

## **Tema 10: Redes Topográficas**

## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN
2. SISTEMAS Y MARCOS DE REFERENCIA GEODÉSICOS
  - 2.1 INTRODUCCIÓN
  - 2.2 SISTEMAS DE REFERENCIA GEODÉSICOS
    - 2.2.1 Sistema de referencia ED-50 (*European Datum 1950*)
    - 2.2.2 Sistema de referencia WGS84 (*World Geodetic System 1984*)
    - 2.2.3 Sistema de referencia Internacional ITRS (*Internacional Terrestrial Reference System*)
    - 2.2.4. Sistema de referencia Europeo ETRS-89 (*European Terrestrial Reference System 1989*)
  - 2.3 MARCOS DE REFERENCIA GEODÉSICOS
    - 2.3.1 RED ANTIGUA NACIONAL DE PRIMER, SEGUNDO Y TERCER ORDEN
    - 2.3.2 RED ROI: RED DE ORDEN INFERIOR
    - 2.3.3 RED DE NIVELACIÓN DE ALTA PRECISIÓN- REDNAP
    - 2.3.4 RED REGENTE
3. DISEÑO Y SEÑALIZACIÓN DE LOS VÉRTICES DE UNA RED BÁSICA TOPOGRÁFICA
4. OBSERVACIÓN DE LA RED BÁSICA
  - 3.1 POR MÉTODOS CLÁSICOS
  - 3.2 POR MÉTODOS GPS
5. CÁLCULO DE COORDENADAS Y PRECISIONES
  - 5.1 POR MÉTODOS CLÁSICOS
  - 5.2 POR MÉTODOS GPS
6. RESULTADOS FINALES
7. LA GEODESIA EN ESPAÑA: DEL SISTEMA GEODÉSICO ED-50 AL ETRF -89
8. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

## 1. INTRODUCCIÓN

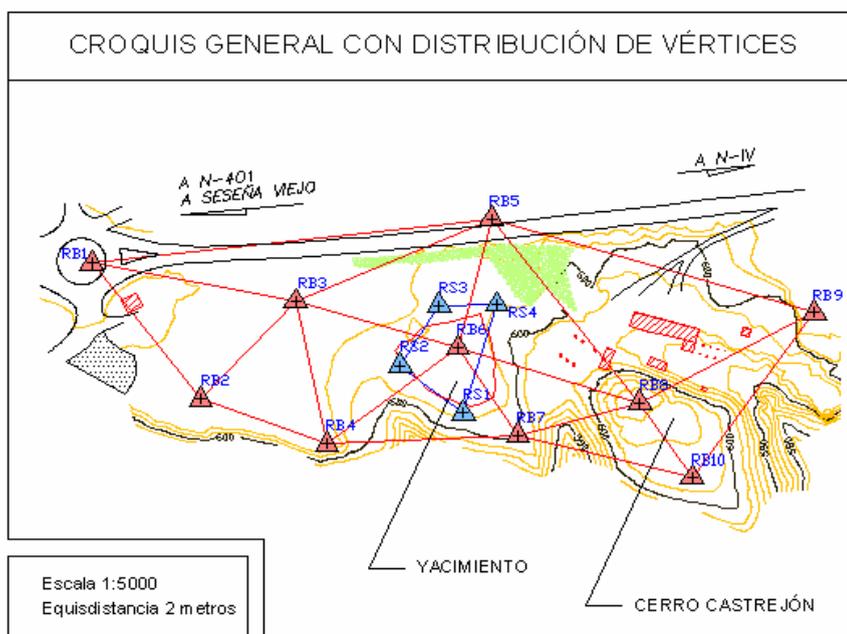
Para la realización de un trabajo topográfico se necesitan puntos con coordenadas conocidas en los que apoyarse directa o indirectamente. Estos puntos se denominan vértices, y al conjunto de ellos red topográfica o red básica.

La finalidad de las observaciones puede ser obtener las coordenadas de dichos puntos o crear la estructura topográfica para el desarrollo de trabajos cartográficos o fotogramétricos.

En un proyecto se suele distinguir entre la red básica planimétrica y la red básica altimétrica. Las redes planimétricas tienen la finalidad de establecer coordenadas geográficas latitud y longitud ( $j, l$ ) o bien cartesianas (X, Y) de los puntos. Las redes altimétricas determinan la tercera coordenada, la altura sobre el Geoide. Una red planimétrica estará formada por el conjunto de vértices con coordenadas ( $\varphi, \lambda$ ) ó (X, Y), mientras que la red básica altimétrica lo será por vértices con máxima precisión en la coordenada H.

Los vértices pueden ser los mismos, pero los condicionantes de situación son completamente diferente, y esto hace que no siempre los puntos que forman ambas redes en un mismo trabajo, coincidan.

Cuando los puntos que componen la red básica altimétrica y planimétrica coinciden se habla de redes tridimensionales. En este caso el conjunto de puntos está definido por coordenadas ( $\varphi, \lambda, h$ ) ó (X, Y, Z) con máxima precisión en el trabajo.



<sup>1</sup> GARCIA MARTINEZ, Raúl; RUBIO DE LA TORRE RUIZ, Yolanda (2006): *Cartografía a escala 1/500 del Área II del Yacimiento Arqueológico "Reina" en el Termino Municipal de Seseña en la provincia de Toledo*. PFC de la ETSI en Topografía, Geodesia y Cartografía. UPM, Madrid.

Las redes planimétricas u horizontales se pueden subdividir atendiendo a criterios como la densidad de puntos, la metodología de observación y la zona de terreno que cubren. De este modo se plantean las redes de orden cero (continentales), de primer orden, de orden inferior (segundo y tercer orden) y las redes de cuarto orden (regionales).

Las redes verticales (la Red de Nivelación de Alta Precisión es una de ellas) tienen como objetivo dotar de sistema de altitudes a la zona de trabajo y servir de apoyo en trabajos cartográficos, geodésicos y topográficos.

La altura de un punto sobre el nivel medio del mar en algún punto prefijado (en España se toma el nivel medio en Alicante), es la que se denomina altura ortométrica (H).

La diferencia entre la altura elipsoidal (h) y la altura ortométrica (H) es la que llamamos altura geoidal (N) u ondulación del geode, y representa las desviaciones del geode con respecto al elipsoide de referencia.

La ecuación que liga las tres alturas es:

$$h = H + N$$

Las observaciones GPS están referidas a un sistema de referencia global y proporcionan altitudes elipsoidales, mientras que las observaciones clásicas estarán referidas a sistemas astronómicos locales y proporcionan altitudes ortométricas.

Los puntos que constituyen una red básica topográfica pueden estar separados desde unos centenares de metros hasta kilómetros dependiendo de la finalidad trabajo. Para ubicarlos se pueden utilizar los métodos de intersección (angulares y de distancias), y las técnicas GPS. Es el operador el que ha de decidir la elección del instrumental y en función del mismo, la metodología de observación y de cálculo.

Normalmente es necesario dar las coordenadas de la red básica en un sistema de referencia oficial (ED-50) o en coordenadas de proyecto, existiendo vértices preexistentes en algún lugar, con los que es necesario efectuar los trabajos de enlace. En otras ocasiones se podrá optar por dar los resultados en un sistema de coordenadas arbitrario.

El conjunto de puntos o vértices geodésicos con coordenadas en un determinado sistema de referencia se denomina "marco de referencia".

La altitud de los vértices geodésicos respecto a la red altimétrica se obtuvo observando itinerarios de desniveles por recíprocas y simultáneas entre los vértices y clavos de la red de nivelación de alta precisión.

En este tema vamos a comenzar estudiando la definición de sistemas de referencia, describiendo los sistemas usuales en Topografía, la necesidad de observar desde ellos para efectuar la transformación de coordenadas de los puntos observados, los condicionantes de los métodos de observación de la red de nueva implantación y los métodos de cálculo y obtención de los parámetros de fiabilidad y precisión.

## 2. SISTEMAS Y MARCOS DE REFERENCIA GEODÉSICOS

- 2.1 INTRODUCCIÓN
- 2.2 SISTEMAS DE REFERENCIA GEODÉSICOS
- 2.3 MARCOS DE REFERENCIA GEODÉSICOS: REDES GEODÉSICAS EN ESPAÑA

### 2.1 INTRODUCCIÓN

Tanto en una red planimétrica como en una altimétrica, se ha de comenzar eligiendo el Datum o sistema de referencia en el que se van a calcular las coordenadas de los puntos de la red. Esta cuestión se decide en función de las condiciones y requerimientos que aparezcan en el pliego de condiciones, o de las variables que definan las necesidades del trabajo topográfico.

En general, el Datum es la superficie de referencia para el cálculo y determinación de coordenadas, estableciéndose unos datos iniciales de los cuales se derivan el resto. En Geodesia se emplean dos tipos de Datum: el Datum vertical y el Datum horizontal.

El Datum Vertical es la superficie de referencia para el cálculo de alturas, es la superficie de altura nula. Lo más usual es que esta superficie sea el geoide y las alturas referidas a él son las alturas ortométricas.

El Datum Horizontal permite la determinación de la longitud y latitud. Se elige un punto en el cual las superficies del elipsoide de referencia y del geoide sean tangentes. En él las verticales geodésica y astronómica, coincidirán, así como las coordenadas astronómicas y geodésicas.

Un Datum planimétrico comprende un conjunto de datos tanto geométricos como dinámicos que lo definen, aparte de una serie de puntos en el terreno que lo materializa, que son la red de vértices. Por lo que respecta a la definición geométrica, un Datum geodésico está constituido por:

- Una superficie de referencia generalmente un elipsoide de revolución.
- Un punto fundamental, en el que coinciden las verticales al geoide y al elipsoide (con lo que también coincidirán las coordenadas astronómicas y geodésicas).

Las coordenadas geodésicas de un punto están formadas por la longitud y latitud geodésicas y además la altura del punto sobre el elipsoide de referencia, es decir  $h$ :

*Coordenadas geodésicas del punto  $P$ :  $(l_p, j_p, h_p)$*

- Longitud geodésica: es el ángulo  $l$  formado por el plano del meridiano origen y el meridiano que pasa por el punto A. Se mide en grados sexagesimales de 0 a 360°, con sentido positivo al Oeste.
- Latitud geodésica: Es el ángulo  $j$  formado por la vertical al elipsoide desde el punto A (vertical geodésica) y el plano ecuatorial. Se mide en grados sexagesimales, partiendo del Ecuador, siendo positiva al Norte (de 0 a 90°) y negativa al Sur (de 0 a -90°).

Si tomamos como superficie de referencia una esfera en lugar del elipsoide, hablaríamos de longitud y latitud geográficas, con una definición semejante a las anteriores.

Para representar la superficie del elipsoide sobre un plano se utilizan las proyecciones según una determinada ley matemática:

$$x = f_1(\mathbf{l}, \mathbf{j})$$

$$y = f_2(\mathbf{l}, \mathbf{j})$$

donde  $(x, y)$  son las coordenadas rectangulares planas deducidas a partir de sus homologas en el elipsoide  $(\mathbf{j}, \mathbf{l})$ , mediante la aplicación de la relación matemática indicada.

Mediante las Coordenadas geodésicas  $(\mathbf{j}, \mathbf{l})$ , se determina la posición de la proyección de un punto de la superficie real de la Tierra sobre el elipsoide según la normal a éste.

Existen gran cantidad de leyes matemáticas que permiten la representación del elipsoide sobre un plano, pero una de las premisas fundamentales es la de obtener la mínima distorsión al proyectar los elementos de una superficie a la otra.

En España, el sistema de proyección oficial es el UTM, el más difundido internacionalmente, y es el utilizado en la Red Geodésica Nacional.

## 2.2 SISTEMAS DE REFERENCIA GEODÉSICOS

2.2.1 Sistema de referencia ED-50 (European Datum 1950)

2.2.2 Sistema de referencia WGS84 (World Geodetic System 1984)

2.2.3 Sistema de referencia Internacional ITRS (Internationa Terrestrial Reference System)

2.2.4. Sistema de referencia Europeo ETRS-89 (European Terrestrial Reference System 1989).

### 2.2.1 Sistema de referencia ED-50 (European Datum 1950)

El sistema oficial en España fue adoptado para la Cartografía Nacional, en 1970 por el Instituto Geográfico Nacional.

El elipsoide de referencia es el elipsoide de Hayford de 1909, que también se conoce como Internacional de 1924. Sus datos geométricos son:

- Aplanamiento:  $1/f = 1/297$
- Eje vertical paralelo al eje de giro de la Tierra.
- Semieje mayor o semieje ecuatorial de 6.378.388 metros.
- Excentricidad al cuadrado: 0,006722670022.

El Datum es Potsdam (punto astronómico fundamental) y el meridiano de Greenwich se toma como origen de longitudes y como origen de latitudes el Ecuador.

Las coordenadas geodésicas obtenidas bajo este sistema son transformadas a coordenadas planas mediante la proyección cartográfica UTM (Universal Transversa Mercator), proyección oficial vigente en España.

El Datum ED50 quedó materializado en su momento por los vértices constitutivos del Marco RE50 y actualmente por el marco ROI.

Estos vértices tienen coordenadas elipsoidales o en proyección UTM, y su altitud es ortométrica:

$$j, l, H$$

$$X_{UTM}, Y_{UTM}, H$$

### 2.2.2 Sistema de referencia WGS84 (*World Geodetic System 1984*)

Este es el sistema de referencia utilizado por la tecnología GPS.

Se toma como elipsoide de referencia el elipsoide WGS84 cuya definición geométrica es:

$$a = 6378137,0 \text{ metros ( semieje mayor).}$$

$$f = 1/298,257223563 \text{ ( aplanamiento).}$$

El sistema coordenado WGS84 es un sistema cartesiano centrado, definido por:

- Origen: centro de masas de la Tierra o geocentro.
- Eje Z: dirección del polo de referencia IERS (corresponde a la dirección del polo convencional terrestre en la época 1984,0)
- Eje X: intersección del meridiano de referencia IERS y el plano que pasando por el origen es perpendicular al eje Z.
- Eje Y: completa un sistema ortogonal dextrógiro.

Las alturas en este sistema son alturas elipsoidales respecto al elipsoide WGS84.

### 2.2.3 Sistema de referencia Internacional ITRS (*International Terrestrial Reference System*)

El Sistema de referencia internacional ITRS es un sistema de referencia geodésico dentro del contexto de la teoría de la relatividad, válido para la Tierra y espacio próximo, con un nivel de precisión relativa de  $10^{-10}$ .

Su elipsoide asociado es el GRS80 definido geoméricamente por:

- $a = 6378137,0$  metros ( semieje mayor).
- $f = 1/298,2572221008827$  ( aplanamiento).

El sistema coordenado que utiliza ITRS es un sistema cartesiano centrado y fijo en la Tierra, definido:

- Origen: centro de masas de la Tierra o geocentro.
- Eje Z: dirección del polo de referencia IERS (corresponde a la dirección del polo terrestre convencional en la época 1984,0).
- Eje X: intersección del meridiano de referencia IERS y el plano que pasando por el origen es perpendicular al eje Z.
- Eje Y: completa un sistema ortogonal dextrógiro.

Las alturas en este sistema son alturas elipsoidales respecto al elipsoide GRS80.

#### **2.2.4. Sistema de referencia Europeo ETRS-89 (*European Terrestrial Reference System 1989*)**

Desde 1988, el Servicio de Rotación de la Tierra (IERS) fue creado por la Unión Astronómica Internacional (IAU) y la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica (IUGG), para proporcionar valores de referencia de los parámetros de orientación de la Tierra y sistemas de referencia terrestre y celeste. Está encargado de realizar, usar y promover el Sistema de Referencia Terrestre Internacional (ITRS).

En terminología geodésica, un marco de referencia consiste en un conjunto de puntos con coordenadas que materializa un sistema de referencia. Los marcos generados por el IERS para ITRS son denominados Marcos de Referencia Terrestre Internacional (ITRF). Tales marcos están constituidos por las estaciones de seguimiento que integran la Red IERS y sus correspondientes monumentos, con las coordenadas y sus variaciones en el tiempo.

A partir de las series temporales de resultados del IERS, se ha puesto de manifiesto que la Placa Continental Europea mantiene un movimiento bastante uniforme, de unos 3 cm por año, con relación al ITRS, con excepción del extremo sur-este de Europa (Grecia, Turquía). Por esta razón, con el fin de mantener unas coordenadas razonablemente estables para Europa, la Subcomisión EUREF decidió definir un Sistema ligado a la placa Europea. Este sistema (datum) se denomina ETRS, o ETRS89, ya que fue idéntico al ITRS en el año 1989. Desde 1989, las coordenadas ETRS89 ajustadas con relación a la Placa Europea, han modificado sus valores con respecto a los expresados en ITRS. Sin embargo, esta modificación es conocida, por IERS y EUREF, y son posibles realizar transformaciones entre unas y otras con exactitud de 1 cm para la mayor parte.

La Asociación Internacional de Geodesia (IAG), formó la Subcomisión EUREF, para la determinar un nuevo DATUM geodésico Europeo y un nuevo Marco que lo materializase. Se pretendía:

- Establecer una Red de estaciones Permanentes GPS (*EUREF Permanent Network*)
- Establecer una Red de referencia geodésica de alta precisión determinada a partir de campañas GPS.
- Determinar de una red vertical e integrarla en la red de referencia vertical europea GPS.

El sistema de referencia se denomina Sistema de Referencia Terrestre Europeo 198- ETRS89.

