



دانشگاه علامه طباطبائی

دانشکده اقتصاد

گروه آمار، ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد ریاضیات مالی

موضوع

**مدل نوسان پذیری تصادفی هستون در قیمت گذاری اختیارات و
شبیه سازی**

پژوهشگر

زهره رحیمی شکوه

استاد راهنما

دکتر رضا پورطاهری

استاد مشاور

دکتر عبدالساده نیسی

دی ماه ۸۹



سپاس خدای بزرگ را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر رضا پورطاهری، که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌های ارزنده و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود تشکر نمایم.

از جناب آقای دکتر عبدالساده نیسی استاد مشاورم که تذکراتشان باعث غنای پایان‌نامه شد سپاسگزارم.

در پایان، از خانواده‌ام که با حمایت‌های خویش، همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول: کلیات

۱-۱- مقدمه.....	۱
۲-۱- بیان مسئله.....	۲
۱-۲-۱- بررسی پارامتر نوسان‌پذیری.....	۳
۳-۱- تاریخچه.....	۶
۴-۱- مفاهیم و اصطلاحات پایه‌ای.....	۷

فصل دوم: معرفی مدل هستون

۱-۲- مقدمه.....	۱۵
۲-۲- معرفی مدل.....	۱۶
۳-۲- بررسی پارامترهای μ و σ در مدل هستون.....	۲۳
۴-۲- بررسی نوسان‌پذیری لب‌خند و چوله در مدل.....	۲۴

فصل سوم: قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی

۱-۳- مقدمه.....	۲۷
۲-۳- معادله دیفرانسیل جزئی مدل هستون.....	۲۸
۳-۳- قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی.....	۳۲
۱-۳-۳- تابع مشخصه مدل نوسان‌پذیری هستون.....	۳۳

فصل چهارم: قیمت‌گذاری اختیارات وابسته به مسیر

۱-۴- مقدمه.....	۳۸
۲-۴- شبیه‌سازی مسیرها.....	۳۹

۳۹	۱.۲.۴- روش اوایلر.....
۴۱	۲.۲.۴- روش کال- جکل.....
۴۱	۳.۲.۴- روش برودیا- کایا.....
۴۳	۳.۴- روش های گسسته سازی برای فرایند V
۴۴	۱.۳.۴- روش گاوسی بریده.....
۵۱	۲.۳.۴- روش نمایی درجه دوم.....
۵۷	۴.۴- روش گسسته سازی برای فرایند S
۵۹	۵.۴- تصحیح مارتینگلی روش گسسته سازی.....
۶۱	۱.۵.۴- روش گاوسی بریده.....
۶۳	۲.۵.۴- روش نمایی درجه دوم.....
۶۵	۶.۴- بررسی همگرایی روش ها.....

فصل پنجم: مثال کاربردی با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو

۶۹	۱.۵- مقدمه.....
۷۰	۲.۵- فرایند شبیه سازی.....
۷۲	۳.۵- نتایج شبیه سازی.....
۷۲	۱.۳.۵- نتایج حالت اول.....
۷۵	۲.۳.۵- نتایج حالت دوم و سوم.....
۷۶	۳.۳.۵- محاسبات زمانی.....
۷۸	پیوست.....
۸۳	مرجع ها.....

فهرست شکل ها

عنوان	صفحه
شکل ۱.۱- نوسان پذیری خوشه ای	۲
شکل ۲.۱- نوسان پذیری لبخند و چوله	۵
شکل ۱.۲- شبیه سازی فرایند واریانس	۱۷
شکل ۲.۲- تابع توزیع تجمعی V	۲۲
شکل ۳.۲- تاثیر پارامتر ρ روی چولگی تابع چگالی	۲۳
شکل ۴.۲- تاثیر پارامتر ε روی کشیدگی تابع چگالی	۲۴
شکل ۵.۲- نوسان پذیری ضمنی قیمت های اختیار تحت مدل هستون	۲۶
شکل ۱.۴- تابع توزیع تجمعی V در مقابل توزیع گاوسی بریده و لگ نرمال	۴۴
شکل ۲.۴- نمودار توابع $f_{\mu}(\nu)$ و $f_{\sigma}(\nu)$	۵۰
شکل ۳.۴- تابع توزیع تجمعی V در مقابل توزیع گاوسی بریده و نمایی درجه دوم	۵۶
شکل ۱.۵- مقدار خطا در نوسان پذیری ضمنی بلک- شولز	۷۴

