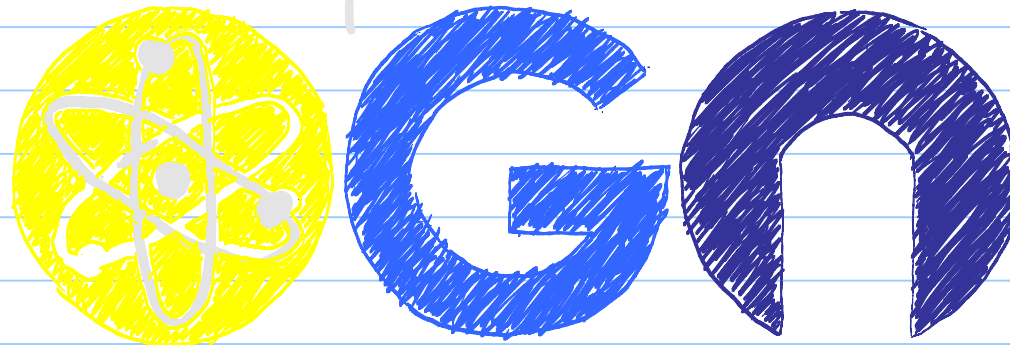


Pembahasan Soal

*Tingkat
 Nasional*



OLIMPIADE GURU NASIONAL
PENDIDIKAN MENENGAH

2019

Matematika SMP

Oleh:

Pak Anang (<http://pak-anang.blogspot.com>)



Pembahasan Soal



OLIMPIADE GURU NASIONAL
PENDIDIKAN MENENGAH

2019

Matematika SMP

Oleh:

Pak Anang (<http://pak-anang.blogspot.com>)

1. Diketahui a dan b bilangan bulat tak negatif. Tentukan semua solusi yang mungkin dari $a^2 + b = a(2019 - b)$.

$$a^2 + b = a(2019 - b)$$

$$a^2 + b = 2019a - ab$$

$$ab + b = 2019a - a^2$$

$$b(a+1) = a(2019 - a)$$

$$b(a+1) = (a+1-1)(2020 - (a+1))$$

$$b(a+1) = -(a+1)^2 + 2021(a+1) - 2020$$

$$2020 = -(a+1)^2 + (2021 - b)(a+1)$$

$$2020 = (a+1)(-(a+1) + 2021 - b)$$

$$\text{Dari persamaan } 2020 = (a+1)(-(a+1) + 2021 - b)$$

$$\text{Maka } (a+1) \mid 2020$$

$$\text{Karena faktor } 2020 = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020\}$$

$$\text{sehingga } (a+1) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020\}$$

$$\text{maka } a = \{0, 1, 3, 4, 9, 19, 100, 201, 403, 504, 1009, 2019\}$$

$$\text{Jadi, } (a, b) = \{(0, 0), (1, 1009), (3, 1512), (4, 1612), (9, 1809), (19, 1900), \\ (100, 1900), (201, 1809), (403, 1612), (504, 1512), (1009, 1009), \\ (2019, 0)\}$$

2. Suatu bilangan n tersusun dari angka-angka k , $k+1$, dan $k+2$ dan habis dibagi $k+3$.
Tentukan semua bilangan n .

$$n = \overline{abc}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq k \leq 9 \\ 0 \leq k+1 \leq 9 \\ 0 \leq k+2 \leq 9 \end{array} \right\} 0 \leq k \leq 7$$

Sehingga,

$$k=0 \Rightarrow 3 \mid \overline{abc}$$

dari n bil tersusun dari 0, 1, 2

$$\text{maka } n = \{012, 021, 102, 120, 201, 210\}$$

$$k=1 \Rightarrow 4 \mid \overline{abc} \Rightarrow 4 \mid \overline{bc}$$

dari n bil tersusun dari 1, 2, 3

$$\text{maka, } n = \{312\}$$

$$k=2 \Rightarrow 5 \mid \overline{abc} \text{ sbg } c=0 \vee c=5$$

dari n bil tersusun dari 2, 3, 4

$$\text{maka, } n = \{ \}$$

$$k=3 \Rightarrow 6 \mid \overline{abc}$$

dari n bil tersusun dari 3, 4, 5

$$\text{maka } n = \{354, 534\}$$

$$k=4 \Rightarrow 7 \mid \overline{abc}$$

dari n bil tersusun dari 4, 5, 6

$$\text{maka } n = \{546\}$$

$$k=5 \Rightarrow 8 \mid \overline{abc}$$

dari n bil tersusun dari 5, 6, 7

$$\text{maka } n = \{576\}$$

$$k=6 \Rightarrow 9 \mid \overline{abc}$$

dari n bil tersusun dari 6, 7, 8

$$\text{maka } n = \{678, 768, 786, 876\}$$

$$k=7 \Rightarrow 10 \mid \overline{abc}$$

dari n bil tersusun dari 7, 8, 9

$$\text{maka } n = \{ \}$$

$$\text{Jadi, } n = \{012, 021, 102, 120, 201, 210, 312, 354, 534, 546, 576, 678, 768, 786, 876\}$$

