbol{P}$" y despejando a "$\boldsymbol{j}_1$", se obtiene la fórmula que permite hallar una tasa de interés anual "$\boldsymbol{j}_1$" capitalizable "$\boldsymbol{m}_1$" veces por año, equivalente a una tasa de interés anual conocida "$\boldsymbol{j}_2$" capitalizable "$\boldsymbol{m}_2$" veces por año [10]:

$$j_1 = m_1\left[\left(1+\frac{j_2}{m_2}\right)^{\frac{m2}{m1}} - 1\right] \qquad [17]$$

[10] Si siempre se identifica con "j_2" la tasa de interés compuesto conocida, entonces invariablemente se podrá obtener la tasa de interés equivalente con la fórmula de "j_1", o sea, con la fórmula [17].

▸ Ejemplo 21

¿Cuál es la tasa anual capitalizable trimestralmente equivalente al 22% anual capitalizable mensualmente?

SOLUCIÓN:

$J_2 = 22\%$ $m_2 = 12$ $j_1 = ?$ $m_1 = 4$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [17], se obtiene:

$$j_1 = 4\left[\left(1+\frac{0.22}{12}\right)^{(12/4)} - 1\right] = 0.224058 = 22.4058\ \%$$

▸ Ejemplo 22

¿Cuál es la tasa compuesta capitalizable anualmente equivalente al 27% compuesto convertible quincenal?

SOLUCIÓN:

$J_2 = 27\%$ $m_2 = 24$ $j_1 = ?$ $m_1 = 1$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [17], se obtiene:

$$j_1 = 1\left[\left(1+\frac{0.27}{24}\right)^{(24/1)} - 1\right] = 0.30799 = 30.7991\,\%$$

▸ Ejemplo 23

¿Qué es más productivo: invertir al 32% anual convertible semanal o al 33% anual capitalizable cuatrimestral?

SOLUCIÓN:

Para hacer la comparación se debieran tener las 2 tasas expresadas con la misma frecuencia (se usará capitalización semanal, aunque se puede usar cualquier otra frecuencia). Como la primera está por semana, sólo resta hallar la tasa anual capitalizable semanalmente equivalente a la segunda:

$J_2 = 33\%$ $m_2 = 3$ $j_1 = ?$ $m_1 = 52$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [17], se obtiene

$$j_1 = 52\left[\left(1+\frac{0.33}{3}\right)^{(3/52)} - 1\right] = 0.314024 = 31.4024\ \% \quad < \quad 32\ \%$$

RESP.: Es más productivo invertir al 32% anual convertible semanal.

7. TASA DE INTERÉS NOMINAL Y TASA DE INTERÉS EFECTIVA

La tasa anual, independientemente de su frecuencia de capitalización "m", se conoce como *tasa nominal* "j". La tasa nominal no refleja directamente la realidad en cuanto a los intereses generados anualmente por un capital, en vista de que, para realizar cálculos a interés compuesto, en vez de usar la tasa nominal, se trabaja con una *tasa de interés por periodo de capitalización o tasa efectiva por periodo de capitalización* "i" $(i = j/m)$, designada de esta forma porque es la que realmente actúa sobre el capital, mostrando el verdadero interés generado al final de cada periodo establecido. La *tasa efectiva por periodo de capitalización* "i" usualmente se expresa mediante un número (en %) seguido del periodo de capitalización de los intereses; por ejemplo: 2% mensual, 5% cuatrimestral, 9% semestral o 24% anual.

Una tasa anual muy utilizada por los inversionistas al momento de decidir la colocación de sus capitales es la llamada *tasa efectiva* o *tasa efectiva anual* "j_e" [11], la cual se refiere a la tasa efectivamente ganada o pagada en un año. Por ejemplo, la tasa de interés del 27% compuesto convertible quincenal es equivalente a un 30.7991% compuesto anual, es decir, a una tasa efectiva del 30.7991%, tal como se vio en el **Ejemplo 22**. Sobre ese particular, se debe precisar que, en general, la tasa efectiva "j_e" será mayor que lo expresado por la tasa nominal "j" capitalizable "m" veces al año, siempre que "m > 1", y será exactamente igual a la tasa nominal si "m = 1", es decir cuando la tasa nominal sea capitalizada anualmente.

La relación entre las tasas nominal y efectiva se puede manejar con la fórmula [17], es decir, con la expresión usada para el cálculo de tasas equivalentes, siempre y cuando "j_2" represente la tasa conocida y "j_1" o "j_e" la tasa equivalente (nominal o efectiva) a encontrar. Por ejemplo, veamos a continuación los dos casos posibles:

1. Si se conoce una tasa efectiva (ésta se identificaría con "j_2" y "m_2" sería igual a 1) y se desea obtener una tasa nominal (ésta se identificaría con "j_1" y "m_1" sería su frecuencia de capitalización), el caso se resuelve directamente aplicando la fórmula [17]; y

2. Si se conoce una tasa nominal (ésta se identificaría con "j_2" y "m_2" sería su frecuencia de capitalización) y se desea obtener una tasa efectiva (ésta se identificaría con "j_e" [12] y "m_1" sería igual a 1), el caso se resuelve aplicando la fórmula [17], o bien con la expresión simplificada que resulta de ésta, al considerar que se va a encontrar una tasa equivalente (efectiva) con una frecuencia de capitalización "$m_1 = 1$":

$$j_e = \left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{m_2} - 1 \qquad [18]$$

▸ Ejemplo 24

¿Cuál es la tasa efectiva equivalente al 23.7% anual capitalizable trimestralmente?

SOLUCIÓN:

$J_2 = 23.7\%$ $m_2 = 4$ $j_e = ?$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [18], se obtiene:

$$j_e = \left(1 + \frac{0.237}{4}\right)^{4} - 1 = 0.258908 = 25.8908\,\%$$

[11] De la *tasa efectiva anual* o *rendimiento anual efectivo* también puede decirse que es la *tasa de interés simple* que produce el mismo monto en un año que la tasa nominal capitalizada "m" veces al año.

[12] Al hallar una tasa "j_1" con una frecuencia $m_1 = 1$, es decir, una tasa efectiva, se cambia el subíndice "1" por "e" y se representa con "j_e".

► **Ejemplo 25**

Encuentre la tasa de interés capitalizable semanalmente equivalente a una tasa efectiva del 25%.

SOLUCIÓN:

$J_2 = 25\%$ $m_2 = 1$ $j_1 = ?$ $m_1 = 52$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [17], se obtiene:

$$j_1 = 52\left[\left(1 + \frac{0.25}{1}\right)^{(1/52)} - 1\right] = 0.223623 = 22.3623\ \%$$

8. ELECCIÓN ENTRE VARIAS OPCIONES DE PAGO O ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN A INTERÉS COMPUESTO

Aquí de lo que se trata es de elegir la forma de pago o la alternativa de inversión que responda mejor a los intereses del que realiza el análisis, haciéndolo esta vez a interés compuesto. Para el caso del pago de una deuda, la evaluación se realiza comparando los valores actuales (o valores de contado equivalentes) de los pagos correspondientes a las diferentes opciones, eligiéndose la que envuelva la menor erogación. Por otro lado, para elegir una entre varias alternativas de inversión, se procede a comparar las tasas de rendimiento o los montos que acumularían tales inversiones al cabo de un periodo de tiempo.