فهرست جدول‌ها

صفحه	عنوان
۷۱.....	جدول ۱.۵- حالت‌های مختلف برای آزمون‌های عددی
۷۳.....	جدول ۲.۵- اریبی برآورد شده e در حالت اول
۷۵.....	جدول ۳.۵- اریبی برآورد شده e در حالت دوم
۷۶.....	جدول ۴.۵- اریبی برآورد شده e در حالت سوم
۷۷.....	جدول ۵.۵- میانگین زمان محاسبه شده نسبت به روش اوایلر

چکیده

در سال ۱۹۷۰، فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون مدل بلک-شولز را مطرح کردند. این مدل توانست دنیای قیمت گذاری مشتقات مالی را که دارایی پایه‌ی آن‌ها سهام بود، متحول کند.

پس از آن این امکان به وجود آمد که مشتقات مالی را با استفاده از یک جواب بسته قیمت گذاری کنیم. مدل مذکور شامل محدودیت‌هایی مانند ثابت بودن نوسان پذیری و توزیع لگ نرمال بازده بود. این امر موجب شده که امروزه این مدل، تنها به عنوان پایه‌ای برای بیان سایر مدل‌ها مورد استفاده قرار گیرد. پس از انجام مطالعات تجربی و بر اساس مشاهده رفتار پارامتر نوسان پذیری، مدل‌های نوسان پذیری تصادفی مطرح شدند که حالت توسعه یافته مدل بلک-شولز می‌باشند. در این مدل‌ها نوسان پذیری از یک معادله دیفرانسیل تصادفی تبعیت می‌کند. از میان مدل‌های نوسان پذیری تصادفی، مدل هستون بنا بر ویژگی‌هایی پرکاربردترین این مدل‌ها می‌باشد.

موضوع مطالعه این پایان‌نامه مدل هستون است و ضمن بیان و بررسی خواص آن، به مطالعه قیمت گذاری اختیارات تحت این مدل می‌پردازیم. با توجه به تحقیقات اندکی که در مورد استفاده از روش‌های شبیه سازی مونت کارلو در مدل هستون صورت گرفته است، چند الگوریتم جدید برای گسسته سازی فرایندهای زمان پیوسته مدل هستون و شبیه سازی آن‌ها بیان می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی:

مدل نوسان پذیری تصادفی هستون، نوسان پذیری لبخند و چوله، گسسته سازی معادلات دیفرانسیل تصادفی و شبیه سازی.

فصل اول

کلیات

۱.۱ مقدمه

در اوایل دهه ۱۹۷۰، فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون گام بزرگی در قیمت گذاری اختیارات برداشتند. نتیجه کار آنها ارائه مدلی بود که به "مدل بلک-شولز" معروف شد. اگر چه این مدل تحول بزرگی در قیمت گذاری اختیارات ایجاد کرد اما دارای یک سری محدودیت بود که مهمترین آنها ثابت بودن نوسان پذیری است. محققین خواه ناخواه درصدد رفع این محدودیت ها برآمدند و مدل های مختلفی ارائه نمودند. مدل های نوسان پذیری تصادفی از جمله این مدل ها است و مدل هستون در این میان با توجه به امتیازاتی که دارد محبوب ترین آنها است.

این پایان نامه شامل پنج فصل است که فصل اول آن به کلیاتی از پژوهش اشاره دارد. فصل دوم شامل معرفی مدل هستون و بعضی از خواص تحلیلی آن است. در فصل سوم به قیمت گذاری اختیارات اروپایی با استفاده از توابع مشخصه می پردازیم. فصل چهارم به بیان روش های گسسته سازی به منظور قیمت گذاری اختیارات وابسته به مسیر می پردازد و در فصل پنجم به بیان مثال های کاربردی به منظور قیمت گذاری اختیارات با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو و بر اساس روش های بیان شده در فصل چهارم و مقایسه این روش ها می پردازیم.