Este sistema geodésico de referencia (que en definitiva es lo que se conoce como un 'datum') lleva asociado, entre otros parámetros, un elipsoide de referencia que es el **GRS80** completamente equivalente a nivel usuario con el **WGS84**. De hecho, el WGS84 deriva del GRS80. Los semiejes mayores de los dos elipsoides son iguales, y la diferencia entre semiejes menores debe de ser de alguna décima de milímetro; por eso decimos que podemos confundir a nivel práctico el GRS80 con el WGS84.

Los sistemas de referencia WGS84 y ETRS89 son equivalentes en la gran mayoría de aplicaciones topográficas o cartográficas. El primero está basado en el elipsoide del mismo nombre, WGS84, mientras que el segundo utiliza el SGR80; adoptado por la Asociación Internacional de Geodesia en 1979. Ambos elipsoides son idénticos excepto en la excentricidad, en la que difieren ligeramente. ETRS89 es el sistema de referencia geocéntrico oficial en Europa de precisiones mucho más elevadas que la solución WGS84<sup>2</sup>.

El sistema coordinado que se utiliza en el sistema de referencia Europea ETRS-89 es un sistema cartesiano centrado y fijo en la Tierra y definido por:

- Origen: el centro de masas de la Tierra
- Eje Z: en la dirección del Polo Convencional Terrestre en la época 1984
- Eje X: intersección del meridiano de referencia IERS y el plano que pasando por el origen es perpendicular al eje Z.
- Eje Y: completando el sistema ortogonal dextrogiro.

El *European Terrestrial Frame* (ETRF89) es el marco de referencia, formado por puntos (vértices geodésicos) con coordenadas en el sistema ETRS89.

La proyección Universal Transversa de Mercator no es exclusiva de ningún datum en particular. Un sistema de proyección cartográfica es una función biunívoca de transformación entre latitudes, longitudes geodésicas y coordenadas planas. En consecuencia existirán coordenadas UTM datum WGS84 basadas en el elipsoide del mismo nombre, UTM ED50 basadas en el Internacional (Hayford) y, UTM ETRS89 basadas en SGR80.

## 2.3 MARCOS DE REFERENCIA GEODÉSICOS

- 2.3.1 RED ANTIGUA NACIONAL DE PRIMER, SEGUNDO Y TERCER ORDEN
- 2.3.2 RED ROI: RED DE ORDEN INFERIOR
- 2.3.3 RED DE NIVELACIÓN DE ALTA PRECISIÓN- REDNAP
- 2.3.4 RED REGENTE

La geodesia estudia la forma, dimensiones y campo gravitatorio de la Tierra en territorios extensos. Esta es la principal diferencia con la Topografía, que basa sus trabajos en superficies de extensión reducida en las que la esfericidad terrestre puede considerarse despreciable.

---

<sup>2</sup>[http://www.fomento.es/MFOM/LANG\\_CASTELLANO/DIRECCIONES\\_GENERALES/INSTITUTO\\_GEOGRAFICO/Geodesia/red\\_geodesicas/preguntas.htm](http://www.fomento.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/DIRECCIONES_GENERALES/INSTITUTO_GEOGRAFICO/Geodesia/red_geodesicas/preguntas.htm)

La Red Geodésica Nacional constituye la base geométrica del país. Sirve de referencia para todos los sistemas espaciales y es la base de la cartografía. Consta de una red de puntos de control, estructura sobre la que apoyar levantamientos o trabajos topográficos. El organismo responsable es el Instituto Geográfico nacional (<http://www.ign.es>).

Para determinar las coordenadas de los vértices geodésicos se parte de las del Punto Astronómico Fundamental, determinadas por procedimientos exclusivamente astronómicos. Posteriormente se van determinando el resto de puntos.

Los vértices geodésicos han sido puntos fundamentales planimétricos, con Datum Potsdam y elipsoide de referencia Hayford. Todo vértice geodésico lleva asociada una cota o altitud sobre el nivel medio del mar. Esta coordenada es de inferior precisión a las coordenadas planimétricas.

Los puntos fundamentales altimétricos son los clavos de la red de nivelación de alta precisión (NAP). El punto fundamental altimétrico es la señal NP1 (cota 3,4095) enlazada con el mareógrafo de Alicante.

Para hacer cartografía además de contar con un datum o sistema geodésico de referencia, se necesita que esté materializado en el terreno, con una serie de puntos que existan sobre el territorio y que se puedan utilizar como puntos de coordenadas de partida para los trabajos de posicionamiento.

El conjunto de puntos o vértices geodésicos con coordenadas en el correspondiente sistema de referencia se denomina *marco de referencia*.

El European Terrestrial Reference Frame (ETRF89) es el marco de referencia, formado por una serie de puntos (vértices geodésicos) con coordenadas en el sistema ETRS89. El marco ETRF89 es la realización práctica en el terreno del sistema ETRS89, y las coordenadas se han calculado utilizando el elipsoide **GRS80 (~WGS84)**.

El antiguo sistema geodésico de referencia (datum) **ED50**, se materializó en el terreno con una serie de vértices geodésicos: los famosos once mil y pico cilindros verticales de 1,20 metros por 30 cm de diámetro sobre un prisma de mayor o menor altura con una placa del IGN que los identifica. Esta red de vértices geodésicos, cuyas coordenadas fueron calculadas utilizando el elipsoide de **Hayford 1909** (o Internacional 1924), es lo que se denomina Red de Orden Inferior (en algunos mapas rotulados con las siglas ROI) y materializa en el terreno el sistema ED50.

Equivalentemente y de igual manera habrá, en un futuro, un nuevo sistema, ETRS89, con un marco de referencia que serán un conjunto de vértices (las señales cilíndricas blancas) que lo materializará en el terreno, es el ETRF89. El proyecto realizado para construir y densificar este marco de referencia en España se denomina red **REGENTE** (en los nuevos mapas del IGN ya aparecen rotulados los vértices), y se completó en el año 2001. Los vértices geodésicos de la red REGENTE se calculan utilizando el sistema ETRS89, elipsoide GRS80 (~WGS84).

Ni que decir tiene que los vértices que pertenecen a la red REGENTE (nueva) también pertenecen a la red ROI (antigua) y se dispone de coordenadas de estos puntos en ambos sistemas ETRS89 y ED50. Se puede, entonces, calcular parámetros de transformación entre ambos sistemas con mucha precisión utilizando estos vértices con duplicidad de coordenadas.

¿Qué **ventajas** aporta al usuario el cambio de la cartografía de ED50 a ETRS89? La fundamental y más importante es que el usuario podrá utilizar las coordenadas que directamente le da su GPS para posicionarse sobre la nueva cartografía sin necesidad de andar utilizando cambios de datum ni transformación alguna, y sin más error que el que tenga su receptor o su método de posicionamiento con GPS<sup>3</sup>.

Las reseñas de los vértices pueden obtenerse en la página web del Instituto Geográfico Nacional.

### 2.3.1 RED ANTIGUA NACIONAL DE PRIMER, SEGUNDO Y TERCER ORDEN

Para establecer las redes geodésicas se implantaron de distinta precisión y orden para evitar en lo posible la acumulación de errores que supone el cálculo de unos triángulos apoyados en los anteriores. Se dispusieron redes de primero, segundo y tercer orden con precisiones progresivamente decrecientes.

#### PRIMER ORDEN

La red geodésica de primer orden estaba formada por triángulos de 30 a 80 km de lado, pudiendo llegar en casos excepcionales a más de 200 km, como el lado Mulhacen\_Sierra Nevada/Filhaussen\_Argelia de 270 km.

Constaba de 285 vértices a los que se sumaba la red complementaria de primer orden con 288 vértices a distancias 30 km, lo que hacía un total de 573 vértices con un espaciamiento medio de unos 40 km.

La monumentación se realizó con una base de 2,50 x 2,50 x 1,20 de altura y un pilar cilíndrico de 0,20 m de diámetro y 1,20 de altura.

Si el vértice de primer orden es además un punto Laplace las dimensiones son 3,00 m x 3,00 x 1,20 de altura, con un pilar cilíndrico de 0,40 m de diámetro y 1,20 de altura.

#### SEGUNDO ORDEN

La red de segundo orden se apoyó en la de primer orden con triángulos de 10 a 30 km. Constaba de 2170 vértices. Todos los vértices de primer orden se incorporaron también a esta red, formando una malla continua en todo el territorio español.

La monumentación se realizó con una base de 1,0 x 1,0 x 1,0 de altura y un pilar cilíndrico de 0,30 cm de diámetro y 1,20 de altura.

Los triángulos de primer y segundo orden eran elipsoidicos, (se calcularon sobre el elipsoide) ya que en esas dimensiones no podía prescindirse de la esfericidad terrestre.

---

<sup>3</sup><http://www.cartesia.org/article.php?sid=80>

### TERCER ORDEN

La red de tercer orden se apoyó en la de segundo orden y tenía triángulos con lados de 5 a 10 km. Contaba de unos 12.000 vértices. Apoyándose en esta red y mediante la intersección de varias visuales, se determinaron las coordenadas de las veletas de las iglesias de los pueblos.

Su precisión era de unos 10-20 cm. Se compensó por Comunidades Autónomas, lo que llevó consigo problemas de solape.

La señal tenía una base de 1,0 x 1,0 con una altura variable, y el pilar cilíndrico era de 0,30 de diámetro y 1,20 de altura.

Los triángulos de tercer orden se calcularon como triángulos planos.

#### 2.3.2 RED ROI: RED DE ORDEN INFERIOR

Desde 1953, la IAG creó una Subcomisión, conocida como RETrig, para analizar la precisión y posibles errores del marco geodésico RE50. En poco tiempo se llegó a la detección de fuertes irregularidades en escala y orientación, tanto mayores cuanto más periféricas eran las redes nacionales europeas, caso de la Península Ibérica.

Se decidió complementar los datos con nuevas observaciones. En 1993 el IGN finalizó los trabajos de construcción de la Red de Orden Inferior (ROI), constituida por 10.944 vértices materializados y homogéneamente distribuidos por el territorio nacional, con una densidad media de 2,39 vértices por cada 100 km<sup>2</sup>.

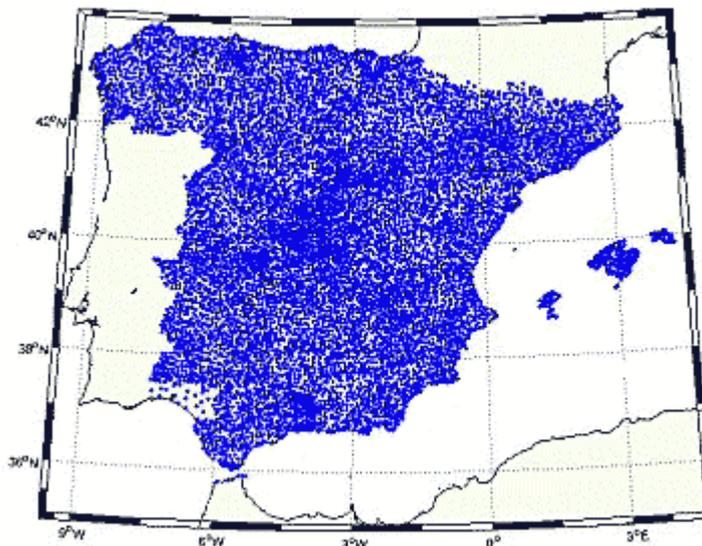
Las condiciones que satisfacían estos vértices eran<sup>4</sup>:

- La red cubría todo el territorio nacional con una malla continua de triángulos, a la que pertenecían todos los vértices de la red de primer orden.
- La longitud de sus lados quedaba comprendida como límites máximos entre 3 y 12 kilómetros.
- La configuración de la red permitía, en general, la observación angular, sin estaciones excéntricas de los vértices, asegurando la visibilidad entre ellos.
- A cada vértice geodésico se le asignaba un nombre y el número de 6 cifras, siendo las tres últimas el número de la hoja del Mapa Topográfico Nacional en la que se encontraba.

La red de orden inferior fue observada angularmente con teodolito de 1cc por el método de vueltas de horizonte. La calidad de ésta red está entre 10 y 30 cm. El sistema de referencia geodésico asociado es ED50.

---

<sup>4</sup>[http://www.fomento.es/MFOM/LANG\\_CASTELLANO/DIRECCIONES\\_GENERALES/INSTITUTO\\_GEOGRAFICO/Geodesia/red\\_geodesicas/roi.htm](http://www.fomento.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/DIRECCIONES_GENERALES/INSTITUTO_GEOGRAFICO/Geodesia/red_geodesicas/roi.htm)



### 2.3.3 RED DE NIVELACIÓN DE ALTA PRECISIÓN- REDNAP

#### ***H-precisión: Altitudes ortométricas***

La red de nivelación se acometió con el objeto de asignar cota a puntos geodésicos. Se tomo como referencia de altitudes el nivel medio del mar en Alicante, instalándose una escala de mareas en su puerto marítimo. El primer punto de la Nivelación de Precisión (NP-1) se situó en el primer peldaño de la escalera del Ayuntamiento de Alicante, enlazándose con la base de la escala de mareas portuaria.

La monumentación, observación, cálculo, compensación y mantenimiento de la Red NAP es competencia del IGN.

Los vértices se materializan con clavos de nivelación, y dependiendo del orden al que pertenezcan tienen diferentes formas y dimensiones. Las características de los clavos son:

- Metal anticorrosivo, latón o metal blanco.
- Bajo coeficiente de dilatación.
- Cabeza semiesférica para apoyo del talón de la mira.
- Construcción que garantiza gran estabilidad.
- Situación próxima a líneas de ferrocarril, carreteras, etc...
- No suelen coincidir con vértices geodésicos por los grandes desniveles que habría que salvar.

La red de nivelación de alta precisión se observa con nivel de precisión y miras invar, líneas de nivelación en anillos de distancias máximas de 100 km. Las líneas de nivelación son dobles entre puntos nodales.

Como características de la Red NAP, destacan:

- Observación de nivelación geométrica y gravimétrica a lo largo de las líneas.

- Determinación de diferencia de potenciales: Cotas Geopotenciales.
- Obtención de gran precisión, del orden de  $0.8a1.5mm\sqrt{k}$
- Estabilidad en las señales.
- Señales Principales y Señales Secundarias.

A partir de los desniveles y la gravedad observados se determina el *número geopotencial*, y a partir de éste y con la *corrección ortométrica*, se determinan los *desniveles ortométricos*.

#### 2.3.4 RED REGENTE

Con el fin de establecer una cartografía europea unificada, se hacía indispensable la conversión de las coordenadas de los Marcos de los Sistemas Geodésicos Nacionales al Marco ETRF89.

En el caso de la Península y Archipiélagos, el IGN decidió resolver el problema mediante el Proyecto REGENTE (Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales), que consiste en una densa red GPS de alta precisión con estaciones coincidentes con vértices ROI y clavos de las líneas de nivelación de alta precisión (NAP).

El armazón geodésico del Proyecto REGENTE está formado por alrededor de 1.150 vértices (incluidos los insulares), uno por cada hoja del 1:50.000. Se contempla la realización de observaciones gravimétricas en todos ellos y convertirlos en estaciones GPS. Por otra parte como las altitudes que se consideran en el Proyecto Regente son geodésicas, referidas al elipsoide WGS84, se ha impuesto la condición de que al menos un 10% de tales vértices estén enlazados con la RNAP, para así poder relacionarlas con las altitudes ortométricas.

El proyecto REGENTE surge para alcanzar los siguientes objetivos:

- Materialización, observación y cálculo de coordenadas, para toda España, de una red geodésica básica tridimensional de Primer Orden, con precisión absoluta, a priori para cada coordenada =5 cm.
- Obtención de parámetros precisos de transformación entre el sistema de referencia de la Red Geodésica Nacional (ED50) y el de REGENTE (ETRF89).
- Facilitar datos válidos para la depuración del geoides español de precisión centimétrica. Se apoya el proyecto REGENTE con observaciones gravimétricas, por el método de relativas con gravímetros Lacoste-Romberg, en cada uno de sus puntos.
- Facilitar apoyo al elevado número de usuarios de la técnica GPS, de modo que un punto cualquiera del territorio nacional se encuentre dentro de un círculo de radio máximo de 15 Km con centro en un vértice REGENTE.

Se trata de una red tridimensional de orden cero, es decir de máxima precisión. Los vértices de esta nueva red tienen coordenadas en el sistema de referencia ED-50 y ETRS-89.

<b>ED-50</b>	<b><math>j, l, H</math></b>	<b>(elipsoide de Hayford)</b>
	<b><math>X_{UTM}, Y_{UTM}, H</math></b>	
<b>ETRS-89</b>	<b><math>j, l, h</math></b>	<b>(elipsoide GRS80~WGS84)</b>

El Proyecto REGENTE comenzó en marzo de 1994 con la colocación del centrado forzado (para la basada soporte de la antena del receptor) de forma que se eliminase prácticamente el error de estacionamiento de la antena en las sesiones de observación.

En el mes de Abril del mismo año comenzó la observación GPS. Participaron en el proyecto el Instituto Geográfico Nacional y el Servicio geográfico del Ejército en la totalidad de las campañas y otras instituciones como el Real Observatorio de la Armada y el Instituto Cartográfico de Cataluña. El método GPS utilizado en la observación de REGENTE fue el estático, observándose simultáneamente bloques de 9 vértices, con 9 receptores de doble frecuencia.