3. Dsuatu fungsi $f(n)$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(2^k) = 2^{k+1} + 3, \text{ dengan } k \text{ bilangan asli.}$$

$$f(f(n)) = 4n + 9.$$

Tentukan:

a. $f(4), f(8), f(11)$

b. $f(1789)$

a. $f(4) = f(2^2) = 2^{2+1} + 3 = 8 + 3 = 11$
 $f(8) = f(2^3) = 2^{3+1} + 3 = 16 + 3 = 19$
 $f(11) = f(f(4)) = 4(4) + 9 = 16 + 9 = 25$

b. $f(2^k) = 2^{k+1} + 3 \Rightarrow f(2^k) = 2 \cdot 2^k + 3$
 $f(p) = 2p + 3$

Jadi $f(f(n)) = 4n + 9$

$$f(2n+3) = 4n + 9$$

$$f(2n+3) = 2(2n+3) + 3$$

$$f(p) = 2p + 3$$

Ternyata,

$$\begin{cases} f(4) = 2(4) + 3 = 8 + 3 = 11 \\ f(8) = 2(8) + 3 = 16 + 3 = 19 \\ f(11) = 2(11) + 3 = 22 + 3 = 25 \end{cases}$$

konsisten, jadi $f(1789) = 2(1789) + 3 = 3578 + 3 = 3581$

4. Diketahui pertidaksamaan $ax^2 + bx + c > 0$ mempunyai solusi $1 < x < 2$. Tentukan solusi pertidaksamaan $cx^2 + bx + a < 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ f\left(\frac{1}{x}\right) &= a\left(\frac{1}{x}\right)^2 + b\left(\frac{1}{x}\right) + c \\ &= \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + c \\ &= \frac{cx^2 + bx + a}{x^2} \end{aligned}$$

$$x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = cx^2 + bx + a$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \\ f(x) &> 0 \Rightarrow 1 < x < 2 \end{aligned}$$

substitusi

$$y = \frac{1}{x} \text{ s.t. } y$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) > 0 \Rightarrow 1 < \frac{1}{y} < 2$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < y < 1$$

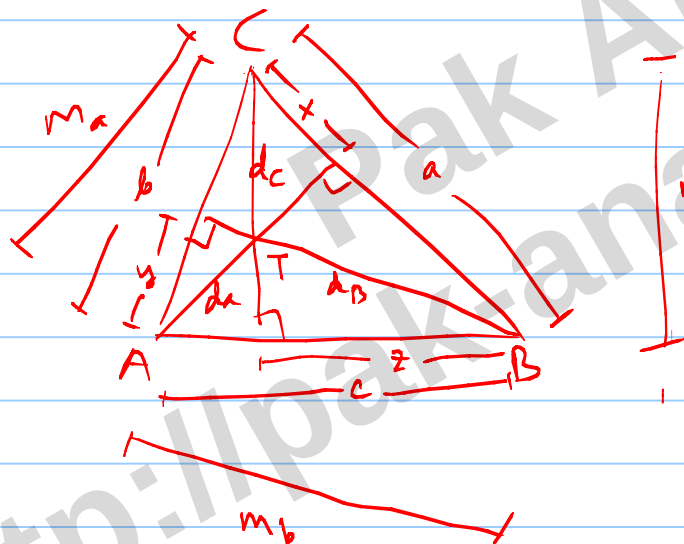
$$y^2 f\left(\frac{1}{y}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < y < 1$$

$$\text{s.t. } x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

$$cx^2 + bx + a > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

$$cx^2 + bx + a < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \vee x > 1 //$$

5. Diketahui segitiga ABC, dengan panjang sisi masing-masing $AB=c$, $AC=b$ dan $BC=a$. Dibuat masing-masing garis tinggi dari titik A, B dan C dengan panjang m_a , m_b , dan m_c . Garis-garis tinggi tersebut saling berpotongan di titik T. Jika $AT=d_a$, $BT=d_b$, dan $CT=d_c$, buktikan bahwa $m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = (a^2 + b^2 + c^2)/2$.



