Capítulo 2

Las técnicas básicas de la Combinatoria

Contar es una técnica ... y un arte. Averiguar cuántos objetos existen que se ajustan a determinadas características puede no ser fácil[1]. En el caso de una colección física, concreta, de objetos se trata simplemente de enumerarlos, es decir, de decir quién es el primero, quién el segundo, etc. Pero si, como es habitual, lo que tenemos es una colección definida abstractamente (como por ejemplo, los pasos de un algoritmo cuando los datos de entrada son de un determinado tamaño), el procedimiento tiene que ser otro. Con frecuencia, la única alternativa es indirecta y consiste en comparar la colección dada con otra colección de objetos (cuyo número conocemos) y comprobar, si fuera el caso, que tienen el mismo número de objetos. En este capítulo discutiremos técnicas útiles para llevar a cabo ese tipo de comprobaciones; pero cómo seleccionar la colección adecuada con la que se compara es más una cuestión de experiencia, y de prueba y error; todo un arte.

Las colecciones de objetos que nos interesarán vienen a veces ordenadas de forma natural y otras veces el orden resulta irrelevante. En ocasiones las colecciones se forman atendiendo a ciertos principios de exclusión que impiden repeticiones, y en otras no. Estos dos condicionantes, orden y repetición, aparecen siempre en cualesquiera cuestiones de Combinatoria. Y siempre, en cada caso particular, habrá que precisarlos.

Un **conjunto** es una colección (*no ordenada*) de objetos, que llamaremos sus elementos. Un conjunto muy especial es el conjunto vacío, $\emptyset$, aquél que no tiene elemento alguno. Generalmente, representaremos un conjunto escribiendo sus elementos entre *llaves*. Si permitimos que el conjunto contenga elementos repetidos, utilizaremos un nombre especial, **multiconjuntos**. Nos interesará, fundamentalmente, contar el número de elementos de que consta un conjunto, lo que llamaremos su **tamaño** o **cardinal**. En un momento precisaremos esta idea.

En muchas ocasiones convendrá considerar **listas**, colecciones *ordenadas* de objetos, en las que deberemos distinguir si se permite o no la aparición repetida de elementos (hablaremos de listas con y sin repetición permitida). Las representaremos generalmente escribiendo sus elementos entre *paréntesis*. El número de elementos de que consta una lista será su **longitud**. A una lista de longitud k nos referiremos en ocasiones, por abreviar, como una k-lista.

[1] Es bien sabido que hay tres tipos de matemáticos: los que saben contar y los que no.

Supongamos, por ejemplo, que tenemos los objetos a, b y c. Podemos, por ejemplo, considerar los tres conjuntos de tamaño 2 que podemos formar con estos objetos,

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$$

o quizás las seis listas sin repetición de longitud 2,

$$(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b).$$

Si permitiéramos repetición de elementos, deberíamos añadir, en el primer caso, los conjuntos $\{a, a\}$, $\{b, b\}$ y $\{c, c\}$; y, en el segundo, las listas (a, a), (b, b) y (c, c). Obsérvese el uso que hemos hecho de la notación de las llaves y los paréntesis en esta enumeración. Por ejemplo, el conjunto $\{a, b\}$ es el mismo que $\{b, a\}$, mientras que la lista (a, b) es distinta de (b, a).

Pero, como comprobará el lector, en ocasiones tendremos que "mezclar" estos objetos y considerar, por ejemplo, conjuntos cuyos elementos son listas, o listas cuyos términos son conjuntos. Lo veremos en las páginas siguientes, donde nos entrenaremos en la tarea de decidir qué tipo de objetos son los adecuados para describir cada problema particular.

2.1. Aprendiendo a contar

Se dice que un conjunto A tiene **cardinal** n si existe una función biyectiva f del conjunto $\{1, \dots, n\}$ en el conjunto A. Por convenio se asigna cardinal cero al conjunto vacío. Un momento de reflexión lleva a concluir que el cardinal no es más que el número de elementos de un conjunto. A este cardinal lo llamaremos también, al menos cuando sea finito, **tamaño** del conjunto. Para un conjunto A escribiremos, indistintamente,

$$\boxed{\text{tamaño de } A = |A| = \#A}$$

Así que, aunque pudiera sonar pedante, "contar" consiste en establecer una biyección entre los elementos del conjunto y un conjunto de números naturales. Algo que en realidad hacemos continuamente, aunque no seamos conscientes del aparato formal que subyace en el procedimiento: si quisiéramos contar el número de alumnos que hay en el aula, empezaríamos por uno de ellos y le asignaríamos el 1 (quizás señalándolo y diciendo "uno" en alto), luego iríamos al siguiente y le asignaríamos el 2, etc. El resultado final, por supuesto, no depende del orden en que hayamos hecho la asignación (es decir, de la biyección elegida), sino sólo de la cantidad de números naturales $1, 2, \dots$ que hayamos utilizado.

Podemos ir un poco más allá con esta idea. Una consecuencia directa de nuestra definición de cardinal es la siguiente:

> si A y B son dos conjuntos y existe una aplicación *biyectiva* de A sobre B, entonces $|A| = |B|$.

Es decir, dos conjuntos tienen el mismo cardinal si existe una biyección entre ellos. Diremos que un conjunto es **infinito** si no se puede establecer una biyección con $\{1, \dots, n\}$, para ningún n. En la subsección 2.1.3 nos ocuparemos de la delicada cuestión de ampliar la noción de cardinal a conjuntos infinitos.

La observación anterior, como constatará el lector en las siguientes páginas, será una herramienta básica para contar el número de elementos de un conjunto A: buscaremos un "diccionario" (una biyección) que transforme el problema de evaluar el tamaño de A en el de contar el número de elementos de otro conjunto B, un conjunto del que ya conozcamos su tamaño, o que se preste a algún otro tipo de análisis. Obsérvese que, en principio, los elementos de B no tienen por qué ser del mismo tipo que los del original.

Ejemplo 2.1.1 *¿Cuál es el tamaño del conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \textit{ es divisor de } 60000\}$?*

Podríamos, desde luego, ir enumerando todos los números menores o iguales que 60000 e ir comprobando, uno a uno, si dividen o no a 60000. Pero un procedimiento más astuto y eficaz pasa por escribir el desarrollo en factores primos de 60000:

$$60000 = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 5^4\,.$$

Ahora observamos que si n es divisor de 60000, entonces n ha de ser de la siguiente forma:

$$n = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \quad \text{con} \quad 0 \le \alpha \le 5,\, 0 \le \beta \le 1,\, 0 \le \gamma \le 4$$

Así que podemos establecer la biyección

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \text{ es divisor de } 60000\} \quad \longleftrightarrow \quad B = \left\{ \begin{array}{c} \text{3-listas} \\ (\alpha, \beta, \gamma) \end{array} \Bigg/ \begin{array}{c} 0 \le \alpha \le 5, \\ 0 \le \beta \le 1, \\ 0 \le \gamma \le 4. \end{array} \right\}$$

Esta asignación es una biyección entre A y B porque la descomposición de un entero en factores primos es única (véase, por ejemplo, el lema 4.13). La conclusión inmediata es que $|A| = |B|$. En el ejemplo 2.2.1 evaluaremos el tamaño del conjunto B. ♣

Ejemplo 2.1.2 *Sean $X = \{1, 2, \dots, n\}$ y $A = \{\textit{subconjuntos de } X\}$. Queremos conocer el tamaño de A, es decir, saber cuántos posibles subconjuntos tiene un conjunto con n elementos.*

Para identificar un subconjunto de X basta decidir, para cada elemento de X, si está o no en el subconjunto. Para ello podemos asociar un 0 a los elementos de X que no están en el subconjunto y un 1 a los que sí lo están. Por ejemplo, si tomamos $X = \{1, 2, 3, 4\}$, la codificación

1	2	3	4
0	1	1	0

esto es, la lista $(0, 1, 1, 0)$, representa al subconjunto $\{2, 3\}$ de $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Volviendo a $X = \{1, 2, \dots, n\}$, algunos otros ejemplos de esta identificación serían:

$$\begin{array}{ccl} (0,1,1,\dots,1,1) & \longleftrightarrow & \{2,3,\dots,n-1,n\} \\ (0,0,0,\dots,0,0) & \longleftrightarrow & \emptyset \\ (1,1,1,\dots,1,1) & \longleftrightarrow & X \end{array}$$

Con esta regla hemos construido una biyección entre nuestro conjunto original A y el conjunto B formado por todas las n-listas con repetición permitida que podemos formar con los símbolos $\{0, 1\}$, que pronto aprenderemos a contar (ejemplo 2.2.2). ♣

2.1.1. Contando con aplicaciones. El doble recuento

La técnica de contar usando biyecciones se puede entender como un caso particular de una técnica más general. Empecemos considerando el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 2.1.3 *Divisores positivos y negativos.*

Consideraremos los conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es divisor de } 60000\} \quad \text{y} \quad C = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es divisor de } 60000\}.$$

Y la aplicación $f : C \longmapsto A$ en la que a cada elemento $n \in C$ se le asocia un elemento de A mediante la receta $f(n) = |n|$. Se trata de una aplicación sobreyectiva, pues cada elemento de A tiene al menos una preimagen (un elemento de C con el que está relacionado a través de la aplicación f). Sin embargo, no es biyectiva, porque hay elementos de C cuyas imágenes coinciden (n y $-n$ van ambos a $|n|$). De hecho, cada elemento de A tiene exactamente dos preimágenes. Así que C, claramente, tiene el doble de elementos que A. ♣

En el ejemplo anterior ha resultado clave que la aplicación fuera sobreyectiva (que no se "saltara" ningún elemento de A). Formalicemos:

Lema 2.1 ***(Recuento con aplicaciones sobreyectivas)*** *Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ dos conjuntos entre los que se ha establecido una aplicación* sobreyectiva

$$\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}.$$

- *Si cada elemento de $\mathcal{Y}$ tiene una única preimagen, esto es, si la aplicación es además inyectiva (y por tanto biyectiva), entonces, como bien sabemos, $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$.*
- *Si cada elemento de $\mathcal{Y}$ tiene exactamente dos preimágenes, lo que escribiremos generalmente como $\#\{f^{-1}(y)\} = 2$ para todo $y \in \mathcal{Y}$, entonces $|\mathcal{X}| = 2\,|\mathcal{Y}|$. A este tipo de aplicaciones se les llama muchas veces, por razones evidentes, aplicaciones 2 a 1.*
- *O más generalmente: si la aplicación f cumple que $\#\{f^{-1}(y)\} = k$ para todo $y \in \mathcal{Y}$, esto es, si es una aplicación k a 1, entonces $|\mathcal{X}| = k\,|\mathcal{Y}|$.*

Una manera muy gráfica de entender estos resultados, una técnica simple pero insospechadamente eficaz, es el llamado **lema del doble recuento**[2]. La idea es bien simple: dada una matriz numérica cualquiera, obtenemos el mismo resultado si primero sumamos cada fila y luego los resultados obtenidos (llamaremos a esto **sumar por filas**) que si primero sumamos cada columna y luego los resultados (**sumar por columnas**). Es algo sobre lo que ya reflexionamos en la página 38, cuando explicábamos las manipulaciones con sumas dobles.

[2]Lamentaríamos que nuestro entusiasmo por el doble recuento pudiera inducir al lector a amalgamar dentro de este término a la doble contabilidad. El doble recuento es un *truco*, la doble contabilidad es una *trampa*. *Nota de Nota*: No debe confundirse tampoco la doble contabilidad con la contabilidad de doble entrada. En 1494, Fray Luca Pacioli, del que hablaremos en la sección 4.4, quien es considerado el padre de la Contabilidad moderna, publicó su libro *Summa de Arithmetica*, 36 de cuyos capítulos estaban dedicados a explicar la partida doble, o Contabilidad de doble entrada, como mecanismo contable. Johann Wolfgang von Goethe, quizá el escritor más influyente de finales del siglo XVIII, describiría el sistema de Pacioli como "algo de perenne belleza y simplicidad y uno de los mayores logros del intelecto humano".

DEMOSTRACIÓN. Tenemos una aplicación sobreyectiva

$$\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$$

	y_1	y_2	y_3	$\cdots$	y_m
x_1	1	0	0	$\cdots$	0
x_2	0	0	1	$\cdots$	0
x_3	0	0	0	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	1	0	0	$\cdots$	0

y construimos la siguiente matriz: en verticales colocamos los elementos de $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ y en horizontales, los de $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_m\}$. Es decir, etiquetamos las filas con los elementos de $\mathcal{X}$ y las columnas con los de $\mathcal{Y}$. Las entradas de la matriz serán, en este caso, ceros o unos: colocaremos un 1 en la posición (i, j) si $f(x_i) = y_j$, y un 0 en caso contrario. Obtenemos así matrices como la que aparece a la derecha.

Como f es una aplicación, en cada fila aparece exactamente un 1, pues cada elemento de $\mathcal{X}$ tiene una única imagen. Así que la suma en cada fila da 1, y en total habrá $|\mathcal{X}|$ unos en la matriz. La sobreyectividad garantiza, por su parte, que no haya columnas sólo con ceros.

Si además la aplicación f es inyectiva, entonces en cada columna sólo aparece un 1. Sumando en todas las columnas, obtenemos $|\mathcal{Y}|$ unos. El lema del doble recuento nos permite deducir que $|\mathcal{X}| = |\mathcal{Y}|$, como ya sabíamos.