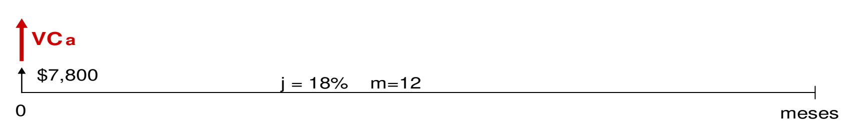
► **Ejemplo 26**

Un señor dispone de 3 formas de pago de un artículo, a saber: a) $7,800.00 de contado; b) $2,000.00 de inicial y $7,400.00 en 18 meses; o c) $5,000.00 en 4 meses y $3,500.00 dentro de 10 meses. ¿Qué forma de pago es más conveniente para el señor, suponiendo un rendimiento del dinero del 18% compuesto mensual?

SOLUCIÓN:

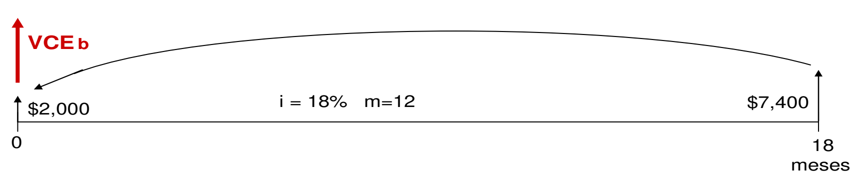
Las 3 opciones de pago no podrían compararse tal como están expresadas, pues los valores envueltos vencen en fechas diferentes. Para poder realizar la comparación se referirán los pagos a la fecha inicial (ya que en ésta es que se debe tomar la decisión) para obtener el Valor de Contado (VC) o Valor de Contado Equivalente (VCE) correspondiente a cada opción, procediéndose luego a seleccionar la que arroje la menor erogación.

1) OPCIÓN “a”



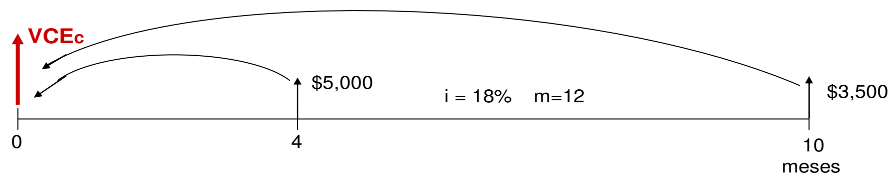
VC_a = $7,800.00 –» Este valor permanece igual.

2) OPCIÓN “b”



$$VCE_b = 2,000 + 7,400(1 + 0.015)^{-18} = \$7,660.35$$

3) OPCIÓN "c"



$$VCE_c = 5{,}000(1+0.015)^{-4} + 3{,}500(1+0.015)^{-10} = \$7{,}726.76$$

RESPUESTA : Al comparar los valores VCa, VCEb y VCEc, se concluye en que se debería elegir la OPCIÓN "b" por involucrar la erogación de menor cuantía.

▸ Ejemplo 27

¿Qué forma de pago de las señaladas a continuación es más conveniente para el comprador de un solar, si el rendimiento del dinero es de un 36% nominal mensual?

a) $890,000.00 de contado.

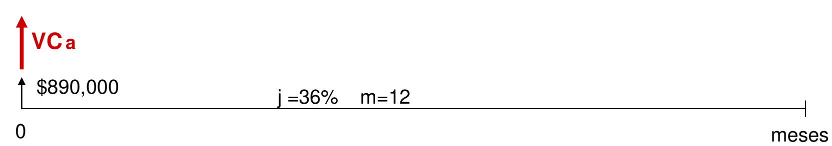
b) 3 pagos trimestrales iguales de $334,300.00 comenzando inmediatamente.

c) $200,000.00 de inicial y 3 pagos semestrales iguales de $280,000.00 comenzando en 2 meses.

SOLUCIÓN:

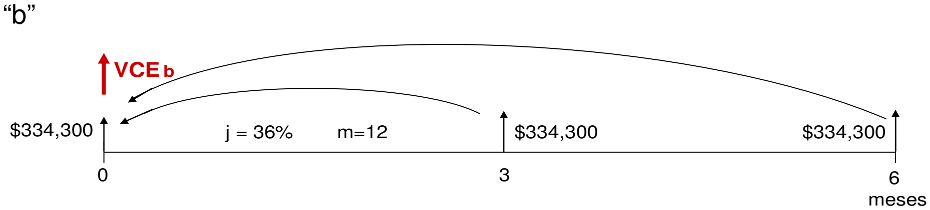
Las 3 opciones de pago no podrían compararse tal como están expresadas, pues los valores envueltos vencen en fechas diferentes. Se obtiene el Valor de Contado (VC) o Valor de Contado Equivalente (VCE) correspondiente a cada opción, procediéndose luego a seleccionar la que arroje la menor erogación.

1) OPCIÓN "a"



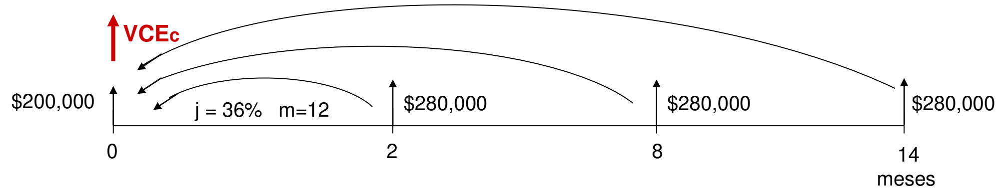
VC a = $890,000.00 –» Este valor permanece igual.

2) OPCIÓN "b"



$$VCE_b = 334{,}300 + 334{,}300(1+0.03)^{-3} + 334{,}300(1+0.03)^{-6} = \$920{,}202.84$$

3) OPCIÓN “c”



$$\boldsymbol{VCE_c} = 200{,}000 + 280{,}000(1+0.03)^{-2} + 280{,}000(1+0.03)^{-8} + 280{,}000(1+0.03)^{-14} = \$870{,}074.43$$

RESPUESTA : Al comparar los valores VCa, VCEb y VCEc, se concluye en que se debería elegir la <u>OPCIÓN “c”</u> por involucrar la erogación de menor cuantía.

▸ Ejemplo 28

¿Qué resulta más rentable: efectuar un depósito en un certificado financiero que abona el 17.8% compuesto quincenal o invertir en un negocio que garantiza que la suma invertida se duplique en 4 años?