۲.۱ بیان مسئله

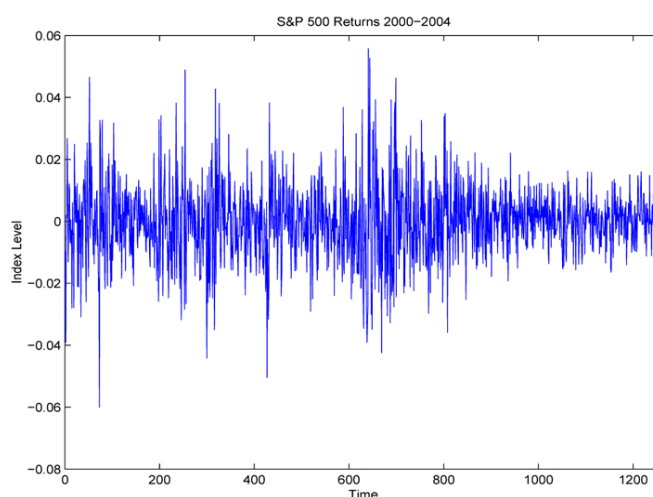
یکی از فرضیات اصلی در مدل قیمت گذاری بلک-شولز، ثابت بودن نوسان پذیری یا میزان عدم اطمینان نسبت به بازده دارایی می باشد، به علاوه در این مدل قیمت دارایی از یک فرایند براونی هندسی به صورت زیر تبعیت می کند:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t); \quad (1.1)$$

قیمت دارایی بر اساس مدل بلک-شولز دارای توزیع لگ نرمال است، یا به عبارت دیگر توزیع لگاریتم قیمت دارایی نرمال است.

$$\ln S(T) \sim N \left[\ln S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]; \quad (2.1)$$

اما می توان دلایلی برای رد دو فرض مدل بلک-شولز بیان شده در بالا، یعنی ثابت بودن نوسان پذیری و نرمال بودن توزیع لگاریتم قیمت دارایی بیان نمود. در شکل زیر می بینیم که تغییرات قیمت در روزهای پایانی در بعضی دوره ها، کوچک و در دوره های دیگر بزرگ است. این پدیده نوسان پذیری خوشه ای^۱ نامیده می شود و بیان می کند که نوسان پذیری خود همبسته است و نشان دهنده رفتار میانگین بازگشتی نوسان پذیری می باشد.



شکل ۱.۱- نوسان پذیری خوشه ای

¹ VOLATILITY CLUSTERING

همچنین مطالعات تجربی نشان داده است که توزیع لگاریتم قیمت دارایی نرمال نیست و در مقایسه با توزیع نرمال قله مرکزی بلندتر و دم‌های چاق‌تری دارد ([۱۵]). بنابراین مدلی که بتواند محدودیت‌های مدل بلک-شولز به ویژه ثابت بودن نوسان‌پذیری را رفع کند، می‌تواند برای مطالعه رفتار قیمت دارایی مناسب باشد.

در این فصل به اختصار پارامتر نوسان‌پذیری و فرض‌های مربوط به آن را بررسی می‌کنیم. همچنین کاستی‌ها و توانمندی‌های آن‌ها را مطالعه می‌کنیم.