Si la aplicación es 2 a 1, cada columna tiene dos unos, y en total obtenemos $2\,|\mathcal{Y}|$ unos, así que $|\mathcal{X}| = 2\,|\mathcal{Y}|$. En general, si la aplicación es k a 1, tendremos que $|\mathcal{X}| = k\,|\mathcal{Y}|$. ■

Observe el lector que, en estos argumentos y resultados, es fundamental la hipótesis de sobreyectividad. El siguiente lema considera el caso de aplicaciones f *cualesquiera* de $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$.

Lema 2.2 ***(Recuento con aplicaciones)*** *Sea f una aplicación cualquiera entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$. Para cada $y \in \mathcal{Y}$, llamemos $\#\{f^{-1}(y)\}$ al número de preimágenes de y. Entonces,*

$$|\mathcal{X}| = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \#\{f^{-1}(y)\}\,.$$

Nótese que ya no es necesario que la aplicación sea sobreyectiva, porque si f se "salta" un cierto elemento $y \in \mathcal{Y}$, entonces $\#\{f^{-1}(y)\} = 0$, y el valor de la suma de arriba no cambia.

La demostración es análoga al del caso de sobreyectivas. Una expresión alternativa, que resulta útil en diversas circunstancias, es la que se obtiene "agrupando" en la suma anterior los elementos de $\mathcal{Y}$ en función del número de preimágenes que tengan. Llamemos

$$a_k = \#\left\{y \in \mathcal{Y} : \#\{f^{-1}(y)\} = k\right\}\,.$$

Esto es, a_k es el número de elementos de $\mathcal{Y}$ que tienen exactamente k preimágenes. Entonces

$$|\mathcal{X}| = \sum_k k\, a_k.$$

Quizás el lector encuentre excesivo, a estas alturas, introducir toda esta maquinaria. Pero, como comprobará más adelante, ser capaces de formalizar ideas tan naturales sobre el recuento será imprescindible.

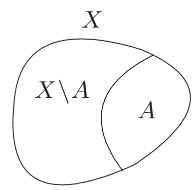
En cuanto al lema del doble recuento, resulta ser también un método de gran utilidad. Más adelante, nos permitirá codificar de manera transparente resultados difíciles de probar por otros métodos (en el principio de inclusión/exclusión, en grafos, en el lema de Hall, etc.). El siguiente ejemplo es simpático, y nos lo volveremos a encontrar en diversos contextos.

EJEMPLO 2.1.4 ***(Lema de los saludos)****. Consideremos una reunión de n personas que pueden conocerse o no entre sí. Si un par de personas se conocen, se saludarán (con un fuerte apretón de manos, por ejemplo). Comprobemos que el número de saludos, sea cual sea n o el número de personas que se conozcan entre sí, es siempre un número par.*

¡Ah!, ¿pero no es obvio? Si a conoce a b, entonces a saluda a b y b saluda a a: ¡dos saludos! Y, en total, un número par de saludos. La comprobación formal, vía el lema del doble recuento, pasa por considerar la matriz cuyas filas van etiquetadas con las n personas de la reunión, digamos $a_1, \dots, a_n$; y cuyas columnas tienen, como etiquetas, a todos los subconjuntos $\{a_j, a_k\}$ de personas que realmente se conozcan entre sí. Colocamos un 1 en la posición correspondiente a la fila a_i y la columna $\{a_j, a_k\}$ si la persona a_i es una de las del par $\{a_j, a_k\}$. La clave es que cada columna contiene sólo dos unos, así que la suma por columnas da un número par. Mientras que al sumar en la fila de a_i, obtenemos el número de saludos en que interviene la persona a_i. Así que la suma por filas nos da el número total de saludos. Puede comprobar el lector que, además, el número de personas que efectúan un número *impar* de saludos debe ser, necesariamente, par.

Aunque quizás prefiera esperar a disponer del lenguaje de los grafos, en el que el argumento de doble recuento resultará más transparente (véanse el lema 10.1 y el ejercicio 10.1.8). Para completar el análisis de esta (después de todo, entretenida) reunión, digamos también que, aplicando el principio del palomar, se puede comprobar también que necesariamente habrá (al menos) dos personas que efectúan el *mismo* número de saludos (véase el ejemplo 5.1.3). ♣

2.1.2. El paso al complementario



Tenemos un conjunto X y queremos contar cuántos de sus elementos cumplen una cierta propiedad; llamemos A al subconjunto de X formado por estos elementos. Sea $X \setminus A$ el conjunto de los elementos de X que no están en A (esto es, que no cumplen la propiedad que caracteriza a los elementos de A), lo que llamaremos el **conjunto complementario**[3] **de A en X**. El esquemático dibujo que aparece a la derecha aclara la idea.

Como tendrá ocasión de comprobar el lector, es a veces más sencillo evaluar el número de elementos de X que no están en A, es decir, $|X \setminus A|$, que el propio tamaño de A. Y como[4]

$$|X| = |A| + |X \setminus A|\,, \quad \text{esto es,} \quad \boxed{|A| = |X| - |X \setminus A|}\,,$$

si conocemos el tamaño de los conjuntos X y $X \setminus A$, podremos calcular el de A. A la espera de aplicaciones más excitantes de este argumento de paso al complementario, lo ilustramos con un sencillo ejemplo.

[3]En ocasiones utilizaremos un símbolo como A^c para designar a este conjunto complementario. Pero sólo será cuando, por el contexto, quede claro cuál es conjunto “grande” que incluye a A y dentro del que se está definiendo el complementario de A. De lo contrario, utilizaremos la notación $X \setminus A$, que muestra explícitamente a todos los conjuntos involucrados.

[4]Esta regla es un caso particular de la regla de la suma, que estudiaremos en la sección 2.3.

Ejemplo 2.1.5 *¿Cuántos números entre 1 y 60000 no dividen al propio 60000?*

El conjunto de interés es $C = \{n \in \mathbb{N}\,, 1 \leq n \leq 60000 : n \text{ no divide a } 60000\}$, que está incluido en $X = \{1, 2, \ldots, 6000\}$. Obsérvese que $|X| = 60000$. Ya consideramos, en el ejemplo 2.1.1, el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \textit{ divide } \text{a } 60000\}$. Observe el lector que A también está incluido en X (pues los divisores de 60000 deberán ser ≤ 60000). Pero más aún, A resulta ser, justa y afortunadamente, $X \setminus C$. Así que

$$|C| = |X| - |X \setminus C| = 6000 - |A|\,.$$

Tenga aún un poco de paciencia el lector, hasta que lleguemos al ejemplo 2.2.1, con el que podremos completar todos estos cálculos. ♣

2.1.3. El infinito

¿Qué es un conjunto infinito? Siguiendo la definición dada unas páginas atrás, cualquier conjunto que no pueda ser puesto en biyección con $\{1, \ldots, n\}$, sea cual sea n. Desde luego, el propio conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, es un conjunto infinito. También son infinitos el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, el de los racionales $\mathbb{Q}$, el de los reales $\mathbb{R}$, etc. Ahora bien, casi cualquier pregunta que nos hagamos al respecto, como por ejemplo: ¿hay infinitos "más grandes" que otros?; ¿hay alguna manera de compararlos?, requiere un análisis cuidadoso y delicado, que es el que pretendemos hacer en esta subsección. Porque el concepto del infinito[5] es elusivo y desafía en muchas ocasiones nuestra intuición. En palabras de Hilbert[6],

Figura 2.1: Hilbert

> ¡El infinito! Ninguna otra cuestión ha conmovido nunca tan profundamente el espíritu humano; ninguna otra idea ha estimulado tan fructíferamente su intelecto; y ningún otro concepto tiene tanta necesidad de ser clarificado.

Dejémonos guiar por el caso finito. Recordemos que si A y B son dos conjuntos finitos y existe una función biyectiva entre ellos, entonces decimos que A y B tienen el mismo tamaño o cardinal. Decidimos entonces ampliar el rango de aplicación de esta definición: dos conjuntos cualesquiera A y B *tienen el mismo cardinal* si existe una biyección entre ambos.

[5] Aquí convendría señalar que el concepto de infinito al que nos estamos refiriendo es al de un *infinito actual*, una entidad, un objeto dado. Desde Aristóteles (que lo prohibía expresamente en el Libro III de su *Física*) hasta Gauss sólo se manejaba un concepto de *infinito potencial*, como la posibilidad de considerar procesos *ad infinitum*.

[6] David Hilbert (1862-1943) fue uno de los matemáticos más influyentes de finales del siglo XIX y principios del XX. Realizó importantísimas aportaciones a diversas ramas de las matemáticas, como la Teoría Algebraica de Números, la Geometría, los Fundamentos de las Matemáticas, el Análisis Funcional, la Física matemática... Los ahora llamados espacios de Hilbert son la base de la formulación de la Mecánica cuántica, que ha conseguido describir satisfactoriamente los fenómenos subatómicos. En 1900, en el segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París, propuso una lista de 23 problemas que él consideró como los más relevantes en las Matemáticas de aquel momento; algunos de ellos todavía no se han resuelto completamente, como es el caso de la hipótesis de Riemann. Quizás sirva como ilustración de su espíritu una de sus frases favoritas: *Wir müssen wissen, wir werden wissen.* Esto es, "Debemos saber, sabremos".

Esta definición depara inmediatamente sorpresas. Consideremos, por ejemplo, dos conjuntos infinitos, como el de los números naturales $\mathbb{N}$ y el conjunto P de todos los números naturales *pares*. Aún siendo ambos infinitos, la intuición nos dice que "hay más" números naturales que números naturales pares. Al fin y al cabo, $P \subset \mathbb{N}$. Pero consideremos la función $f : \mathbb{N} \to P$ dada por $f(n) = 2\,n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que esta función es una biyección entre los dos conjuntos, así que, según nuestra definición, tienen el mismo cardinal. Lo mismo ocurre con $\mathbb{N}$ y los números naturales impares (tomando, por ejemplo, la función $f(n) = 2n - 1$). Sorpréndase el lector: los naturales pares (o los impares) son un subconjunto de $\mathbb{N}$ (y no son todo $\mathbb{N}$), y sin embargo ambos conjuntos tienen el mismo cardinal.

Oigamos a Antonio Machado con el siguiente *Ejercicio de Sofística* de Juan de Mairena:

> La serie de los números pares es justamente la mitad de la serie total de números. La serie de los números impares es justamente la otra mitad. La serie de los pares y la serie de los impares son —ambas— infinitas. La serie total de los números es también infinita. ¿Será entonces doblemente infinita que la serie de los números pares y que la serie de los impares? Sería absurdo pensarlo, porque el concepto de infinito no admite ni más ni menos. Entonces, las partes —la serie par y la impar—, ¿serán iguales al todo?
>
> – Átenme esta mosca por el rabo y díganme en qué consiste lo sofístico de este argumento.
>
> Juan de Mairena gustaba de hacer razonar en prosa a sus alumnos, para que no razonasen en verso.

FIGURA 2.2: Galileo

También el conjunto $C = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ de los números naturales que son cuadrados es un conjunto infinito que puede ser puesto en biyección con $\mathbb{N}$. Sobre esto reflexionaba, algo atribulado, Galileo[7]:

> No veo otra decisión sino admitir que el conjunto de los números [naturales] es infinito; los cuadrados son infinitos, y ni la cantidad de cuadrados es menor que la cantidad de naturales, ni al revés. Los atributos de igualdad, de mayor o menor no tienen cabida al tratar cantidades infinitas, sino sólo en cantidades finitas.

Como veremos pronto, Machado y Galileo sólo tenían razón en parte: en realidad, el concepto de infinito sí admite "más y menos".

El que una parte tenga igual cardinal que el todo no puede ocurrir, por supuesto, para conjuntos finitos. Un buen ejemplo de esta paradoja

[7]Galileo Galilei (1564-1642), astrónomo, filósofo, matemático, es bien conocido por sus trabajos sobre la caída de los cuerpos, su uso del telescopio o su desarrollo del método experimental (o científico), así como por los problemas que tuvo con la Inquisición por apoyar la teoría heliocéntrica de Copérnico. Es legendaria la frase (quizás apócrifa) de *eppur si muove* ("y, sin embargo, se mueve") que pronunció cuando fue obligado a abjurar de sus planteamientos heliocéntricos. En el siguiente extracto de su obra de 1623 *El ensayador* (Aguilar, Buenos Aires, 1981), Galileo defiende con pasión la necesidad de manejar el lenguaje de las Matemáticas para entender el "libro de la Naturaleza":

> La Filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el Universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.

es el conocido como *hotel de Hilbert*: si un hotel tiene un número finito de habitaciones[8] y todas ellas están ocupadas, no podremos alojar a ningún huésped nuevo. Sin embargo, imaginemos un curioso hotel que tuviera un número infinito de habitaciones, la 1, la 2, la 3, etc., todas ocupadas. Llega un nuevo huésped que desea habitación, pero el recepcionista no se arredra ante las dificultades, y encuentra una solución: pide al huésped que ocupa la habitación 1 que se mude a la 2, al de la 2, que pase a la 3, y así, sucesivamente. De manera que el viajero puede ser acomodado en la primera habitación. Piense el lector cómo podría encontrarse alojamiento si llegaran, por ejemplo, 25 personas nuevas al hotel.

Pero el día se presenta complicado: los huéspedes de otro hotel de la misma cadena, también infinito, y también lleno, deben ser acomodados en el primer hotel, por razones que ahora no vienen al caso. El intrépido recepcionista encuentra la solución: pide al huésped de la habitación 1 que se mude a la 2, el de la 2 a la 4, el de la 3 a la 6, y, en general, el de la n a la $2n$. Libera así las habitaciones impares, en las que encuentran acomodo los nuevos huéspedes[9].