SOLUCIÓN:

La elección se puede efectuar, o comparando tasas de rendimiento o comparando montos. Este ejemplo será resuelto con los 2 criterios.

1. <u>Comparando tasas</u>:

OPCIÓN “a” –» $j_a = 17.8\%$ $m_a = 24$

OPCIÓN “b” –» Se calcula la tasa que garantizaría que se duplique la inversión

$j_b = ?$ $m_b = 24$ $n = 4 * 24 = 96$ $P = \$100.00$ $S = 2(100) = \$200.00$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [14], se obtiene:

$$\boldsymbol{j_b} = 24\left[\sqrt[96]{\left(\frac{200}{100}\right)} - 1\right] = 0.1739 = 17.39\% \quad \langle \quad 17.8\%$$

RESPUESTA : Al comparar las dos tasas, se concluye en que se debería invertir en el certificado financiero, toda vez que en éste, el rendimiento del dinero sería mayor que si se invirtiera en el negocio (17.8% > 17.39%).

2. <u>Comparando montos</u>:

Para efectuar la comparación, se trabaja con el tiempo de 4 años y se asume una suma a invertir, por ejemplo de: P = $10,000.00. Luego para:

OPCIÓN “a” –» Se sustituyen los valores conocidos en la fórmula [6], resultando:

$$\boldsymbol{S_a} = 10{,}000(1+0.178/24)^{96} = \$20{,}327.16$$

OPCIÓN “b” –» Como se estipula que la inversión su duplicará, el monto resultante al cabo de los 4 años sería:

$$\boldsymbol{S_b} = 10{,}000\,(2) = \$20{,}000.00$$

RESPUESTA : Al comparar los dos montos, se concluye en que se debería invertir en el certificado financiero, toda vez que en éste, el monto alcanzado sería mayor que si el dinero se invirtiera en el negocio ($20,327.16 > $20,000.00).

▸ **Ejemplo 29**

Ramón Lora se dispone a efectuar un depósito a plazo fijo y como es cliente de dos bancos, duda sobre invertir en uno o en el otro. Si el Banco Oriental ofrece pagarle un 15% compuesto mensual y el Banco del Caribe, un 14.85% compuesto diariamente, determine en cuál banco le resultaría más rentable invertir al Señor Lora, si ambos tienen el mismo nivel de riesgo.

SOLUCIÓN: La elección se efectuará comparando las tasas de rendimiento.

Para realizar la comparación se debieran tener las 2 tasas expresadas con la misma frecuencia. Para alcanzar ese objetivo, se obtendrá una tasa compuesta diariamente que sea equivalente al 15% compuesto mensual.

$J_2 = 15\%$ $m_2 = 12$ $j_1 = ?$ $m_1 = 360$

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [17], se obtiene:

$$j_1 = 360\left[\left(1+\frac{0.15}{12}\right)^{(12/360)} - 1\right]$$

$$j_1 = 14.91\% \quad \rangle \quad 14.85\%$$

RESPUESTA : Es más rentable invertir en el Banco Oriental.

9. DESCUENTO DE PAGARÉS A INTERÉS COMPUESTO

La operación conocida como *descuento de un pagaré* consiste en la negociación de un pagaré antes de su fecha de vencimiento. En ésta, el poseedor del pagaré lo cede, generalmente a una entidad financiera, a cambio del cobro anticipado del valor del mismo, aceptando un descuento por concepto de los servicios prestados (intereses, comisiones, etc.).

A interés compuesto el descuento de un pagaré normalmente se trabaja usando el *descuento racional o matemático*. Al emplear la modalidad del *descuento racional* el cálculo del pago anticipado "P_d" (valor líquido o efectivo del pagaré) y del descuento "D_r" se realiza de la siguiente forma:

1. Para el cálculo de "P_d" se obtiene primero el valor del pagaré al vencimiento y luego se halla el valor descontado o líquido. Esto se efectúa en la fecha que se lleve a cabo la transacción, usando la tasa de interés compuesto aplicable al descuento racional, mediante la fórmula:

$$P_d = S(1+i)^{-n}$$ VALOR LÍQUIDO O EFECTIVO DEL PAGARE [19]

2. El *descuento racional compuesto* "D_r", esto es, la diferencia entre el valor de vencimiento del pagaré "S" y su valor descontado "P_d" (valor líquido o efectivo del pagaré) se determinará mediante la fórmula:

$$D_r = S - P_d$$ DESCUENTO RACIONAL COMPUESTO [20]

De esta fórmula, despejando se obtiene a "P_d" y a "S", resultando:

$$P_d = S - D_r$$ [21] $$S = P_d + D_r$$ [22]

Otra expresión matemática para calcular el *descuento racional compuesto* "D_r" se obtiene al sustituir la fórmula [19] en la fórmula [20]:

$$D_r = S - S(1+i)^{-n}$$

De donde resulta:

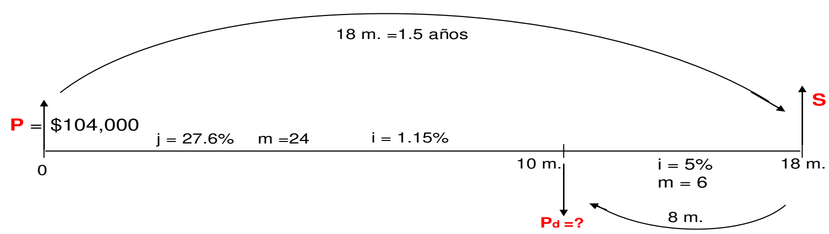
$$D_r = S\,[1-(1+i)^{-n}]$$ DESCUENTO RACIONAL COMPUESTO [23]

De la expresión anterior se obtiene otra fórmula para obtener a "S":

$$S = \frac{D_r}{[1-(1+i)^{-n}]}$$ [24]

▸ Ejemplo 30

Maquinarias Pesadas, S.R.L., recibió un pagaré (como parte del pago de unos equipos vendidos) por $104,000.00 con intereses al 27.6% anual convertible quincenal y vencimiento en año y medio. A fin de obtener efectivo, ocho meses antes del vencimiento del pagaré, dicha firma lo descuenta en un banco en base a una tasa del 5% bimestral. Determine el descuento racional compuesto y el valor efectivo del pagaré.



SOLUCIÓN:

P = $104,000.00 j = 27.6% m = 24 i = 27.6 / 24 = 1.15% quincenal

t = 1.5 años n = 1.5 ∗ 24 = 36 quincenas S = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [6], se obtiene el valor al vencimiento del pagaré:

$$\boldsymbol{S} = 104{,}000\,(1+0.0115)^{36} = \$156{,}965.89$$

Para la operación del descuento del pagaré, se tiene:

S = $156,965.89 i = 5% bimestral m = 6 t = 8 m. n = 4 bimestres

Dr = ? Pd = ?

