

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελίδα 260 σχολικού βιβλίου

A2. Θεωρία σελίδα 280 σχολικού βιβλίου

A3. αΣ, βΣ, γΛ, δΛ, εΣ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|z - 3i| + |\overline{z - 3i}| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|z - 3i| + |z - 3i| = 2 \Leftrightarrow$$

$$2|z - 3i| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|z - 3i| = 1$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών z κινούνται σε κύκλο C με κέντρο $K(0, 3)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

B2.

$$|z - 3i| = 1 \Leftrightarrow$$

$$|z - 3i|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(z - 3i) \cdot (\overline{z - 3i}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(z - 3i) \cdot (z + 3i) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$$

B3.

$$w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i} \xrightarrow{B2} w = z - 3i + \bar{z} + 3i \Leftrightarrow w = z + \bar{z} \Leftrightarrow$$

$$w = 2\operatorname{Re}(z)$$

Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ τότε $w = 2x$.

Λόγω του C και της γραφικής παράστασης αυτού προκύπτει ότι:

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ και } 2 \leq y \leq 4.$$

$$\text{Άρα } -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq w \leq 2$$

B4.

$$|z - w| = |x + yi - 2x| = |-x + yi| = \sqrt{(-x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

ΘΕΜΑ Γ**Γ1.**

$$e^x (f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x) \Leftrightarrow$$

$$(e^x - 1)f'(x) + (e^x - x)f''(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$((e^x - x)f'(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow$$

$$(e^x - x)f'(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Για $x = 0$ η (1) δίνει:

$$(e^0 - 0)f'(0) = e^0 + c \Leftrightarrow c = -1 \text{ και έτσι η (1) γίνεται:}$$

$$(e^x - x)f'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Ορίζω τη συνάρτηση:

$$g(x) = e^x - x, x \in \mathbb{R}.$$

Η g είναι μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση ως διαφορά εκθετικής και πολυωνυμικής συνάρτησης με παράγωγο:

$$g'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ο πίνακας μεταβολών προσήμου της g' και μονοτονίας της g είναι ο:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$			

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστη τιμή την $g(0) = 1$

άρα $g(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, επιστρέφοντας τη σχέση (2) μπορώ να διαιρέσω με το $e^x - x$:

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = [\ln(e^x - x)]' \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \ln(e^x - x) + c_2, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Για $x = 0$ η (3) δίνει:

$f(0) = \ln(e^0 - 0) + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$ και έτσι η **(3)** γίνεται:
 $f(x) = \ln(e^x - x), x \in \mathbb{R}.$

Γ2.

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}, x \in \mathbb{R}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Επιπλέον, αφού θέσαμε $g(x) = e^x - x$ και δείξαμε πως $g(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο της f' εξαρτάται μόνο από τον αριθμητή.

Ο πίνακας μεταβολών προσήμου της f' και μονοτονίας της f είναι ο:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 0$.

Γ3.

$$f''(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{(e^x - 1)'(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - x)'}{(e^x - x)^2} \Leftrightarrow$$

$$f''(x) = \frac{e^x(2 - x) - 1}{(e^x - x)^2}$$

Για να αποδείξουμε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής θα πρέπει να δείξουμε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις ή ότι η εξίσωση $e^x(2 - x) - 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.

Θέτω $h(x) = e^x(2 - x) - 1, x \in \mathbb{R}.$

$$h'(x) = (e^x)'(2 - x) + e^x(2 - x)' \Leftrightarrow$$

$$h'(x) = e^x(1 - x), x \in \mathbb{R}.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+		-
$h(x)$			

Θέτω $\Delta_1 = (-\infty, 0]$ και $\Delta_2 = [0, +\infty)$.

Τότε:

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x (2-x) - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x (2-x)) - 1 =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2-x}{e^{-x}} \right) - 1 \xrightarrow{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1-1}{-e^{-x}} \right) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x (2-x) - 1) = -\infty$$

$$\rightarrow h(1) = e - 1.$$

$$\text{Άρα } h(\Delta_1) = (-1, e - 1] \text{ και } h(\Delta_2) = (-\infty, e - 1].$$

Άρα αφού η h συνεχής και $0 \in h(\Delta_1)$ η $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_1 όπου λόγω μονοτονίας είναι και μοναδική και αφού η h συνεχής και $0 \in h(\Delta_2)$ η $h(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο Δ_2 όπου λόγω μονοτονίας είναι και μοναδική.

Άρα η $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Γ4.