A. Ordenando el infinito

¡Puedo ordenar el infinito!, les dijo Cantor a Machado y a Galileo. Quienes, seguramente, le contestaron: ¡que la Fuerza te acompañe!

Pensemos en conjuntos finitos primero, y en aplicaciones entre ellos. ¿Cuándo tenemos que $|A| \le |B|$? Bien sencillo, cuando se puede establecer una aplicación inyectiva de A en B. Es decir, cuando cada elemento de A se puede emparejar con un elemento distinto de B (aunque queden, quizás, elementos de B sin emparejar). O, equivalentemente, cuando haya una aplicación sobreyectiva de B en A.

Pues bien, usamos esa misma propiedad de los conjuntos finitos para *definir* el orden entre cardinales de conjuntos infinitos:

$$|A| \le |B| \text{ si existe una aplicación inyectiva de } A \text{ en } B.$$

O, equivalentemente,

$$|A| \le |B| \text{ si existe una aplicación sobreyectiva de } B \text{ en } A.$$

La equivalencia de estas dos definiciones queda como ejercicio 2.1.3 para el lector interesado. Quien seguramente se estará ya preguntando, inquieto ante las veleidades del infinito, ¿será cierto (nótese el agrio sabor de la duda en la voz del lector) que

$$|A| \le |B| \quad \text{y} \quad |B| \le |A| \quad \Longrightarrow \quad |A| = |B|\ ?$$

Algo obvio si se tratara de conjuntos finitos, pues $|A|$ y $|B|$ son números naturales. Pero al traducir a conjuntos infinitos, nos estamos preguntando si de la existencia de sendas aplicaciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$ podemos deducir la existencia de una aplicación biyectiva de A en B. La respuesta es sí: es el llamado teorema de Bernstein-Schröder, cuya demostración, con las sugerencias oportunas, pedimos completar al lector en el ejercicio 2.1.4.

[8] ¡Que es lo habitual!, pese a que en algún hotel de nuestras costas pueda parecer lo contrario.

[9] Más conclusiones sorprendentes: del hotel se marcha un huésped y sigue habiendo el *mismo* número de ocupantes. Si se marchan todos los de las habitaciones pares, ocurre lo mismo; pero no así si se marchan los huéspedes que ocupan las habitaciones, digamos, de la quinta en adelante (véase también el ejercicio 2.1.2).

B. Conjuntos numerables y no numerables

Provistos de esta nueva tecnología, nos disponemos a analizar otros conjuntos infinitos. Para nombrar el cardinal de $\mathbb{N}$, nuestro conjunto infinito preferido (por ahora), utilizamos la primera letra del alfabeto hebreo, $\aleph_0$ (léase "alef sub cero"). La biyección f que construimos un par de páginas atrás entre $\mathbb{N}$ y el conjunto P de los naturales pares nos confirma que ambos conjuntos tienen el mismo cardinal. Y además nos permite *listar* los elementos de P; así, 2 es el "primer" elemento (pues es la imagen de 1), 4 es el "segundo" (imagen de 2), etc.

Esto es algo general: sea A un conjunto para el que existe una biyección $f : \mathbb{N} \to A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos a_n al elemento de A que es imagen de n mediante f, $f(n) = a_n$. Entonces podemos listar los elementos del conjunto A: $(a_1, a_2, a_3, \dots)$. Cualquier conjunto que pueda ser puesto en biyección con $\mathbb{N}$ se dice que es **numerable**[10], y su cardinal será el mismo que el de $\mathbb{N}$, esto es, $\aleph_0$. El propio $\mathbb{N}$ es, claro, numerable, y también lo son, como hemos visto, los conjuntos de los naturales pares, impares o cuadrados. De hecho, cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ es numerable (véase el ejercicio 2.1.5).

Resulta natural preguntarse si hay conjuntos numerables de los que $\mathbb{N}$ sea una parte. Por ejemplo, ¿es acaso numerable el conjunto de los enteros, $\mathbb{Z}$? Sí, lo es, pues la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = \frac{n}{2}$ si n es par y $f(n) = \frac{1-n}{2}$ si n es impar, es una biyección, que se corresponde con la siguiente enumeración ordenada de los enteros: $(0, 1, -1, 2, -2, \dots)$.

Seguimos adelante y, ambiciosos, nos preguntamos si el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable o no. La respuesta ya no es tan obvia: ¿cómo los enumeramos?, no podemos ordenarlos en forma creciente, pues, para empezar, no hay un racional "más pequeño". Pero sí, $\mathbb{Q}$ *también* es numerable. El siguiente argumento nos muestra la numerabilidad de $\mathbb{Q}^+$, esto es, de los racionales positivos (la extensión a todo $\mathbb{Q}$ será inmediata).

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} \longrightarrow & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} \longrightarrow & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\downarrow & & & & \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\downarrow & & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Todo lo que tenemos que hacer es listarlos adecuadamente, con la ayuda de la tabla (infinita) que aparece a la izquierda. Los racionales de denominador 1 están en la primera fila, los de denominador 2 en la segunda, etc., así que la tabla incluye a todos los racionales positivos. Ahora los recorremos siguiendo el itinerario zigzagueante que marcan las flechas del dibujo. Observe el lector que en el recorrido visitamos *todos* los elementos de $\mathbb{Q}^+$. Y aunque se repiten (por ejemplo, pasamos por 1/1, 2/2, 3/3, etc., que son el 1), el procedimiento da lugar a una aplicación sobreyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ que permite deducir la numerabilidad de $\mathbb{Q}^+$ (véase el ejercicio 2.1.6). Una vez enumerados los racionales positivos, hacer lo mismo con todos los racionales es tarea sencilla (ejercicio 2.1.8). El mismo argumento permite comprobar que el conjunto $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, los pares de números naturales, es numerable. De hecho, cualquier producto cartesiano de un número finito de copias de $\mathbb{N}$ es numerable (véase el ejercicio 2.1.9).

[10] Hay quien entiende que numerable incluye también el caso en que el conjunto es finito. A veces se utiliza la palabra **contable**, como aquél que se puede contar o enumerar.

¿Pero es que *todos* los conjuntos infinitos son numerables?, se preguntará el lector, algo decepcionado por la posibilidad de que, después de todo, el concepto de infinito no sea tan rico como empezaba a suponer. Por ejemplo, ¿qué ocurre con $\mathbb{R}$, es numerable o no?

FIGURA 2.3: Cantor

Teorema 2.3 (Cantor) *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ **no** es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. El argumento que sigue, conocido como el **argumento diagonal de Cantor**[11] es de una belleza e ingenio desbordantes. Antes de entrar a describirlo, observemos que queremos probar un resultado de imposibilidad: a saber, que no es posible poner en biyección $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$. En realidad, haremos sólo el argumento que demuestra que el intervalo $(0, 1)$ no puede ser puesto en biyección con $\mathbb{N}$ (el que $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$ sí que pueden ser relacionados mediante una biyección es sencillo de comprobar, véase el ejercicio 2.1.11). Procederemos por reducción al absurdo: supongamos que $(0, 1)$ es numerable. Sabemos que entonces podremos listar en orden todos sus elementos; llamémosles $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ y enumerémoslos exhibiendo sus expresiones decimales.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_1^1\, a_2^1\, a_3^1\, a_4^1 \dots \\ x_2 &= 0, a_1^2\, a_2^2\, a_3^2\, a_4^2 \dots \\ x_3 &= 0, a_1^3\, a_2^3\, a_3^3\, a_4^3 \dots \\ x_4 &= 0, a_1^4\, a_2^4\, a_3^4\, a_4^4 \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

En la lista de la izquierda, a_i^j significa el entero (entre 0 y 9) que ocupa la posición i-ésima del desarrollo decimal del número real x_j, que ocupa la posición j en esta ordenación. Ahora construimos un número real (en el intervalo $(0, 1)$)

$$y = 0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \dots$$

de la siguiente manera: si $a_1^1 = 1$, entonces $b_1 = 2$, y si $a_1^1 \neq 1$, entonces $b_1 = 1$. La segunda cifra decimal, b_2, será 1 si $a_2^2 \neq 1$ y será 2 si $a_2^2 = 1$. En general,

$$b_n = \begin{cases} 1\,, & \text{si } a_n^n \neq 1, \\ 2\,, & \text{si } a_n^n = 1. \end{cases}$$

La expresión decimal del número y así construido consta de una lista de unos y doses tras la coma decimal; como es un número de nuestro intervalo $(0, 1)$, ha de aparecer en nuestra lista, en alguna posición, digamos en la posición k. Así que $y = x_k$. Pero esto no puede ocurrir, porque b_k, la k-ésima cifra del desarrollo decimal de y es, por construcción, diferente de a_k^k, la k-ésima del desarrollo de x_k (y el desarrollo decimal de y no termina en una lista infinita de ceros o nueves, lo que podría dar lugar a ambigüedad, véase la página 216). Hemos llegado así a una contradicción. ■

El cardinal de $\mathbb{R}$ (y el de los conjuntos que se pueden poner en biyección con él[12]) se nombra con la letra c; se dice que tiene el cardinal del **continuo**.

[11]Georg Cantor (1845-1918) es considerado como el padre de la moderna Teoría de Conjuntos. Sus trabajos en este campo, sus estudios sobre el infinito, hicieron que Hilbert llegara a decir que “nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros”. También contribuyó a definir conceptos como la dimensión o la medida. Su biografía está salpicada de relaciones tempestuosas con matemáticos de la época, como Kronecker o Mittag-Leffler. Sufrió numerosas crisis depresivas y, de hecho, murió internado en un sanatorio psiquiátrico.

[12]Como un intervalo de la recta real, o algunos otros tan extraños como el **conjunto ternario de Cantor** de todos los números reales entre 0 y 1 cuyo desarrollo en base 3 no contiene ningún uno.

Como $\mathbb{Q}$ es numerable y $\mathbb{R}$ no, el conjunto de los irracionales no puede ser numerable (véase el ejercicio 2.1.8). Así que irracionales hay "muchos más" que racionales. Uno se pregunta qué le habría ocurrido a Cantor tras este descubrimiento si hubiera vivido entre los pitagóricos (recordando el final de Hipaso, que se limitó a mostrar que $\sqrt{2}$ era irracional).

Observemos que un número racional a/b (y en particular, un entero) es solución de la ecuación $b\,x - a = 0$, es decir, es una raíz de un polinomio de grado 1 con coeficientes enteros. Números irracionales como $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{5}$ son también raíces de polinomios con coeficientes enteros; en este caso, de grado 2: $x^2 - 2 = 0$ y $x^2 - 5 = 0$, respectivamente. También la razón áurea, $(1 + \sqrt{5})/2$, es raíz de un polinomio de este tipo, $x^2 - x - 1 = 0$. En general, diremos que un número es **algebraico** si es raíz de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros. Los números reales que no son algebraicos, los demás, se denominan **trascendentes**[13]. Pues bien, se puede demostrar (véase el ejercicio 2.1.10) que el conjunto de los números algebraicos es numerable, así que el de los trascendentes no lo es. Algo paradójico: hay "muchos más" números trascendentes que algebraicos, pero probar la trascendencia de un número concreto es, en general, un problema dificilísimo (véase la subseccion 5.2.3).

C. Una escala para el infinito

Ya tenemos dos infinitos (distintos, ¡eh!): por un lado, el cardinal de $\mathbb{N}$, $\aleph_0$, que es, por cierto, el "más pequeño" infinito posible (véase el ejercicio 2.1.7). Y, por otro, el cardinal del continuo, c. Nos planteamos entonces dos cuestiones: ¿habrá, por ventura, algún cardinal infinito estrictamente mayor que el de $\mathbb{N}$ pero menor que el de $\mathbb{R}$? ¿Y existen más cardinales infinitos, además de estos dos?

FIGURA 2.4: Gödel

Para la primera pregunta, la famosa **hipótesis del continuo** afirma que tal cardinal no existe. Gödel[14] ya probó que si uno toma la hipótesis del continuo como un axioma más que añadir a los habituales de la teoría de conjuntos no se llegaba a contradicción alguna. El desenlace de la historia es sorprendente[15], pues resulta que esta hipótesis es independiente del resto de los axiomas, así que no puede ser probada o refutada partiendo de ellos.

[13]La existencia de estos números trascendentes fue demostrada por Liouville en 1844 (veáse el ejemplo 5.2.4). Ya comentamos, en la nota al pie de la página 15 que Hermite probó en 1873 que el número e es trascendente (que e es irracional se prueba en el ejemplo 5.2.3), y que, poco después, en 1882, Lindeman demostró que π también es transcendente (dando fin, así, al famoso problema de la cuadratura del círculo).

[14]Kurt Gödel (1906-1978) revolucionó los Fundamentos de las Matemáticas cuando, en 1931, publicó su famoso Teorema de Incompletitud, que respondía, negativamente, al *Entscheidungsproblem* de Hilbert, el problema de encontrar un método mecánico para decidir si una proposición matemática arbitraria puede ser probada dentro de una teoría o no. Nacido bajo el Imperio austro-húngaro, Gödel emigraría definitivamente a los Estados Unidos en 1940. En Princeton coincidiría con personajes de la talla de Einstein, von Neumann o Morgenstern, con quienes estableció una sólida amistad. En un curioso paralelismo con Cantor, Gödel sufría de frecuentes depresiones y necesitó en varias ocasiones tratamiento psiquiátrico. En los últimos meses de su vida, creyó estar siendo envenenado, por lo que se negó a comer, lo que aceleró su muerte.