۱.۲.۱ بررسی پارامتر نوسان‌پذیری

فرمول بلک-شولز پنج عامل دارد که عبارتند از: قیمت دارایی S ، قیمت توافقی K ، نرخ بهره بدون ریسک r ، مدت زمان باقی مانده تا سررسید τ و نوسان‌پذیری σ . نوسان‌پذیری تنها پارامتری است که قابل مشاهده و اندازه‌گیری نیست اما می‌توان آن را با استفاده از سوابق تاریخی تغییر در قیمت دارایی پایه محاسبه کرد. این روش گذشته‌گراست (نوسان‌پذیری تاریخی)^۲، در حالی که هدف بررسی رفتار نوسان‌پذیری در آینده است. بدین منظور با استفاده از قیمت اختیار مشاهده شده در بازار میزان نوسان‌پذیری را استنتاج می‌کنیم. فرض کنید $C(\sigma)$ تابع قیمت اختیار به‌دست آمده از مدل بلک-شولز و C قیمت اختیار مشاهده شده در بازار باشد. نوسان‌پذیری به‌دست آمده از رابطه زیر را نوسان‌پذیری ضمنی^۳ می‌نامیم و آن را به عنوان مقدار آتی نوسان‌پذیری، همسو با نگاه بازار در نظر می‌گیریم.

$$C(\sigma) = C; \quad (۳.۱)$$

اگر نوسان‌پذیری ضمنی را به ازای قیمت‌های مختلف یک اختیار در سررسیدهای متفاوت و با قیمت توافقی یکسان به‌دست آوریم مقادیر متفاوتی برای نوسان‌پذیری ضمنی به‌دست می‌آید که این متناقض با فرض ثابت بودن σ در فرمول بلک-شولز است. برای رفع این نارسایی مرتون^۴ در سال ۱۹۷۳ در فرمول بلک-شولز نوسان‌پذیری را تابعی تعیینی از زمان، $\sigma(t)$ ، در نظر گرفت. از طرف دیگر بررسی‌ها نشان می‌دهد که نمودار نوسان‌پذیری ضمنی در دستگاه مختصاتی با محور افقی قیمت توافقی و محور عمودی نوسان‌پذیری ضمنی، به ازای یک تاریخ سررسید معین و ثابت، متغیر می‌باشد.

^۲ HISTORICAL VOLATILITY

^۳ IMPLIED VOLATILITY

^۴ MERTON

به عنوان مثال، فرض کنید اختیارات خرید یا فروش سهام با سررسید یکسان و قیمت‌های توافقی متفاوت داریم. با استفاده از مدل بلک-شولز نوسان‌پذیری ضمنی را به دست آورده، در مقابل قیمت‌های توافقی رسم می‌کنیم. انتظار داریم که نوسان‌پذیری ضمنی طبق فرضیه ثابت بودن نوسان‌پذیری در مدل بلک-شولز ثابت باشد، اگر چه این در عمل محتمل نیست و در بیشتر بازارها، نوسان‌پذیری ضمنی U شکل می‌باشد که به این پدیده نوسان‌پذیری لبخند^۵ گفته می‌شود. در این حالت اختیارات سودده^۶ و زیان‌ده^۷ نوسان‌پذیری ضمنی بالاتری نسبت به اختیارات در نقطه بی‌تفاوتی^۸ دارند. به عبارت دیگر فرمول بلک-شولز اختیارات سودده و زیان‌ده را کمتر از قیمت واقعی ارزش‌گذاری می‌کند، البته بعد از سقوط بازار سهام در سال ۱۹۸۷ نمودار لبخند بیشتر به یک نمودار نامتقارن تبدیل شد که به آن نوسان‌پذیری چوله^۹ گفته می‌شود. در این حالت اختیارات خرید سودده ($S(0) > K$) نوسان‌پذیری ضمنی بالاتری نسبت به اختیارات فروش سودده ($S(0) < K$) دارند. همچنین اختیارات فروش زیان‌ده نوسان‌پذیری ضمنی بالاتری نسبت به اختیارات خرید زیان‌ده دارند. علت این امر تجربه معامله‌گران پس از واقعه سقوط بازار سهام است که به منظور پوشش ریسک، عرضه و تقاضا آن‌ها برای خرید و فروش اختیارات متفاوت شد.

با نشان دادن تغییرات نوسان‌پذیری در مقابل قیمت توافقی و تاریخ سررسید در یک دستگاه مختصات سه بعدی، می‌توانیم یک رویه نوسان‌پذیری تولید کنیم که یک بعد را قیمت توافقی، بعد دیگر را تاریخ سررسید و بعد سوم را نیز نوسان‌پذیری در نظر می‌گیریم. شکل ۲.۱ نوسان‌پذیری لبخند را در مقابل نوسان‌پذیری چوله نشان می‌دهد.

