

Fonction réelles - Convexité

1 DÉFINITIONS ÉQUIVALENTES

Définition 1 : Fonctions convexe / concave

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est **convexe sur I** lorsque
 $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1],$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

On dit que f est **concave sur I** lorsque
 $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1],$

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Géométriquement

Quand t parcourt $[0, 1]$, $tx + (1-t)y$ parcourt le segment entre x et y . Graphiquement, l'inégalité de convexité signifie que f est toujours en-dessous de ses cordes sur I .

Inversement, un graphe de fonction concave sera toujours au-dessus de ses cordes.

De manière imagée, **Convexe = Bol** et **Concave = Coline**.

On dit **strictement** convexe ou concave, si les inégalités sont **strictes**.

Exemple 1

La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$. En effet par inégalité triangulaire on a pour tout $t \in [0, 1]$ et x, y réels

$$|tx + (1-t)y| \leq |tx| + |(1-t)y| = t|x| + (1-t)|y|.$$

Exemple 2

Les fonctions polynomiales de degré 2 sont

- convexe sur $\mathbb{R}$, si le coefficient dominant est positif,
- concave sur $\mathbb{R}$, si le coefficient dominant est négatif.

Exemple 3

La fonction cube $x \mapsto x^3$ n'est pas convexe. Pour montrer que g n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$, il suffit d'exhiber un contre-exemple

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -1/8 > -\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 0^3 + \frac{1}{2} \times (-1)^3.$$

donc g n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple 4

La fonction 'sin' n'est ni concave, ni convexe sur $\mathbb{R}$. On peut voir sur son graphe qu'il existe des cordes ni au-dessus, ni en-dessous de la courbe représentative.

Par contre, elle est concave sur tout intervalle de la forme $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, avec $k \in \mathbb{Z}$, et convexe sur tout intervalle de la forme $[\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi]$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1 : Caractérisation par les pentes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. f est **convexe** (respectivement **concave**) si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_a :]a, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est **croissante** (respectivement **décroissante**).

Preuve.

($\Rightarrow$) Supposons f convexe. Soit $a \in I$ et $a < x_1 < x_2$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} &\leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a} \\ \Leftrightarrow f(x_1) &\leq \frac{x_1 - a}{x_2 - a} (f(x_2) - f(a)) + f(a) \\ \Leftrightarrow f(x_1) &\leq \frac{x_1 - a}{x_2 - a} f(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - a} f(a) \end{aligned}$$

Notons $t := \frac{x_1 - a}{x_2 - a} \in [0, 1]$. On a alors $\frac{x_2 - x_1}{x_2 - a} = 1 - t$ et comme $x_1 = \frac{x_1 - a}{x_2 - a} x_2 + \frac{x_2 - x_1}{x_2 - a} a = tx_2 + (1 - t)a$, l'inégalité ci-dessus est vraie par convexité de f .

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $a \in I$, φ_a est croissante. Soit $x < y$ dans I . Notons $c := tx + (1 - t)y$. On a alors $t = \frac{y - c}{y - x}$ et $1 - t = \frac{c - x}{y - x}$. Par notre hypothèse on a $\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ et donc par les mêmes équivalences que ci-dessus on a

$$f(c) \leq (1 - t)f(y) + tf(x)$$

ce qui prouve la convexité de f .

□

Inégalité des pentes

Dans les exercices, l'inégalité suivante, qui vient de la décroissance des pentes, est souvent très utile :

$$\text{Si } a < y < x, \text{ alors } \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Et si on prolonge le segment de la corde

Soient a et b deux points dans l'ensemble de définition de f , avec $a < b$. Quand t parcourt $[1, +\infty]$, $ta + (1 - t)b$ parcourt la demi-droite qui part de b vers $+\infty$. Graphiquement, cette demi droite est sous le graphe de f . Montrons le.

L'inégalité des pentes donne, pour tout $y > b$, $f(y) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (y - b) + f(b)$.

Mais $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (y - b) + f(b)$ est exactement l'ordonnée de la corde de la courbe sur le segment $[a, b]$!

Une fonction convexe est continue

En effet, prenons $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $x \in I$ et $r > 0$ tel que $[x-r, x+r] \subset I$. D'après l'inégalité des pentes, on a pour tout $\varepsilon \in]-r, r[$,

$$\frac{f(x) - f(x-r)}{r} \leq \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \leq \frac{f(x+r) - f(x)}{r},$$

La quantité $\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$ reste alors bornée quand ε tend vers 0, ce qui montre la continuité de f en x .

Proposition 2 : Caractérisation par les dérivées

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors

f est **convexe** (respectivement **concave**) sur $I \iff f'$ est **croissante** (respectivement **décroissante**) sur I .

Exemple 5

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, et la fonction logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, elles sont dérivables sur leurs ensembles de définition et $\exp' = \exp$ est croissante sur $\mathbb{R}$, et $\ln' = x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Géométriquement

La courbe représentative de f , dérivable et **convexe**, est **au dessus** de toutes ses tangentes sur I .