En Octubre de 2001, finalizaron las campañas del proyecto con la observación GPS de los 120 vértices del Bloque Norte. La red REGENTE quedó constituida por 1.108 vértices de la Red de Orden Inferior (ROI) y 196 clavos de Nivelación de Alta Precisión (NAP) homogéneamente distribuidos por todo el territorio español, en los cuales se han determinado las coordenadas WGS84 con alta precisión.

Una vez finalizada la observación total de la red, se emprendieron los trabajos de análisis, cálculo y compensación en bloque de la misma, apoyada en la de orden superior IBERIA95, con objeto de obtener las coordenadas definitivas para cada punto REGENTE en el Sistema de Referencia Terrestre Europeo ETRS89.

El cálculo y la compensación se llevaron a cabo utilizando Efemérides Precisas del Internacional GPS Service (IGS), y obteniendo coordenadas con una exactitud centimétrica y una precisión del orden de  $10^{-1}$  ppm (100 veces superior a la de una red de primer orden convencional).

Asimismo un 20% de los puntos REGENTE disponen de un doble juego de altitudes (ortométrica y elipsoidales WGS84) de alta precisión, lo que hace de la red una herramienta de excepcional importancia para el incremento en la precisión de la carta del geoide.

El cálculo de los vectores se realiza con el programa *GPSurvey de Trimble* utilizando las Efemérides de Precisión. El proceso de compensación, se realizó con el programa *GeoLab de Geosurv Inc.*, comenzando con una compensación previa por bloques como red libre, sin ningún tipo de constreñimientos. En ella se analizan la concordancia de las soluciones aportadas por las distintas sesiones y el cierre de los vectores, y, finalmente, se les asigna su ponderación correspondiente.

Una vez depurada la observación en red libre, se procede al ajuste conjunto de todos los bloques que componen una campaña, manteniendo fijas las

coordenadas de los vértices de IBERIA95 y de los vértices ya calculados en campañas anteriores. Al finalizar el proceso, se guardan en base de datos las componentes de los vectores con su matriz de varianza-covarianza, el peso que se les ha asignado y las coordenadas calculadas.

Se incluye a continuación una de las reseñas de estos vértices a modo de ejemplo.



Ministerio de Fomento  
Subsecretaría

General Ibañez de Ibero, 3  
28003 MADRID

Dirección General del Instituto Geográfico Nacional  
Subdirección General de Geodesia y Geofísica

### Reseña Vértice Geodésico

<b>Número.....:</b> 63053
<b>Nombre.....:</b> Rincón de Román
<b>Municipio...:</b> Yepes
<b>Provincia..:</b> Toledo

<b>Fecha de Construcción.:</b> 01/11/1982
<b>Centrado Forzado.:</b> Si <b>Nº de cuerpos.:</b> 1
<b>Altura pilar.:</b> 1.20000004768372 m
<b>Diámetro pilar.:</b> 0.300000011920929 m
<b>Altura último cuerpo.....:</b> 2.0 m
<b>Ancho último cuerpo.....:</b> 1.0 m
<b>Altura total de los cuerpos.:</b> 2.0 m

Coordenadas WGS84	
<b>Longitud.:</b> -3° 40' 34,1402"	<b>Compensación....:</b>
<b>Latitud.....:</b> 39° 53' 34,6024"	
<b>X UTM.....:</b> 442193.762 m	<b>Factor escala...:</b> 0.9996411368
<b>Y UTM.....:</b> 4416094.047 m	
<b>Altura.....:</b> 739.718994140625 m (CF)*	<b>Convergencia.:</b> 0° 26' 1,1916"
	<b>Huso.....:</b> 30

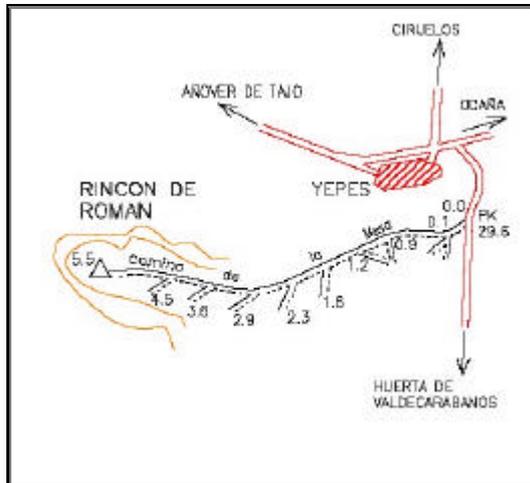
**Situación:**  
Situado sobre el punto O. de la mesa que se extiende al S. de Yepes hacia poniente y que termina en la llamada Punta o Rincón de Román, en monte bajo.

**Acceso:**  
Desde el punto kilométrico 29,600 de la carretera local de Yepes a Huertas de Valdecarábanos, se sigue el camino que, pegado a la misma, bordea por el S. el pueblo de Yepes y se dirige hacia el O. hasta alcanzar la punta citada, siempre por lo más alto de la meseta. En tiempo seco puede ir cualquier vehículo, con un recorrido de unos 5 Km.

**Observaciones:**  
REGENTE.  
\* *Altura referida a Centrado Forzado*



Rincón de Román



**Horizonte GPS:**  
Despejado

### 3. DISEÑO Y SEÑALIZACIÓN DE LOS VÉRTICES DE UNA RED BÁSICA TOPOGRÁFICA

- 3.1 PRE-SELECCIÓN DE VÉRTICES
- 3.2 RECONOCIMIENTO Y SELECCIÓN DEFINITIVA
- 3.3 SEÑALIZACIÓN
- 3.4 RESEÑAS

#### 3.1 PRESELECCIÓN DE VÉRTICES

El conjunto de puntos que forman una red topográfica debe cubrir toda la zona de trabajo. Su diseño depende de tres factores:

- El trabajo que se quiere realizar.
- El terreno donde deba establecerse.
- El coste del proyecto.

El diseño puede hacerse estimando la geometría sobre la cartografía existente o recurriendo a estudios de diseño óptimo.

La búsqueda del diseño óptimo de redes comienza con Helmert (1868) definiendo unas reglas para la localización óptima de puntos de la red en función del tipo de medidas y del número de observaciones. Sus técnicas acerca del ajuste máxima precisión, minimización de costes y del tiempo de observación, son aceptados en la actualidad en la mayoría de los textos sobre diseños óptimos.

Los conceptos introducidos por Helmert siguen el esquema:

- Diseño de orden cero (Datum)
- Diseño de primer orden (configuración)
- Diseño de segundo orden (Pesos)

Según su metodología de trabajo, con la consideración de la situación sobre el terreno de los puntos, se establece la matriz de diseño A del modelo. Con las características de la instrumentación topográfica con la que se va a trabajar, unida al método de observación que se utilice, se determina la precisión y con ello la matriz de pesos o matriz de covarianzas a priori  $\mathbf{S}_0^2$  Q.

La matriz de diseño se conoce si se saben las coordenadas aproximadas de los vértices elegidos. Por otro lado al fijar la instrumentación y el método de observación se determina P. De esta manera se puede obtener la precisión del trabajo sin haberlo realizado ya que la matriz normal N será conocida y con ello:

$$C_{x^*x^*} = \mathbf{S}_0^2 (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$$

Según se considere la matriz  $C_{x^*x^*}$  fija o no, se tienen los diferentes problemas de diseño, que dependerán de que parámetros se consideran fijos o libres.

De esta forma:

- Se puede hablar de diseño de orden cero al que fija A y P tomando un sistema de referencia y deja libres x y  $C_{x^*x^*}$  que dependerán de dicho sistema.
- Se puede hablar de diseño de primer orden o problema de configuración, al que fija la matriz de pesos y la de covarianzas  $C_{x^*x^*}$  dejando libre la de configuración A. Es decir, deja libre y desea determinar la situación de los vértices para garantizar una precisión como la de  $C_{x^*x^*}$ .
- Se llama diseño de segundo orden al que fija las matrices A y  $C_{x^*x^*}$  y deja libre la pesos P. Así se trata de establecer los métodos de observación necesarios y la instrumentación adecuada para obtener una precisión determinada.
- Se hablará de diseño de tercer orden al que fija  $C_{x^*x^*}$  y deja parcialmente libres A y P. Pretende mejorar la información de que se dispone a partir de otros datos como pueden ser un mayor número de observaciones, etc.

Estas posibilidades de diseño son importantes debido a que permiten un estudio previo de las redes antes de ir al campo a establecerlas. Son métodos llamados de simulación.

Su esquema puede resumirse en:

- Elección de los vértices de la red.
- Estudio de las observaciones que se pueden realizar.
- Estudio de los instrumentos disponibles y métodos de observación para poder fijar una estimación a priori de la precisión.
- Compensación y estudio e los resultados.
- Calculo de las influencias de las observaciones van a realizarse.
- Búsqueda de la solución optima en el sentido necesario: bien coste, precisión, fiabilidad, etc. Lo cual puede realizar por medio de:
  - Elección del instrumental
  - Diseño de tercer orden.
  - Elección de los métodos de observación
  - Eliminación o anexo de observaciones

Dependiendo de las necesidades de nuestro trabajo recurriremos en mayor o medida a los procedimientos de simulación.

En general, los trabajos topográficos empiezan con la obtención de la cartografía a escala 1:50.000 y 1:25.000 de la zona del trabajo y de los alrededores, para la localización de los vértices de la red. También puede trabajarse con las fotografías

aéreas u otro tipo de documentos. Analizado el objetivo del trabajo topográfico y las necesidades del mismo, se seleccionarán vértices pre-existentes en las proximidades que tengan coordenadas en el sistema de referencia en el que se hayan de entregar los resultados.

Sobre la cartografía existente se localizan estos vértices, se eligen los lugares idóneos para situar la red básica de nueva implantación, y se comprueba que dichos lugares cumplen la condiciones geométricas (triángulos equiláteros y que la geometría de la figura sea idónea). Se intentara que los vértices formen triángulos de la misma longitud y con forma geométrica regular para conseguir a posteriori un buen ajuste de la red.

Es importante que exista intervisibilidad como mínimo a tres vértices de la red desde cada punto para posibles enlaces por topografía clásica. Los puntos de la red se eligen de manera que estén en zonas estables.

Los vértices de una red básica han de cumplir las siguientes características:

- Estabilidad dimensional: que no varien de forma o tamaño.
- Estabilidad material: que sus materiales sean resistentes a los agentes externos.
- Estabilidad espacial: que no varíe su situación o posición absoluta en el espacio.
- Materialización de forma adecuada, fina, precisa e inequívoca.
- Fácilmente estacionable.
- Fácilmente visible desde cualquier otro punto de la zona.
- Con visibilidad sobre la zona del proyecto.
- Fácilmente localizable.
- Fácilmente sustituible, en caso de desaparición.

### **3.2 RECONOCIMIENTO Y SELECCIÓN DEFINITIVA**

La selección definitiva de vértices se realiza en la fase de reconocimiento del terreno, comprobando la viabilidad del diseño establecido en la fase anterior.

### **3.3 SEÑALIZACIÓN**

Se recorre la zona con el anteproyecto verificado, se materializan los vértices y se elabora la reseña de los mismos. La materialización puede realizarse con señales sobre la roca, clavos de acero, hitos hormigonados, hitos feno o mediante barras de acero corrugadas, clavadas en el terreno con maceta, y consolidadas en la base con mortero de cemento u hormigón



*Materialización del vértice.*

Las siguientes imágenes nos muestran el proceso de materialización de vértices de una red básica, para un trabajo de topografía, así como un ejemplo de la reseña final:



Se mezcla el cemento con el agua



Se le añade arena para obtener el mortero



Se le añaden áridos (hormigón)



Se elige el punto del terreno



Se estabiliza la señal



Se procede a verter el hormigón



Materialización final del vértice



### EJEMPLO DE RESEÑA DE VÉRTICES DE UNA RED TOPOGRÁFICA

**Nombre:**

**Coordenadas UTM ED-50**

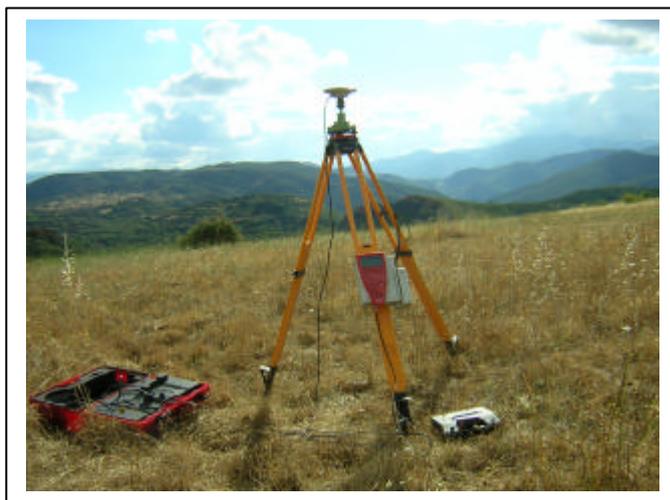
**X=**

**Y=**

**h=**

**Huso:**

Altura referida al nivel medio del mar en calma en Alicante.



Croquis de situación

**Situación General:**

**Acceso:**

## 4. OBSERVACIÓN DE LA RED BÁSICA

Una vez concluida la materialización de los puntos que componen la red, comienzan los trabajos de observación. Como metodologías generales existen dos opciones:

- Equipos de topografía clásica (estaciones totales y teodolitos)
- Equipos GPS

A continuación analizamos las posibilidades de aplicación de estos instrumentos de medida.

### 4.1 OBSERVACIÓN POR TOPOGRAFÍA CLÁSICA

- 4.1.1 REDES PLANIMÉTRICAS
- 4.1.2 REDES ALTIMÉTRICAS
- 4.1.3 REDES TRIDIMENSIONALES

En los métodos clásicos de observación de redes, se diferencia la observación de la red planimétrica y la observación de la red altimétrica. En planimetría se recurre a los métodos de triangulación y trilateración, mientras que en altimetría se puede optar por los métodos de nivelación geométrica o trigonométrica con las variantes de precisión de cada uno de ellos.

En determinados trabajos se calculan redes tridimensionales, sobre todo en levantamientos fotogramétricos de objeto cercano o con equipos láser escaner.

#### 4.1.1 RED PLANIMÉTRICA

La observación de una red planimétrica puede realizarse por triangulación, trilateración o por ambos métodos. Los datos básicos necesarios en una triangulación son:

- La determinación de las coordenadas del punto fundamental.
- La orientación de uno de los ejes.

Se han de realizar los trabajos topográficos necesarios para transmitir orientación del sistema de referencia a la red, dotando de orientación a un lado de la misma.

- La medida de la base:

Proporciona la escala de la triangulación. El lado se llama base de la triangulación. Puede obtenerse mediante medición directa o puede calcularse indirectamente su longitud, por reducción de la de un lado geodésico o por ampliación de otra base más pequeña.

La base debe ocupar un lugar lo más centrado posible respecto de la triangulación. Es evidente que así serán necesarios menos encadenamientos de triángulos para enlazar desde ella los límites de la zona.

En cuanto a la precisión de la medida de la base será aquella que requiera la escala del plano que se pretende obtener y la mayor o menor superficie a representar.

La medida de la base se suele llevar a cabo con distanciómetros electrónicos. Anteriormente se realizaba mediante una estadía invar, fraccionando la distancia en tramos no mayores a 50 metros para conseguir precisiones del orden de 1/50.000.

En una red topográfica, se suponen los triángulos planos. El mejor triángulo es el equilátero, y en lo que respecta a la longitud de los lados, se trata de reducir el número de triángulos, lo que implica aumentar la longitud (siempre teniendo en cuenta la precisión de los equipos de medida).

El método de observación angular en una triangulación es el de vueltas de horizonte. La observación constará de dos vueltas de horizonte con reiteración de 200<sup>g</sup> entre ellas. Cada vuelta se realizará primero en CD y luego en CI, tanto acimutal como cenitalmente.

Cuando el trabajo lo precise puede aplicarse el método de pares sobre una referencia para aumentar o asegurar la precisión.

Para dar como válidas las observaciones en campo se analizan las discrepancias entre las lecturas. Estas deberán ser menores que la tolerancia calculada para el tipo de aparato utilizado:

$$T = e_a \sqrt{2}$$

$$e_a = \sqrt{e_l^2 + e_p^2 + e_d^2 + e_v^2}$$

En la actualidad en la observación de la red planimétrica con las estaciones totales, se complementa la medida de la base con observaciones adicionales de distancia. Éstas se obtienen en la observación de la vuelta de horizonte. En la medida de distancias se aplica la corrección meteorológica, introduciendo los parámetros de presión y temperatura en el equipo en el momento de realizar la observación.

El método de trilateración consiste en realizar la medición de distancias entre todos los lados de la red básica, con distanciómetro. Las distancias que se obtienen en campo hay que reducirlas, por ello deberán medirse también los correspondientes ángulos de inclinación, es decir se deben tomar las lecturas cenitales.

A partir de las distancias pueden obtenerse por cálculo los ángulos en los vértices. Si se designan por a, b, c los lados del triángulo ABC, el valor del ángulo en A se puede deducir mediante el teorema del coseno.