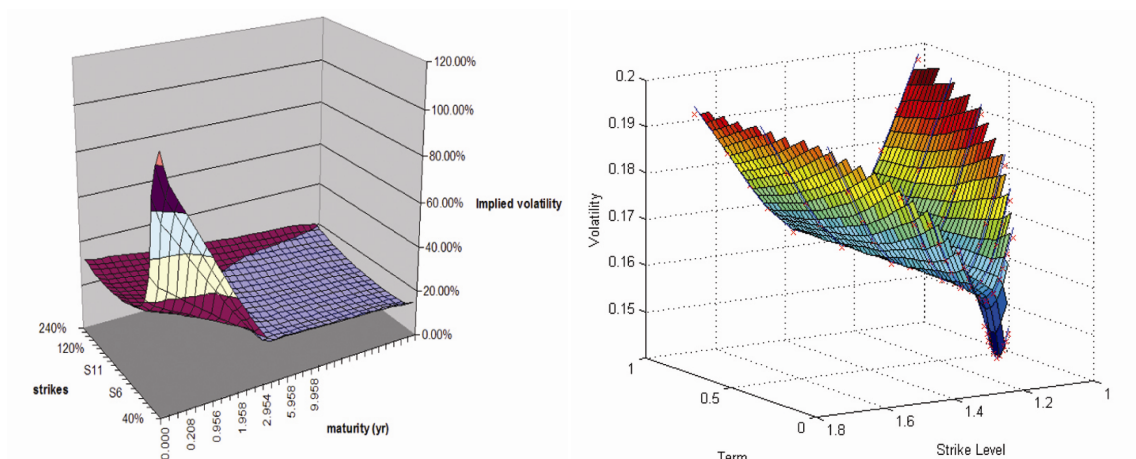
⁵ SMILE VOLATILITY

⁶ IN THE MONEY

⁷ OUT OF THE MONEY

⁸ AT THE MONEY

⁹ SKEW



شکل ۲.۱- سمت راست نوسان پذیری لبخند و شکل سمت چپ نوسان پذیری چوله

در شکل فوق، نوسان پذیری لبخند به ازای $S(0) = 1.4$ و در محدوده $[1; 1.8]$ برای تغییرات قیمت توافقی K رسم شده است. مشاهده می شود به ازای $K > S(0)$ و $K < S(0)$ مقدار نوسان پذیری ضمنی بیشتر از حالت $K = S(0)$ می باشد.

با توجه به مطالعات تجربی بیان شده، برای اصلاح فرض ثابت بودن نوسان پذیری، نوسان پذیری تابعی تعیینی از زمان و قیمت دارایی $\sigma(t, S(t))$ در نظر گرفته می شود ([۱] و [۱۵] و [۲۱]).

یک مدل مشهور در ارتباط با نوسان پذیری تعیینی مدل CEV^{۱۰} است که توسط کاکس و راس [۸] بیان شد. این مدل فرایند قیمت سهام را به صورت زیر بیان می کند:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S^\alpha(t)dW(t); \quad (۴.۱)$$

که در آن α مقدار ثابت مثبتی است. بنابراین نوسان پذیری قیمت سهام $\sigma S^{\alpha-1}(t)$ می باشد. ملاحظه می کنیم که به ازای $\alpha = 1$ این مدل به مدل بلک- شولز تبدیل می شود، هنگامی که $\alpha < 1$ ، با کاهش قیمت سهام، نوسان پذیری افزایش می یابد و به ازای $\alpha > 1$ با کاهش قیمت سهام، نوسان پذیری نیز کاهش می یابد.

¹⁰ CONSTANT ELASTICITY OF VARIANCE

با پذیرش نوسان‌پذیری تعیینی به جای نوع ثابت آن، مدل‌های دیگری نیز مطرح شد که از جمله می‌توان مدل درمن و کانی^{۱۱} در سال ۱۹۹۴ را نام برد که مدل نوسان‌پذیری موضعی^{۱۲} نیز نامیده شده است.