Luego, sustituyendo los valores conocidos en las fórmulas [23] y [21], se tienen el valor del descuento racional compuesto y el valor efectivo del pagaré:

$$\boldsymbol{D_r} = 156{,}965.89\,[1-(1+0.05)^{-4}\,] = \$27{,}829.66$$

$$\boldsymbol{P_d} = 156{,}965.89 - 27{,}829.66 = \$129{,}136.23$$

▸ Ejemplo 31

Un pagaré cuyo valor dentro de 180 días es de $312,500.00, se adquiere hoy por $257,323.00. ¿Con qué tasa de interés anual convertible semanalmente se descontó el pagaré?

SOLUCIÓN:

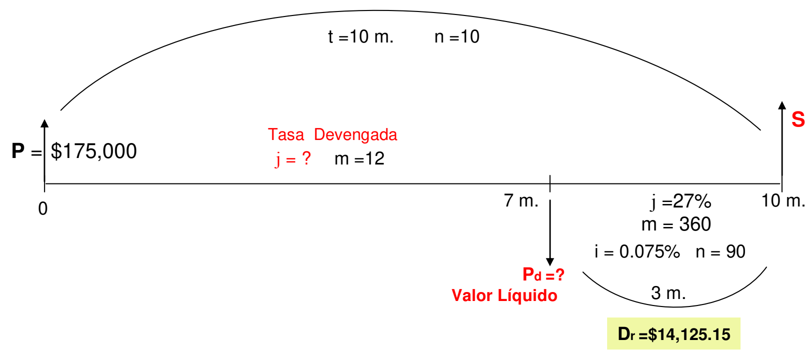
S = $312,500.00 Pd = $257,323.00 j = ? m = 52 t = 180 días = 0.5 años n = 0.5 ∗ 52 = 26 semanas

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [14], se obtiene la tasa de interés buscada:

$$\boldsymbol{j} = 52\left[\sqrt[26]{\left(\frac{312{,}500}{257{,}323}\right)} - 1\right] = 0.39 = 39\,\%$$

▸ **Ejemplo 32**

Un pagaré se firmó por un valor de $175,000.00 a una tasa anual capitalizada mensualmente y vencimiento en 10 meses. Si a los 7 meses de firmado, el pagaré se descontó en base a un 27% anual convertible diariamente, provocando un descuento racional compuesto ascendente a $14,125.15, determine: a) El valor líiquido del pagaré y b) La tasa anual capitalizada mensualmente que devengaba el pagaré.



SOLUCIÓN:

a) Para la operación del descuento del pagaré, se tiene:

D_r = $14,125.15 j = 27% m = 360 i = 27/360 = 0.075% t = 3 meses

n = 3/12 ∗ 360 = 90 días S = ?

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [24], se obtiene el valor al vencimiento del pagaré:

$$S = \frac{14{,}125.15}{[1-(1+0.00075)^{-90}]} = \$216{,}481.94$$

Conocidos los valores de "S" y "D_r", se obtiene a "P_d" mediante la fórmula [21]:

$$P_d = 216{,}481.94 - 14{,}125.15 = \$216{,}481.94$$

b) Para la deuda sustentada por el pagaré (tramo superior del diagrama), se tiene:

P = $175,000.00 S = $216,481.94 t = n = 10 meses j = ? m =12

Luego, sustituyendo los valores conocidos en la fórmula [14], se obtiene la tasa de interés pedida:

$$j = 12\left[\sqrt[10]{\left(\frac{216{,}481.94}{175{,}000.00}\right)} - 1\right] = 0.2580 = 25.80\%$$

10. ECUACIONES DE VALORES EQUIVALENTES A INTERÉS COMPUESTO

Una *ecuación de valores equivalentes o ecuación de valor* es la equivalencia financiera planteada en términos algebraicos de dos conjuntos de obligaciones o flujos de capitales, cuyos vencimientos coinciden o se han hecho coincidir en una fecha de referencia conocida como *fecha focal.* Normalmente dichos conjuntos están relacionados a flujos de deudas y de pagos, o bien, uno se refiere a los depósitos y el otro a los retiros efectuados en una cuenta bancaria. El caso también se verifica cuando se presentan transacciones en las que un deudor desea reemplazar un conjunto de pagos que debe realizar a un determinado acreedor, por otro conjunto que sea equivalente, pero con otras cantidades y fechas de vencimiento.

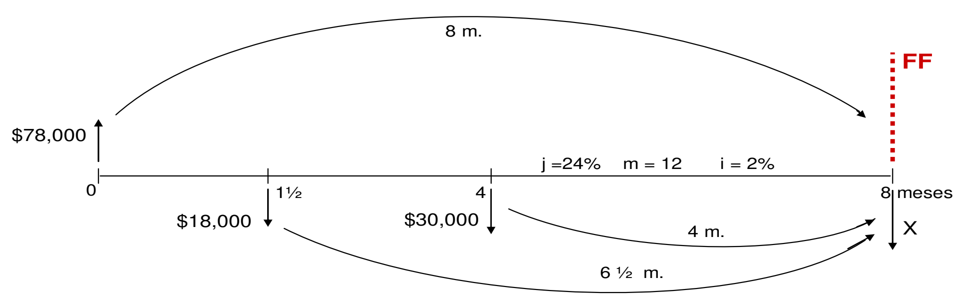
Para formular una ecuación de valor se debe expresar la suma financiera de todos los capitales pertenecientes a cada conjunto, trasladándolos todos ellos a una cierta fecha, tomando en cuenta el aumento o disminución del dinero a través del tiempo. A ese vencimiento o fecha de referencia se le conoce como *fecha focal*. Después que se tiene la ecuación, se procede a despejar la(s) incógnita(s), obteniéndose la solución del problema planteado.

Para viabilizar la comprensión de los problemas financieros que se resuelven con las ecuaciones de valores equivalentes, se recomienda esquematizarlos, usando los *diagramas temporales* o *diagramas tiempo-valor* [13], en donde se establece la fecha focal en la cual se van a igualar los dos flujos de capitales. Es sabido que cuando se trata de interés simple, la solución de un problema de este tipo varía un poco dependiendo de la localización elegida para la fecha focal. En el caso del interés compuesto, por el contrario, dos conjuntos de capitales que son equivalentes en una fecha también lo serán en cualquier otra y, por ello, puede seleccionarse cualquier ubicación para la fecha focal.

▸ Ejemplo 33

Digna Abreu recibió $78,000.00 prestados con intereses al 24% anual convertible mensual, comprometiéndose a liquidar dicha deuda mediante 3 pagos: $18,000.00 al cabo de 1½ meses, $30,000.00 dentro de 4 meses y un último pago al cabo de 8 meses. Determine la cuantía del tercer pago y el interés total pagado.