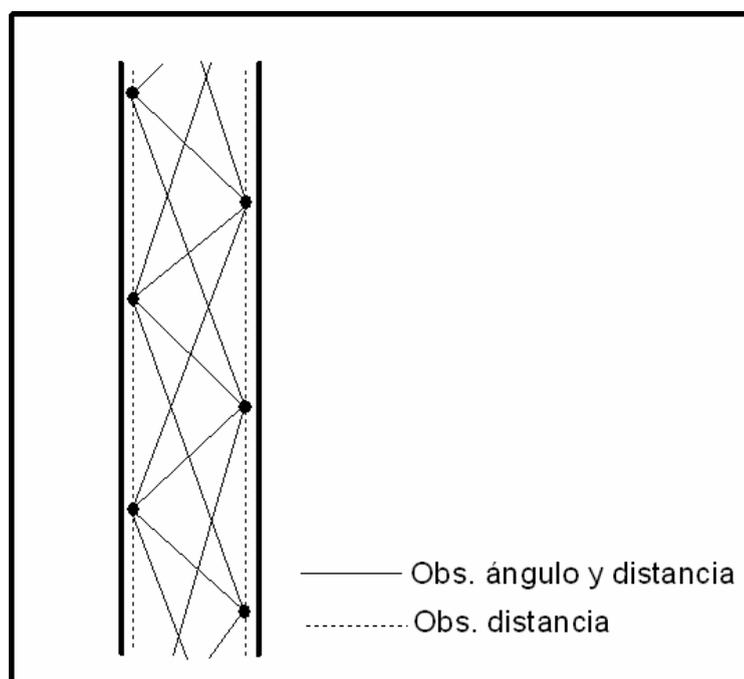
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

o también:

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

En la actualidad se trabaja con observaciones angulares y de distancias, es decir con el método de triangulación y trilateración conjunto. Las observaciones permiten establecer ecuaciones donde las incógnitas son las coordenadas de los puntos. La redundancia se define como los datos adicionales a los que permiten resolver geoméricamente el problema. Es importante contar con más información de la necesaria para el cálculo de una red topográfica, para lo que se deben tomar todas las medidas adicionales que se consideren oportunas.

Cuando nos encontremos con estructuras lineales recurriremos al uso de poligonación en red, con observaciones como el que aparece en la siguiente figura.



#### 4.1.2 RED ALTIMÉTRICA

##### → MÉTODOS DE OBSERVACIÓN

- A. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA SIMPLE.
- B. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA POR VISUALES RECÍPROCAS Y SIMULTANEAS.
- C. NIVELACIÓN GEOMÉTRICA
- D. NIVELACION GEOMETRICA DE PRECISION.
- E. EQUIPOS GPS

##### → CONCLUSIONES

Para determinar la altitud de los vértices o clavos en una red altimétrica a partir de un origen de altitudes, podemos utilizar diferentes métodos. A continuación se incluye el estudio comparado de la precisión relativa que se obtiene con ellos para un mismo rango de distancias. En este estudio se han seleccionado las nivelaciones realizadas entre puntos A y B separados 500, 1000, 1.500 y 2.000 metros.

Sin adentrarnos en el estudio teórico, se exponen los resultados de las precisiones que pueden obtenerse con cada uno de los métodos, y un análisis comparado de estos valores.

→ **MÉTODOS DE OBSERVACIÓN**

**A. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA SIMPLE**

**Obtención del desnivel**

La expresión que permite obtener el desnivel es la siguiente:

$$\Delta H_{A^B} = t_A^B + i_A - m_B + (0,50 - K) \frac{D_A^{B^2}}{R}$$

**Precisión**

Condiciones de trabajo:

- Estación total de las siguientes características (como ejemplo numérico de cálculo):
  - \* Distanciómetro de infrarrojos:
    - . Alcance: 2.000 m
    - . Precisión: 3 mm ± 3 ppm
  - \* Teodolito:
    - . Sensibilidad: 30<sup>cc</sup>
    - . Aumentos: 30x
    - . Apreciación según la casa comercial: 2<sup>cc</sup>
- Prisma en jalón con nivel de mano.

**Incertidumbre en  $i$ :**

$$e_i \leq 5 \text{ mm}$$

**Incertidumbre en  $t$ :**

$V_A^B/D_g$ (m)	500	1.000	1.500	2.000
100 <sup>g</sup>	8	16	24	31
90 <sup>g</sup>	9	16	24	31
85 <sup>g</sup>	9	16	24	31

**Incertidumbre en  $m$ :**

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
-------	-----	-------	-------	-------

$e_m$	20	30	35	40
-------	----	----	----	----

### Conclusión

Si realizamos la componente cuadrática de los tres errores obtendremos la tabla siguiente.

$V_A^B/D_g$ (m)	500	1.000	1.500	2.000
100 <sup>g</sup>	22	34	43	51
90 <sup>g</sup>	22	34	43	51
85 <sup>g</sup>	22	34	43	51

Teniendo en cuenta la influencia nula de la variación de distancia cenital, podemos concluir:

$D_g$ (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\gamma H}$ (mm)	± 22	± 34	± 43	± 51
ppm	44	34	29	25

## B. NIVELACIÓN TRIGONOMÉTRICA POR VISUALES RECÍPROCAS Y SIMULTÁNEAS

### Cálculo del desnivel

La expresión que nos permite obtener el desnivel entre dos puntos A y B al aplicar el método de visuales recíprocas y simultáneas, es decir sin necesidad de tener en cuenta los efectos de la esfericidad y anulando la influencia por la refracción, es la siguiente:

$$\Delta H_A^B = D \operatorname{sen} \frac{1}{2} (V_B^A - V_A^B)$$

donde las distancias cenitales  $V_A^B$  y  $V_B^A$ , están reducidas al terreno.

### Precisión

$$e_{\Delta H} = D_g \frac{1}{2} 0,000018692 \cos \frac{1}{2} (V_B^A - V_A^B) + D_g \frac{1}{100000} \operatorname{sen} \frac{1}{2} (V_B^A - V_A^B)$$

Para un equipo de precisión angular de 8,4<sup>cc</sup>, y una precisión en distancias de 1/100.000 con un alcance de 2 a 3 km. Aplicando esta fórmula a distintos casos, Pérez Martín obtiene el siguiente cuadro<sup>5</sup>:

5. PÉREZ MARTÍN, Carlos (1981): "Cálculo de Desniveles por Estaciones Recíprocas y Simultáneas con Teodolito y Distanciómetro. Precisión". *Técnica Topográfica*. Vol. IX. Nº 43. Septiembre - Octubre. págs. 3-7.

$V_A^B/D_g$ (m.)	500	1.000	1.500	2.000
100 <sup>g</sup>	5	9	14	19
90 <sup>g</sup>	5	11	16	22
80 <sup>g</sup>	6	12	18	24
70 <sup>g</sup>	6	13	19	26
60 <sup>g</sup>	7	13	20	27
50 <sup>g</sup>	7	14	21	27

A 500 metros la variación del error en distancias cenitales comprendidas entre 100<sup>g</sup> y 90<sup>g</sup>, son despreciables; a 1.000 metros estas cifras de V introducen diferencias de precisión de 2 mm en el desnivel (un desnivel del orden de 158 metros); a 1.500 metros estos dos valores extremos de 100<sup>g</sup> y 90<sup>g</sup>, suponen 2 mm de diferencia de precisión (en desniveles del orden de 237 m); y a 2.000 metros diferencias de precisión de 3 mm, con desniveles de 311 metros. Como estas diferencias de desnivel rara vez se encuentran en distancias tan cortas (500 a 2.000 metros), podemos prescindir de la variación de precisión con la distancia cenital en nuestro estudio.

Teniendo en cuenta esta simplificación y lo que ella supone, podemos considerar como parámetros de comparación los siguientes:

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\gamma H}$ (mm)	± 5	± 9	± 14	± 19
ppm	10	9	9	9

### C. NIVELACIÓN GEOMÉTRICA

#### Cálculo del desnivel

$$\Delta H_A^B = \sum L_E - \sum L_F$$

#### Precisión

$$e_{\Delta H} = e_k \sqrt{k}$$

Con los niveles automáticos actuales el error kilométrico  $e_k$ , toma valores de ± 7 mm. La precisión resultante con este método será:

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\gamma H}$ (mm)	± 5	± 7	± 9	± 10
ppm	10	7	6	5

#### D. NIVELACION GEOMETRICA DE PRECISION

El instrumental topográfico en este tipo de trabajos son niveles digitales. Entre los de tercera generación fabricados por ZEISS, el DiNi 12, es el más preciso de la gama. Sus características técnicas son las siguientes:

- Desviación estándar en 1 Km. de nivelación doble: 0.3 mm (con mira invar)
- Telescopio: Imagen directa
- Aumentos del antejo: 32X
- Rango de medición: 1.5 a 100 m
- Rango de compensación automática:  $\pm 15''$
- Precisión del compensador:  $\pm 0.2''$
- Memoria: Tarjetas PCMCIA
- Pantalla: 4 líneas
- Cifras decimales en lectura de mira invar.: 0.1 / 0.01 mm
- Teclado: 22 teclas
- Peso: 3.5 kg



Estos niveles miden distancias y desniveles en base a un tratamiento electrónico de la imagen con grabación automática de los datos. Con solo apretar un botón miden y registran la altura en la mira y la distancia y calculan la altitud del punto sin errores de lecturas ni de anotaciones, eliminando por completo los cálculos a mano.

El software que lleva incorporado ofrece un amplio menú con diferentes posibilidades como son el establecimiento de los parámetros del instrumento, introducción de coeficientes y constantes, establecimiento de tolerancias con aviso, elección de formatos en la grabación de datos y la visualización continua en pantalla de la información además de un sistema de guiado.

Ofrecen también la posibilidad, mediante diferentes métodos, el comprobar y ajustar el equipo de forma rápida y guiada.

Como ventajas de la Nivelación digital destacan los tiempos breves de medición, registro y el tratamiento automático de los datos, indicaciones digitales con un display claro, posibilidad de trabajos con poca luminosidad por contar con iluminación propia, también elimina los errores propios de operador al efectuar la puntería en las miras y las lecturas en estas. El registro a través del módulo REC excluye todo tipo de error de transferencia, y el uso de tarjetas PCMCIA acelera los trabajos de volcado al PC incorporando el hardware y el software necesario.

La información referente a los clavos de nivelación geométrica de la Red Nacional de Alta Precisión, son proporcionados por el I.G.N. A continuación se muestra una de ellas.



Ministerio de Fomento  
 Subsecretaría  
 Dirección General del Instituto Geográfico Nacional  
 Subdirección General de Geodesia y Geofísica

General Ibañez de Ibero, 3  
 28003 MADRID

### Reseña de señal de Nivelacion

#### Datos de la

Numero:                      Nombre:                                      Anterior:                                      Posterior:

Línea o Ramal:                      Nombre: **Ministerio de Fomento**

Señal: Clavo    Agrupada con:

En posición: Horizontal

#### Datos

Longitud WGS84: 3°41'29" W                                      Altura Ortométrica: 677.92634 m

Latitud WGS84: 40°26'43" N                                      Geopotencial:

Hoja MTN50: 559/4-3/3                                      Gravedad en superficie:

#### Reseña

Clavo incrustado en la fachada principal del Ministerio de Fomento, situado en el Paseo de La Castellana s/n



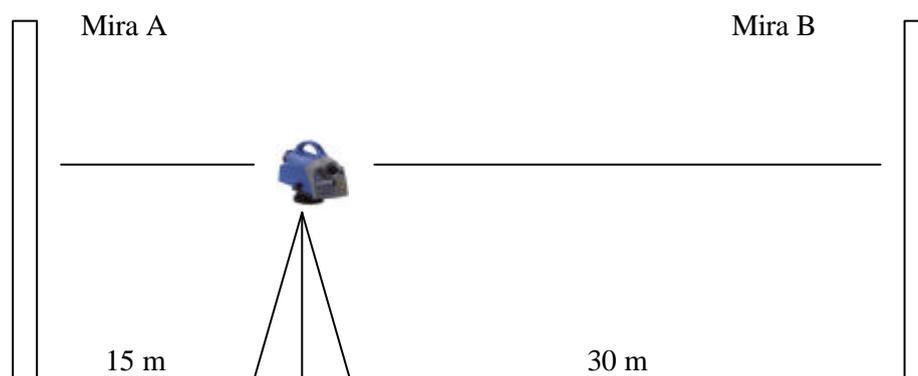
### Verificación del equipo

La verificación del equipo instrumental comprende trípode, nivel digital y miras.

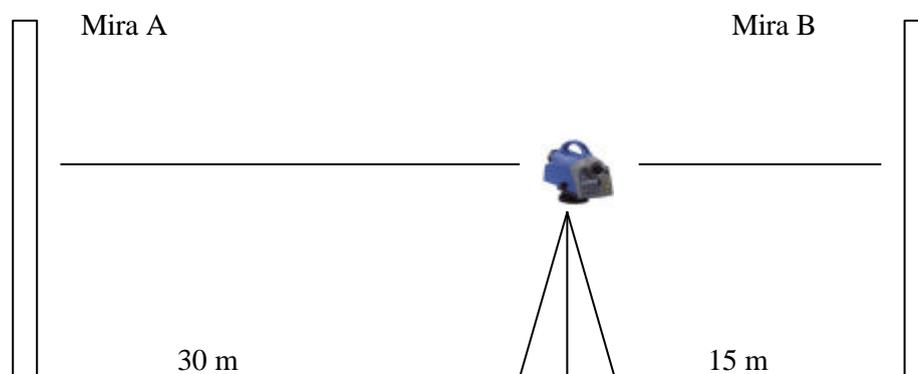
En el trípode se verifica el ajuste mecánico. Se revisa el ajuste del eje de las bisagras, en la unión de las patas de madera con la parte metálica de la bisagra y en la de la unión de la madera con la punta metálica que se apoya en el suelo. Una sencilla comprobación para verificar el ajuste de la articulación de una pata consiste en colocar el trípode boca abajo y comprobar que el movimiento de caída de sus patas sea lento y uniforme.

En el nivel el ajuste de la visual o línea de puntería debe efectuarse de acuerdo con el procedimiento descrito en el manual o mediante un programa o aplicación informática para dicho ajuste, de modo que se garantice la adecuada corrección de la visual o línea de puntería electrónica. El ajuste se realiza antes de la realización del trabajo, del siguiente modo:

- Se coloca el aparato entre las dos miras, a 15 m de la mira que consideraremos mira A y a 30 m de la otra, denominada mira B, tal y como se muestra en la figura. Realizamos las lecturas a la mira A y a la mira B.



- Se sitúa el aparato a 15 m de la mira que consideraremos mira B y a 30 m de la otra, denominada mira A, tal y como se muestra en la figura. Realizamos las lecturas a la mira A y a la mira B.



En tanto que una inclinación constante de la visual o línea de puntería se corrige estacionando en posiciones simétricas o equilibradas en distancia, la desviación funcional del foco de la visual, o línea de puntería, es una función hiperbólica no lineal y debe tenerse en cuenta en la nivelación de precisión con visuales a distancias variables. Además, la mayoría de los procedimientos de nivelación digital disponen de un código de cambio de campo próximo a distante, en el rango de distancias de 5 a 15 m, y por tanto es de esperar que se presenten efectos sistemáticos cuando haya variaciones acusadas en las distancias a las miras.

Para comprobar el compensador durante el procedimiento de la nivelación, un leve golpe permite saber que el compensador no está atascado. Hay algo especial con respecto a la función del compensador; dado que todos los compensadores son de tipo pendular, el compensador se desvía sistemáticamente debido a la fuerza centrífuga que se produce durante el cambio de visual adelante a visual hacia atrás.

Además del ajuste del Nivel por parte del usuario, con anterioridad a la realización del trabajo, se realizan calibraciones periódicas del mismo.

La finalidad de calibrar las miras de nivelación es determinar la escala y la corrección del punto cero. Todos los comparadores de miras de nivelación invar se basan en el mismo principio: controlar un desplazamiento horizontal o vertical de la mira de nivelación por interferometría y un dispositivo óptico-electrónico (microscopio de Schlemmer y sensores de posición CCD y de semiconductores) para determinar la posición de los rebordes y el centro de las barras de código respectivamente.

En la miras debe hacerse también la corrección de los niveles esféricos y verificarse la ortogonalidad de talón.

La corrección del nivel esférico de la mira se realiza calando el nivel en cualquier posición, girando la mira  $180^\circ$  y corrigiendo con los puntales la mitad del desplazamiento que pueda observarse en la burbuja, y la otra mitad, con los tornillos de corrección de la parte inferior del nivel esférico, mediante un punzón adecuado.

Para el caso de la ortogonalidad del talón, si el rectángulo de apoyo que presenta el talón de la mira no es ortogonal a la cinta, o lo que es equivalente, si no es horizontal cuando la mira es vertical, las lecturas dependerán del punto en el que se apoye. Para esta comprobación se estaciona la mira sucesivamente sobre cada una de las cuatro esquinas del talón. Las lecturas deben ser idénticas, dentro de tolerancia. En caso contrario, si las diferencias son inadmisibles, la mira ha de ser reparada o usarse con un centrador para que siempre se estacione sobre el mismo punto.

En el caso de las miras también se puede realizar una calibración periódica en el Instituto Nacional de Metrología.

### **Metodología**

El método utilizado en la nivelación de precisión, se basa en la nivelación geométrica o por alturas. Se estaciona el nivel de precisión en un punto medio, M, de otros dos puntos A y B cuyo desnivel queremos obtener, situando en estos dos miras específicas para nivelación, en este caso de invar y con código de barras, que junto con el nivel digital permiten obtener precisiones muy elevadas. Las

diferencias de lecturas en las miras obtenidas con el nivel, nos dan directamente el desnivel buscado.