$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \Rightarrow$$

$$ax = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

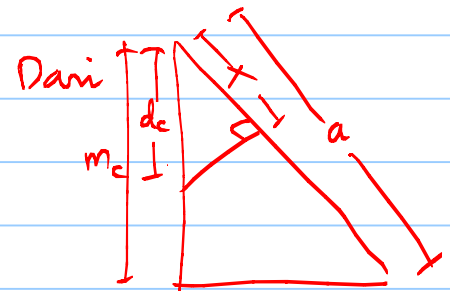
$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \Rightarrow$$

$$by = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$$z = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \Rightarrow$$

$$cz = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} +$$



Dari dengan kesebangunan diperoleh

$$\frac{x}{m_c} = \frac{d_c}{a} \Rightarrow ax = m_c d_c$$

dg cara yg sama diperoleh

$$by = m_a d_a \text{ dan } cz = m_b d_b$$

Jadi terbukti bahwa

$$m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

6. Sekelompok bilangan terdiri atas 10 bilangan asli yang memiliki rata-rata, media, modus, dan jangkauan yang sama yakni 9. Tentukan hasil kali terbesar dari bilangan terkecil dan terbesar dari kelompok bilangan tersebut.

$$Me = 9 \Rightarrow x_5 + x_6 = 18$$

$$\text{jangkauan} = 9 \Rightarrow x_{10} - x_1 = 9$$

$$\text{Sehingga } x_{10} = x_1 + 9$$

$$\text{misal } x_1 = a$$

$$\text{maka } x_{\min} \cdot x_{\max} = x_1 \cdot x_{10} = a \cdot (a+9) = a^2 + 9a$$

Agar $a^2 + 9a$ maks maka dipilih a terbesar dan $a < 9$ dan $x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 = 9$

Jadi, kemungkinan bilangan tersebut adalah:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
a	$(a+b)$	$(a+c)$	$(a+d)$	9	9	9	9	9	$(a+9)$