[15]Probar la hipótesis del continuo fue uno de los problemas propuestos por Hilbert en 1900. En 1963, Paul Cohen logró demostrar que se llegaba a la misma no contradicción con los axiomas de la teoría de conjuntos si se tomaba la negación de la hipótesis del continuo como un axioma más.

Algo descolocados por la casi increíble conclusión anterior, nos centramos en la segunda cuestión, para la que, como veremos, sí que tenemos una respuesta (afirmativa): hay más infinitos, además de los dos que hemos hallado hasta ahora. De hecho, toda una jerarquía de infinitos distintos.

Para verlo, consideremos un conjunto cualquiera X, y llamemos $\boldsymbol{\mathcal{P}(X)}$ a la colección de todos los subconjuntos de X (este conjunto se nombra como **partes de $\boldsymbol{X}$**). Ya hemos visto, en el caso finito (véase el ejemplo 2.1.2), una biyección de $\mathcal{P}(X)$ en el conjunto de las listas de ceros y unos de longitud n que nos permitirá deducir más adelante (ejemplo 2.2.2) que, si $|X| = n$, entonces $\mathcal{P}(X)$ tiene tamaño 2^n. Pero el resultado que aquí nos interesa es el siguiente:

Teorema 2.4 (Cantor) *Dado un conjunto X, no puede existir una biyección de X sobre $\mathcal{P}(X)$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que hubiera una biyección $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Esta aplicación asocia a cada elemento $x \in X$ una imagen $f(x)$ que es un cierto subconjunto de X, esto es, un elemento de $\mathcal{P}(X)$. En el otro sentido, cualquier subconjunto de X (cualquier elemento de $\mathcal{P}(X)$) es la imagen, $f(y)$, de un cierto $y \in X$.

Ahora consideremos el conjunto

$$A = \{x \in X \,:\, x \notin f(x)\}\,,$$

que, en palabras, es el conjunto de los elementos de $x \in X$ que no están incluidos en el subconjunto $f(x)$ que les asocia la biyección. Por supuesto, A es un subconjunto de X, es decir, $A \in \mathcal{P}(X)$, así que existirá cierto $y \in X$ para el que $A = f(y)$.

Concluimos la demostración analizando las dos posibilidades que existen, dependiendo de si ese elemento y está o no en A. La conclusión en ambos casos es expeditiva, y hará bien el lector en meditar detenidamente sobre ellas:

- Si $y \in A$, entonces, por la definición de A, $y \notin f(y)$. Pero esto es una contradicción, porque $A = f(y)$.
- Si $y \notin A$, entonces $y \in f(y)$. Pero entonces y debería estar en $A = f(y)$, de nuevo una contradicción.

En ambos casos llegamos a una contradicción, así que la supuesta biyección $f : X \to \mathcal{P}(X)$ no puede existir en realidad. ■

Obsérvese que, sin embargo, es sencillo establecer una aplicación inyectiva de X en $\mathcal{P}(X)$, asignando, por ejemplo, a cada $x \in X$, el conjunto formado únicamente por él mismo, esto es, $\{x\}$. Así que $\text{cardinal}(X) \leq \text{cardinal}(\mathcal{P}(X))$. Pero como el Teorema 2.4 nos dice que los conjuntos no tienen el mismo cardinal, deducimos finalmente que el cardinal de X es, con seguridad, menor que el de $\mathcal{P}(X)$.

En particular, el cardinal de $\mathbb{N}$ es menor que el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (que es, por cierto, el del continuo, véase el ejercicio 2.1.13). Repitiendo el argumento, primero para $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, luego para... llegamos a descubrir toda una cadena de cardinales infinitos:

$$\text{cardinal}(\mathbb{N}) < \text{cardinal}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) < \text{cardinal}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) < \cdots$$

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.1

2.1.1 *Se forman todas las listas de longitud n con los números $\{1,\dots,6\}$ y con repetición permitida. Una tal lista se dice impar si la suma de los números que la forman es impar, y par en caso contrario.*

(a) Demuéstrese que la mitad de las listas son pares.

(b) ¿Ocurriría lo mismos si las listas estuvieran formadas con los números $\{1,2,\dots,7\}$?

2.1.2 ***Sobre el hotel de Hilbert.*** *Durante una hora ocurre lo siguiente: al empezar, el hotel está vacío; a lo largo de la primera media hora llegan dos huéspedes, y se va uno; a lo largo del siguiente cuarto de hora llegan otros dos huéspedes y se va uno (de los tres que habría en ese instante); a lo largo del siguiente octavo de hora llegan otros dos, y se va uno (de los cuatro que habría entonces); y así sucesivamente. Obsérvese que al final del n-ésimo período de tiempo tenemos siempre n habitaciones ocupadas.*

(a) Compruébese, sin embargo, que si en cada período de tiempo el huésped que se marcha es el más antiguo en ese momento, al final de la hora el hotel queda vacío.

(b) Por el contrario, si quien se marcha es el huésped más reciente, el hotel tendrá infinitas habitaciones ocupadas al final de la hora.

(c) ¿Cuántos huéspedes quedan en el hotel si, en cada periodo, quien se marcha es el segundo huésped más antiguo?

2.1.3 *Sean A y B dos conjuntos. Compruébese que si tenemos una aplicación inyectiva $A \to B$, entonces hay también una aplicación sobreyectiva $B \to A$ (y viceversa).*

2.1.4 *En este ejercicio detallamos los pasos de una demostración del* ***teorema de Bernstein-Schröder****, que afirma que si existen sendas aplicaciones inyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$, entonces existe una aplicación biyectiva $h : A \to B$ (y, por tanto, A y B tienen el mismo cardinal).*

Observemos primero que si $g(B) = A$, entonces g es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva. Supongamos entonces que $g(B) \neq A$ y llamemos $C_0 = A \setminus g(B)$.

(a) Consideremos ahora el conjunto $C_1 = (g \circ f)(C_0)$. Compruébese que $C_1 \subset A$ y que $C_1 \cap C_0 = \emptyset$.

(b) Definimos, de manera recursiva, los siguientes conjuntos:

$$C_n = (g \circ f)^n(C_0) \qquad \textit{para cada } n \geq 1.$$

Pruébese por inducción que todos ellos son subconjuntos de A y que $C_n \cap C_m = \emptyset$ si $n \neq m$.

(c) Finalmente, consideramos el conjunto

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Ya estamos en disposición de definir la aplicación $h : A \to B$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{si } x \in C; \\ g^{-1}(x) & \textit{si } x \notin C. \end{cases}$$

Compruébese que h está bien definida.

(d) Compruébese que h es una biyección de A en B.

2.1.5 *Pruébese que cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ es numerable.*

2.1.6 *Sea S un conjunto infinito.*

(a) Compruébese que si hay una aplicación sobreyectiva $g : \mathbb{N} \to S$, entonces S es numerable. Dedúzcase, del argumento de la página 60*, que $\mathbb{Q}^+$ es numerable.*

(b) Compruébese que si existe una aplicación inyectiva $f : S \to \mathbb{N}$, entonces S también es numerable.

2.1.7 *Pruébese que si A es un conjunto infinito, entonces A contiene a un conjunto B numerable. Es decir, que hay una aplicación inyectiva de $\mathbb{N}$ en A.*

2.1.8 *(a) Pruébese que si A y B son dos conjuntos numerables, entonces $A \cup B$ es numerable. Y que, en general, si $A_1, \dots, A_n$ son conjuntos numerables, entonces $\cup_{j=1}^n A_j$ es numerable.*

(b) Ya sabemos que $\mathbb{Q}^+$ es numerable. Dedúzcase, del apartado anterior, que $\mathbb{Q}$ es numerable.

(c) También sabemos que $\mathbb{R}$ no es numerable. Dedúzcase que el conjunto de los números irracionales no es numerable.

2.1.9 *(a) Pruébese que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.*

(b) Dedúzcase (utilizando inducción) que, en general, el conjunto $\mathbb{N} \times \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \times \mathbb{N}$, esto es, el producto cartesiano de un número finito de copias de $\mathbb{N}$, es numerable.

2.1.10 *(a) Demuéstrese que, dada una colección numerable $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ de conjuntos finitos, entonces $A = \cup_{j=1}^\infty A_j$ es un conjunto numerable (o finito).*

(b) Pruébese que si $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ es una colección numerable de conjuntos numerables, entonces el conjunto $A = \cup_{j=1}^\infty A_j$ es numerable.

(c) Dedúzcase del apartado anterior que el conjunto de los números (reales) algebraicos es numerable.

2.1.11 *(a) Constrúyase explícitamente una función biyectiva $f : \mathbb{R} \to (0,1)$.*

(b) Constrúyase explícitamente una función biyectiva $f : \mathbb{R} \to (a,b)$.

2.1.12 *(a) Pruébese que el conjunto de todas las listas infinitas de ceros y unos no es numerable.*

(b) Compruébese que, sin embargo, el conjunto de todas las listas finitas (de longitud arbitraria) formadas con ceros y unos sí es numerable.

2.1.13 *(a) Compruébese que el cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ coincide con el cardinal del intervalo $(0,1)$ (y, por tanto, con el de $\mathbb{R}$).*

(b) Demuéstrese que, sin embargo, el conjunto de las partes finitas de $\mathbb{N}$ sí es numerable.

2.1.14 *(a) Pruébese que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene la cardinalidad del continuo.*

(b) ¿Cuál será el cardinal del conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$?

(c) ¿Cuál es el cardinal del producto cartesiano de un número finito de copias de $\mathbb{R}$?

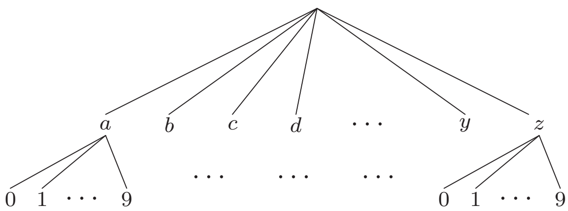
2.1.15 *Demuéstrese que si $card(A) = card(B)$, entonces $card(\mathcal{P}(A)) = card(\mathcal{P}(B))$.*

2.1.16 *Reflexiónese sobre el siguiente "argumentum ornithologicum" (Jorge Luis Borges, "El Hacedor", 1960):*

> *Cierro los ojos y veo una bandada de pájaros. La visión dura un segundo o acaso menos, no sé cuantos pájaros vi. ¿Era definido o indefinido su número? El problema involucra el de la existencia de Dios. Si Dios existe, el número es definido, porque Dios sabe cuántos pájaros vi. Si Dios no existe, el número es indefinido, porque nadie pudo llevar la cuenta. En tal caso, vi menos de nueve, ocho, siete, seis, cinco, cuatro, tres, o dos pájaros. Vi un número entre diez y uno, que no es nueve, ocho, siete, seis, cinco, etcétera. Ese número entero es inconcebible; ergo, Dios existe.*

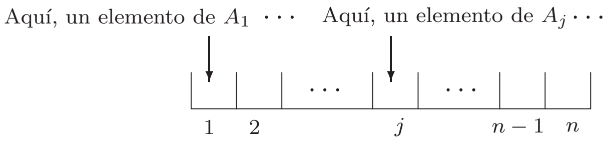
2.2. La regla del producto

Empecemos con un ejemplo sencillo: contar el número de "palabras" que podemos formar con una letra y un número (en este orden), suponiendo que disponemos de 23 letras $\{a, \dots, z\}$ y de 10 números, $\{0, \dots, 9\}$. Las palabras a las que nos referimos son listas de dos posiciones, en las que situamos una letra seguida de un número, como por ejemplo $(b3)$ ó $(c9)$.

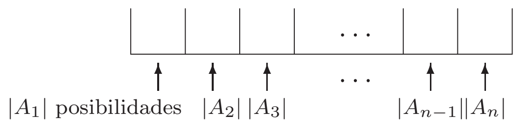


Para formar una de estas palabras, seguramente el lector escogerá, sucesivamente y en este orden, primero la letra y luego el número. Es útil representar las posibilidades que tenemos en este procedimiento de construcción con un esquema (un "árbol") como el de la derecha. En el primer "piso" del árbol situamos las 23 posibles elecciones de letra. Y luego, para cada posible elección de letra, tenemos 10 posibilidades para el número. Cada una de las ramas del "árbol" dibujado nos conduce a un resultado distinto. No le resultará sorprendente al lector la conclusión de que hay 23×10 palabras distintas, pues por cada elección de letra hay 10 elecciones posibles de números; y hay 23 elecciones iniciales de letra distintas.

Generalizamos: digamos que queremos contar el número de n-listas en las que el primer elemento pertenece a un cierto conjunto A_1, el segundo a otro conjunto A_2, etc.:



Tenemos $|A_1|$ posibles elecciones para la primera posición. Y, *para cada una de ellas*, $|A_2|$ para la segunda. Y por cada elección del símbolo de las dos primeras posiciones, tendremos $|A_3|$ posibilidades para la tercera. Etc. Así que el número total de listas es $|A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$. Ésta es la *regla del producto*.

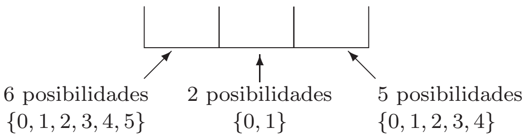


Una regla de tiene que ver con listas, que contamos enumerando las posibilidades en cada posición, por ejemplo de izquierda a derecha, para, finalmente, multiplicar los recuentos y obtener el número total de listas. Se aplicará también cuando, para contar el número de elementos de un conjunto, diseñemos un procedimiento de "construcción" de esos elementos que conste de varios pasos sucesivos, y en el que el número de posibilidades en cada paso no dependa de las elecciones hechas en los pasos anteriores.