La necesidad de colocar el nivel en el punto medio del tramo cuyo desnivel queremos determinar se debe a que, de esta forma, se eliminan una serie de errores que de no hacerlo así, impedirían alcanzar la precisión deseada y que son los siguientes:

- Error de curvatura o esfericidad: en la nivelación de un tramo de 100 m de longitud, el error cometido sería aproximadamente de 1 mm, este error lo eliminamos empleando el método del punto medio.
- Error de refracción: al ser su influencia igual en las dos niveladas que realicemos, al calcular su diferencia el error se eliminará.
- Errores propios del nivel: si la visual es horizontal, sabemos que el desnivel entre dos puntos viene dado por la diferencia de lecturas de mira, pero aun estando el instrumento descorregido, como el ángulo de pendiente del eje de colimación es el mismo, los errores cometidos en ambas miras serán idénticos y, por tanto, la diferencia de lecturas aun siendo erróneas, nos darán el desnivel verdadero.

El itinerario altimétrico se recorre 2 veces (ida y vuelta), permitiéndonos obtener un error de cierre, ya que la suma de los desniveles de ida y vuelta de todos los tramos, con su signo correspondiente, tendría que resultar igual a cero.

Si el error obtenido entra dentro de la tolerancia establecida se puede compensar repartiéndolo proporcionalmente a las diferencias entre el desnivel de ida y vuelta de cada tramo. Después, se promedia el desnivel de ida y vuelta compensados, de cada tramo, obteniéndose así el desnivel definitivo.

La longitud de nivelada (distancia aparato-mira) no debe sobrepasar en ningún caso los 30 m por la pérdida de precisión que ello supone.

### Cálculo del desnivel

$$\Delta H_A^B = \sum L_E - \sum L_F$$

### Precisión

$$e_{\Delta H} = e_k \sqrt{k}$$

La nivelación de precisión permite trabajar con errores que oscilan entre

$$0,5 \text{ mm} \sqrt{K} \leq e_{\Delta H} \leq 1 \text{ mm} \sqrt{K}$$

Si consideramos el valor de la constante  $e_k$ , igual a 1 mm, resulta:

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\Delta H}$ (mm)	± 0,7	± 1	± 1,2	± 1,4
ppm	1,5	1	0,8	0,7

## E. EQUIPOS GPS

### Cálculo del desnivel

En la metodología GPS se sitúa un punto determinando el vector que lo une al punto de referencia, El cálculo del desnivel va asociado al cálculo planimétrico, y ambos se realizan aplicando algoritmos de cálculo a los datos recibidos por los sensores durante la observación.

### Precisión

La precisión depende de:

- Equipo de trabajo:
  - Un equipo (posicionamiento absoluto) o dos (posicionamiento diferencial),
  - Equipo de una o de dos frecuencias.
- Tiempo de observación.
- Distancia entre puntos.
- Algoritmo de cálculo. etc.

Por todo ello no se pueden acotar errores en GPS, de modo análogo al realizado con los anteriores métodos. Hay estudios de precisión referidos a unas determinadas condiciones de proyectos, que no resultan generalizables.

Para hacer posible este trabajo comparado y un análisis relativo al lugar que esta ocupando en Topografía este método, se considera que:

- (a) en Topografía se aplica el método de posicionamiento global diferencial;
- (b) a una determinación de nivelación simple clásica correspondería en la metodología GPS la medida del desnivel realizada con un equipo compuesto por un receptor fijo situado en el punto A y uno móvil situado en B.
- (c) Las casas comerciales aseguran, para estas condiciones y con líneas-base menores de 5 km, unas precisiones de 1 cm en post-proceso, con 5 minutos de observación, para la resolución de ambigüedades. Esta duración de la observación se está viendo reducida y algunos fabricantes consideran que pueden conseguirse precisiones superiores.

La tabla a la que corresponderían estos valores sería la siguiente:

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\pm H}$ (mm)	± 10	± 10	± 10	± 10
ppm	20	10	7	5

No olvidemos que estas precisiones se superan fácilmente, ampliando los tiempos de observación, el número de receptores, etc.; y que incluso se empiezan a considerar parámetros de precisión milimétricos en las condiciones estándar reseñadas, pero sin olvidar que los desniveles obtenidos son elipsoidales.

→ **CONCLUSIONES DE LA COMPARACIÓN**

A. NIVELACION TRIGONOMETRICA NORMAL

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\gamma H}$ (mm)	± 22	± 34	± 43	± 51
ppm	44	34	29	25

B. NIVELACION TRIGONOMETRICA POR VISUALES RECIPROCAS Y SIMULTANEAS

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\gamma H}$ (mm)	± 5	± 9	± 14	± 19
ppm	10	9	9	9

C. NIVELACION GEOMETRICA NORMAL

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\gamma H}$ (mm)	± 5	± 7	± 9	± 10
ppm	10	7	6	5

D. NIVELACION GEOMETRICA DE PRECISION

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\gamma H}$ (mm)	± 0,7	± 1	± 1,2	± 1,4
ppm	1,5	1	0,8	0,7

E. NIVELACION CON EQUIPOS GPS (desniveles elipsoidales)

D (m)	500	1.000	1.500	2.000
$e_{\gamma H}$ (mm)	± 10	± 10	± 10	± 10
ppm	20	10	7	5

Del análisis de los mismos se destaca la presencia de dos métodos de nivelación que generalmente se consideraban propios de la Geodesia, y que pueden ser de gran aplicación en Topografía: la nivelación trigonométrica por visuales recíprocas y simultáneas, y la metodología GPS.

El primero de ellos, con una gran sencillez (sólo con dos puntos de estación) y en períodos cortos de trabajo, permite obtener precisiones que se acercan teóricamente a la nivelación geométrica y que experimentalmente la superan. La valoración de la relación error /coste nos ayudara a potenciar su uso.

La metodología GPS en las determinaciones topográficas, ocupa un lugar importante en la determinación de redes básicas, en la obtención de puntos de apoyo, y en todo tipo de levantamientos y trabajos batimétricos. Se trata de un método sencillo y rápido, con un coste rentable en Topografía, en algunos trabajos de forma exclusiva, y en otros combinandolo con el uso del instrumental tradicional.

#### 4.1.3 REDES TRIDIMENSIONALES

Como se ha definido anteriormente, una red tridimensional esta formada por un conjunto de puntos con coordenadas  $(\varphi, \lambda, h)$  ó  $(X, Y, Z)$  con máxima precisión en el trabajo, de forma que la red básica altimétrica y planimétrica coinciden.

Mediante los equipos topográficos tradicionales (estaciones totales y eodolitos) se pueden establecer redes en las que los puntos tengan coordenadas  $X, Y, Z$  con precisión análoga en las tres dimensiones. Para ello es necesario eliminar como observable la altura de aparato y la altura de mira. Las observaciones se suelen realizar con centrado forzado.

El análisis de esta metodología se realizará con un estudio de casos prácticos, proporcionados por el profesor.

#### 4.2 OBSERVACIÓN DE LA RED BÁSICA POR MÉTODOS GPS

Cuando una red va a observarse por medio de técnicas GPS, en el diseño se consideran menos restricciones de visibilidad, no obstante no debe olvidarse el uso d estos vértices en trabajos posteriores por métodos de topografía clásica.

La metodología GPS (Global Positioning System) proporciona coordenadas cartesianas tridimensionales  $(X, Y, Z)_{WGS84}$  o coordenadas geodésicas  $(\varphi, \lambda, h)_{WGS84}$  en un sistema geocéntrico que utiliza el elipsoide WGS84.

Para transformar los valores de las observaciones al sistema de referencia local es necesario conocer los parámetros de transformación entre ambos sistemas. Dichos parámetros pueden obtenerse mediante una transformación Helmert tridimensional (transformación clásica en tres dimensiones) con siete parámetros incógnitas:

- Tres rotaciones.
- Tres traslaciones.
- Un cambio de escala.

La determinación de estos parámetros se podrá realizar si se han incluido en la observación de cuatro puntos del marco de referencia ROI (con coordenadas en el sistema

de referencia oficial ED-50 y en proyección UTM) son necesarios al menos tres vértices siendo conveniente contar con un cuarto punto para tener comprobación de las observaciones.

En la actualidad la determinación de estos parámetros puede realizarse también trabajando con vértices REGENTE.

Además de los vértices REGENTE existen repartidas por el territorio nacional estaciones permanentes de observación GPS que forman la denominada red IBEREF-GPS, en el sistema ETRS89. También estarán a nuestra disposición los datos de estas estaciones.



Ejemplo de estación permanente GPS

Una vez determinados los parámetros de transformación entre los dos sistemas se pueden transformar todos los observables GPS al sistema geodésico local ED50  $(X, Y)_{ED50}$

La organización de la observación dependerá del objetivo del trabajo, precisión y fiabilidad requerida, número y tipos de receptores y de las condiciones logísticas. El material para observar una red con métodos GPS suele constar de 2 o 3 receptores con el equipo complementario necesario.



Los receptores utilizados normalmente son bifrecuencia, registran el código C/A y P de L1 y fase de L1 y L2. Al tener mayor número de observables requieren un menor tiempo de observación, obteniéndose un mayor rendimiento que con receptores monofrecuencia.



Las precisiones que se obtienen con los equipos GPS en postproceso, puede ser del siguiente orden:

- Estático Relativo:  $5\text{mm} \pm 1\text{ppm}$
- Estático Relativo Rápido:  $5\text{-}10\text{mm} \pm 1\text{ppm}$
- RTK:  $2\text{ cm} \pm 1\text{ppm}$

Se deben planificar las puesta o sesiones, atendiendo: número de satélites, geometría de la constelación (DOP), actividad ionosférica (depende de la latitud y hora del día), longitud de la línea base a medir, número y calidad de las observaciones, obstrucciones físicas o electromagnéticas en los puntos e intervalo de registro; considerando necesario las mismas condiciones en ambos extremos de la línea base (datos comunes y simultáneos).

En función de la longitud de la línea base y el tipo de instrumental se consideran los siguientes valores de tiempos de observación:

	Monofrecuencia Estático	Bifrecuencia Estático	Bifrecuencia Estático Rápido
< 1 km	20 – 40 min	20 – 40 min	5 – 10 min
1 - 10 km	30 – 60 min	30 – 60 min	5 – 10 min
10 – 30 km	45 – 120 min	45 – 90 min	
> 30 km		> 60 min	

El método **estático relativo** por diferencia de fase, consiste en hacer observaciones simultáneas con al menos dos receptores, obteniendo líneas base entre ambos. Para una determinada línea base AB, se obtienen por pseudodistancias las coordenadas absolutas del punto A (o bien se conocen previamente) y por medida de fase los incrementos de coordenadas  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$  y  $\Delta Z$  entre A y B.

En este método general se diferencian a su vez dos modelos:

- El método estático relativo **estándar**:

Se trabaja como mínimo con dos receptores que se estacionan y observan durante un periodo de tiempo de una a dos horas, según la redundancia y la precisión necesarias, la distancia a observar y la bondad de la configuración de la constelación de satélites.

Se utiliza generalmente para medir líneas mayores de 20 kilómetros, como es el caso al pretender enlazar con estaciones REGENTE cuyas distancias oscilarán entre 20 y 30 kilómetros. La precisión en la medida de la distancia se estima en  $5 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$ .

- El método estático relativo **rápido**:

Se utiliza para la observación de distancias menores a 20 kilómetros y la precisión en la medida de la distancia oscila de  $5 \text{ a } 10 \text{ mm} \pm 1 \text{ ppm}$ . Éste método utiliza el algoritmo FARA para la resolución estadística de la ambigüedades, permitiendo la disminución de los tiempos de observación frente al método estático estándar, estimándose el tiempo de observación necesario de 5 a 20 minutos. Es sólo utilizable con receptores bifrecuencia con medida de fase tras la demodulación de la portadora por correlación con ambos códigos (C/A y P).

Para la observación de la red se emplea el método **estático relativo rápido**. El tiempo mínimo de observación, para puestas simultáneas, suele ser de quince minutos entre vértices de la red interior, y de mayor duración en los vértices exteriores, dependiendo de las distancias existentes.

Para la toma de datos se estaciona el aparato fijo en un vértice, que consideramos como estación de referencia. Se configura el aparato para el método de posicionamiento estático relativo estándar.

Los dos equipos móviles se estacionan en dos de los vértices internos configurándolos para que el método de posicionamiento sea estático relativo rápido. Se utiliza un intervalo de grabación de 10-15 minutos en medición simultánea. Cuando la grabación concluye, uno de los aparatos móviles se sitúa en otro vértice con un solape temporal de 10-15 minutos, como mínimo.

Durante toda la observación se tiene en cuenta el GDOP, parámetro adimensional que da una idea de la geometría que forma el receptor y los vectores que determinan los satélites. Como es sabido su valor ideal es uno y en todo momento de la observación hay que controlar que el GDOP esté en un valor admisible ( $<6$ ).

Otros parámetros como la máscara de elevación se establece en  $10^\circ$ - $15^\circ$ , con el objetivo de captar el mayor número de satélites y evitar observaciones erróneas.

## 5. CÁLCULOS Y PRECISIONES

- 5.1 *POR MÉTODOS CLÁSICOS*
- 5.2 *POR MÉTODOS GPS*

### 5.1 POR MÉTODOS CLÁSICOS

Para el cálculo de una red observada por métodos clásicos es necesario comenzar con el cálculo de las coordenadas aproximadas de los vértices de nueva implantación. Con ellas se plantea una ecuación por cada observación, y se obtiene la variación de coordenadas y la precisión final del ajuste mínimo cuadrático.

Tal como se ha indicado al estudiar los métodos de observación, en la fase de cálculo también se diferencia entre la obtención de las coordenadas planimétricas y altimétricas.

#### 5.1.1 REDES PLANIMÉTRICAS

El método de observación para la determinación de las coordenadas X, Y, habrá sido el método de vueltas de horizonte o pares sobre una referencia, dependiendo de la precisión que debamos obtener o de las condiciones de observación. La resolución numérica se realiza aplicando la teoría de ajustes mínimo cuadráticos.

Previa a la compensación propiamente dicha, e independientemente de errores groseros que hayan podido detectarse, hay que efectuar correcciones a las magnitudes observadas.

Corrección a ángulos observados:

- Fundir observaciones de distintas vueltas de horizonte en cada estación.
- Reducción de estaciones excéntricas.

Corrección a distancias observadas:

- Corrección atmosférica.
- Reducción al horizonte.
- Reducción a la proyección.

Obtenidas y aplicadas las correcciones se procede a la compensación de la red. Para ello se necesitan observaciones redundantes en relación con el número de incógnitas lo que nos permitirá obtener los valores más probables de las magnitudes. Se aplica la teoría estadística de MMCC para obtener para cada incógnita:

- valores únicos,
- los valores más probables,
- e indicar su precisión.

El método exige conocer unas coordenadas iniciales de todos los puntos, tanto estacionados como observados, independientemente de que la red haya sido observada por triangulación, trilateración o poligonación.

El modelo de relación de observación por cada **dirección acimutal** obtenida en campo es:

$$\frac{r^{cc}}{D^2} \cdot [(y_2 - y_1) \cdot dx_2 - (y_2 - y_1) dx_1 - (x_2 - x_1) \cdot dy_2 + (x_2 - x_1) \cdot dy_1] + q_{Cal.} - q_{Obs.} - d\Sigma = n_i$$

Y a partir de las lecturas de campo, puede plantearse:

$$\frac{r^{cc}}{D^2} \cdot [(Y_2 - Y_1) dX_2 - (Y_2 - Y_1) dX_1 - (X_2 - X_1) dY_2 + (X_2 - X_1) dY_1] - d\Sigma_1 + [(q_1^2)' - (L_1^2 + \Sigma_1')]^{cc} = v_i$$

Para cada **distancia observada**, el modelo de ecuación será:

$$\frac{1}{D_{CAL}} [- (X_2 - X_1) dX_1 - (Y_2 - Y_1) dY_1 + (X_2 - X_1) dX_2 + (Y_2 - Y_1) dY_2] + D_{CAL} - D_{OBS} = n_i$$

Algunos autores sugieren variaciones en la ecuación de distancia con el fin de tener en cuenta la posible introducción de errores sistemáticos en la medida de las mismas. Por ello incluyen un factor de escala para tratar de eliminar posibles errores debidos a una elección inadecuada del índice de refracción, reducción altimétrica incorrecta, factor de escala de la proyección cartográfica inadecuado o incluso errores sistemáticos en la definición del datum de la red.

Las ecuaciones de observación serán:

$$A X = L$$

Las ecuaciones normales serán:

$$A^T P A X = A^T P L$$

$$A^T P A = N$$

$$A^T P L = t$$

quedando el sistema de ecuaciones normales de la siguiente forma:

$$N X = t$$

La solución al sistema se obtiene calculando:

$$X = N^{-1} t$$

$$X = (A^T P A)^{-1} A^T P L$$

En la matriz P, todos los elementos fuera de la diagonal principal son **0**. Esta situación corresponde a observaciones independientes y no correlacionadas, que es generalmente el caso de la Topografía. Se define de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{bmatrix}_n$$

Para construir la matriz de pesos, los criterios pueden ser:

- Considerar todas las observaciones de la misma precisión, es decir considerar la matriz de pesos identidad.
- Considerar que el peso de la observación es inversamente proporcional a la distancia del tramo:

$$p_i = \frac{1}{D_i}$$

- Considerar el peso de la observación inversamente proporcional a la varianza (o incertidumbre al cuadrado) de la observación correspondiente, y suponer una varianza de referencia a priori  $s_0$  igual a 1:

$$p_i = \frac{1}{s_i^2}$$

Cuando se han linealizado las ecuaciones de observación el proceso de ajuste es iterativo. Las correcciones que obtengamos en el primer ajuste se aplican a las coordenadas aproximadas y esas nuevas coordenadas de P actuarán como aproximadas en el siguiente cálculo. Con estas nuevas coordenadas se vuelven a plantear las relaciones de observación y se resuelve el sistema. La terminología en MMCC en procesos iterativos es:

- Parámetros aproximados que se introducen en el primer cálculo:

$$X_A^0, Y_A^0, H_A^0$$

- Parámetros aproximados que se introducen en el segundo cálculo, en la primera iteración:

$$X_A^1, Y_A^1, H_A^1$$

- Parámetros aproximados que se introducen en el tercer cálculo, en la segunda iteración:

$$X_A^2, Y_A^2, H_A^2$$

- Y así sucesivamente.