Diagrama temporal con la FF establecida a los 8 meses:



Ecuación de valor:

$$78{,}000(1+0.02)^{8} = 18{,}000(1+0.02)^{6.5} + 30{,}000(1+0.02)^{4} + \boldsymbol{X}$$

$$91{,}389.43 = 52{,}945.59 + X$$

$$91{,}389.43 - 52{,}945.59 = \boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{X} = \$38{,}443.84$$ –» Valor del pago final

[13] Dichos diagramas consisten en una línea horizontal con una escala de tiempo (en años, meses o días), en la cual se indican las sumas de dinero de los dos conjuntos de capitales en sus correspondientes vencimientos, representándose uno de los conjuntos con flechas dirigidas hacia arriba del eje del tiempo y, el otro conjunto, con flechas que se dirigen hacia abajo.

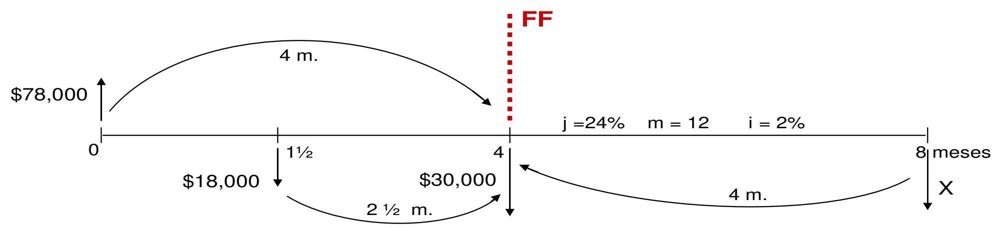
Interés total pagado $I =$ Suma de Pagos – Deuda

$$I = (18{,}000 + 30{,}000 + 38{,}443.84) - 78{,}000$$

$$I = \$8{,}443.84$$ –» Interés total pagado

▸ Ejemplo 34

Resuelva nuevamente el **Ejemplo 33** situando la fecha focal (FF) a los 4 meses.



Ecuación de valor:

$$78{,}000(1+0.02)^{4} = 18{,}000(1+0.02)^{2.5} + 30{,}000 + X(1+0.02)^{-4}$$

$$84{,}429.71 = 48{,}913.54 + X(1.02)^{-4}$$

$$\frac{(84{,}429.71 - 48{,}913.54)}{(1.02)^{-4}} = X$$

$$X = \$38{,}443.84$$ –» Valor del pago final [14]

Interés total pagado $I =$ Suma de Pagos – Deuda

$$I = (18{,}000 + 30{,}000 + 38{,}443.84) - 78{,}000$$

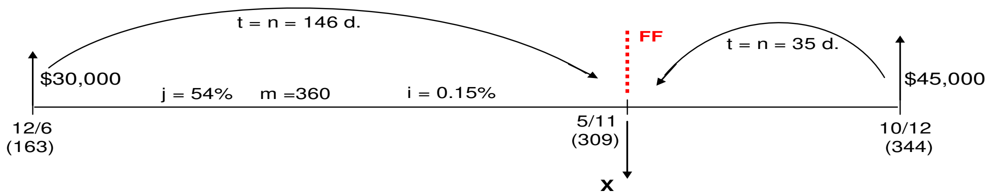
$$I = \$8{,}443.84$$ –» Interés total pagado

[14] El valor del pago final con F.F a los 4 meses resultó exactamente igual al obtenido al resolver el ejercicio con F.F. a los 8 meses.

▸ Ejemplo 35

Un señor contrae una deuda que debe saldar mediante dos pagos: $30,000.00 en fecha 12 de junio y $45,000.00 el 10 de diciembre. Si el primer pago no se efectuó en la fecha acordada, ¿qué cantidad debería pagar en fecha 5 de noviembre para liquidar completamente la deuda, tomando en cuenta que la tasa de interés acordada era del 54% anual capitalizable diariamente?

Diagrama temporal con la FF establecida en fecha 5 de noviembre:



Ecuación de valor:

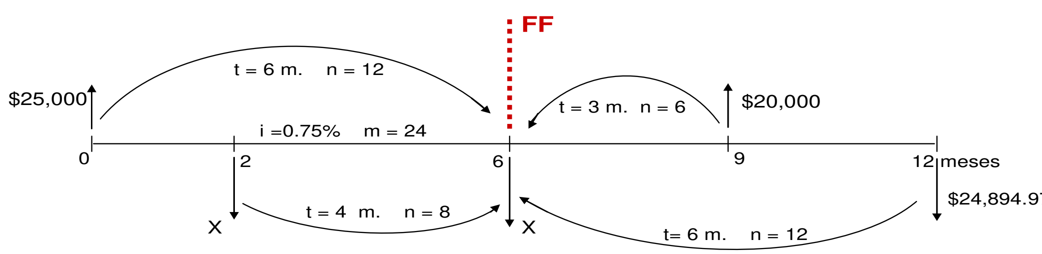
$$\boldsymbol{X} = 30{,}000(1+0.0015)^{146} + 45{,}000(1+0.0015)^{-35}$$

$$\boldsymbol{X} = \$80{,}038.94$$

▸ Ejemplo 36

Pedro Olivo hizo un depósito inicial de $25,000.00 en una cuenta bancaria que paga el 0.75% quincenal. A los 2 y 6 meses efectuó 2 retiros iguales, a los 9 meses depositó $20,000.00 y a los 12 meses extrajo el balance total de la cuenta que era de $24,894.97. Calcular el valor de los 2 retiros iguales.

Diagrama temporal con la FF establecida a los 6 meses:



Ecuación de valor:

$$25{,}000(1+0.0075)^{12} + 20{,}000(1+0.0075)^{-6} = \boldsymbol{X}\,(1+0.0075)^{8} + \boldsymbol{X} + 24{,}894.97(1+0.0075)^{-12}$$

$$46{,}468.33 = 1.0616\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} + 22{,}759.93$$

$$46{,}468.33 - 22{,}759.93 = 2.0616\boldsymbol{X}$$

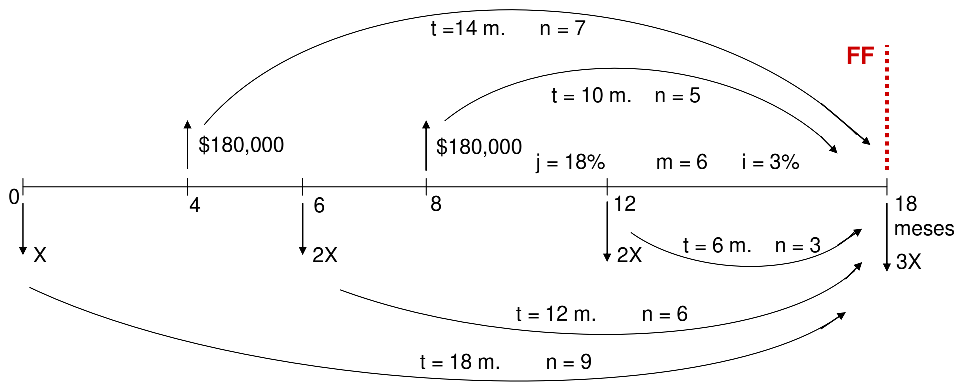
$$23{,}708.40 = 2.0616\boldsymbol{X}$$

$\boldsymbol{X} = \$11{,}500.00$ –» Valor de los 2 retiros iguales

▸ **Ejemplo 37**

Una deuda pagadera en 2 partidas iguales de $180,000.00, con vencimiento en 4 y 8 meses, se decide liquidar mediante 4 abonos semestrales, comenzando a pagar inmediatamente. Si los pagos Nos. 2 y 3 son iguales al doble del primero y, el cuarto, el triple del primero, determine la cuantía de los pagos, si la tasa de interés es del 18% anual convertible bimestralmente.