Como podrá imaginar el lector, no siempre podremos contar aplicando esta sencilla regla. Digamos que queremos contar el número de 2-listas con ceros y unos que no tienen dos ceros. Hay 2 posibilidades para la primera posición; pero, para la segunda, el número de posibilidades *depende* del símbolo usado en la primera: habrá una si hemos colocado un 0, y dos si ha sido un 1. Ya veremos más adelante otros métodos para abordar estas situaciones.

Pero, para ir entrenándonos en el uso de la regla del producto, resolvamos algunos ejemplos que teníamos pendientes.

Ejemplo 2.2.1 *El número de divisores positivos de 6000, segunda parte.*



Recordando los argumentos del ejemplo 2.1.1, nos bastará con contar el número de 3-listas (α, β, γ) donde $0 \leq \alpha \leq 5$, $0 \leq \beta \leq 1$ y $0 \leq \gamma \leq 4$. Se trata de listas como las que se muestran a la izquierda. Así que en total tendremos $6 \times 2 \times 5 = 60$ listas. Por tanto, 60 es el número de divisores positivos de 60000. ♣

Ejemplo 2.2.2 *El número de subconjuntos distintos que podemos extraer de un conjunto con n elementos, segunda parte.*

Sea el conjunto $X = \{1, 2, \ldots, n\}$; ya establecimos, en el ejemplo 2.1.2, la biyección

$$A = \{\text{subconjuntos de } X\} \longleftrightarrow B = \left\{ \begin{array}{c} n\text{-listas con repetición} \\ \text{permitida formadas con los} \\ \text{elementos del conjunto } \{0,1\} \end{array} \right\}.$$

Para determinar el tamaño del conjunto B (y con ello, también el de A) basta aplicar la regla del producto: para la primera posición tendremos dos posibilidades, para la segunda otras dos, etc. Así que

$$|B| = 2^n \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\#\{\text{subconjuntos de un conjunto de tamaño } n\} = 2^n}$$ ♣

Ejemplo 2.2.3 *El sistema de matriculación de vehículos en España.*

En el sistema antiguo, una matrícula, digamos en la provincia de Madrid, era de la forma

M 1397 TF

es decir, una lista de siete posiciones: la letra que identifica la provincia, cuatro números y otras dos letras (entre las que no se cuentan ni la Ñ ni la Q). Dado que la primera letra es siempre una M, podemos olvidarnos de ella y limitarnos a contar el resto. Aplicando la regla del producto, obtenemos que el número de matrículas madrileñas distintas posibles es

$$10^4 \times 25^2 = 6250000\,.$$

A finales del año 2000, este sistema estaba a punto de agotarse. Tras numerosas discusiones, se decidió adoptar un nuevo tipo de matrículas (sin distintivos provinciales): una lista de cuatro números, seguida de tres letras (se excluyen las vocales y las consonantes Ñ y Q):

0000 BBB

Tenemos así un total de $10^4 \times 20^3$ posibilidades, esto es, 80 millones matrículas distintas para toda España[16]. ♣

[16] El ritmo anual de matriculaciones en España es, en estos albores del siglo XXI, de aproximadamente dos millones de vehículos. Evalúe el lector el periodo de vigencia de este nuevo sistema si se mantuviera este ritmo. ¿Y si creciera un 10 % anual?

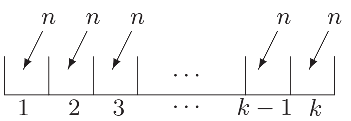
2.2.1. Listas con y sin repetición

Un problema frecuente de la Combinatoria consiste en evaluar el número de listas de cierta longitud, digamos k, en cuyas posiciones podemos situar símbolos de un cierto conjunto (o ciertos conjuntos), pero en las que, además, exigimos que se cumplan ciertas **restricciones**.

Según el tipo de restricciones con que nos encontremos, el análisis del problema puede resultar más o menos complicado. Ya hemos visto que, si las “restricciones” resultan ser, simplemente, que en cada posición se pueden utilizar únicamente los elementos de ciertos conjuntos, la regla del producto nos permite resolver la cuestión, siempre que el número de posibilidades para cada posición *no dependa* de lo elegido en las posiciones anteriores. Los ejemplos de esta subsección entran dentro de esta categoría.

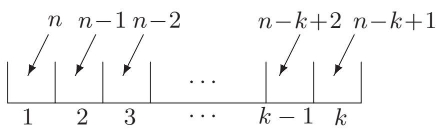
Pero también es habitual encontrarnos con otras restricciones, del tipo “en la segunda posición no puede aparecer el mismo símbolo que en la cuarta”. Para analizar estos casos, necesitaremos en general otra tecnología: el lenguaje de los grafos, y en concreto, los polinomios cromáticos, que estudiaremos en el capítulo 11. El ejemplo 2.2.7 da una idea del asunto.

Los ejemplos que abordaremos en esta subsección merecen una especial atención, pues, como el lector podrá comprobar, aparecen continuamente en los análisis combinatorios. Partimos de un conjunto A con n símbolos que, para fijar ideas, supondremos que es el conjunto $\{1,\dots,n\}$. Queremos formar listas de longitud k con los elementos de A.



Primer caso. ***Permitimos la repetición*** de símbolos. Con esto queremos decir que en las posiciones de la k-lista podría haber símbolos repetidos (aunque no es obligatorio). Obsérvese que en cada posición podemos situar cualquier símbolo de $\{1,\dots,n\}$, así que la regla del producto nos da la respuesta: para la posición primera de la lista tenemos n posibilidades, para la segunda otras n, y así sucesivamente. Por tanto,

$$\boxed{\#\left\{\begin{array}{c} k\text{-listas con repetición permitida} \\ \text{formadas con elementos de } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = n^k}$$



Segundo caso. ***No permitimos repetición*** de símbolos. Veamos si podemos abordarlo utilizando la regla del producto. Para la primera posición, tenemos n posibilidades. En los términos habituales, $A_1 = A$, que tiene tamaño n. ¿Y para la segunda? ¡Cuidado!, observará el lector: el conjunto A_2 de símbolos disponibles para la segunda depende, claro que sí, de lo elegido en la primera. Pero no su tamaño, que es lo único que exige la regla del producto: habrá siempre $n-1$ posibilidades (todos los símbolos, menos el usado en la primera). Para la tercera tendremos $n-2$ posibilidades (todos los símbolos, menos los usados en las dos primeras). Y así sucesivamente. De manera que

$$\boxed{\#\left\{\begin{array}{c} k\text{-listas sin repetición} \\ \text{formadas con } \{1,\dots,n\}\end{array}\right\} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Por supuesto, este resultado[17] es válido cuando $k \leq n$, porque si $k > n$, no tendremos ninguna k-lista con esos n símbolos. Recordemos que la notación $n!$ (el factorial de n, ó n factorial) resume el producto $n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ (por convenio, se asigna el valor $0! = 1$).

Un caso especial, que merece atención y nombre propio, es aquél en el que formamos n-listas sin repetición con n símbolos. Estas listas se denominan **permutaciones**, y de ellas hay

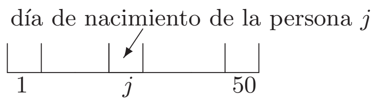
$$\boxed{\#\{\text{permutaciones de } n \text{ elementos}\} = n!}$$

Si el conjunto de símbolos que consideramos es el $\{1, \dots, n\}$, una lista sin repetición de n posiciones formada con ellos es simplemente una reordenación de estos símbolos. Veremos en la sección 3.2 que estas permutaciones tienen una estructura muy rica.

Una aplicación directa de estos cálculos nos permite abordar una cuestión sorprendente:

Ejemplo 2.2.4 *¿Cuál es la probabilidad p de que, de entre 50 personas escogidas al azar, al menos* ***dos*** *de ellas tengan la misma fecha de cumpleaños*[18] *?*

Antes de entrar en los detalles, atrévase el lector a adelantar una respuesta aproximada: ¿una probabilidad alta, baja? Hay 366 posibles fechas de cumpleaños, y sólo 50 personas en la muestra. Parece difícil que haya coincidencias... Pero, como veremos, y como ocurre en muchas otras cuestiones probabilísticas, esta intuición inicial falla estrepitosamente. Y es que... ¡la intuición se educa! En nuestro análisis sólo haremos uso del habitual concepto de "probabilidad" como cociente entre los casos favorables y los casos posibles, de manera que se trata de una cuestión puramente combinatoria[19].



El paso esencial consiste en identificar los objetos que manejaremos en nuestro análisis. Obsérvese que una "muestra" de fechas de cumpleaños no es más que una *lista* de 50 posiciones (cada una de las cuales corresponde a una persona de la muestra), en cuyas posiciones colocamos el día del año que corresponde a cada persona (supondremos que hay 366 posibles, para incluir los años bisiestos). Contemos primero los casos posibles:

$$\#\,\text{casos posibles} = \#\ \{50\text{-listas con repetición permitida extraídas de } \{1, \dots, 366\}\} = 366^{50}.$$

Ahora, en lugar de contar los casos favorables, y haciendo uso del paso al complementario, contaremos los "desfavorables", lo que resulta mucho más sencillo. Nos interesamos, pues,

[17] En algunos textos se llaman *variaciones con repetición*, VR_n^k, a las listas con repetición permitida, y *variaciones sin repetición*, en símbolo, V_n^k, a las listas sin repetición. No usaremos aquí esta terminología.

[18] Es éste un problema de corte probabilístico muy conocido, el llamado *problema de los cumpleaños*, que a su vez es el caso más sencillo de toda una serie de cuestiones a las que nos referiremos genéricamente como el *problema de las coincidencias* cuando lo analicemos en detalle en el capítulo 20.

[19] En este análisis simplificado subyace la hipótesis de que todas las fechas de nacimiento son "igualmente probables". Esto supone una cierta inexactitud, porque por ejemplo el 29 de febrero aparece, más o menos, la cuarta parte de veces que las demás fechas. Y en realidad, hay meses en los que se celebran más cumpleaños que otros (aunque esto depende de los países, las culturas, el clima e incluso de ciertos cálculos previos, en cuyos detalles ni nos atrevemos a entrar). Así que, en un modelo más ajustado, no todas las listas de 50 posiciones habrían de ser igualmente probables, de manera que el análisis del problema habría de ir más allá de la simple enumeración de casos favorables y posibles. Pero, como veremos en el capítulo 20, el caso de la equiprobabilidad es en el que con más dificultad tendremos coincidencias.

por las listas de 50 posiciones en las que no hay dos símbolos iguales; esto es, sin repetición:

$$\#\left\{\begin{array}{c}\text{casos}\\ \textit{desfavorables}\end{array}\right\} = \#\left\{\begin{array}{c}\text{50-listas sin repetición}\\ \text{extraídas de } \{1,\dots,366\}\end{array}\right\} = 366 \times 365 \times \cdots \times 317.$$

Por lo tanto,

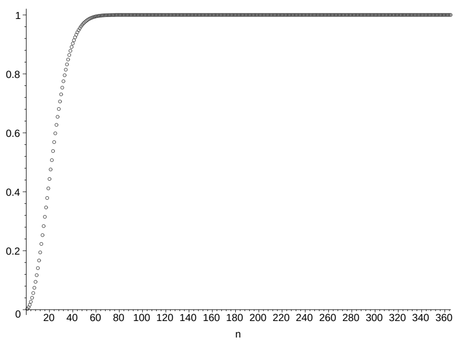
$$\frac{\#\,\text{casos favorables}}{\#\,\text{casos posibles}} = \frac{\#\,\text{casos posibles} - \#\,\text{casos desfavorables}}{\#\,\text{casos posibles}} = 1 - \frac{366 \times 365 \times \cdots \times 317}{366^{50}}.$$

¡Vaya cuentecita! Si el lector no se anima a teclear en la calculadora todos esos factores, puede proceder por aproximación, con el siguiente argumento, en el que usaremos que $1 - x \leq e^{-x}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ (véase el lema 2.6):

$$\begin{aligned} \textit{prob}(A^c) &= \frac{366 \cdot 365 \cdots 318 \cdot 317}{366 \cdot 366 \cdots 366 \cdot 366} = \frac{366}{366} \cdot \frac{(366-1)}{366} \cdot \frac{(366-2)}{366} \cdots \frac{(366-49)}{366} \\ &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{366}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{366}\right) \cdots \cdot \left(1 - \frac{49}{366}\right) \leq \prod_{j=0}^{49} e^{-j/366} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{366}\sum_{j=0}^{49} j\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{366}\frac{49 \times 50}{2}\right\} = 0.034869\,. \end{aligned}$$

En el cálculo hemos usado la fórmula (véase el ejercicio 1.2.2) para sumar los primeros 49 primeros números naturales. El lector que, por el contrario, se haya animado a teclear pacientemente, descubrirá que el resultado exacto es 0.02992. Pues oiga, no era mala aproximación.

La conclusión es que la probabilidad de coincidencia está en torno al 97 %. Esto es, con una altísima certeza el experimento que describimos en la nota al pie de la página anterior "funcionará", y descubriremos a dos personas con la misma fecha de cumpleaños.