Cerrado el proceso iterativo, obtendremos como resultado la matriz X que está formada por los diferenciales de las observaciones, estos diferenciales sumados a nuestras coordenadas aproximadas nos dará las coordenadas planimétricas ajustadas.

Coordenadas aproximadas + variación de coordenadas = Coordenadas ajustadas

Para eliminar visuales con grandes errores se analizan las desorientaciones ajustadas comparándolas con las desorientaciones aproximadas introducidas en el ajuste, y se estudia la matriz de residuos, ya que un residuo muy grande nos indica que la observación que tiene ese residuo puede tener algún problema de observación (puede ser errónea).

### Redes libres

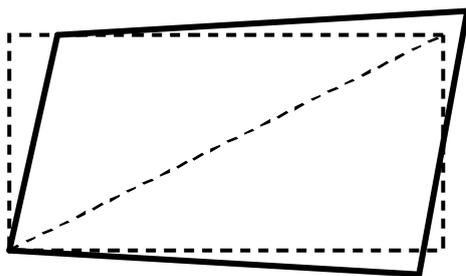
Si bien ya se utiliza este método en redes planimétricas y altimétricas, y es en las redes tridimensionales donde suele aplicarse el método de cálculo de redes libres.

Para fijar un "datum" se necesita definir:

- Posición de un punto que se considerará como origen.
- Escala del modelo (necesitaríamos al menos dos puntos).
- Orientación (necesitaríamos dos puntos).

Por ejemplo, si nos apoyamos en vértices de la red geodésica y consideramos dos puntos como fijos el modelo se podría mover en varias direcciones distintas, obteniéndose, por tanto, un polígono deformado. Si sólo consideramos un punto fijo, la posición absoluta del modelo en el espacio será incierta pero sabremos con seguridad que la posición relativa de los puntos que conforman el polígono tendrá deformaciones mínimas.

Por ejemplo, en un cuadrilátero:



En discontinuo tendremos el cuadrilátero ajustado según un punto fijo y una dirección, mientras que en línea continua tendremos el cuadrilátero según dos puntos fijos. Este cuadrilátero podrá rotar y moverse sobre el punto que consideramos fijo pero el resto de puntos del polígono se moverá solidario con él, por tanto no tendremos deformación en el polígono.

Se definen como redes libres aquellas en las que no se fija ningún parámetro. En estos casos los ajustes dan lugar a matrices singulares y según qué criterio adicional se aplique se obtienen diferentes soluciones.

Las incógnitas adicionales a la variación de coordenadas de los puntos de la red, son :

- Punto origen:  $X_0$   $Y_0$
- O (Orientación de la red)
- L (la escala)

Un método que puede utilizarse para realizar el ajuste de una red libre es el denominado método de las tangentes.

En él se fija el acimut a uno de los vértices (el más alejado para así tener una dirección fija más precisa) y se ajusta dejando fija esa dirección. Como hemos dejado fija una dirección, las ecuaciones del ajuste variarán respecto a las que usamos normalmente:

$$dx_A = dy_A \operatorname{tg} \mathbf{q}_A^P$$

Las ecuaciones de dirección y distancia se verán modificadas con este cambio de variable. La ecuación de dirección general era:

$$\frac{r^{cc}}{D^2} (\Delta Y dx_A - \Delta Y dx_P - \Delta X dy_A + \Delta X dy_P) - d\Sigma + T^o$$

quedará:

$$\frac{r^{cc}}{D^2} (\Delta Y \operatorname{tg} \mathbf{q}_A^P - \Delta X) dy_A - \Delta Y dx_P + \Delta X dy_P - d\Sigma + T^o$$

Y la ecuación de distancia general:

$$\frac{r^{cc}}{D^2} (\Delta X dx_A + \Delta Y dy_A - \Delta X dx_P - \Delta Y dy_P) + T^o$$

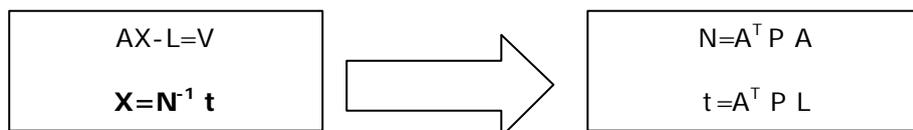
quedará:

$$\frac{r^{cc}}{D^2} (\Delta Y \operatorname{tg} \mathbf{q}_A^P - \Delta X) dy_A + \Delta Y dy_A - \Delta X dx_P - \Delta Y dy_P + T^o$$

De esta manera al calcular la matriz A desaparece la columna  $dx_A$ .

El ajuste se realiza de la forma habitual teniendo en cuenta la condición que hemos impuesto usando pesos en función de  $e_a$  y  $e_b$ , creando la matriz de pesos inversamente proporcional a sus cuadrados.

Según el esquema de ajuste por mínimos cuadrados:



Finalmente obtendremos como resultado los diferenciales de las desorientaciones del polígono y los diferenciales de las coordenadas X e Y de todos los puntos del polígono, excepto el diferencial de la coordenada X del punto sobre el que fijamos la dirección. Este diferencial se debe deducir según la expresión anterior:

$$dx_A = dy_A \operatorname{tg} \mathbf{q}_A^P$$

En este momento ya tenemos las coordenadas de los puntos ajustadas sin más que sumar diferenciales a las correspondientes coordenadas aproximadas.

### Precisión de las Coordenadas Ajustadas

Una vez resuelto el ajuste es necesario comprobar la calidad del mismo. Para ello se analiza la precisión y la fiabilidad.

Por precisión se entiende el modo en que la calidad de las observaciones afecta a los resultados del ajuste a través de la geometría de la red y mide las características de la red en lo que respecta a la propagación de los errores aleatorios.

La fiabilidad de una red se refiere a la robustez de la misma es decir a la capacidad de resistir errores groseros indetectables en las observaciones.

Para valorar estos aspectos es posible emplear múltiples indicadores. Son frecuentes las elipses de error locales y relativas como indicadores de precisión y los números de redundancia interna y los parámetros  $\sigma_0$  para la fiabilidad.

Para determinar las precisiones de las cantidades ajustadas, se calculan los residuos después del ajuste.

Para calcular las precisiones del ajuste, se calcula el vector residuos a posteriori:

$$V = A X - L$$

Y se obtiene:

- Varianza de referencia a posteriori

$$s_0^2 = \frac{V^T P V}{r}$$

donde V es el vector de residuos, P la matriz de pesos y r es el número de grados de libertad del ajuste, la redundancia del modelo y es igual al número de ecuaciones de observación (n) menos el número de incógnitas ( $n_0$ ):

$$r = n - n_0$$

La desviación típica a posteriori comparada con la desviación típica a priori, nos indica la calidad del ajuste.

- Matriz Varianza - Covarianza

La matriz covarianza permite obtener a partir de la raíz cuadrada de su diagonal principal, las precisiones de los valores ajustados en las mismas unidades en las que se realizó el ajuste.

$$S_{xx} = s_0^2 Q_{xx} = s_0^2 N^{-1}$$

Siendo  $Q_{xx} = N^{-1} = (A^T P A)^{-1}$  (matriz cofactor)

Análisis estadísticos posteriores al ajuste se concentran en la estimación de la calidad global del ajuste mediante el Test de bondad y la detección de errores groseros de pequeña magnitud. Este análisis se basa en la realización de tests estadísticos sobre los residuos de las observaciones. Los errores de magnitudes grandes son fácilmente detectables puesto que producen grandes residuos en las observaciones de una zona concreta de la red.

Como test de bondad del ajuste se utiliza  $\chi^2$ . Es conocido como test global y sirve para determinar si la varianza de referencia a posteriori es compatible con la varianza de referencia a priori.

El test de Baarda es una técnica que combina la detección de residuos anormalmente grandes bajo un cierto criterio estadístico, la localización del error grosero y su determinación.

### Elipse de Error estándar

En las observaciones topográficas se utiliza normalmente el modelo de distribución normal bidimensional. Si el estudio de los errores se centra unicamente en las componentes de los errores aleatorios se puede tomar una distribución normal centrada en el origen (0,0).

Los parámetros principales serán los semiejes a y b y la orientación  $\theta$ .

$$\begin{aligned} a &= s_x \\ b &= s_y \end{aligned}$$

Para calcular los parámetros de la elipse de error estándar es necesario obtener primero la matriz covarianza de los parámetros, matriz que contiene las precisiones de las variables ajustadas.

$$\Sigma_{xy} = \mathbf{s}_0^2 \mathbf{Q}_{xy}$$

Y a partir de la matriz cofactor asociada al vector de parámetros, puede calcularse a partir de los residuos  $\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{N}^{-1}$  obtenemos la matriz covarianza de la siguiente forma:

$$\Sigma_{xy} = \mathbf{s}_0^2 \mathbf{N}^{-1}$$

Los parámetros de la elipse son las raíces de los valores propios de la matriz covarianza:

$$\text{Semieje mayor } a = \sqrt{\lambda_1}$$

$$\text{Semieje menor } b = \sqrt{\lambda_2}$$

Y la orientación viene dada por:

$$\text{tg } 2\theta = \frac{2s_{xy}}{s_x^2 - s_y^2}$$

Según los signos de numerador y denominador se deduce el cuadrante, y por tanto la solución.

### 5.1.2 REDES ALTIMÉTRICAS

En las observaciones de campo se han de analizar las discrepancias que haya entre los desniveles directos y recíprocos (de ida y de vuelta), para eliminar las observaciones que tengan errores groseros. La tolerancia será:

$$T = e_{\Delta h} \sqrt{2}$$

Una vez estudiados los desniveles no tolerables, se debe deducir cual es la visual que falla (directa o recíproca/ ida o vuelta) para ello se cierran triángulos en un sentido y en otro, y se deduce la visual errónea.

En el momento en que se tienen todos los desniveles tolerables se procede al ajuste altimétrico de la red, con las observaciones de desnivel entre los puntos de la red básica por el método seleccionado, calculando primero coordenadas aproximadas de todos los puntos.

En cada desnivel podremos plantear:

$$dH_2 - dH_1 + (?H_1^2)_{\text{desnivel calculado}} - ?H_1^2_{\text{desnivel observado}} = ?$$

Donde  $dH_1$  y  $dH_2$ , son las incógnitas.

$$\Delta H_A^B = H_B - H_A$$

De manera estricta se debería linealizar la ecuación ya que si la observación ha sido realizada por nivelación trigonométrica se han observado ángulos cenitales de campo que entran en la ecuación de desnivel a través de una tangente, y no se trataría por tanto de una ecuación lineal.

El ajuste puede tomar las ecuaciones como lineales ya que la variación entre la realización del ajuste de una manera u otra no supone en general una variación importante del resultado.

Con las mismas expresiones de ajuste y con la matriz de pesos inversamente proporcional al cuadrado de las incertidumbres en los desniveles, se obtienen como resultado las cotas de los vértices ajustados.

Con los diferenciales calculados anteriormente, podemos calcular las coordenadas finales ajustadas.

$$\text{Coordenadas aproximadas} + \text{variación de coordenadas} = \text{Coordenadas ajustadas}$$

Un primer estudio de la matriz de residuos indican las visuales que cuentan con un residuo que excede la tolerancia. Por tanto con los residuos se pueden desechar visuales.

En altimetría y en planimetría se efectúa un análisis estadístico obteniendo como resultado la matriz covarianza. La raíz cuadrada de la diagonal principal indican las precisiones de

nuestras variables ajustadas. Además se obtiene la desviación típica a posteriori que, comparando con la desviación típica a priori, nos indica la calidad del ajuste.

La desviación típica a priori toma valor uno ( $s_{a\ priori} \approx 1$ ) a no ser que explícitamente la hagamos tomar otro valor, mientras que la desviación típica a posteriori toma valores en función del ajuste. Si dividimos la desviación típica a priori entre la desviación típica a posteriori nos saldrá un valor que:

- si sobrepasa la unidad, nos indica que el método e instrumental utilizado ha estado por debajo de nuestras expectativas

$$s_{a\ posteriori} \geq 1$$

- mientras que si resulta por debajo de la unidad (siempre positivo) nos indica que ha estado por encima de nuestras expectativas.

$$s_{a\ posteriori} \leq 1$$

## 5.2 POR MÉTODOS GPS

Cuando se han observado los datos de campo con el sistema de posicionamiento GPS, las coordenadas que se obtienen para los vértices de la red serán geodésicas WGS84. La mayoría de las veces hay que transformarlas al sistema ED50, asociado a la proyección UTM, que es el utilizado en la cartografía oficial.

El cálculo de coordenadas se hace en postproceso. El procedimiento es el siguiente:

- Volcado de los datos GPS, del aparato fijo, de los aparatos móviles y de las estaciones de referencia.
- Creación de un proyecto nuevo.
- Importar las observaciones.
- Procesar las líneas base GPS, eliminando aquellas que no entran en tolerancia.

Se calculan las líneas bases posibles por orden de observación. Se fija un punto y se deja otro como móvil, resolviendo las ambigüedades de cada una de ellas. Se establece una tolerancia inicial. El cálculo de líneas-base se considera válido siempre y cuando aparezcan resueltas las ambigüedades de cada eje.

- Ajustar la red en el sistema WGS84.
- Cálculo de los parámetros de transformación de coordenadas del sistema global WGS84 al sistema oficial ED50.

Para el cálculo de la transformación se utilizan las coordenadas de los vértices de los que se dispone sus coordenadas en ambos sistemas (WGS84 y ED50).

Las transformaciones podrán ser:

- CLASICA 2D

Esta transformación permite determinar los parámetros que afectan únicamente a las coordenadas X,Y. Determina 4 parámetros: 2 traslaciones, 1 rotación y un factor de escala.

- CLASICA 3D

Comparando coordenadas cartesianas XYZ (referidas al centro del elipsoide WGS84) con coordenadas cartesianas locales, determina los 7 parámetros de la transformación: 3 traslaciones, 3 rotaciones, un factor de escala. Esta transformación presenta dos posibilidades diferentes: Bursa-Wolf o Molodensky-Badekas. La primera establece el centro de rotación el centro geométrico del elipsoide, la segunda lo establece en el centro de gravedad.

Se configura el cálculo del tipo de transformación deseada indicando los puntos con coordenadas en ambos sistemas. Se obtienen los parámetros y los residuos. Considerados válidos los resultados, se almacena la transformación.

- Aplicar de los parámetros de transformación al conjunto de puntos observados. Resultado del ajuste se obtiene un listado de coordenadas con sus precisiones asociadas.

## 6. RESULTADOS FINALES

Para calcular las precisiones absolutas utilizaremos la precisión de aquellos puntos sobre los que nos hemos apoyado, así como la precisión obtenida en el ajuste de observaciones.

El problema fundamental radica en que generalmente no se conocen las precisiones de los vértices de referencia. En este caso únicamente puede realizarse el estudio aproximado del error máximo existente en las coordenadas de cada punto observado y considerarla como precisión absoluta.

### Precisión de la Red Externa

Comenzamos obteniendo la precisión absoluta en el cálculo de los puntos base de la red de trabajo, es decir la precisión obtenida en las observaciones y cálculos de enlace. Estos trabajos se denominan de la red exterior.

En el cálculo de esta precisión tenemos que tener en cuenta dos valores:

- La precisión obtenida en la observación y posterior ajuste por mínimos cuadrados.
- La obtenida en el proceso de transformación.

Con estos datos, la componente cuadrática de ambos valores, nos permiten obtener la precisión origen para cada una de las coordenadas (X, Y, H) de los vértices que serán de referencia en la red interna.

$$\begin{aligned} S_{X_{origen}} &= \sqrt{S_{X_{ajustede\ enlace}}^2 + S_{X_{transf.}}^2} \\ S_{Y_{origen}} &= \sqrt{S_{Y_{ajustede\ enlace}}^2 + S_{Y_{transf.}}^2} \\ S_{H_{origen}} &= \sqrt{S_{H_{ajustede\ enlace}}^2 + S_{H_{transf.}}^2} \end{aligned}$$

Una vez calculada la precisión absoluta de los puntos fijos del trabajo.

### Precisión de la Red Interna

Para el cálculo de dicha precisión se parte de las incertidumbres estimadas para los vértices de referencia de la Red Interna, calculada anteriormente en los trabajos de enlace.

Ahora estamos en disposición de calcular las precisiones absolutas de todos los vértices, a que únicamente restaría hacer la componente cuadrática con la precisión del punto fijo para cada una de las coordenadas de los vértices de la red interna.

$$\begin{aligned} S_{X_{red\ interna}} &= \sqrt{S_{X_{ajuste\ int.}}^2 + S_{X_{origen\ red\ int.}}^2} \\ S_{Y_{red\ interna}} &= \sqrt{S_{Y_{ajuste\ int.}}^2 + S_{Y_{origen\ red\ int.}}^2} \end{aligned}$$

$$s_{H_{red\ interna}} = \sqrt{s_{H_{ajuste\ int.}}^2 + s_{H_{origen\ red\ int.}}^2}$$

La precisión relativa de la red será la que se haya obtenido en el ajuste interno.