Ορίζω τη συνάρτηση $K(x) = \ln(e^x - x) - \sin x$.

Η K είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά της τριγωνομετρικής με τη

σύνθεση της διαφοράς της εκθετικής με την πολυωνυμική, με τη λογαριθμική.

$$K(0) = -1$$

$$K\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) - \sin \frac{\pi}{2} = \ln\left(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\right) \geq 1 \text{ (από τη μελέτη της } g \text{ στο } \Gamma 1)$$

$$\text{Άρα } K(0) K\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

Άρα η K ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$ δηλαδή το x_0 μία λύση της $K(x)$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επιπλέον επειδή $K'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} + \eta\mu x > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, αφού $\frac{e^x - 1}{e^x - x} > 0$

για $x > 0$ από το Γ2 και $\eta\mu x > 0$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, η K είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα η λύση είναι και μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\frac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \Leftrightarrow 1 - f(x) = e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 - e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

Θέτω $u = x + t$. Τότε $du = dt$. Για $t = 0 \Rightarrow u = x$, $t = -x \Rightarrow u = 0$. Οπότε:

$$f(x) = 1 - e^{2x} \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{g(u)} du \Leftrightarrow f(x) = 1 + e^{2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{e^{2x} g(u)} du \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du \quad (1)$$

Η $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση ως πηλίκο της σύνθεσης της

πολυωνυμικής $2u$ με την εκθετική, που είναι συνεχής συνάρτηση και της

συνεχούς g . Άρα η $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση οπότε και η

f είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά της σταθερής με την παραγωγίσιμη

$$\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)} du. \text{ Παράγωγος αυτής: } f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \quad (2)$$

$$\frac{1 - g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt \Leftrightarrow 1 - g(x) = e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 1 - e^{2x} \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

Θέτω $u = x + t$. Τότε $du = dt$. Για $t = 0 \Rightarrow u = x$, $t = -x \Rightarrow u = 0$. Οπότε:

$$g(x) = 1 - e^{2x} \int_x^0 \frac{e^{2(u-x)}}{f(u)} du \Leftrightarrow g(x) = 1 + e^{2x} \int_0^x \frac{e^{2u}}{e^{2x} f(u)} du \Leftrightarrow$$

$$g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du \quad (3)$$

Η $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι μία συνεχής συνάρτηση ως πηλίκο της σύνθεσης της πολυωνυμικής $2u$ με την εκθετική, που είναι συνεχής συνάρτηση και της συνεχούς f . Άρα η $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση οπότε και η f

είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά της σταθερής με την παραγωγίσιμη

$$\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)} du. \text{ Παράγωγος αυτής: } g'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \quad (4)$$

Από τις (2) και (4) και επιλύνοντας ως προς e^{2x} και έχοντας υπόψη ότι τα ίσα προς ίσα είναι και μεταξύ των ίσα προκύπτει ότι:

$$f'(x)g(x) = f(x)g'(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{αφού } g(x) > 0 \text{ διαιρώ με } g^2(x) > 0:$$

$$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = (c)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c, c \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Για $x = 0$ στις (1) και (3) έχω $f(1) = g(1) = 1$ άρα η (5) δίνει $c = 1$ άρα

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x), x \in \mathbb{R}.$$

Δ2.

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{g(x)} \text{ και } f(x) = g(x), x \in \mathbb{R} \text{ τότε:}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = 2e^{2x} \Leftrightarrow [f^2(x)]' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$f^2(x) = e^{2x} + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχω } f^2(0) = e^0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

$$\text{άρα } f^2(x) = e^{2x}, x \in \mathbb{R}, f(x) = \pm e^x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Τέλος, αφού } f(x) > 0, x \in \mathbb{R} \text{ προκύπτει ότι } f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Δ3.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \underline{\underline{L'H}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$$

Δ4.

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt.$$

$$F'(x) = f(x^2) = e^{x^2} > 0 \text{ άρα } F \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}.$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_0^1 |F(x)| dx.$$

Για $x < 1$ και F αύξουσα έχω $F(x) < F(1) \Leftrightarrow F(x) < 0$. Άρα:

$$E(\Omega) = - \int_0^1 F(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = - \int_0^1 (x)' F(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = - \left[xF(x) \right]_0^1 + \int_0^1 xF'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = -F(1) + \int_0^1 xf(x^2) dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 xe^{x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} (e - 1)$$

Επιμέλεια Απαντήσεων:
Γκαραβέλλας Σπύρος
Ντολματζή Γεωργία