در مدل نوسان‌پذیری تعیینی، نوسان‌پذیری تابع قیمت سهام و زمان نیست اما مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که این رابطه در طی زمان تغییر می‌کند. به عنوان مثال اگر نوسان‌پذیری را تابعی از قیمت سهام و زمان این هفته مدل‌بندی کنیم، هفته بعد این تابع کاملاً متفاوت خواهد بود. از این رو بیان نوسان‌پذیری به صورت تعیینی کافی نیست.

همچنین محققان نوسان‌پذیری را به عنوان متغیری تصادفی مدل‌بندی کردند. در چنین شرایطی به مدلی نیاز است که گویای تصادفی بودن نوسان‌پذیری باشد و به تعداد کمی پارامتر بستگی داشته باشد. برای این منظور مدل‌هایی که شامل حرکت‌های براونی هستند، گزینه‌های مناسبی به نظر می‌رسند. مدل نوسان‌پذیری تصادفی هستون دارای دو عامل است که یکی از آن‌ها دینامیک قیمت سهام و عامل دیگر دینامیک نوسان‌پذیری را بیان می‌کند.

۳.۱ تاریخچه

فرمول قیمت‌گذاری بلک-شولز ۱۹۷۳ با فرض یک فرایند انتشار لگ نرمال برای سهام و نوسان‌پذیری ثابت در آن، مبنای قیمت‌گذاری اختیارات قرار گرفت. با توجه به مشاهدات تجربی یعنی عدم ثابت بودن نوسان‌پذیری نسبت به زمان، مرتون در سال ۱۹۷۳ فرمول بلک-شولز را با این فرض که نوسان‌پذیری وابسته به زمان است، در نظر گرفت. اما همچنان این مدل با حقایق تجربی سازگار نبود تا اینکه مباحث دیگری از جمله نوسان‌پذیری تعیینی توسط درمن و کانی و رابین استین در سال ۱۹۹۴ مطرح شد که در آن نوسان‌پذیری به عنوان تابعی از قیمت دارایی و زمان $\sigma(t, S(t))$ در نظر گرفته شد ولی این مدل‌ها هم قادر به توضیح اثر لبخند نبودند، در کنار آن‌ها، مدل‌های نوسان‌پذیری تصادفی نیز به منظور قیمت‌گذاری اختیارات مطرح بودند. پیشگامان این راه‌ها و وایت [۱۶]، استین و استین [۳۳] و هستون [۱۵] بودند که این مدل‌ها را گسترش دادند. اخیراً نیز مطالعات جدیدی در راستای قیمت‌گذاری اختیارات براساس گسسته‌سازی فرایند زمان پیوسته هستون، بر طبق شبیه‌سازی

¹¹DERMAN AND KANI

¹²LOCAL VOLATILITY

مونت کارلو انجام شده است که از این میان می‌توان به کال و جکل [۲۰]، برودیا و کایا [۶] و اندرسن [۲] اشاره کرد.

۴.۱ مفاهیم و اصطلاحات پایه‌ای

در این بخش یک سری مفاهیم و اصطلاحات پایه‌ای را که در سراسر پایان‌نامه مورد نیازند بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ نوسان‌پذیری

معیاری است که به وسیله‌ی آن می‌توان درصد تغییرات قیمت دارایی پایه را محاسبه کرد. بنابراین به جای جهت تغییرات قیمت، میزان تغییرات قیمت در محاسبه نوسان‌پذیری مهم است. به بیان دیگر اینکه قیمت افزایش یا کاهش می‌یابد تاثیری در محاسبه نوسان‌پذیری ندارد زیرا مبنای محاسبه نوسان‌پذیری صرفاً مقدار تغییرات قیمت است. بنابراین نوسان‌پذیری قیمت یک سهم در واقع عدم اطمینان نسبت به بازده آن سهم را اندازه‌گیری می‌کند.