Diagrama temporal con la FF establecida a los 18 meses:



Ecuación de valor:

$$X(1+0.03)^9 + 2X(1+0.03)^6 + 2X(1+0.03)^3 + 3X = 180{,}000(1+0.03)^7 + 180{,}000(1+0.03)^5$$

$$1.3048\,X + 2.3881\,X + 2.1855\,X + 3\,X = 430{,}046.63$$

$$8.8784X = 430{,}046.63$$

$$X = \frac{430{,}046.63}{8.8784} = \$48{,}437.40$$

$$2X = \$96{,}874.80$$

$$3X = \$145{,}312.20$$

11. TIEMPO EQUIVALENTE

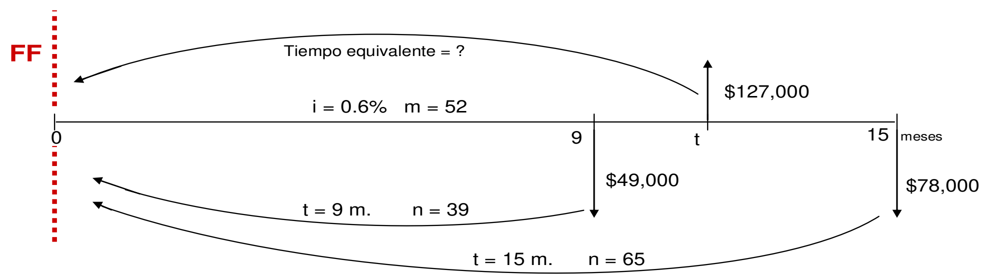
Se presentan ocasiones en las que un deudor desea sustituir un conjunto de pagos que debe efectuar a un determinado acreedor, por otro conjunto equivalente con cantidades y fechas de vencimiento diferentes. Esta vez de lo que se trata es de reemplazar un conjunto de pagos con diversos vencimientos por un pago único. La fecha en la cual un conjunto de deudas con distintos vencimientos, se salda mediante un pago único igual a la suma de dichas deudas, se conoce como *fecha de vencimiento promedio* de las deudas. Al tiempo que debe transcurrir desde la fecha inicial (o momento actual) hasta la fecha de vencimiento promedio se le conoce como *tiempo equivalente*.

Es usual que el *tiempo equivalente* se determine a partir de una ecuación de valor con fecha focal en la fecha inicial o momento actual. También es posible calcularlo mediante la fórmula [12], si se asume por "P" el valor actual del conjunto de deudas en la fecha inicial y se toma por "S" la suma de las deudas.

▸ Ejemplo 38

Marino Herrera debe pagar $49,000.00 en 9 meses y $78,000.00 dentro de 15 meses. ¿Cuál es el tiempo equivalente (a/m/d) suponiendo un interés del 0.6% semanal?

Diagrama temporal con la fecha focal establecida en la fecha inicial:



Cálculo de los valores de “n”:

a) $n_1 = 9/12 * 52 = 39$ ***semanas***

b) $n_2 = 15/12 * 52 = 65$ ***semanas***

A) SOLUCIÓN MEDIANTE UNA ECUACIÓN DE VALOR CON F.F. EN LA FECHA INICIAL:

$$127{,}000(1+0.006)^{-n} = 49{,}000(1+0.006)^{-39} + 78{,}000(1+0.006)^{-65}$$

$$127{,}000(1.006)^{-n} = 91{,}675.87$$

$$(1.006)^{-n} = \frac{91{,}675.87}{127{,}000}$$

$$-\,n\,\log 1.006 = \log\left(\frac{91{,}675.87}{127{,}000}\right)$$

$$n = \frac{\log\left(\dfrac{91{,}675.87}{127{,}000}\right)}{-\log(1.006)}$$

$$n = 54.48411521 \ \textit{semanas}$$

Para el cálculo del tiempo (años) se utiliza la fórmula [4]:

$$t_{(años)} = \frac{54.48411521}{52} = 1.047771446 \ \textbf{\textit{años}}$$

$$-1.000000000 \ \textbf{\textit{años completos}}$$

$$0.047771446 \ \textbf{\textit{años}}$$
$$\times \quad 12$$

$$0.573257356 \ \textbf{\textit{meses}}$$
$$\times \quad 30$$

$$17.19772071 \ \textbf{\textit{días}}$$

RESPUESTA: 1 ***año*** 17 ***días***

B) SOLUCIÓN MEDIANTE LA FÓRMULA [12]:

Cálculo del valor de la deuda "P" en la fecha inicial:

$$P = 49{,}000(1+0.006)^{-39} + 78{,}000(1+0.006)^{-65} = \$91{,}675.87$$

Considerando que $S = 49{,}000 + 78{,}000 = \$127{,}000.00$, entonces el valor de "n" resulta ser:

$$n = \frac{log\left(\frac{127{,}000}{91{,}675.87}\right)}{log\,(1+0.006)} \quad \text{–»} \quad n = 54.48411521 \;\; semanas$$

Para el cálculo del tiempo (años) se utiliza la fórmula [4]:

$$\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{años})} = \frac{54.48411521}{52} = 1.047771446\,\boldsymbol{años}$$

$$-1.000000000\;\; \boldsymbol{años\ completos}$$

$$0.047771446\;\; \boldsymbol{años}$$

$$\times \quad 12$$

$$0.573257356\;\; \boldsymbol{meses}$$

$$\times \quad 30$$

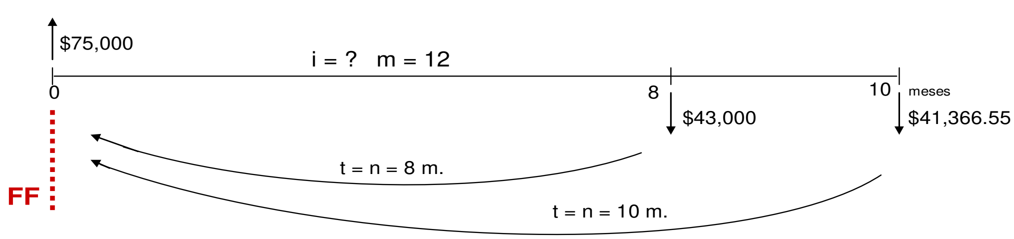
$$17.19772071\;\; \boldsymbol{días}$$

RESPUESTA: $1\ \boldsymbol{año} \quad 17\ \boldsymbol{días}$

▸ **Ejemplo 39** **(Cálculo de la Tasa de Interés a partir de una Ecuación de Valor)**

Si un crédito por $75,000.00 se acordó cancelar mediante 2 pagos: $43,000.00 al cabo de 8 meses y $41,366.55 dentro de 10 meses, determine qué tasa de interés anual convertible mensual aplicaron al financiamiento.