La courbe représentative de f , dérivable et **concave**, est **en dessous** de toutes ses tangentes sur I .

En effet, soit $a \in I$. Montrons que si f' est croissante, alors $\forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$.

Si $x = a$ c'est une égalité. Si $x > a$, pour tout $y \in]a, x[$ on a, en appliquant l'inégalité des pentes à $a < y < x$,

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

En faisant, alors tendre y vers a , on a $f'(a) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et donc $f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)$.

On fait de même, si $x < a$.

Preuve.

($\Rightarrow$) Supposons f convexe, et soient $a < b \in I$. Pour tout réel $a < x < b$, par croissance des pentes on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

donc en faisant tendre x vers a on en déduit que $f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, et en faisant tendre x vers b on en déduit que $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b)$, d'où $f'(a) \leq f'(b)$ et la fonction f' est donc croissante.

($\Leftarrow$) Si f' est croissante, pour tous $a < b \in I$ et tout $x \in]a, b[$, d'après le théorème des accroissements finis des réels $\exists \alpha \in]a, x[$ et $\exists \beta \in]x, b[$ tels que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\alpha) \quad \text{et} \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\beta).$$

Par définitions, $\alpha < \beta$ donc $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$, ce qui donne $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$, d'où

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) = f(a) + \frac{x-a}{b-a} (f(b) - f(a))$$

C'est exactement la croissance des pentes ! (et donc la convexité)

□

Une conséquence directe donne la caractérisation par les dérivées secondes.

Corollaire 2.1 : Caractérisation par la dérivée seconde

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I . Alors

f est **convexe** (respectivement **concave**) sur $I \iff f''$ est **positive** (respectivement **négative**) sur I .

Exemple 6

- Une équation de la tangente en 0 de la fonction convexe $\exp$ est $y = \exp(0) + \exp'(0) \times x = 1 + x$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x \geq 1 + x$.
- Une équation de la tangente en 1 de la fonction concave $\ln$ est $y = \ln(1) + \ln'(1) \times (x - 1) = x - 1$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ln x \leq x - 1$.
- La fonction $\sin$ est concave sur $[0, \pi/2]$, puisque la dérivée seconde est $-\sin$ qui est négative sur cet intervalle. Une équation de la tangente en 0 de la fonction $\sin$ est $y = \sin(0) + \sin'(0) \times x = x$, d'où l'inégalité $\forall x \in [0, \pi/2], \sin x \leq x$.
- De plus, la corde reliant les points de coordonnées $(0, \sin(0)) = (0, 0)$ et $(\pi/2, \sin(\pi/2)) = (\pi/2, 1)$ a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$. Donc

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x.$$

Ce tableau donne toutes les définitions équivalentes de convexité/concavité. Il faut apprendre à jouer avec !

Conditions sur f	$\emptyset$	dérivable	$\emptyset$	dérivable	2 fois dérivable
f convexe	$\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses cordes	$\mathcal{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes	La pente pour un point fixe est croissante	f' est croissante	$f'' \geq 0$
f concave	$\mathcal{C}_f$ est au dessus de toutes ses cordes	$\mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes	La pente pour un point fixe est décroissante	f' est décroissante	$f'' \leq 0$

2 PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CONVEXES/CONCAVES**Proposition 3**

La somme deux fonctions **convexes** (respectivement **concaves**) sur I , est une fonction **convexe** (respectivement **concave**) sur I .

⚠ ATTENTION Le produit de deux fonctions convexes ne l'est pas toujours ! On n'invente pas de théorème ! Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ mais leur produit $x \mapsto x^3$ ne l'est pas.

Preuve. Soit $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad \text{et} \quad g((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)g(x) + \lambda g(y).$$

Donc $(f + g)((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)(f + g)(x) + \lambda(f + g)(y)$, ce qui prouve que $f + g$ est convexe sur I . $\square$

Proposition 4 : Inégalité de Jensen

Soient f une fonction **convexe** (respectivement **concave**) sur I et une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ de réels positifs telle que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, on a, $\forall x_1, \dots, x_p \in I$,

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$$

respectivement

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i) .$$

Preuve. Par récurrence ! $\square$

Généralisation de la définition

On remarque que pour $p = 2$, cette propriété est exactement la définition de convexité. On a juste généralisé pour n .

Géométriquement : Barycentre, Isobarycentre

- Le réel $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$ est appelé **barycentre** des points $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ pondérés par les poids $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$. Il correspond à une moyenne pondérée.
- Lorsque les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont égaux, le barycentre est appelé **isobarycentre**. Il est alors égal à $\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i$.

Géométriquement, l'inégalité de Jensen nous dit que le barycentre entre p points de la courbe de f sera toujours au dessus de la courbe de f

Exemple 7

On peut montrer de manière très rapide l'inégalité arithmético-géométrique ! En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, l'inégalité de Jensen, en prenant $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ nous donne

$$\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) ,$$

puisque $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où par croissance de la fonction exponentielle, cette inégalité équivaut à

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} .$$