تعریف ۲.۱ اختیارات سودده، زیان‌ده و در نقطه بی‌تفاوتی

اختیار خرید در زمان t ، زیان‌ده یا OTM^{۱۳} (اختیار فروش سودده یا ITM^{۱۴}) نامیده می‌شود هرگاه قیمت دارایی پایه در آن زمان کمتر از قیمت توافقی باشد، یعنی $S(t) < K$. همچنین در زمان t ، اختیار خرید سودده یا ITM (اختیار فروش زیان‌ده یا OTM) نامیده می‌شود هرگاه قیمت دارایی پایه در آن زمان بیشتر از قیمت توافقی باشد، یعنی $S(t) > K$.

و اگر قیمت دارایی پایه در زمان t برابر با قیمت توافقی باشد، یعنی $S(t) = K$ در این حالت، اصطلاحاً می‌گویند اختیار خرید یا فروش در نقطه بی‌تفاوتی یا ATM^{۱۵} است.

¹³ OUT OF THE MONEY

¹⁴ IN THE MONEY

¹⁵ AT THE MONEY

تعریف ۳.۱ اختیارات وابسته به مسیر^{۱۶}

اختیاراتی که عایدی آن‌ها به مسیر قیمت دارایی پایه در طول عمر اختیار یا بخشی از آن بستگی داشته باشد، اختیارات وابسته به مسیر می‌نامند. عایدی اختیارات اروپایی و آمریکایی تنها وابسته به قیمت دارایی پایه در زمان سررسید اختیار است و به کل عمر اختیار بستگی ندارد. اما عایدی اختیارات آسیایی تابعی از میانگین حسابی قیمت دارایی پایه روی کل عمر اختیار است و لذا این اختیارات وابسته به مسیرند. برای جزئیات بیشتر به [۱۷] و [۲۳] مراجعه کنید.

تعریف ۴.۱ الگوریتمی برای شبیه‌سازی بردارهای تصادفی با توزیع $N(\mu, \Sigma)$

می‌خواهیم نمونه‌هایی مستقل از توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین μ و ماتریس واریانس کواریانس Σ تولید کنیم. برای این منظور الگوریتم زیر را طراحی می‌کنیم.

۱- ابتدا ماتریس واریانس کواریانس را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم (تجزیه چولسکی):

$$\Sigma = AA^T$$

که A ماتریسی پایین مثلثی است.

۲- بردار $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ را به وسیله تولید نمونه‌های مستقل $Z_i \sim N(0,1)$ شبیه‌سازی می‌کنیم.

۳- در این صورت $\mu + AZ$ نمونه‌ای از توزیع $N(\mu, \Sigma)$ است.

یادآور می‌شویم که از این بردارها در فصل چهارم استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۵.۱ توزیع خی دو غیر مرکزی

تابع چگالی توزیع خی دو غیر مرکزی با k درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی λ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{2} e^{-(x+\lambda)/2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k/4-1/2} I_{k/2-1}(\sqrt{\lambda x}); \quad x \in [0, +\infty), k > 0, \lambda > 0.$$

که $I_\alpha(y)$ تابع بسل اصلاح شده نوع اول است.

$$I_a(y) = \left(\frac{y}{2}\right)^a \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y^2}{4}\right)^j}{j! \Gamma(a+j+1)}.$$

امید ریاضی این توزیع $k + \lambda$ و واریانس آن $2(k + 2\lambda)$ است. همچنین تابع مولد گشتاور این توزیع به صورت زیر می باشد:

$$M(t; k, \lambda) = \frac{\exp\left(\frac{\lambda t}{1-2t}\right)}{(1-2t)^{k/2}}.$$

برای جزئیات بیشتر به [۳۰] مراجعه کنید.

تعریف ۶.۱ شرط فلر^{۱۷}

فرض کنید فرایند تصادفی X در معادله دیفرانسیل تصادفی زیر صدق کند:

$$dX(t) = \beta(X(t), t)dt + C(X(t), t)dW(t);$$

اگر

$$\lim_{X \rightarrow 0} \left(\beta(X) - \frac{1}{2} \frac{\partial C^2}{\partial X}(X) \right) \geq 0$$

آن گاه فرایند X هرگز به صفر نمی رسد. همچنین با این شرط داریم:

$$P(t \in [0, T]: X(t) > 0) = 1.$$

به عبارت دیگر مثبت بودن فرایند روی بازه $[0, T]$ (با توجه به اینکه $X(0) > 0$) تضمین می شود و در

صورتی که $\lim_{X \rightarrow 0} \left(\beta(X) - \frac{1}{2} \frac{\partial C^2}{\partial X}(X) \right) < 0$ با احتمال مثبت فرایند X به صفر می رسد.