Diagrama temporal con la fecha focal establecida al momento de contraerse el crédito:



Ecuación de valor:

$$43{,}000(1+\boldsymbol{i})^{-8} + 41{,}366.55(1+\boldsymbol{i})^{-10} = 75{,}000$$

Ante la imposibilidad de despejar a "$\boldsymbol{i}$" de esta ecuación, se procede a obtener su valor por tanteo o por tanteo e interpolación. Asignaremos valores a "$\boldsymbol{i}$", sabiendo que lo que se busca es que el primer miembro de la ecuación resulte igual a 75,000.

TANTEO

"i" (%)	*Valor*
1	77,158.38
1.2	75,801.34
1.3	75,132.89
1.4	74,471.06

Como se observa, el valor de 75,000 se encuentra entre los dos últimos valores (75,132.89 y 74,471.06), lo cual indica que el valor buscado de "i" estaría entre las tasas 1.3 y 1.4. Luego, probando valores entre 1.3 y 1.4, o mediante la interpolación, se obtiene el valor buscado de "i":

INTERPOLACIÓN

$$0.1\left\{\begin{array}{l} x\left\{\begin{array}{ll} 1.3 & 75{,}132.89 \\ i & 75{,}000 \end{array}\right\} 132.89 \\ \\ \quad\; 1.4 \quad\; 74{,}471.06 \end{array}\right\} 661.83$$

Estableciendo una proporción con las diferencias (suponiendo una variación lineal de los valores), se calcula el valor de "x" y, a partir de éste, se obtiene el valor de "i". Luego con la fórmula [2] se obtiene la tasa anual pedida.

$$\frac{x}{0.1} = \frac{132.89}{661.83} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0.1 * 132.89}{661.83} = 0.02$$

$$i = 1.3 + x = 1.3 + 0.02 = 1.32\%$$

$$j = 1.32 * 12 = 15.84\%$$ –» Tasa anual convertible mensual

12. PAGOS PARCIALES. REGLA COMERCIAL Y REGLA DE LOS SALDOS

Los *pagos parciales* son abonos que efectúa el deudor al acreedor antes del vencimiento de una deuda, generalmente buscando reducir los intereses y el saldo con que se liquidaría la deuda en su fecha de vencimiento. Los créditos que son objeto de pagos parciales y en los que, finalmente, se requiere obtener la cuantía del pago que liquida la deuda, se resuelven, además de la forma antes vista, empleando las *Regla Comercial* y *Regla de los Saldos*.

Regla Comercial

Con esta regla los intereses se calculan en base a la deuda original y por todo el plazo de la transacción, y para cada pago parcial, por el periodo comprendido entre las fechas de su realización y aquella en que la deuda queda saldada. Luego, el saldo con que se liquida la deuda se obtiene de la diferencia entre el monto de la deuda y la suma de los montos de los pagos parciales. Tal como se realiza a interés simple, resolver un problema usando la *Regla Comercial* consiste en determinar la incógnita partiendo de una ecuación de valor con fecha focal en el momento de cancelación de la deuda.

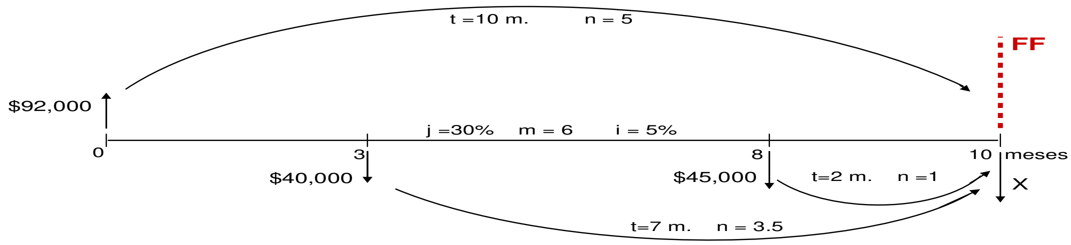
Regla de los Saldos

Con esta regla, llamada también *Regla de los Saldos Insolutos* o *Regla Americana*, se calculan los intereses sobre el saldo no pagado o insoluto en las fechas en que los pagos parciales se realizan. Con dichos abonos se salda primeramente el interés generado en el periodo previo al pago y luego, la parte restante, se usa para amortizar la deuda. El pago que finalmente cancela la deuda se obtiene al sumarle al saldo insoluto, correspondiente a la fecha del último abono, los intereses generados en el periodo comprendido entre esa fecha y aquella en que la deuda es cancelada.

▸ **Ejemplo 40**

Juan López contrajo una deuda por $92,000.00 al 30% anual convertible bimestral a 10 meses de plazo. Si abona $40,000.00 a los 3 meses y $45,000.00 a los 8 meses, determine el saldo por pagar en la fecha de vencimiento, usando *Regla Comercial y Regla de los Saldos*.

Regla Comercial



Ecuación de valor:

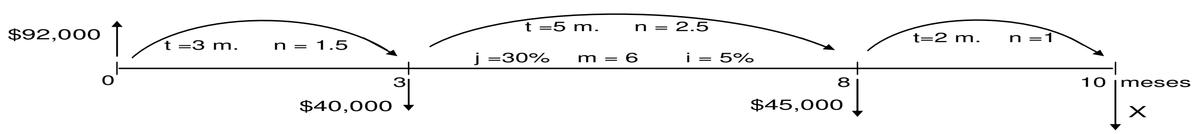
$$92{,}000\,(1+0.05)^{5} = 40{,}000\,(1+0.05)^{3.5} + 45{,}000\,(1+0.05)^{1} + \boldsymbol{X}$$

$$117{,}417.90 = 94{,}698.51 + \boldsymbol{X}$$

$$117{,}417.90 - 94{,}698.51 = \boldsymbol{X}$$

$$\boldsymbol{X} = \$22{,}719.39$$ –» Valor del pago final

Regla de los Saldos



$\boldsymbol{S}_1 = 92{,}000\,(1+0.05)^{1.5} = \$98{,}985.54$ –» VALOR DE LA DEUDA (CAPITAL+INTERÉS) A LOS 3 MESES (JUSTAMENTE ANTES DE EFECTUAR EL 1ER. ABONO)

$-\ 40{,}000.00$ –» 1ER. ABONO (PAGO INTERÉS: $6,985.54; AMORTIZACIÓN: $33,014.46)