Generalicemos la cuestión a una reunión de n personas: ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos dos cuya fecha de cumpleaños coincida? Hay 366 posibles fechas, así que el principio del palomar nos dice que esta probabilidad será 1 si $n \geq 367$ (habrá con seguridad al menos una coincidencia, recuérdese el ejemplo 1.2.7). Cualitativamente, la gráfica de la probabilidad en función de n empezaría en el valor 0 (cuando $n = 1$) para estabilizarse en el valor 1 a partir de $n = 367$. Pero, ¿y entre medias? Se trata de una función creciente, claro, puesto que cuantas más personas haya en la reunión, mayor será la probabilidad de coincidencia. Pero hay muchas maneras de "crecer" desde 0 a 1. Quizás nuestra intuición no sospechaba que la gráfica tuviera el aspecto que se muestra en la figura: la probabilidad se acerca muy rápidamente a uno. Para una muestra[20] de 23 personas es un poco mayor del 50 %, mientras que para 60 personas ya es prácticamente 1. ♣

[20]Haga usted mismo el *experimento*. Tome un grupo cualquiera de, digamos, 50 personas y construya una cuadrícula con los 365 días del año, sobre la que cada persona va marcando la casilla correspondiente a su fecha de cumpleaños. Haga esto hasta que haya una casilla con dos marcas. Verá como (casi siempre) hay al menos una coincidencia.

EJEMPLO 2.2.5 *Sean los conjuntos* $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$ *e* $\mathcal{Y} = \{1, \ldots, k\}$. *Queremos contar cuántas aplicaciones podemos establecer entre* $\mathcal{X}$ *e* $\mathcal{Y}$.

Una aplicación $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ se construye decidiendo cuál es la imagen de cada elemento de $\mathcal{X}$. Esto es, una tal aplicación es lo mismo que una lista de n posiciones en la que, en cada posición, situamos un símbolo de $\{1, \ldots, k\}$: en la posición primera está la imagen del 1, en la segunda la del 2, etc. Como no hay restricción alguna sobre qué símbolos situamos (qué imágenes elegimos), estamos en el caso de listas con repetición permitida, así que

$$\boxed{\#\{\text{aplicaciones } f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}\} = k^n}$$

(obsérvese que hemos cambiado los papeles de n y k, ahora hay n posiciones y k símbolos). Si sólo queremos contar las aplicaciones *inyectivas*, esto es, aquéllas en las que no hay elementos de $\mathcal{X}$ con la misma imagen, entonces formamos listas con las mismas características que antes, pero en las que no permitimos repetición. La respuesta es que, si $k \geq n$,

$$\boxed{\#\{\text{aplicaciones inyectivas } f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}\} = \frac{k!}{(k-n)!}}$$

mientras que, si $k < n$, el número de aplicaciones inyectivas es 0.

Por último, si lo que queremos son aplicaciones *biyectivas*, será necesario que $n = k$, y en ese caso habrá tantas aplicaciones biyectivas como permutaciones de $\{1, \ldots, n\}$, a saber,

$$\boxed{\#\{\text{aplicaciones biyectivas } f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}\} = n!}$$

Contaremos el número de aplicaciones *sobreyectivas* en el ejemplo 3.1.4. ♣

EJEMPLO 2.2.6 *Queremos contar el número de* k*-listas* ($k \geq 2$) *con repetición permitida con símbolos de* $\{1, \ldots, n\}$ *en las que cada elemento es distinto del anterior.*

Se trata de contar listas sin símbolos iguales en posiciones consecutivas. Aplicamos directamente la regla del producto: tenemos n posibilidades para la primera posición. Hay $n-1$ para la segunda (pues está prohibido el símbolo usado en la primera). Y también $n-1$ para la tercera (el usado en la segunda posición está prohibido). Y así sucesivamente, de manera que la respuesta final es

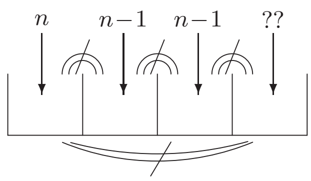
$$n(n-1)^{k-1}.$$

♣

EJEMPLO 2.2.7 *Añadimos ahora a las restricciones del ejemplo anterior una más: la primera y última posiciones deben llevar también símbolos distintos.*

Los casos $k = 1$ y $k = 2$ son triviales[21]. Si consideramos listas de 3 posiciones, aún podemos aplicar la regla del producto: hay n posibilidades para la primera posición, $n-1$ para la segunda y $n-2$ para la tercera.

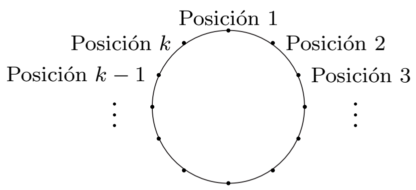
[21] "Trivial" es uno de los adjetivos que usan los matemáticos para describir un argumento (supuestamente) sencillo; tanto, que generalmente no se exhibe. A veces, sobre todo en artículos de investigación, el esforzado lector descubre que un "argumento trivial" requiere, al final, un par de hojas de duros cálculos, que debe ser capaz de suministrar por sí mismo. Recordemos que la palabra trivial hace referencia al *Trivium* que, junto al *Quadrivium*, reunían las siete artes liberales en el sistema medieval de enseñanza. Los "tres caminos" del primero eran la Gramática, la Retórica y la Dialéctica, mientras que los cuatro del segundo eran la Aritmética,



El lector, sin duda animado por la rápida y sencilla resolución de los ejemplos de esta subsección, se estará ya esforzando en el análisis del caso $k = 4$, quizás con ayuda de una representación gráfica como la que mostramos a la derecha. Todo marcha bien al principio: para la primera posición tenemos n posibilidades y para la segunda y tercera, $n-1$ (pues está prohibido el símbolo de la posición anterior). Pero, ¡ay!, para la cuarta posición nos encontramos con que *el número de símbolos prohibidos depende de la lista construida hasta el momento.* Si, por ejemplo, hemos elegido el mismo símbolo en las posiciones 1 y 3, sólo habrá uno prohibido. Pero si hemos situado símbolos distintos, entonces no podremos utilizar ninguno de ellos para la cuarta posición.

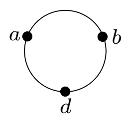
¡No desesperemos! Sólo necesitamos alguna herramienta más para resolver la cuestión. Volvemos con el asunto al comienzo de la sección 2.3 ♣

2.2.2. Listas circulares

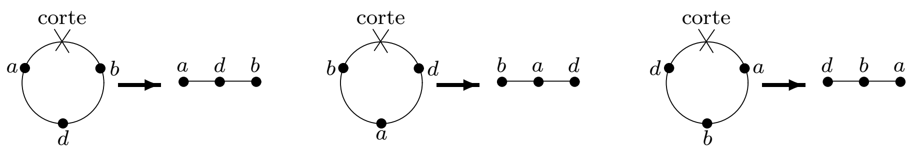


Consideremos ahora otro tipo de objetos: las **listas circulares** de longitud k. Marcamos k puntos (espaciados regularmente) sobre una circunferencia, en cada uno de los cuales situamos un símbolo de un conjunto con n elementos. ¡Atención!, consideraremos que dos listas circulares son iguales si una se obtiene de la otra por alguna *rotación* (sobre el plano del papel). Vamos a tratar de contarlas a partir del número de listas lineales (es decir, las usuales), para después aplicar los resultados de la subsección 2.2.1. Empecemos considerando **listas circulares sin repetición** y un primer ejemplo sencillo:

EJEMPLO 2.2.8 *Listas circulares con* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *y* $k = 3$.



Tomemos, por ejemplo, la lista circular de la derecha. Procedamos como sigue para transformar listas circulares en lineales: imaginamos que se trata de un collar con cuentas, que cortamos por la parte superior, para luego desplegar el resultado. Aplicado a la lista dibujada, da lugar a la lista lineal (a, d, b), como se aprecia en el dibujo de la izquierda bajo estas líneas. Pero las dos posibles listas circulares que se obtienen de ésta por rotación (y que hemos declarado como "iguales") dan lugar a listas lineales distintas, (b, a, d) y (d, b, a), respectivamente, como también se aprecia en el esquema.



Convénzase el lector de que esto es algo general: cada lista circular da lugar a tres listas

la Música, la Geometría y la Astronomía. Se suponía que las tres primeras eran las disciplinas elementales, y de ese uso proviene el significado actual de la palabra trivial. Lo de "artes liberales" alude a que servían para entrenar al hombre "libre" en la Ciencia propiamente dicha, en contraste con las artes serviles, que tenían fines económicos (aparentemente, los hombres libres no tenían necesidad de ganarse la vida). Ya en esta vena etimológica, el lector podría reflexionar sobre otro de los adjetivos favoritos de los matemáticos: obvio.

lineales distintas. De manera que podemos establecer una aplicación 3 a 1 entre el conjunto de 3-listas con los símbolos $\{a, b, c, d, e\}$ y el de 3-listas circulares con los mismos símbolos. Como la aplicación es sobreyectiva (toda lista circular que podamos imaginar se relaciona con las correspondientes listas lineales), podemos concluir que $3 \cdot \#\{\text{3-listas circulares}\} = \#\{\text{3-listas lineales}\} = 5 \times 4 \times 3 = 60$. ♣

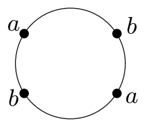
Consideremos, con más generalidad, un conjunto de n símbolos, digamos $\{1, \ldots, n\}$ y los respectivos conjuntos de k-listas lineales (sin repetición) y k-listas circulares (sin repetición) con esos símbolos. Construyendo la respectiva aplicación (sobreyectiva y k a 1) del primer conjunto al segundo, deducimos que

$$\#\left\{\begin{array}{c} k\text{-listas circulares sin repetición} \\ \text{con símbolos de } \{1,\ldots,n\} \end{array}\right\} = \frac{1}{k}\,\#\left\{\begin{array}{c} k\text{-listas lineales sin repetición} \\ \text{con símbolos de } \{1,\ldots,n\} \end{array}\right\} = \frac{1}{k}\frac{n!}{(n-k)!}.$$

El análisis de *este* tipo de listas circulares no ha sido difícil. Ahora intentemos contar las **listas circulares con repetición permitida**. ¿Podremos efectuar un análisis análogo? Veamos en un ejemplo sencillo las nuevas dificultades que aparecen.

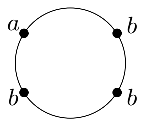
EJEMPLO 2.2.9 *Las 4-listas circulares con repetición permitida con los símbolos* $\{a, b\}$

Empecemos con una de estas listas circulares:

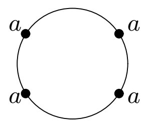


$$\longrightarrow \quad \text{da lugar a las listas lineales} \quad \longrightarrow \left\{\begin{array}{c} (a,b,a,b) \\ (b,a,b,a) \end{array}\right\}$$

Obtenemos solamente dos listas lineales (las otras dos posibles rotaciones no dan lugar a listas nuevas). Observemos, sin embargo, lo que ocurre para las dos siguientes listas circulares:



$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{c} (a,b,b,b) \\ (b,a,b,b) \\ (b,b,a,b) \\ (b,b,b,a) \end{array}\right\}$$



$$\longrightarrow \left\{\ (a,a,a,a)\ \right\}$$

Si completamos la enumeración de los distintos casos, descubriremos que hay *seis* listas circulares distintas. Dos de ellas (las formadas por un único símbolo) tienen una única lista lineal asociada a cada una. La primera lista circular dibujada tiene asociadas dos listas lineales, mientras que las otras tres tienen 4 listas lineales asociadas (para dar el total de las 16 listas lineales posibles). ♣

Como este ejemplo sugiere, no es sencillo contar el número de listas circulares en función del número de listas lineales, porque el número de listas lineales a que da lugar una circular depende, no sólo de la longitud de la lista, sino también de la disposición de los símbolos en sus posiciones. Hay toda una estructura tras el análisis de estas listas circulares, que iremos descubriendo, ya con el lenguaje de las congruencias, en la sección 4.3. Quizás el lector quiera ya visitar la subsección 4.3.4, para al menos echar un vistazo a la (insospechada) fórmula –e incluso al argumento que lleva a ella– que da respuesta a la cuestión, en la que aparece una de las más famosas funciones de la Aritmética, la conspicua función de Euler. Más adelante, en los capítulos 17 y 18, retomaremos la cuestión desde otro punto de vista más general (con el lenguaje de la teoría de grupos y las funciones generatrices).

2.2.3. Composiciones de un número natural

Como último ejemplo de uso de la regla del producto, presentamos ahora un nuevo habitante de la fauna combinatoria: dado un número natural $n \geq 1$, dar una **composición** de n consiste en escribir n como suma de otros números naturales mayores o iguales que 1, de manera que el orden de presentación de estos sumandos será relevante. Llamaremos longitud de la composición al número de sumandos. Nos interesa saber cuántas composiciones distintas tienen n. Los primeros casos son sencillos:

$$\begin{array}{cccc}
n=1 & n=2 & n=3 & n=4 \\
\text{(1 comp.)} & \text{(2 comps)} & \text{(4 comps)} & \text{(8 comps)} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\left\{ 1 \right\} & \left\{ \begin{array}{c} 1+1 \\ 2 \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} 1+1+1 \\ 1+2 \\ 2+1 \\ 3 \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{c} 1+1+1+1 \\ 2+1+1 \\ 1+2+1 \\ 1+1+2 \\ 2+2 \\ 3+1 \\ 1+3 \\ 4 \end{array} \right\}
\end{array}$$

Observe el lector que, por ejemplo, $4 = 2+1+1$, $4 = 1+2+1$ y $4 = 1+1+2$ son composiciones diferentes, porque, como comentábamos, el orden de presentación los sumandos es relevante. Estos primeros casos nos sugieren una regla general: ¿se cumplirá realmente que hay 2^{n-1} composiciones distintas del número natural n?