¹⁷ FELLER

برهان: به ([۱۱]) رجوع شود.

قضیه ۱.۱ فایمن کاتس^{۱۸}

قضیه فایمن کاتس در واقع ارتباطی بین فرایند تصادفی و معادله دیفرانسیل جزئی برقرار می‌کند و می‌توان با استفاده از این قضیه، معادله دیفرانسیل جزئی را به صورت تعیینی حل کرد.

فرض کنید فرایند تصادفی X در معادله دیفرانسیل تصادفی زیر صدق کند:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t);$$

که در آن μ و σ توابعی معلوم هستند. همچنین معادله دیفرانسیل جزئی

$$\frac{1}{2}\sigma^2(X(t), t)\frac{\partial^2 p}{\partial X^2} + \mu(X(t), t)\frac{\partial p}{\partial X} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0; \quad (۷.۱)$$

با شرط نهایی زیر را در نظر بگیرید،

$$p(x, T) = \psi(x);$$

که ψ تابعی معلوم، T یک پارامتر و p تابع مجهول است. قضیه فایمن کاتس بیان می‌کند که جواب معادله دیفرانسیل جزئی (۷.۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$p(x, t) = E(\psi(X(T)) | X(t) = x). \quad (۸.۱)$$

نکته: تابع ψ را در تعریف ۷.۱ به صورت $\psi(x) = e^{iux}$ در نظر می‌گیریم، بنابراین $p(x, t)$ تابع مشخصه توزیع شرطی $X(T)$ به شرط $X(t)$ خواهد بود.

تعریف ۷.۱ معادلات ریکاتی

معادله دیفرانسیل معمولی

$$y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2;$$

را که $q_0(x) \neq 0$ و $q_2(x) \neq 0$ ، یک معادله دیفرانسیل ریکاتی می‌نامیم.

¹⁸FEYNMAN-KAC

تعریف ۸.۱ فرایندهای انتشار آفین^{۱۹} و تابع مشخصه آنها

فرایند انتشار زیر را در نظر بگیرید:

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t); \quad 0 \leq t \leq T$$

که $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ یک فرایند تصادفی n بعدی می‌باشد، به عبارتی هر یک از مولفه‌های $X_1, X_2, \dots, X_n$ فرایندی تصادفی است، $\mu \in C^1(R^n, R^n)$ ، $\sigma \in C^2(R^n, R^{n \times n})$ و W نیز حرکت براونی استاندارد در R^n می‌باشد.

هدف تعیین تابع مشخصه

$$\phi_{X(t)}(u) = E(e^{iuX(t)} | X(t)); \quad (5.1)$$

تحت شرایطی معین روی μ و σ می‌باشد.

یک فرایند انتشار را آفین نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

$$\mu(X) = K_0 + \sum_{i=1}^n K_i X_i; \quad K_0 \in R^n, K_i \in R^n$$

$$(\sigma(X) \cdot \sigma^T(X)) = H_0 + \sum_{i=1}^n H_i X_i; \quad H_0 \in R^{n \times n}, H_i \in R^{n \times n}.$$

می‌توان نتیجه گرفت که تابع مشخصه یک فرایند انتشار آفین جواب یک دستگاه از معادلات ریکاتی است و به صورت زیر بیان می‌شود ([۱۸]):

$$\phi_{X(t)}(u) = \exp(A(\tau, u) + B(\tau, u)^T X(t)); \quad (6.1)$$

که $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ، $B \in C^1(R, C^n)$ ، $A \in C^1(R, C)$ و $\tau = T - t$ ، به علاوه شرایط مرزی زیر برقرار می‌باشد:

$$\phi_{X(t)}(u) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \exp(iuX(T));$$

¹⁹ AFFINE