$\boldsymbol{S}_1' = \$58{,}985.54$ –» SALDO INSOLUTO A LOS 3 MESES (VALOR ADEUDADO JUSTAMENTE DESPUÉS DE EFECTUADO EL 1ER. ABONO)

$\boldsymbol{S}_2 = 58{,}985.54\,(1+0.05)^{2.5} = \$66{,}637.52$ –» VALOR DE LA DEUDA (CAPITAL+INTERÉS) A LOS 8 MESES (JUSTAMENTE ANTES DE EFECTUAR EL 2DO. ABONO)

$-\ 45{,}000.00$ –» 2DO. ABONO (PAGO INTERÉS: $7,651.98; AMORTIZACIÓN: $37,348.02)

$\boldsymbol{S}_2' = \$21{,}637.52$ –» SALDO INSOLUTO A LOS 8 MESES (VALOR ADEUDADO JUSTAMENTE DESPUÉS DE EFECTUADO EL 2DO. ABONO)

$\boldsymbol{X} = 21{,}637.52\,(1+0.05)^{1} = \$22{,}719.39$ –» VALOR DEL PAGO FINAL

Comparando los resultados obtenidos se verifica que, cuando se trabaja a interés compuesto, el valor del pago final es el mismo con ambas reglas.

....

FÓRMULAS RELATIVAS AL INTERÉS COMPUESTO

INTERÉS COMPUESTO

- P : Capital o principal / Valor actual
- S : Monto compuesto/Valor con vencimiento futuro
- I : Interés compuesto generado
- j : Tasa anual de interés compuesto (tasa nominal)
- m : Frecuencia de capitalización de la tasa de interés
- i : Tasa de interés por periodo de capitalización
- t : Tiempo o plazo del préstamo o la inversión (años)
- n : Número total de periodos de capitalización

[1] $$i = \frac{j}{m}$$

[2] $$j = i * m$$

[3] $$n = t_{(años)} * m$$

[4] $$t_{(años)} = \frac{n}{m}$$

[5] $$S = P + I$$

[6] $$S = P(1+i)^n$$

[7] $$I = S - P$$

[8] $$I = P[(1+i)^n - 1]$$

[9] $$P = S - I$$

[10] $$P = \frac{I}{[(1+i)^n - 1]}$$

[11] $$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n}$$

[12] $$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)}$$

[13] $$i = \sqrt[n]{(S/P)} - 1$$

[14] $$j = m\left[\sqrt[n]{(S/P)} - 1\right]$$

EQUIVALENCIA ENTRE TASA DE INTERÉS SIMPLE Y TASA DE INTERÉS COMPUESTO

- j : Tasa anual de interés compuesto (tasa anual)
- m : Frecuencia de capitalización de la tasa de interés
- i : Tasa de interés por periodo de capitalización
- i_s : Tasa de interés simple anual

[15] $$i_s = \frac{[(1+i)^n - 1]}{t}$$

[16] $$j = m\left[\sqrt[n]{(1+i_s t)} - 1\right]$$

EQUIVALENCIA ENTRE TASAS DE INTERÉS COMPUESTO

- j_2 : Tasa anual de interés compuesto (conocida)
- m_2 : Frecuencia de capitalización de la tasa "j_2"
- j_1 : Tasa anual de interés compuesto (desconocida)
- m_1 : Frecuencia de capitalización de la tasa "j_1"
- j_e : Tasa efectiva (anual)

[17] $$j_1 = m_1\left[\left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{m_1}} - 1\right]$$

[18] $$j_e = \left(1 + \frac{j_2}{m_2}\right)^{m_2} - 1$$

DESCUENTO RACIONAL COMPUESTO

- S : Monto compuesto/Valor con vencimiento futuro
- P_d : Suma recibida / Valor efectivo o líquido
- D_r : Descuento racional compuesto
- j : Tasa anual de interés compuesto (del descuento)
- m : Frecuencia de capitalización de la tasa de interés
- i : Tasa de interés por periodo (del descuento)
- t : Tiempo o plazo del descuento (años)
- n : Número total de periodos (del descuento)

[19] $$P_d = S(1+i)^{-n}$$

[20] $$D_r = S - P_d$$

[21] $$P_d = S - D_r$$

[22] $$S = P_d + D_r$$

[23] $$D_r = S[1 - (1+i)^{-n}]$$

[24] $$S = \frac{D_r}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

Tulio A. Mateo Duval

TABLA PARA EL CÀLCULO DEL TIEMPO EXACTO ENTRE DOS FECHAS

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Días	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic	Días	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sept	Oct	Nov	Dic
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335	1	366	397	425	456	486	517	547	578	609	639	670	700
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336	2	367	398	426	457	487	518	548	579	610	640	671	701
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337	3	368	399	427	458	488	519	549	580	611	641	672	702
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338	4	369	400	428	459	489	520	550	581	612	642	673	703
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339	5	370	401	429	460	490	521	551	582	613	643	674	704
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340	6	371	402	430	461	491	522	552	583	614	644	675	705
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341	7	372	403	431	462	492	523	553	584	615	645	676	706
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342	8	373	404	432	463	493	524	554	585	616	646	677	707
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343	9	374	405	433	464	494	525	555	586	617	647	678	708
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344	10	375	406	434	465	495	526	556	587	618	648	679	709
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345	11	376	407	435	466	496	527	557	588	619	649	680	710
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346	12	377	408	436	467	497	528	558	589	620	650	681	711
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347	13	378	409	437	468	498	529	559	590	621	651	682	712
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348	14	379	410	438	469	499	530	560	591	622	652	683	713
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349	15	380	411	439	470	500	531	561	592	623	653	684	714
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350	16	381	412	440	471	501	532	562	593	624	654	685	715
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351	17	382	413	441	472	502	533	563	594	625	655	686	716
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352	18	383	414	442	473	503	534	564	595	626	656	687	717
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353	19	384	415	443	474	504	535	565	596	627	657	688	718
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354	20	385	416	444	475	505	536	566	597	628	658	689	719
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355	21	386	417	445	476	506	537	567	598	629	659	690	720
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356	22	387	418	446	477	507	538	568	599	630	660	691	721
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357	23	388	419	447	478	508	539	569	600	631	661	692	722
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358	24	389	420	448	479	509	540	570	601	632	662	693	723
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359	25	390	421	449	480	510	541	571	602	633	663	694	724
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360	26	391	422	450	481	511	542	572	603	634	664	695	725
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361	27	392	423	451	482	512	543	573	604	635	665	696	726
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362	28	393	424	452	483	513	544	574	605	636	666	697	727
29	29		88	119	149	180	210	241	272	302	333	363	29	394		453	484	514	545	575	606	637	667	698	728
30	30		89	120	150	181	211	242	273	303	334	364	30	395		454	485	515	546	576	607	638	668	699	729
31	31		90		151		212	243		304		365	31	396		455		516		577	608		669		730

Tulio A. Mateo Duval