Argumentamos, como es habitual, estableciendo biyecciones. Empezamos escribiendo n unos. Para indicar cómo se agrupan los unos para formar una composición, colocaremos entre ellos (hay $n-1$ posibles posiciones) cuadrados $\square$ y estrellas $\star$. Un símbolo $\square$ va a significar "siga adelante", mientras que el símbolo $\star$ nos obligará a sumar todo lo que llevemos acumulado desde la $\star$ anterior. Así, por ejemplo, si $n = 7$

$$\overbrace{1 \quad 1 \quad 1 \ldots 1 \quad 1}^{n}$$

$$\begin{array}{ccc}
1 \square 1 \square 1 \square 1 \star 1 \square 1 \star 1 & \longleftrightarrow & 4+2+1 \\
1 \square 1 \star 1 \square 1 \square 1 \star 1 \square 1 & \longleftrightarrow & 2+3+2 \\
1 \star 1 \star 1 \star 1 \square 1 \star 1 \star 1 & \longleftrightarrow & 1+1+1+2+1+1
\end{array}$$

Si comprobamos que esta correspondencia es una biyección, tendremos que:

$$\boxed{\#\{\text{composiciones del número } n\}} = \# \left\{ \begin{array}{c} (n-1)\text{-listas formadas} \\ \text{con los símbolos } \{\square, \star\} \end{array} \right\} = \boxed{2^{n-1}}.$$

La comprobación es sencilla. En un sentido, dada una composición del número n, del tipo $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$, donde $1 \leq n_i \leq n$, la representamos de la siguiente forma:

$$\overbrace{1\square 1\square 1 \star 1 \ldots 1\square 1 \ldots 1\square 1}^{n \text{ unos}}$$
$$\uparrow$$
$$\text{colocamos una } \star \text{ tras los } n_1 \text{ primeros unos y así sucesivamente}$$

Si ahora "olvidamos" de la lista de unos, obtenemos una lista de cuadrados y estrellas de longitud $n-1$: $(\square, \square, \star, \ldots)$

En el otro, dada una lista de longitud $n-1$ de cuadrados y estrellas,

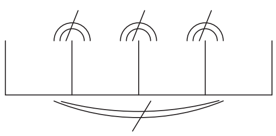
$$
\begin{array}{c}
(\square,\square,\square,\star,\square,\star,\cdots,\star,\star,\star,\square)\\
\text{colocamos unos}\ \Big\downarrow\ \text{entre los símbolos } \square \text{ y } \star\\
(1\square 1\square 1\square 1\star 1\square 1\star\cdots\star 1\star 1\star 1\square 1)\\
\text{agrupamos los unos}\ \Big\downarrow\ \text{según la posición de las estrellas}\\
4+2+\cdots+1+1+2
\end{array}
$$

y obtenemos así *una sola* composición del número n.

Observe el lector que el argumento anterior no sería válido si el orden de presentación de los sumandos no fuera relevante. A la derecha mostramos un ejemplo ilustrativo. Cuando el orden de los sumandos es irrelevante, se suele hablar de las *particiones* de n. Es ésta una cuestión mucho más complicada, de la que nos ocuparemos ampliamente en la sección 3.3.3. En la subsección 3.1.3 volveremos a tratar las composiciones de n, pero allí nos interesará contar cuántas de ellas tienen una cierta longitud, digamos k.

$$
\begin{array}{ccc}
2+1 & \text{sería igual a} & 1+2\\
\downarrow & & \downarrow\\
1\square 1\star 1 & & 1\star 1\square 1\\
\downarrow & & \downarrow\\
(\square,\star) & \longleftarrow \text{¡distintas!} \longrightarrow & (\star,\square)
\end{array}
$$

2.3. La regla de la suma y el principio de inclusión/exclusión



Retomamos ahora, del ejemplo 2.2.7, la cuestión de contar el número de 4-listas con repetición formadas con los símbolos $\{1,\dots,n\}$ con símbolos consecutivos distintos y tales que en la primera y cuarta posiciones también tuviéramos símbolos distintos. A la izquierda representamos gráficamente el tipo de listas que nos interesan. Nuestros intentos de aplicación de la regla del producto encallaban al llegar al último símbolo, para el que nos encontrábamos con dos posibilidades, en función de si en la primera y tercera posiciones habíamos escogido el mismo símbolo o no. Es razonable, pues, analizar los dos casos por separado:

- Si en la primera y tercera posiciones situamos el mismo símbolo, entonces tenemos n posibilidades para la posición 1 (y la tercera queda fijada). Para la segunda tenemos $n-1$ (el símbolo anterior está prohibido), mientras que para la cuarta hay un símbolo prohibido (el utilizado en 1 y 3). En total, $n(n-1)^2$.
- Si, por el contrario, utilizamos símbolos distintos en las posiciones 1 y 3, entonces tenemos n para la primera, $n-1$ para la segunda, $n-2$ para la tercera (el de la segunda no se puede usar, y por construcción, el de la primera tampoco) y $n-2$ para la cuarta (prohibidos los símbolos, distintos, de las posiciones 1 y 3). En total, $n(n-1)(n-2)^2$.

El lector, por supuesto, estará tentado de sumar los dos resultados parciales, ¿qué otra cosa hacer?, si son casos excluyentes y estamos considerando todas las posibilidades, para obtener finalmente que el número de listas con las características exigidas es

$$n(n-1)^2+n(n-1)(n-2)^2=n(n-1)(n^2-3n+3)\,.$$

La formalización de esta intuición es lo que se conoce como *regla de la suma*. Hemos partido el conjunto total de listas en dos (sub)conjuntos: las del caso primero y las del segundo. Estos dos conjuntos de listas son *disjuntos* (claro, ¿no?) y, además, entre las listas de uno y otro tenemos todas las posibles. Pues habrá que sumar los resultados parciales. Enunciamos ya la regla, pero para un caso general.

A. La regla de la suma

Sean un conjunto A y una colección de subconjuntos suyos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ que cumple que

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i = A \quad \text{y, además, que} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ , si } i \neq j \,.$$

Es decir, cada elemento de A está en uno y sólo uno de los A_k. A esta situación nos referiremos en lo sucesivo con que los subconjuntos $A_1, \ldots, A_k$ son una **partición** del conjunto A. En estas condiciones,

$$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{k} |A_i|}$$

	A_1	A_2	$\cdots$	A_k
a_1	1	0	$\cdots$	0
a_2	1	0	$\cdots$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_m	0	1	$\cdots$	1

Aunque esta identidad es casi obvia, podemos comprobar su validez de una manera más formal con un argumento de doble recuento. Construyamos una matriz con los subconjuntos $A_1, \ldots, A_k$ para etiquetar las columnas y los elementos de A para etiquetar las filas. Sumando los unos de una columna obtenemos el tamaño del subconjunto A_j que etiquete esa columna. Y sumando en cada fila, obtenemos el número de subconjuntos A_j a los que pertenece el elemento a_i que etiqueta la fila. En total,

$$\sum_{j=1}^{k} |A_j| = \sum_{a\in A} \#\{ \text{ subconjuntos } A_1 \ldots, A_k \text{ a los que pertenece } a\}$$

En el caso que nos incumbe, en el que tenemos una partición, cada elemento de A estará en uno y sólo uno de los A_j; así que lo de la derecha vale exactamente, y como queríamos,

$$\sum_{a\in A} 1 = |A| \,.$$

EJEMPLO 2.3.1 *Contemos el número de 3-listas (con repetición permitida) formadas con los símbolos* $\{0, 1, \ldots, 9\}$ *en las que en la primera y segunda posiciones de la lista ha de aparecer un cero o en la segunda y tercera, un nueve.*

Algunos ejemplos de estas listas son $(0, 0, 3)$, $(1, 9, 9)$, $(0, 0, 0)\ldots$ Llamemos A al conjunto de listas con estas características. Para contarlas, construyamos los subconjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{3-listas con } \{0, \ldots, 9\} \text{ con ceros en las dos primeras posiciones}\} \,, \\ A_2 &= \{\text{3-listas con } \{0, \ldots, 9\} \text{ con nueves en las dos últimas posiciones}\} \,, \end{aligned}$$

que, como es fácil comprobar, forman una partición de A. Así que

$$|A| = |A_1| + |A_2| = \#\left\{ \begin{array}{c} \text{listas de la forma } (0,0,n) \\ \text{con } 0 \leq n \leq 9 \end{array} \right\} + \#\left\{ \begin{array}{c} \text{listas de la forma } (n,9,9) \\ \text{con } 0 \leq n \leq 9 \end{array} \right\}.$$

Y es sencillo evaluar el tamaño de estos dos últimos conjuntos, porque en ambos casos basta con decidir un símbolo. Tendremos entonces $10 + 10 = 20$ listas en total. ♣

Ejemplo 2.3.2 *Disponemos de n símbolos, con n muy grande. Queremos contar el número de listas sin repetición que podemos formar con esos símbolos.*

Aquí, la longitud no está fijada *a priori*. Para contarlas, utilizamos la siguiente partición:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{listas sin repetición} \\ \text{formadas con } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\} = \bigcup_{j=1}^{n} \left\{ \begin{array}{c} j\text{-listas sin repetición} \\ \text{formadas con } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\},$$

pues conocemos los tamaños de cada uno de los conjuntos de esa unión. Que se trata de una partición es claro: cualquier lista tendrá una determinada longitud (entre 1 y n), y no se pueden tener dos longitudes distintas simultáneamente. Así que, por la regla de suma,

$$\#\left\{ \begin{array}{c} \text{listas sin repetición} \\ \text{con } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{n} \#\left\{ \begin{array}{c} j\text{-listas sin repetición} \\ \text{con } \{1,\dots,n\} \end{array} \right\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n!}{(n-j)!} = n! \sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{t!};$$

(en el último paso cambiamos de j a $t = n - j$ como índice de sumación). Como n es grande, resulta que

$$\sum_{t=0}^{n-1} \frac{1}{t!} \approx e$$

(véanse los comentarios sobre la función exponencial en la subsección 2.4.2), de manera que podemos afirmar que, a todos los efectos numéricos, el número de listas sin repetición con n símbolos es $e \cdot n!$, es decir, casi tres veces $n!$.

Pero obsérvese que de longitud n hay exactamente $n!$ (más de una tercera parte de las totales). Y de longitud $n-1$ hay otras $n!$ (lo que añade otro tercio). Con las dos siguientes longitudes, $n-2$ y $n-3$, acumulamos otras $n!/2$ y $n!/6$ listas. Es decir, la (abrumadora) mayoría de estas listas se concentran en las longitudes grandes. ♣

Ejemplo 2.3.3 *Queremos multiplicar una lista de $n+1$ números, $(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Sólo podemos hacer productos dos a dos, así que tenemos que poner un cierto número de paréntesis (esto es, un "(" y el correspondiente ")"). Los números siempre se escriben en el orden indicado. Por ejemplo, para $n = 3$*

$$\textit{podríamos multiplicar} \quad \big((a_0 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_3)\big), \qquad \textit{o quizás} \qquad \big(\big((a_0 \cdot a_1) \cdot a_2\big) \cdot a_3\big),$$

u otras varias. Pues ésa es la pregunta: ¿de cuántas maneras se puede hacer?

Llamemos C_n al número de maneras de multiplicar esos $n+1$ números; por comodidad, pongamos que $C_0 = 1$. Obsérvese que para especificar el orden en que se multiplican los números deberemos situar $n-1$ paréntesis en la lista (luego consideraremos un paréntesis más, para describir la multiplicación final).

Veamos los primeros casos:

$$\boxed{n=1} \qquad (a_0, a_1) \qquad \longrightarrow \quad a_0 \cdot a_1 \qquad\qquad \text{(1 manera)}$$

$$\boxed{n=2} \qquad (a_0, a_1, a_2) \qquad \longrightarrow \quad \begin{cases} (a_0 \cdot a_1) \cdot a_2 \\ a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2) \end{cases} \qquad \text{(2 maneras)}$$

$$\boxed{n=3} \qquad (a_0, a_1, a_2, a_3) \qquad \longrightarrow \quad \begin{cases} a_0 \cdot ((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \\ a_0 \cdot (a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3)) \\ (a_0 \cdot a_1) \cdot (a_2 \cdot a_3) \\ (a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2)) \cdot a_3 \\ ((a_0 \cdot a_1) \cdot a_2) \cdot a_3 \end{cases} \qquad \text{(5 maneras)}$$

Si el lector se entretiene analizando los siguientes casos, obtendría las respuestas: 14, 42, 132... maneras. El objetivo es calcular el valor de C_n para un n general. Para ello, observemos que la última operación "$\cdot$" estará en cierto lugar de la lista, digamos entre a_k y a_{k+1}:

$$\underbrace{(a_0 \dots a_k)}_{k+1} \cdot \underbrace{(a_{k+1} \dots a_n)}_{n-k}$$

Esto quiere decir que los elementos a la izquierda ya se han multiplicado entre sí; es decir, que se han situado los paréntesis de cierta manera (y hay tantas como nos diga C_k). Por su parte, los de la derecha también se han multiplicado entre sí, y habrá C_{n-k-1} formas de hacerlo. Aplicando la regla del producto, para un k fijo, tendremos $C_k\, C_{n-k-1}$ posibilidades. Pero k puede valer entre 0 y $n-1$, y el índice describe una partición de los casos totales, así que, con la regla de la suma, concluimos que, si $n \geq 1$,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k\, C_{n-k-1} = C_0\, C_{n-1} + C_1\, C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}\, C_0\,.$$

Observe el lector que es conveniente definir $C_0 = 1$, para que todo cuadre. Una regla de recurrencia algo aparatosa, pero que nos da el valor de C_n si conocemos todos los de índice menor. Estos números C_n son los llamados **números de Catalan**[22]. Sus primeros valores son

$$(1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, \dots)$$

En el ejemplo 3.1.6 obtendremos, mediante argumentos combinatorios, una fórmula explícita para ellos. Fórmula que redescubriremos, con la ayuda del lenguaje de las funciones generatrices, en los ejemplos 12.3.3 y 12.4.5.