El resultado del trabajo se presenta en las reseñas de los vértices de la red topográfica. A continuación se adjuntan ejemplos<sup>6 y 7</sup>

---

<sup>6</sup> FERNANDEZ PINEÑO, Rubén; GARCÍA RODRIGUEZ, Julio A. (2006): Levantamiento del Yacimiento Arqueológico de Reina (Toledo). PFC EUIT Topográfica. UPM, Madrid.

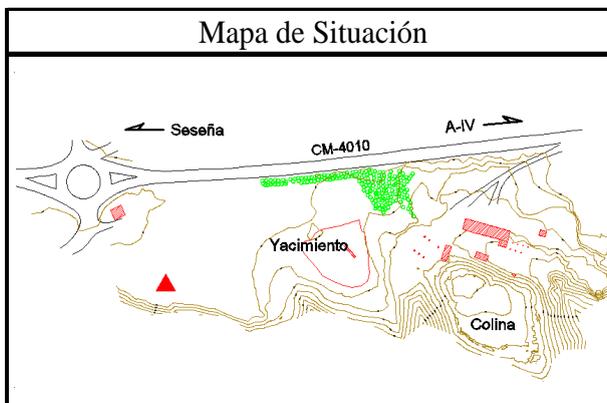
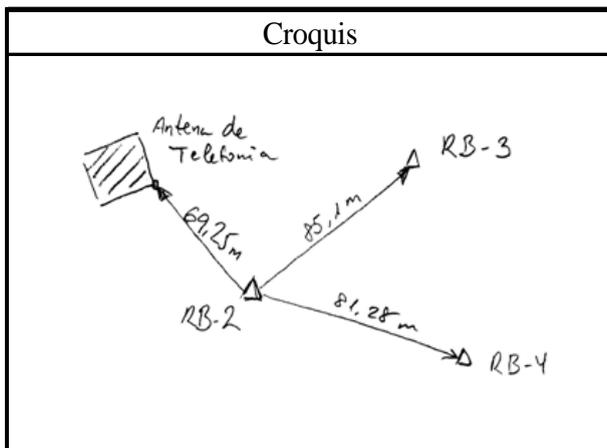
Número	RB2	Clase de Vértice	Red Básica
Nombre	Vertedero		

Coordenadas UTM	
X UTM	444320,553
Y UTM	4439719,398
Altura Ortométrica	604,904
Factor de escala	0,99964
Convergencia	-0° 25' 15.02"

Coordenadas WGS84	
Latitud	40° 06' 14,60249" N
Longitud	3° 39' 16,44846" W
Altura Elipsoidal	657,107

**Situación y Acceso**

Situado a 50 m. de la antena de telefonía proxima a la rotonda de la CM-4010, en dirección sureste.



**Observaciones**

Horizonte despejado  
 Barra de acero en base de hormigón

### Ejemplo

## Reseña

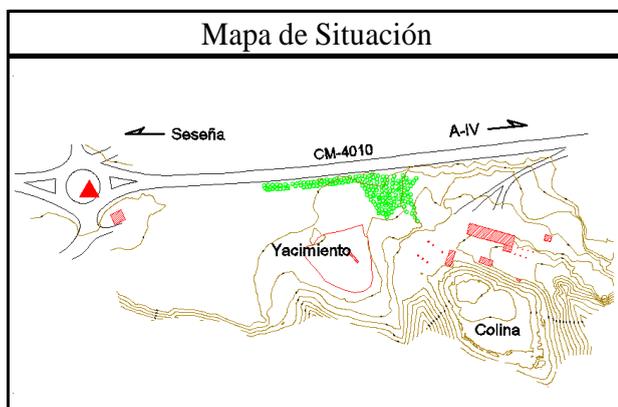
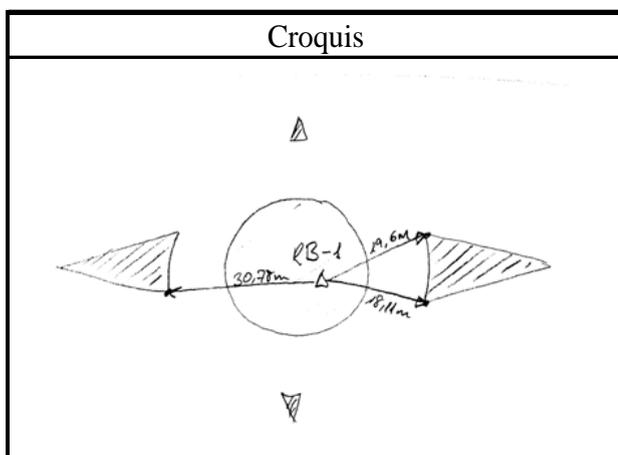
Número	RB1	Clase de Vértice	Red Básica
Nombre	Rotonda		

Coordenadas UTM	
X UTM	444254,310
Y UTM	4439806,081
Altura Ortométrica	605,834
Factor de escala	0,99964
Convergencia	-0° 25' 16,87"

Coordenadas WGS84	
Latitud	40° 06' 17,39804" N
Longitud	3° 39' 19,27326" W
Altura Elipsoidal	658,030

**Situación y Acceso**

Situado en la primera rotonda de la carretera CM-4010 sentido Seseña. Salida 36 de la A-4.



**Observaciones**

Horizonte despejado  
 Barra de acero en base de hormigón

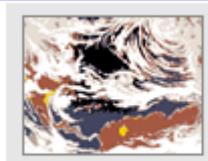
## 7. LA GEODESIA EN ESPAÑA<sup>7</sup>: DEL SISTEMA GEODÉSICO ED50 AL ETRF89

La página web del Instituto Geográfico Nacional es:

<http://www.ign.es>

En ella se dispone de datos de los vértices geodésicos y de otros servicios geodésicos:

[Otros Datos >>](#)



[Vertices Geodésicos](#)

[Calculadora Geodésica](#)

Además se proporciona información de las siguientes redes:

- Red Geodésica Nacional Convencional (ROI, DATUM ED50) consta de 11.000 vértices, monumentados en el terreno.
- Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales (REGENTE, DATUM ETRS89) formada por 1.200 estaciones ROI y NAP.
- Red de Nivelación de Alta Precisión, en fase de reobservación, con 12.000 km. de desarrollo. DATUM vertical ALICANTE (NAP). DATUM vertical AMSTERDAM (EUVN).
- Red Gravimétrica Nacional de 90 estaciones en reobservación.
- Red Mareográfica, en colaboración con otros organismos, a través del Proyecto RIMA.
- Red de estaciones GPS Permanentes, Red Fiduciaria Nacional (en formación).
- Red de Radiodifusión de Correcciones Diferenciales DGPS en colaboración con Radio Nacional de España.

Y dentro del servicio de utilidades geodésicas IGN<sup>8</sup>, la Subdirección de Geodesia y Geofísica del Instituto Geográfico Nacional pone a disposición general las siguientes aplicaciones:

<sup>7</sup>[http://www.fomento.es/MFOM/LANG\\_CASTELLANO/DIRECCIONES\\_GENERALES/INSTITUTO\\_GEOGRAFICO/Geodesia/](http://www.fomento.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/DIRECCIONES_GENERALES/INSTITUTO_GEOGRAFICO/Geodesia/)

<sup>8</sup>[http://www.ign.es/ign/es/IGN/calculadora\\_geodesica.jsp](http://www.ign.es/ign/es/IGN/calculadora_geodesica.jsp)

- **ONDULACIÓN**  
Cálculo del valor de la ondulación del geoide en cualquier punto de la Península Ibérica y Baleares.
- **GEOD-UTM**  
Transformación de coordenadas geodésicas a UTM.
- **UTM-GEOD**  
Transformación de coordenadas UTM a geodésicas.
- **ED50-ETRS89**  
Transformación de coordenadas ED50 a coordenadas ETRS89.
- **ETRS89-ED50**  
Transformación de coordenadas ETRS89 a coordenadas ED50.
- **INVERSO**  
Cálculo de la distancia geodésica, distancia UTM, y acimut geodésico directo e inverso entre dos puntos con coordenadas geodésicas.
- **PARAMETROS**  
Cálculo de los parámetros de transformación entre el sistema de coordenadas ED50 y el sistema ETRS89, a partir de las hojas del MTN50 o coordenadas UTM.
- **ENVIO**  
Permite enviar un fichero al servidor y realizar la operación deseada para posteriormente descargarlo. Debe ajustarse a un formato específico.
- **CANGEO**  
Permite el cálculo de la ondulación de las Islas Canarias.
- **ETRS89-ITRS2000**  
Este módulo permite pasar de la última realización de ITRF2000 a ETRS89.
- **HELCANA**  
Transformación de coordenadas entre los distintos sistemas establecidos en las islas Canarias. Seleccione la Isla y a continuación la Transformación deseada.

### **PROYECTOS ACTUALES DEL IGN**

#### **➤ PROYECTO EUREF 89: EL NUEVO SISTEMA DE REFERENCIA EUROPEO**

Finalizado el proyecto RETRIG con la solución ED87 Europa occidental disponía ya de una red geodésica continental de alta precisión sobre la que ajustar todos sus trabajos geodésicos. La obtención de esa solución coincidió con el auge de la aplicación de la tecnología GPS. Esta tecnología estaba poniendo de manifiesto una gran precisión en el posicionamiento relativo entre estaciones separadas por cientos de kilómetros y todo ello en un sistema geodésico de referencia geocéntrico, es decir global.

Ante la diversidad de datos existentes en Europa y la consiguiente imposibilidad de unificar de forma precisa la cartografía continental y dada la precisión de la metodología GPS, la primera actuación de la Subcomisión EUREF fue la planificación de una importante Campaña Europea GPS, conocida como EUREF89, donde participaron durante dos semanas 82 estaciones GPS. Tras la compensación realizada se obtuvo una red europea de alta precisión en el sistema WGS84, cuyas estaciones pasaron a formar parte del Marco Europeo EUREF89. La Subcomisión detectó que a escala global WGS84 no proporcionaba precisión suficiente para una red continental. Por ello recomendó la definición de un nuevo Sistema Geodésico de Referencia (ETRS89) cuya realización se logra a través del Marco ETRF89, definido por las coordenadas ITRF 1989.0 de 36 estaciones IERS ubicadas en Europa.

Por ello, se creó la subcomisión EUREF para el establecimiento del Sistema de Referencia Terrestre Europeo ETRF-89, definido por las mencionadas 36 estaciones europeas IERS y densificando mediante una serie de campañas GPS. La primera de las campañas de densificación comprendió un total de 93 estaciones GPS, observadas durante dos semanas en mayo de 1989. En esta campaña conocida como Campaña GPS EUREF 89, España contribuyó con 14 estaciones, dos de ellas (Robledo y S. Fernando) permanentes, colaborando en los trabajos de observación y cálculo el Instituto Geográfico Nacional-IGN, el servicio Geográfico del Ejército-SGE y el Real Observatorio de la Armada-ROA.

En este Marco *European Terrestrial Reference Frame* (ETRF89) se acepta que la precisión de cada posición es del orden de +15 mm. Para el cálculo de las latitudes y longitudes ETRF se adoptó el elipsoide GRS80 (Geodetic Reference System 1980).

El conjunto de las observaciones de todas las estaciones europeas, fue realizado por un equipo de geodestas europeos, dirigidos por el Prof. W. Gurtner de la universidad de Berna. Los trabajos de este equipo fueron presentados en marzo de 1992 proporcionando las coordenadas de todas las estaciones EUREF 89.

Desde esta fecha las estaciones EUREF han pasado a definir el ETRF 89, considerándose como puntos fiduciales, en los que deben apoyarse los trabajos GPS sobre las redes geodésicas nacionales. Así se está actuando en España, donde mediante el proyecto REGENTE, todo el territorio nacional quedó cubierto por una densa red de estaciones GPS a finales de 1997.

### ➤ **PROYECTO IBERIA95<sup>9</sup>**

Como resultado de algunos proyectos GPS de precisión efectuados en España se pudo comprobar que la exactitud de las coordenadas EUREF89 no era tan elevada como requería una red geodésica, por lo que se pensó en el establecimiento de una red 3D de alta precisión que cubriese todo el territorio peninsular. El IGN y el *Instituto Português de Cartografia e Cadastro (IPCC)* planificaron el Proyecto IBERIA95, consistente en una red de 39 estaciones (27 estaciones españolas y 12 estaciones portuguesas) homogéneamente repartidas por la Península, donde se efectuasen observaciones simultáneas GPS.

El objetivo primordial de IBERIA95 es la densificación en la Península Ibérica del *European Terrestrial Referente Frame 1989* (ETRF89) y la mejora de precisiones de la campaña EUREF89 en España y Portugal, estableciéndose así una red geodésica

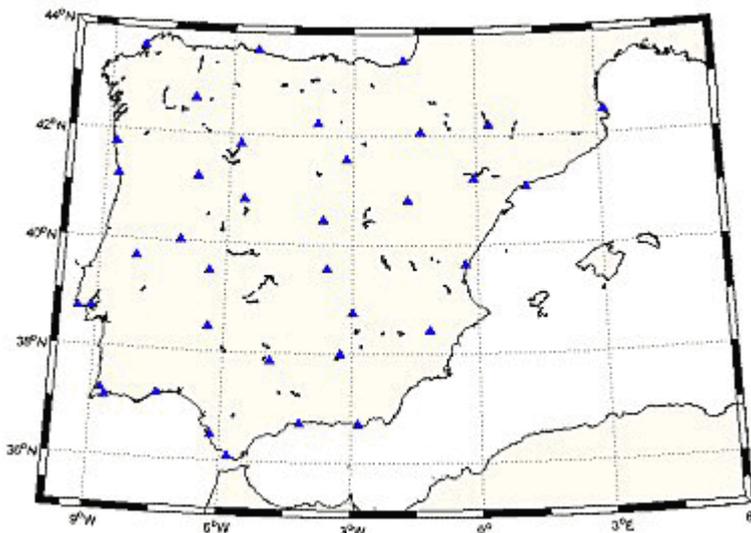
---

<sup>9</sup>[http://www.fomento.es/MFOM/LANG\\_CASTELLANO/DIRECCIONES\\_GENERALES/INSTITUTO\\_GEOGRAFICO/Geodesia/red\\_geodesicas/iberia.htm](http://www.fomento.es/MFOM/LANG_CASTELLANO/DIRECCIONES_GENERALES/INSTITUTO_GEOGRAFICO/Geodesia/red_geodesicas/iberia.htm)

tridimensional de alta precisión, alguna de cuyas estaciones coincide con la campaña EUREF89.

La elección de los vértices geodésicos integrantes de Iberia 95 obedeció a diversos criterios, entre las que merecen ser destacados:

- Distancia entre estaciones adyacentes compatible con el número escogido de vértices.
- Monumentación estable y perdurable .
- Eliminación de los errores de centrado mediante un dispositivo de centrado forzado.
- Ubicación de los vértices en lugares que permitan su nivelación geométrica o geodésica de alta precisión.
- En las proximidades de las estaciones no deberán de existir posible interferencias de radiofrecuencia ni obstáculos generadores de posibles multitrayectorias.
- Las estaciones deberán ser fácilmente accesibles.



La observación se realizó simultáneamente durante cinco días consecutivos, con una sesión diaria única de 12 horas, intervalo de registro de 30 segundos, máscara de elevación de 15 grados y receptores TRIMBLE 4000SSE.

El cálculo ha sido realizado utilizando el programa Bernese GPS software, resultando las coordenadas finales en el sistema de referencia ITRF96 para la época 1995.4 y en el sistema de referencia ETRS89. Tras la compensación los resultados obtenidos se consiguieron errores medios en coordenadas que no superan 0,01 m.

Mediante la red IBERIA95 se pretende establecer una red de vértices geodésicos con coordenadas referidas al sistema WGS84, es decir el empleado por los receptores GPS.

El Sistema de Referencia Geodésico asociado es ETRS89. En esta red se deben apoyar todos los proyectos nacionales incluido el proyecto REGENTE.

### ➤ PROYECTO REGENTE

Con el fin participar en el proyecto de obtener una cartografía europea unificada, el IGN decidió establecer el Proyecto REGENTE (Red Geodésica Nacional por Técnicas Espaciales) consistente en una densa red GPS de alta precisión con estaciones coincidentes con vértices ROI y clavos de las líneas de nivelación de alta precisión (NAP). La densidad media quedó fijada en una estación por cada 300 km<sup>2</sup>, o un punto por cada hoja del MTN 1:50.000.

Las finalidades perseguidas con el establecimiento de esta red REGENTE son:

- Implantación en todo el territorio español de una red geodésica tridimensional de orden cero, con una elevada precisión, similar a la alcanzada por las estaciones fiduciales ETRF -89, es decir de orden centimétrico.
- Determinación de parámetros precisos de transformación (posiblemente a nivel provincial) entre ETRF -89 y ED50.
- Facilitar a los usuarios de GPS la fusión de sus observaciones espaciales con las convencionales y proporcionar una densa red desde la que puedan obtenerse precisas correcciones DGPS para la navegación.