Sehingga

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{10}$$

$$9 = \frac{5a + (b+c+d) + 6 \cdot 9}{10}$$

$$36 = 5a + (b+c+d)$$

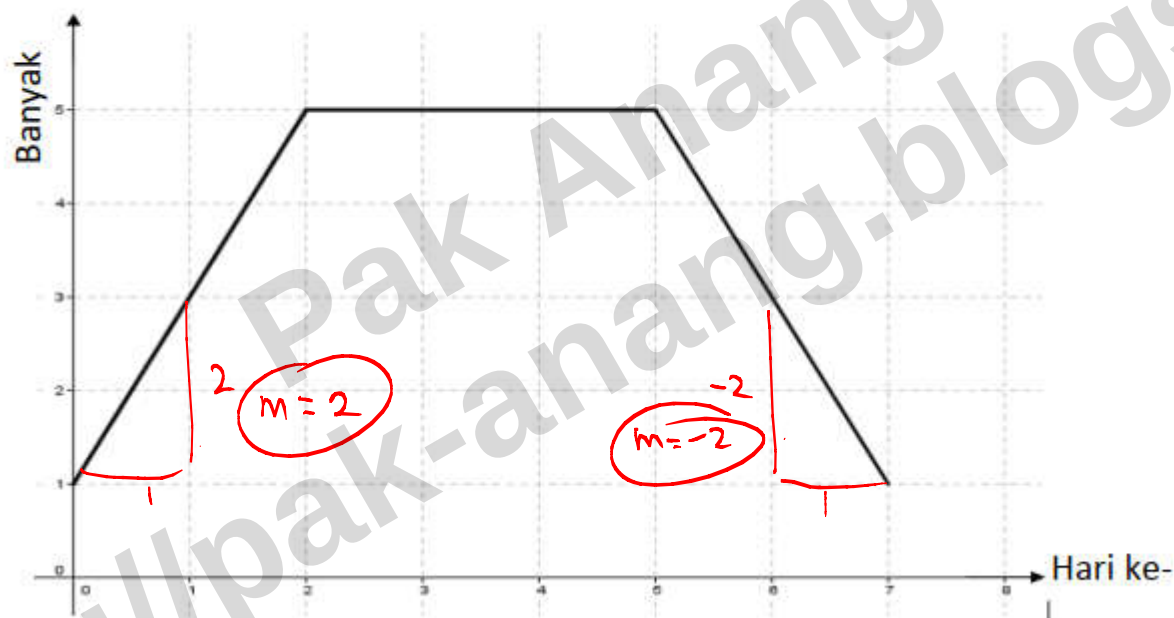
agar a maks maka $b+c+d$ harus minimum

maka dipilih $b+c+d = 1$

$$\text{sehingga } 5a = 35 \Rightarrow a = 7$$

$$\text{Jadi, } x_{\min} \cdot x_{\max} = a^2 + 9a = 49 + 63 = 112 //$$

7. Grafik berikut adalah tentang (pembelian tiket: lupa) dalam minggu pertama.



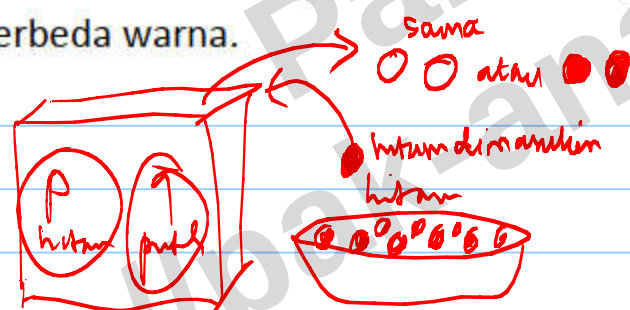
a)
$$f(t) = \begin{cases} 2t+1, & 0 \leq t \leq 2 \\ 5, & 2 \leq t \leq 5 \\ -2t+15, & 5 \leq t \leq 7 \end{cases}$$

b)
$$f(t) = \begin{cases} 2t-13, & 7 \leq t \leq 9 \\ 5, & 9 \leq t \leq 12 \\ -2t+29, & 12 \leq t \leq 14 \end{cases}$$

a. Tentukan fungsi $f(t)$ untuk minggu pertama

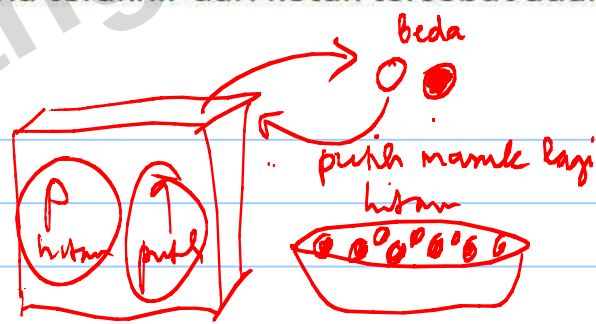
b. Jika minggu kedua juga menunjukkan grafik yang sama, tentukan fungsi $f(t)$ untuk minggu kedua.

8. Dalam sebuah kotak terdapat p bola hitam dan q bola putih. Di samping kotak tersebut disediakan ember yang berisi banyak bola hitam. Dua bola diambil sekaligus dari dalam kotak. Jika kedua bola tersebut sama warna maka sebuah bola hitam diambil dari ember dan dimasukkan ke dalam kotak. Jika kedua bola yang terambil berbeda warna, maka bola putih dikembalikan ke dalam kotak. Pengambilan dilakukan secara terus menerus sehingga bola dalam kotak tersisa dua bola. Tentukan peluang terambilnya bola terakhir dari kotak tersebut adalah berbeda warna.



$$\begin{aligned} \text{OO} &\rightarrow -2\text{O} + \bullet \\ \bullet\bullet &\rightarrow -2\bullet + \bullet = -\bullet \end{aligned}$$

Jika diambil 2 bola putih maka bola hitam bertambah satu. Jadi bola putih tetap persamaannya.



$$\text{O}\bullet \rightarrow -\text{O} - \bullet + \text{O} = -\bullet$$

Pengambilan terakhir, beda, berapa peluangnya?



