Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Dr. Michael Marthaler
Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018 **Abgabe 18.06.2018**

***Info**: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Münzwurf (*9 Punkte*)

Betrachten Sie eine dünne, homogene Münze mit Radius r und Masse m.

(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor Θ_{ik} der Münze in Hauptachsenform. (*4 Punkte*)

Die Münze wird geworfen, sprich es werden Anfangsbedingungen zum Zeitnullpunkt vorgegeben, und fällt danach frei. Im Folgenden interessiert uns die Bewegung im freien Fall nach diesem Wurf.

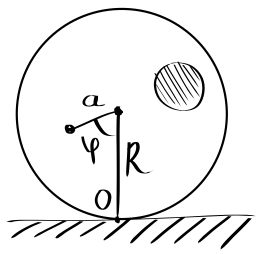
(b) Was sind die Freiheitsgrade der Münze? (*1 Punkt*)

(c) Finden Sie die Lagrangefunktion, die die Münzebewegung beschreibt. (*2 Punkte*)

(d) Finden Sie die Bewegungsgleichungen der Münze. Bestimmen die Lösungen durch Anfangsbedingungen. (*2 Punkte*)

Aufgabe 2: Exzentrischer Zylinder (*9 Punkte*)

Betrachten Sie einen Zylinder mit Radius R und Masse m, der auf einer Ebene rollt. Die Masse des Zylinders ist über das Volumen so verteilt, dass eine der Hauptträgheitsachsen parallel zur Zylinderachse im Abstand a von ihr verläuft; das Trägheitsmoment bezüglich dieser Hauptachse sei Θ.



(a) Zeigen Sie, dass die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um sämtliche parallele Achsen dieselbe ist. (*2 Punkte*)

(b) Führen Sie den Winkel ϕ zwischen der Vertikalen und dem Lot vom Schwerpunkt auf die Zylinderachse ein. Betrachten Sie die momentane Drehachse, die mit der Berührungslinie des Zylinders mit der Ebene zusammenfällt. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um diese instantane Drehachse? Warum? (*1 Punkt*)

(c) Finden Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunktes. (*2 Punkte*)

(d) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um die Hauptträgheitsachsen? Warum? (*1 Punkt*)

(e) Geben Sie die kinetische Energie des Zylinders an. (*3 Punkte*)

Aufgabe 3: Transformationen des Trägheitstensors

(*10 Punkte*)

(a) Ein starrer Körper besitze den Trägheitstensor $\Theta = (\Theta_{ik})$, wobei sich dieser auf ein körperfestes Koordinatensystem Σ bezieht, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt zusammenfällt. Wie ändert sich der Trägheitstensor für ein Koordinatensystem Σ', das bei parallelen Achsen um den Vektor $\vec{a}$ gegenüber Σ verschoben ist (verallgemeinerter Steiner'scher Satz)? (*5 Punkte*)

(b) Zeigen Sie, dass sich der Trägheitstensor bei einer Drehung des körperfesten Koordinatensystems wie folgt transformiert:

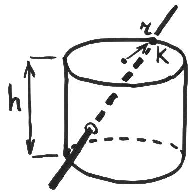
$$\Theta'_{nm} = \sum_{ik} d_{ni} d_{mk} \Theta_{ik}.$$

Dabei sind d_{ik} die Elemente der orthogonalen Drehmatrix. (*5 Punkte*)

Aufgabe 4: Hauptachsen auf der Kante eines Zylinders

(*12 Punkte*)

Betrachten Sie einen homogenen Zylinder der Masse m mit der Höhe h und Radius r. Wir wollen, dass sich der Zylinder um eine feste Achse dreht, die durch einen Punkt K an der Kante des Zylinders verläuft. Dabei soll jedoch kein Drehmoment auf die Achse wirken. Gehen Sie wie folgt vor, um diese Achse zu finden:



(a) Berechnen Sie den Trägheitstensor Θ_{ik} des Zylinder in Hauptachsenform bzgl. seines Schwerpunktes. Die z-Achse soll dabei parallel zur Mantelfläche des Zylinders zeigen. (*4 Punkte*)

(b) Berechnen Sie den Trägheitstensor Θ'_{ik} des Zylinder bzgl. eines Punktes K an der Kante des Zylinders. Auch hier soll die die z'-Achse parallel zur Mantelfläche zeigen. (*2 Punkte*)

(c) Zeigen Sie, dass bei Rotation eines Körpers um eine seiner Hauptachsen keine Drehmoment auf diese Rotationsachse wirkt. Verwenden Sie Lagrange-Multiplikator ein Euler-Winkel des Körpers zu fixieren. Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen des Körpers. Finden Sie sich das Drehmoment aus den Lagrange-Multiplikatoren. (*2 Punkte*)

(d) Finden Sie den Trägheitstensor Θ''_{ik} in Hauptachsenform bzgl. eines Punktes K. (*3 Punkte*)

(e) Drücken Sie nun die Basisvektoren $\hat{e}''_x$, $\hat{e}''_y$ und $\hat{e}''_z$ des Hauptachsen-Koordinatensystem von Punkt K durch die Basisvektoren $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ und $\hat{e}_z$ des Hauptachsen-Koordinatensystem vom Schwerpunkt aus. Geben Sie damit die Lage der drehmomentfreien Achse an. (*1 Punkt*)

Hinweis: Bei dieser Aufgabe ist es günstig, eine symmetrische 2×2-Matrix durch direkte Rotation zu diagonalisieren. Das heißt,

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a \\ a & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b \\ b & b_2 \end{pmatrix},$$

und wir wählen ϕ so, dass $b = 0$. Dies ergibt

$$\tan 2\phi = 2a/(a_2 - a_1).$$

Sie können auch einige *Bonusfragen* genießen!

(f) Wie viele Hauptachsen ein starre Körper hat? (*1 Punkt*)

(g) Der Zylinder dreht reibungsfrei sich um die Achse, die Sie in die Aufgabenteil (e) gefunden haben. Gibt es Kräfte, die auf die Achse wirken? Wenn ja, was ist diese Kraft, und wenn nein, warum? (*2 Punkte*)