Tras un reconocimiento en campo se comprobó que los vértices cumplían las condiciones necesarias para una buena observación. Una vez seleccionado el vértice de manera definitiva, se procedía a la instalación, en la cara superior del pilar de observación del vértice, de un dispositivo de centrado forzado estándar para la basada soporte de la antena del receptor, de forma que se eliminase prácticamente el error de estacionamiento de la antena en las sucesivas sesiones de observación, y, en su caso, en los diferentes bloques en que se ocupase el vértice en la misma o en futuras campañas.

Los trabajos de campo comenzaron en 1994 con la observación simultánea de 9 vértices, con 9 receptores de doble frecuencia. Las observaciones se repitieron en horarios diferentes y en períodos de 3 horas, con un mínimo de dos sesiones distintas para cada estación. El método utilizado en la observación de REGENTE fue el estático.

La observación de cada bloque se realiza en dos sesiones diferentes, de tres horas de duración cada una, imponiendo que una de las dos sesiones sea matutina y la otra vespertina, para obtener, en cada una, geometrías de constelación distintas que garanticen una repetibilidad de los datos real. Una semana normal de cinco días incluye la observación de tres bloques completos, con un total de seis sesiones de observación. Al principio, al final y durante la sesión se toman datos de presión y temperatura, así como información sobre la constelación en vista e incidencias producidas con el fin de ayudar en el cálculo posterior. La programación de las observaciones de los receptores se inyecta semanalmente y, también semanalmente, se recogen los datos observados para su preanálisis y la documentación aneja a la observación.

En cada bloque, al menos un vértice está unido a la red de Nivelación de Alta Precisión mediante observación en dos clavos NAP, o clavos auxiliares unidos a

éstos con un ramal de nivelación de alta precisión si no son estacionables los NAP. La distancia entre los dos clavos y el vértice no debía ser mayor de cuatro kilómetros. Esta observación de nivelación se efectuó simultáneamente con la observación de cada bloque, colocándose dos receptores monofrecuencia en cada una de las señales NAP o auxiliares.

Hasta pasadas dos semanas después de la observación, no se disponía de la solución definitiva combinada de Efemérides de Precisión, y durante este intervalo de tiempo se realizó un análisis previo de la calidad de la observación. El cálculo de los vectores se realizó con el programa **GPSurvey de Trimble** utilizando las Efemérides de Precisión obtenidas como solución combinada del IGS.

Se definen proyectos de cálculo coincidentes con cada bloque de campo observado. Estos proyectos se calcularon en diferentes estaciones de trabajo, conectadas a un servidor. Las estaciones tomaban los datos brutos del servidor, generan los respectivos proyectos y devolvían los resultados a la red. El resultado final que cada estación dejaba en la red era un archivo backup completo de todo el proyecto así como dos archivos sumario, uno de los cuales recogía todo el informe del cálculo, y el otro todos los archivos generados, uno por cada vector calculado, en que aparecía el nombre del archivo, las estaciones enlazadas, la distancia geométrica, parámetros estadísticos de precisión y las alturas de antena. Este último sumario es el que se utilizaba para seleccionar los vectores que entraban en la posterior fase de compensación. Por último se generaba un archivo en el que se encontraban compactados todos los archivos de los vectores dispuestos para compensación.

El proceso de compensación, utilizando el programa **GeoLab de Geosurv Inc.**, comenzó con una compensación previa por bloques como red libre, sin ningún tipo de constreñimientos. En ella se analizaban la concordancia de las soluciones aportadas por las distintas sesiones y el cierre de los vectores, y, finalmente, se les asignaba su ponderación correspondiente.

Una vez depurada la observación en red libre, se procedió al ajuste conjunto de todos los bloques que componían una campaña, manteniendo fijas las coordenadas de los vértices de IBERIA95 y de los vértices ya calculados en campañas anteriores. Al finalizar el proceso, se guardaban en la base de datos las componentes de los vectores con su matriz de varianza-covarianza, el peso que se les había asignado y las coordenadas calculadas. Asimismo se actualizaban en la base de datos aquellos que figuran en la reseña de cada vértice.

Respecto a esta Red Geodésica Nacional Mediante Técnicas Espaciales el Boletín Informativo del IGN, Enero-Marzo 2002. nº 9, indicaba:

*El IGN ha establecido en España una red geodésica tridimensional nueva, precisa, uniforme y homogénea, enlazada al sistema europeo, base de los trabajos geodésicos, topográficos y cartográficos de las próximas décadas.*

*En Octubre de 2001, han finalizado las campañas del proyecto con la observación GPS de los 120 vértices del Bloque Norte que restaban. La red REGENTE está constituida por 1.108 vértices de la Red de Orden Inferior (ROI) y 196 clavos de Nivelación de Alta Precisión (NAP) homogéneamente distribuidos por todo el territorio español, en los cuales se han determinado las coordenadas WGS84 con alta precisión.*

*Se termina así un proyecto iniciado en 1994 y cuyas observaciones se han venido realizando desde entonces, salvo durante 1997. Una vez finalizada la observación total de la red, se han emprendido los trabajos de análisis, cálculo y compensación en bloque de la misma, apoyada en la de orden superior IBERIA95, con objeto de obtener las coordenadas definitivas para cada punto REGENTE en el Sistema de Referencia Terrestre Europeo ETRS89.*

*El cálculo y la compensación se llevan a cabo con todo rigor utilizando Efemérides Precisas del Internacional GPS Service (IGS), y obteniendo coordenadas con una exactitud centimétrica y una precisión del orden de  $10^{-1}$  ppm (100 veces superior a la de una red de primer orden convencional). Dado que más de un 80 % de los puntos de la red pertenecen simultáneamente a ROI, por ser vértices geodésicos, en todos esos puntos se dispondrá del doble juego de coordenadas geodésicas ED50 (sistema oficial actual) y ETRS89, lo que hará posible la obtención de parámetros de transformación de coordenadas entre ambos sistemas con una alta fiabilidad para toda España.*

*Asimismo un 20% de los puntos REGENTE disponen de un doble juego de altitudes (ortométrica y elipsoidales WGS84) de alta precisión, lo que hace de la red una herramienta de excepcional importancia para el incremento en la precisión de la carta del geoide.*

*De esta forma quedarán perfectamente cumplidas las recomendaciones europeas referentes a parámetros de transformación, a la adopción de ETRF como marco geodésico de referencia europeo y al establecimiento de la cartografía oficial en ETRS89 y proyección UTM.*

*España dispone de una red geodésica tridimensional, enlazada con el sistema europeo, de una alta precisión, uniforme y homogénea, válida para servir de apoyo a todos los trabajos y proyectos que se basen en la moderna técnica GPS.*

## ➤ **RED ESPAÑOLA DE ESTACIONES DE REFERENCIA GPS:**

### **UNA NUEVA RED PARA MEDIDAS DE ALTA PRECISIÓN EN GEODESIA, GEODINÁMICA Y CARTOGRAFÍA<sup>10</sup>**

El IGN por medio del Área de Geodesia, está llevando a cabo desde 1998 el establecimiento de una Red española de Estaciones de Referencia GPS (ERGPS), distribuidas uniformemente por el territorio español, que permite obtener coordenadas con precisión milimétrica, así como los campos de velocidades en un Sistema de Referencia global (ITRFxx) y que sirven de soporte al resto de las redes geodésicas y a la realización de trabajos técnicos y científicos. Dichas estaciones se están integrando en la Red de Estaciones Permanentes de EUREF (EUropean REference Frame) formada por más de 100 estaciones con receptores de doble frecuencia.

Los objetivos fundamentales son:

- La obtención de coordenadas muy precisas y campo de velocidades en todos los puntos de la red.
- Proporcionar a los usuarios de GPS los datos para trabajos topográficos, cartográficos, geodésicos y de posicionamiento que requieran un modo de trabajo en GPS diferencial de gran precisión.

<sup>10</sup> Boletín Informativo del IGN, Julio-Septiembre 2000. nº 3

- Formar parte de la Red Europea EUREF de estaciones permanentes, y en el mantenimiento de su marco de referencia (European Reference Frame).
- La contribución a la definición de los nuevos Sistemas de referencia Globales (ITRFxx)
- Suministrar datos continuos en investigaciones geodinámicas, climática, ionosféricas, troposféricas, nivel medio del mar, etc.

El IGN instaló en marzo de 1998 la primera RGPS en el mareógrafo del puerto de Alicante.

Los datos obtenidos por las ERGPS (archivos 24 h a 30 s) se almacenan diariamente y son transmitidos a los Servicios Centrales del IGN en Madrid de manera automática, utilizando la red Internet, o mediante línea telefónica. El IGN procesa los datos brutos, estudia su calidad, los guarda en un banco de datos y los analiza, produciendo soluciones diarias y semanales de todas las estaciones. Actualmente los datos son enviados diariamente de forma automática, vía Internet, al Centro regional de Datos EUREF en Frankfurt para su disposición pública, y están disponibles de forma gratuita a través de la página web de la Dirección General del IGN.

### ➤ **EL PROYECTO EUROGAUGE**

Los registros procedentes de diversos mareógrafos instalados en Europa desde el siglo pasado ponen de manifiesto una aparente elevación del "nivel medio del mar" cifrable entre 20 y 30 cm en los últimos 100 años, que resulta correlativo del incremento 0,5°C en el promedio global de la temperatura durante la última centuria. Sin embargo no se observa el mismo fenómeno en todos los mareógrafos. En particular los mareógrafos de Escandinavia acusan un descenso del nivel medio del mar de unos 40 cm/siglo, lo que podría atribuirse a la elevación terrestre siguiente a la desglaciación.

El Proyecto EUROGAUGE en el que han participado Francia, Gran Bretaña, Portugal y España, pretendió comprobar el potencial de las técnicas de medida de la actual geodesia espacial, GPS, para controlar con alta precisión los posibles movimientos de los mareógrafos con relación a un marco de referencia geocéntrico. Se utilizaron 16 estaciones mareográficas (3 españolas: Alicante, la Coruña y Vigo) y 11 estaciones fiduciarias pertenecientes al EIRS. Se adoptó un marco de referencia geodésico.

La posterior contrastación entre las soluciones permite afirmar que la exactitud de las coordenadas obtenidas para las estaciones se encuentran entre 5 y 10 mm en planimetría y entre 5 y 15 mm en altimetría, con lo que el proyecto EUROGAUGE ha demostrado su capacidad para detectar cambios en el nivel medio del mar causados por movimientos verticales terrestres en los mareógrafos.

### ➤ **EL PROYECTO EUVN97**

El Proyecto GPS EUVN97, consistente en el establecimiento de una Red Vertical Europea (Europea Vertical Network) ha sido preparado por la Subcomisión EUREF de la IAG. Las observaciones GPS proporcionarán un conjunto único de coordenadas tridimensionales de manera que la comparación de las altitudes elipsoidales con las altitudes físicas (normales u ortométricas) generará información sobre el geoide, que podrá ser utilizada en la determinación del Geoide Europeo.

La campaña EUVN es una combinación de la Red de referencia Europa EUREF con las redes de nivelación existentes es decir REUN para Europa Occidental y UPLN para

Europa Oriental, y con los correspondientes mareógrafos localizados a lo largo de las costas del Mar del Norte, mar Báltico, mar Mediterráneo y Mar Negro. El resultado será el establecimiento de un Marco de referencia vertical Europeo Único.

La campaña ha utilizado 191 estaciones (62 EUREF y 13 estaciones permanentes nacionales, 51 REUN y UPLN y 61 mareógrafos) en una acción conjunta de casi todos los países europeos. España ha contribuido con 12 estaciones. El período de observación fue desde el 21 al 29 de Mayo de 1997. Simultáneamente con la observación GPS se ha realizado la nivelación ortométrica de cada estación español mediante una nivelación geométrica de alta precisión acompañada de observación gravimétrica.

Es pretensión del IGN convertir algunas de las estaciones utilizadas (Alicante, Santander, La Coruña y Almería) en estaciones permanentes GPS con misión fundamentalmente geodinámica generadora de correcciones diferenciales que puedan ponerse a disposición de todos los usuarios.

## 8. BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

**BERNÉ VALERO, Jose Luis; ANQUELA JULIÁN, Ana Belen; GARCIA ASENJO VILLAMAYOR, Luis; MARTÍN FURONES, Angel (1998):** *Proyectos Topográficos*. Universidad Politécnica de Valencia. 142 pags.

**BRINKER, Russell C.; MINNICK, Roy (1987):** *The Surveying Handbook*. Van Nostrand Reinhold Company. New York. 1270 págs.

**BUCKNER, R.B. (1983):** *Surveying measurements and their Analysis*. Third Printing, May 1991. Landmark Enterprises, Rancho Cordova, California. USA. 276 páginas.

**BURNSIDE, C.D. (1982):** *Electromagnetic Distance Measurement*. Editorial Granada. London.

**CARPIO HERNANDEZ, Juan Pedro (2001):** *Redes Topométricas*. Biblioteca Técnica Universitaria. Ediciones BELLISCO, Madrid.

**CATURLA SANCHEZ DE NEIRA, José Luis (1988):** *Sistema de Posicionamiento Global (G.P.S.)*. M.O.P.U., Instituto Geográfico Nacional. Madrid. 91 páginas.

**CHUECA PAZOS, M. (1983):** *Topografía*. Tomo I. Editorial Dossat, S.A. Madrid, 1983. **Tomo I.- Topografía Clásica**. 634 páginas.

**CHUECA PAZOS, Manuel; HERRÁEZ BOQUERA, José; BERNÉ VALERO, José Luis (1994):** *Redes Topográficas y Locales*. Universidad Politécnica de Valencia. 435 págs.

**CHUECA PAZOS, Manuel; HERRÁEZ BOQUERA, José; BERNÉ VALERO, José Luis (1995):** *Ampliación de Redes Topográficas y Locales. Cuestiones de Diseño*. Universidad Politécnica de Valencia. 243 págs.

**DOMÍNGUEZ GARCÍA-TEJERO, F. (1989):** *Topografía general y aplicada*. 10ª Edición. Editorial Dossat, S.A. Madrid. 823 páginas.

**FERNANDEZ PINEÑO, Rubén; GARCÍA RODRIGUEZ, Julio A. (2006):** *Levantamiento del Yacimiento Arqueológico de Reina (Toledo)*. PFC EUIT Topográfica. UPM, Madrid.

**FERRER TORIO, Rafael; PIÑA PATON, Benjamin (1991b):** *Metodologías Topográficas*. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Santander. 302 páginas.

**GONZALEZ-MATESANZ, F.J.; QUIRÓS, R.; SANCHEZ SOBRINO, J.A.; DALDA, A. (2005):** *El cambio de Datum ED50-ETRS89: Métodos y resultados*. Topografía y Cartografía. Volumen XXII, Nº 130 Septiembre-October, pp 3-10. Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía. Madrid.

**KAHMEN, Heribert (1988):** *Vermessungskunde I. Fehlerlehre, Vermessungen und Berechnungen für grossmassstäbige Karten und Pläne, Nivellieren*. Walter de Gruyter. Berlin. New York. 270 páginas.

**KAHMEN, Heribert (1986):** *Vermessungskunde II. Winkel- und Streckenmessgeräte, Polygonierung, Triangulation und Trilateration, Satellitengeodäsie.* Walter de Gruyter. Berlin. New York. 320 páginas.

**GROSSMANN, Walter und KAHMEN, Heribert (1988):** *Vermessungskunde III. Trigonometrische und barometrische Höhenmessung, Tachymetrie und Ingenieurgeodäsie.* Walter de Gruyter. Berlin. New York. 247 páginas.

**MANZANARES, Antonio y OLIVA, Daniel (2006):** Diseño e implantación de una red básica mediante técnicas GPS y levantamiento a escala 1:500 de la explotación minera "La Frisga" del yacimiento arqueológico de Las Médulas (León). PFC EUIT Topográfica. UPM, Madrid.

**NUÑEZ-GARCIA DEL POZO, Alfonso; VALBUENA DURAN, Jose Luis; VELASCO GOMEZ, Jesús (1992):** *G.P.S. La Nueva Era de la Topografía.* Ediciones de las Ciencias Sociales, S.A., Madrid. 236 páginas.

**RUIZ MORALES, Mario (1991):** *Manual de Geodesia y Topografía.* Primera Edición. Proyecto Sur de Ediciones, S.A.L. Granada. 246 páginas.

**SAN JOSE, Jose Juan; GARCIA, Josefina; LOPEZ, Mariló (2000):** Introducción a las Ciencias que estudian la Geometría de la Superficie Terrestre. BELLISCO, Ediciones Técnicas y Científicas. Madrid.

**SEEGER, Hermann (1998):** *EUREF: El nuevo Datum de referencia europeo y su relación con el WGS-84.* Topografía y Cartografía. Volumen XV, Nº 85 Marzo-Abril, pp 62-71. Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía. Madrid.

**SEVILLA, Miguel J. (2006):** *IBERGEO\_2006: Nuevo Geoide centimétrico de la Península.* Topografía y Cartografía. Volumen XXIII, Nº 135 Julio-Agosto, pp 3-10. Colegio Oficial de Ingenieros Técnicos en Topografía. Madrid.

**VALBUENA DURAN, Jose Luis; SORIANO SANZ, María Luisa (1995):** "La desorientación del prisma como fuente de error en la medición de distancias y ángulos". *Topografía y Cartografía*. Vol. XII.- Nº 67. Marzo - Abril. Págs. 6-15

Centro Nacional de Información Geográfica (CNIG) <http://www.cnig.es>

Instituto Geográfico Nacional <http://www.geo.ign.es>

Buscador de vértices geodésicos (Cartesia)

<http://www.cartesia.org/articulo43.html>