La sucesión de números de Catalan aparece como respuesta a multitud de cuestiones combinatorias, como las dos que siguen.

Pongamos, como sugeríamos antes, un paréntesis extra para describir la multiplicación final: así tenemos que el problema consiste en situar n paréntesis a lo largo de la secuencia; y hay también n multiplicaciones "$\cdot$", Si ahora sustituimos cada símbolo "$\cdot$" por un $+1$ y

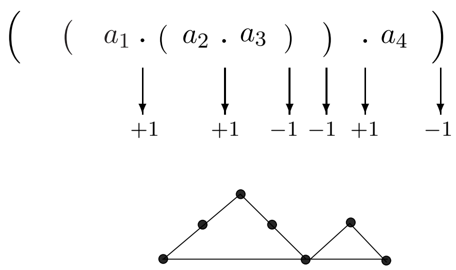
[22] En honor de Eugène Catalan (1814-1894), matemático belga que publicó trabajos sobre ellos.

cada cierre de paréntesis ")" por un -1, obtenemos una lista de $2n$ números $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, donde los x_j son ± 1. Por ejemplo,

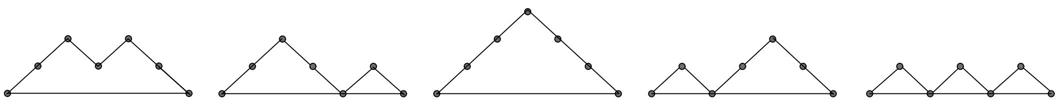
$$((2 \cdot 5) \cdot 3) \cdot 6) \longrightarrow (+1, -1, +1, -1, +1, -1)\,; \qquad ((2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 6)) \longrightarrow (+1, -1, +1, +1, -1, -1)\,.$$

Obsérvese que, en cada lista $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$, los x_j suman, entre todos ellos, 0 (pues hay tantos $+1$ como -1); y que, además, las sucesivas *sumas parciales* x_1, $x_1 + x_2$, $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, etc., son todas no negativas (nunca hay más cierres de paréntesis que multiplicaciones).

Con esta traducción, tenemos una interpretación gráfica simpática: hagamos que cada $+1$ represente una subida y cada -1, una bajada. Y así tenemos que cada lista se corresponde con un "perfil montañoso" o "sierra" que empieza y acaba a la misma altura (y nunca baja de esa altura inicial). Por ejemplo, una de las formas de situar tres paréntesis que exhibíamos antes se corresponden con las listas y montañas que dibujamos a la derecha.



Para $n = 3$, los cinco perfiles montañosos que se obtienen son:



El ejercicio 2.3.6 contiene otras interpretaciones de estos números de Catalan. ♣

Ejemplo 2.3.4 *Calcular el tamaño del conjunto A de las 4-listas con los símbolos $\{0, \ldots, 9\}$ tales que en la primera y segunda posiciones aparece un 0 o bien en la tercera y cuarta un 9.*

Confiados en nuestros recién adquiridos conocimientos, construimos los subconjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{4-listas con símbolos } \{0, \ldots, 9\} \text{ con 0 en la 1ª y 2ª posiciones}\} \\ A_2 &= \{\text{4-listas con } \{0, \ldots, 9\} \text{ con 9 en la 3ª y 4ª posiciones}\} \end{aligned}$$

Cada uno de estos conjuntos tiene tamaño 10^2 (hay que elegir dos símbolos en cada caso). Y es fácil comprobar que $A = A_1 \cup A_2$. Pero, ¡ay!, resulta que

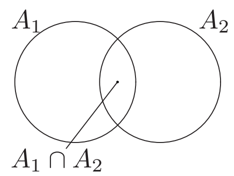
$$A_1 \cap A_2 = \left\{ \begin{array}{c} \text{4-listas con } \{0, \ldots, 9\} \text{ tales que hay ceros} \\ \text{en la 1ª y 2ª posiciones y nueves en la 3ª y 4ª} \end{array} \right\} = \{(0, 0, 9, 9)\} \neq \emptyset.$$

Así que no se trata de una partición. En la suma $|A_1| + |A_2|$ estamos contando dos veces el elemento (0,0,9,9), que está en la intersección de A_1 y A_2. Así que, adelantándonos al resultado que veremos en un momento, ya podemos decir que la respuesta correcta es

$$|A_1 \cup A_2| = 10^2 + 10^2 - 1 = 199\,. \qquad ♣$$

Vamos a establecer un principio más general que la regla de la suma, en el que simplemente llevaremos una contabilidad cuidadosa de las veces que contamos de más o de menos los elementos que están en las intersecciones.

B. Principio de inclusión/exclusión (primera versión)



Si A_1 y A_2 son dos conjuntos, entonces,

$$\boxed{|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|}$$

Un vistazo al diagrama de Venn de la derecha nos permite convencernos de que los elementos de $|A_1 \cap A_2|$ se cuentan dos veces en la suma $|A_1| + |A_2|$.

	A_1	A_2	$A_1 \cap A_2$
x_1	1	1	-1
x_2	0	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	1	0	0

Argumentemos por doble recuento: llamemos $\{x_1, \dots, x_m\}$ a los elementos de $A_1 \cup A_2$. Construimos la matriz donde colocamos un 1 si el elemento x_i está en el conjunto correspondiente (A_1 ó A_2), un -1 si está en $A_1 \cap A_2$ y un cero en el resto de los casos. Al sumar por columnas obtenemos

$$|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|\,,$$

mientras que cada fila (¡compruébese!) aporta un uno, así que entre todas ellas tendremos un total de $|A_1 \cup A_2|$ unos.

EJEMPLO 2.3.5 *Calculemos el tamaño del conjunto A formado por las 3-listas con los símbolos $\{0, \dots, 9\}$ tales que en las posiciones 1^{a} y 2^{a} aparece el mismo símbolo o bien en las posiciones 2^{a} y 3^{a} aparece el mismo símbolo.*

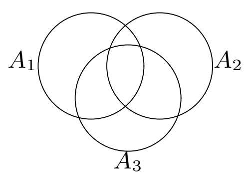
Formamos los subconjuntos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ con igual símbolo en } 1^{\mathrm{a}} \text{ y } 2^{\mathrm{a}}\}, \\ A_2 &= \{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ con igual símbolo en } 2^{\mathrm{a}} \text{ y } 3^{\mathrm{a}}\}, \\ A_1 \cap A_2 &= \{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ con igual símbolo en } 1^{\mathrm{a}}, 2^{\mathrm{a}} \text{ y } 3^{\mathrm{a}}\}, \end{aligned}$$

y calculamos:

$$\begin{aligned} |A_1| &= \#\{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ de la forma } (n,n,m)\} = 10^2\,, \\ |A_2| &= \#\{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ de la forma } (n,m,m)\} = 10^2\,, \\ |A_1 \cap A_2| &= \#\{\text{3-listas con } \{0,\dots,9\} \text{ de la forma } (m,m,m)\} = 10\,. \end{aligned}$$

Por tanto, $|A| = |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 100 + 100 - 10 = 190$. Aunque también podríamos haber resuelto el problema, de manera más directa, calculando el tamaño del complementario de A dentro del conjunto X de todas las 3-listas, $A^c = \{\text{3-listas tales que } 1^{\mathrm{a}} \neq 2^{\mathrm{a}} \text{ y } 2^{\mathrm{a}} \neq 3^{\mathrm{a}}\}$ La regla del producto nos dice que $|A^c| = 10 \times 9 \times 9$, así que $|A| = |X| - |A^c| = 10 \times 10 \times 10 - 10 \times 9 \times 9 = 190$. ♣



Por supuesto, muchas veces tendremos que evaluar el tamaño de la unión de tres conjuntos, o quizás de cuatro, cinco, etc. Para el caso de tres conjuntos, con la ayuda del diagrama de Venn correspondiente, que mostramos a la derecha, o con el correspondiente argumento de doble recuento, es fácil convencerse de que la respuesta es

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\,.$$

Escribamos la expresión general.

B. Principio de inclusión/exclusión (versión general)

Consideremos una colección $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de subconjuntos de un conjunto X. Entonces,

$$\boxed{|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \alpha_j}$$

donde los α_j son las sumas de los tamaños de todas las posibles intersecciones de j conjuntos:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
\alpha_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| \\
\alpha_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&\vdots \\
\alpha_n &= |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned}$$

En los usos habituales del principio de inclusión/exclusión, estaremos interesados en calcular el número de elementos de un conjunto $\mathcal{X}$ que respetan ciertas prohibiciones. Si llamamos P_j a una cierta propiedad que los elementos de $\mathcal{X}$ pueden cumplir o no, querremos contar cuántos elementos $\mathcal{X}$ no cumplen ninguna de estas propiedades (consideraremos las P_j como propiedades no deseadas, como prohibiciones). Consideraremos entonces los subconjuntos

$$A_j = \{\text{elementos de } \mathcal{X} \text{ que satisfacen la propiedad } P_j\}$$

y buscaremos

$$\Big|\mathcal{X} - \bigcup_j A_j\Big| = |\mathcal{X}| - \sum_j |A_j| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \cdots$$

Quizás sorprenda al lector descubrir que las primeras formalizaciones de este principio de inclusión/exclusión se produjeran en los años 30 del siglo XX. También debería reflexionar sobre la "utilidad" del principio[23]. Al fin y al cabo, la fórmula de arriba nos permite calcular el tamaño de la unión de n conjuntos si somos capaces de determinar los tamaños de una multitud de intersecciones (en torno a 2^n, como descubriremos en la subsección 3.1.4). Si ése es el caso, entonces sí, la regla nos dice cómo combinar todos esos cálculos. Claro, uno espera que muchas de las intersecciones sean vacías, pero aún así, compárese con el uso de la regla de la suma, que sólo requería calcular n términos.

Así que si conseguimos una "buena" partición del conjunto (en partes disjuntas), el cálculo es sencillo. Pero muchas veces la "partición" natural que se nos ocurre no es tal, sino que hay intersecciones entre las partes, y el uso del principio de inclusión/exclusión es inevitable. Afortunadamente, en ocasiones resulta que todos los conjuntos A_j involucrados tendrán el mismo tamaño, y lo mismo para las intersecciones dos a dos, tres a tres, etc., lo que nos permitirá obtener fórmulas manejables. El lector especialmente impaciente de ver este principio en acción en diversos ejemplos puede consultar la subsección 3.1.4, en la que también encontrará una prueba formal del resultado y también un interesante método de cálculo aproximado (las llamadas desigualdades de Bonferroni).

[23] Por no hablar de su extraño nombre.

EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.3

2.3.1 *(a) ¿Cuántos números distintos de* tres *dígitos diferentes se pueden formar con las cifras* $\{1, 2, \ldots, 9\}$*?*

(b) ¿Cuántos de éstos son números pares?

2.3.2 *(a) Queremos ordenar las 27 letras del alfabeto de forma que a y b no aparezcan consecutivamente. ¿De cuántas maneras distintas se podrá hacer?*

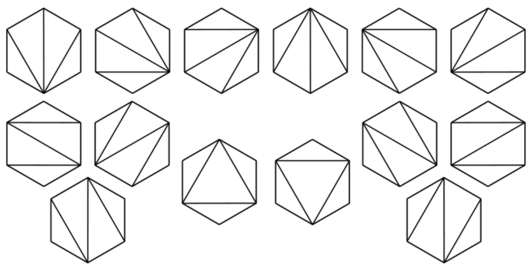
(b) ¿Y si además a y c no pueden aparecer consecutivamente?

2.3.3 *¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 8 y un 9 en su expresión decimal?*

2.3.4 *Tenemos eslabones de n colores. ¿Cuántos collares distintos –de longitud en principio arbitraria– se pueden fabricar de forma que los eslabones sean de colores distintos?*

2.3.5 *¿Cuántos números naturales tienen en su expresión en base* 10 *todos sus dígitos distintos?*

2.3.6 *Compruébese que C_n, el n-ésimo número de Catalan, es el número de de formas de triangular (con n triángulos) un polígono con $n + 2$ lados. Aparentemente, éste fue el problema que trató originalmente Eugène Catalan. Las 14 triangulaciones del caso $n = 4$ (hexágonos) aparecen en la figura:*



2.3.7 *Tenemos un conjunto $\mathcal{X}$ y unos subconjuntos suyos $A_1, \ldots, A_k$. Pruébese que*

$$(a)\quad |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \ \leq \ \min_{j=1,\ldots,k} |A_j|; \qquad (b)\quad |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \ \geq \ \sum_{j=1}^{k} |A_j| - (k-1)|\mathcal{X}|\,.$$

2.3.8 *En una batalla*[24] *entre 100 combatientes, 80 perdieron un brazo, 85 una pierna, 70 un ojo y 75 una oreja. Un número indeterminado x perdió las cuatro cosas. Demuéstrese que* $10 \leq x \leq 70$.

[24]Éste es un simpático ejercicio pergeñado por Lewis Carroll para estimular la ingenua, sana y dulce imaginación de sus lectores infantiles.