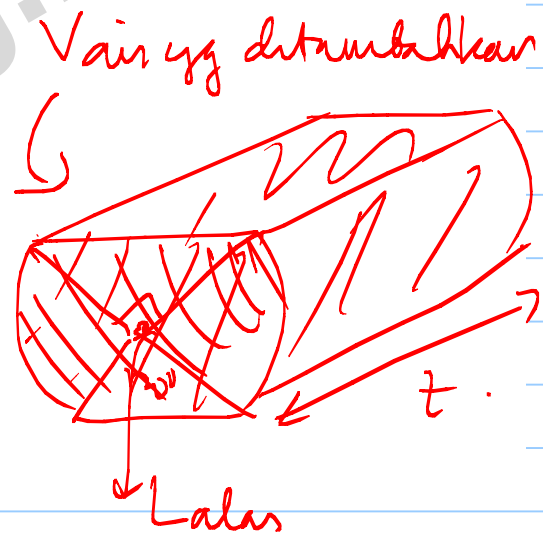
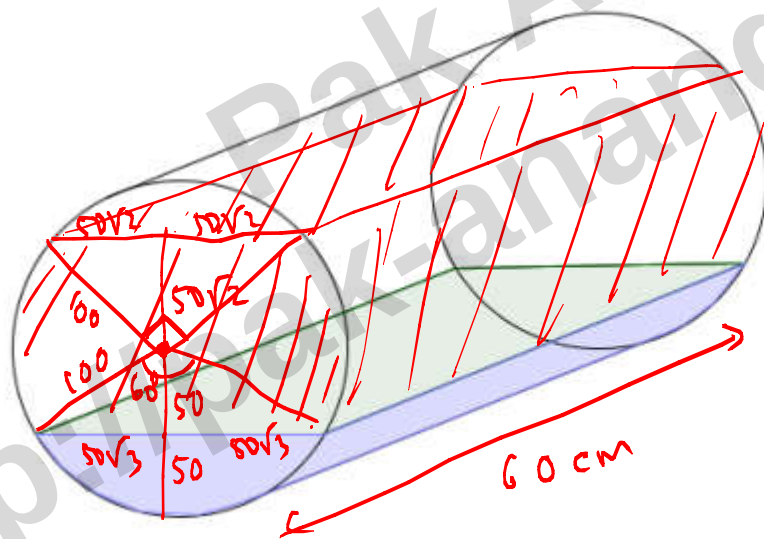
Karena hanya mungkin mengurangi bola putih dua-dua, maka akibatnya paritas bola putih akan terjaga.

jika q ganjil, maka 2 bola terakhir akan tetap terdapat sebuah "O", akibatnya 2 bola terakhir pasti "O●" (berbeda warna)

jika q genap, maka 2 bola terakhir mungkin "OO" atau "●●" (sama warnanya)

Jadi, peluang dua bola terakhir berbeda warna adalah $\frac{1}{2}$ //

9. Sebuah silinder memiliki panjang 60 cm dan jari-jari lingkaran 100 cm. Tinggi air mula-mula dalam silinder adalah 50 cm. Silinder tersebut selanjutnya diisi air sehingga tinggi air menjadi $(100 + 50\sqrt{2})$ cm. Tentukan volume air yang ditambahkan dalam silinder tersebut.



$$\begin{aligned}
 V &= L_{\text{alas}} \cdot t \\
 &= (L_0 - (L_{\text{sektor } 120^\circ} + L_{\text{sektor } 90^\circ})) \cdot 60 \\
 &= (L_0 - (\frac{1}{3}L_0 - L_\Delta) + (\frac{1}{4}L_0 - L_\Delta)) \cdot 60 \\
 &= (\frac{5}{12}L_0 + \frac{1}{2}r^2(\sin 120^\circ + \sin 90^\circ)) \cdot 60 \\
 &= (\frac{5}{12}\pi \cdot 100^2 + \frac{1}{2} \cdot 100^2(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1)) \cdot 60 \\
 &= 250000\pi + 300000(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1) \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

10. Suatu Tim kesebelasan sepakbola terdiri atas 11 pemain utama dan 11 pemain cadangan. Pelatih dapat memasukan pemain cadangan untuk menggantikan pemain utama. Tidak ada pemain utama yang sudah tergantikan dan masuk kembali, dan tidak ada penggantian permainan sekaligus dua pemain. Jika Pelatih maksimal melakukan penggantian pemain sebanyak 3 kali, tentukan sisa pembagian banyak penggantian oleh bilangan 1000.

$$\begin{aligned}\text{banyak penggantian } (n) &= (11 \times 11) \times (11 \times 10) \times (11 \times 9) + (11 \times 11) \times (11 \times 10) + (11 \times 11) \\ &= 11^3 \cdot 990 + 11^3 \cdot 10 + 121 \\ &= 1000 \cdot 11^3 + 121\end{aligned}$$

sisa pembagian n oleh 1000 adalah 121

Jangan lupa kunjungi

<http://pale-anang.blogspot.com>

Dan silakan berlangganan di channel telegram di

<http://t.me/paleanangblog>

Silakan klik link di atas agar tetap mendapat update terbaru.