

SEMAINE DU 15/6 AU 20/6

SÉRIES NUMÉRIQUES

- ① **Définitions et vocabulaire.** Série, terme général, Somme d'une série, divergence grossière, Reste d'une série, Série télescopique, convergence absolue, semi-convergence.
- ② **Propriétés des séries.** Conservation de la convergence par somme, Convergente + divergente = Divergente, Convergence de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une série complexe, convergence absolue $\implies$ convergence.
- ③ **Séries alternées.** Définition, Critère de convergence.
- ④ **Méthode de comparaison série/intégrale.** A faire à la main par l'étudiant.
- ⑤ **Séries de Riemann.** Définition et critère de convergence.
- ⑥ **Séries à termes positifs.** Comparaison des termes généraux, par supériorité/infériorité, par équivalence, par grand O (et petit o).

FAMILLES SOMMABLES

- ① **Définitions et vocabulaire.** Compléments et conventions sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, Familles, familles à termes positifs sommables.
- ② **Propriétés des familles à termes positifs.** Théorème de sommation par paquets, Changement d'indice, Restriction de la somme, Linéarité, Croissance, Théorème de Fubini, Familles produits.
- ③ **Familles de nombres complexes.** Définition d'une famille sommable de nombre complexes, et extension des propriétés précédentes aux nombres complexes, approximation par des sommes finies. Sur $\mathbb{N}$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\Leftrightarrow \sum u_n$ est commutativement convergente $\Leftrightarrow \sum u_n$ est absolument convergente, Produit de Cauchy.

PREUVES

Seules les preuves dans cette section sont à savoir par coeur par les étudiants. Les autres preuves peuvent être demandées, en proposant une méthode et/ou en aidant l'étudiant durant la réalisation de la preuve.

- ① Sommabilité PUIS somme de $\sum_{i,j \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\max(i,j)^3}$, à donner en fonction de la constante d'Apéry, et en sachant que $\sum_{n \geq 0} n^{-2} = \pi^2/6$.
- ② Preuve que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ par deux méthodes différentes.
- ③ Preuve que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, puis calcul de la somme $\sum_{p,q \geq 0} \frac{q^p x^p}{p!q!}$.

BONNES VACANCES